M. SALOHIDDINOV

INTEGRAL TENGLAMALAR

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=f(x)$$

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

M. SALOHIDDINOV

INTEGRAL TENGLAMALAR

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

TOSHKENT
«YANGIYUL POLIGRAPH SERVICE»
2007

22.161.2
S12

Salohiddinov, Maxmud.
Integral tenglamalar: Oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun darslik./ M. Salohiddinov; Mas’ul muharrir A.Oripov. O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi.– T.: Yangiyul poligraph service, 2007. – 256 b.

Darslikda integral tenglamalarning klassik nazariyasi bir o‘lchovli Fredgolm tenglamalari uchun uzluksiz funksiyalar sinfida bayon qilingan. Bolterraning integral tenglamalariga alohida bob ajratilgan.

Ko‘p tatbiqlar uchun muhim ahamiyat kasb etgan kuchsiz maxsuslikka ega bo‘lgan integral tenglamalar ko‘p o‘lchovli fazoda batafsil tadqiq qilingan. Darslik Oliy o‘quv yurtlari talabalari hamda magistrlar uchun mo‘ljallangan.

BBK 22.161.2ya73

Taqrizchilar: akademik ***Sh. Alimov,***
fizika-matemetika fanlari doktorlari
B. Islomov, O. Xolmuhamedov.

Mas’ul muharrir — fizika-matemetika fanlari doktori ***A. Oripov***

ISBN 978-9943-309-27-2

SO‘ZBOSHI

Nazariy va amaliy jihatdan muhim ahamiyatga ega bo‘lgan fizika, mexanika, texnika va boshqa sohalar masalalari integral tenglamalar usuli bilan yechiladi. Ayniqsa, matematik fizikada tekshiriladigan masalalarni yechishda integral tenglamalarning ahamiyati kattadir.

Bu kitob muallifning Mirzo Ulug‘bek nomidagi O‘zbekiston Milliy universitetining mexanika-matematika fakultetida o‘qigan ma’ruzalarining kengaytirilgan bayonidan iboratdir.

Kitobni yozishda muallif integral tenglamalar bo‘yicha rus tilidagi va rus tiliga tarjima qilingan boshqa adabiyotlardan keng foydalangan.

O‘quv qo‘llanmada integral tenglamalarning klassik nazariyasi bir o‘lchovli Fredgolm tenglamalari uchun uzluksiz funksiyalar sinfida bayon qilingan. So‘ngra, bu nazariya ko‘p o‘lchovli integral tenglamalar, integral tenglamalar sistemasi va kvadrati bilan jamlanuvchi yadroli tenglamalar uchun ham o‘rinli bo‘lishi ko‘rsatib o‘tilgan. Bolterraning integral tenglamalari alohida bobda bayon qilingan.

Ko‘p tatbiqlar uchun muhim ahamiyat kasb etgan kuchsiz maxsuslikka ega bo‘lgan integral tenglamalar ko‘p o‘lchovli fazoda batafsil tadqiq qilingan. To‘la uzluksiz operatorlarni o‘z ichiga olgan tenglamalarga, ya’ni Riss—Shauder tenglamalariga alohida bob bag‘ishlangan. To‘la uzluksiz operatorni kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar sinfida aynigan operator va normasi bo‘yicha yetarli kichik operatorning yig‘indisi sifatida tasvirlash mumkin bo‘lgani uchun Fredgolm nazariyasi Riss—Shauder tenglamalari uchun deyarli avtomatik ravishda ko‘chiriladi. Bundan kvadrati bilan jamlanuvchi yadroli

Fredgolm tenglamalari va kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan tenglamalar xususiy holda kelib chiqadi.

Simmetrik yadroli integral tenglamalarga maxsus bob bag'ishlangan bo'lib, bunda xos sonlarning mavjudligi va xos sonlar, xos funksiyalarning bir qator xossalari bayon qilingan.

Kitobning so'nggi qismi singulyar integral tenglamalarga bag'ishlangan. Bu tenglamalar ko'p sonli va samarali tatbiqqa ega bo'lgani uchun, ayniqsa buziladigan va aralash tipdagi xususiy hosilali tenglamalarga keladigan masalalarning ko'p qismi singulyar integral tenglamalarga keltirib yechilgani sababli bu tenglamalar nazariyasining asosini qisqacha bayon qilishni lozim deb topdik.

Qo'lyozmani ko'rib chiqib, o'z fikr-mulohazalarini bildirgan akademik Sh. Alimov, fizika-matematika fanlari doktorlari B. Islomov, O. Xolmuxamedov, kitobning ilmiy muharriri fizika-matematika fanlari doktori A. O'ripov hamda qo'lyozmani nashrga tayyorlashda katta yordam bergan fizika-matematika fanlari nomzodlari O. Zikirov va Z. Sobirovlarga minnatdorchilik bildiramiz.

I BOB. INTEGRAL TENGLAMALARNING TASNIFI VA INTEGRAL TENGLAMALARGA KELADIGAN TIPIK MASALALAR

1- §. Asosiy tushunchalar. Integral tenglamalarning turlari

Integral tenglamalar deb, odatda, nom'lum funksiya integral ishorasi ostida bo'lgan tenglamalarga aytiladi.

Biz bu kitobda noma'lum funksiya chiziqli ishtirok etgan tenglamalarni, ya'ni ushbu

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{1}$$

ko'rinishdagi chiziqli integral tenglamalarni tekshiramiz. Bu yerda $\varphi(x)$ — noma'lum funksiya, $K(x, y)$ va $f(x)$ funksyalar mos ravishda $\{a \leq x \leq b\}$ kvadratda va $a \leq x \leq b$ oraliqda aniqlangan funksiyalar (a, b — o'zgarmas sonlar). Bu kvadrat va oraliqni asosiy kvadrat va asosiy oraliq deb yuritiladi.

$f(x)$ funksiya (1) integral tenglamaning *ozod hadi*, $K(x, y)$ uning *yadrosi*, λ sonli ko'paytuvchi tenglamaning *parametri* deyiladi.

Qayd qilib o'tamizki, (1) bitta integral tenglama bo'lmay, balki sonli λ parametrga bog'liq bo'lgan integral tenglamalar oilasidir. Agar $\lambda K(x, y)$ ko'paytmani $K_1(x, y)$ bilan belgilab, $K_1(x, y)$ ni yangi yadro deb qarasak, u holda tenglamaning parametri 1 ga teng bo'lib qoladi. Lekin, λ parametrni kiritish integral tenglamalarni o'rganishda foydali bo'lishiga keyinchalik biz ishonch hosil qilamiz. (1) integral tenglama *ikkinchi tur chiziqli integral tenglama* yoki bunday tenglamalarni birinchi bo'lib o'rgangan matematik nomi bilan *Fredgolm*[1] *integral tenglamasi* deyiladi.

Agar $f(x)\equiv 0$ bo'lsa, ya'ni

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=0 \tag{2}$$

tenglama (1) ga mos bo'lgan *bir jinsli integral tenglama* deyiladi.

Bir jinsli

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(y,x)\psi(y)dy=0 \tag{3}$$

[1] Fredgolm Erik Ivar (1866—1927) — mashhur shved matematigi.

tenglama (2) bir jinsli tenglamaga *qo'shma integral tenglama* deyiladi. *Fredgolmning birinchi tur tenglamasi* deb,

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{4}$$

ko'rinishdagi integral tenglamaga aytiladi.

Fredgolm tenglamalarida yadro va ozod had mos ravishda asosiy kvadrat va asosiy oraliqda uzluksiz, yoki ushbu

$$\int_a^b\int_a^b [K(x, y)]^2 dx\, dy < +\infty, \tag{5}$$

$$\int_a^b [f(x)]^2 dx < +\infty \tag{6}$$

shartlarni qanoatlantiradi, deb hisoblanadi. Ravshanki, $K(x, y)$ yadro $\{(x,y) : a \le x \le b,\ a \le x \le b\}$ kvadratda uzluksiz bo'lsa, (5) shart bajariladi. (5) shartni qanoatlantiruvchi yadrolar *Fredgolm yadrosi* deb ataladi.

Agar ikkinchi tur Fredgolm integral tenglamasining umumiy yechimi $\Phi(x)$ *mavjud bo'lsa, u*

$$\Phi(x) = \varphi^0(x) + \varphi(x)$$

ko'rinishga ega bo'lishini tekshirib ko'rish qiyin emas, bunda $j^0(x)$ *(2) tenglamaning umumiy yechimi,* $j(x)$ *esa (1) tenglamaning xususiy yechimidir.*

Haqiqatan ham, agar $\Phi(x)$ va $\varphi(x)$ mos ravishda bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning umumiy va xususiy yechimlari bo'lsa, ularning ayirmasi $\varphi^0(x) = \Phi(x) - \varphi(x)$ (2) tenglamaning yechimi bo'ladi. Bundan darhol yuqoridagi tenglik kelib chiqadi.

Agar (1) tenglamada integral chegaralaridan bittasi, masalan, yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lsa, ya'ni

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy = f(x), \quad x > a \tag{7}$$

ko'rinishdagi tenglama *Volterraning*[1] *ikkinchi tur integral tenglamasi*,

$$\int_a^x K(x,y)\varphi(y)d\,y = f(x) \tag{8}$$

tenglama esa, *Volterraning birinchi tur integral tenglamasi* deyiladi.

---

[1] Volterra Vito (1860–1940) — mashhur italyan matematigi

Volterra tenglamasini ayrim shartlar bajarilganda Fredgolm tenglamasining xususiy holi deb qarash mumkin.

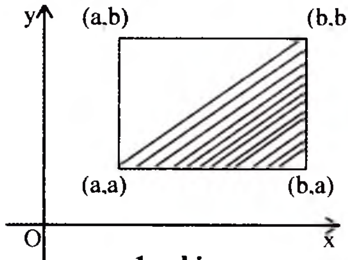
(7) tenglamada *K (x, y)* yadro masalaning ma'nosi bo'yicha $a \le y \le x$ oraliqda aniqlangan. Uni $y > x$ bo'lganda

$$K(x,y)=0, \quad x<y\le b$$

deb hisoblab, qo'shimcha aniqlaymiz. U holda (7) tenglamaning yadrosini

$$\overline{K}(x,y)=\begin{cases} K(x,y), & y\le x; \\ 0, & y>x \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlangan Fredgolm tenglamasining xususiy holi deb qarash mumkin (1- chizma). Kvadratning shtrixlangan yarmida *K (x, y)* yadro *K (x, y)* yadro bilan ustma-ust tushadi, ikkinchi yarmida esa aynan nolga teng, *K (x, y)* yadro bunday aniqlanganda Fredgolmning



1- chizma.

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b \overline{K}(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

tenglamasi aynan Volterraning (7) tenglamasidan iborat bo'ladi. Bundan, Fredgolm tenglamasi uchun olingan natijalarni uning xususiy holi deb qaralgan Volterra tenglamasi uchun ham o'tkazish mumkinligi kelib chiqadi. Ammo Volterra tenglamalari o'ziga xos bo'lgan, Fredgolm tenglamalari ega bo'lmagan xususiyatlarga ham egadir.

Ushbu

$$a(x)\,\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \qquad (9)$$

tenglama *uchinchi tur integral tenglama* deyiladi.

Agar $a\le x\le b$ oraliqda $a(x)\equiv 0$ bo'lsa, (9) dan (4) tenglama, $a(x)\equiv 1$ bo'lsa, (1) tenglama kelib chiqadi. Lekin bu oraliqning ayrim nuqtalarida $a(x)$ funksiya nolga teng bo'lib, qolgan nuqtalarda esa noldan farqli bo'lishi mumkin. Bu holda (9) tenglamani maxsus tekshirishga to'g'ri keladi. Biz bu kitobda bunday tenglamalarni o'rganmaymiz.

Noma'lum funksiya integral ishorasi ostida chiziqsiz ishtirok etsa, bunday tenglamalarni chiziqli bo'lmagan integral tenglamalar deyiladi.

Masalan, noma'lum funksiya n- darajasi bilan integral tenglamaga kirishi mumkin, ya'ni

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\,\varphi^n(y)\,dy=f(x).$$

Noma'lum funksiya integral tenglamada umumiyroq holda ham qatnashishi mumkin, masalan

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,y,\varphi(y))dy.$$

Bu tenglamani *Urison tenglamasi* deyiladi.

Urison tenglamasining muhim xususiy holi bo'lgan ushbu

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,y)F(y,\varphi(y))dy$$

tenglamani *Gammershteyn tenglamasi* deb ataladi, bu yerda $K(x, y)$ — Fredgolm yadrosi. Ushbu

$$\varphi(x)=\int_a^x F(x,y,\varphi(y))\,dy$$

tenglama Volterraning chiziqli bo'lmagan integral tenglamasidan iborat, bu yerda $F(x, y, \varphi(y))$, $a \le x, y \le b$ $-M \le \varphi \le M$ sohada x, y, φ argumentlarning uzluksiz funksiyasidir.

Amaliy masalalarda tez-tez shunday integral tenglamalarni yechishga to'g'ri keladiki, ularda noma'lum funksiya ko'p argumentli bo'ladi.

E^n Yevklid fazosidagi chegaralangan sohani D orqali, bu sohaga tegishli nuqtalarni $x = (x_1, ..., xn)$, $y = (y_1, ..., y_n)$ orqali belgilab olamiz. $\varphi(x) = \varphi(x_1, ..., x_n)$ noma'lum, $f(x) = f(x_1, ..., x_n)$, $K(x, y) = K(x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n)$ berilgan funksiyalar, λ — berilgan sonli parametr bo'lsin. Bu holda Fredgolmning ko'p o'lchovli ikkinchi tur integral tenglamasi

$$\varphi(x)-\lambda\int_D\ldots\int K(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

ko'rinishda yoziladi, bunda $dy = dy_1...dy_n$. Qisqalik uchun D soha bo'yicha olingan integralni bitta integral bilan belgilasak, avvalgi tenglama quyidagicha yoziladi:

$$\varphi(x)-\lambda\int_D K(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x).$$

Bu integral tenglamada integral D sohani chegaralab turgan S sirt bo'yicha ham olinishi mumkin. Bunday integral tenglamalarni tekshirishda (1) tenglamaga nisbatan katta qiyinchiliklar kelib chiqmaydi. Shu sababli, biz e'tiborimizni ko'proq (1) tenglamani o'rganishga qaratamiz.

2- §. Integral tenglamalarga keladigan ayrim masalalar

Integral tenglamalarni sistemali o'rganish XIX asr oxirlaridan boshlangan bo'lib, bungacha integral tenglamalar bo'yicha ishlar tasodifiy xarakterga ega bo'lgan. Integral tenglamalar bilan bog'lash mumkin bo'lgan masalalardan biri, agar birinchi bo'lmasa, bu

$$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy} f(y)dy$$

tenglikdan berilgan $g(x)$ funksiyaga asosan $f(y)$ funksiyani topishdan iboratdir. Bu masalaning yechimini 1811- yilda Furye[1]

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} g(x)dx$$

ko'rinishda topgan.

Oxirgi formula avvalgi integral tenglamaning yechimidan iborat va aksincha, deb hisoblash mumkin. Ma'lumki, bu formulalar Furening almashtirish formulalari deb ataladi.

Misol. Ushbu

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y)e^{-ixy}dy=\sqrt{2\pi}\,e^{-|x|}$$

tenglamani qaraymiz, bunda $\varphi(y)$ — noma'lum funksiya.

Bu tenglamaning chap tomonini $\varphi(y)$ funksiyaning Furye almashtirishi deb qarash mumkin. U holda yuqoridagi almashtirishga asosan

$$\varphi(y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} e^{ixy} dx=\frac{2}{1+y^2}.$$

$\varphi(y)=\dfrac{2}{1+y^2}$ funksiya berilgan tenglamaning yechimidan iborat.

[1]Furye Jan (1768 — 1830) — mashhur fransuz matematigi.

Boshqa integral tenglama Abel[1] tomonidan hosil qilingan.

1. Abel masalasi (moddiy nuqtaning og'irlik kuchi ta'siridagi harakati). Mexanikaning bir masalasini tekshirish natijasida Abel bu masalani birinchi marta integral tenglamani tekshirishga olib kelgan. Bu masala shu jihatidan ham qiziqki, fizika va mexanikaning boshqa masalalari singari u differensial tenglamalar orqali ifodalanmaydi, balki to'g'ridan-to'g'ri integral tenglamani o'rganishga olib keladi.

Abelning masalasi quyidagidan iborat: Dekart ortogonal koordinatalari x, y bo'lgan vertikal tekislikda moddiy $M(x, y)$ nuqta og'irlik (yerga tortilish) kuchi ta'sirida (ξ, η), $\eta > 0$ holatdan $(\xi_0, 0)$, $\xi_0 > \xi$ holatga harakat qilayotgan bo'lib, yo'ldagi t vaqt balandlik o'lchovi η koordinataning funksiyasi bo'lsin, ya'ni $t = t(\eta)$ $M(x, y)$ nuqta harakatining traektoriyasini topish talab qilinadi.

Abel masalasi tautoxron[2] to'g'risidagi masalaning umumlashganidan iboratdir. Ma'lumki, $M(x, y)$ nuqtaning tezlik vektori $\overline{\vartheta}\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$ modulining kvadrati uchun

$$\vartheta^2 = 2g(\eta - y), \quad 0 \le y \le \eta \tag{10}$$

tenglik o'rinlidir, bu yerda g — og'irlik kuchi tezlanishi.

Hozircha noma'lum bo'lgan egri chiziqning tenglamasi $x = \psi(y)$ bo'lsin. Egri chiziq yoyning elementi ds, ma'lumki, ushbu

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + (\psi'(y))^2}\, dy = \varphi(y)dy, \quad \varphi(y) = \sqrt{1 + (\psi'(y))^2} \tag{11}$$

tenglik bilan aniqlanadi (2- chizma). Shu bilan birga

$$\vartheta = \frac{ds}{dt}. \tag{12}$$

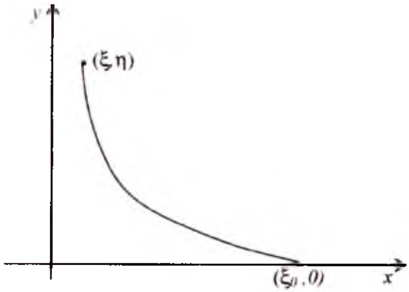
(10) formulaga asosan (11), (12) dan

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(\eta - y)}} = \frac{1}{\sqrt{2g}} \frac{-\varphi(y)dy}{\sqrt{\eta - y}}.$$

---

[1] Abel Nils (1802 — 1829) — norvegiyalik matematik.

[2] Tautoxron (ayrim kitoblarda tavtoxron deb ham yuritiladi) to'g'risidagi masala. Shunday tautoxron deb ataluvchi egri chiziq topilsinki, moddiy nuqta og'irlik kuchi ta'sirida bu egri chiziq bo'ylab harakat qilganda boshlang'ich holatiga bog'liq bo'lmay, eng quyi holatiga bir vaqtning o'zida tushsin, ya'ni t=const. Ma'lumki, bu holda tautoxron sikloidadan iborat bo'ladi.



2- chizma.

t vaqtning o'sishi bilan y balandlik kamayib borgani uchun biz «—» ishorasini oldik. (ξ, η) nuqtadan $(\xi_0, 0)$ nuqtagacha tushish vaqti y ning η dan 0 gacha o'zgarishiga to'g'ri keladi. Shuning uchun ham

$$t = t(\eta) = \frac{1}{\sqrt{2g}} \int_0^{\eta} \frac{\varphi(y)\, dy}{\sqrt{\eta - y}}$$

yoki

$$\int_0^{\eta} \frac{\varphi(y)\, dy}{\sqrt{\eta - y}} = f(\eta) \qquad (13)$$

tenglamani hosil qilamiz, bunda $f(\eta) = \sqrt{2g}\, t(\eta)$.

Agar bu tenglamadan noma'lum funksiya $\varphi(y)$ ni topa olsak, u holda izlangan egri chiziqning tenglamasi (11) ga asosan oddiy kvadratura yordamida aniqlanadi.

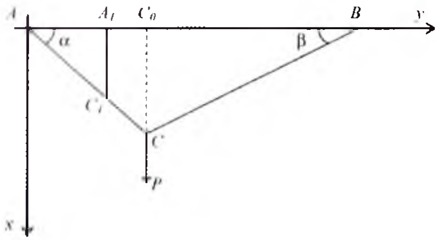
(13) tenglama Abel nomi bilan yuritiladigan ushbu

$$\int_0^{x} \frac{\varphi(y)\, dy}{(x-y)^{\alpha}} = f(x), \qquad 0 < \alpha < 1, \quad x > 0$$

integral tenglamaning xususiy holidir.

2. Ipning tebranishi. Uzunligi l ga teng bo'lgan o'z shaklini qarshiliksiz yengil o'zgartiradigan ipni tekshiramiz. Bu ipning uzunligini Δl ga cho'zish uchun $a\Delta l$ kuch kerak bo'ladi. Bunda, a — biror o'zgarmas (Guk qonuni).

Ipning ikki cheti x o'qining $A(0,0)$ va $B(b,0)$ nuqtalarida bog'lab qo'yilgan bo'lsin. Ip, boshqa tekshiriladigan kuchlarga nisbatan yetarli katta bo'lgan gorizontal cho'zib turadigan T_0 kuch ta'sirida harakatda bo'lmaganda, uning holati gorizontal bo'ladi, ya'ni Ox o'q bilan ustma-ust tushadi. Faraz qilaylik, $C_0(\xi, 0)$ nuqtada ipga P kuch ta'sir qilsin. Bu kuch ta'sirida ip ACB siniq chiziq shakliga keladi (3- chizmaga qarang). AC_0 va C_0B larga nisbatan $CC_0 = \delta$ ni yetarli kichik deb hisoblaymiz (T_0 ga nisbatan P ning kichikligi natijasi). l ga nisbatan δ ning kvadratini hisobga olmasak, P kuchning ta'sirida ipning taranglik kuchi T_0 ga tengligicha qoladi deb hisoblashimiz mumkin. C nuqtadagi ipning taranglik kuchini va P kuchning vertikal chiziqqa proyeksiyasini tushirib, muvozanatlik shartiga asosan



3- chizma.

$$T_0 \sin\alpha + T_0 \sin\beta = P \qquad (14)$$

tenglikni hosil qilamiz. δ kichik bo‘lgani uchun

$$\sin\alpha \approx \frac{\delta}{\xi}, \qquad \sin\beta \approx \frac{\delta}{l-\xi}$$

munosabatlarga asosan, (14) ni quyidagi ko‘rinishda yozishimiz mumkin:

$$T_0 \frac{\delta}{\xi} + T_0 \frac{\delta}{l-\xi} = P.$$

Bundan

$$\delta(\xi) = \frac{P(l-\xi)\xi}{T_0 l}.$$

Abssissasi x ga teng bo‘lgan A_l $(x, 0)$ nuqtada ipning egilishini y (x) orqali belgilab olsak,

$$y(x) = PG(x,\xi)$$

bo‘ladi, bu yerda

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{x(l-\xi)}{T_0 l}, & 0 \le x \le \xi; \\ \dfrac{(l-x)\xi}{T_0 l}, & \xi \le x \le l. \end{cases} \qquad (15)$$

Haqiqatan ham, $x < \xi$ bo‘lsin. AC_0C va AA_lC_l uchburchaklarning o‘xshashligidan

$$\frac{y(x)}{\delta(\xi)} = \frac{x}{\xi} \text{ yoki } y(x) = \delta(\xi)\frac{x}{\xi} = P\frac{(l-\xi)x}{T_0 l}.$$

Agar $x > \xi$ bo‘lsa, A_l $(x, 0)$ nuqta $C_0 B$ kesmada, C_1 esa CB kesmada yotadi. BC_0C va BA_1C_1 uchburchaklarning o‘xshashligidan

$$\frac{y(x)}{\delta(\xi)}=\frac{l-x}{l-\xi} \quad \text{yoki} \quad y(x)=\delta\frac{l-x}{l-\xi}=P\frac{(l-x)\xi}{T_0 l}.$$

(15) formulalardan foydalanib,

$$G(x,\xi)=G(\xi,x)$$

tenglik o‘rinli ekanligini tekshirib ko‘rish qiyin emas.

Agar ipga chiziqli zichligi $p(\xi)$ bo‘lgan uzluksiz taqsimlangan kuch ta’sir qilayotgan bo‘lsa, u holda ξ va $\xi+\Delta\xi$ nuqtalar orasidagi ipning qismiga taxminan $p(\xi)\Delta\xi$ ga teng bo‘lgan kuch ta’sir qiladi. Bu kuch $G(x,\xi)\,p(\xi)\Delta\xi$ siljishga sabab bo‘ladi.

$p(\xi)\Delta\xi$ elementar kuchlar tufayli hosil bo‘lgan siljishlar jamlanganligi uchun (superpozitsiya prinsipi), barcha kuchlar ta’siridagi siljish $y(x)$ taxminan

$$\sum_{(\xi)} G(x,\xi)\,p(\xi)\Delta\xi$$

ga teng bo‘ladi. Bundan $\Delta\xi\to 0$ da

$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)\,p(\xi)\,d\xi \tag{16}$$

hosil bo‘ladi.

Quyidagi ikki masalani ko‘ramiz.

1^0. Biz tekshirayotgan ip taqsimlanish zichligi $p(\xi)$ bo‘lgan kuch ta’sirida berilgan $y=y(x)$ shaklga kelgan bo‘lsin. Shu kuch taqsimlanish zichligi $p(\xi)$ ni izlaymiz.

Bu holda izlanayotgan $p(\xi)$ funksiyaga nisbatan 1- turdagi

$$y(x)=\int_0^l G(x,\xi)\,p(\xi)\,d\xi$$

Fredgolm integral tenglamasiga kelamiz

2^0. Ipga t vaqt o‘tishi bilan o‘zgaradigan, ξ nuqtadagi zichligi

$$p(\xi)\sin\omega t \quad (\omega>0)$$

bo‘lgan kuch ta’sir qilayotgan bo‘lsin. Natijada ip harakatga keladi. Ipning harakatida uning har bir nuqtasining abssissasi o‘zgarmaydi va ip $y=y(x)$ tenglama bilan ifodalanadigan davriy tebranishda deb hisoblaymiz. Ip massasining ξ nuqtadagi zichligini $\rho(\xi)$ orqali belgilab olamiz.

U holda ipning ξ va $\xi+\Delta\xi$ nuqtalari orasidagi qismiga t vaqtda $p(\xi)\sin\varpi t\,\Delta\xi$ kuchdan tashqari yana

$$-\wp(\xi)\Delta\xi\,\frac{d^2y}{dt^2}=\wp(\xi)\,y(\xi)\,\omega^2\sin\omega t\,\Delta\xi$$

inersiya kuchi ta'sir qiladi.

Shu sababli (16) tenglik quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y(x)\sin\omega t=\int_0^l G(x,\xi)\left[p(\xi)\sin\omega t+\wp(\xi)\,y(\xi)\,\omega^2\sin\omega t\right]d\xi$$

Bu tenglikni $\sin\omega t$ ga qisqartirib,

$$\int_0^l G(x,\xi)\,p(\xi)\,d\xi=f(x),\quad G(x,\xi)\wp(\xi)=K(x,\xi),\quad \omega^2=\lambda$$

belgilashlarni kiritib, ushbu

$$y(x)-\lambda\int_0^l K(x,\xi)\,y(\xi)\,d\xi=f(x) \qquad (17)$$

tenglamaga ega bo'lamiz.

p (ξ) funksiyani va demak, *f (x)* ni berilgan deb hisoblab, biz *y (x)* funksiyani aniqlash uchun Fredgolmning 2- tur integral tenglamasini hosil qildik.

f (x) funksiyaning aniqlanishiga ko'ra

$$f(0)=f(l)=0 \qquad (18)$$

shartga ega bo'lamiz.

Agar $\wp(\xi)$ zichlik o'zgarmas, *f (x)* funksiya esa, ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, (17) integral tenglamani yechish katta qiyinchilik tug'dirmaydi.

Haqiqatan ham, avvalo *y (x)* funksiya (17) tenglamaning yechimi bo'lsin. *K (x, ξ)* ga *G (x, ξ)* ning (15) formulalar bilan aniqlangan ifodalarini qo'yamiz. U holda

$$y(x)=\frac{\omega^2 c}{l}(l-x)\int_0^x \xi\,y(\xi)\,d\xi+\frac{\omega^2 c}{l}x\int_x^l (l-\xi)\,y(\xi)\,d\xi+f(x),$$

bu yerda

$$c=\frac{\wp}{T_0}.$$

Bu tenglikning har ikki tomonini *x* bo'yicha ikki marta differensiallab, ushbu

$$y''+\omega^2 c\,y(x)=f''(x) \qquad (19)$$

oddiy differensial tenglamani hosil qilamiz.

Ikkinchi tomondan (19) differensial tenglamaning $x = 0$ va $x = l$ da nolga aylanadigan har qanday yechimi (17) integral tenglamaning ham yechimi bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Buning uchun (19) tenglikning har ikki tomonini $-T_0 G(x,\xi)$ ga ko'paytirib ξ bo'yicha 0 dan l gacha integrallaymiz, natijada

$$-T_0\int_0^l G(x,\xi)y''(\xi)d\xi - T_0\omega^2 c\int_0^l G(x,\xi)y(\xi)d\xi = -T_0\int_0^l G(x,\xi)f''(\xi)d\xi$$

hosil bo'ladi. Tenglikning chap tomonidagi integralni (15) ga asosan ushbu

$$-T_0\int_0^l G(x,\xi)y''(\xi)d\xi = -\frac{l-x}{l}\int_0^x \xi y''(\xi)d\xi - \frac{x}{l}\int_0^x (l-\xi)y''(\xi)d\xi$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglikning o'ng tomonidagi integrallarni bo'laklab integrallab, $y(0) = y(l) = 0$ shartlarni e'tiborga olsak,

$$-T_0\int_0^l G(x,\xi)y''(\xi)d\xi = y(x)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o'xshash (18) shartlarga asosan

$$-T_0\int_0^l G(x,\xi)f''(\xi)d\xi = f(x)$$

Bulardan, $c = \frac{\delta}{T_0}$ bo'lgani uchun (17) tenglama kelib chiqadi.

Ma'lumki, (19) bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi va (19) tenglama xususiy yechimining yig'indisidan iborat.

(19) ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y_0(x) = C_1\sin\mu x + C_2\cos\mu x$$

dan iborat, bu yerda C_1, C_2 ixtiyoriy o'zgarmaslar, $\mu = \omega\sqrt{c}$.

(19) tenglamaning xususiy yechimini o'zgarmaslarni variatsiyalash usulidan foydalanib topamiz:

$$y_1(x) = \frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)d\xi.$$

Shunday qilib, (19) tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y(x) = C_1\sin\mu x + C_2\cos\mu x + \frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)d\xi$$

(15), (17) va (18) tengliklarga asosan $y(0)=y(l)=0$. Bu shartlar yordamida C_1 va C_2 ni topamiz:

$$C_2=0,\ C_1=-\frac{1}{\mu\sin\mu l}\int_0^l f''(\xi)\sin\mu(l-\xi)d\xi$$

Natijada, agar $\sin\mu l\neq 0$ bo'lsa, (17) tenglamaning ushbu

$$y(x)=-\frac{1}{\mu}\frac{\sin\mu x}{\sin\mu l}\int_0^l f''(\xi)\sin\mu(l-\xi)+\frac{1}{\mu}\int_0^x f''(\xi)\sin\mu(x-\xi)d\xi$$

yechimiga ega bo'lamiz.

Bu holda (17) integral tenglama ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi va $f(0)=f(l)=0$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy $f(x)$ uchun yagona yechimga ega bo'ladi.

Biz keyinchalik (17) tenglamaning yechimi mavjud bo'lishi uchun $\sin\mu l\neq 0$ shart bajarilganda $f(x)$ funksiyaning uzluksiz bo'lishi kifoya ekanligini ko'rsatamiz.

3- §. Volterraning integral tenglamalari va differensial tenglamalar orasidagi bog'lanish

Avvalo matematik analiz kursidan ma'lum bo'lgan keyinchalik biz foydalanadigan bir formulani keltiramiz.

1. Dirixle formulasi. Faraz qilaylik, $f(x,y)$ funksiya tomonlari $x=y$, $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlardan iborat bo'lgan teng yonli Δ uchburchakda (1- chizmada shtrixlanmagan uchburchak) uzluksiz bo'lsin. Bu holda Δ uchburchak bo'yicha olingan

$$J=\iint_\Delta f(x,y)\,dx\,dy$$

integralni ikki usul bilan hisoblash mumkin.

Avval x o'zgaruvchi bo'yicha a dan y gacha, keyin y bo'yicha a dan b gacha integrallash mumkin, ya'ni

$$J=\int_a^b dy\int_a^y f(x,y)dx.$$

So'ngra, y bo'yicha x dan b gacha, x bo'yicha esa a dan b gacha integrallash mumkin, ya'ni

$$J=\int_a^b dx\int_x^b f(x,y)dy.$$

Bu ikki tenglikdan darhol

$$\int_a^b dy\int_a^y f(x,y)dx=\int_a^b dx\int_x^b f(x,y)dy \qquad (20)$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglik *Dirixle formulasi* deyiladi.

2. Tenglamalar chiziqli bo‘lmagan hol. Ushbu

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (21)$$

tenglamaning

$$y(x_0)=y_0 \qquad (22)$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi, ya’ni (21), (22) Koshi masalasi Volterraning chiziqli bo‘lmagan integral tenglamasiga keladi. Haqiqatan ham $y=y(x)$ funksiya (21), (22) Koshi masalasining yechimidan iborat bo‘lsin. Bu yechimni (21) ga qo‘yib ayniyat hosil qilamiz, bu ayniyatda x ni t bilan almashtirib, so‘ngra t bo‘yicha x_0 dan x gacha integrallasak,

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(t,y(t))\,dt+y_0 \qquad (23)$$

tenglikka ega bo‘lamiz, ya’ni $y(x)$ funksiya (23) integral tenglamani qanoatlantiradi. Aksincha $y(x)$ funksiya (23) tenglamaning yechimi bo‘lsin, ya’ni bu shunday funksiyaki, uni (23) tenglamaga qo‘ysak, bu tenglama ayniyatga aylanadi.

Bu ayniyatni differensiallab,

$$\frac{dy}{dx}\equiv f(x,y(x))$$

ga ega bo‘lamiz, ya’ni $y(x)$ funksiya (21) tenglamaning yechimidan iborat, shu bilan birga (23) ga asosan $y(x_0)=y_0$.

Shunday qilib, (23) integral tenglamani yechish (21), (22) Koshi masalasini yechishga ekvivalentdir.

Xuddi shunga o‘xshash ikkinchi tartibli

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y)$$

oddiy differensial tenglamaning $y(x_0)=y_0$ $y'(x_0)=y'_0$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}ds\int_{x_0}^{s}f\left[t,y(t)\right]dt+y_0+y_0'(x-x_0)$$

chiziqli bo'lmagan integral tenglamani yechishga keladi.

(20) Dirixle formulasidan foydalanib, oldingi integral tenglamani

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}(x-t)f\left[t,y(t)\right]dt+y_0+y_0'(x-x_0)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

3. Tenglamalar chiziqli bo'lgan hol.

Koeffitsientlari va ozod hadi uzluksiz bo'lgan ushbu

$$\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=F(x) \quad (24)$$

n - tartibli chiziqli differensial tenglamaning

$$y(x_0)=C_0,\ y'(x_0)=C_1,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=C_{n-1} \quad (25)$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi

$$\varphi(x)+\int_{x_0}^{x}K(x,t)\varphi(t)dt=f(x) \quad (26)$$

ko'rinishdagi Volterraning ikkinchi tur chiziqli integral tenglamasini yechishga olib kelish mumkin. Haqiqatan ham,

$$D^ny=\frac{d^ny}{dx^n}=\varphi(x)$$

deb hisoblasak,

$$D^{-1}y=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt$$

bo'ladi. So'ngra

$$D^{-2}y=D^{-1}\left(D^{-1}y\right)=\int_{x_0}^{x}ds\int_{x_0}^{s}\varphi(t)dt$$

bo'lib, Dirixle formulasiga asosan

$$D^{-2}y=\int_{x_0}^{x}(x-t)\varphi(t)dt.$$

Bu jarayonni davom ettirib,

$$D^{-n}y=D^{-1}\left(D^{-n-1}y\right)=\frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x}(x-t)^{n-1}\varphi(t)dt$$

tenglikni hosil qilamiz.

(25) boshlang'ich shartlarni e'tiborga olsak,

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right)=\varphi,\quad \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}=C_{n-1}+D^{-1}\varphi,$$

$$\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-1}}=C_{n-1}(x-x_0)+C_{n-2}+D^{-2}\varphi,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \qquad (27)$$

$$\frac{dy}{dx}=C_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+C_{n-2}\frac{(x-x_0)^{n-3}}{(n-3)!}+\ldots+C_1+D^{-(n-1)}\varphi$$

$$y=C_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+C_{n-2}\frac{(x-x_0)^{n-2}}{(n-2)!}+\ldots.+C_1(x-x_0)+C_0+D^{-n}\varphi$$

tengliklarga ega bo'lamiz. Bularni (24) tenglamaga qo'yib,

$$K(x,t)=\sum_{i=1}^{n}a_i(x)\frac{(x-t)^{i-1}}{(i-1)!}, \qquad (28)$$

$$f(x)=F(x)-C_{n-1}a_1(x)-\left[C_{n-1}(x-x_0)+C_{n-2}\right]a_2(x)-\ldots-$$

$$-\left[C_{n-1}\frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}+\ldots.+C_1(x-x_0)+C_0\right]a_n(x) \qquad (29)$$

belgilashlarni kiritsak, (26) integral tenglamaga ega bo'lamiz.

Aksincha, yadrosi va ozod hadi (28), (29) formulalar bilan aniqlangan (26) integral tenglamani yechib, $\varphi(x)$ yechim uchun olingan ifodani (27) tengliklarning oxirgisiga qo'yib, (24) tenglamaning (25) boshlang'ich shartlarini qanoatlantiruvchi yagona yechimiga ega bo'lamiz.

Agar (24) tenglamada eng katta hosila oldidagi koeffitsient 1 bo'lmay, $a_0(x)$ bo'lsa, (26) integral tenglama

$$a_0(x)\varphi(x)+\int_{x_0}^{x}K(x,y)\varphi(y)dy+f(x) \tag{30}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda ham $K(x,y)$ va $f(x)$ funksiyalar (28) va (29) formulalar bilan aniqlanadi.

Agar tekshirilayotgan oraliqda $a_0(x)\neq 0$ bo'lsa, hamma avvalgi natijalar o'z kuchini saqlab qoladi, agar $a_0(x)$ funksiya biror nuqtada nolga aylansa, (30) tenglama uchinchi turdagi maxsus integral tenglamadan iborat bo'lib, uni alohida tekshirishga to'g'ri keladi.

Misol. Ushbu

$$\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+6y=0,\quad y(0)=0,\ y'(0)=1$$

Koshi masalasi integral tenglamaga keltirilsin.

Yechish.

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\varphi(x)$$

desak,

$$\frac{dy}{dx}=-1+\int_0^x\varphi(t)\,dt,\ y=-x+\int_0^x(x-t)\,\varphi(t)dt$$

bo'ladi. Bu ifodalarni berilgan tenglamaga qo'yib, $\varphi(x)$ ga nisbatan

$$\varphi(x)=-5+6x+\int_0^x(-6x+6t+5)\varphi(t)dt$$

integral tenglamani hosil qilamiz.

Mashqlar. Quyidagi differensial tenglamalar va boshlang'ich shartlarga mos bo'lgan integral tenglamalar tuzilsin:

1. $\frac{dy}{dx}-y(x)=0,\quad y(0)=1;$

Javob. $\varphi(x)=1+\int\limits_0^x\varphi(t)\,dt.$

2. $\frac{d^2y}{dx^2}+y(x)=\cos x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=-1;$

Javob. $\varphi(x)=\cos x-x+\int\limits_0^x(t-x)\varphi(t)\,dt.$

3. $\frac{d^2y}{dx^2}+\left(1+x^2\right)y(x)=\cos x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2;$

Javob. $\varphi(x)=-\int\limits_0^x\left(1+x^2\right)(x-t)\varphi(t)\,dt+\cos x-2x\left(1+x^2\right).$

4. $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}-6\frac{dy}{dx}+8y=0,\ y(0)=y'(0)=y''(0)=1;$

Javob. $\varphi(x)=1-2x-4x^2+\int\limits_0^x\left[3+6(x-t)-4(x-t)^2\right]\varphi(t)\,dt.$

1- §. Ketma-ket yaqinlashish usuli

Biz bu bobda, asosan Fredgolmning ikkinchi turdagi

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{1}$$

integral tenglamasini tekshiramiz. (1) tenglamada $K(x,y)$ yadroni va $f(x)$ funksiyani uzluksiz funksiyalar deb hisoblaymiz, shuning uchun

$$\int_a^b |K(x,y)|dy \le M, \quad a\le x\le b, \quad \max_{a\le x\le b}|f(x)|=m \tag{2}$$

bo'ladi.

Tabiiyki, bu holda (1) tenglamaning yechimini ham uzluksiz funksiyalar sinfidan izlaymiz.

Teorema. *Agar (1) tenglamaning parametri*

$$|\lambda|<\frac{1}{M} \tag{3}$$

shartni qanoatlantirsa, u holda bu tenglamaning yagona $\varphi(x)$ yechimi mavjud bo'lib, uni ketma-ket yaqinlashish usuli bilan topish mumkin.

Isbot. Nolinchi yaqinlashish sifatida (1) tenglamaning ozod hadini qabul qilamiz, ya'ni

$$\varphi_0(x)=f(x).$$

Birinchi yaqinlashishni

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

munosabat bilan aniqlaymiz. Bu jarayonni davom ettirib, n-yaqinlashishni

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy, \quad n=1,2,\dots \tag{4}$$

formula bilan aniqlaymiz.

Shunday qilib, (4) rekurrent munosabatlarni qanoatlantiruvchi

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x), K, \varphi_n(x),\dots \tag{5}$$

funksiyalar ketma-ketligiga ega bo‘lamiz. Matematik analizdan ma’lumki, (5) ketma-ketlikning yaqinlashishi

$$\varphi_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right] \tag{6}$$

qatorning yaqinlashishiga teng kuchlidir. (4) formulani

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\left[\varphi_{n-1}(y)-\varphi_{n-2}(y)+\varphi_{n-2}(y)\right]dy=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi_{n-2}(y)dy+\lambda\int_a^b K(x,y)\left[\varphi_{n-1}(y)-\varphi_{n-2}(y)\right]dy=$$

$$=\varphi_{n-1}(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\left[\varphi_{n-1}(y)-\varphi_{n-2}(y)\right]dy,\quad n=2,3,\ldots \tag{7}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. (2) munosabatlarga asosan (7) dan darhol quyidagi tengsizliklar kelib chiqadi:

$$\left|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\right|\le m\lambda M,$$

$$\left|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right|\le m\lambda^2 M^2,$$

....

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\right|\le m\lambda^n M^n.$$

Shunday qilib, (6) qatorning har bir hadi musbat hadli

$$\sum_{n=0}^{\infty} m|\lambda|^n M^n \tag{8}$$

qatorning mos hadidan katta emas. (8) qator esa, (3) tengsizlikka asosan yaqinlashuvchidir. Demak, (6) qator, natijada uzluksiz funksiyalarning (5) ketma-ketligi uzluksiz $\varphi(x)$ funksiyaga absolyut va tekis yaqinlashadi. (4) tenglikda $n\to\infty$ da limitga o‘tib,

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

tenglikni hosil qilamiz, bu esa $\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi ekanligini ko‘rsatadi.

Endi (1) tenglamaning $\varphi(x)$ dan boshqa yechimi yo'qligini ko'rsatish qiyin emas. Buning uchun aksincha, ya'ni (1) tenglamaning $\varphi(x)$ dan boshqa yana bitta $\psi(x)$ yechimi bor deb, faraz qilamiz. U holda bu yechimlarning ayirmasi $\omega(x)=\varphi(x)-\psi(x)$ (1) tenglamaga mos bo'lgan bir jinsli tenglamaning yechimidan iborat bo'ladi, ya'ni

$$\omega(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)\omega(y)dy.$$

$\omega_0=\max\limits_{a\le x\le b}|\omega(x)|$ deb belgilab olsak, oxirgi tenglikdan

$$\omega_0\le|\lambda|M\omega_0$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Agar $\omega_0\ne0$ bo'lsa, oxirgi tengsizlik (3) tengsizlikka qarama-qarshidir. Demak, $\omega_0=0$, bundan $\omega(x)=0$, ya'ni $\varphi(x)=\psi(x)$ ekanligi kelib chiqadi.

2- §. Iteratsiyalangan yadrolar. Rezolventa

1. Iteratsiyalangan yadrolar. Avvalgi paragrafda (3) tengsizlik bajarilganda (5) funksiyalar ketma-ketligi (1) tenglamaning $\varphi(x)$ yechimiga yaqinlashishi isbotlangan edi. Endi shu ketma-ketlik yaqinlashishi strukturasini batafsil o'rganamiz. Ma'lumki,

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy,$$

so'ngra

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi_1(t)dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)f(t)dt+\lambda^2\int_a^b K(x,t)dt\int_a^b K(t,y)f(y)dy.$$

Takroriy integralda integrallash tartibini o'zgartirib, so'ngra

$$K_2(x,y)=\int_a^b K(x,t)K(t,y)dt$$

deb belgilab olib,

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy+\lambda^2\int_a^b K_2(x,y)f(y)dy$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirib,

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^n\lambda^{i-1}K_i(x,y)f(y)\,dy \tag{9}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bunda $K_i(x,y)$ lar

$$K_1(x,y)=K(x,y),$$

$$K_i(x,y)=\int_a^b K(x,t)K_{i-1}(t,y)\,dt,\quad i=2,3,... \tag{10}$$

rekurrent munosabatlar bilan aniqlanadi. $K_i(x,y)$ *funksiyalar iterasiyalangan (takrorlangan) yadrolar* deb ataladi.

Iterasiyalangan yadrolarni (10) ga nisbatan umumiyroq

$$K_i(x,y)=\int_a^b K_r(x,t)K_{i-r}(t,y)\,dt \tag{11}$$

formula bilan ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, (10) da $K_{i-1}(t,y)$ yadroni yana shu (10) formula yordamida K_{i-2} bilan ifodalab,

$$K_i(x,y)=\int_a^b K(x,t_1)\left[\int_a^b K(t_1,t_2)K_{i-2}(t_2,y)\,dt_2\right]dt_1=$$

$$=\int_a^b\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)K_{i-2}(t_2,y)\,dt_1\,dt_2$$

tenglikni hosil qilamiz. $K_{i-2}(t_2,y)$ yadroni K_{i-3} yadro orqali ifodalash mumkin va h. k. Bu jarayonni davom ettirib, oxirida

$$K_i(x,y)=\int_a^b...\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)...K(t_{i-1},y)\,dt_1...dt_{i-1} \tag{12}$$

formulaga kelamiz. t_r o'zgaruvchi bo'yicha integralni ajratib, oxirgi formulani

$$K_i(x,y)=\int_a^b dt_r\left\{\int_a^b...\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)...K(t_{r-1},t_r)\,dt_1...dt_{r-1}\times\right.$$

$$\left.\times\int_a^b...\int_a^b K(t_r,t_{r+1})K(t_{r+1},t_{r+2})...K(t_{i-1},y)\,dt_{r+1}...dt_{i-1}\right\}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. (12) formulaga asosan, figurali qavs ichidagi birinchi integral $K_r(x,t_r)$ ga, ikkinchi integral esa $K_{i-r}(t_r,y)$ ga teng.

Shunday qilib,

$$K_i(x,y)=\int_a^b K_r(x,t_r)K_{i-r}(t_r,y)dt_r.$$

Bunda t_r ni t ga almashtirib (11) formulaga kelamiz

2. Rezolventa. (6) qatorning yaqinlashishini isbotlagandagi mulohazalarni qaytarib, (3) shart bajarilganda ushbu

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y) \tag{13}$$

qatorning $\{a\le x\le b,\ a\le y\le b\}$ kvadratda tekis yaqinlashishiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Haqiqatan ham, $K(x,y)$ yopiq sohada uzluksiz bo‘lganligi uchun (2) tengsizlikka asosan quyidagi tengsizliklarga ega bo‘lamiz:

$$|K_1(x,y)|\le M_1,$$

$$|K_2(x,y)|\le\int_a^b|K_1(x,t)||K_1(t,y)|dt\le M_1M,$$

$$K_3(x,y)\le\int_a^b|K_1(x,t)||K_2(t,y)|dt\le M_1M^2,$$

....

$$|K_i(x,y)|\le\int_a^b|K_1(x,t)|\,|K_{i-1}(t,y)|dt\le M_1M^{i-1}.$$

Demak, (13) qatorning har bir hadi (3) shartga asosan yaqinlashuvchi

$$\sum_{i=1}^{\infty}M_1|\lambda|^{i-1}M^{i-1}$$

sonli qatorning mos hadidan katta emas, u holda (13) qator absolut va tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi. Bu qatorning yig‘indisi $R(x,y;\lambda)$ ni $K(x,y)$ *yadroning yoki (1) integral tenglamaning rezolventasi yoki hal qiluvchi yadrosi* deyiladi.

(13) qator λ ga nisbatan darajali qator bo'lgani uchun uning yig'indisi, ya'ni $R(x,y;\lambda)$ rezolventa, agar λ kompleks son bo'lsa, $|\lambda|<\frac{1}{M}$ yaqinlashish doirasida, agar λ haqiqiy son bo'lsa, $\left(-\frac{1}{M},\frac{1}{M}\right)$ yaqinlashish intervalida λ ning analitik funksiyasidan iborat bo'ladi.

(9) da $n\to\infty$ da limitga o'tib, (1) tenglamaning yechimini ushbu

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)f(y)dy \qquad (14)$$

qator ko'rinishida hosil qilamiz. Bu qator *Neyman qatori* deyiladi.

(14) yechim rezolventa yordamida

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)dy \qquad (15)$$

ko'rinishda yoziladi.

(13) qatorning har bir hadi uzluksiz va qator tekis yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli $R(x,y;\lambda)$ rezolventa ham $\{a\le x\le b,\ a\le y\le b\}$ kvadratda uzluksiz bo'ladi. Shu sababli, avvalgi formulalardan $f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lganligi uchun (1) tenglamaning $\varphi(x)$ yechimi uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

Rezolventa o'zining birinchi yoki ikkinchi argumentining funksiyasi sifatida quyidagi ikkita integral tenglamani qatoatlantirishni tekshirib ko'rish qiyin emas:

$$R(x,y;\lambda)=K(x,y)+\lambda\int_a^b K(x,t)R(t,y;\lambda)dt,$$

$$R(x,y;\lambda)=K(x,y)+\lambda\int_a^b K(t,y)R(x,t;\lambda)dt \qquad (16)$$

Bu tenglamalardan, masalan, ikkinchisini tekshirib ko'rish uchun

$$R(x,y;\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y) \qquad (17)$$

tenglikning har ikki tomonini $K(y,s)$ ga ko'paytirib, y bo'yicha integrallaymiz:

$$\int_a^b R(x,y;\lambda)K(y,s)dy=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\int_a^b K_i(x,y)K(y,s)dy$$

yoki (10) tenglikka asosan

$$\int_a^b R(x,y;\lambda)K(y,s)dy = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} K_{i+1}(x,s).$$

Buni λ ga ko'paytirib, (17) da $i-1=j$ deb, hosil bo'lgan ifodani e'tiborga olsak, oldingi tenglik quyidagicha yoziladi:

$$\lambda \int_a^b R(x,y;\lambda)K(y,s)dy = R(x,s;\lambda) - K(x,s)$$

yoki

$$R(x,s;\lambda) = K(x,s) + \lambda \int_a^b K(y,s) R(x,y;\lambda)dy.$$

Bu esa o'zgaruvchilarni boshqacha belgilashdagi (16) ning ikkinchi tenglamasidan iboratdir. (16) ning birinchisini ham xuddi shunday tekshirib ko'rish mumkin.

Endi (16) tenglamalar o'rinli bo'lganda (15) formula bilan aniqlangan $\varphi(x)$ funksiyaning (1) tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatish qiyin emas. Shu maqsadda (15) formulani (1) tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$f(x) + \lambda \int_a^b R(x,y;\lambda) f(y)dy - \lambda \int_a^b K(x,t) \times$$

$$\times \left[f(t) + \lambda \int_a^b R(t,y;\lambda) f(y)dy \right] dt = f(x)$$

yoki

$$\int_a^b R(x,y;\lambda) f(y)dy - \int_a^b K(x,y)\, f(y)dy -$$

$$-\lambda \int_a^b \int_a^b K(x,t) R(t,y;\lambda) f(y)dt\,dy = 0.$$

Oxirgi tenglikni quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$\int_a^b \left[R(x,y;\lambda) - K(x,y) - \lambda \int_a^b K(x,t) R(t,y;\lambda)dt \right] f(y)dy = 0.$$

Bu tenglik haqiqatan o'rinli bo'ladi, chunki kvadrat qavs ichida (16) tenglamalarning birinchisiga asosan, aynan nol turibdi.

Misol. Ushbu integral tenglama yechilsin:

$$\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 y\varphi(y)\,dy=\frac{3}{2}e^x-\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2},$$

Bu yerda $K(x,y)=y,\ \lambda=\frac{1}{2}$.

Iteratsiyalangan yadrolarni hisoblaymiz:

$$K_2(x,y)=\int_0^1 K(x,t)K(t,y)\,dt=\int_0^1 t\,y\,dt=\frac{y}{2},$$

$$K_3(x,y)=\int_0^1 K(x,t)K_2(t,y)\,dt=\frac{y}{2}\int_0^1 t\,dt=\frac{y}{2^2},$$

....

$$K_i(x,y)=\int_0^1 K(x,t)K_{i-1}(t,y)\,dt=\frac{y}{2^{i-2}}\int_0^1 t\,dt=\frac{y}{2^{i-1}}.$$

(17) formulaga asosan berilgan tenglamaning rezolventasini hisoblaymiz

$$R\left(x,y;\frac{1}{2}\right)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^{i-1}}\frac{y}{2^{i-1}}=y\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{4^{i-1}}=y\frac{1}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4y}{3}.$$

(15) formulaga asosan tenglamaning yechimini quyidagi ko‘rinishda topamiz:

$$\varphi(x)=e^x-\frac{1}{2}xe^x-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1\frac{4y}{3}\left(\frac{3}{2}e^y-\frac{1}{2}y\,e^y-\frac{1}{2}\right)dy=$$

$$=\frac{1}{2}(3-x)e^x+\frac{1}{3}(3-e).$$

Yuqorida bayon qilinganlardan ko‘rinayaptiki, (1) tenglamaning yechimini ketma-ket yaqinlashish usuli bilan topishda $|\lambda|$ ning $\frac{1}{M}$ dan kichik bo‘lgani muhim shart ekan. Tabiiy savol to‘g‘iladi: ketma-ketliklarning λ ning barcha qiymatlarida yoki hech bo‘lmasa markazi $\lambda=0$ nuqtada va radiusi $\frac{1}{M}$ dan katta bo‘lgan doirada (kesmada) yaqinlashishini ko‘rsatish mumkinmi? Bunday bo‘lmas ekan, tavakkal qilib olingan Fredgolm integral tenglamasi uchun ketma-ketliklar $|\lambda| > \frac{1}{M}$ bo'lganda uzoqlashishi mumkin, ammo shunday tenglamalar sinfi mavjudki (masalan, Volterra tenglamalari, biz ularni keyingi bobda o'rganamiz), ketma-ketliklar λ ning ixtiyoriy chekli qiymatida yaqinlashuvchi bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\varphi(y)dy=1 \tag{18}$$

tenglama berilgan bo'lsin. Bu yerda $a = 0$, $b = 1$, $K(x, y) = 1$, $M = 1$ bo'lib, yuqorida isbotlanganiga asosan (18) tenglama uchun (5) ketma-ketlik $|\lambda| < 1$ bo'lganda yaqinlashuvchi bo'ladi. Lekin bu tenglamani ketma-ket yaqinlashish usulidan foydalanmay ham osongina yechish mumkin. Shu maqsadda

$$\int_0^1\varphi(y)dy$$

integral biror noma'lum o'zgarmasdan iborat ekanligini e'tiborga olib, uni C orqali belgilab olamiz. U holda (18) tenglamaga asosan

$$\varphi(x)=1+\lambda C$$

Bu ifodani (18) tenglamaga qo'yib,

$$(1-\lambda)C=1 \tag{19}$$

tenglamani hosil qilamiz. $\lambda=1$ bo'lganda bu tenglama yechilmaydi, demak, $\lambda=1$ da (18) integral tenglama yechimga ega emas. Bundan, radiusi birdan katta bo'lgan doirada (18) tenglama uchun ketma-ketliklar yaqinlashishi mumkin emasligi kelib chiqadi. Shunga qaramay qizig'i shundaki, (18) tenglama faqat $\lambda\neq1$ bo'lgan barcha λ lar uchun yechimga ega. Haqiqatan ham, (19) dan $C=\frac{1}{1-\lambda}$, demak, $\varphi(x)=\frac{1}{1-\lambda}$. Buni (18) tenglamaga qo'yib, uni qanoatlantirishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Endi (18) tenglamadan farqli, ozod hadi (0, 1) oraliqda ixtiyoriy uzluksiz $f(x)$ funksiya bo'lgan

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1\varphi(y)dy=f(x) \tag{20}$$

tenglamani tekshiramiz. Avvalgiday

$$C=\int_0^1 \varphi(y)dy$$

deb belgilab,

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda C$$

tenglikni hosil qilamiz. Buni 0 dan 1 gacha integrallab, C ni topish uchun

$$(1-\lambda)C=\int_0^1 f(x)dx \qquad (21)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Agar $\lambda \neq 1$ bo‘lsa,

$$C=\frac{1}{1-\lambda}\int_0^1 f(x)\,dx,$$

$$\varphi(x)=f(x)+\frac{\lambda}{1-\lambda}\int_0^1 f(x)dx.$$

Bu funksiyani (20) tenglamaga qo‘yib, uni qanoatlantirishiga ishonch hosil qilamiz, demak, (20) tenglama $\lambda \neq 1$ bo‘lganda yechiladi va yagona yechimga ega bo‘ladi.

Endi $\lambda=1$ bo‘lsin. Bu holda (21) tenglama

$$\int_0^1 f(x)dx=0 \qquad (22)$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Agar $f(x)$ shunday funksiya bo‘lsaki, (22) tenglik o‘rinli bo‘lmasa, (20) tenglama yechimga ega bo‘lmaydi, xuddi shunday bo‘lishini $f(x)\equiv 1$ da ham ko‘rgan edik. Agar (22) tenglik bajarilsa, u holda C aniqlanmay qoladi, bu holda (20) tenglama

$$\varphi(x)=f(x)+C$$

(C — ixtiyoriy o‘zgarmas) ko‘rinishdagi cheksiz ko‘p yechimlarga ega bo‘ladi.

Mashqlar. Rezolventa yordamida ushbu integral tenglamalarning yechimi topilsin.

1. $\varphi(x)-\dfrac{1}{3}\displaystyle\int_0^1 xy\ \varphi(y)\,dy=\dfrac{5}{6}x.$

Javob: $\varphi(x)=\frac{15}{16}x$.

2. $\varphi(x)-\frac{1}{2}\int_0^1 \varphi(y)dy=e^x-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}$.

Javob: $\varphi(x)=e^x$.

3. $\varphi(x)-\frac{1}{4}\int_0^1 xy\,\varphi(y)dy=\sin x-\frac{x}{4}$.

Javob: $\varphi(x)=\sin x-\frac{24}{95}(1+\frac{1}{2}\cos\frac{1}{2}-\sin\frac{1}{2})$.

3- §. Fredgolm teoremalari

1. Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi. Chiziqli integral tenglamalar nazariyasida algebradan ma'lum bo'lgan chiziqli algebraik tenglamalar sistemalarini yechishga doir teoremalar muhim rol o'ynaydi.

Biz bu bandda keyinchalik bizga kerak bo'ladigan, chiziqli algebraik tenglamalar sistemalariga taalluqli teoremalarni, asosan isbotsiz keltiramiz.

Tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j=b_i, \qquad i=1,2,...,n \tag{23}$$

ko'rinishdagi sistemani tekshiramiz.

$x_1,x_2,...,x_n$ va $b_1,b_2,...,b_n$ sonlarni x va b vektor- ustunlarning koordinatalari deb, ya'ni

$$x=\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{Vmatrix}, \quad b=\begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{Vmatrix}$$

a_{ij} koeffitsiyentlarni esa, ushbu

$$A=\|a_{ij}\|=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{Vmatrix}$$

kvadrat matritsaning elementlari deb talqin qilamiz. U holda (23) sistemani bitta

$$Ax=b$$

vektor tenglama ko'rinishida yozish mumkin. Ma'lumki, A matritsa berilgan bo'lsa, uning satrlarini ustunlariga almashtirish natijasida hosil bo'lgan matritsani A bilan *transponirlangan matritsa* deyiladi.

Agar A matritsaning a_{ij} elementlari kompleks sonlardan iborat bo'lsa, transponirlangan matritsa elementlarini qo'shma kompleks $\overline{a_{ji}}$ elementlar bilan almashtirish natijasida A matritsaga qo'shma A^* matritsa hosil bo'ladi.

Shunday qilib, agar $A=\|a_{ij}\|$ bo'lsa, $A^*=\|\overline{a_{ji}}\|$ bo'ladi. a_{ij} elementlar haqiqiy sonlar bo'lsa, A matritsaga qo'shma bo'lgan A^* matritsa transponirlangan matritsaning o'zidan iborat bo'ladi.

Ushbu

$$A^*y=c$$

yoki, yoyib yozganda

$$\sum_{j=1}^{n}\overline{a_{ji}}\,y_j=c_i,\quad i=1,2,\dots,n$$

tenglamalar sistemasi (23) sistemaga *qo'shma sistema* deyiladi.

Qo'shma sistemaning o'ng tomonidagi vektor ixtiyoriy bo'lishi mumkin. Koeffitsientlari a_{ij} haqiqiy sonlardan iborat sistemaga qo'shma sistema

$$\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\,y_j=c_i$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Biz quyida keltiradigan tushuncha va teoremalarda sistemaning koeffitsientlari haqiqiy yoki kompleks sonlar bo'lishining farqi yo'q.

O‘zaro qo‘shma matritsalarning determinantlari bir vaqtda nolga teng yoki teng bo‘lmaydi; qo‘shma matritsalar bir xil rangga ega bo‘ladi.

1- teorema. *Agar algebraik tenglamalar sistemasining determinanti noldan farqli bo‘lsa, u holda berilgan sistema ham va unga qo‘shma bo‘lgan sistema ham ixtiyoriy ozod hadlarda yechiladi, u va bu sistemaning yechimlari yagona bo‘ladi. Bu holda bir jinsli sistema faqat trivial (nolga teng) yechimga ega bo‘ladi.*

2- teorema. *Agar algebraik tenglamalar sistemasining determinanti nolga teng bo‘lsa, u holda bir jinsli* $Ax=0$ va $A^{*}y=0$ *sistemalar bir xil sondagi* $p=n-r$ *chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarga ega bo‘ladi, bu yerdagi* $r-A$ *matritsaning rangi.*

Shuni ta’kidlab o‘tamizki, agar $x^{(1)},x^{(2)},...,x^{(p)}$ va $y^{(1)}$, $y^{(2)}$, ..., $y^{(p)}$ lar $Ax=0$ va $A^{*}y=0$ sistemalarning chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlari bo‘lsa, u holda bu sistemalarning umumiy yechimi

$$x=\sum_{j=1}^{p}\gamma_j x^{(j)}, \quad y=\sum_{j=1}^{p}\gamma_j^{*} y^{(j)}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi, bundagi γ_j va γ_j^{*} lar ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

3- teorema. *Bir jinsli bo‘lmagan (23) sistemaning yechimga ega bo‘lishi uchun A matritsaning rangi, bu matritsaga ozod hadlar ustunini qo‘shimcha qilishdan hosil bo‘lgan kengaytirilgan matritsaning rangiga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Agar (23) sistemaning determinanti nolga teng bo‘lib, sistema yechiladigan bo‘lsa, u cheksiz ko‘p yechimlarga ega bo‘ladi: (23) sistemaning biror yechimiga unga mos bir jinsli sistemaning ixtiyoriy yechimini qo‘shib, yana (23) sistemaning yechimini hosil qilamiz. Bu holda agar A matritsaning rangi r ga teng bo‘lsa, (23) sistemanng umumiy yechimi

$$x=x^{(0)}+\sum_{j=1}^{p}\gamma_j x^{(j)}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi, bu yerdagi $x^{(0)}$ sistemaning xususiy yechimi, $x^{(j)}$, $j=1,2,....,p$ lar esa, bir jinsli $Ax=0$ sistemaning chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlaridir.

3- teoremani unga ekvivalent bo‘lgan va keyinchalik biz foydalanadigan teorema bilan almashtirish mumkin.

4- teorema. *Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi (23) yechimga ega bo‘lishi uchun bu sistema ozod hadlari vektorining qo‘shma bir jinsli sistema barcha yechimlariga ortogonal bo‘lishi zarur va yetarlidir.*

Bu teoremaning isbotini keltiramiz. Eslatib oʻtamiz, agar

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i=0$$

boʻlsa, x *va* y vektorlar *ortogonal* deyiladi.

A matritsaning i- ustunidan tashkil topgan vektorni A_i orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$A_i=\begin{Vmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \dots \\ a_{ni} \end{Vmatrix}, \qquad i=1,2,...,n$$

(23) sistemani

$$\sum_{i=1}^{n} x_i A_i=b$$

koʻrinishda yozib olishimiz mumkin. Bu yozuv shuni koʻrsatadiki, b vektor A_i vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi boʻlgan holda va faqat shu holdagina (23) sistema yechimga ega boʻladi. Buning uchun b vektorning barcha A_i vektorlarga ortogonal boʻlgan har bir vektorga ortogonal boʻlishi zarur va yetarlidir.

Shunday vektor y boʻlib, uning komponentlari $y_1, y_2, \dots, y_n$ boʻlsin. $(y, A_j)=0,\ j=1,2,..,n$ shart

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ji} y_j=0, \quad i=1,2,\dots,n$$

tenglikka ekvivalentdir. Bu esa, y (23) sistemaga qoʻshma bir jinsli sistemaning yechimi ekanligini bildiradi.

Demak, (23) sistemaning yechimga ega boʻlishi uchun b vektorning qoʻshma bir jinsli sistemaning ixtiyoriy yechimiga ortogonal boʻlishi zarur va yetarlidir. Shu bilan teorema isbot boʻldi.

2. Aynigan yadroli Fredgolm integral tenglamalari. Fredgolmning ikkinchi tur (1) tenglamasidagi $K(x,y)$ yadro

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{n} p_i(x) q_i(y) \tag{24}$$

ko'rinishga ega bo'lsa, *y aynigan (buzilgan) yadro* deb ataladi. Bundagi $p_i(x)$ va $q_i(y)$ funksiyalarni asosiy (a,b) oraliqda uzluksiz funksiyalar deb hisoblaymiz. U holda $K(x,y)$ yadro asosiy kvadratda uzluksiz funksiya bo'ladi. Ayrim adabiyotlarda (24) ko'rinishdagi yadroni Pinkerle—Gursa yadrosi, qisqacha *PG*-yadro deb ham yuritiladi. Umumiylikka ziyon yetkazmay, $p_i(x)$ barcha funksiyalarni ham, $q_i(y)$ funksiyalarni ham o'zaro chiziqli bog'liq emas deb hisoblaymiz. Aks holda chiziqli boqliqlarini boshqalari orqali chiziqli ifodalab, (24) yig'indida qo'shiluvchilar sonini kamaytirish mumkin. (24) ifodani (1) integral tenglamaga qo'yib,

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}\int_a^b p_i(x)q_i(y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{25}$$

tenglamani hosil qilamiz. Ushbu

$$c_i=\int_a^b q_i(y)\varphi(y)dy \tag{26}$$

belgilashlarni kiritib, (25) integral tenglamani

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i p_i(x) \tag{27}$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda c_i — nomal'um sonlar. c_i — o'zgarmaslarni aniqlash uchun oxirgi formuladan $\varphi(x)$ ning qiymatini (25) tenglamaga olib borib qo'yamiz:

$$\varphi(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_i p_i(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}\int_a^b p_i(x)q_i(y)\Big[f(y)+$$
$$+\lambda\sum_{j=1}^{n}c_j p_j(y)\Big]dy=f(x)$$

yoki

$$\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\left[c_i-\int_a^b q_i(y)f(y)dy-\lambda\sum_{j=1}^{n}\int_a^b c_j p_j(y)q_i(y)dy\right]=0.$$

Bundan $p_i(x)$ funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lmagani uchun

$$c_i-\int_a^b q_i(y)f(y)dy-\lambda\sum_{j=1}^{n}c_j\int_a^b p_j(y)q_i(y)dy=0$$

tenglik kelib chiqadi. Quyidagi belgilarni kiritib,

$$\gamma_i=\int_a^b q_i(y)f(y)dy, \qquad \alpha_{ij}=\int_a^b p_j(y)q_i(y)dy \tag{28}$$

avvalgi tenglikni

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}c_j=\gamma_i, \quad i=1,2,...,n \tag{29}$$

ko'rinishda yozib olamz. Shunday qilib, c_i o'zgarmaslarni aniqlash uchun (29) chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qildik. (25) integral tenglama va (29) sistemaning ekvivalentligini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan ham, agar $\varphi(x)\in C[a,b]$ funksiya (25) tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda (26) tenglik bilan aniqlangan c_i, $i=1,....,n$ sonlar (29) sistemani qanoatlantirishini hozirgina ko'rsatdik. Aksincha, agar c_i, $i=1,....,n$ sonlar (29) sistemaning yechimlaridan iborat bo'lsa, (27) formula bilan aniqlangan $\varphi(x)$ funksiya $a\le x\le b$ oraliqda uzluksiz bo'lib, (28) ga asosan (25) tenglamani qanoatlantiradi:

$$\varphi(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\int_a^b q_i(y)\varphi(y)dy-f(x)=$$

$$=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}c_ip_i(x)-\lambda\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\int_a^b q_i(y)\left[f(y)+\lambda\sum_{j=1}^{n}c_jp_j(y)\right]dy-f(x)=$$

$$=\lambda\sum_{i=1}^{n}p_i(x)\left(c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}c_j-\gamma_i\right)=0.$$

Avvalgi bandda, (25) tenglamalar sistemasi nazariyasida

$$M(\lambda)=\begin{Vmatrix}1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & ... & -\lambda\alpha_{1n}\\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & ... & -\lambda\alpha_{2n}\\ ... & ... & ... & ...\\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & ... & 1-\lambda\alpha_{nn}\end{Vmatrix}.$$

matritsa muhim rol o'ynashini ko'rdik. Bu matritsaning determinantini $D(\lambda)$ orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$D(\lambda)$ determinant λ ga nisbatan n-darajali ko‘phaddan iboratdir; bu ko‘phad

$$D(0)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix}=1$$

bo‘lgani uchun aynan noldan farqli. Agar

$$D(\lambda)\neq 0 \tag{30}$$

bo‘lsa, (29) sistema ixtiyoriy γ_i o‘ng tomonlar uchun yagona yechimga ega bo‘lishini va bu yechim Kramer formulalari bilan aniqlanishi bizga ma’lum. (30) shart $D(\lambda)$ ko‘phadning ildizlari bo‘lgan λ ning chekli sondagi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, $m\leq n$ qiymatlari uchun buziladi. λ ning bu qiymatlari $K(x,y)$ yadroning yoki (25) tenglamaning *xos (xarakteristik) sonlari* deyiladi.

Shunday qilib, λ ning $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ lardan farqli bo‘lgan har bir chekli qiymatida (29) sistema yagona $c_1, \dots, c_n$ yechimga ega bo‘ladi. Bu yechimni (27) tenglikning o‘ng tomoniga qo‘yib, (25) integral tenglamaning $\varphi(x)$ yechimiga ega bo‘lamiz.

Natijada quyidagi teoremani isbotladik.

Fredgolmning birinchi teoremasi. *Agar λ parametr $K(x,y)$ yadroning xos soni bo‘lmasa, ixtiyoriy uzluksiz $f(x)$ ozod had uchun (25) integral tenglama yechimga ega, shu bilan birga bu yechim yagona bo‘ladi.*

(25) integral tenglamaga mos bir jinsli

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^n p_i(x)\,q_i(y)\varphi(y)dy=0 \tag{31}$$

tenglama (29) sistemaga mos bo‘lgan ushbu

$$c_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} c_j = 0 \tag{32}$$

bir jinsli chiziqli algebraik sistemaga keladi. (31) tenglamaga qo'shma bo'lgan bir jinsli tenglama

$$\psi(x) - \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} p_i(y) q_i(x) \psi(y)\, dy = 0 \tag{33}$$

ko'rinishga ega. (33) tenglama esa (32) ga qo'shma bo'lgan

$$d_i - \lambda \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ji} d_j = 0 \tag{34}$$

bir jinsli sistemaga teng kuchlidir, bunda

$$d_i = \int_a^b p_i(y) \psi(y) dy, \quad i = 1, 2, ..., n.$$

Agar $\lambda = \lambda_k, k = 1, ..., m$ bo'lib, $M(\lambda)$ matritsaning rangi r ga teng bo'lsa, 1-banddagi 2-teoremadan ma'lumki, bir jinsli (32) sistema ham va unga qo'shma bo'lgan (34) sistema ham n - r ta

$$c_1^j, ..., c_n^j, \quad d_1^j, ..., d_n^j, \quad j = 1, 2, ..., n - r$$

chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi. Bu yechimlarni (31) va (33) dan hosil bo'lgan ushbu

$$\varphi_j(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i^j p_i(x), \; \psi_j(x) = \lambda \sum_{i=1}^{n} d_i^j q_i(x), \; j = 1, 2, ..., n - r \tag{35}$$

formulaming o'ng tomonlariga qo'yib, (31) va (33) bir jinsli integral tenglamalarning n - r tadan chiziqli erkli yechimlarini hosil qilamiz.

Fredgolmning ikkinchi teoremasi. *Bir jinsli (31) tenglama va unga qo'shma bo'lgan (33) tenglama bir xil n - r tadan chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi.*

Bir jinsli (31) tenglamaning nolga teng bo'lmagan $\varphi_j(x)$, $j = 1$, ..., $n - r$ yechimlari (25) tenglamaning yoki $K(x, y)$ yadroning λ_k, $k = 1, ..., m$ xos sonlariga mos bo'lgan xos funksiyalari deyiladi.

Avvalgi banddagi 4-teoremadan ma'lumki, $\lambda = \lambda_k$ bo'lganda (29) sistema ixtiyoriy o'ng tomonlar uchun yechimga ega bo'lavermaydi. Bu sistemaning yechimga ega bo'lishi uchun γ_i, $i = 1, .., n$ sonlar

$$\sum_{i=1}^{n} \gamma_i d_i^j = 0, \quad j = 1, 2, ..., n - r \tag{36}$$

shartlarni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir. Bu shartlarda γ_i o'rniga uning qiymatini qo'yib, (36) ga teng kuchli bo'lgan quyidagi tengliklar sistemasiga ega bo'lamiz:

$$\lambda\sum_{i=1}^{n}\gamma_i d_i^j=\lambda\sum_{i=1}^{n}d_i^j\int_a^b q_i(x)f(x)dx=$$

$$=\lambda\int_a^b f(x)\sum_{i=1}^{n}d_i^j q_i(x)dx=0.$$

Bundan (35) ga asosan

$$\int_a^b f(x)\psi_j(x)dx=0,\quad j=1,2,...,n-r$$

tengliklar hosil bo'ladi.

Biror D sohada, xususan (a,b) oraliqda, *ikkita funksiyaning ko'paytmasidan olingan integral nolga teng bo'lsa, bu funksiyalar ortogonal* deb ataladi.

Shunday qilib biz quyidagi teoremani isbot qildik.

Fredgolmning uchinchi teoremasi. $\lambda=\lambda_k$, $k=1,...,m$ *bo'lganda (25) integral tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun uning ozod hadi* $f(x)$ *funksiyaning qo'shma bir jinsli (33) integral tenglamaning barcha* $\psi_j(x)$, $j=1,...,n-r$ *yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Bu holda (25) tenglama cheksiz ko'p yechimlarga ega va bu yechimlar ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\varphi(x)=\overline{\varphi}(x)+\sum_{j=1}^{n-r}\beta_j\varphi_i(x),$$

bu yerda $\overline{\varphi}(x)$ (25) tenglamaning xususiy yechimi, yig'indi esa (31) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi.

Misol. Ushbu

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\cos y+y^2\sin x+\cos x\sin y\right)\varphi(y)dy=x$$

integral tenglama yechilsin.

Tenglamaning chap tomonidagi integralni uchtaga ajratib,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\cos y+y^2\sin x+\cos x\sin y\right)\varphi(y)dy=$$

$$= x\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\varphi(y)dy + \sin x\int_{-\pi}^{\pi}y^2\varphi(y)dy + \cos x\int_{-\pi}^{\pi}\sin y\varphi(y)dy,$$

so‘ngra

$$c_1 = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos y\,dy,\quad c_2 = \int_{-\pi}^{\pi}y^2\varphi(y)dy,\quad c_3 = \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(y)\sin y\,dy$$

belgilashlarni kiritamiz. U holda noma’lum funksiya

$$\varphi(x) = c_1\lambda x + c_2\lambda\sin x + c_3\lambda\cos x + x$$

ko‘rinishda yoziladi. Noma’lum funksiyaning mana shu ifodasidan foydalanib, c_1, c_2 va c_3 ni hisoblaymiz:

$$c_1 = \int_{-\pi}^{\pi}(c_1\lambda y + c_2\lambda sin\,y + c_3\lambda\cos y + y)\cos y\,dy,$$

$$c_2 = \int_{-\pi}^{\pi}(c_1\lambda y + c_2\lambda\sin y + c_3\lambda\cos y + y)y^2dy,$$

$$c_3 = \int_{-\pi}^{\pi}(c_1\lambda y + c_2\lambda\sin y + c_3\lambda\cos y + y)\sin y\,dy,$$

yoki

$$c_1\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}y\cos y\,dy\right) - c_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin y\cos y\,dy - c_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 y\,dy =$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi}y\cos y\,dy,$$

$$-c_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}y^3dy + c_2\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}y^2\sin y\,dy\right) - c_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}y^2\cos y\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}y^3\,dy,$$

$$-c_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\sin y\,dy - c_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 y\,dy + c_3\left(1 - \lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos y\sin y\,dy\right) = \int_{-\pi}^{\pi}y\sin y\,dy.$$

Bu tenglamalarga kirgan integrallarni hisoblab, c_1, c_2 va c_3 noma’lumlarni topish uchun quyidagi chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga ega bo‘lamiz:

$$c_1-\lambda\pi c_3=0,$$
$$c_2+4\lambda\pi c_3=0,$$
$$-2\lambda\pi c_1-\lambda\pi c_2+c_3=2\pi.$$

Bu sistemaning determinanti

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\pi\lambda \\ 0 & 1 & 4\pi\lambda \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix}=1+2\lambda^2\pi^2\neq 0.$$

Demak, avvalgi sistema yagona yechimga ega bo'ladi:

$$c_1=\frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2},\quad c_2=-\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2},\quad c_3=\frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

Bularni izlanayotgan noma'lum funksiyaning ifodasiga qo'yib, berilgan tenglamaning yechimini

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}(\lambda\pi x-4\lambda\pi\sin x+\cos x)+x$$

ko'rinishda topamiz.

Mashqlar. Aynigan yadroli quyidagi integral tenglamalar yechilsin.

1. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^1(1+xy)\varphi(y)\,dy=x^2.$

Javob: $\lambda^2-16\lambda+12\neq 0$ bo'lganda.

$$\varphi(x)=x^2+\frac{\lambda(3-\lambda)}{\lambda^2-16\lambda+12}+\frac{\lambda(24+\lambda)}{6(\lambda^2-16\lambda+12)}.$$

2. $\varphi(x)-\int\limits_0^\pi\cos(x+y)\varphi(y)\,dy=1.$

Javob: $\varphi(x)=1-\dfrac{4}{2+\pi}\sin x.$

3. $\varphi(x)-4\int_{0}^{\pi/2}\sin^{2}x\varphi(y)dy=2x-\pi.$

Javob: $\varphi(x)=\dfrac{\pi^{2}}{\pi-1}\sin^{2}x+2x-\pi.$

4. $\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi/4}^{\pi/4}tg\, y\varphi(y)dy=ctg\, x.$

Javob: $\varphi(x)=\dfrac{\pi}{2}\lambda+ctg\, x.$

5. $\varphi(x)-\lambda\int_{0}^{1}\cos(q\ln y)\varphi(y)dy=1.$

Javob: $\varphi(x)=\dfrac{1+q^{2}}{1+q^{2}-\lambda}.$

3. Uzluksiz yadroli Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamasi. Endi (1) tenglamaning yadrosi (24) ko'rinishda bo'lmagan holni tekshiraylik. Agar $K(x, y)$ funksiya asosiy kvadratda uzluksiz bo'lsa, matematik analiz kursida isbotlanadigan Veyershtrass teoremasiga asosan, har bir $\varepsilon>0$ uchun x va y ga nisbatan yetarli yuqori darajada shunday $K_0(x, y)$ ko'phad mavjud bo'ladiki, asosiy kvadratda

$$\left|K(x, y)-K_{0}(x, y)\right|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Ravshanki, $K_0(x, y)$ ko'phadning har bir hadini bittasi x ga, ikkinchisi y ga bog'liq bo'lgan ikkita funksiyaning ko'paytmasi sifatida ifodalash mumkin. Shu sababli $K(x, y)$ yadroni

$$K(x, y)=\sum_{i=1}^{n}p_{i}(x)q_{i}(y)+K_{1}(x, y) \tag{37}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin. Bundagi $K_1(x, y)$ ifoda $\{a\le x, y\le b\}$ kvadratda

$$\int_{a}^{b}\left|K(x,y)\right|dy<\varepsilon \tag{38}$$

shartni qanoatlantiruvchi uzluksiz funksiyadir.

(37) tenglik $K(x,y)$ yadroning kichik va aynigan yadrolar yig'indisiga ajratilganligini ifodalovchi formuladir.

Ixtiyoriy $R>0$ sonni belgilab olib, (1) tenglamani λ parametrning qiymatlari faqat $|\lambda|\leq R$ doirada yotgandagina tekshiramiz. $\varepsilon>0$ sonni shunday kichik qilib tanlaymizki, $\varepsilon<\frac{1}{2R}$ bo'lsin. (37) tenglikka asosan (1) integral tenglamani

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K_1(x,y)\varphi(y)dy=F(x) \tag{39}$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerda

$$F(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\int_a^b p_i(x)q_i(y)\varphi(y)dy. \tag{40}$$

Shunday qilib, parametri $|\lambda|\varepsilon<1$ tenglikni qanoatlantiruvchi tenglamani hosil qildik. 1- § dan ma'lumki, bunday integral tenglama yagona yechimga ega bo'ladi. $K_1(x,y)$ yadroning rezolventasini $R_1(x,y,\lambda)$ orqali belgilab, (39) tenglamani

$$\varphi(x)=F(x)+\lambda\int_a^b R_1(x,y;\lambda)F(y)dy \tag{41}$$

ko'rinishda yozib olamiz. (41) tenglikdagi $F(x)$ o'rniga uning (40) dagi qiymatini olib borib qo'yamiz:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\int_a^b p_i(x)q_i(y)\varphi(y)dy+$$

$$+\lambda\int_a^b R_1(x,t;\lambda)\left[f(t)+\lambda\sum_{i=1}^{n}\int_a^b p_i(t)q_i(y)\varphi(y)dy\right]dt.$$

Ushbu

$$g(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R_1(x,t;\lambda)f(t)dt,$$

$$r_i(x,\lambda)=p_i(x)+\lambda\int_a^b R_i(x,t;\lambda)p_i(t)dx$$

belgilashlarni kiritib,

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^n r_i(x,\lambda)q_i(y)\varphi(y)dy=g(x) \qquad (42)$$

tenglamani hosil qilamiz.

Izoh. $R_1(x,y;\lambda)$ rezolventa $|\lambda|<\frac{1}{\varepsilon}$ doirada λ ga nisbatan darajali qatorning yig'indisi bo'lgani uchun bu doirada u analitik funksiya bo'ladi. Ammo $\varepsilon<\frac{1}{2R}$ bo'lgani uchun rezolventa $|\lambda|<2R$ doirada, ayniqsa $|\lambda|\leq R$ yopiq doirada analitik funksiya bo'ladi. Bundan shu yopiq doirada $r_i(x,\lambda)$ funksiyalarning λ ga nisbatan analitik funksiya ekanligi kelib chiqadi. Endi (42) tenglamani (26) belgilashlardan foydalanib,

$$\varphi(x)=g(x)+\lambda\sum_{i=1}^n c_i r_i(x,\lambda) \qquad (43)$$

ko'rinishda yozib olamiz. c_i, $i=1,...,n$, o'zgarmas sonlarni shunday tanlaymizki, natijada (43) formula bilan aniqlangan $\varphi(x)$ funksiya (42) integral tenglamaning yechimi bo'lsin.

(43) ifodani (42) tenglamaning chap tomoniga olib borib qo'yib,

$$\alpha_{ij}=\int_a^b q_i(y)r_j(y,\lambda)dy, \quad \gamma_i=\int_a^b q_i(y)g(y)dy$$

belgilashlarni kiritib, 2-banddagi mulohazalarni qaytarsak, (42) integral tenglamaga ekvivalent bo'lgan

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^n \alpha_{ij}c_j=\gamma_i, \quad i=1,2,...,n \qquad (44)$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini hosil qilamiz.

Bu sistemaning α_{ij} koeffitsientlari $r_i(x,\lambda)$ funksiyalar orqali aniqlanganligi uchun, λ parametrning funksiyalari bo'lib, $|\lambda|\leq R$ yopiq doirada analitikdir. Shunday qilib, λ ning ixtiyoriy chekli tayin qiymati uchun (1) tenglama aynigan yadroli (42) tenglamaga ekvivalent bo'lib, (42) tenglama uchun 2- bandda isbotlangan Fredgolm teoremalari o'rinli bo'lganligi sababli (1) integral tenglama, unga mos bir jinsli

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy=0 \qquad (45)$$

va qo'shma bir jinsli

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(y,x)\psi(y)dy=0 \qquad (46)$$

tenglamalar uchun ham o'z kuchini saqlab qoladi. Bu teoremalarni bitta alternativa sifatida bayon qilamiz.

Fredgolm alternativasi. *Agar (1) tenglamaga mos bir jinsli (45) tenglama λ ning har bir tayin qiymati uchun noldan farqli yechimga ega bo'lmasa, (1) tenglama ixtiyoriy ozod had $f(x)$ uchun $f(x)$ yagona yechimga ega bo'ladi; agar (45) bir jinsli tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lsa, (45) tenglama ham va unga qo'shma (46) bir jinsli tenglama ham bir xil chekli sondagi chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi: u holda (1) tenglama ixtiyoriy $f(x)$ uchun yechimga ega bo'lavermaydi, (1) tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun uning ozod hadi $f(x)$ qo'shma (46) bir jinsli tenglamaning barcha yechimlariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni*

$$\int_a^b f(x)\psi_i(x)dx=0, \quad i=1,2,...,k,$$

bunda $\psi_i(x)$ funksiyalar (46) tenglamaning barcha chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlari.

(44) algebraik sistemaning determinanti

$$D_R(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\alpha_{11} & -\lambda\alpha_{12} & \dots & -\lambda\alpha_{1n} \\ -\lambda\alpha_{21} & 1-\lambda\alpha_{22} & \dots & -\lambda\alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda\alpha_{n1} & -\lambda\alpha_{n2} & \dots & 1-\lambda\alpha_{nn} \end{vmatrix}$$

$|\lambda|\le R$ doirada λ ning analitik funksiyasidir, chunki bu doirada α_{ij} koeffitsientlar λ ga nisbatan analitikdir. $D_R(0)=1$ bo'lgani uchun $D_R(\lambda)$ funksiya noldan farqli. Bundan analitik funksiyalarning yagonalik xossasiga asosan $D_R(\lambda)$ determinant $|\lambda|\le R$ doirada faqat chekli sondagi nollarga ega degan xulosaga kelamiz.

Aynan nolga teng bo'lgan funksiya ravshanki, bir jinsli (45) tenglamaning va unga qo'shma bo'lgan (46) bir jinsli tenglamaning yechimi bo'ladi. Bundan keyin bir jinsli (yoki unga qo'shma) tenglamaning yechimi deganda aynan noldan farqli yechimni tushunamiz.

Endi 1- banddagiday quyidagi ta'riflarni kiritishimiz mumkin.

Bir jinsli (45) tenglama $\varphi_i(x)$, $i=1,...,k$, yechimlarga ega bo'lgan

λ parametrning qiymatini $K(x,y)$ yadroning yoki (1) tenglamaning xos soni, $\varphi_i(x)$ funksiyalarni esa shu yadro yoki tenglamaning λ xos songa mos bo'lgan xos funksiyalari deyiladi.

Shunday qilib, $|\lambda|\leq R$ doirada joylashgan xos sonlar, shu doirada joylashgan $D_R(\lambda)$ determinant ildizlari bilan ustma-ust tushadi.

Yuqorida bayon qilganlarga asosan, yana bir bor ta'kidlab o'tamizki, berilgan xos songa mos chiziqli bog'liq bo'lmagan xos funksiyalarning soni cheklidir.

$K(x,y)$ yadroning barcha xos sonlari to'plami bu yadroning spektri deb ataladi.

Fredgolm teoremalaridan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

Fredgolm integral tenglamasi xos sonlarining to'plami ko'pi bilan sanoqli bo'ladi va ular chekli limit nuqtalarga ega bo'lmaydi.

Haqiqatan ham, kompleks λ tekislikda umumiy markazi koordinata boshida va radiuslari 1, 2, 3, ... bo'lgan aylanalar o'tkazamiz. Bu aylanalar λ tekislikni sohalarning sanoqli to'plamiga ajratadi. Biz ko'rdikki, radiusi n ga teng bo'lgan ixtiyoriy doirada faqat chekli sondagi xos sonlar bor. U holda ravshanki, har bir $n<|\lambda|\leq n+1$ halqada ham chekli sondagi xos sonlar yotadi; barcha xos sonlarning to'plami sanoqli sondagi chekli to'plamlar yig'indisidan iborat, bunday yig'indi esa ma'lumki, yoki chekli, yoki sanoqli.

Xos sonlarning limit nuqtasi koordinat boshidan chekli masofada yotishi mumkin emas, aks holda λ- tekislikda shunday doira topilgan bo'lar ediki, unda xos sonlarning cheksiz to'plami joylashgan bo'lar edi. Bunday bo'lishi mumkin emas.

So'ngra, Fredgolmning ikkinchi teoremasidan, har bir xos sonning karralikligi chekli bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, $K(x,y)$ yadroning barcha xos sonlarini ular modullarining o'sish tartibi bo'yicha qaytadan nomerlash mumkin

$$|\lambda_1|\leq|\lambda_2|\leq....,$$

bunda λ_k ning karraliklari qancha bo'lsa, shuncha marta takrorlanadi.

Izoh. Ko'pincha $K(x,y)$ yadro va $f(x)$ funksiya x va y haqiqiy o'zgaruvchilarning kompleks funksiyalari bo'ladi. Bu holda (1) tenglamaning $\varphi(x)$ yechimlari ham, umuman aytganda, x haqiqiy o'zgaruvchining kompleks funksiyalari bo'ladi. Shu bilan birga yuqorida isbot qilingan barcha teoremalar o'z kuchini saqlab qoladi.

Eslatib o'tamiz, agar

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)+i\varphi_2(x)$$

bo‘lsa, bunda $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ haqiqiy o‘zgaruvchining haqiqiy funksiyalari, u holda

$$\int_a^b \varphi(x)dx=\int_a^b \varphi_1(x)dx+i\int_a^b \varphi_2(x)dx$$

bo‘ladi.

1-misol. Ushbu integral tenglama yechilsin:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi \cos(x+y)\varphi(y)dy=\cos 3x.$$

Bu tenglamani quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^\pi (\cos x\cos y-\sin x\sin y)\varphi(y)dy=\cos 3x.$$

Bundan,

$$c_1=\int_0^\pi \varphi(y)\cos y\,dy,\ c_2=\int_0^\pi \varphi(y)\sin y\,dy \tag{47}$$

belgilashlarni kiritib,

$$\varphi(x)=c_1\lambda\cos x-c_2\lambda\sin x+\cos 3x \tag{48}$$

tenglikni hosil qilamiz. (48) ni (47) ga qo‘yamiz:

$$c_1=\int_0^\pi (c_1\lambda\cos y-c_2\lambda\sin y+\cos 3y)\cos y\,dy,$$

$$c_2=(c_1\lambda\cos y-c_2\lambda\sin y+\cos 3y)\sin y\,dy$$

yoki

$$c_1\left(1-\lambda\int_0^\pi \cos^2 y\,dy\right)+c_2\lambda\int_0^\pi \sin y\cos y\,dy=\int_0^\pi \cos 3y\cos y\,dy,$$

$$-c_1\lambda\int_0^\pi \cos y\sin y\,dy+c_2\left(1+\lambda\int_0^\pi \sin^2 y\,dy\right)=\int_0^\pi \cos 3y\sin y\,dy.$$

Bu tenglikdagi integrallarni hisoblagandan so‘ng, ushbu sistemaga ega bo‘lamiz.

$$c_1\left(1-\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0, \qquad c_2\left(1+\lambda\frac{\pi}{2}\right)=0. \tag{49}$$

(49) sistemaning determinanti

$$D(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\lambda\dfrac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\lambda\dfrac{\pi}{2} \end{vmatrix}=1-\frac{\pi^2}{4}\lambda^2.$$

Bir nechta holni tekshiramiz.

1) Agar $\lambda\neq\pm\frac{2}{\pi}\left(D(\lambda)\neq 0\right)$ bo‘lsa, (49) sistema yagona $c_1=0,\ c_2=0$ yechimga ega bo‘ladi. Demak berilgan integral tenglama birdan-bir $\varphi(x)=\cos 3x$ yechimga ega bo‘ladi. Unga mos bir jinsli

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+y)\varphi(y)dy=0 \tag{50}$$

tenglama esa, faqat $\varphi(x)=0$ yechimga ega bo‘ladi.

2) Agar $\lambda=\frac{2}{\pi}$ bo‘lsa, (49) sistema

$$c_1\cdot 0=0,$$
$$c_2\cdot 2=0$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bundan, $c_2=0,\ \ c_1=c,\ c$ — ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘lishi kelib chiqadi.

Berilgan integral tenglama

$$\varphi(x)=\bar{c}\cos x+\cos 3x, \quad \bar{c}=\frac{2c}{\pi}$$

formula bilan aniqlanadigan cheksiz ko‘p yechimlarga ega va unga mos bir jinsli (50) tenglama ham cheksiz ko‘p

$$\varphi(x)=\bar{c}\cos x$$

yechimlarga ega bo‘ladi.

3) Agar $\lambda=-\frac{2}{\pi}$ bo‘lsa, (49) sistema

$$2\cdot c_1=0,$$
$$0\cdot c_2=0$$

ko'rinishga keladi, bundan $c_1=0$, $c_2=c$, c — ixtiyoriy o'zgarmas.

U holda berilgan tenglama

$$\varphi(x)=c\cdot\sin x+\cos 3x$$

ko'rinishdagi umumiy yechimga ega bo'ladi.

Tekshirilayotgan misolda tenglamaning yadrosi $K(x,y)=\cos(x+y)$ bo'lib, unga mos qo'shma bir jinsli tenglamaning yadrosi ham xuddi shu funksiyadan iborat bo'ladi. Tenglamaning o'ng tomoni $f(x)=\cos 3x$ funksiya $\sin x$, $\cos x$ funksiyalarga ortogonaldir. Demak, Fredgolm alternativasidagi tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun zarur va yetarli bo'lgan ortogonallik sharti $[0,\pi]$ oraliqda bajariladi.

2- misol. Quyidagi integral tenglama yechilsin:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \sin\ln x\cdot\varphi(y)dy=2x.$$

Agar berilgan tenglamada $c=\int_0^1\varphi(y)dy$ desak, u holda

$$\varphi(x)=c\lambda\sin\ln x+2x$$

tenglikni hosil qilamiz. $\varphi(x)$ funksiyaning ushbu ifodasini tenglamaga qo'yib

$$c=c\lambda\int_0^1\sin\ln y\,dy+1\qquad\left(\int\sin\ln x\,dx=\frac{x}{2}(\sin\ln x-\cos\ln x)\right)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$c\left(1+\frac{\lambda}{2}\right)=1.$$

Agar $\lambda\neq-2$ bo'lsa, $c=\dfrac{2}{2+\lambda}$ bo'ladi. U holda berilgan tenglama yagona

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda}{2+\lambda}\sin\ln x+2x$$

yechimga ega bo'ladi. Berilgan tenglamaga mos bir jinsli

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 \sin\ln x\,\varphi(t)dt=0$$

tenglama faqat $\varphi(x)=0$ yechimga ega bo‘ladi.

Agar $\lambda=-2$ bo‘lsa, bir jinsli tenglamadan c ni aniqlash uchun $0\cdot c=0$ tenglik hosil bo‘ladi, bundan c ning ixtiyoriy o‘zgarmas son ekanligi kelib chiqadi.

Demak, bu holda bir jinsli integral tenglama cheksiz ko‘p

$$\varphi(x)=\bar{c}\sin\ln x \qquad (\bar{c}=-2c)$$

yechimlarga ega bo‘ladi.

Bir jinsli tenglamaga qo‘shma bo‘lgan bir jinsli tenglama xuddi shu tenglamaning o‘zidan iborat bo‘ladi.

Berilgan tenglamaning $f(x)=2x$ ozod hadi $\sin\ln x$ funksiyaga ortogonal bo‘lmagani uchun $\lambda=-2$ da tekshirilayotgan bir jinsli bo‘lmagan tenglama yechimlarga ega bo‘lmaydi.

3- misol. Ushbu

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xy^2\varphi(y)dy=\alpha x+\beta$$

tenglama α va β parametrlarning qaysi qiymatlarida yechimga ega bo‘lishi topilsin. Bu tenglamaga mos bir jinsli

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1 xy^2\varphi(y)dy=0$$

tenglamada

$$\int_0^1 y^2\varphi(y)dy=c$$

belgilashni kiritib, $\varphi(x)=c\lambda x$ tenglikni hosil qilamiz.

$\varphi(x)$ funksiyaning bu ifodasini bir jinsli tenglamaga qo‘ysak,

$$c\left(1-\frac{\lambda}{4}\right)=0$$

tenglamaga kelamiz. Agar $\lambda\neq4$ bo‘lsa, $c=0$, demak bir jinsli tenglama faqat nolga teng yechimga ega. Bir jinsli bo‘lmagan tenglama ixtiyoriy chekli α va β parametrlarda yagona yechimga ega bo‘ladi.

$\lambda=4$ son $K(x,y)=xy^2$ yadroning xos sonidan iborat bo‘ladi. Bu xos songa mos xos funksiya o‘zgarmas son aniqligida $\varphi(x)=x$ bo‘ladi. Ushbu

$$\psi(x)-\mu\int_0^1 y x^2 \varphi(y)dy=0$$

tenglama bir jinsli tenglamaga qo‘shma tenglamadir. $\mu=4$ bu tenglamaning xos sonidan iborat bo‘ladi. Bu xos songa mos qo‘shma bir jinsli tenglamaning yechimi $\psi(x)=x^2$. Shu sababli berilgan bir jinsli bo‘lmagan tenglama

$$\int_0^1(\alpha x+\beta)x^2\,dx=0 \text{ yoki } 3\alpha+4\beta=0$$

shart bajarilgan holda va faqat shu holdagina yechimga ega bo‘ladi.

Masalan, 3-misoldagi tenglamaning o‘ng tomoni $x+1$, ya’ni $\alpha=1$, $\beta=1$ bo‘lsa, yuqoridagi shart bajarilmaydi va demak tenglama bu holda yechimga ega bo‘lmaydi.

Agar tenglamaning o‘ng tomoni $x-\frac{3}{4}$, ya’ni $\alpha=1$, $\beta=-\frac{3}{4}$ bo‘lsa, tenglamaning echilish sharti bajariladi va tenglamaning yechimi $\varphi(x)=C_1 x-\frac{3}{4}$ bo‘ladi, bunda C_1 — ixtiyoriy o‘zgarmas.

Demak, bu holda tenglamaning yechimi yagona bo‘lmaydi.

Mashqlar. Ushbu integral tenglamalarning λ parametrning turli qiymatlarida echilishi tekshirilsin.

1. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1} x e^{y}\varphi(y)dy=x$.

Javob: Agar $\lambda\neq\frac{e}{2}$ bo‘lsa, $\varphi(x)=\frac{ex}{e-2\lambda}$,

Agar $\lambda=\frac{e}{2}$ bo‘lsa, yechimga ega emas.

2. $\varphi(x)-\lambda\int_{-1}^{1}(x^2-2xy)\varphi(y)dy=x^3-x$.

Javob:

$$\varphi(x)=\begin{cases} \text{agar } \lambda\neq-\frac{3}{4} \text{ bo‘lsa, } x^3-\frac{3}{5}\,\frac{4\lambda+5}{4\lambda+3}x; \\ \text{agar } \lambda=\frac{3}{2} \text{ bo‘lsa, } x^3-\frac{11}{15}x+Cx^2. \end{cases}$$

Agar $\lambda=-\dfrac{3}{4}$ bo‘lsa, tenglama yechimga ega emas.

3. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{2\pi}\left(\dfrac{1}{\pi}\cos x\cos y+\dfrac{1}{\pi}\sin 2x\sin 2y\right)dy=\sin x.$

Javob:

$$\varphi(x)=\begin{cases}\text{agar } \lambda\neq 1 \text{ bo‘lsa, } \sin x;\\ \text{agar } \lambda=1 \text{ bo‘lsa, } c_1\cos x+c_2\sin 2x+\sin x.\end{cases}$$

Quyidagi integral tenglamalar parametrlarning qaysi qiymatlarida yechimga ega bo‘lishi topilsin.

4. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_{-1}^{1}xy\varphi(y)dy=\alpha x^2+\beta x+\gamma.$

Javob: $\lambda\neq\dfrac{3}{2}$ bo‘lganda α, β, γ parametrlar ixtiyoriy chekli sonlar bo‘lishi mumkin; $\lambda=\dfrac{3}{2}$ da $\beta=0$, α, γ ixtiyoriy bo‘lganda tenglama echiladi.

5. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi/2}(x+y)\varphi(y)dy=\alpha e^{x}+\beta x.$

Javob: $\lambda\neq-6\pm4\sqrt{3}$ da α va β- ixtiyoriy sonlar; $\lambda=-6+4\sqrt{3}$ da tenglama $\left(\ell+\sqrt{3}-1\right)\alpha+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\beta=0$ shart bajarilganda yechiladi; $\lambda=-6-4\sqrt{3}$ bo‘lganda $\left(\ell-\sqrt{3}-1\right)\alpha+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)\beta=0$ shart bajarilganda tenglama yechiladi.

4- §. Skalyar ko‘paytma va norma. Ortogonal funksiyalar

Biz bu paragrafda keyinchalik bayon qilinadigan materiallarni o‘qish qulay bo‘lishi uchun haqiqiy o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar va Fure qatorlariga doir ayrim tushunchalarni qisqacha keltiramiz.

1. Kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan bo'lsin. *Agar ushbu*

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

integral mavjud (chekli) bo'lsa, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda integrallanuvchi yoki jamlanuvchi deyiladi.

Bunday funksiyalar sinfi L orqali belgilanadi. Ma'lumki, $f(x)$ funksiyaning jamlanuvchi bo'lishi uchun, $|f(x)|$ funksiyaning jamlanuvchi bo'lishi zarur va yetarlidir.

Funksiyalarning L_2 sinfi deb, ushbu

$$\int_a^b f^2(x)\,dx$$

integral mavjud bo'lgan $f(x)$ funksiyalar to'plamini aytiladi.

Endi ikki o'zgaruvchili $F(x,y)$ funksiya $a\le x\le b$ $c\le y\le d$ to'g'ri to'rtburchakda aniqlangan bo'lsin.

Agar

$$\int_a^b\int_c^d F^2(x,y)\,dx\,dy = M^2 < +\infty$$

shart bajarilsa, $F(x,y)$ funksiya L_2 sinfga tegishli deyiladi.

Fubini teoremasi. *$F(x,y)$ funksiya $\{a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$ to'g'ri to'rtburchakda jamlanuvchi bo'lsin. U holda:*

1) agar bu funksiyada y ni tanlab olib, x ning funksiyasi deb qarasak, deyarli har bir y uchun $F(x,y)$ funksiya x ning jamlanuvchi funksiyasidir;

2) ushbu

$$\int_a^b F(x,y)\,dx$$

integral $c\le y\le d$ segmentda y ning jamlanuvchi funksiyasidir;

3) ushbu

$$\int_a^b\int_c^d F(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d\left\{\int_a^b F(x,y)\,dx\right\}dy$$

tenglik o'rinlidir.

Agar x va y larning o'rinlarini almashtirsak, ushbu

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d F(x,y)\,dy \right\} dx = \int_a^b \int_c^d F(x,y)\,dx\,dy$$

formula o'rinli bo'ladi.

Agar $f(x)$ va $g(x)$ *funksiyalar* L_2 *sinfga tegishli bo'lsa,* $f g \in L$ *bo'ladi.* Bu fikrning to'g'riligi

$$|f(x)g(x)| \le \frac{1}{2}\left[f^2(x)+g^2(x)\right]$$

munosabatdan darhol kelib chiqadi. Ushbu

$$\left[f(x)+g(x)\right]^2 = f^2(x)+2f(x)g(x)+g^2(x)$$

tenglikdan $\left[f(x)+g(x)\right]^2$ funksiyaning jamlanuvchiligi, ya'ni $f(x)+g(x)$ ning L_2 sinfga tegishli ekanligi kelib chiqadi.

Endi ayrim tengsizliklarni keltirib chiqaramiz.

Bunyakovskiy — Shvars tengsizligi.

Agar $f(x), g(x) \in L_2$ bo'lsa,

$$\left[\int_a^b f(x)g(x)\,dx\right]^2 \le \int_a^b f^2(x)\,dx \cdot \int_a^b g^2(x)\,dx \qquad (51)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu tengsizlikni isbotlash uchun quyidagi tengsizlikka murojaat qilamiz:

$$\int_a^b \left[\lambda f(x)+g(x)\right]^2 dx = \lambda^2 \int_a^b f^2(x)\,dx + 2\lambda \int_a^b f(x)g(x)\,dx +$$

$$+\int_a^b g^2(x)\,dx = A\lambda^2 + 2B\lambda + C \ge 0,$$

bu yerda λ parametr $-\infty$ dan $+\infty$ gacha barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin,

$$A = \int_a^b f^2(x)\,dx, \quad B = \int_a^b f(x)g(x)\,dx, \quad C = \int_a^b g^2(x)\,dx.$$

Ma'lumki, koeffitsientlari A, B, C haqiqiy va $A>0$ bo'lgan $A\lambda^2+2B\lambda+C$ kvadrat uchhad barcha λ uchun manfiy emas, u holda uning diskriminanti musbat emas, ya'ni

$$B^2 \leq AC.$$

Bundan esa (51) tengsizlik bevosita kelib chiqadi.

Koshi tengsizligi. Agar $f(x)\in L_2$ va $g(x)\in L_2$ bo'lsa, u holda

$$\sqrt{\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bu tengsizlikni isbotlash uchun (51) tengsizlikning har ikki tomonidan ildiz chiqaramiz:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)dx}\sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}.$$

Bu tengsizlikni 2 ga ko'paytirib, har ikki tomoniga

$$\int_a^b f^2(x)dx + \int_a^b g^2(x)dx$$

ifodani qo'shamiz. U holda

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]^2 dx \leq \left[\sqrt{\int_a^b f^2(x)dx} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)dx}\right]^2$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bundan darhol Koshi tengsizligi kelib chiqadi.

2. Norma. O'rta ma'noda yaqinlashish. L_2 fazodan olingan ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning skalyar ko'paytmasi ushbu

$$(f,\varphi)=\int_a^b f(x)g(x)dx$$

ifoda bilan aniqlanadi. Ushbu

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\left[\int_a^b f^2(x)dx\right]^{\frac{1}{2}}$$

sonni $f(x)$ funksiyaning *normasi* deyiladi.

Normaning quyidagi xossalarini qayd qilib o'tamiz:

1) $\|f(x)\| \geq 0$, shu bilan birga $f(x)=0$ bo'lgan holda va faqat shu holdagina $\|f(x)\|=0$ bo'ladi.

2) $\|a f\|=|a| \cdot \|f\|$, xususiy holda $\|-f\|=\|f\|$.

3) $|(f g)| \leq \|f\| \cdot \|g\|$.

4) $\|f+g\| \leq \|f\|+\|g\|$.

1) va 2) xossalar normaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi; 3) xossa esa Bunyakovskiy—Shvars tengsizligidir. Nihoyat, 4) xossa Koshi tengsizligidan iborat bo'lib, uni uchburchak tengsizligi deb ham aytiladi.

$f(x)$ va $f_n(x)$, $n=1,2,...$ funksiyalar $[a,b]$ segmentda kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lsin.

Agar

$$\lim_{n \to \infty} \|f_n - \varphi\| = 0$$

bo'lsa, $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik $f(x)$ ga *o'rta ma'noda* yoki *o'rtacha yaqinlashadi* deyiladi.

Normaning ta'rifiga muvofiq avvalgi limitni quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b \left[f_n(x) - f(x) \right]^2 dx = 0.$$

O'rta ma'noda yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $\{f_n(x)\}$ ketma-ketlik ikki turli f va g limitlarga ega deb faraz qilsak, ya'ni $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - f\| = 0$, $\lim\limits_{n \to \infty} \|f_n - g\| = 0$ bo'lsa, u holda

$$\|f-g\| = \|(f_n - g) - (f_n - f)\| \leq \|f_n - f\| + \|f_n - g\| \underset{n \to \infty}{\to} 0,$$

bundan $\|f-g\|=0$ yoki $f(x)=g(x)$.

Quyidagi ma'lum teoremani ham eslatib o'tamiz.

Kvadrati bilan jamlanuvchi $\{f_n(x)\}$ *funksiyalarning ketma-ketligi o'rta ma'noda yaqinlashishi uchun*

$$\lim_{m,n\to\infty}\|f_m - f_n\| = 0$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Hadlari $[a, b]$ segmentda kvadrati bilan jamlanuvchi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x) \tag{52}$$

qatorning qismiy yig'indilaridan tashkil topgan ketma-ketlik kvadrati bilan jamlanuvchi $\varphi(x)$ funksiyaga o'rta ma'noda yaqinlashsa, (52) qator ham shu funksiyaga o'rta ma'noda yaqinlashadi.

Qatorning o'rta ma'noda yaqinlashishi uchun

$$\lim_{N\to\infty}\left\|\sum_{n=N+1}^{N+P}\varphi_n(x)\right\| = 0$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Agar qator o'rta ma'noda yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda bu qatorni avval ixtiyoriy kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyaga ko'paytirib, so'ngra hadlab integrallash mumkin. Haqiqatan ham, (52) qator o'rta ma'noda yaqinlashuvchi va $\psi(x)$ kvadrati bilan jamlanuvchi funksiya bo'lsin. Quyidagi ayirmani baholaymiz:

$$\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx - \sum_{n=1}^{N}\int_a^b \varphi_n(x)\psi(x)dx = \int_a^b \psi(x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\varphi_n(x)dx.$$

Bunyakovskiy—Shvars tengsizligiga asosan

$$\left|\int_a^b \psi(x)\sum_{n=N+1}^{\infty}\varphi_n(x)dx\right| \le \|\psi\|\cdot\left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\varphi_n\right\|.$$

O'rta ma'nodagi yaqinlashishning ta'rifiga ko'ra, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N(\varepsilon)$ topiladiki,

$$\left\|\sum_{n=N+1}^{\infty}\varphi_n\right\| < \frac{\varepsilon}{\|\psi\|},\quad N \ge N(\varepsilon)$$

tengsizlik bajariladi. Bundan, ixtiyoriy $N > N(\varepsilon)$ uchun

$$\left|\int_a^b \varphi(x)\psi(x)dx - \sum_{n=1}^{N}\int_a^b \varphi_n(x)\psi(x)dx\right| < \varepsilon$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlik esa,

$$\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)\psi(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b \varphi_n(x)\psi(x)dx$$

tenglikka teng kuchlidir. Bu tenglikni ushbu

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n, \psi\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (\varphi_n, \psi)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bundan shunday xulosa kelib chiqadi: o'rta ma'noda yaqinlashuvchi qatorni kvadrati bilan jamlanuvchi ixtiyoriy funksiyaga hadlab skalyar ko'paytirish mumkin.

3. Ortogonal sistemalar. $[a, b]$ segmentda berilgan ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning skalyar ko'paytmasi nolga teng, ya'ni

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$$

bo'lsa, bu funksiyalar *ortogonal* deyiladi.

Agar $[a, b]$ segmentda berilgan $f(x)$ uchun

$$\int_a^b f^2(x)dx = 1$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya *normalangan* (normallangan) deyiladi.

$[a, b]$ segmentda berilgan

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{53}$$

funksiyalar sistemasi uchun

$$\int_a^b \varphi_i(x)\varphi_k(x)dx = \begin{cases} 1, & i = k, \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

tengliklar bajarilsa, bu sistema *segmentda ortonormal sistema* deyiladi.

Berilgan ortogonal funksiyalar sistemasida ortogonal va aynan noldan farqli bo'lgan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiya mavjud bo'lsa, sistema *to'la bo'lmagan*, aks holda *to'la sistema* deyiladi.

Ixtiyoriy chekli sonda olingan ortonormal funksiyalar chiziqli bog'liq bo'lmaydi. Haqiqatan ham, agar $\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x)$ funksiyalar ortonormal bo'lib,

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x) = 0, \quad a_i = \text{const}$$

bo'lsa, u holda oxirgi tenglikni $\varphi_k(x)$ ga ko'paytirib, $\varphi_l(x)$ funksiyaning ortonormalligini e'tiborga olsak, barcha a_k koeffitsientlarning nolga tengligi kelib chiqadi.

Agar $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ funksiyalar ortonormal va

$$\varphi(x)=\sum_{j=1}^{n} a_j\varphi_j(x),\quad a_j=\text{const}$$

bo'lsa, u holda

$$|\varphi|^2=\sum_{j=1}^{n}|a_j|^2 \tag{54}$$

tenglikning o'rinli bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

Agar chiziqli bog'liq bo'lmagan funksiyalarning chekli yoki cheksiz

$$\omega_1(x),\ \omega_2(x),\dots,\ \omega_n(x),\dots$$

ketma-ketligi berilgan bo'lsa, u holda shunday ortonormal $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... ketma-ketlik tuzish mumkinki, har bir $\varphi_n(x)$ funksiya $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ..., $\omega_n(x)$ orqali chiziqli ifodalansin va aksincha, har bir $\omega_n(x)$ funksiya $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$ orqali chiziqli ifodalansin.

Funksiyalarning bunday ortonormal sistemasini tuzish quyidagi:

$$\psi_1(x)=\omega_1(x),\quad \varphi_1(x)=\frac{\psi_1(x)}{\|\psi_1(x)\|}$$

ortogonallash jarayoni yordamida bajariladi deb hisoblaymiz; agar $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{n-1}(x)$ funksiyalar tuzib bo'lingan bo'lsa,

$$\psi_n(x)=\omega_n(x)-\sum_{i=1}^{n-1}(\omega_n,\varphi_i)\varphi_i(x),\quad \varphi_n(x)=\frac{\psi_n(x)}{\|\psi_n\|}$$

deb hisoblaymiz. Bunda $\|\psi_n\|$ ga bo'lish hamma vaqt mumkin; agar $\|\psi_n\|=0$ bo'lib qolsa, $\psi_n(x)$ ham nolga teng bo'ladi, u holda oldingi tenglikdan $\omega_n(x)$ funksiya $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{n-1}(x)$ funksiyalarga, demak $\omega_1(x)$, ..., $\omega_{n-1}(x)$ funksiyalarga ham chiziqli bog'liq bo'lib qoladi, bunday bo'lishi mumkin emas. Shunday qilib, tuzilgan $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, ... ketma-ketlik ortonormal bo'ladi.

$\varphi_n(x)$ ning tuzilishidan ko‘rinayaptiki, bu funksiya $\omega_1(x)$, $\omega_2(x)$, ..., $\omega_n(x)$ orqali chiziqli ifodalanadi. Shu bilan birga $\omega_n(x)$ ham $\varphi_1(x),...,\varphi_n(x)$ orqali chiziqli ifodalanadi. Haqiqatan ham, $\psi_n(x)=\varphi_n(x)\|\psi_n\|$ tenglikdan

$$\omega_n(x)=\|\psi_n\|\varphi_n(x)+\sum_{i=1}^{n-1}(\omega_n,\varphi_i)\varphi_i(x)$$

tenglik kelib chiqadi.

$\{\varphi_k(x)\}$ sistema L_2 fazoda ortonormal va $f(x)$ funksiya fazodan olingan ixtiyoriy funksiya bo‘lsin.

$a_k=(f,\varphi_k)=\int\limits_a^b f(x)\varphi_k(x)dx,\ k=1,2,..,$ sonni $f(x)$ funksiyaning $\{\varphi_k(x)\}$ sistemaga nisbatan *Furye koeffitsienti* va $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$ qatorni $f(x)$ funksiyaning *Furye qatori* deyiladi.

Endi L_2 fazoda $f(x)$ funksiya Furye qatorining qismiy yig‘indisi

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k(x)$$

funksiyaning o‘ziga qanchalik yaqinligini tekshiramiz, ya’ni $\|f-S_n\|$ miqdorni hisoblaymiz:

$$\|f(x)-S_n(x)\|^2=\int\limits_a^b[f(x)-S_n(x)]^2dx=\int\limits_a^b(f^2-2fS_n+S_n^2)dx=$$

$$=\int\limits_a^b S_n^2dx-2\int\limits_a^b fS_ndx+\int\limits_a^b f^2dx,$$

$$\int\limits_a^b S_n^2\,dx=\int\limits_a^b\sum_{k=1}^{n}a_k\varphi_k\sum_{i=1}^{n}a_i\varphi_i\cdot dx=\sum_{i,k=1}^{n}a_i\cdot a_k(\varphi_i,\varphi_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k^2,$$

$$\int\limits_a^b fS_ndx=\sum_{k=1}^{n}a_k(f,\varphi_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k^2,\ \text{chunki}\ (f,\varphi_k)=a_k.$$

Demak,

$$\|f(x)-S_n\|^2=\int\limits_a^b f^2dx-\sum_{k=1}^{n}a_k^2=\|f\|-\sum_{k=1}^{n}a_k^2. \qquad (55)$$

Bu formulani *Bessel ayniyati* deyiladi.

(55) formulaning chap tomonidagi miqdor manfiy bo'lmagani uchun

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \leq \|f\|^2.$$

Bu tengsizlik n ning hamma natural qiymatlari uchun o'rinli, demak,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \leq \|f\|^2. \tag{56}$$

(56) tengsizlik *Bessel tengsizligi* deyiladi.

Agar (56) da tenglik bo'lsa, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 = \|f\|^2, \tag{57}$$

u holda bu tenglik *yopiqlik formulasi* yoki *Parseval tengligi* deyiladi.

Agar (57) tenglik L_2 dan olingan ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun bajarilsa, u holda $\{\varphi_k(x)\}$ *sistema* L_2 *da yopiq* deyiladi.

(55) tenglikdan (57) tenglikka asosan

$$\lim_{n\to\infty} \|f - S_n\| = 0$$

kelib chiqadi. Demak, yopiqlik formulasi bajarilganda $S_n(x)$ yig'indi o'rta ma'noda $f(x)$ ga yaqinlashar ekan.

Riss—Fisher teoremasi. *Agar $\{\varphi_k(x)\}$ ortonormal sistema bo'lib,*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n^2 \tag{58}$$

sonli qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda shunday $f(x) \in L_2$ funksiya mavjudki, uning uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_n \varphi_k(x) \tag{59}$$

qator $\{\varphi_k(x)\}$ sistemaga nisbatan Furye qatori bo'ladi va yopiqlik formulasi bajariladi.

Isbot. (54) formulaga asosan

$$\left\| \sum_{K=N+1}^{N+P} a_k \varphi_k \right\|^2 = \sum_{k=N+1}^{N+P} a_k^2.$$

Bu tenglikning o'ng tomoni yaqinlashuvchi (58) sonli qatorning qoldig'i bo'lgani uchun $N \to \infty$ da nolga intiladi. Bu holda (59) qator o'rtacha yaqinlashadi. (59) qatorning yig'indisini $f(x)$ orqali belgilaymiz. Bu qatorni $\varphi_k(x)$ ga hadlab skalyar ko'paytirib, $\{\varphi_k(x)\}$ sistemaning ortonormalligini e'tiborga olsak, $a_k = (f, \varphi_k)$, $k = 1, 2, ...,$ ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, (59) qator Furye qatoridan iborat ekan. (59) qatorni $f(x)$ ga skalyar ko'paytirib,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (\varphi_k, f) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$$

ni hosil qilamiz. Bu esa (59) qatorning yig'indisi uchun yopiqlik formulasi o'rinli ekanini bildiradi.

Agar $\{\varphi_k(x)\}$ ortonormal sistema to'la bo'lsa, (59) qatorning $f(x)$ dan boshqa yig'indisi bo'lmaydi, ya'ni $f(x)$ yagona bo'ladi.

Faraz qilaylik, (59) qatorning yana bir, $g(x)$ yig'indisi bo'lsin, ya'ni $(g, \varphi_k) = a_k$, $\psi(x) = f(x) - g(x)$ bo'lsin. U holda

$$(\psi, \varphi_k) = (f, \varphi_k) - (g, \varphi_k) = a_k - a_k = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan $\psi(x)$ ning to'la sistemaning barcha funksiyalariga ortogonalligi kelib chiqadi. To'la sistemaning ta'rifidan $\psi(x)$ aynan nolga teng bo'ladi. Bundan $f(x) = g(x)$.

Demak,

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_k) \varphi_k(x).$$

Bu ifodani hadlab $f(x)$ ga skalyar ko'paytirib,

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} (f, \varphi_n)^2$$

tenglikni hosil qilamiz.

Shunday qilib, agar ortonormal sistema to'la bo'lsa, u holda kvadrati bilan jamlanuvchi ixtiyoriy funksiya uchun yopiqlik formulasi o'rinli bo'ladi.

Yuqorida aytilganlarning barchasini o'zgarishsiz biror sohada kvadrati bilan jamlanuvchi ko'p o'zgaruvchili funksiyalarga ham o'tkazish mumkin, faqat oraliq bo'yicha olingan integralni funksiya aniqlangan soha bo‘yicha olingan integral bilan almashtirish kerak. Agar D ko‘p o‘lchovli soha bo‘lib, $P(x)=P(x_1,...,x_n)$ bu sohaning biror nuqtasi, dV — hajm elementi bo‘lsa, D sohada kvadrati bilan jamlanuvchi ikkita $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning skalyar ko‘paytmasi

$$(f,\ g)=\int_D f(P)g(P)dV$$

integral bilan aniqlanadi. Bunga asosan avvalgi barcha teoremalar bayon qilinadi.

Endi, keyinchalik foydalaniladigan $\{a \le x, y \le b\}$ kvadratda ortonormal va to‘la ketma-ketlikning maxsus tuzilishini keltiramiz.

$\{\varphi_k(x)\}$ sistema $[a,\ b]$ segmentda to‘la ortonormal bo‘lsin. Ushbu

$$\{\varphi_m(x)\varphi_n(y)\} \tag{60}$$

sistema $\{a \le x, y \le b\}$ kvadratda ortonormal va to‘la bo‘ladi. Haqiqatan ham, (60) sistemaning ikkita $\varphi_m(x)\varphi_n(y)$ va $\varphi_p(x)\varphi_q(y)$ funksiyasini tekshiramiz. Bu funksiyalar $m=p$, $n=q$ bo‘lganda o‘zaro teng, aks holda turlicha bo‘ladi. Bularning skalyar ko‘paytmasini tuzamiz.

$$\left(\varphi_m(x)\varphi_n(y),\ \varphi_p(x)\varphi_q(y)\right)=\int_a^b\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_n(y)\varphi_p(x)\varphi_q(y)\,dx\,dy=$$

$$=\int_a^b \varphi_m(x)\varphi_p(x)\,dx\int_a^b \varphi_n(y)\varphi_q(y)dy\,.$$

Bu ko‘paytma $m=p$, $n=q$ bo‘lganda birga, boshqa hollarda nolga teng, ya’ni (60) sistema $\{a \le x, y \le b\}$ kvadratda ortonormal.

(60) sistemaning to‘laligini ko‘rsatish uchun aksincha faraz qilamiz, u to‘la bo‘lmasin, ya’ni shunday $\omega(x,y)$ funksiya mavjudki, u (60) sistemaning barcha funksiyalariga ortogonal

$$\left(\omega(x,y),\ \varphi_m(x)\,\varphi_n(y)\right)=$$

$$=\int_a^b\int_a^b \omega(x,y)\,\varphi_m(x)\varphi_n(y)\,dx\,dy=0,\quad m,n=1,2,...$$

yoki

$$\int_a^b \varphi_m(x)dx\int_a^b \omega(x,y)\varphi_n(y)dy=0.$$

n sonni aniqlab,

$$\int_a^b \omega(x,y)\varphi_n(y)dy=\omega_n(x)$$

desak,

$$\int_a^b \omega_n(x)\,\varphi_m(x)dx=0,\ m=1,2,...$$

bo'ladi. Bu tenglik esa, $\omega_n(x)$ funksiyaning $[a,b]$ segmentda $\{\varphi_k(x)\}$ to'la sistemaning barcha funksiyalarga ortogonal ekanligini ko'rsatadi. Demak, $\omega_n(x)$ aynan nolga teng, ya'ni

$$\int_a^b \omega(x,y)\varphi_n(y)dy=0,\ n=1,2,....$$

x ni ixtiyoriy belgilab olamiz. Oxirgi tenglik shuni ko'rsatadiki, $\omega(x,y)$ ga teng bo'lgan y ning funksiyasi $\{\varphi_n(y)\}$ to'la sistemaning barcha funksiyalariga ortogonal. Bundan farazimizning to'g'ri emasligi, ya'ni $\omega(x,y)=0$ ekanligi va (60) sistemaning to'la sistemaligi kelib chiqadi.

Yuqorida bayon qilingan tushunchalar o'zgaruvchilar soni ko'p bo'lgan holda ham o'z kuchini saqlab qoladi, ya'ni agar $\{\varphi_k(x)\}$, $x=(x_1,...,x_n)$, $k=1,2,...$— biror D sohada to'la ortonormal sistema bo'lsa, (60) sistema $x\in D$, $y\in D$ bo'lganda ortonormal va to'la bo'ladi.

To'la ortonormal sistemalarga ayrim misollar keltiramiz. $(-\pi,\pi)$ oraliqda ushbu

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{\cos x}{\sqrt{\pi}},\ \frac{\sin x}{\sqrt{\pi}},...,\frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}},\frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}},...$$

trigonometrik funksiyalar sistemasi to'la ortonormal sistemadan iborat bo'ladi.

Ma'lumki, $\sin kt$, $k=1,2,..$ funksiyalar sistemasi $(0,\pi)$ oraliqda ortogonal (lekin normalangan emas) va to'ladir. $t=\frac{\pi(x-a)}{b-a}$

almashtirish yordamida $(0,\pi)$ oraliq (a,b) oraliqqa o‘tadi. Yangi oraliqda

$$\sin\frac{k\pi(x-a)}{b-a}, \quad k=1,2,...$$

funksiyalar sistemasi ortogonal va to‘la bo‘ladi.

Bu sistemani normalash uchun sistemaning har bir funksiyasini uning normasiga bo‘lish kifoya, normaning kvadrati esa,

$$\int_a^b \sin^2\frac{k\pi(x-a)}{b-a}\,dx=\frac{b-a}{2}$$

songa teng. Shunday qilib,

$$\varphi_k(x)=\sqrt{\frac{2}{b-a}}\,\sin\frac{k\pi(x-a)}{b-a}, \quad k=1,2,...$$

funksiyalar (a,b) oraliqda to‘la ortonormal sistemani tashkil qiladi.

$(0,\pi)$ oraliqda

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sin kt, \quad k=1,2,...$$

sistema ortonormal va to‘ladir, shuning uchun

$$\int_0^\pi \frac{2}{\pi}\sin pt\sin qt\,dt=\begin{cases}0, & p\neq q,\\ 1, & p=q.\end{cases} \tag{61}$$

$0<t<\pi$ oraliq $t=\dfrac{\pi x}{x+1}$ almashtirish natijasida cheksiz $0<x<\infty$ oraliqqa o‘tadi, (61) formula esa

$$\int_0^\infty \frac{2}{(x+1)^2}\,\sin\frac{p\pi x}{x+1}\,\sin\frac{q\pi x}{x+1}\,dx=\begin{cases}0, & p\neq q,\\ 1, & p=q\end{cases}$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu esa

$$\psi_n(x)=\frac{\sqrt{2}}{x+1}\,\sin\frac{k\pi x}{x+1}, \quad k=1,2,... \tag{62}$$

funksiyalarning $(0,\infty)$ oraliqda ortonormalligini ko‘rsatadi.

Endi berilgan sistemaning $(0,\infty)$ oraliqda to'la ekanligini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, kvadrati bilan jamlanuvchi $f(x)$ funksiya barcha (62) funksiyalarga ortogonal bo'lsin, ya'ni

$$\int_0^\infty f(x)\sin\frac{k\pi x}{x+1}\frac{dx}{x+1}=0,\quad k=1,2,\dots$$

$t=\dfrac{\pi x}{x+1}$ almashtirish yordamida avvalgi tenglik

$$\int_0^\pi \frac{1}{\pi-t} f\left(\frac{t}{\pi-t}\right)\sin kt\,dt=0 \tag{63}$$

ko'rinishda yoziladi. $\dfrac{1}{\pi-t} f\left(\dfrac{t}{\pi-t}\right)$ funksiya $(0,\pi)$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi bo'ladi, chunki

$$\int_0^\pi \frac{1}{(\pi-t)^2} f^2\left(\frac{t}{\pi-t}\right)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty f^2(x)\,dx<\infty.$$

(63) tenglik esa, bu funksiyaning to'la $\{\sin kx\}$ sistemaga ortogonalligini ko'rsatadi, shu sababli u nolga teng. U holda $f(x)=0$, demak (62) sistema to'la.

Ushbu

$$\frac{\ell^{-\frac{x^2}{2}} H_n(x)}{2^{n/2}\sqrt{n!}\,\sqrt[4]{\pi}}$$

funksiyalar, bunda $H_n(x)$ — Ermit ko'phadlari, ya'ni

$$H_n(x)=(-1)^n \ell^{x^2}\frac{d^n \ell^{-x^2}}{dx^n},\quad n=0,1,2,\dots,$$

$(-\infty,\infty)$ oraliqda to'la ortonormal sistemani tashkil qiladi.

5- §. Olingan natijalarni umumlashtirish

Biz 1-paragrafda Fredgolmning ikkinchi turdagi integral tenglamasini tekshirganimizda, uning $K(x,y)$ yadrosi va $f(x)$ ozod hadi uzluksiz funksiyalar deb, hisoblagan edik. Bu tenglamada yadro va ozod had uzluksiz funksiyalar sinfidan ko‘ra kengroq sinflarga tegishli bo‘lganda ham yuqorida olingan natijalar, shu jumladan Fredgolm teoremalari ham o‘z kuchini saqlab qoladi.

1. **L_2- yadroli integral tenglamalar.** *Biz tekshirayotgan (1) tenglamaning $K(x,y)$ yadrosi $\{a \le x, y \le b\}$ kvadratda, $f(x)$ ozod hadi esa, $a \le x \le b$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi, ya'ni L_2 sinfga tegishli funksiyalar bo‘lsin. Bu sinfning ta'rifiga asosan*

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x,y)\,dx\,dy = \mathrm{M}^2 < \infty, \qquad \int_a^b f^2(x)\,dx < \infty \tag{64}$$

shartlar bajariladi. Bunday $K(x,y)$ yadroni L_2- yadro deb ham yuritiladi.

Fubini teoremasiga binoan deyarli barcha $x \in [a,b]$ lar uchun

$$\int_a^b K^2(x,y)\,dy$$

integral mavjud va $[a, b]$ da jamlanuvchi bo‘ladi; xuddi shunga o‘xshash deyarli barcha $y \in [a, b]$ lar uchun $[a, b]$ segmentda

$$\int_a^b K^2(x, y)\,dx$$

integral jamlanuvchi bo‘ladi.

Ayrim hollarda $K(x,y)$ yadroga qo‘shimcha

$$\int_a^b K^2(x,y)\,dy \le N \tag{65}$$

shart qo‘yiladi, bu yerda N — o‘zgarmas son.

Agar $[a, b]$ oraliq chekli bo‘lsa, (65) shartdan (64) shart kelib chiqadi; bu holda M va N o‘zgarmaslar

$$M^2 \le N(b-a)$$

munosabat bilan bog‘langan bo‘ladi. Oraliq cheksiz bo‘lgan holda (64) va (65) shartlar o‘zaro bog‘liq bo‘lmaydi. (1) integral tenglamaning yadrosi va ozod hadi L_2 sinfga tegishli bo‘lgani uchun uning yechimlarini ham shu sinfdan izlaymiz, ya’ni shunday yechimlarni qaraymizki, bular uchun

$$\int_a^b \varphi^2(x)\,dx$$

integral chekli qiymatga ega bo‘lsin.

Ushbu
$$K\varphi=\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy \tag{66}$$

belgilashni kiritamiz.

(66) integral $[a, b]$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyadan iborat bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan ham, ko'rinib turgan
$$|K(x,y)\varphi(y)|\le\frac{1}{2}K^2(x,y)+\frac{1}{2}\varphi^2(y)$$
tengsizlik o'rinlidir. Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi deyarli barcha $x\in[a, b]$ lar uchun y bo'yicha jamlanuvchi, ikkinchisi esa, $[a, b]$ da y bo'yicha jamlanuvchi. Bundan (65) integral ostidagi funksiyaning deyarli barcha $x\in[a, b]$ lar uchun $[a, b]$ oraliqda jamlanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Demak, (65) integral deyarli barcha $[a, b]$ da aniqlangan x ning funksiyasidir. $K(x,y)$ yadro va $\varphi(y)$ funksiya kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lgani uchun Bunyakovskiy—Shvars tengsizligiga asosan
$$[K\varphi]^2=\left[\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy\right]^2\le\int_a^b K^2(x\ y)dy\int_a^b\varphi^2(y)dy=$$
$$=\|\varphi\|^2\int_a^b K^2(x,y)dy \text{ yoki } \|K\ \varphi\|\le \mathrm{M}\|\varphi\| \tag{67}$$
tengsizlikni olamiz. Bundan $K\varphi$ funksiya ham kvadrati bilan jamlanuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Xuddi yuqoridagi kabi operatorning $KK\varphi$ ko'paytmasi $\{a\le x,\ y\le b\}$ sohada kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Bizning (66) belgilashimizga asosan
$$KK\varphi=\int_a^b K(x,t)K\varphi dt=\int_a^b K(x,t)dt\int_a^b K(t,y)\varphi(y)dy \tag{68}$$
(68) dagi ichki integral t ning kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyasi bo'lgani uchun uning kvadrati bilan jamlanuvchi $K(x, t)$ funksiyaga ko'paytmasi deyarli barcha x lar uchun jamlanuvchi bo'ladi, demak, (68) integral mavjud. Bu integralning mavjudligidan $K(x,t)K(t,y)\varphi(y)$ funksiyaning $\{a\le t,\ y\le b\}$ kvadratda

jamlanuvchi ekanligi kelib chiqadi. Fubini teoremasiga asosan (68) integralda integrallash tartibini o'zgartirish mumkin, ya'ni

$$KK\varphi=\int_a^b\varphi(y)dy\int_a^b K(x,t)\,K(t,y)dt.$$

Ushbu

$$K_2(x,y)=\int_a^b K(x,t)K(t,y)dt$$

belgilash bizga ma'lum. Bir xil ikkita K operatorning ko'paytmasini uning kvadrati, n tasining ko'paytmasini esa, uning n- darajasi deyiladi va K^n orqali belgilanadi. Shunday qilib,

$$K^2\varphi=KK\varphi=\int_a^b K_2(x,y)\varphi(y)dy.$$

Bunyakovskiy—Shvars tengsizligiga binoan

$$\left[K_2(x,y)\right]^2\le\int_a^b K^2(x,t)dt\int_a^b K^2(t,y)dt.$$

Bu tengsizlikni $\{a\le x,y\le b\}$ kvadrat bo'yicha integrallab,

$$\int_a^b\int_a^b K_2^2(x,y)dx\,dy\le\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dx\,dt\int_a^b\int_a^b K^2(t,y)dt\,dy\le M^4$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Shunday qilib, K^2 operatorning yadrosi $K_2(x,y)$ asosiy kvadratda kvadrati bilan jamlanuvchi ekan. Bu jarayonni davom ettirib,

$$K^n\varphi=\int_a^b K_n(x,y)\varphi(y)dy,$$

$K_n(x,y)$ ning $\{a\le x,\ y\le b\}$ kvadratda

$$\int_a^b\int_a^b K_n^2(x,y)dx\,dy\le M^{2n}$$

tengsizlikni qanoatlantirishiga, ya'ni kvadrati bilan jamlanuvchi ekanligiga ishonch hosil qilamiz. (67) ga asosan

$$\left\|K^n\varphi\right\|\le M^n\left\|\varphi\right\| \tag{69}$$

tengsizlik kelib chiqadi.

(1) tenglamani yechishga I bob 1-§ da qo'llanilgan ketma-ket yaqinlashish usulidagi mulohazalarni qaytarib, nolinchi yaqinlashish uchun $\varphi_0(x)=f(x)$ ni qabul qilib,

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda K\varphi_{n-1} \tag{70}$$

yoki

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda Kf+\lambda^2K^2f+...+\lambda^nK^nf=\sum_{i=0}^{n}\lambda^iK^if$$

tenglikka ega bo'lamiz. $\varphi_n(x)$ funksiyani

$$\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^iK^if$$

Neyman qatorining qismiy yig'indisi deb qarash mumkin.

Agar integral tenglamaning yadrosi kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lib, $|\lambda|<\frac{1}{M}$ *shart bajarilsa, bunda*

$$M^2=\int_a^b\int_a^b K^2(x,y)\,dx\,dy,$$

u holda Neyman qatori (1) tenglamaning kvadrati bilan jamlanuvchi yechimiga o'rtacha yaqinlashadi va bu yechim yagona bo'ladi.

Bu fikrning to'g'riligiga ishonch hosil qilish uchun ushbu

$$\left\|\sum_{i=N+1}^{N+P}\lambda^iK^if\right\|$$

miqdorni baholaymiz.

Normaning uchburchak tengsizligini va (69) tengsizlikni qo'llab, ushbu

$$\left\|\sum_{i=N+1}^{N+P}\lambda^iK^if\right\|\le\sum_{i=N+1}^{N+P}|\lambda|^i\left\|K^if\right\|\le\|f\|\sum_{i=N+1}^{N+p}\left(|\lambda|M\right)^i\le$$

$$\le\|f\|\sum_{i=N+1}^{\infty}\left(|\lambda|M\right)^i=\|f\|\frac{\left(|\lambda|M\right)^{N+1}}{1-|\lambda|M}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. N yetarlicha katta bo'lganda oxirgi miqdorni istalgancha kichik qilish mumkin. Bundan Neyman qatorining biror kvadrati bilan jamlanuvchi $\varphi(x)$ funksiyaga o'rtacha yaqinlashishi kelib chiqadi, shunday bo'lgach, $n\to\infty$ da $\left\|\varphi_n-\varphi\right\|\to 0$ bo'ladi.

$\varphi(x)$ funksiyaning (1) tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatamiz. (70) formulada $n\to\infty$ da limitga o'tamiz. Uning chap tomonining limiti $\varphi(x)$ dan iborat, o'rtacha $K\varphi_{n-1}\to K\varphi$ ekanligini ko'rsatish kifoyadir. (67) tengsizlikka asosan

$$\|K\varphi_{n-1}-K\varphi\|=\|K(\varphi_{n-1}-\varphi)\|\le M\|\varphi_{n-1}-\varphi\|\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

Shunday qilib, $\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimidan iborat. Endi bu yechimning yagonaligini isbotlash qiyin emas. Faraz qilaylik, (1) integral tenglama ikkita kvadrati bilan jamlanuvchi $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ yechimga ega bo'lsin, ya'ni

$$\varphi_1(x)-\lambda K\varphi_1=f(x),\qquad \varphi_2(x)-\lambda K\varphi_2=f(x),$$

$\varphi_1(x)-\varphi_2(x)=\psi(x)$ deb belgilab olsak, K operator chiziqli bo'lgani uchun $\psi(x)$ funksiya

$$\psi(x)-\lambda K\psi=0$$

bir jinsli tenglamani qanoatlantiradi. $\psi(x)=\lambda K\psi$ tenglikdan, $\|\psi(x)\|=|\lambda|\|K\psi\|$ tenglik hosil bo'ladi. (67) tengsizlikka asosan,

$$\|\psi(x)\|\le|\lambda|M\|\psi\|,\ \text{ yoki }\ (1-|\lambda|M)\|\psi\|\le 0.$$

$|\lambda|M<1$ shartga ko'ra qavs ichidagi ifoda musbat, shuning uchun $\|\psi\|=0$ bo'lishi zarurligi kelib chiqadi. Bundan $\psi(x)=0$, ya'ni $\varphi_1(x)=\varphi_2(x)$.

Demak, (1) tenglama $|\lambda|<\dfrac{1}{M}$ shart bajarilganda yagona yechimga ega bo'lib, bu yechim ushbu

$$\varphi(x)=\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i K^i f$$

Neyman qatori bilan aniqlanadi. Bu yechimni to'laroq

$$\varphi(x)=f(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i\int_a^b K_i(x,y)f(y)dy$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu ifodadagi yig'indi bilan integrallash tartibini almashtirish mumkinligini ko'rsatamiz. Bu amalni formal bajarsak, u

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)f(y)dy$$

ko‘rinishga keladi. $|\lambda|<\frac{1}{M}$ bo‘lganda

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)$$

qator, xuddi oldingidek

$$\left\|\sum_{i=N+1}^{N+P}\lambda^{i-1}K_i(x,y)\right\|\le\frac{\lambda^N M^{N+1}}{1-|\lambda|M}\xrightarrow[N\to\infty]{}0$$

bo‘lgani uchun asosiy kvadratda o‘rtacha yaqinlashadi. Bu qatorning yig‘indisini yadro uzluksiz bo‘lgan holdagidek, $K(x,y)$ yadroning yoki (1) tenglamaning rezolventasi deyiladi va $R(x,y;\lambda)$ orqali belgilanadi, ya’ni

$$R(x,y;\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y). \tag{71}$$

Rezolventa o‘rtacha yaqinlashuvchi qatorning yig‘indisi bo‘lgani uchun asosiy kvadratda kvadrati bilan jamlanuvchi bo‘ladi.

Endi (71) qatorni avval ixtiyoriy kvadrati bilan jamlanuvchi $f(x)$ funksiyaga ko‘paytirib, so‘ngra y bo‘yicha hadlab integrallash mumkinligini ko‘rsatamiz, boshqacha aytganda

$$\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)dy=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\int_a^b K_i(x,y)f(y)dy\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K^i f$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishini isbotlaymiz.

Buning uchun bu tenglikning chap va o‘ng tomonining qismiy yig‘indisi ayirmasining normasini baholash kifoyadir:

$$\left\|\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)dy-\sum_{i=1}^{n}\lambda^{i-1}\int_a^b K_i(x,y)f(y)dy\right\|^2=$$

$$=\left\|\int_a^b\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)f(y)dy\right\|^2=\int_a^b\left[\int_a^b\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)f(y)dy\right]^2dx.$$

Bu yerdagi ichki integralga Bunyakovskiy—Shvars tengsizligini, so‘ngra uchburchak tengsizligini qo‘llasak, (69) tengsizlikka asosan quyidagi tengsizlik hosil bo‘ladi:

$$\int_a^b\left[\int_a^b\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)f(y)dy\right]^2dx\leq$$

$$\leq\int_a^b\left\{\int_a^b\left[\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)\right]^2dy\int_a^b f^2(y)dy\right\}dx=$$

$$=\|f\|^2\int_a^b\int_a^b\left[\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)\right]^2dx\,dy=$$

$$=\|f\|^2\left\|\sum_{i=n+1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)\right\|^2\leq\|f\|^2\left(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\lambda|^{i-1}M^i\right)^2=$$

$$=\|f\|^2\frac{|\lambda|^{2n-2}M^{2n}}{(1-|\lambda|M)^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

Shunday qilib, (71) qatorni kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyaga ko‘paytirgandan so‘ng hadlab integrallash mumkinligi isbotlandi. Demak, (1) tenglamaning yechimini ushbu

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)dy$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin.

Bu yerda rezolventaning parametrga bog‘liqlik xususiyati to‘g‘risidagi ayrim mulohazalarga to‘xtab o‘tamiz. (71) qator rezolventani x va y ning barcha qiymatlari uchun λ kompleks tekislikdagi $|\lambda|<\frac{1}{M}$ doirada aniqlaydi. Rezolventa darajali qator bilan ifodalangan bo‘lsa ham, uni ko‘rsatilgan doirada λ ning analitik funksiyasi deb hisoblash mumkin emas, chunki x va y ning ayrim qiymatlarida (71) qator uzoqlashuvchi bo‘lishi ham mumkin. Ammo, agar ixtiyoriy $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi bo‘lsa, u holda

$$\left(\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)dy,\, g(x)\right)=\int_a^b\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)g(x)dydx$$

integral $|\lambda|<\frac{1}{M}$ doirada λ ning analitik funksiyasi bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Haqiqatan ham, bizga ma'lumki, (71) qatorni ixtiyoriy kvadrati bilan jamlanuvchi *f (y)* funksiyaga ko'paytirgandan so'ng uni hadlab integrallash mumkin; natijada hosil bo'lgan ushbu

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\int_a^b K_i(x,y)f(y)dy=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K^i f=\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)dy \quad (*)$$

qator $|\lambda|<\frac{1}{M}$ tengsizlik bajarilganda x bo'yicha o'rtacha yaqinlashadi. Endi

$$\left(\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)dy,\, g(x)\right)=\int_a^b\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)g(x)dxdy=$$

$$=\int_a^b \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K^i f\cdot g(x)dx,$$

bu yerdagi *g (x)* — kvadrati bilan jamlanuvchi ixtiyoriy funksiya. Oldingi qatorni hadlab integrallash mumkinligini ko'rsatamiz. Bunyakovskiy—Shvars tengsizligiga asosan

$$\left|\int_a^b \sum_{i=N+1}^{N+P}\lambda^{i-1}K^i f\cdot g(x)dx\right|\le\left\{\int_a^b\left[\sum_{i=N+1}^{N+P}\lambda^{i-1}K^i f\right]^2 dx\right\}^{1/2}\|g\|.$$

(*) qator o'rtacha yaqinlashuvchi bo'lgani uchun oxirgi ifoda $N\to\infty$ da nolga intiladi.

Shunday qilib, ushbu

$$\int_a^b\int_a^b R(x,y;\lambda)f(y)g(x)dxdy=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\left(K^i f,g\right)$$

qator hosil bo'ladi. Bu qator sonli koeffitsientli darajali qatordan iborat bo'lib, $|\lambda|<\frac{1}{M}$ doirada yaqinlashadi va uning yig'indisi shu doirada λ ning analitik funksiyasi bo'ladi.

Shu ma'noda *rezolventa* $|\lambda|<\frac{1}{M}$ *doirada* λ *ning analitik funksiyasi* deyiladi

Agar *K (x, y)* yadro aynigan, ya'ni

$$K(x,y)=\sum_{k=1}^{n} p_k(x)q_k(y)$$

ko'rinishga ega bo'lsa, $p_k(x)$ va $q_k(x)$ funksiyalarni $[a,b]$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi deb hisoblasak, $K(x, y)$ yadro ham asosiy kvadratda kvadrati bilan jamlanuvchi bo'ladi. Bu holda 3- § ning 2-bandidagi mulohazalarni so'zma-so'z takrorlab, Fredgolmning barcha teoremalari o'rinli ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Endi umumiy holni, ya'ni (1) tenglamaning yadrosi kvadrati jamlanuvchi bo'lgan holni tekshiramiz.

$\{\varphi_k(x)\}$, $k=1,2,...$ $[a,b]$ oraliqda to'la va ortonormal sistema bo'lsin. 4- § ning 3- bandidan bizga ma'lumki,

$$\{\varphi_m(x)\varphi_n(y)\}, \quad m,n=1,2,... \tag{72}$$

sistema $\{a \leq x, y \leq b\}$ kvadratda ortonormal va to'la bo'ladi. Shu kvadratda $K(x, y)$ yadro kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lgani uchun (72) funksiyalar bo'yicha o'rtacha yaqinlashuvchi

$$K(x,y)=\sum_{m,n=1}^{\infty} A_{mn}\varphi_m(x)\varphi_n(y) \tag{73}$$

Furye qatoriga yoyiladi. (72) sistema to'la bo'lgani uchun $K(x, y)$ ga nisbatan qo'llanilgan yopiqlik formulasi, ya'ni

$$\sum_{m,n=1}^{\infty} A^2_{mn}=M^2 \tag{74}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Ixtiyoriy $R>0$ sonni olib, (1) tenglamani λ ning $|\lambda|<R$ doirada yotadigan qiymatlari uchun tekshiramiz.

(73) qatorning qismiy

$$K_0(x,y)=\sum_{m,n=1}^{K} A_{mn}\varphi_m(x)\varphi_n(y)$$

yig'indisini ajratib olamiz. $K_0(x, y)$ aynigan yadrodan iboratligi ravshan.

$$K(x,y)-K_0(x,y)=K_1(x,y) \tag{75}$$

deb belgilab olamiz.

$K_1(x, y)$ funksiyaning Furye qatori $K(x, y)$ funksiya Furye qatorining qoldig'idan iborat.

$$K_1(x,y)=\sum_{m>k,n>k} A_{mn}\varphi_m(x)\varphi_n(y), \quad N^2=\int_a^b\int_a^b K_1^2(x,y)\,dx\,dy$$

belgilashni kiritib, yopiqliq formulasiga asosan

$$N^2=\sum_{m>k,\, n>k} A_{mn}^2 \tag{76}$$

tenglikni hosil qilamiz. (76) qator yaqinlashuvchi (74) qatorning qoldig'idan iborat bo'lgani uchun uning yig'indisi yetarli katta k uchun istalgancha kichik bo'ladi. k ni shunday tanlab olamizki, $N<\frac{1}{2R}$ bo'lsin. U holda $|\lambda|N<\frac{1}{2}$ bo'ladi. Shunday qilib, (75) tenglikka asosan $K(x, y)$ yadro ikkita yadroning yig'indisidan iborat bo'lib:

$$K(x,y)=K_0(x,y)+K_1(x,y),$$

ulardan bittasi kichik yadro, ikkinchisi esa aynigan yadrodan iborat.

Bu mulohazalardan uzluksiz yadro uchun isbotlangan hamma fikrlar, jumladan Fredgolm alternativasi ham kvadrati bilan jamlanuvchi yadro uchun to'g'riligi kelib chiqadi.

2. Erkli o'zgaruvchilar soni ko'p bo'lgan hol. Bir qancha hollarda, ayniqsa tatbiqda noma'lum funksiya ko'p o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lgan integral tenglamalarni yechishga to'g'ri keladi. Bunday tenglamalar uchun ham Fredgolm nazariyasi o'z kuchini saqlab qoladi. Ushbu

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_D\!\dots\!\int K(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

tenglamani tekshiramiz, bu yerda $D\subset R^n$ soha, $x=(x_1,\dots,x_n)$, $y=(y_1,\dots y_n)$ sohaning nuqtalari, $dy=dy_1\dots dy_n$ — hajm elementi.

Avvalgidek λ sonli parametr, $K(x, y) = K(x_1,\dots, x_n; y_1,\dots y_n)$ — yadro, $f(x)=f(x_1, \dots x_n)$ — berilgan funksiya, $\varphi(x)=\varphi(x_1,\dots,x_n)$ — noma'lum funksiya. Qisqalik uchun D soha bo'yicha integrallashni bitta integral bilan belgilab, qaralayotgan integral tenglamani

$$\varphi(x)-\lambda\int\limits_D K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{77}$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Agar K (x, y) yadro uzluksiz, yoki hech bo'lmaganda kvadrati bilan jamlanuvchi, ya'ni

$$\int_D \int_D K^2(x,y)\,dx\,dy = M^2 < \infty$$

bo'lsa, (77) tenglama Fredgolm tipidagi tenglama deyiladi.

Bu tenglama uchun yuqorida bayon qilingan barcha mulohazalar o'rinlidir. Masalan, $|\lambda| < \frac{1}{M}$ shart bajarilsa, (77) tenglama ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechiladi va bu yechim yagona bo'ladi. Agar tenglama aynigan yadroli bo'lsa, ya'ni yadro

$$K(x,y) = \sum_{k=1}^{n} p_k(x) q_k(y), \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad y = (y_1, \ldots, y_n)$$

ko'rinishda bo'lsa, tenglama ekvivalent chiziqli algebraik sistemaga keladi; umumiy holda yadroni aynigan va kichik yadrolarga ajratib, tenglamani aynigan yadroli tenglamaga keltirib, Fredgolm barcha teoremalarining o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin. Bu fikrlarning isboti, avvalgi paragraflarda keltirilgan mulohazalarning isbotlaridan kelib chiqadi. Buni biz o'quvchiga havola qilamiz.

Ko'p hollarda

$$\varphi(x) - \lambda \int_S K(x,y) \varphi(y)\,dy = f(x)$$

ko'rinishdagi integral tenglamalarni tekshirishga to'g'ri keladi, bu yerda S — biror sirt.

Bu tenglama soddagina (77) tenglamaga keltiriladi. Buning uchun S sirtning parametrik tenglamasini kiritib, so'ngra erkli o'zgaruvchilar va integrallash o'zgaruvchilari sifatida x va y nuqtalarning o'rnini aniqlovchi parametrlarni kiritish kifoya.

3. Integral tenglamalar sistemasi. Bitta erkli o'zgaruvchiga ega bo'lgan Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamalar sistemasi

$$\varphi_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ij}(x,y) \varphi_j(y)\,dy = f_i(x), \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (78)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $K_{ij}(x, y)$ yadrolar $\{a \le x,\ y \le b\}$ kvadratda, $f_i(x)$ ozod hadlar $a \le x \le b$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar bo'lsin. Tabiiy, noma'lum $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ funksiyalar ham shu sinfda izlanadi. (78) sistema uchun yuqorida bitta Fredgolm tenglamasi uchun bayon qilingan nazariya to'laligicha o'rinli bo'ladi. Masalan, λ parametr

$$|\lambda| < \frac{1}{M}$$

tengsizlikni qanoatlantirsa, bunda

$$M^2 = \sum_{ij=1}^{n} \int_a^b \int_a^b K_{ij}^2(x,y)\,dx\,dy,$$

(78) sistema uchun ketma-ket yaqinlashishlar bu sistemaning yechimiga o'rtacha yaqinlashadi. (78) sistemaga qo'shma bo'lgan sistema quyidagicha yoziladi:

$$\psi_i(x) - \lambda \sum_{j=1}^{n} \int_a^b K_{ji}(y,x)\psi_j(y)\,dy = q_i(x),$$

bu yerda $q_i(x)$ ixtiyoriy funksiyalar. Agar

$$(f, q) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x) q_i(x)\,dx = 0$$

bo'lsa, $f_i(x)$, $q_i(x)$, $i=1,2,...,n$ funksiyalar sistemasi yoki ikki $f(x) = \{f_1(x), f_2(x),...,f_n(x)\}$, $q(x) = \{q_1(x), q_2(x), ..., q_n(x)\}$ vektor-funksiyalar *ortogonal* deyiladi.

$$(f, q) = \sum_{i=1}^{n} \int_a^b f_i(x)\, q_i(x)\, dx$$

son $f(x)$ va $q(x)$ vektor-funksiyalarning *skalyar ko'paytmasi*, $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ son esa, $f(x)$ *vektor-funksiyasining normasi* deb ataladi.

Yuqorida aytilganlarning barchasi erkli o'zgaruvchilar soni ixtiyoriy bo'lganda ham o'rinli bo'ladi. Fredgolmning barcha teoremalari (78) sistema uchun o'z kuchini saqlab qoladi.

Biz Fredgolm nazariyasini (78) sistema uchun asoslanishiga to'xtalmasdan, bunday sistemani Fredgolm tipidagi bitta integral tenglamaga keltirish mumkinligini ko'rsatib o'tamiz.

x, y argumentlar uzunligi *(a, b)* oraliqdan *n* marta katta bo'lgan *(a, nb − (n−1)a)* oraliqda o'zgarsin. Bu oraliqda Φ *(x)* va F *(x)* funksiyalarni quyidagicha aniqlaymiz.

Agar $(i-1)b-(i-2)a \le x \le ib-(i-1)a$ bo'lsa,

$$\Phi(x)=\varphi_i\big(x-(i-1)(b-a)\big), \quad F(x)=f\big(x-(i-1)(b-a)\big).$$

Xuddi shunga o'xshash, *K (x, y)* yadroni $a \le x \le nb-(n-1)a$, $a \le y \le nb-(n-1)a$ kvadratda

$$(i-1)b-(i-2)a \le x \le ib-(i-1)a,$$

$$(j-1)b-(j-2)a \le y \le jb-(j-1)a$$

bo'lganda

$$K(x,y)=K_{ij}\big(x-(i-1)(b-a),\ y-(j-1)(b-a)\big)$$

deb aniqlab olamiz. Ushbu

$$\int_a^{nb-(n-1)a} = \int_a^b + \int_b^{2b-a} + \int_{2b-a}^{3b-2a} + \ldots + \int_{(n-1)b-(n-2)a}^{nb-(n-1)a}$$

tenglikni e'tiborga olsak, (78) sistema Fredgolmning bitta

$$\Phi(x)-\lambda\int_a^{nb-(n-1)a} K(x,y)\Phi(y)dy=F(x)$$

tenglamasi ko'rinishida yoziladi.

(78) sistemaning K_{ij} *(x, y)* yadrolari asosiy kvadratda, f_i *(x)* ozod hadlar [*a, b*] oraliqda L_2 sinfga tegishli bo'lgani uchun biz tuzgan *K (x, y)* yadro yangi

$$a \le x \le nb-(n-1)a, \quad a \le y \le nb-(n-1)a$$

kvadratda, *F (x)* ozod had esa $a \le x \le nb-(n-1)a$ oraliqda L_2 sinfga tegishli bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\int_a^{nb-(n-1)a}\int_a^{nb-(n-1)a} K^2(x,y)dxdy=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int_{(i-1)b-(i-2)a}^{ib-(i-1)a}\int_{(i-1)b-(i-2)a}^{ib-(i-1)a} K^2(x,y)dxdy=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int_a^b\int_a^b K^2\left(x+(i-1)(b-a),\, y+(i-1)(b-a)\right)dxdy=$$

$$=\sum_{i,j=1}^{n}\int_a^b\int_a^b K_{ij}^2(x,y)\,dxdy=M^2<\infty.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$\int_a^{nb-(n-1)a} F^2(x)dx=\sum_{i=1}^{n}\int_a^b f_i^2(x)dx<\infty$$

bo'ladi.

6- §. Kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan integral tenglamalar

Agar (1) integral tenglamaning yadrosi

$$K(x,y)=\frac{H(x,y)}{|x-y|^{\alpha}},\quad 0<\alpha<1$$

ko'rinishga ega bo'lsa, bunda $H(x, y)$ chegaralangan funksiya, u holda (1) tenglama *kuchsiz maxsuslikka* ega bo'lgan *integral tenglama* deyiladi.

Agar integral n o'lchovli fazoning chegaralangan D sohasi bo'yicha olinayotgan bo'lsa, (1) integral tenglamaning yadrosi

$$K(x,y)=\frac{H(x,y)}{r^{\alpha}},\quad 0<\alpha<n \tag{79}$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $x=(x_1, ...x_n)$, $y=(y_1, ...y_n)$— D sohaning nuqtalari, r esa bu ikki nuqta orasidagi masofa, ya'ni $r=|x-y|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, $H(x, y)$ xuddi yuqoridagidek D sohada chegaralangan funksiya. Amaliyotda uchraydigan masalalarning aksariyat qismi ko'p o'lchovli integral tenglamaga keladi. Shuning uchun ham biz bu paragrafda umumiy holni, ya'ni

$$\varphi(x)-\lambda\int_D K(x,y)\,\varphi(y)\,dy=f(x) \tag{80}$$

integral tenglamani tekshiramiz. Bu holda ham (80) integral tenglamaning yadrosi (79) ko'rinishga ega bo'lsa, (80) tenglamani va undagi integral operatorni mos ravishda *kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan tenglama va operator* deyiladi.

1. Sferik koordinatalar. E^n fazoda $x = (x_1, ...x_n)$ va $y = (y_1, ...y_n)$ o'zgaruvchi nuqtalar bo'lib, r ular orasidagi masofa bo'lsin. Markazi x nuqtada bo'lgan sferik koordinatalar quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$y_1 = x_1 + r\cos\theta_1,$$

$$y_2 = x_2 + r\sin\theta_1\cos\theta_2,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_{n-1} = x_{n-1} + r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\cos\theta_{n-1},$$

$$y_n = x_n + r\sin\theta_1\sin\theta_2\dots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}.$$

Bu yerdagi $\theta_1,...,\theta_{n-2}$ burchaklar $[0,\pi]$ oraliqda, θ_{n-1} burchak esa $[0,2\pi]$ oraliqda o'zgaradi. Endi hajmning dy elementini va radiusi r ga teng bo'lgan sfera sirti yuzasining dS_r elementini sferik koordinatlarda topamiz.

Ma'lumki,

$$dy = dy_1...dy_n = \frac{D(y_1, y_2,...., y_n)}{D(r,\theta_1,....,\theta_{n-1})}\, dr\, d\theta_1...d\theta_{n-1}.$$

Bu tenglikdagi yakobianni hisoblaymiz:

$$J_n = \frac{D(y_1, y_2,..., y_n)}{D(r,\theta_1,...,\theta_{n-1})} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial r} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial \theta_{n-1}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial r} & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial \theta_{n-1}} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi\cos\theta_{n-1} & r\Phi ctg\,\theta_1\cos\theta_{n-1} & r\Phi ctg\,\theta_2\cos\theta_{n-1} & \dots & -r\Phi\sin\theta_{n-1} \\ \Phi\sin\theta_{n-1} & r\Phi ctg\,\theta_1\sin\theta_{n-1} & r\Phi ctg\,\theta_2\sin\theta_{n-1} & \dots & r\Phi\cos\theta_{n-1} \end{vmatrix}, \qquad (81)$$

bu yerda $\Phi = \sin\theta_1\sin\theta_2...\sin\theta_{n-2}$.

$\frac{\partial J_n}{\partial \theta_{n-1}}=0$ ekanini tekshirib ko‘rish qiyin emas. Shuning uchun ham J_n determinantni hisoblash uchun $\theta_{n-1}=0$ deb olish mumkin. Bu esa, $J_n=r\sin\theta_1\ldots\sin\theta_{n-2}J_{n-1}$ rekurrent formulaga olib keladi. Bu tenglikda n ni $n-1$, $n-2$, ... larga almashtirib,

$$J_n=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}$$

tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, hajm elementi quyidagicha aniqlanadi:

$$dy=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}dr\,d\theta_1\ldots d\theta_{n-1}\,. \quad (82)$$

Radiusi r ga teng, markazi sferik koordinatlar markazi bilan ustma-ust tushgan S sfera sirti yuzining dS_r elementini topamiz. Differensial geometriya kursidan ma’lumki, ixtiyoriy S sirt uchun

$$dS=\frac{dy_1\ldots dy_{n-1}}{\left|\cos\left(\gamma,y_n\right)\right|},$$

bunda $\gamma-S$ sirtga o‘tkazilgan normal. S_r sfera uchun

$$\left|\cos(\gamma,y_n)\right|=\left|\cos(r,y_n)\right|=\frac{\left|y_n-x_n\right|}{r}=\left|\prod_{k=1}^{n-1}\sin\theta_k\right|.$$

S_r sferada r o‘zgarmas bo‘lgani uchun

$$dy_1dy_2\ldots dy_{n-1}=\left|\frac{D\left(y_1,y_2,\ldots,y_{n-1}\right)}{D\left(\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_{n-1}\right)}\right|d\theta_1d\theta_2\ldots d\theta_{n-1}$$

bo‘ladi. Bu tenglikdagi yakobianni (81) determinantdan birinchi ustunni va oxirgi yo‘lni chizib tashlash natijasida hosil qilish mumkin. Hosil bo‘lgan determinantning bosh diagonalidan o‘ng tomonidagi barcha elementlar nolga teng bo‘ladi. Shuning uchun ham bu determinant bosh diagonal elementlarining ko‘paytmasiga teng bo‘ladi. Bundan biz izlagan

$$dS_r=r^{n-1}\sin^{n-2}\theta_1\sin^{n-3}\theta_2\ldots\sin\theta_{n-2}\,d\theta_1d\theta_2\ldots d\theta_{n-1} \quad (83)$$

formula kelib chiqadi. (83) formuladan

$$dS_r=r^{n-1}dS_1, \quad (84)$$

(82) dan esa $dy = drdS_r = r^{n-1}\, dr\, dS_1$ tengliklar hosil bo'ladi. (84) tenglikni integrallab, yana bir

$$|S_r| = r^{n-1}|S_1|$$

formulani hosil qilamiz, bu yerda $|S_r|$—S_r sfera sirtining yuzi, $|S_l|$ esa birlik S_l sfera sirtining yuzasidir.

$|S_l|$ yuzani hisoblash qiyin emas. Haqiqatan ham, (83) formulada $r = 1$ deb, barcha $\theta_1, ..., \theta_{n-1}$ o'zgaruvchilar bo'yicha integrallaymiz:

$$|S_1| = \int_0^{\pi} ... \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \sin^{n-2}\theta_1 ... \sin\theta_{n-2}\, d\theta_1 ... d\theta_{n-2}\, d\theta_{n-1} =$$

$$= 2\pi \prod_{k-1}^{n-2} \int_0^{\pi} \sin^k\theta d\theta = 2\pi \prod_{k-1}^{n-2} 2\int_0^{\pi/2} \sin^k\theta d\theta.$$

Bu yerda $\sin^2\theta = t$ almashtirishni bajarib,

$$2\int_0^{\pi/2} \sin^k\theta d\theta = \int_0^1 t^{\frac{k-1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}} dt = \mathrm{B}\left(\frac{k+1}{2}, \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)} = \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k+2}{2}\right)}$$

tenglikni e'tiborga olsak,

$$|S_1| = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu yerda B va Γ — birinchi va ikkinchi tur Eyler integrallari. Bundan $n = 2$ da birlik aylananing uzunligi $|S_1| = 2\pi$, $n = 3$ bo'lganda esa, uch o'lchovli fazoda birlik sfera sirtining $|S_1| = 4\pi$ yuzi kelib chiqadi.

2. Kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan operatorlar. (80) integral tenglamaning yadrosi (79) ko'rinishga ega bo'lsin. Agar $\alpha < \frac{n}{2}$ bo'lsa, kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan operator yadrosi

$$\int_D K^2(x,y)\,dy \le N \tag{85}$$

shartni qanoatlantiruvchi Fredgolm operatoridan iborat bo‘ladi.

Haqiqatan ham, $|H(x,y)| \le C = \text{const}$ bo‘lsin, u holda

$$\int_D K^2(x,y)\,dy \le C^2 \int_D \frac{dy}{r^{2\alpha}}.$$

Markazi $x = (x_1, \ldots x_n)$ nuqtada bo‘lgan sferik koordinatalarni kiritamiz. Bunda ma’lumki, $dy = r^{n-1} dr ds$ bo‘ladi. Bu yerda ds — radiusi birga teng bo‘lgan sfera yuzining elementi. D sohaning diametrini, ya’ni ikkita nuqtasi orasidagi eng katta masofani d orqali belgilab olamiz. Bundan

$$\int_D \frac{dy}{r^{2\alpha}} \le \int_{r\le d} \frac{dy}{r^{2\alpha}} = \int_S dS \int_0^d r^{n-1-2\alpha}\,dr = \frac{|S|\,d^{\,n-2\alpha}}{n-2\alpha}$$

yoki

$$\int_D K^2(x,y)\,dx\,dy \le N, \quad N = \frac{C^2 |S|\, d^{\,n-2\alpha}}{n-2\alpha}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $K(x, y)$ yadro (85) shartni qanoatlantiradi. D soha chekli bo‘lgani uchun bu yadro kvadrati bilan jamlanuvchi ham bo‘ladi. Shunday qilib, ta’rifga asosan

$$\int_D K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

operator Fredgolm operatoridan iborat.

Teorema. *Ikkita $K(x, y)$ va $L(x, y)$ yadrolar*

$$|K(x,y)| \le \frac{C_1}{r^{\alpha}}, \qquad |L(x,y)| \le \frac{C_2}{r^{\beta}}$$

shartlarni qanoatlantirsin, bu yerda C_1, C_2— musbat o‘zgarmaslar, $0 \le \alpha < n$, $0 \le \beta < n$. U holda

$$M(x,y) = \int_D K(x,t)L(t,y)\,dt$$

yadro uchun

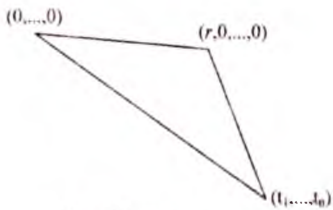
$$|M(x,y)| \le \begin{cases} C, & \alpha+\beta<n, \\ C\ln r + A, & \alpha+\beta=n, \\ \dfrac{C}{r^{\alpha+\beta-n}}, & \alpha+\beta>n \end{cases} \tag{86}$$

baho o'rinli bo'ladi, bu yerda C va A — musbat o'zgarmaslar.

Isbot. D sohaning diametrini d orqali, $x=(x_1, \ldots x_n)$, $t=(t_1, \ldots t_n)$ va $t=(t_1, \ldots t_n)$, $y=(y_1, \ldots y_n)$ nuqtalar orasidagi masofalarni mos ravishda r_0 va r_1 orqali belgilab olamiz. Bu holda

$$|M(x,y)| \le C_1 C_2 \int\limits_D \frac{dt}{r_0^\alpha r_1^\beta} \le C_1 C_2 \int\limits_{r_0 \le d} \frac{dt}{r_0^\alpha r_1^\beta}, \tag{87}$$

bu yerda C_1 va C_2 — musbat o'zgarmaslar.



4- chizma.

Hisoblashlarni soddalashtirish maqsadida, umumiylikka ziyon etkazmay, koordinat boshini x nuqtaga joylashtiramiz va x_1 o'qni y nuqtadan shunday o'tkazmizki, x dan y ga bo'lgan yo'nalish musbat bo'lsin. U holda x va y nuqtalarning koordinatalari $(0, 0, \ldots, 0)$ va $(r, 0, \ldots, 0)$ bo'ladi. t nuqtaning koordinatalari esa $t_1, \ldots t_n$ lardan iborat (4- chizma). Bu belgilashlarga asosan

$$r_0^2 = \sum_{k=1}^n t_k^2, \quad r_1^2 = (t_1 - r)^2 + \sum_{k=2}^n t_k^2.$$

(87) integralda $t_k = r\xi_k$, $k=1,2,\ldots,n$ almashtirish bajaramiz.

$$\wp^2 = \sum_{k=1}^n \xi_k^2$$

deb, $r_0^2 = r^2\wp^2$,

$$r_1^2 = r^2(\xi_1 - 1)^2 + r^2\sum_{k=2}^n \xi_k^2 = r^2\left(\wp^2 - 2\xi_1 + 1\right)$$

tengliklarni va $r_0 = r\wp < d$ tengsizlikni e'tiborga olsak,

$$|M(x,y)| \le \frac{C_1 C_2}{r^{\alpha+\beta-n}} \int\limits_{\wp < \frac{d}{r}} \frac{d\xi_1 \ldots d\xi_n}{\wp^\alpha \left(\wp^2 - 2\xi_1 + 1\right)^{\beta/2}} \tag{88}$$

tengsizlik hosil bo'ladi. Bu tengsizlikni baholaymiz. Ma'lumki,

$$d\xi_1 \dots d\xi_n = \wp^{n-1} d\wp\, dS.$$

So'ngra, $\wp^2 - 2\xi_1 + 1 > (\wp - 1)^2$ tengsizlik ham o'z-o'zidan ravshan. $\wp > 2$ bo'lganda $(\wp - 1)^2 > \frac{1}{4}\wp^2$ tengsizlikning o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan,

$$(\wp-1)^2 - \frac{1}{4}\wp^2 = \frac{1}{4}\left(3\wp^2 - 6\wp - 2\wp + 4\right) = \frac{1}{4}(3\wp - 2)(\wp - 2),$$

bu tenglik esa, $\wp > 2$ bo'lganda musbat bo'ladi. Bunga asosan

$$|M(x,y)| \le \frac{C_1 C_2}{r^{\alpha+\beta-n}} \left[\int\limits_{\wp \le 2} \frac{\wp^{n-1-\alpha}\, d\wp\, dS}{\left(\wp^2 - 2\xi + 1_1\right)^{\beta/2}} + 2^{\beta} \int\limits_{2 < \wp < \frac{d}{r}} \wp^{n-1-\alpha-\beta}\, d\wp\, dS \right]$$

bo'ladi. Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi birinchi integral o'zgarmas sondan iborat, biz uni a orqali belgilab olamiz. $\alpha + \beta < n$ bo'lganda ikkinchi integralni hisoblaymiz:

$$2^{\beta} \int\limits_{2 < \wp < \frac{d}{r}} \wp^{n-1-\alpha-\beta}\, d\wp\, dS = 2^{\beta} \int\limits_{S} dS \int\limits_{2}^{d/r} \wp^{n-1-\alpha-\beta}\, d\wp =$$

$$= 2^{\beta} |S| \frac{1}{n-\alpha-\beta} \left[\left(\frac{d}{r}\right)^{n-\alpha-\beta} - 2^{n-\alpha-\beta} \right] \le 2^{\beta} |S| \left(\frac{d}{r}\right)^{n-\alpha-\beta},$$

demak,

$$|M(x,y)| \le C_1 C_2 |S| \left[a r^{n-\alpha-\beta} + \frac{2^{\beta} d^{n-\alpha-\beta}}{n-\alpha-\beta} \right] \le$$

$$\le C_1 C_2 d^{n-\alpha-\beta} |S| \left(a + \frac{2^{\beta}}{n-\alpha-\beta} \right).$$

Agar $\alpha + \beta = n$ bo'lsa, u holda

$$|M(x,y)| \le C_1 C_2 |S| \left(a + 2^{\beta} \ln \frac{d}{2r} \right).$$

Nihoyat, $\alpha+\beta>n$ bo'lganda

$$|M(x,y)|\le\frac{C_1C_2|S|}{r^{\alpha+\beta-n}}\left(a+2^{\beta}\int_2^{\frac{d}{r}}\frac{d\wp}{\wp^{\alpha+\beta+1-n}}\right)<$$

$$<\frac{C_1C_2|S|}{r^{\alpha+\beta-n}}\left(a+2^{\beta}\int_2^{\infty}\frac{d\wp}{\wp^{\alpha+\beta+1-n}}\right)=\frac{C_1C_2|S|}{r^{\alpha+\beta-n}}\left(a+\frac{2^{n-\alpha}}{\alpha+\beta-n}\right).$$

Shunday qilib,(86) baho barcha hollarda isbotlandi.

Natija. *Agar yadro kuchsiz maxsuslikka ega bo'lsa, u holda barcha iterasiyalangan yadrolar birortasidan boshlab chegaralangan bo'ladi.*

Haqiqatan, bizga ma'lumki ikkinchi iterasiyalangan yadro

$$K_2(x,y)=\int_D K(x,t)K(t,y)dt$$

formula bilan aniqlanadi. Agar $K(x,y)$ yadro (79) ko'rinishga ega bo'lsa, hozirgina isbot qilingan teoremaga asosan

$$|K_2(x,y)|\le\frac{A_1}{r^{2\alpha-n}},\ A_1=\text{const}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu jarayonni davom ettirib, matematik induksiya usuli bilan *m* iteratsiyalangan yadro uchun ham bahoni olish mumkin. Faraz qilaylik, *m — 1* iterasiyalangan yadro uchun yuqoridagidek baho o'rinli bo'lsin.

$$|K_2(x,y)|\le\frac{A_1}{r^{2\alpha-n}},\ A_1=\text{const}$$

m — iteratsiyalangan yadro

$$K_m(x,y)=\int_D K(x,t)K_{m-1}(t,y)dt$$

ko'rinishda,

$$\beta=(m-1)\alpha-(m-2)n,\ \alpha+\beta-n=\alpha+(m-1)\times$$

$$\times\ \alpha-(m-2)n-n=m\alpha-(m-1)n$$

bo'lgani uchun yuqoridagi teoremaga asosan ushbu

$$\left|K_m(x,y)\right| \le \begin{cases} \dfrac{A_m}{r^{m\alpha-(m-1)n}}, & m\alpha-(m-1)n>0 \\ A_m, & m\alpha-(m-1)n<0 \end{cases}$$

bahoga ega bo‘lamiz, bunda A_m — biror o‘zgarmas. Shunday qilib, agar

$$m > \frac{n}{n-\alpha} \tag{89}$$

bo‘lsa, K_m (x, y) iteratsiyalangan yadro chegaralangan bo‘ladi.

3. Iteratsiyalangan yadroli integral tenglama. Endi (80) integral tenglamani qaraymiz. Bu tenglamadagi integral operatorni $K\varphi$ orqali belgilab olamiz. Shu bilan birga $I\varphi=\varphi(x)$ munosabat bilan aniqlanadigan birlik operator I ni kiritamiz. Bularga asosan (80) tenglama

$$(I-\lambda K)\varphi=f(x) \tag{90}$$

ko‘rinishda yoziladi. $I-\lambda K$ ifodani K ga nisbatan birinchi darajali ko‘phad deb qarash mumkin. K ga nisbatan yuqori darajali ko‘phadlarni ham tuzish mumkin; agar I ni bir kabi qaralsa, bunday ko‘phadlarni oddiy ko‘phadlar kabi qo‘shish va ko‘paytirish mumkin. Bularni amalga oshirish maqsadida kompleks sonlar nazariyasidan bitta tushunchani eslatib o‘tamiz. Agar z biror kompleks son bo‘lsa, uning trigonometrik shakli $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu sonning n- darajali ildizi

$$\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n}+i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right), \quad k=0,1,...,n-1$$

formula bilan aniqlanadi.

Ma’lumki, $1=\cos 0+i\sin 0$. Bunga avvalgi formulani tatbiq qilinsa, ushbu

$$\omega_k=\sqrt[n]{1}=\sqrt[n]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2k\pi}{n}+i\sin\frac{2k\pi}{n}=e^{\frac{2k\pi}{n}i}, \quad k=0,1,...,n$$

natija hosil bo‘ladi. Bundan

$$\omega_1=e^{\frac{2\pi}{n}i}, \quad \omega_k=\omega_1^k.$$

(89) shartni qanoatlantiruvchi m sonni olib, $\sqrt[m]{1}$ ning boshlang'ich ildizini ε orqali belgilaymiz, ya'ni $\varepsilon=e^{\frac{2\pi}{m}i}$. Ushbu

$$\left(I-\lambda K\right)\left(I-\varepsilon\lambda K\right)\left(I-\varepsilon^{2}\lambda K\right)...\left(I-\varepsilon^{m-1}\lambda K\right)=\left(I-\lambda^{m}K^{m}\right)$$

tenglik o'rinlidir. Bu tenglikning to'g'riligi

$$\left(a^{m}-b^{m}\right)=\left(a-b\right)\left(a-\varepsilon b\right)\left(a-\varepsilon^{2}b\right)...\left(a-\varepsilon^{m-1}b\right)$$

algebraik ayniyatdan kelib chiqadi.

(90) tenglamaning har ikki tomoniga

$$\left(I-\varepsilon\lambda K\right)\left(I-\varepsilon^{2}\lambda K\right)...\left(I-\varepsilon^{m-1}\lambda K\right)=$$
$$= I+\lambda K+\lambda^{2}K^{2}+...+\lambda^{m-1}K^{m-1}$$

operatorni qo'llaymiz. Natijada quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$\left(I-\lambda^{m}K^{m}\right)\varphi=f_{m}\left(x\right)$$

yoki

$$\varphi\left(x\right)-\lambda^{m}\int_{D}K_{m}\left(x,y\right)\varphi\left(y\right)dy=f_{m}\left(x\right), \tag{91}$$

bu yerda

$$f_{m}\left(x\right)=f\left(x\right)+\lambda Kf+\lambda^{2}K^{2}f+..+\lambda^{m-1}K^{m-1}f.$$

Iteratsiyalangan yadroli (91) tenglamaning yadrosi (89) shartga binoan chegaralangan va D soha chekli bo'lgani uchun (91) tenglama Fredgolm tipidagi integral tenglama bo'ladi.

Ravshanki, (80) tenglamaning har qanday yechimi (91) tenglamani ham qanoatlantiradi; teskari fikr, umuman aytganda, har bir m uchun ham to'g'ri bo'lmaydi.

4. Berilgan va iteratsiyalangan yadroli tenglamalarning teng kuchliligi. Endi m sonni shunday tanlash mumkinki, u (89) tengsizlikni qanoatlantirib, (91) tenglamaning har bir yechimi (80) tenglamani ham qanoatlantirishini, ya'ni bu tenglamalarning teng kuchli bo'lishini isbotlaymiz. Avvalo m sonni (89) tengsizlikni qanoatlantiradigan qilib tanlash mumkinligini va $\varepsilon\lambda, \varepsilon^{2}\lambda,...,\varepsilon^{m-1}\lambda$, bunda $\varepsilon=e^{\frac{2\pi i}{m}}$ sonlardan birortasi ham $K\ (x,\ y)$ yadro uchun xarakteristik son bo'lmasligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, bu mumkin emas. $p_1, p_2, \ldots$ orqali $\frac{n}{n-\alpha}$ dan katta bo'lgan tub sonlarni belgilab olamiz va $\varepsilon_j = e^{\frac{2\pi i}{p_j}}$ bo'lsin.

Bizning farazimizga asosan, har bir j uchun shunday k_j, $1 \le k_j < p_j$ ko'rsatkich topiladiki, berilgan λ uchun $\varepsilon_j^{k_j}\lambda$ son $K(x, y)$ yadro uchun xos son bo'ladi. p_j sonlar tub bo'lgani uchun

$$\varepsilon_j^{k_j} = e^{\frac{2\pi k_j}{p_j} i}$$

sonlar orasida bir-biriga teng son bo'lmaydi. Lekin bu holda markazi koordinat boshida va radiusi λ ga teng bo'lgan aylanada $K(x, y)$ yadroning cheksiz ko'p

$$\varepsilon_j^{k_j}\lambda = e^{\frac{2\pi k_j}{p_j} i}$$

xos sonlari bo'lib qoladi, bu esa, chekli sohada yadroning xos sonlari chekli sonda bo'lishiga qarama-qarshidir.

Shuning uchun ham shunday $p_j > \frac{n}{n-\alpha}$ tub son mavjudki, bunga mos bo'lgan barcha

$$\varepsilon_j\lambda,\ \varepsilon_j^2\lambda,\ \ldots,\ \varepsilon_j^{p_j-1}\lambda$$

sonlar xos sonlar bo'lmaydi.

$m = p_j$ deb qabul qilamiz. (91) tenglamani ushbu

$$\left(I-\varepsilon\lambda K\right)\left(I-\varepsilon^2\lambda K\right)\ldots\left(I-\varepsilon^{m-1}\lambda K\right)\left(I-\lambda K\right)\varphi=$$
$$=\left(I-\varepsilon\lambda K\right)\left(I-\varepsilon^2\lambda K\right)\ldots\left(I-\varepsilon^{m-1}\lambda K\right)f$$

ko'rinishda yozib olish mumkin. Bu tenglamada ozod hadni tenglikning chap tomoniga o'tkazib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\prod_{i=1}^{m-1}\left(I-\varepsilon^i\lambda K\right)\left[\left(I-\lambda K\right)\varphi-f\right]=0\ .$$

$\left(I-\lambda K\right)\varphi-f=\omega$ deb belgilab, oxirgi tenglamani

$$\prod_{i=1}^{m-1}\left(I-\varepsilon^i\lambda K\right)\omega=0 \tag{92}$$

ko'rinishga keltiramiz. So'ngra

$$\omega_1 = \prod_{i=2}^{m-1}\left(I - \varepsilon^i \lambda K\right)\omega$$

belgilashni kiritib, (92) tenglamani

$$\left(I - \varepsilon\lambda K\right)\omega_1 = 0$$

ko'rinishda yozib olamiz. $\varepsilon\lambda$ son $K\ (x,\ y)$ yadroning xos soni bo'lmagani uchun $\omega_1 \equiv 0$, ya'ni,

$$\prod_{i=2}^{m-1}\left(I - \varepsilon^i \lambda K\right)\omega = 0.$$

Bundan keyin

$$\prod_{i=3}^{m-1}\left(I - \varepsilon^i \lambda K\right)\omega = \omega_2$$

deb,

$$\left(I - \varepsilon^2 \lambda K\right)\omega_2 = 0$$

tenglamaga ega bo'lamiz. $\varepsilon^2\lambda$ son xos son emasligidan $\omega_2 \equiv 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Bu jarayonni davom ettirib, oxirida $\omega \equiv 0$ bo'lishiga, ya'ni

$$\left(I - \lambda K\right)\varphi \equiv f$$

ekanligiga ishonch hosil qiamiz.

Shunday qilib, (91) tenglamaning har bir yechimi (80) tenglamani ham qanoatlantiradi. Bu esa, ko'rsatilgan tenglamalarning teng kuchli ekanligini, boshqacha qilib aytganda ekvivalentligini ko'rsatadi.

Natijada, (80) tenglama uchun Fredgolmning barcha teoremalari o'rinli degan xulosaga kelamiz.

Agar $f \equiv 0$ desak, (80) va (91) tenglamalarga mos bir jinsli tenglamalarning ekvivalentligi xususan, ular bir xil sonda chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'lishi kelib chiqadi.

Izoh. Kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan yadro uchun Fredgolm nazariyasi o'rinli bo'lishini isbotlaganimizda, biz faqat uning iteratsiyalangan yadrolari birortasidan boshlab chegaralanganligidan foydalandik. Bu yerda yadroning (79) ko'rinishga ega bo'lishi hech qanday rol o'ynamaydi. Agar ixtiyoriy integral tenglamaning iteratsiyalangan yadrolari birortasidan boshlab chegaralangan bo'lsa, u holda bunday tenglamalar uchun Fredgolm teoremalari o'rinli bo'laveradi.

Volterraning ikkinchi turdagi ushbu

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \tag{1}$$

integral tenglamasini tekshiramiz. Biz I bobning 1- § ida, agar $y > x$ bo'lganda

$$K(x,y)=0, \quad x<y\leq b$$

deb hisoblansa, (1) tenglama Fredgolmning ikkinchi turdagi integral tenglamasining xususiy holidan iborat bo'lib qoladi, deb aytib o'tdik. Lekin bu tenglama Fredgolm tenglamasiga nisbatan ancha sodda bo'lib, yadroga ma'lum shartlar qo'yilganda hamma vaqt yagona yechimga ega bo'ladi.

1- §. Ketma-ket yaqinlashish usuli

Volterraning ikkinchi tur integral tenglamasi ketma-ket yaqinlashish usuli bilan osonlikcha yechiladi.

1. Yadro chegaralangan hol. (1) tenglamaning yadrosi biror $[a, b]$ chekli oraliqda chegaralangan bo'lsin, ya'ni

$$|K(x,y)|\leq M, \quad a\leq x\leq b.$$

Agar (1) tenglamaning ozod hadi $[a, b]$ oraliqda jamlanuvchi bo'lsa, u holda bu tenglama shu oraliqda yagona jamlanuvchi yechimga ega bo'ladi va bu yechimni λ ning ixtiyoriy chekli qiymatida ketma-ket yaqinlashish usuli bilan tuzish mumkin.

Nolinchi yaqinlashish uchun $f(x)$ ni qabul qilamiz, ya'ni

$$\varphi_0(x)=f(x),$$

$\varphi_1(x)$ ni esa

$$\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy$$

munosabat bilan aniqlaymiz. Bu jarayonni davom ettirib,

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi_{n-1}(y)dy \tag{2}$$

rekurrent formulalarni qanoatlantiruvchi

$$\varphi_0(x),\ (x),\ \dots,\ \varphi_n(x),\ \dots$$

funksiyalarning cheksiz ketma-ketligini hosil qilamiz.

Ikkinchi yaqinlashish

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi_1(t)dt$$

formula bilan aniqlanganligi uchun, $\varphi_1(t)$ ning o'rniga uning qiymatin qo'yib, Dirixle formulasidan foydalansak,

$$\varphi_2(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,t)\left[f(t)+\lambda\int_a^t K(t,y)\,f(y)\right]dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy+\lambda^2\int_a^x K_2(x,y)f(y)dy$$

tenglik hosil bo'ladi, bu yerda

$$K_2(x,y)=\int_y^x K(x,t)K(t,y)dt.$$

Xuddi shu yo'l bilan $\varphi_n(x)$ uchun

$$\varphi_n(x)=f(x)+\lambda\int_a^x\left[\sum_{i=1}^n \lambda^{i-1}K_i(x,y)\right]f(y)dy \qquad (3)$$

formulani hosil qilamiz, bunda

$$K_i(x,y)=\int_y^x K(x,t)K_{i-1}(t,y)dt. \qquad (4)$$

Shuni aytib o'tish kerakki, $t>x$ bo'lganda $K(x,t)=0$ bo'lgani uchun $y>x$ da $K_i(x,y)=0$ bo'ladi. Ushbu

$$Kf=\int_a^x K(x,y)f(y)dy,\ \dots,\ K^i f=\int_a^x K_i(x,y)f(y)dy$$

belgilashlardan foydalansak, (3) tenglik

$$\varphi_n(x)=f(x)+\sum_{i=1}^n \lambda^i K^i f$$

ko'rinishda yoziladi. Bu tenglikdan ko'rinadiki, agar biz hosil qilgan $\{\varphi_n(x)\}$ funksiyalar ketma-ketligining limiti mavjud bo'lsa, bu limit *Neyman qatori* deb ataladigan

$$f(x)+\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i K^i f \tag{5}$$

qatorning yig'indisi bilan ustma-ust tushadi.

Endi (5) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatamiz. *K (x, y)* yadro chegaralangan: $|K(x,y)|\le M, \quad a\le x\le b$. Endi $y<x$ bo'lganda

$$|K_i(x,y)|\le\frac{M^i(x-y)^{i-1}}{(i-1)!} \tag{6}$$

tengsizlikning o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun induksiya usulidan foydalanamiz. $i-1$ bo'lganda (6) tengsizlik to'g'ri bo'lsin, ya'ni

$$|K_{i-1}(x,y)|\le\frac{M^{i-1}(x-y)^{i-2}}{(i-2)!}$$

(4) formulaga asosan

$$|K_i(x,y)|\le\int_y^x|K(x,t)|\frac{M^{i-1}(t-y)^{i-2}}{(i-2)!}dt\le\frac{M^i(x-y)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Shunday qilib, (6) tengsizlik ixtiyoriy natural i uchun ham o'rinlidir. (6) tengsizlikda $x-y$ ayirmani uning eng katta qiymati $b-a$ bilan almashtiramiz. U holda

$$|K_i(x,y)|\le\frac{M^i(b-a)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

(5) qatorning umumiy hadini baholaymiz.

$$|\lambda^i K^i f|\le|\lambda^i|\left|\int_a^b K_i(x,y)f(y)dy\right|\le\frac{|\lambda|^i M^i(b-a)^{i-1}}{(i-1)!}\left|\int_a^b f(y)dy\right|. \tag{7}$$

f (x) funksiya jamlanuvchi bo'lgani uchun oxirgi tengsizlikdagi integral chekli miqdordir. (7) tengsizlikdan (5) qatorning umumiy hadi yaqinlashuvchi darajali qatorning umumiy hadidan katta emasligi kelib chiqadi. Demak, (5) qator λ ning ixtiyoriy chekli qiymatida x bo'yicha absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. (5) qatorning yig'indisini $\varphi(x)$ orqali belgilab olamiz. Yuqorida ko'rsatganimizga asosan $n\to\infty$ da $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ ga tekis intiladi. *K (x, y)* yadro chegaralangan bo'lgani uchun ushbu

$$K(x,y)\varphi_{n-1}(y)\to K(x,y)\varphi(y)$$

intilish ham x ga nisbatan tekis bo'ladi. Bunga asosan, (2) formulada integral ostida limitga o'tish mumkin. Bu amalni bajarib,

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)\varphi(y)dy$$

tenglikni hosil qilamiz, ya'ni (5) qatorning yig'indisi Volterra integral tenglamasining yechimi ekan. Bu yechimni aniqlaydigan (5) tenglikdagi

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i K^i f \tag{8}$$

qatorning yig'indisi chegaralangan funksiya bo'ladi. Haqiqatan ham, (7) tengsizlikka asosan:

$$\left|\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^i K^i f\right|\le\int_a^b|f(y)|dy\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\lambda|^i M^i(b-a)^{i-1}}{(i-1)!}=$$

$$=|\lambda|Me^{|\lambda|M(b-a)}\int_a^b|f(y)|dy.$$

Demak, $\varphi(x)$ yechim jamlanuvchi *f (x)* funksiya va chegaralangan funksiyaning yig'indisidan iborat bo'lgani uchun jamlanuvchi bo'ladi. Agar (1) tenglamaning ozod hadi *f (x)* uzluksiz funksiya bo'lsa, (8) qator tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun uning yig'indisi ham uzluksiz funksiya bo'ladi. Bu xolda (1) tenglamaning yechimi ham uzluksiz funksiyadan iborat bo'ladi. Ushbu

$$\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)$$

qator (6) tengsizlikka asosan yaqinlashuvchi bo'lgani uchun uning yig'indisini $R(x,y;\lambda)$ orqali belgilab olamiz. Buni *K (x, y)* yadroning yoki (1) tenglamaning *rezolventasi* deyiladi.

(3) formulada $n\to\infty$ limitga o'tib, (1) tenglamaning yechimini rezolventa orqali

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x R(x,y;\lambda)f(y)dy \tag{9}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Xuddi Fredgolm tenglamasidek, $R(x,y;\lambda)$ rezolventa o‘zining birinchi va ikkinchi argumentlariga nisbatan quyidagi integral tenglamalarni qanoatlantiradi:

$$R(x,y;\lambda)-\lambda\int_y^x K(x,t)R(t,y;\lambda)dt=K(x,y),$$

$$R(x,y;\lambda)-\lambda\int_y^x K(t,y)R(x,t;\lambda)dt=K(x,y).$$

Bu tenglamalarni tekshirib ko‘rish Fredgolm tenglamalaridek bajariladi. Bularga asosan (9) formula bilan aniqlangan yechim (1) tenglamani qanoatlantirishini ko‘rsatish qiyin emas. Haqiqatan, (9) ni (1) ga qo‘yamiz:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt=f(x)+\lambda\int_a^x R(x,y;\lambda)f(y)dy-$$

$$-\lambda\int_a^x K(x,t)\left[f(t)+\lambda\int_a^t R(t,y;\lambda)f(y)dy\right]dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^x\left[-K(x,y)+R(x,y;\lambda)\right]f(y)-$$

$$-\lambda^2\int_a^x f(y)dy\int_y^x K(x,t)R(t,y;\lambda)dt=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^x\left[-K(x,y)+R(x,y;\lambda)-\lambda\int_y^x K(x,t)R(t,y;\lambda)dt\right]\times$$

$$\times f(y)dy=f(x).$$

Endi (1) tenglama yechimining ixtiyoriy chekli λ uchun yagonaligini ko‘rsatamiz. (1) tenglama ikkita $\varphi(x)$ va $\psi(x)$

jamlanuvchi yechimlarga ega bo'lsin. Bularning ayirmasi $\omega(x)=$ $=\varphi(x)-\psi(x)$ bir jinsli

$$\omega(x)=\lambda K\omega \qquad (10)$$

tenglamani qanoatlantiradi. Iteratsiya usulidan foydalanib, (10) tenglamaning o'ng tomoni ω ning o'rniga $\lambda K\omega$ ni qo'yib,

$$\omega(x)=\lambda^2 K^2\omega$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamaning o'ng tomonidagi ω ni yana $\lambda K\omega$ bilan almashtirib, $\omega(x)=\lambda^3 K^3\omega$ tenglamani hosil qilamiz. Bu jarayonni i marta bajarganimizdan so'ng

$$\omega(x)=\lambda^i K^i\omega \quad \text{yoki} \quad \omega(x)=\lambda^i\int^x K_i(x,y)\omega(y)\,dy$$

tenglamaga kelamiz. $\omega(x)$ ikkita jamlanuvchi funksiyaning ayirmasi bo'lgani uchun jamlanuvchi bo'ladi va (6) tengsizlikka asosan ixtiyoriy i uchun

$$|\omega(x)|\le\frac{|\lambda|^i M^i(b-a)^{i-1}}{(i-1)!}\int_a^b|\omega(x)|\,dx$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan $i\to\infty$ da $|\omega(x)|\le 0$ yoki $\omega(x)\equiv 0$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, Volterra integral tenglamasi yadrosining spektri bo'sh to'plamdan iborat ekan.

O'zining mana shu muhim xususiyati bilan Volterraning ikkinchi tur integral tenglamasi Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamasidan ajralib turadi.

Yuqorida isbot qilingan yagonalik teoremasi jamlanuvchi funksiyalar sinfida o'rinli edi. Agar yechimning jamlanuvchi bo'lish shartidan voz kechilsa ham yechim yagona bo'ladimi degan tabiiy savol tug'iladi. Bu savolga javob berish uchun $0\le y\le x\le 1$ bo'lganda yadrosi ushbu

$$K(x,y)=\begin{cases} ye^{\frac{1}{x^2}-1}, & 0\le y\le xe^{1-\frac{1}{x^2}}, \\ x, & xe^{1-\frac{1}{x^2}}\le y\le x, \\ 0, & y>x \end{cases}$$

tenglik bilan aniqlanadigan Volterraning bir jinsli

$$\varphi(x)=\int_0^x K(x,y)\varphi(y)dy$$

tenglamasini tekshiramiz.

Asosiy $\{0\le x\le 1,\ 0\le y\le 1\}$ kvadratda *K (x, y)* yadro chegaralangan, chunki

$$0\le K(x,y)\le x\le 1.$$

Bu tenglama $\varphi(x)\equiv 0$ bo'lgan jamlanuvchi yechimga ega, isbotlanganiga asosan boshqa jamlanuvchi yechimlari yo'q. Shu bilan birga bu tenglama [0, 1] oraliqda cheksiz ko'p

$$\varphi(x)=\frac{c}{x}$$

ko'rinishdagi jamlanuvchi bo'lmagan yechimlarga ega, bunda c — ixtiyoriy o'zgarmas. Haqiqatan ham,

$$\int_0^x K(x,y)\varphi(y)dy=\int_0^{xe^{1-\frac{1}{x^2}}} ye^{\frac{1}{x^2}-1}\frac{c}{y}dy+$$

$$+\int_{xe^{1-\frac{1}{x^2}}}^{x} x\frac{c}{y}dy=cx-cx\ln e^{1-\frac{1}{x^2}}=\frac{c}{x}.$$

Demak, $\varphi(x)=\dfrac{c}{x}$ funksiya [0, 1] oraliqda jamlanuvchi bo'lmagan yechim ekan.

2. Yadro kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan hol. Volterra (1) tenglamasining yadrosi chegaralangan bo'lmay, kuchsiz maxsuslikka ega bo'lsa ham bu tenglamaning yechimini ixtiyoriy chekli λ uchun ketma-ket yaqinlashish usuli bilan topish mumkin.

Ushbu

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x\frac{\mathrm{H}(x,y)}{(x-y)^\alpha}\varphi(y)dy=f(x),\quad 0<\alpha<1, \qquad (11)$$

integral tenglamani tekshiramiz, bunda $|\mathrm{H}(x,y)|<M$, M — o'zgarmas.

Demak,

$$|K(x,y)| = \left|\frac{\mathrm{H}(x,y)}{(x-y)^{\alpha}}\right| < \frac{M}{(x-y)^{\alpha}}. \tag{12}$$

Iteratsiyalangan yadrolarni baholaymiz:

$$K_2(x,y) = \int_y^x K(x,t)K(t,y)\,dt,$$

(12) ga asosan

$$|K_2(x,y)| < M^2 \int_y^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}\,(t-y)^{\alpha}}.$$

Oxirgi integralda $t = y + (x, y)\,s$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$\int_y^x \frac{dt}{(x-t)^{\alpha}\,(t-y)^{\alpha}} = (x-y)^{1-2\alpha}\int_0^1 s^{-\alpha}(1-s)^{-\alpha}\,ds =$$

$$= (x-y)^{1-2\alpha}B(1-\alpha,\ 1-\alpha) = (x-y)^{1-2\alpha}\frac{\Gamma^2(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)}$$

ifodani olamiz. Shunday qilib,

$$|K_2(x,y)| < \frac{M^2(x-y)^{1-2\alpha}\,\Gamma^2(1-\alpha)}{\Gamma(2-2\alpha)},$$

bu yerdagi B (a, b) va Γ (a) — Eyler integrallari.

Faraz qilaylik, i - iteratsiyalangan yadro uchun bunday baho to‘g‘ri bo‘lsin, ya’ni

$$|K_i(x,y)| < \frac{M^i\Gamma^i(1-\alpha)}{\Gamma(i-i\alpha)}(x-y)^{i-1-i\alpha}. \tag{13}$$

$(i + 1)$ — iterasiyalangan yadro uchun ham bu bahoning to‘g‘ri bo‘lishini ko‘rsatamiz:

$$|K_{i+1}(x,y)| = \left|\int_y^x K(x,t)K_i(t,y)\,dt\right| <$$

$$< \frac{M^{i+1}\Gamma^{i}(1-\alpha)}{\Gamma(i-i\alpha)} \int_y^x (x-t)^{-\alpha}(t-y)^{i-1-i\alpha} dt.$$

Bu integralda $t = y + (x, y)\, s$ almashtirishni bajarish natijasida ushbu

$$|K_{i+1}(x,y)| < \frac{M^{i+1}\Gamma^{i+1}(1-\alpha)}{\Gamma(i+1-(i-1)\alpha)} (x-y)^{i-(i+1)\alpha}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Shunday qilib, (13) baho $i = 1$ va ixtiyoriy natural $(i + 1)$ da to'g'ri bo'lgani uchun, uning umuman to'g'riligi kelib chiqadi. i yetarli katta bo'lganda $(x - y)$ ning darajasi musbat bo'ladi.

Shuning uchun ham $x - y$ ni undan katta $b - a$ miqdor bilan almashtirish mumkin. Bu holda (5) qatorning umumiy hadi uchun ushbu baho

$$|\lambda^{i} K^{i} f| < \frac{|\lambda|^{i}(b-a)^{i-1-i\alpha}\Gamma^{i}(1-\alpha)}{\Gamma(i-i\alpha)} \int_a^b |f(x)|\, dx$$

o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikning o'ng tomonidagi miqdorni C_i orqali belgilab olamiz. Umumiy hadi C_i dan iborat bo'lgan qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun quyidagi:

$$\Gamma(P) = \sqrt{\frac{2\pi}{P}}\; P\, \ell^{-P+\frac{\theta}{12P}}, \quad 0<\theta<1, \quad P>0.$$

Stirling formulasidan foydalanamiz. Koshi alomatiga asosan ushbu

$$\sqrt[i]{C_i} = \frac{|\lambda| M (b-a)^{1-\alpha-\frac{1}{i}}\Gamma(1-\alpha)\left[i(1-\alpha)\right]^{\frac{1}{2m}+\alpha}}{\left(\sqrt{2\pi}\right)^{1/i}\; i(1-\alpha)} \left[\int_a^b |f(x)|\, dx\right]^{\frac{1}{i}}$$

miqdor $i \to \infty$ da nolga intilgani uchun umumiy hadi C_i bo'lgan qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak, (5) qator ixtiyoriy chekli λ uchun absolyut va tekis yaqinlashadi.

Shunday qilib, yadrosi kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan Volterraning ikkinchi tur integral tenglamasi uchun ketma-ket yaqinlashishlar ixtiyoriy λ uchun, chegaralangan yadro bo'lgan holga nisbatan sekinroq bo'lsa ham, yaqinlashadi.

Misol. Ushbu

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^x e^{x-y}\varphi(y)dy=f(x)$$

integral tenglama ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechilsin.

Iteratsiyalangan yadrolarni va rezolventani tuzamiz:

$$K_2(x,y)=\int_y^x e^{x-t}e^{t-y}dt=e^{x-y}\int_y^x dt=e^{x-y}(x-y),$$

$$K_3(x,y)=\int_y^x e^{x-t}e^{t-y}(t-y)dt=e^{x-y}\int_y^x (t-y)dt=e^{x-y}\frac{(x-y)^2}{2}.$$

Umuman

$$K_i(x,y)=e^{x-y}\frac{(x-y)^{i-1}}{(i-1)!}.$$

Endi $R(x,y,\lambda)$ rezolventani tuzamiz.

$$R(x,y;\lambda)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_i(x,y)=e^{x-y}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{[\lambda(x-y)]^i}{(i-1)!}=e^{(1+\lambda)(x-y)}.$$

(9) formulaga asosan berilgan tenglamaning yechimi

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^x e^{(1+\lambda)(x-y)}f(y)dy$$

ko'rinishda bo'ladi. Yechimning bunday sodda topilishining sababi yadro faqat $x-y$ ayirmaga bog'liqligidir. Agar (1) tenglamaning yadrosi

$$K(x,y)=\frac{A(x)}{A(y)}$$

ko'rinishda bo'lsa ham tenglama osongina yechiladi.

Haqiqatan ham,

$$\frac{\varphi(x)}{A(x)}=\varphi_1(x),\qquad \frac{f(x)}{A(x)}=f_1(x)$$

belgilashlarni kiritib, (1) tenglamani

$$\varphi_1(x)-\lambda\int_a^x\varphi_1(y)dy=f_1(x)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Agar bu tenglamada

$$\varphi_2(x)=\int_a^x\varphi_1(y)dy$$

belgilash kiritsak, u holda ushbu

$$\frac{d\varphi_2(x)}{dx}-\lambda\varphi_2(x)=f_1(x)$$

oddiy differensial tenglamaga ega bo'lamiz. $\varphi_2(a)=0$ tenglikni e'tiborga olib, differensial tenglamaning yechimini

$$\varphi_2(x)=e^{\lambda x}\int_a^x e^{-\lambda y}f_1(y)dy$$

ko'rinishda topamiz. Bundan

$$\varphi_1(x)=\frac{d\varphi_2(x)}{dx}=f_1(x)+\lambda\int_a^x e^{\lambda(x-y)}f_1(y)dy,$$

yoki

$$\varphi(x)=A(x)\varphi_1(x)=f(x)+\lambda\int_a^x e^{\lambda(x-y)}K(x,y)f(y)dy$$

Bu formulani yuqorida bayon qilingan ketma-ket yaqinlashish usuli bilan ham keltirib chiqarish mumkin.

Mashqlar. Quyidagi integral tenglamalar rezolventa yordamida yechilsin.

1. $\varphi(x)=\sin x+2\int_0^x \ell^{x-y}\varphi(y)dy$.

Javob: $\varphi(x)=\frac{1}{5}\ell^{3x}-\frac{1}{5}\cos x+\frac{2}{5}\sin x$.

2. $\varphi(x)=\ell^x\sin x+\int_0^x\frac{2+\cos x}{2+\cos y}\varphi(y)dy$.

Javob: $\varphi(x)=\ell^{x}\sin x+(2+\cos x)\,\ell^{x}\ln\dfrac{3}{2+\cos x}$.

3. $\varphi(x)=1+x^{2}+\int\limits_{0}^{x}\dfrac{1+x^{2}}{1+y^{2}}\varphi(y)dy$.

Javob: $\varphi(x)=\ell^{x}\left(1+x^{2}\right)$.

2- §. Volterraning birinchi tur integral tenglamasi

Bizga ma'lumki, Volterraning birinchi tur tenglamasi deb,

$$\int\limits_{a}^{x}K(x,y)\varphi(y)dy=f(x) \qquad (14)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Faraz qilaylik, (14) tenglamaning yadrosi va ozod hadi quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $K_x(x,y)$, $f'(x)$ lar mavjud va uzluksiz funksiyalar,

2) K (x, x) hech qaerda nolga aylanmaydi.

Bu holda (14) tenglamani x bo'yicha differensiallab, Volterraning ikkinchi tur integral tenglamasiga olib kelamiz:

$$K(x,x)\varphi(x)+\int\limits_{a}^{x}K_{x}(x,y)\varphi(y)dy=f'(x) \qquad (15)$$

yoki

$$\varphi(x)+\int\limits_{a}^{x}K^{*}(x,y)\varphi(y)dy=f^{*}(x),$$

bunda

$$K^{*}(x,y)=\frac{K_{x}(x,y)}{K(x,x)},\qquad f^{*}(x)=\frac{f'(x)}{K(x,x)}.$$

Agar $K'_y(x,y)$ hosila mavjud va uzluksiz bo'lsa, (14) tenglamani bo'laklab integrallashga asoslangan ikkinchi usul bilan ham ikkinchi turdagi integral tenglamaga keltirish mumkin.

Shu maqsadda

$$\int\limits_{a}^{x}\varphi(y)dy=\upsilon(x)$$

belgilash kiritib, (14) tenglamadagi integralda $K(x, y)=u$, $\varphi(y)dy=dv$ desak,

$$f(x)=\left[K(x,y)v(y)\right]_{y=a}^{y=x}-\int_a^x K_y'(x,y)v(y)dy$$

yoki

$$v(x)-\int_a^x \frac{K_y'(x,y)}{K(x,x)}v(y)dy=\frac{f(x)}{K(x,x)} \tag{16}$$

tenglamani hosil qilamiz.

Agar $\dfrac{K_y'(x,y)}{K(x,x)}$ yadroning rezolventasini $R^*(x,y;1)$ orqali belgilasak, (16) tenglamaning yechimini

$$v(x)=\frac{f(x)}{K(x,x)}+\int_a^x R^*(x,y;1)\frac{f(y)}{K(y,y)}dy \tag{17}$$

ko'rinishda topamiz.

Bir qarashda ikkinchi usulni qo'llash uchun *f (x)* funksiyaning differensiallanuvchi bo'lishi shart emasdek tuyuladi. Ammo, $\varphi(x)$ funksiyani topish uchun biz (17) formula bilan aniqlangan $v(x)$ funksiyani differensiallashimiz kerak, buning uchun esa, *f (x)* funksiyani differensiallash zarurdir.

Yuqorida keltirilgan shartlardan eng muhimi, *K (x, x)* ning nolga aylanmaslik shartidir, chunki *x* ning biror qiymatida *K (x, x)* nolga teng bo'lib qolsa, Volterraning birinchi tur integral tenglamasini tekshirishda katta qiyinchiliklarga duch kelamiz. Bu holda (15) va (16) tenglamalar uchinchi turdagi integral tenglamalardan iborat bo'ladi. Lekin ayrim xususiy hollarda bunday tenglamalarning yechimlarini hatto kvadraturada yozib olish mumkin bo'ladi.

Bunga Abelning integral tenglamasi misol bo'ladi.

3- §. Abel integral tenglamasi

Abelning

$$\int_a^x \frac{\varphi(y)dy}{(x-y)^{\alpha}}=f(x), \qquad 0<\alpha<1 \tag{18}$$

integral tenglamasini tekshiramiz. Bu tenglamaning yechimi mavjud deb faraz qilib, uni

$$\int_a^t \frac{\varphi(y)dy}{(t-y)^\alpha}=f(t)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Tenglikning har ikki tomonini $\frac{1}{(x-t)^{1-\alpha}}$ ga ko'paytirib, bo'yicha a dan x gacha integrallaymiz. Natijada

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\int_a^t \frac{\varphi(y)dy}{(t-y)^\alpha}=\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

ifoda hosil bo'ladi. Bu tenglikdagi takroriy integralga Dirixle formulasini qo'llab,

$$\int_a^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\int_a^t \frac{\varphi(y)dy}{(t-y)^\alpha}=\int_a^x \varphi(y)dy\int_y^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-y)^\alpha}$$

ifodani olamiz. Oxirgi integral $t=y+(x-y)s$ almashtirish yordamida

$$\int_y^x \frac{dt}{(x-t)^{1-\alpha}(t-y)^\alpha}=\int_0^1 \frac{ds}{(1-s)^\alpha s^{1-\alpha}}=\mathrm{B}(\alpha,1-\alpha)=$$

$$=\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$$

ko'rinishga keladi. Shunday qilib,

$$\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\int_a^x \varphi(y)dy=\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}$$

yoki

$$\varphi(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\frac{d}{dx}\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{19}$$

Agar *f (x)* uzluksiz differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, oxirgi formulaning o'ng tomonida avval bo'laklab integrallab, so'ngra differensiallash amalini bajarsak,

$$\varphi(x)=\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}\left[\frac{f(a)}{(x-a)^{1-\alpha}}+\int_a^x \frac{f'(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}\right]$$

formulaga ega bo'lamiz.

Demak, Abel integral tenglamasining yechimi mavjud bo‘lsa, bu yechim (19) formula bilan aniqlanishi zarur ekan. Bundan yo‘l-yo‘lakay (18) tenglama yechimining yagonaligi kelib chiqadi.

Endi (19) funksiyaning haqiqatan ham (18) tenglamani qanoatlantirishini ko‘rsatamiz.

(19) formuladagi integralni $F(x)$ orqali belgilab olamiz, ya’ni

$$F(x)=\int_a^x \frac{f(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}. \tag{20}$$

(19) formula bilan aniqlangan $\varphi(x)$ funksiyani (18) tenglamaning chap tomoniga qo‘yamiz va

$$\frac{\sin\alpha}{\alpha}\int_a^x \frac{F'(y)}{(x-y)^{\alpha}}dy=g(x) \tag{21}$$

bo‘lsin deb, faraz qilamiz. $g(x)=f(x)$ bo‘lishini isbotlash yetarlidir. (21) tenglikni $F'(x)$ ga nisbatan Abelning integral tenglamasi deb qarab, yuqorida bayon qilingan usulni qo‘llasak,

$$\int_a^x F'(y)dy=F(x)-F(a)=\int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \tag{22}$$

tenglikni hosil qilamiz. (20) integralda $t=a+(x-a)y$ almashtirishni bajaramiz. U holda

$$F(x)=(x-a)^{\alpha}\int_a^x \frac{f\left[a+(x-a)y\right]}{(1-y)^{1-\alpha}}dy,$$

bundan $F(a)=0$ va (22) tenglik

$$F(x)=\int_a^x \frac{g(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}} \tag{23}$$

ko‘rinishda yoziladi. (20) tenglikdan (23) ni ayirib,

$$\int_a^x \frac{\omega(t)dt}{(x-t)^{1-\alpha}}=0, \qquad \omega(t)=f(t)-g(t)$$

tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu tenglama noma’lumga nisbatan Abelning bir jinsli tenglamasidir. Yuqorida isbotlanganga asosan u yagona $\omega(x)\equiv 0$ yechimga ega bo‘ladi. Demak, $g(x)=f(x)$ ekan.

Xususiy holda, agar $a=0$, $\alpha=\frac{1}{2}$ bo'lsa, (19) yechimdan I bobda o'rganilgan tautoxron to'g'risidagi masalada hosil bo'lgan integral tenglamaning quyidagi

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{dx}\int_{0}^{x}\frac{f(t)dt}{\sqrt{x-t}}$$

yechimini hosil qilamiz.

4- §. Volterraning chiziqli bo'lmagan tenglamalari

Oddiy differensial tenglamalar kursidan ma'lumki,

$$\frac{dy}{dx}=F(x,y),\quad y(x_0)=y_0$$

Koshi masalasini Volterraning chiziqli bo'lmagan

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F\left[t,y(t)\right]dt$$

integral tenglamasi bilan almashtirib, bu tenglamaning yechimini ketma-ket yaqinlashish

$$y_0(x)=y_0,\quad y_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}F\left[t,y_{n-1}(t)\right]dt$$

usuli bilan topilgan edi.

Mana shu usul bilan yuqoridagi tenglamaga qaraganda umumiyroq bo'lgan

$$\varphi(x)=f(x)+\int_{a}^{x}F\left[x,y;\varphi(y)\right]dy \tag{24}$$

ko'rinishdagi Volterraning chiziqli bo'lmagan integral tenglamasini ham yechish mumkin. $F(x, y; t)$ funksiya ixtiyoriy t_1, t_2 uchun

$$\left|F(x,y;t_1)-F(x,y;t_2)\right|\le h(x,y)\left|t_1-t_2\right| \tag{25}$$

shartni va bundan tashqari

$$\left|\int_{a}^{x}F\left[x,y;f(y)\right]dy\right|\le g(x) \tag{26}$$

shartni qanoatlantirsin deb faraz qilamiz, bu yerda *h (x,y)* va *g (x)* funksiyalar L_2 sinfga tegishli berilgan funksiyalar, ya'ni shunday funksiyalarki, $\{a \le y \le x \le b\}$ sohada ushbu

$$\int_a^x g^2(x)\,dx \le N^2, \qquad \int_a^b dx \int_a^x h^2(x,y)\,dy \le A^2 \tag{27}$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi, bundagi N^2 va A^2 — musbat o'zgarmaslar.

$$\int_a^x h^2(x,y)\,dy = H^2(x)$$

deb belgilab, (27) shartlardan ikkinchisini

$$\int_a^b H^2(x)\,dx \le A^2 \tag{28}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin. Xuddi chiziqli holda bo'lganidek, (24) tenglamaning yechimini birinchi hadi $\varphi_0(x) = f(x)$ bo'lgan, boshqa hadlari esa

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_a^x F\left[x, y; \varphi_{n-1}(y)\right] dy \tag{29}$$

rekurrent formula bilan aniqlanadigan $\{\varphi_n(x)\}$ ketma-ketlikning limiti sifatida aniqlashga harakat qilamiz.

Avvalo ushbu

$$\left|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)\right| = \left|\int_a^x F\left[x, y; f(y)\right] dy\right| \le g(x)$$

tengsizlik o'rinlidir. Umumiy holda

$$\left|\varphi_{n+1}(x) - \varphi_n(x)\right| \le \int_a^x \left|F\left[x, y; \varphi_n(y)\right] - F\left[x, y; \varphi_{n-1}(y)\right]\right| dy \le$$

$$\le \int_a^x h(x,y)\left|\varphi_n(y) - \varphi_{n-1}(y)\right| dy, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Bunyakovskiy—Shvars tengsizligiga asosan:

$$\left[\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)\right]^2 \le \int_a^x h^2(x,y)\,dy \int_a^x \left[\varphi_n(y)-\varphi_{n-1}(y)\right]^2 dy=$$

$$=H^2(x)\int_a^x \left[\varphi_n(y)-\varphi_{n-1}(y)\right]^2 dy.$$

Shunday qilib, biz quyidagi tengsizliklarga ega bo‘ldik:

$$\left[\varphi_1(x)-\varphi_0(x)\right]^2 \le g^2(x),$$

$$\left[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right]^2 \le H^2(x)\int_a^x g^2(y)\,dy \le N^2 H^2(x),$$

$$\left[\varphi_3(x)-\varphi_2(x)\right]^2 \le N^2 H^2(x)\int_a^x H^2(y)\,dy$$

Ushbu

$$B_1(x)=\int_a^x H^2(y)\,dy,\ B_2(x)=\int_a^x H^2(y)B_1(y)\,dy,\dots,$$

$$B_n(x)=\int_a^x H^2(y)B_{n-1}(y)\,dy$$

belgilashlarni kiritamiz. U holda

$$\left[\varphi_3(x)-\varphi_2(x)\right]^2 \le N^2 H^2(x)B_1(x),$$

$$\left[\varphi_4(x)-\varphi_3(x)\right]^2 \le N^2 H^2(x)B_2(x),$$

....

$$\left[\varphi_{n+2}(x)-\varphi_{n+1}(x)\right]^2 \le N^2 H^2(x)B_n(x)$$

tengsizliklarga ega bo‘lamiz.

Endi

$$B_n(x)=\frac{1}{n!}B_1^n(x), \quad n=1,2,\dots \tag{30}$$

tenglikning to‘g‘ri ekanligiga induksiya usulidan foydalanib ishonch hosil qilish qiyin emas. Bu formula $n = 1$ bo‘lganda o‘rinli ekani ravshan, $n - 1$ da to‘g‘ri deb, n uchun uning to‘g‘rligini ko‘rsatamiz.

$$B_n(x)=\int_a^x H^2(y)B_{n-1}(y)dy=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x H^2(y)B_1^{n-1}(y)dy,$$

$$H^2(x)=\frac{dB_1}{dx}$$

bo‘lgani uchun

$$B_n(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_a^x B_1^{n-1}(y)dB_1(y)=$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\left[\frac{1}{n}B_1^n(y)\right]_{y=a}^{y=x}=\frac{1}{n!}B_1^n(x).$$

(28) shartdan darhol

$$0\le B_1(x)\le\int_a^b H^2(x)dx\le A^2$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak,

$$\left[\varphi_{n+2}(x)-\varphi_{n+1}(x)\right]\le NH(x)\frac{A^n}{\sqrt{n!}}.$$

Agar $H(x)$ funksiya chekli bo‘lsa, n qismiy yig‘indisi $\varphi_n(x)$ ga teng bo‘lgan

$$\varphi(x)=\varphi_1(x)+\left[\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\right]+\left[\varphi_3(x)-\varphi_2(x)\right]+\ldots \quad (31)$$

qator uchun buning birinchi hadini tashlab yuborsak, hamma vaqt yaqinlashuvchi ushbu qator

$$NH(x)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{A^n}{\sqrt{n!}}$$

majorant qator bo‘ladi. Demak, bu holda (31) qator absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi, shuning uchun ham

$$\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)=\varphi(x)$$

bo'ladi. Agar $H(x)$ funksiya (a, b) oraliqning o'lchovi nolga teng bo'lgan biror qismida cheksizlikka aylansa, (31) qatorning hamma joyda absolyut va tekis yaqinlashishini ta'minlab bo'lmaydi, ammo qatorning deyarli hamma joyda yaqinlashishini kafolatlash mumkin. Bunday holda qator *deyarli tekis yaqinlashadi* deyiladi.

Endi limit funksiya $\varphi(x)$ ning tekshirilayotgan tenglamani qanoatlantirishini isbotlaymiz.

Bu funksiyani

$$\varphi(x)=\varphi_n(x)+R_n(x) \tag{32}$$

ko'rinishda yozib olamiz, bu yerdagi $R_n(x)$ (31) qatorning qoldiq hadi bo'lib, L_2 sinfga tegishlidir. Shu bilan birga

$$|R_n(x)|\le N H(x)\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{A^k}{\sqrt{k!}}$$

bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b R_n^2(x)dx=0$$

bo'ladi. (29) va (32) tengliklarga asosan

$$\varphi(x)-f(x)-\int_a^x F[x,y;\varphi(y)]dy=\varphi_n(x)+R_n(x)-f(x)-$$

$$-\int_a^x F[x,y;\varphi(y)]dy=f(x)+\int_a^x F[x,y;\varphi_{n-1}(y)]dy+$$

$$+R_n(x)-f(x)-\int_a^x F[x,y;\varphi(y)]dy=R_n(x)+$$

$$+\int_a^x\{F[x,y;\varphi_{n-1}(y)]-F[x,y;\varphi(y)]\}dy.$$

$F(x, y; t)$ funksiyaga qo'yilgan shartga asosan

$$|F[x,y;\varphi_{n-1}(y)]-F[x,y;\varphi(y)]|\le h(x,y)|\varphi_{n-1}-\varphi|=$$

$$=h(x,y)|R_{n-1}|.$$

Bundan $2|\alpha\beta|\le\alpha^2+\beta^2$ tengsizlikka asosan

$$\left\{\varphi(x)-f(x)-\int_a^x F[x,y;\varphi(y)]dy\right\}^2 \le 2R_n^2(x)+$$

$$+2\left[\int_a^x h(x,y)\left|R_{n-1}(y)\right|dy\right]^2$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bunyakovskiy—Shvars tengsizligiga asosan avvalgi tengsizlikni ushbu

$$\left[\int_a^x h(x,y)\left|R_{n-1}(y)\right|dy\right]^2 \le H^2(x)\int_a^x R_{n-1}^2(y)dy \le$$

$$\le H^2(x)\int_a^b R_{n-1}^2(y)dy$$

ko'rinishda yozib olamiz. $n\to\infty$ intilganda limitga o'tsak, avvalgi tengsizlikning chap tomonidagi integralning hamma joyda nolga tengligi kelib chiqadi. Demak, bundan *H (x)* funksiya chekli, ya'ni $\varphi(x)$ funksiya (24) tenglamani deyarli hamma joyda qanoatlantiradi.

Bundan tashqari, agar *f (x)* funksiya L_2 sinfga tegishli bo'lsa, $\varphi_n(x)$ funksiya ham L_2 sinfga tegishli va (31) qator deyarli tekis yaqinlashuvchi bo'lgani uchun $\varphi(x)$ yechim ham shu sinfga tegishli bo'ladi.

Nihoyat, $\varphi(x)$ funksiya (24) tenglamaning L_2 sinfga tegishli bo'lgan yagona yechimi ekanligini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, (24) tenglamaning L_2 ga tegishli ikkinchi $\psi(x)$ yechimi ham mavjud bo'lsin, u holda $\varphi(x)-\psi(x)$ uchun

$$\varphi(x)-\psi(x)=\int_a^x\{F[x,y;\varphi(y)]-f[x,y;\psi(y)]\}dy$$

ifoda hosil bo'ladi. Bundan, yuqorida bayon qilingan usuldan foydalanib, quyidagi tengsizliklarni hosil qilamiz:

$$[\varphi(x)-\psi(x)]^2 \le \left\{\int_a^x\left|F[x,y;\varphi(y)]-F[x,y;\psi(y)]\right|dy\right\}^2 \le$$

$$\le\left\{\int_a^x h(x,y)\left|\varphi(y)-\psi(y)\right|dy\right\}^2 \le \int_a^x h^2(x,y)dy\int_a^x[\varphi(y)-\psi(y)]^2 dy$$

yoki

$$\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]^2 \le H^2(x)\int_a^x\left[\varphi(y)-\psi(y)\right]^2 dy. \tag{33}$$

Qisqalik uchun

$$\int_a^b\left[\varphi(y)-\psi(y)\right]^2 dy=P^2$$

deb belgilab, iteratsiya (ya'ni (33) tengsizlikda ketma-ket o'rniga qo'yish) usulidan foydalansak, xuddi yuqoridagi kabi ushbu

$$\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]^2\le P^2H^2(x),$$

$$\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]^2\le P^2 H^2(x)B_1(x),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]^2 \le P^2H^2(x)B_n(x)$$

tengsizliklarni olamiz. (30) formulaga asosan

$$\int_a^x\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]^2 dx\le P^2\frac{A^{2n}}{n!}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bunda $n\to\infty$ da limitga o'tib,

$$\int_a^x\left[\varphi(x)-\psi(x)\right]^2 dx\le 0$$

tengsizlikni olamiz. Oxirgi tengsizlikdan (24) tenglama yechimining yagonaligi haqidagi fikrning to'g'riligiga ishonch hosil qilamiz.

Shunday qilib, (24) tenglama (25), (26) va (27) shartlar bajarilganda L_2 sinfda, deyarli hamma joyda nolga teng bo'lgan funksiyalar aniqligida, yagona yechimga ega ekan.

(24) tenglamaga nisbatan olingan natija amaliyotda muhim ahamiyatga egadir.

Masalan, mexanikaning chiziqli bo'lmagan juda ko'p masalalari ushbu

$$y''(x)+\omega^2 y(x)=\mu f\left(x,y,y'\right) \tag{34}$$

ko'rinishdagi oddiy differensial tenglamaga keladi, bu yerda μ odatda (lekin hamma vaqt ham emas) kichik parametrni ifodalaydi.

Bu tenglamani o‘zgarmaslarni variasiyalash usuli bilan integral tenglamaga keltirish mumkin.

Haqiqatan ham, (34) tenglamaga mos bo‘lgan bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y(x)=C_1\cos\omega x+C_2\sin\omega x \tag{35}$$

ko‘rinishda bo‘ladi. C_1 va C_2 larni x ning funksiyasi deb faraz qilib, o‘zgarmaslarni variatsiyalash usuliga asosan $C_1(x)$ va $C_2(x)$ funksiyalarni shunday tanlash kerakki,

$$C_1'\cos\omega x+C_2'(x)\sin\omega x=0 \tag{36}$$

munosabat bajarilsin. (35) funksiyani va uning ikkinchi tartibli hosilasini (34) tenglamaga qo‘yib, (36) tenglikni e’tiborga olsak, ushbu

$$-C_1'(x)\sin\omega x+C_2'(x)\cos\omega x=\frac{\mu}{\omega}f(x,y,y') \tag{37}$$

tenglik hosil bo‘ladi. (36) va (37) tenglamalardan tashkil topgan sistemani $C_1'(x)$ va $C_2'(x)$ ga nisbatan yechib, $C_1(x)$ va $C_2(x)$ larni topamiz. Bularni (35) ga qo‘yib, (34) oddiy differensial tenglamani ushbu

$$\begin{aligned} y(x)-\frac{\mu}{\omega}\int_0^x f\left[t,y(t),y'(t)\right]\sin\omega(x-t)dt= \\ =\gamma_1\cos\omega x+\gamma_2\sin\omega x \end{aligned} \tag{38}$$

chiziqli bo‘lmagan integro-differensial tenglamaga keltiramiz, bu yerda γ_1, γ_2 — ixtiyoriy o‘zgarmaslar.

Bu tenglamani integro-differensial tenglama deb atashning sababi shundaki, tenglamada noma’lum $y(x)$ funksiyadan tashqari uning hosilasi ham qatnashyapti. (38) tenglamani (24) tenglamani tekshirgandagi usul bilan o‘rganish mumkin.

Agar f funksiya y' ga bog‘liq bo‘lmasa, (38) tenglamada quyidagi belgilashlarni kiritsak,

$$F\left[x,y,\varphi(y)\right]=\frac{H}{\lambda}f\left[y,\varphi(y)\right]\sin\omega(x-y),$$

$$f(x)=\gamma_1\cos\omega x+\gamma_2\sin\omega x,$$

u holda (24) ko‘rinishdagi tenglamani hosil qilamiz.

IV BOB. TO'LA UZLUKSIZ OPERATORLAR VA RISS—SHAUDER TENGLAMALARI

To'la uzluksiz operator tushunchasi integral operatorlarni o'rganish natijasida kelib chiqqan bo'lib, bunday operatorli tenglamalar Fredgolm tenglamalariga nisbatan kengroq sinfni tashkil qiladi. F. Riss va Yu.S. Shauder shu sinf tenglamalari uchun Fredgolm nazariyasini yaratgan.

Biz bu bobda, asosan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar sinfiga ta'sir qiluvchi to'la uzluksiz operatorlarni tekshiramiz.

1- §. Operatorlar to'g'risida asosiy tushunchalar

Chekli yoki cheksiz (a, b) oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar to'plamini, ya'ni $L_2\,(a, b)$ to'plamni tekshiramiz.

Agar har bir $\varphi(x)\in L_2(a,b)$ funksiyaga biror qonunga ko'ra bitta va faqat bitta $\psi\,(x)=A\varphi$ funksiya mos qo'yilgan bo'lib, $\psi(x)\in L_2(a,b)$ bo'lsa, $L_2\,(a, b)$ da A operator aniqlangan deyiladi.

A operator $\varphi(x)$ funksiyani $\psi(x)$ funksiyaga *o'tkazadi* yoki *almashtiradi* deb aytiladi.

Ikkita operatorning $A + B$ yig'indisi va AB ko'paytmasi

$$(A+B)\varphi = A\varphi+B\varphi, \quad AB\varphi=A(B\varphi)$$

munosabatlar bilan aniqlanadi.

A operatorning darajalari ushbu

$$A^1=A, \qquad A^n=A\,A^{n-1}$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Agar ixtiyoriy ikkita kvadrati bilan jamlanuvchi $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar va ixtiyoriy a va b o'zgarmas sonlar uchun

$$A(a\varphi+b\psi)=a\,A\varphi+b\,A\psi \tag{1}$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, A operator *chiziqli operator* deyiladi.

Induksiya usuli bilan osongina isbotlash mumkinki, chiziqli operator umumiyroq

$$A\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i A\varphi_i$$

ayniyatni qanoatlantiradi, bu yerda n — chekli natural son, a_i $(i=\overline{1,n})$ — o'zgarmas sonlar va $\varphi_i(x)$ $(i=\overline{1,n})$ kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar.

(1) ayniyatda $b=0$ desak, $A(a\varphi)=aA\varphi$ tenglik hosil bo'ladi; $a=0$ bo'lganda $A0=0$ ga ega bo'lamiz, ya'ni chiziqli operator aynan nolga teng bo'lgan funksiyani shu funksiyaning o'ziga almashtiradi.

Agar shunday o'zgarmas C mavjud bo'lsaki, har qanday kvadrati bilan jamlanuvchi $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$\|A\varphi\|\leq C\|\varphi\| \tag{2}$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda chiziqli operator *chegaralangan operator* deyiladi.

Ravshanki, C o'zgarmaslar manfiy emas va shuning uchun ham ularning to'plami chegaralangan va aniq quyi chegaraga ega. (2) tengsizlikdagi C o'zgarmaslarning aniq quyi chegarasi operatorning normasi deyiladi va $\|A\|$ orqali belgilanadi:

$$\|A\varphi\|\leq\|A\|\cdot\|\varphi\|. \tag{3}$$

Yadrosi

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,y)\,dx\,dy<B^2<\infty$$

shartni qanoatlantiruvchi Fredgolm operatori

$$K\varphi=\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy$$

chegaralangan operatorlar uchun muhim misol bo'ladi. Bu operatorning chiziqliligi ravshan, chegaralanganligi esa II bob 5- § dagi (67) tengsizlikdan kelib chiqadi, yana shu tengsizlikka asosan

$$\|K\|\leq B.$$

Birlik I operator ham chegaralangan bo'ladi. Haqiqatan, u chiziqli va $I\varphi=\varphi(x)$ bo'lgani uchun

$$\|I\varphi\|=\|\varphi\|$$

bo'ladi va bundan $\|I\|=1$.

Agar $\varphi_n(x)\to\varphi(x)$ da $A\varphi_n\to A\varphi$ bo'lsa, chegaralangan A operator *uzluksiz* deyiladi; bu yerda va keyinchalik ham yaqinlashish deganda biz o'rtacha yaqinlashishni tushunamiz.

Chegaralangan operatorning uzluksizligi juda oson isbotlanadi:

$$\left\| A\varphi_n - A\varphi \right\| = \left\| A(\varphi_n - \varphi) \right\| \le \left\| A \right\| \cdot \left\| \varphi_n - \varphi \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Chiziqli operatorlarning chegaralanganligi va uzluksizligi orasida uzviy bog'lanish bor, bu bog'lanish quyidagi teorema bilan ifodalanadi.

Teorema. *Chiziqli operatorning uzluksiz bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi zarur va yetarlidir.*

Agar A va B chegaralangan operatorlar bo'lsa, u holda $A + B$ va AB ham chegaralangan bo'ladi, shu bilan birga

$$\left\| A+B \right\| \le \left\| A \right\| + \left\| B \right\|, \qquad \left\| AB \right\| \le \left\| A \right\| \cdot \left\| B \right\|. \tag{4}$$

Haqiqatan ham, uchburchak tengsizligiga asosan

$$\left\| (A+B)\varphi \right\| = \left\| A\varphi + B\varphi \right\| \le \left\| A\varphi \right\| + \left\| B\varphi \right\| \le \left(\left\| A \right\| + \left\| B \right\| \right) \left\| \varphi \right\|,$$

xuddi shunga o'xshash

$$\left\| AB\varphi \right\| \le \left\| A \right\| \cdot \left\| B\varphi \right\| \le \left\| A \right\| \cdot \left\| B \right\| \cdot \left\| \varphi \right\|.$$

(4) tengsizlikdan $B = A$ bo'lganda, operator darajasining normasi uchun

$$\left\| A^2 \right\| \le \left\| A \right\|^2$$

tengsizlik kelib chiqadi. Induksiya usuli bilan ixtiyoriy natural n son uchun ushbu

$$\left\| A^n \right\| \le \left\| A \right\|^n$$

tengsizlikning to'g'ri ekanligi kelib chiqadi.

Biz asosan, chiziqli chegaralangan operatorlarni qaraymiz.

Agar kvadrati bilan jamlanuvchi ikkita ixtiyoriy $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalar uchun

$$(A\varphi, \psi) = (\varphi, A^* \psi) \tag{5}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, A^* operatorni A operatorga *qo'shma operator* deyiladi.

Masalan. $K\varphi = \int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$ Fredgolm operatori uchun

$$K^*\varphi = \int_a^b K(y,x)\varphi(y)dy$$

operator qo'shma bo'ladi.

Agar $K(x,y)$ yadro kompleks qiymatlarni qabul qilsa,

$$K^*\varphi=\int_a^b \overline{K(y,x)}\varphi(y)dy$$

operator $K\varphi$ ga qo'shma operator bo'ladi.

Operator bittadan ortiq qo'shma operatorga ega bo'lishi mumkin emas. Haqiqatan, agar A operator ikkita A_1^* va A_2^* qo'shma operatorga ega bo'lsa, u holda ikkita $\varphi(x)\in L_2(a,b)$ va $\psi(x)\in L_2(a,b)$ funksiyalar uchun

$$(A\varphi,\psi)=(\varphi, A_1^*\psi)=(\varphi, A_2^*\psi)$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan

$$(\varphi, A_1^*\psi-A_2^*\psi)=0.$$

Bu tenglik ixtiyoriy $\varphi(x)\in L_2(a,b)$ funksiya uchun to'g'ri bo'lgani uchun

$$\varphi=A_1^*\psi-A_2^*\psi$$

deb belgilab olamiz. Bunga asosan ushbu

$$(A_1^*\psi-A_2^*\psi,\ A_1^*\psi-A_2^*\psi)=\|A_1^*\psi-A_2^*\psi\|=0$$

tenglik kelib chiqadi, demak,

$$A_1^*\psi=A_2^*\psi.$$

Qo'shma operator chiziqli bo'ladi. Haqiqatan ham, agar a va b o'zgarmas sonlar bo'lsa,

$$(A\varphi,\ a\psi+b\omega)=(\varphi,\ A^*(a\psi+b\omega))$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Ikkinchi tomondan

$$(A\varphi,a\psi+b\omega)=a(A\varphi,\psi)+b(A\varphi,\omega)=$$

$$=a(\varphi,A^*\psi)+b(\varphi,A^*\omega)=(\varphi,aA^*\psi+bA^*\omega).$$

Hozirgina isbotlangan qo'shma operatorning yagonaligiga asosan

$$A^*(a\psi+b\omega)=aA^*\psi+bA^*\omega.$$

Bu tenglik esa, A^* qo'shma operatorning chiziqli operator ekanligini bildiradi.

Qo'shma operatorning ta'rifiga asosan quyidagi

$$\left(A_1+A_2\right)^* = A_1^* + A_2^*, \quad \left(A_1 A_2\right)^* = A_2^* A_1^*, \quad \left(\lambda A\right)^* = \lambda A^*$$

tengliklarning (λ – o'zgarmas), xususan $\left(A^n\right)^* = \left(A^*\right)^n$ ning to'g'riligini ko'rsatish qiyin emas. Ravshanki, $A^{**} = A$.

Qo'shma operatorning normasi berilgan operatorning normasiga teng bo'ladi, ya'ni $\|A^*\| = \|A\|$.

Haqiqatan ham, (5) tenglikda $\varphi = A^*\psi$ deb olamiz:

$$\left(AA^*\psi,\ \psi\right) = \left(A^*\psi,\ A^*\psi\right) = \left\|A^*\psi\right\|^2.$$

Bu tenglikning chap tomonini Bunyakovskiy—Shvars tengsizligiga asosan baholaymiz:

$$\left\|A^*\psi\right\|^2 \le \left\|AA^*\psi\right\| \cdot \|\psi\| \le \|A\| \cdot \left\|A^*\psi\right\| \cdot \|\psi\|.$$

Bundan

$$\left\|A^*\psi\right\| \le \|A\| \cdot \|\psi\|$$

tengsizlik kelib chiqadi, shuning uchun ham $\|A^*\| \le \|A\|$. Endi (5) tenglikda $\psi = A\varphi$ deb olsak, $\|A\| \le \|A^*\|$ tengsizlik hosil bo'ladi. Bu ikki tengsizlikdan $\|A^*\| = \|A\|$ tenglikka ega bo'lamiz.

Bu paragrafda bayon qilingan fikrlar tekshirilayotgan funksiyalar bir o'zgaruvchiga bog'liq bo'lmay, balki bir nechta erkli o'zgaruvchilarning funksiyasi bo'lib, biror sohada kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lganda ham o'zgarishsiz o'rinli bo'ladi.

2- §. Chegaralangan operatorli tenglamalarni ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechish

A chiziqli va chegaralangan operator bo'lsin. Ushbu

$$\varphi(x) - \lambda A\varphi = f(x), \qquad f(x) \in L_2(a, b) \tag{6}$$

tenglamani tekshiramiz. Avvalo teskari operator tushunchasini eslatib o'taylik.

Agar $BA = I$ bo'lsa, B operator A operatorga *chapdan teskari operator* deyiladi. Xuddi shunga o'xshash, $AC = I$ bo'lsa, C operator A operatorga *o'ngdan teskari operator* deb ataladi.

Agar A operator chapdan teskari B operatorga va o'ngdan teskari C operatorga ega bo'lsa, u holda $B = C$ bo'ladi.

Haqiqatan ham,

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

$B = C$ operator A^{-1} bilan belgilanadi va A operatorga *teskari operator* deyiladi.

Shunday qilib, agar A^{-1} mavjud bo'lsa, u holda

$$A A^{-1} = A^{-1} A = I$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Teskari operator tushunchasi bilan ushbu

$$A x = f \qquad (7)$$

ko'rinishdagi operator tenglamalar yechimining mavjudlik va yagonalik masalalari bog'liqdir. (7) ko'rinishdagi tenglamalarga chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi, chiziqli differensial va integral tenglamalar hamda boshqa chiziqli tenglamalar kiradi.

Agar A operator A^{-1} teskari operatorga ega bo'lsa, u holda (7) tenglamaning yechimi

$$x = A^{-1} f$$

ko'rinishda topiladi. Bu yechimning yagona bo'lishini ham ko'rsatish qiyin emas.

Endi (6) tenglamaga qaytamiz.

Agar $|\lambda| < \|A\|^{-1}$ bo'lsa, u holda (6) tenglama yagona $\varphi(x) \in L_2(a,b)$ yechimga ega bo'ladi. Bu yechimni $\varphi(x)$ ga o'rtacha yaqinlashuvchi ketma-ketlikning limiti sifatida hosil qilish mumkin.

Boshlang'ich yaqinlashish uchun ozod had $f(x)$ ni qabul qilamiz, ya'ni $\varphi_0(x) = f(x)$. Agar $\varphi_{n-1}(x)$ yaqinlashish tuzilgan bo'lsa, $\varphi_n(x)$ yaqinlashishni

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda A \varphi_{n-1} \qquad (8)$$

formula bilan aniqlaymiz, yoki

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f + \cdots + \lambda^n A^n f = \sum_{k=0}^{n} \lambda^k A^k f. \qquad (9)$$

$\{\varphi_n(x)\}$ ketma-ketlikning biror limitga o'rtacha yaqinlashishini ko'rsatamiz. Buning uchun $\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)$ ayirmani baholaymiz:

$$\|\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)\| = |\lambda| \|A \varphi_{n-1} - A \varphi_{n-2}\| = |\lambda| \|A(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})\|.$$

(3) formulaga asosan

$$\|A(\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2})\| \le \|A\| \cdot \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\|.$$

Demak,

$$\|\varphi_n - \varphi_{n-1}\| \le |\lambda| \cdot \|A\| \, \|\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}\|.$$

Bu bahoni $\varphi_{n-1}-\varphi_{n-2}$ ayirmaga qo'llaymiz:

$$\left\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\right\|\le|\lambda|^2\|A\|^2\left\|\varphi_{n-2}-\varphi_{n-3}\right\|.$$

Bu jarayonni davom ettirib, natijada ushbu

$$\left\|\varphi_n-\varphi_{n-1}\right\|\le\left(|\lambda|\|A\|\right)^{n-1}\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\| \tag{10}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Endi $\varphi_n-\varphi_m$ ayirmani baholaymiz. Aniqlik uchun n>m deb hisoblaymiz. U holda

$$\left\|\varphi_n-\varphi_m\right\|=\left\|\sum_{k=m+1}^{n}\left(\varphi_k-\varphi_{k-1}\right)\right\|\le\sum_{k=m+1}^{n}\left\|\varphi_k-\varphi_{k-1}\right\|\le$$

$$\le\sum_{k=m+1}^{\infty}\left\|\varphi_k-\varphi_{k-1}\right\|.$$

(10) tengsizlikka asosan

$$\left\|\varphi_n-\varphi_m\right\|\le\frac{\left(|\lambda|\cdot\|A\|\right)^m}{1-|\lambda|\cdot\|A\|}\left\|\varphi_1-\varphi_0\right\|.$$

$|\lambda|\cdot\|A\|<1$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n,m\to\infty}\left\|\varphi_n-\varphi_m\right\|=0,$$

bu esa

$$\varphi(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) \tag{11}$$

limitning mavjudligini bildiradi.

(9) formuladan

$$\varphi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^m A^m f \tag{12}$$

qator o'zining $\varphi(x)$ yig'indisiga o'rtacha yaqinlashishi kelib chiqadi.

(11) formula bilan aniqlangan $\varphi(x)$ funksiyaning (6) tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan ham (8) munosabatda $n\to\infty$ da limitga o'tamiz. Uning chap qismi $\varphi(x)$ ga yaqinlashadi, o'ng qismi esa, A operator chegaralangan, demak uzluksiz bo'lgani uchun $f(x)+\lambda A\varphi$ ga yaqinlashadi.

Endi (12) formula bilan aniqlangan $\varphi(x)$ funksiyaning (6) tenglamaning yagona yechimi ekanligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, (6) tenglama yana bitta $\psi(x)$ yechimga ega bo'lsin. U holda

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda A\varphi, \qquad \psi(x)=f(x)+\lambda A\psi.$$

Bu tengliklarning biridan ikkinchisini ayirib,

$$\omega(x)=\lambda A\omega, \qquad \omega(x)=\varphi(x)-\psi(x)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$\|\omega\|=|\lambda|\cdot\|A\omega\|\le|\lambda|\cdot\|A\|\cdot\|\omega\|$$

yoki

$$\|\omega\|(1-|\lambda|\|A\|)\le 0.$$

$|\lambda|\|A\|<1$ bo'lgani uchun $\|\omega\|=0$ bo'lishi zarur, demak, $\psi(x)=\varphi(x)$.

(12) formula $f(x)$ ga ta'sir qilayotgan qandaydir operatorning $\varphi(x)$ qiymatini beradi, demak, u berilgan $(I-\lambda A)$ operatorga teskari operatordir. Biz bu operatorni ushbu

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda R_\lambda f, \qquad R_\lambda f=\sum_{m=1}^{\infty}\lambda^{m-1}A^m f$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Agar $|\lambda|<\|A\|^{-1}$ shart bajarilsa, R_λ operator chegaralangan bo'ladi. Haqiqatan ham, uchburchak tengsizligiga asosan

$$\|R_\lambda f\|\le\sum_{m=1}^{\infty}|\lambda|^{m-1}\|A^m f\|.$$

Yig'indi ostidagi ifodaga (3) tengsizlikni qo'llab,

$$\|A^m f\|\le\|A\|^m\|f\|$$

tengsizikka ega bo'lamiz. Bunga asosan

$$\|R_\lambda f\|\le\frac{\|A\|}{1-|\lambda|\|A\|}\|f\|.$$

Bu tengsizlik R_λ operatorning chegaralanganligini ko'rsatadi, shu bilan birga

$$\|R_\lambda\|\le\frac{\|A\|}{1-|\lambda|\|A\|}.$$

Ushbu

$$\psi(x)-\bar{\lambda}A^*\psi=g(x) \tag{13}$$

tenglama (6) tenglamaga *qo'shma tenglama* deyiladi.

$\|A^*\|=\|A\|$ bo'lgani uchun (13) tenglama ham $|\lambda|<\|A\|^{-1}$ shart bajarilganda ketma-ket yaqinlashish usuli bilan yechiladi va bu yechim

$$\psi(x)=\sum_{m=0}^{\infty}\overline{\lambda}^{m} A^{*m} g$$

ko'rinishga ega bo'ladi va uni quyidagicha ifodalash mumkin

$$\psi(x)=g(x)+\overline{\lambda}\left(R_{\lambda}\right)^{*} g .$$

3- §. Kompakt to'plamlar

X metrik fazodagi *M* to'plam elementlaridan tuzilgan ixtiyoriy ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qism ketma-ketlik ajratib olish mumkin bo'lsa, *M* to'plam *X* fazoda *kompakt* deyiladi. Agar, bundan tashqari *M* yopiq to'plam bo'lsa, ya'ni aytib o'tilgan ketma-ketliklarning limiti *M* ga tegishli bo'lsa, *M* to'plam *o'zi-o'zida kompakt* deyiladi.

Agar *X* metrik fazoning har bir cheksiz qismi *X* ning biror elementiga yaqinlashuvchi ketma-ketlikka ega bo'lsa, u holda *X* fazo *kompakt* deyiladi.

Misol uchun $M=[0,1]\in R^{1}$ bo'lsin. Bolsano—Veyershtrass teoremasiga asosan o'zi-o'zida kompakt bo'ladi. (0, 1) interval esa R^1 da kompakt bo'lib, o'zi-o'zida kompakt emas.

Umuman *n* o'lchovli Yevklid fazosidagi har qanday chegaralangan to'plam kompakt bo'ladi.

***C* [*a*, *b*] fazodagi kompaktlik belgisi.** Bu belgi quyidagi ikki tushunchaga asoslangan. fazoga tegishli bo'lgan *C* [*a*, *b*] funksiyalarning to'plami *D* bo'lsin.

Agar ixtiyoriy $x\in[a,b]$ va barcha $x\in[a,b]$ uchun $|\varphi(x)|\leq M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi o'zgarmas $M>0$ son mavjud bo'lsa, *D* to'plam *tekis chegaralangan* deyiladi.

Agar ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lsaki,

$$|x_1-x_2|<\delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy ikkita x_1, $x_2\in[a,b]$ va *D* ga tegishli ixtiyoriy *f (x)* funksiya uchun

$$|\varphi(x_1)-\varphi(x_2)|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, *D* to'plam *tekis darajada uzluksiz* deyiladi.

Arsela teoremasi. *C [a, b] fazoga tegishli bo'lgan $\varphi(x)$ funksiyalarning D to'plami kompakt bo'lishi uchun bu to'plamning tekis chegaralangan va tekis darajada uzluksiz bo'lishi zarur va yetarlidir.*

$L_p[a,b]$ **fazodagi kompaktlik belgisi.** $\varphi(x)\in L_p[a,b]$ bo'lsin. $\varphi(x)$ funksiyani $[a, b]$ segmentdan tashqariga nolga teng qilib davom ettiramiz. U holda sonlar o'qining ixtiyoriy $[A, B]$ kesmasida quyidagi

$$\int_A^B |\varphi(x)|dx, \quad \int_A^B |\varphi(x)|^p dx$$

integrallar ma'noga ega bo'ladi.

M. Riss teoremasi. *$L_P[a, b]$ fazoga tegishli bo'lgan funksiyalarning D oilasi kompakt bo'lishi uchun u oilaning norma bo'yicha chegaralangan va o'rtacha tekis darajada uzluksiz bo'lishi, ya'ni*

1) $\int_a^b |\varphi(x)|^p \, dx \leq M^p$;

2) $0<h<\delta(\varepsilon)$ *bo'lganda oilaning barcha funksiyalari birdaniga*

$$\int_a^b |\varphi(x+h)-\varphi(x)|^p \, dx<\varepsilon^p$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Arsela va M. Riss teoremalarining isboti funksional analiz kursida bayon qilingan.

4- §. To'la uzluksiz operatorlar

Chiziqli normalangan X fazoda aniqlangan, qiymatlari chiziqli normalangan Y fazoda bo'lgan chiziqli A operator X fazodagi har qanday chegaralangan to'plamni Y fazodagi kompakt to'plamga akslantirsa, A operator *to'la uzluksiz operator* deyiladi.

Funksional analiz kursida to'la uzluksiz operatorni ikkita operatorning yig'indisi sifatida ifodalanishi, ulardan bittasi chekli o'lchovli operator, ikkinchisining normasi avvaldan berilgan har qanday kichik sondan katta bo'lmasligi isbotlangan.

Bu fikrlarni kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar sinfida qisqacha bayon qilamiz.

Agar A operatorni ushbu

$$A\varphi=\sum_{k=1}^{n}(\varphi, b_k)a_k(x)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa, A operator *aynigan* yoki *chekli o'lchovli operator* deyiladi, bu yerda n—chekli natural son, $a_k(x)$, $b_k(x)$ funksiyalar (a, b) da berilgan kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar.

Shuni aytish kerakki, aynigan operator

$$A\varphi=\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

aynigan yadroli integral operatordan iboratdir, bunda

$$K(x, y)=\sum_{k=1}^{n} a_k(x)b_k(y).$$

Agar operatorni ixtiyoriy oldindan berilgan $\varepsilon>0$ uchun

$$A\varphi=A_1\varphi+A_2\varphi \tag{14}$$

ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lsa, A operator *to'la* uzluksiz *operator* deyiladi, bu yerda $A_1\varphi$ aynigan operator va $\|A_2\|<\varepsilon$.

To'la uzluksiz operatorning bu ta'rifi oldingi ta'rifga teng kuchlidir, buning isbotiga biz to'xtalmaymiz.

To'la uzluksiz operator uchun ikkita muhim misolni keltiramiz.

1. Fredgolm operatori to'la uzluksiz operatordir. Bu fikrning to'g'riligi II bob 5- § da ko'rsatilgan.

Fredgolm operatori yadrosini aynigan yadro va kichik yadroning yig'indisi sifatida ifodalash mumkinligidan va shu bobning 1-§ da isbotlangan Fredgolm operatorining chegaralanganligidan kelib chiqadi.

2. Agar D chekli soha bo'lsa, kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan yadroli Fredgolm operatori

$$K\varphi=\int_D K(x, y)\varphi(y)dy$$

to'la uzluksiz operator bo'ladi, bu yerda

$$K(x, y)=\frac{H(x, y)}{r^{\alpha}}, \quad 0<\alpha<n,$$

n- o'zgarmas D sohaning o'lchovi,

$$|H(x, y)|\le C=\text{const}.$$

Shunday $\eta>0$ sonni olib,

$$K(x, y)=L(x, y)+M(x, y)$$

deb belgilab olamiz, bu yerda

$$L(x,y)=\begin{cases} K(x,y), & r\ge\eta, \\ 0, & r<\eta, \end{cases}$$

$$M(x,y)=\begin{cases} 0, & r\geq\eta, \\ K(x,y), & r<\eta. \end{cases}$$

L va M orqali yadrolari $L(x,y)$ va $M(x,y)$ bo'lgan operatorlarni belgilab olamiz. U holda $K = L+M$ bo'ladi.

η yetarli kichik bo'lganda $\|M\|<\frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi, bunda ε — ixtiyoriy oldindan berilgan musbat son. Haqiqatan ham

$$|M\varphi|^2=\left|\int\limits_{r<\eta}\frac{H(x,y)}{r^\alpha}\varphi(y)dy\right|^2\leq C^2\left\{\int\limits_{r<\eta}\frac{|\varphi(y)|}{r^\alpha}dy\right\}^2.$$

So'nggi integralni baholaymiz:

$$\left\{\int\limits_{r<\eta}\frac{|\varphi(y)|}{r^\alpha}dy\right\}^2=\left\{\int\limits_{r<\eta}\frac{|\varphi(y)|}{r^{\alpha/2}}\cdot\frac{dy}{r^{\alpha/2}}\right\}^2\leq$$

$$\leq\int\limits_{r<\eta}\frac{\varphi^2(y)dy}{r^\alpha}\cdot\int\limits_{r<\eta}\frac{dy}{r^\alpha}.$$

Oxirgi integral soddagina hisoblanadi. Markazi x nuqtada bo'lgan sferik koordinatalarni kiritib, S_1 orqali n o'lchovli fazodagi birlik sferani va $|S_1|$ orqali uning sirt yuzasini belgilab olamiz. U holda

$$\int\limits_{r<\eta}\frac{dy}{r^\alpha}=\int\limits_{S_1}dS_1\int\limits_0^\eta r^{n-1-\alpha}dr=\frac{|S_1|\eta^{n-\alpha}}{n-\alpha}.$$

Endi

$$|M\varphi|^2\leq\frac{C^2|S_1|\eta^{n-\alpha}}{n-\alpha}\int\limits_{r<\eta}\frac{\varphi^2(y)dy}{r^\alpha}\leq\frac{C^2|S_1|\eta^{n-\alpha}}{n-\alpha}\int\limits_D\frac{\varphi^2(y)}{r^\alpha}dy.$$

Bu tengsizlikni D soha bo'yicha integrallaymiz va natijada quyidagi

$$\int\limits_D|M\varphi|^2dy\leq\frac{C^2|S_1|\eta^{n-\alpha}}{n-\alpha}\int\limits_d\varphi^2(y)dy\int\limits_d\frac{dx}{r^\alpha}$$

tengsizlikni olamiz yoki II bobning 6- § dagi ushbu

$$\int\limits_D\frac{dy}{r^\alpha}\leq\frac{|S_1|h^{n-\alpha}}{n-\alpha}$$

tengsizlikka asosan

$$\|M\varphi\| \le \frac{C|S_1|(\eta h)^{\frac{n-\alpha}{2}}}{n-\alpha}\|\varphi\|.$$

Bundan

$$\|M\| \le \frac{C|S_1|(\eta h)^{\frac{n-\alpha}{2}}}{n-\alpha}$$

Agar η yetarli kichik bo'lsa, $\|M\|<\frac{\varepsilon}{2}$ bo'ladi. $L(x,y)$ yadro chegaralangan, buning ustiga kvadrati bilan jamlanuvchi, L operator Fredgolm operatoridan iborat va isbotlanganiga asosan to'la uzluksiz operator bo'ladi. Uni aynigan K_1 va L_1, $\|L_1\|<\frac{\varepsilon}{2}$ operatorlarning yig'indisi ko'rinishida ifodalash mumkin. $L_1+M=K_2$ deb belgilab olamiz. U holda $K=K_1+K_2$, shu bilan birga K_1 - aynigan operator va

$$\|K_2\|=\|L_1+M\|\le\|L_1\|+\|M\|<\varepsilon.$$

Shunday qilib, K operator to'la uzluksiz operator ekan.

To'la uzluksiz operatorlarning ayrim xossalarini eslatib o'tamiz:

1. *To'la uzluksiz operator chegaralangandir.*

Faraz qilaylik, $A_1\varphi=\sum_{k=1}^{n}(\varphi,\, b_k)a_k(x)$ va $\|A_2\|<\varepsilon$ bo'lsin.

U holda

$$\|A\varphi\|\le\sum_{k=1}^{n}|(\varphi,\, b_k)|\cdot\|a_k\|+\varepsilon\|\varphi\|$$

bo'ladi.

Bu tengsizlikdan, Bunyakovskiy—Shvars tengsizligiga asosan ushbu

$$\|A\varphi\|\le\|\varphi\|\left[\sum_{k=1}^{n}\|a_k\|\cdot\|b_k\|+\varepsilon\right]$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlik esa, A operatorning chegaralanganligini bildiradi va

$$\|A\|\le\sum_{k=1}^{n}\|a_k\|\cdot\|b_k\|+\varepsilon.$$

Ammo har qanday chegaralangan operator to'la uzluksiz operator bo'lavermaydi. Masalan, cheksiz o'lchovli l_2 Gilbert fazosida $I\varphi=\varphi$ birlik operator to'la uzluksiz operator bo'lmaydi. Haqiqatan ham, I operator yopiq birlik $S=S(0,1)$ sharni o'zini-o'ziga aks ettiradi, S to'plam esa kompakt emas. Buni isbotlash uchun S to'plamdan

$$l_1=\{1, 0, 0, ...\}, \quad l_2\{0, 1, 0, ...\}, \quad ...$$

nuqtalar ketma-ketligini olamiz. Ravshanki, $i \neq j$ bo'lganda $\|l_i - l_j\| = \sqrt{2}$, demak $\{l_i\}$ ketma-ketlik va uning ixtiyoriy qismiy ketma-ketligi yaqinlashuvchi bo'lmaydi, ya'ni S—kompakt to'plam emas. Shunday qilib, cheksiz o'lchamli fazoda I to'la uzluksiz operator emas.

2. Aynigan operator to'la uzluksiz bo'ladi.

Haqiqatan, aynigan operatorni (14) ko'rinishda ifodalash mumkin, buning uchun $A_2=0$ deb hisoblash kifoyadir.

3. To'la uzluksiz operatorga qo'shma operator ham to'la uzluksiz bo'ladi. Haqiqatan, agar

$$A\varphi = \sum_{k=1}^{n} (\varphi, b_k) a_k(x) + A_2\varphi = \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy + A_2\varphi$$

bo'lsa, bu yerda $\|A_2\| < \varepsilon$ va

$$K(x, y) = \sum_{k=1}^{n} a_k(x) b_k(y),$$

u holda

$$A^*\varphi = \int_a^b K(y, x)\varphi(y)\,dy + A_2^*\varphi.$$

Bu tenglikda

$$\int_a^b K(y, x)\varphi(y)dy = \sum_{i=1}^{n} (\varphi, a_k) b_k(x)$$

bo'lgani uchun birinchi qo'shiluvchi aynigan operator bo'ladi va 1-§ da isbotlanganiga asosan $\|A_2^*\| = \|A_2\| < \varepsilon$.

4. Chekli sondagi to'la uzluksiz operatorlarning yig'indisi ham to'la uzluksiz operator bo'ladi.

5. To'la uzluksiz va chegaralangan operatorlarning ko'paytmasi to'la uzluksiz operator bo'ladi.

A to'la uzluksiz operator, B esa chegaralangan operator bo'lsin. AB va BA operatorlarning to'la uzluksizligini ko'rsatamiz. Ixtiyoriy musbat ε sonni belgilab olib, $A\varphi$ ni ushbu

$$A\varphi=\sum_{k=1}^{n}(\varphi, b_k)a_k(x)+A_2\varphi, \quad \|A_2\|<\frac{\varepsilon}{B}$$

ko'rinishda ifodalab olamiz. U holda

$$AB\varphi=\sum_{k=1}^{n}(B\varphi, b_k)a_k(x)+A_2B\varphi=\sum_{k=1}^{n}(\varphi, B^*b_k)a_k(x)+A_2B\varphi.$$

Bu yerda B^*b_k kvadrati bilan jamlanuvchi to'la aniqlangan funksiyalardir, yig'indi esa aynigan operatordir:

$$\|A_2B\|\le\|A_2\|\cdot\|B\|<\varepsilon.$$

Bulardan AB operatorning to'la uzluksizligi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o'xshash

$$BA\varphi=\sum_{k=1}^{n}(\varphi, b_k)Ba_k+BA_2\varphi$$

ifodadan BA operatorning to'la uzluksizligini ko'rsatish mumkin.

5- §. Riss—Shauder tenglamalari

Ushbu

$$\varphi(x)-\lambda A\varphi=f(x) \tag{15}$$

ko'rinishdagi tenglamalarga *Riss—Shauder tenglamalari* deb aytiladi, bu yerda A — to'la uzluksiz operator.

Shu bobning avvalgi paragraflaridagidek $f(x)\in L_2[a, b]$ va $\varphi(x)\in L_2[a,b]$, $-\infty<a<b<+\infty$ deb hisoblaymiz.

Riss—Shauder tenglamalarini II bob 5-§ ning 1- banddida aynimagan yadroli Fredgolm tenglamasiga qo'llanilgan usul bilan yechish mumkin.

Ixtiyoriy $R>0$ sonni olib, (15) tenglamani λ ning faqat $|\lambda|\le R$ doirada yotadigan qiymatlari uchun tekshiramiz.

A operatorni $A=A_1+A_2$ ko'rinishda yozib olamiz, bunda $\|A_2\|<\frac{1}{2R}$ va A_1 aynigan operator

$$A_1\varphi=\sum_{k=1}^{n}(\varphi, b_k)a_k(x)$$

bo'lsin. U holda (15) tenglama

$$\varphi(x)-\lambda A_1\varphi-\lambda A_2\varphi=f(x) \tag{16}$$

ko'rinishga keladi.

Agar

$$\psi(x)=f(x)+\lambda A_1\varphi$$

deb belgilasak, (16) tenglama

$$\varphi(x)-\lambda A_2\varphi=\psi(x) \tag{17}$$

ko'rinishda yoziladi. Bu tenglamaning o'ng tomonini vaqtincha ma'lum deb, $|\lambda|\cdot\|A_2\|\le R\cdot\frac{1}{2R}=\frac{1}{2}$ bo'lgani uchun 2- § dagi usul bilan (17) tenglamani yechishimiz mumkin va uning yechimi

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda A_1\varphi+\lambda R_{2\lambda}(f+A_1\varphi)$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda

$$R_{2\lambda}\psi=\sum_{k=1}^{n}\lambda^{k-1}A_2^k\psi.$$

Oxirgi tenglamadan $\varphi(x)$ ni aniqlash uchun

$$\varphi(x)-\lambda\left(A_1+\lambda R_{2\lambda}A_1\right)\varphi=f(x)+\lambda R_{2\lambda}f \tag{18}$$

tenglama hosil bo'ladi. Bu tenglamada $A_1+\lambda R_{2\lambda}A_1$ operator aynigan operatordir. Haqiqatan ham

$$R_{2\lambda}A_1\varphi=R_{2\lambda}\sum_{k=1}^{n}(\varphi,\ b_k)a_k=\sum_{k1}^{n}(\varphi,\ b_k)R_{2\lambda}a_k,$$

$$A_1\varphi+\lambda R_{2\lambda}A_1\varphi=\sum_{k=1}^{n}(\varphi,\ b_k)a_k+\lambda\sum_{k=1}^{n}(\varphi,\ b_k)R_{2\lambda}a_k=$$

$$=\sum_{k+1}^{n}(\varphi,\ b_k)\left[a_k+\lambda R_{2\lambda}a_k\right].$$

Ushbu

$$g_k(x)=a_k(x)+\lambda R_{2\lambda}a_k$$

belgini kiritsak,

$$\left(A_1\varphi+R_{2\lambda}A_1\varphi\right)=\sum_{k=1}^{n}(\varphi,\ b_k)g_k(x)$$

tenglik hosil bo'ladi.

Shunday qilib, (18) tenglama quyidagi

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\varphi(y)\sum_{k=1}^{n}g_k(x)b_k(y)dy=f(x)+\lambda R_{2\lambda}f$$

aynigan yadroli integral tenglamadir. Bunday tenglamani yechishni bilamiz. Bizga A operator to'la uzluksiz bo'lsa, unga qo'shma A^*

operator ham to'la uzluksiz bo'lishi ma'lum. Bunga asosan (15) tenglamaga qo'shma bo'lgan

$$\psi(x)-\bar{\lambda}A^{*}\psi=g(x) \tag{19}$$

tenglama ham aynigan yadroli integral tenglama bo'ladi.

Riss—Shauder tenglamalari uchun Fredgolmning barcha teoremalari o'rinlidir. Biz bu teoremalarning isbotiga to'xtalmaymiz, chunki bularning isboti II bobdagi mulohazalarni so'zma-so'z takrorlashdan iborat bo'lib qoladi.

Faqat biz quyida eslatib o'tilgan mulohazalarga asoslangan faktlarni keltiramiz:

1. $|\lambda|\leq\|A\|^{-1}$ doirada (15) tenglamaning yechimi ning analitik funksiyasidan iborat bo'ladi.

2. Ixtiyoriy λ uchun (15) tenglamani ekvivalent algebraik sistemaga keltirish mumkin.

3. Qo'shma (15) va (19) tenglamalarni qo'shma algebraik sistemalarga keltirish mumkin.

V BOB. SIMMETRIK YADROLI INTEGRAL TENGLAMALAR

1- §. Simmetrik yadrolar

Agar haqiqiy $K(x,y)$ yadro berilgan sohada x va y ning barcha qiymatlari uchun

$$K(x,y)=K(y,x)$$

tenglikni qanoatlantirsa, bu yadro *simmetrik yadro* deyiladi.

Agar $K(x,y)$ yadro kompleks funksiya bo'lsa,

$$K(x,y)=K^*(x,y)=\overline{K(x,y)}$$

tenglik bajarilganda *simmetrik yadro* deb ataladi.

Demak, har ikki holda ham yadro o'zining qo'shmasiga teng bo'lsa, simmetrik yadro deb aytilar ekan.

Simmetrik yadroli

$$K\varphi=\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$$

Fredgolm operatori *simmetrik operator* deyiladi.

Agar K operator simmetrik bo'lsa, ravshanki, $K=K^*$ bo'ladi.

Qo'shma operatorning ta'rifiga asosan, simmetrik operator uchun

$$(K\varphi,\psi)=(\varphi,K\psi) \tag{1}$$

tenglik o'rinli bo'lishi ravshan.

Agar integral tenglamaning yadrosi *simmetrik bo'lsa, simmetrik yadroli integral tenglama*, yoki qisqacha *simmetrik integral tenglama* deb ataladi.

Biz bu bobda asosan, kvadrati bilan jamlanuvchi haqiqiy yadrolarni tekshiramiz. Haqiqiy qiymatlar qabul qiladigan yadrolarni tekshirsak ham keyingi mulohazalarmizning ko'p qismi kompleks qiymatlar qabul qiluvchi yadrolar uchun ham o'rinli bo'ladi.

Agar $K(x,y)$ simmetrik yadro bo'lsa, iteratsiyalangan $K_n(x,y)$ yadrolar ham simmetrik bo'ladi. Haqiqatan ham II bob 2- § dan bizga ma'lumki,

$$K_n(x,y)=\int_a^b\ldots\int_a^b K(x,t_1)K(t_1,t_2)\ldots K(t_{n-1},y)dt_1\ldots dt_{n-1}.$$

Bundan

$$K_n(y,x)=\int_a^b\ldots\int_a^b K(y,t_1)K(t_1,t_2)\ldots K(t_{n-1},x)dt_1\ldots dt_{n-1}.$$

$K(x,y)$ yadro simmetrik bo'lgani uchun oldingi tenglikni ushbu

$$K_n(y,x) = \int_a^b \ldots \int_a^b K(x,t_{n-1}) \ldots K(t_2,t_1) K(t_1,y) dt_1 \ldots dt_{n-1}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Endi $t_1,\ldots,t_{n-1}$ larni $t_{n-1},\ldots,t_1$ orqali belgilab olsak, $K_n(y,x) = K_n(x,y)$ tenglik kelib chiqadi.

Ushbu

$$K^n\varphi = \int_a^b K_n(x,y)\varphi(y)dy$$

simmetrik operator uchun (1) ayniyat o'rinli bo'ladi, bu holda ayniyat quyidagi ko'rinishda yoziladi

$$(K^n\varphi, \psi) = (\varphi, K^n\psi); \quad n = 1,2,\ldots. \tag{2}$$

Teorema. *Agar $\varphi_1(x)$ va $\varphi_2(x)$ funksiyalar $K(x,y)$ simmetrik yadroning bir-biridan farqli bo'lgan λ_1 va λ_2 xos sonlarga mos xos funksiyalari bo'lsa, u holda bu funksiyalar o'zaro ortogonal bo'ladi, ya'ni*

$$\int_a^b \varphi_1(x)\, \varphi_2(x)dx = 0.$$

Xos funksiyalarning ta'rifiga asosan

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x,y)\varphi_1(y)dy,$$

$$\varphi_2(x) = \lambda_2 \int_a^b K(x,y)\varphi_2(y)dy.$$

Bularni e'tiborga olib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$(\varphi_1,\varphi_2) = \int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)dx = \lambda_1 \int_a^b \varphi_2(x)dx \int_a^b K(x,y)\varphi_1(y)dy =$$

$$= \lambda_1 \int_a^b \varphi_1(y)dy \int_a^b K(x,y)\varphi_2(x)dx,$$

$K(x,y) = K(y,x)$ bo'lgani uchun

$$\int_a^b K(x,y)\varphi_2(x)dx = \int_a^b K(y,x)\varphi_2(x)dx = \frac{1}{\lambda_2}\varphi_2(y).$$

Demak,

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\varphi_1, \varphi_2) \text{ yoki } \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Bundan $\lambda_1 \neq \lambda_2$ bo'lgani sababli

$$(\varphi_1, \varphi_2) = 0.$$

Bu teoremadan o'z navbatida *simmetrik yadroning xos sonlari haqiqiy sonlardan iborat* bo'lishi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, λ xos son va unga mos bo'lgan $\varphi(x)$ xos funksiya kompleks bo'lsin:

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2, \qquad \varphi(x) = \varphi_1(x) + i\varphi_2(x),$$

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy.$$

Bu tenglikda qo'shma miqdorlarga o'tib,

$$\overline{\varphi}(x) = \overline{\lambda} \int_a^b K(x, y)\overline{\varphi}(y)dy$$

tenglikni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan darhol $\overline{\lambda}$ xos son, unga mos $\overline{\varphi}(x)$ xos funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Agar $\lambda_2 \neq 0$ bo'lsa, isbotlanganga asosan

$$\int_a^b \varphi(x)\overline{\varphi}(x)dx = \int_a^b \left[\varphi_1^2(x) + \varphi_2^2(x)\right]dx = 0.$$

Bundan $\varphi(x)$ funksiyaning aynan nolga teng ekanligi kelib chiqadi, xos funksiyaning ta'rifiga asosan bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, $\lambda_2 = 0$, ya'ni λ — haqiqiy son.

Xos funksiyalarni normalangan qilib olish mumkin, buning uchun ularning har birini o'zining normasiga bo'lish kifoyadir. Agar bitta xos songa bir nechta xos funksiyalar mos kelsa, ularni ortogonallashtirish jarayonini qo'llab, o'zaro ortogonal va normalangan qilib olish mumkin.

Turli xos sonlarga mos keluvchi xos funksiyalar isbotlanganiga asosan ortogonal bo'ladi. Bundan muhim xulosa kelib chiqadi.

Simmetrik yadro xos funksiyalarining ketma-ketligini ortonormal qilib olish mumkin.

Xos sonlar ketma-ketligini yozib olganimizda ularning har biriga bir nechta chiziqli bog'liq bo'lmagan xos funksiyalar mos kelsa, ularning har biri shuncha marta qaytariladi deb shartlashib olamiz. U holda, har bir xos songa bitta xos funksiya mos keladi deb hisoblashimiz mumkin. Shu bilan birga xos sonlar orasida o‘zaro tenglari ham bo‘lishi mumkin. Xos sonlarni ular absolyut qiymatlarining o‘sishi bo‘yicha nomerlab olamiz. Shunday qilib, agar

$$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n, ...$$

biror simmetrik yadroning xos sonlar ketma-ketligi bo‘lib, ularga mos xos funksiyalar ketma-ketligi

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), ...$$

ya’ni

$$\varphi_n(x) - \lambda_n K\varphi_n = 0$$

bo‘lsa, u holda

$$(\varphi_i, \varphi_j) = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j \end{cases}$$

va

$$|\lambda_1| \leq |\lambda_2| \leq ... \leq |\lambda_n| \leq ...$$

bo‘ladi.

Agar xos sonlar cheksiz bo‘lsa, bizga ma’lumki, $\lim\limits_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ bo‘ladi.

2- §. Simmetrik yadro xos sonining mavjudligi

Lemma. *Ikkinchi iteratsiyalangan yadro xos sonlarining to‘plami birinchi yadro xos sonlari kvadratlarining to‘plami bilan ustma-ust tushadi.*

$K(x,y)$ yadroning xos soni λ_0 va bunga mos xos funksiyasi $\varphi_0(x)$ bo‘lsin, ya’ni

$$\varphi_0(x) = \lambda_0 K\varphi_0.$$

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi φ_0 o‘rniga unga teng bo‘lgan $\lambda_0 K\varphi_0$ ni qo‘yamiz:

$$\varphi_0(x) = \lambda_0^2 K^2 \varphi_0$$

yoki

$$\varphi_0(x) = \lambda_0^2 \int_a^b K_2(x,y)\varphi_0(y)dy.$$

Bu tenglikdan λ_0^2 son $K_2(x,y)$ yadroning xos soni, $\varphi_0(x)$ esa unga mos xos funksiya ekanligi kelib chiqadi.

Endi μ_0 son ikkinchi iteratsiyalangan $K_2(x,y)$ yadroning xos soni, $\varphi_0(x)$ funksiya unga mos xos funksiyasi bo'lsin. U holda

$$\varphi_0(x) = \mu_0 K^2 \varphi_0,$$

yoki

$$\left(I - \mu_0 K^2\right)\varphi_0 = 0. \qquad (3)$$

Bizga ma'lumki, K operatorni oddiy qoidaga binoan qo'shish va ko'paytirish mumkin, shuning uchun ham (3) tenglikni

$$\left(I + \sqrt{\mu_0}K\right)\left(I - \sqrt{\mu_0}K\right)\varphi_0 = 0 \qquad (4)$$

ko'rinishda yozishimiz mumkin.

$$\left(I - \sqrt{\mu_0}K\right)\varphi_0 = \psi(x) \qquad (5)$$

deb belgilab olamiz.

Agar $\psi(x) \equiv 0$ bo'lsa, (5) tenglikdan $\sqrt{\mu_0}$ son $K(x,y)$ yadroning xos soni, $\varphi_0(x)$ esa bu songa mos xos funksiyasi bo'ladi. Bu holda lemma isbotlandi. Agar $\psi(x) \neq 0$ bo'lsa, (4) tenglama

$$\left(I + \sqrt{\mu_0}K\right)\psi = 0$$

ko'rinishda yoziladi. Bundan $-\sqrt{\mu_0}$ ning $K(x,y)$ yadroning xos soni, $\psi(x)$ esa unga mos xos funksiyasi ekanligi kelib chiqadi. Bu holda ham lemma isbot bo'ldi. Isbotlangan lemma simmetrik bo'lmagan yadro uchun ham o'rinli bo'ladi.

Izoh. Ixtiyoriy n uchun n- iteratsiyalangan yadro xos sonlarining to'plami birinchi yadro xos sonlari n- darajalari to'plami bilan ustma-ust tushishini isbotlash qiyin emas.

Lemmadan quyidagi natija kelib chiqadi:

Agar $K(x,y)$ yadro simmetrik bo'lsa, ikkinchi iteratsiyalangan yadro xos sonlari musbat bo'ladi. Bu natijaning to'g'riligi simmetrik yadro xos sonlarining haqiqiy ekanligidan va lemmadan darhol kelib chiqadi.

Xos sonning mavjudligi haqidagi teorema. *Aynan nolga teng bo'lmagan har bir simmetrik yadro kamida bitta xos songa ega bo'ladi.*

Biz $K_2(x,y)$ yadroning kamida bitta xos songa ega bo'lishini isbotlaymiz, u holda lemmaga asosan $K(x,y)$ yadro ham xos songa ega bo'ladi. λ tekislikda ixtiyoriy musbat μ sonni olamiz, bu son shunday xossaga ega bo'lsinki, $|\lambda| \leq \mu$ doirada $K_2(x,y)$ yadroning xos sonlari bo'lmasin. Ixtiyoriy $\varphi(x) \neq 0$ funksiyani olamiz va yangi

$$f(x) = \varphi(x) - \mu K^2 \varphi = \varphi(x) - \mu \int_a^b K_2(x,y)\varphi(y)dy \quad (6)$$

funksiyani tuzamiz. $f(x) \neq 0$ bo'ladi, aks holda μ son $K_2(x,y)$ yadroning xos soni bo'lib qoladi. $f(x)$ ni ma'lum funksiya deb hisoblab, (6) tenglamani $\varphi(x)$ funksiyaga nisbatan integral tenglama deb qarashimiz mumkin.

$K_2(x,y)$ yadroning rezolventasini $R_2(x,y;\mu)$ orqali belgilab, bu tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda topamiz:

$$\varphi(x) = f(x) + \mu \int_a^b R_2(x,y;\mu) f(y)dy.$$

Bu tenglikni $f(x)$ ga skalyar ko'paytiramiz:

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \mu \int_a^b \int_a^b R_2(x,y;\mu) f(y) f(x) dxdy. \quad (7)$$

Endi (7) formulaning o'ng tomonidagi integralning manfiy emasligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda avvalo, $K_2(x,y)$ yadroning $|\lambda| \leq \mu$ doirada xos sonlarining yo'qligini e'tiborga olsak, shu doirada $R_2(x,y;\lambda)$ rezolventa II bob 5- § da aytilgan ma'noda λ ning analitik funksiyasi bo'ladi, ya'ni kvadrati bilan jamlanuvchi ixtiyoriy $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun ikki karrali

$$\int_a^b \int_a^b R_2(x,y;\lambda) f(y) g(x) dxdy$$

integral $|\lambda| \leq \mu$ doirada analitik bo'ladi. Xususiy holda,

$$\int_a^b \int_a^b R_2(x,y;\lambda) f(y) f(x) dxdy$$

integral ham aytib o'tilgan doirada analitik bo'ladi, demak u λ bo'yicha darajali qatorga yoyiladi.

$$\int_a^b \int_a^b R_2(x,y;\lambda) f(y) f(x) dxdy = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \lambda^{i-1}. \quad (8)$$

Bu yerda $\lambda = \mu$ desak,

$$\int_a^b\int_a^b R_2(x,y;\mu)f(y)f(x)dxdy = \sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\mu^{i-1} \qquad (9)$$

tenglik hosil bo'ladi. (8) tenglikdagi integralning manfiy emasligini ko'rsatish uchun $\alpha_n \geq 0$ tengsizlikni isbotlash yetarlidir.

(8) yoki (9) qatorning α_i koeffitsientlarini topish qiyin emas. Moduli bo'yicha kichik λ larda $R_2(x,y;\lambda)$ rezolventa iteratsiyalangan yadrolar bo'yicha qatorga yoyiladi. $K_2(x,y)$ yadroning iteratsiyalangan yadrosi $K_{2i}(x,y)$ bo'lgani uchun

$$R_2(x,y;\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}K_{2i}(x,y). \qquad (10)$$

λ ning kichik qiymatlarida (10) qatorni kvadrati bilan jamlanuvchi $f(y)$ funksiyaga ko'paytirib, hadlab integrallash mumkin, ya'ni

$$\int_a^b R_2(x,y;\lambda)f(y)dy = \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\int_a^b K_{2i}(x,y)f(y)dy.$$

Bu tenglikni $f(y)$ funksiyaga skalyar ko'paytiramiz:

$$\int_a^b\int_a^b R_2(x,y;\lambda)f(y)f(x)dxdy =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty}\lambda^{i-1}\int_a^b\int_a^b K_{2i}(x,y)f(y)f(x)dxdy.$$

Bundan darhol (8) qator bilan solishtirib, α_i koeffitsientlarning qiymatlarini topamiz:

$$\alpha_i = \int_a^b\int_a^b K_{2i}(x,y)f(y)f(x)dxdy.$$

Ushbu

$$K^{2i}f = \int_a^b K_{2i}(x,y)f(y)dy$$

belgilashga asosan, α_i quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\alpha_i = \left(K^{2i}f, f\right) = \left(K^i\left(K^i f\right), f\right).$$

(2) formulaga asosan,

$$\alpha_i = \left(K^i f, K^i f\right) = \left\|K^i f\right\|^2 \geq 0.$$

Endi (7) ifoda

$$(\varphi, f) = \|f\|^2 + \sum_{i=1}^{\infty} \mu^i \|K^i f\|^2 \tag{11}$$

ko'rinishga keladi. (11) formuladan $(\varphi, f) > 0$ tengsizlik kelib chiqadi.

(6) tenglamaga qaytib, uning har ikki tomonini chapdan $\varphi(x)$ ga skalyar ko'paytiramiz:

$$(\varphi, f) = (\varphi, \varphi) - \mu(\varphi, K^2\varphi).$$

(1) ayniyatga ko'ra

$$(\varphi, K^2\varphi) = (\varphi, K(K\varphi)) = (K\varphi, K\varphi) = \|K\varphi\|^2.$$

Demak,

$$(\varphi, f) = \|\varphi\|^2 - \mu\|K\varphi\|^2. \tag{12}$$

$(\varphi, f) > 0$ bo'lgani uchun (12) ifoda musbat bo'ladi. Bundan, ixtiyoriy kvadrati bilan jamlanuvchi $\varphi(x)$ funksiya uchun

$$\|K\varphi\| \leq \frac{1}{\sqrt{\mu}}\|\varphi\| \tag{13}$$

tengsizlik hosil bo'ladi.

Eslatib o'tamiz, (13) tengsizlikda μ shunday sonki, $|\lambda| \leq \mu$ doirada $K_2(x, y)$ yadroning xos sonlari yo'q.

Endi faraz qilamiz, $K_2(x, y)$ yadroning birorta ham xos soni bo'lmasin. Bu holda μ sonni yetarli katta qilib olish mumkin; uning ustiga $\mu \to \infty$ deb hisoblash mumkin. (13) tengsizlikda $\mu \to \infty$ da limitga o'tib, $\|K\varphi\| \leq 0$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan $K\varphi \equiv 0$, ya'ni

$$\int_a^b K(x, y)\varphi(y)dy = 0. \tag{14}$$

Bu holda $K(x, y) \equiv 0$ bo'lishini ko'rsatish qiyin emas. Haqiqatan ham, x sonni ixtiyoriy ravishda shunday belgilab olamizki, x ning bu qiymatida

$$\int_a^b K^2(x, y)dy$$

integral mavjud bo'lsin. x nuqta belgilab olinganligi sababli *K (y, x)* yadro faqat y ning funksiyasi bo'ladi. $\varphi(y)$ funksiya sifatida *K (y, x)* = =*K (x, y)* ni olamiz. Bu funksiya x nuqtaning tanlanganligi tufayli kvadrati bilan jamlanuvchi bo'ladi. U holda (14) tenglikdan deyarli barcha $x \in (a, b)$ lar uchun

$$\int_a^b K^2(x,y)dy \equiv 0$$

bo'ladi, demak, $K(x,y) \equiv 0$.

Shunday qilib, agar $K_2(x,y)$ yadro birorta ham xos songa ega bo'lmasa, u holda $K(x,y)$ yadro aynan nolga teng bo'lar ekan. Demak, $K(x,y)$ yadro aynan nolga teng bo'lmasa, $K_2(x,y)$ yadro kamida bitta xos songa ega bo'ladi. U holda lemmaga asosan $K(x,y)$ yadro ham kamida bitta xos songa ega bo'ladi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

Endi (13) tengsizlikka qaytamiz. Agar $K_2(x,y)$ yadroning doirada $|\lambda| \le \mu$ xos sonlari bo'lmasa, boshqacha aytganda, agar μ bu yadroning eng kichik xos sonidan kichik bo'lsa, (13) tengsizlik o'rinli bo'ladi. $K(x,y)$ yadroning moduli bo'yicha eng kichik xos soni λ_1 bo'lsin, u holda $K_2(x,y)$ yadroning eng kichik xos soni λ_1^2 bo'ladi. Agar $\mu < \lambda_1^2$ bo'lsa, (13) tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlikda $\mu \to \lambda_1^2$ da limitga o'tib, muhim

$$\|K\varphi\| \le \frac{1}{|\lambda_1|}\|\varphi\| \tag{15}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu tengsizlikda tenglikka ham erishiladi. Buning uchun $K(x,y)$ yadroning λ_1 xos soniga mos xos funksiyasi $\varphi_1(x)$ bo'lsa, $\varphi(x) = \varphi_1(x)$ deb olish kifoyadir. Haqiqatan ham, bu holda $\varphi_1(x) = \lambda_1 K\varphi_1$, bundan $K\varphi_1 = \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)$ va $\|K\varphi_1\| = \frac{1}{|\lambda_1|}\|\varphi_1\|$.

Yuqorida aytilganlardan, Fredgolm operatorining moduli bo'yicha eng kichik xos soni λ_1 bo'lsa, bu operatorning normasi $\|K\| = \frac{1}{|\lambda_1|}$ ekanligi kelib chiqadi.

3- §. Gilbert—Shmidt teoremasi

Simmetrik $K(x,y)$ yadroni tekshiramiz. Bu yadroning bitta λ_1 xos soni va unga mos bitta chiziqli bog'liq bo'lmagan normalangan $\varphi_1(x)$ xos funksiyasi bo'lsin. U holda

$$K(x,y) \equiv \frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)\varphi_1(y) \tag{16}$$

bo'ladi. Haqiqatan ham, ushbu

$$K^{(1)}(x,y)=K(x,y)-\frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)\varphi_1(y)$$

simmetrik yadroni qaraymiz va bu yadroning noldan farqli bo'lgan birorta ham xos soni yo'qligini, shu sababli $K^{(1)}(x,y)\equiv 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Teskarisini faraz qilamiz. $K^{(1)}(x,y)$ yadroning xos funksiyasi $\varphi(x)\not\equiv 0$ bo'lsin. U holda

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K^{(1)}(x,y)\varphi(y)dy=$$

$$=\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy-\frac{\lambda}{\lambda_1}\varphi_1(x)\int_a^b\varphi(y)\varphi_1(y)dy \quad (17)$$

(17) tenglikning har ikki tomonini $\varphi_1(x)$ funksiyaga ko'paytirib, x bo'yicha a dan b gacha integrallaymiz:

$$\int_a^b\varphi(x)\varphi_1(x)dx=\int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy\right]\varphi_1(x)dx-$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda_1}\left[\int_a^b\varphi(y)\varphi_1(y)dy\right]\int_a^b\varphi_1^2(x)dx. \quad (18)$$

$K(x,y)$ yadroning simmetrik yadro ekanligini va $\varphi_1(x)$ funksiya bu yadroning xos funksiyasi bo'lgani uchun

$$\int_a^b K(x,y)\varphi_1(y)dy=\frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(x)$$

tenglik o'rinli bo'lishini e'tiborga olib, (18) tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchini quyidagi ko'rinishda yozishimiz mumkin:

$$\int_a^b\left[\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy\right]\varphi_1(x)dx=\int_a^b\left[\int_a^b K(x,y)\varphi_1(x)dx\right]\varphi(y)dy=$$

$$=\int_a^b\left[\int_a^b K(y,x)\varphi_1(x)dx\right]\varphi(y)dy=\frac{1}{\lambda_1}\int_a^b\varphi_1(y)\varphi(y)dy.$$

Bunga asosan, $\varphi_1(x)$ ning normalangan xos funksiya, ya'ni $\int_a^b\varphi_1^2(x)dx=1$ ekanligi sababli, (18) tenglikdan

$$\int_a^b\varphi(x)\varphi_1(x)dx=0 \quad (19)$$

tenglik kelib chiqadi. U holda (17) tenglikdan

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy.$$

Shunday qilib, $\varphi(x)$ funksiya $K(x,y)$ yadroning xos funksiyasi bo'lib chiqdi, lekin $\varphi_1(x)$ yagona xos funksiya bo'lgani uchun $\varphi(x)$ funksiya $\varphi_1(x)$ ga proporsional bo'ladi, bu esa, (19) tenglikka qarama-qarshidir. Demak, bizning farazimiz noto'g'ri va $K^{(1)}(x,y)\equiv 0$.

Endi $K(x,y)$ simmetrik yadroning

$$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m,\ldots \tag{20}$$

xos sonlari va

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\ldots,\varphi_m(x),\ldots \tag{21}$$

xos funksiyalarining sistemasi ma'lum bo'lsin.

Xos funksiyalarni ortonormal, xos sonlarni esa, absolyut qiymatlarining o'sishi bo'yicha joylashgan deb hisoblaymiz, ya'ni

$$|\lambda_1|\le|\lambda_2|\le\ldots\le|\lambda_m|\le\ldots$$

Yangi

$$K^{(n)}(x,y)=K(x,y)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i} \tag{22}$$

yadroni tuzamiz. Ravshanki, bu yadro simmetrik.

Ushbu

$$\lambda_{n+1},\lambda_{n+2},\ldots$$

$$\varphi_{n+1}(x),\varphi_{n+2}(x),\ldots$$

ketma-ketliklar $K^{(n)}(x,y)$ *yadroning xos sonlari va bularga mos* λ_m *xos funksiyalarining sistemasini tashkil qiladi.*

Haqiqatan ham, (20) va (21) ketma-ketliklardan bir-biriga mos λ_m va $\varphi_m(x)$ ni olib, $m>n$ deb hisoblab,

$$\delta(x)=\varphi_m(x)-\lambda_m\int_a^b K^{(n)}(x,y)\varphi_m(y)dy \tag{23}$$

ifodani tuzamiz. (23) da $K^{(n)}(x,y)$ o'rniga uning (22) qiymatini qo'yamiz:

$$\delta(x)=\left[\varphi_m(x)-\lambda_m\int_a^b K(x,y)\varphi_m(y)dy\right]+$$

$$+\lambda_m\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\int_a^b\varphi_m(y)\varphi_i(y)dy.$$

λ_m va $\varphi_m(x)$ lar $K(x,y)$ yadroning xos soni va xos funksiyasi bo'lgani sababli avvalgi tenglikdagi kvadrat qavs ichidagi ifoda nolga teng bo'ladi. Xos funksiyalarning ortogonalligidan

$$\int_a^b \varphi_m(y)\varphi_i(y)dy = (\varphi_m, \varphi_i) = 0, \quad m \neq i$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, $\delta(x) \equiv 0$, yoki

$$\varphi_m(x) - \lambda_m \int_a^b K(x,y)\,\varphi_m(y)dy = 0.$$

Shunday qilib, $m > n$ bo'lganda λ_m va $\varphi_m(x)$ lar $K^{(n)}(x,y)$ yadroning xos sonlari va xos funksiyalaridan iborat ekan.

Endi teskarisini isbotlaymiz, agar $K^{(n)}(x,y)$ yadroning xos soni va unga mos xos funksiyasini olsak, $m > n$ bo'lganda ular (20) va (21) ketma-ketliklar orasidan topiladi.

$K^{(n)}(x,y)$ yadroning bir-biriga mos xos soni va xos funksiyasi μ va $\psi(x)$ bo'lsin. U holda

$$\psi(x) - \mu \int_a^b K^{(n)}(x,y)\psi(y)dy = 0.$$

$K^{(n)}(x,y)$ o'rniga uning (22) ifodasini qo'yamiz:

$$\psi(x) - \mu \int_a^b K(x,y)\psi(y)dy + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i} \int_a^b \psi(y)\varphi_i(y)dy = 0$$

yoki
$$\psi(x) - \mu K\psi + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{(\psi, \varphi_i)}{\lambda_i}\varphi_i(x) = 0. \qquad (24)$$

Bu tenglikning har ikki tomonini $\varphi_k(x)$ $(1 \leq k \leq n)$ ga skalyar ko'paytiramiz:

$$(\psi, \varphi_k) - \mu(K\psi, \varphi_k) + \mu \sum_{i=1}^{n} \frac{(\psi, \varphi_i)}{\lambda_i}(\varphi_i, \varphi_k) = 0. \qquad (25)$$

(1) ayniyatga va

$$\varphi_k(x) - \lambda_k K\varphi_k = 0$$

tenglikka asosan

$$(K\psi, \varphi_k) = (\psi, K\varphi_k) = \left(\psi, \frac{\varphi_k}{\lambda_k}\right) = \frac{1}{\lambda_k}(\psi, \varphi_k).$$

$\varphi_i(x)$ funksiyalar ortogonal va normalangan bo'lgani uchun

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{(\psi,\varphi_i)}{\lambda_i}(\varphi_i,\varphi_k)=\frac{(\psi,\varphi_k)}{\lambda_k}.$$

Shunday qilib, (25) tenglamadagi ikkinchi va uchinchi qo'shiluvchilar o'zaro qisqarib ketadi va natijada

$$(\psi,\varphi_k)=0,\quad k=1,2,...,n \tag{26}$$

tenglik hosil bo'ladi. Bunga asosan, (24) tenglama

$$\psi(x)-\mu K\psi=0$$

ko'rinishda yoziladi. Bu tenglikdan μ va $\psi(x)$ lar *K (x, y)* yadroning xos soni va xos funksiyasi ekanligi kelib chiqadi, shunday ekan ular (20) va (21) ketma-ketliklarning ichida bor bo'ladi. Lekin (26) tenglikka asosan $\psi(x)$ funksiya barcha $\varphi_i(x)$, $i=1,2,...,n$ funksiyalarga ortogonal, bu holda esa, $\psi(x)$ funksiya (21) ketma-ketlikning indeksi $m>n$ bo'lgan biror funksiyasi bilan ustma-ust tushadi.

Yuqorida bayon qilinganlarga asosan quyidagi xulosa kelib chiqadi.

Agar K (x, y) yadro n dan ko'p xos sonlarga ega bo'lsa, $K^{(n)}(x,y)$ *yadroning moduli bo'yicha eng kichik xos soni* λ_{n+1} *bo'ladi.*

Endi berilgan yadroning xos sonlari $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ chekli bo'lgan xususiy holni tekshiramiz. Bu holda $K^{(n)}(x,y)$ yadro birorta ham xos songa ega bo'lmaydi. Xos son mavjudligi haqidagi teoremaga asosan, yoki $K^{(n)}(x,y)\equiv 0$,

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}. \tag{27}$$

(27) formula *K (x, y)* yadroning aynigan yadro ekanligini ko'rsatadi. Bizga ma'lumki, har qanday aynigan yadro faqat chekli sondagi xos sonlarga ega bo'ladi. Demak, *kvadrati bilan jamlanuvchi simmetrik yadro xos sonlari va xos funksiyalari sistemasi chekli bo'lishi uchun bu yadroning aynigan yadro bo'lishi zarur va yetarlidir.* Bu holda yadroni (27) ko'rinishda ifodalash mumkin. Biz haqiqiy simmetrik yadrolarni tekshiryapmiz, agar yadro kompleks qiymatlarni qabul qilsa, (27) formula quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$K(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\varphi_i\overline{\varphi_i(y)}}{\lambda_i}.$$

Yana bir muhim xulosani aytib o'tamiz. Kvadrati bilan jamlanuvchi $\varphi(x)$ funksiya qanday bo'lmasin

$$\lim_{n\to\infty}\left\|K^{(n)}\varphi\right\|=0 \tag{28}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

Agar *K (x, y)* aynigan yadro bo‘lsa, yetarli katta n uchun $K^{(n)}(x,y)\equiv 0$ va $K^{(n)}\varphi\equiv 0$ bo‘ladi. Demak, bu holda (28) tenglikning bajarilishi ravshan. Agar *K (x, y)* aynigan yadro bo‘lmasa, λ_{n+1} son $K^{(n)}(x,y)$ yadroning moduli bo‘yicha eng kichik xos soni bo‘ladi. (15) tengsizlikka asosan,

$$\left\|K^{(n)}\varphi\right\|\le\frac{1}{\left|\lambda_{n+1}\right|}\|\varphi\|.$$

Bundan $n\to\infty$ da $\frac{1}{\lambda_{n+1}}\to 0$ bo‘lgani uchun $\left\|K^{(n)}\varphi\right\|\underset{n\to\infty}{\to}0$.

Gilbert—Shmidt teoremasi. *$K(x,y)$ simmetrik yadro va $h(x)$ asosiy $[a,b]$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi ixtiyoriy funksiya bo‘lsin. U holda*

$$f(x)=Kh=\int_a^b K(x,y)h(y)dy \tag{29}$$

funksiya $K(x,y)$ yadro xos funksiyalari bo‘yicha o‘rtacha yaqinlashuvchi Furye qatoriga yoyiladi.

(29) formula bilan ifodalangan funksiyalarni ko‘pincha *yadro orqali ifodalanuvchi funksiyalar* deyiladi. Aslini olganda bunday funksiyalar K operatorning qiymatlaridan iboratdir.

Eslatib o‘tamiz, simmetrik yadroning xos funksiyalarini hammavaqt ortonormal qilib olish mumkin. Shuning uchun ham teoremadagi qator ortonormal xos funksiyalar bo‘yicha Furye qatoridan iborat bo‘ladi.

Teoremani isbotlash uchun $K(x,y)$ yadro xos funksiyalarining ketma-ketligi bo‘yicha $h(y)$ funksiyaning Furye qatorini tuzamiz:

$$h(y)\sim\sum_{n=1}^{\infty}h_n\varphi_n(y),\quad h_n=(h,\varphi_n).$$

Bessel tengsizligiga asosan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|h_n\right|^2$$

qatorning yaqinlashuvchi bo‘lishi ma’lum.

Endi $f(x)$ funksiyaning Furye qatorini tuzamiz:

$$f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}f_n\varphi_n(x) \tag{30}$$

va uning koeffitsientlarini hisoblaymiz. $f_n=(f,\varphi_n)$ tenglikka egamiz. Lekin, $f(x)=Kh$ bo‘lgani uchun

$$f_n = (Kh, \varphi_n) = (h, K\varphi_n).$$

$K\varphi_n = \dfrac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)$ tenglikka asosan

$$f_n = \frac{1}{\lambda_n}(h, \varphi_n) = \frac{h_n}{\lambda_n}.$$

Shunday qilib, (30) qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(x) \tag{31}$$

ko'rinishda yoziladi.

$h(x)$ funksiya asosiy oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lgani uchun bizga II bob 5- § dan ma'lumki, shu oraliqda $f(x)$ funksiya ham kvadrati bilan jamlanuvchi bo'ladi. Bu holda uning Furye qatori o'rtacha yaqinlashadi. Bu qatorning yig'indisi $f(x)$ ga teng bo'lishini ko'rsatamiz. Ushbu

$$\omega_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(x)$$

belgilashni kiritamiz. U holda

$$f(x) - \omega_n(x) = \int_a^b K(x,y)\, h(y)dy - \sum_{k=1}^{n} \frac{h_k}{\lambda_k}\, \varphi_k(x). \tag{32}$$

h_k koeffitsientning

$$h_k = \int_a^b h(y)\, \varphi_k(y)dy$$

qiymatini e'tiborga olsak, (32) tenglik quyidagicha yoziladi:

$$f(x) - \omega_n(x) = \int_a^b K(x,y)\, h(y)dy - \sum_{k=1}^{n} \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\int_a^b h(y)\, \varphi_k(y)dy.$$

$\omega_n(x)$ yig'indi chekli bo'lgani uchun yig'indi va integral tartibini almashtirish mumkin. Shu sababli va (22) ga asosan, avvalgi tenglik ushbu

$$f(x) - \omega_n(x) = \int_a^b K^n(x,y) h(y)dy = K^{(n)}h$$

ko'rinishda yoziladi. (28) tenglikka ko'ra

$$\left\| f - \omega_n(x) \right\| = \left\| K^{(n)}h \right\| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Bundan

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(x).$$

Gilbert—Shmidt teoremasi isbot bo‘ldi.

Shunday qilib, bu teoremaga asosan simmetrik yadro orqali ifodalangan ixtiyoriy funksiya bu yadroning xos funksiyalari orqali Furye qatoriga yoyiladi, shu bilan birga umumiy holda hosil bo‘lgan qator o‘rtacha yaqinlashadi.

Tabiiy savol tug‘iladi, qanday shartlar bajarilganda (31) qator faqat o‘rtacha yaqinlashuvchi bo‘lmay, balki absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo‘ladi? Bu savolga javob berishdan avval quyidagi tengsizlikni isbotlaymiz.

Simmetrik $K(x,y)$ yadro II bobdagi (65) shartni qanoatlantirsin, λ_n ва $\varphi_n(x)$, $n=1,2,...$ bu yadroning xos sonlari va bularga mos ortonormal xos funksiyalari bo‘lsin. U holda ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2}\leq N \tag{33}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

$K(x,y)$ yadro tayin x da y ning kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyasi bo‘ladi. Bu funksiyaga $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormal sistema bo‘yicha uning Furye qatorini mos qilib qo‘yamiz:

$$K(x,y)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n(x)\varphi_n(y).$$

Bu qatorning koeffitsientlarini hisoblaymiz:

$$\alpha_n(x)=\int_a^b K(x,y)\varphi_n(y)dy=\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x).$$

Shunday qilib, $K(x,y)$ yadroga uning xos funksiyalari bo‘yicha Furye qatori mos qilib qo‘yiladi:

$$K(x,y)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}. \tag{34}$$

(34) qator $K(x,y)$ *yadroning bichiziqli qatori* deyiladi.

Endi Bessel tengsizligiga asosan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^2}\leq\int_a^b K^2(x,y)dy\leq N$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Izoh. (33) qatorning hadlari musbat, uni hadlab integrallash mumkin. (33) tengsizlikni a dan b gacha integrallaymiz va $\varphi_n(x)$ funksiyalarning normalanganligini hamda $M^2 = N(b-a)$ tenglikni e'tiborga olib,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} \leq M^2 \tag{35}$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Biz keyinchalik (35) formulada hamma vaqt tenglik belgisi bo'lishini ko'rsatamiz. Yana shu narsani ta'kidlab o'tamizki, agar yadro simmetrik bo'lmasa, u holda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|\lambda_n|^2} \leq M^2$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Bu tengsizlik *I. Shur tengsizligi* deb ataladi.

Endi quyidagi teoremani isbotlash qiyin emas.

Teorema. *Agar simmetrik yadro II bobdagi (65) shartni qanoatlantirsa, (31) Gilbert—Shmidt qatori absolyut va tekis yaqinlashadi.*

(31) qatorning qoldig'ini baholaymiz. Buning uchun ushbu

$$\left|\sum a_k b_k\right|^2 \leq \sum |a_k|^2 \sum |b_k|^2$$

Koshi tengsizligidan foydalanamiz. Bu tengsizlik

$$\sum \left(|a_k|\lambda - |b_k|\right)^2$$

kvadrat uchhad haqiqiy o'zgaruvchi λ ning ixtiyoriy qiymatida manfiy emasligidan kelib chiqadi.

$$|a_k| = |h_k|, \qquad b_k = \left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|$$

deb belgilab olsak, quyidagi tengsizlikka ega bo'lamiz:

$$\left[\sum_{k=n+1}^{n+p} \left|h_k \frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\right]^2 \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |h_k|^2 \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2} \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |h_k|^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k^2}.$$

(33) tengsizlikka asosan

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} \left|\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(x)\right| \leq \sqrt{N} \sqrt{\sum_{k=n+1}^{\infty} |h_k|^2}.$$

Bu tengsizlikning o'ng tomonida yaqinlashuvchi sonli qatorning qoldig'i turipti, shuning uchun ham yetarli katta n uchun chap tomondagi yig'indi x ga bog'liq bo'lmagan holda yetarlicha kichik bo'ladi. Bundan Gilbert—Shmidt qatorining absolyut va tekis yaqinlashishi kelib chiqadi.

4- §. Bichiziqli qator

1. Simmetrik yadro uchun bichiziqli qator. Bichiziqli

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n} \qquad (36)$$

qator avvalgi paragrafda kiritilgan bo'lib, bundagi $\{\lambda_n\}$ va $\{\varphi_n(x)\}$ ketma-ketliklar $K(x,y)$ simmetrik yadroning xos sonlari va xos funksiyalarining sistemasi edi.

Eslatib o'tamiz, bichiziqli qator $K(x,y)$ yadroning $\{\varphi_n(x)\}$ ortonormal sistemalar bo'yicha Furye qatori sifatida hosil qilingan edi.

Bichiziqli (36) qator asosiy kvadratda o'rtacha yaqinlashadi va uning yig'indisi berilgan $K(x,y)$ simmetrik yadroga teng bo'ladi.

Bizga ma'lumki,

$$\varphi_k(x)\varphi_k(y),\quad k=1,2,... \qquad (37)$$

funksiyalar sistemasi asosiy kvadratda ortonormal bo'ladi. $K(x,y)$ yadroga (37) funksiyalar bo'yicha uning Furye qatorini mos qilib qo'yamiz:

$$K(x,y)\sim\sum_{n=1}^{\infty}A_n\varphi_n(x)\varphi_n(y).$$

Bu qatorning koeffitsientlarini hisoblaymiz:

$$A_n=\left(K(x,y),\varphi_n(x)\varphi_n(y)\right)=\int_a^b\int_a^b K(x,y)\varphi_n(x)\varphi_n(y)dxdy=$$

$$=\int_a^b\varphi_n(x)dx\int_a^b K(x,y)\varphi_n(y)dy.$$

$\varphi_n(x)$ funksiya $K(x,y)$ yadroning xos funksiyasi bo'lgani uchun avvalgi tenglikdagi ichki integral $\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(x)$ga teng bo'ladi. Bunga asosan

$$A_n=\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b\varphi_n^2(x)dx=\frac{1}{\lambda_n}\|\varphi_n\|^2=\frac{1}{\lambda_n},$$

$$K(x,y)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}.$$

Bichiziqli qator $K(x,y)$ yadroning (37) funksiyalar bo'yicha Furye qatoridan iborat ekanligi kelib chiqdi. Har qanday Furye qatori mos sohada o'rtacha yaqinlashuvchi bo'lgani sababli, tekshirilayotgan holda asosiy kvadratda o'rtacha yaqinlashuvchi va uning yig'indisi shu kvadratda kvadrati bilan jamlanuvchi bo'ladi.

Endi ushbu

$$L(x,y)=K(x,y)-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}$$

yadroni tuzamiz. Ravshanki, bu yadro asosiy kvadratda kvadrati bilan jamlanuvchi bo'ladi. $L(x,y)$ yadro xos sonlarga ega emasligini ko'rsatamiz. Shu maqsadda bir jinsli

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b L(x,y)\psi(y)dy=0, \qquad (38)$$

yoki

$$\psi(x)-\lambda K\psi+\lambda\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}\psi(y)dy=0 \qquad (39)$$

integral tenglamani tekshiramiz. (39) tenglikdagi qatorni hadlab integrallash mumkinligini isbotlash qiyin emas. Haqiqatan ham, deyarli barcha $x\in(a,b)$ lar uchun

$$\int_a^b K^2(x,y)dy$$

integral mavjud va bu x lar uchun (33) tengsizlikni isbotlaganda (36) qator y ning funksiyasi sifatida qaralgan $K(x,y)$ yadroning $\{\varphi_n(y)\}$ funksiyalar bo'yicha Furye qatoridan iboratligini ko'rsatdik. Bunday qator y bo'yicha o'rtacha yaqinlashadi va bizga ma'lumki, bu qatorni avval kvadrati bilan jamlanuvchi ixtiyoriy funksiyaga ko'paytirgandan so'ng hadlab integrallash mumkin. Biz tekshirayotgan holda bunday funksiya $\psi(y)$ dan iborat.

(39) tenglamada hadlab integrallashni bajarib,

$$\psi(x)-\lambda K\psi+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\psi,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x)=0 \qquad (40)$$

tenglamani hosil qilamiz. Gilbert—Shmidt teoremasiga asosan

$$K\psi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\psi,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x),$$

(40) tenglamadan darhol $\psi(x)\equiv 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, (38) tenglama ixtiyoriy λ uchun faqat trivial yechimga ega bo'ladi, bu degan so'z $L(x,y)$ yadro xos sonlarga ega emas. Xos sonning mavjudligi haqidagi teoremaga asosan $L(x,y)\equiv 0$ va, demak,

$$K(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}. \tag{41}$$

Shu bilan yuqorida bayon qilingan fikr isbot bo'ldi. (41) tenglikni $K(x,y)$ ga ko'paytirib asosiy kvadrat bo'yicha integrallasak, ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}=\int_a^b\int_a^b K^2(x,y)dxdy=M^2 \tag{42}$$

formula hosil bo'ladi.

Endi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. $\{\varphi_n(x)\}$ — *ortonormal funksiyalar sistemasi va* $\{\lambda_n\}$ *shunday haqiqiy sonlar ketma-ketligi bo'lsinki,*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}$$

qator yaqinlashsin. U holda (36) qator asosiy kvadratda o'rtacha yaqinlashadi va uning yig'indisi simmetrik yadroga teng bo'lib, λ_n *sonlar va* $\varphi_n(x)$ *funksiyalar bu yadro uchun xos sonlar va xos funksiyalar sistemasini tashkil qiladi.*

(36) qatorning yaqinlashuvchiligi Riss—Fisher teoremasidan darhol kelib chiqadi. Endi

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}=K(x,y) \tag{43}$$

deb hisoblaymiz. (43) qatorning kvadrati bilan jamlanuvchiligi va simmetrik ekanligi ravshan. (43) tenglikni $\lambda_m\varphi_m(y)$ ga ko'paytirib, y bo'yicha a dan b gacha integrallaymiz. Biz yuqorida hadlab integrallash mumkinligini aniqlagan edik, bu amalni bajarib, natijada

$$\varphi_m(x)=\lambda_m\int_a^b K(x,y)\varphi_m(y)dy$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan λ_m va $\varphi_m(x)$ (43) yadroning xos soni va unga mos xos funksiyasi ekanligi kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, bu yadro $\varphi_n(x)$ funksiyalarga ortogonal bo'lgan yana bitta $\varphi(x)$ xos funksiyaga ega bo'lib, λ unga mos xos son bo'lsin, ya'ni

$$\varphi(x)=\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy.$$

$K(x,y)$ yadroni uning (43) ifodasi bilan almashtirib va hadlab integrallab, natijada

$$\varphi(x)=\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\varphi,\varphi_n)}{\lambda_n}\varphi_n(x)=0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bundan darhol $\{\varphi_n(x)\}$ funksiyalar (43) yadroning xos funksiyalari sistemasini tashkil qilishi kelib chiqadi. Shu bilan teorema isbot bo'ldi.

2. Iteratsiyalangan yadrolar uchun bichiziqli qatorlar. Gilbert—Shmidt formulasini ushbu

$$f(x)=\int_a^b K(x,t)h(t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{h_n}{\lambda_n}\varphi_n(x) \tag{44}$$

ko'rinishda yozib olamiz. $K(t,y)$ yadro tayin y da t bo'yicha barcha y lar uchun kvadrati bilan jamlanuvchi bo'ladi. Shuning uchun ham $h(t)=K(t,y)$ deb hisoblaymiz. U holda $h(t)$ funksiya Furye qatorining koeffitsientlari

$$h_n=\int_a^b K(t,y)\varphi_n(t)dt$$

formula bilan aniqlanadi. $K(x,y)$ yadro simmetrik va $\varphi_n(x)$ bu yadroning xos funksiyasi bo'lgani uchun avvalgi formuladan

$$h_n=\int_a^b K(t,y)\varphi_n(t)dt=\int_a^b K(y,t)\varphi_n(t)dt=\frac{1}{\lambda_n}\varphi_n(y)$$

tenglikni hosil qilamiz. (44) Gilbert—Shmidt formulasiga asosan

$$K_2(x,y)=\int_a^b K(x,t)K(t,y)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^2} \tag{45}$$

formulaga ega bo'lamiz. Gilbert—Shmidt teoremasiga binoan (45) qator deyarli barcha y lar uchun x bo'yicha o'rtacha yaqinlashadi.

Qator simmetrik bo'lgani uchun deyarli barcha tayin x larda y bo'yicha ham o'rtacha yaqinlashadi. Bundan tashqari, (42) formulaga asosan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^4}$$

qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun (45) qator asosiy kvadratda o'rtacha yaqinlashuvchi bo'ladi.

Agar (44) formulada $h(t)=K_2(t,y)$ desak, xuddi shu yo'l bilan

$$K_3(x,y)=\int_a^b K(x,t)K_2(t,y)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^3}$$

bichiziqli qatorni hosil qilamiz. Induksiya usuli bilan

$$K_m(x,y)=\int_a^b K(x,t)K_{m-1}(t,y)dt$$

tenglikda $h(t)=K_{n-1}(t,y)$ deb hisoblasak, umumiy

$$K_m(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n^m} \qquad (46)$$

formulani hosil qilamiz. (46) qator asosiy kvadratda o'rtacha yaqinlashadi, shu bilan birga bu qatorning o'zgaruvchilaridan bittasining deyarli barcha tayin qiymatlarida ikkinchi o'zgaruvchi bo'yicha o'rtacha yaqinlashuvchi bo'lishi Gilbert—Shmidt teoremasidan kelib chiqadi.

(46) formula $K_m(x,y)$ yadroning $\varphi_n(y)$ funksiyalar bo'yicha Furye qatoriga yoyilishini ko'rsatadi. Bu holda ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n^2(x)}{\lambda_n^{2m}}=\int_a^b K_m^2(x,y)dy$$

yopiqlik tenglamasi o'rinli bo'ladi. Bu yerda yozilgan qatorning hadlari musbat va uni hadlab integrallash mumkin. Xos funksiyalarning normalangan ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi formulaga ega bo'lamiz:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^{2m}}=\int_a^b\int_a^b K_m^2(x,y)dxdy.$$

Bu formula simmetrik yadro xos sonlarini ayrim taqribiy hisoblash usullarining asosini tashkil qiladi.

1 banddagi teoremadan (46) formula, iterasiyalangan yadrolarning bichiziqli qatorlarga yoyilmasi ekanligi kelib chiqdi.

Agar $K(x,y)$ simmetrik yadro bo'lib, II bobdagi (65) shartni qanoatlantirsa, (46) qator $m\geq 3$ bo'lganda asosiy kvadratda absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.

Haqiqatan ham, λ_n sonlar absolyut qiymatlarining o'sish tartibi bo'yicha joylashgan bo'lgani uchun

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|\cdot|\varphi_k(y)|}{|\lambda_k|^m}\leq\frac{1}{|\lambda_{n+1}|^{m-2}}\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\frac{\varphi_k(x)}{\lambda_k}\right|\cdot\left|\frac{\varphi_k(y)}{\lambda_k}\right|$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Koshi tengsizligi va (33) tengsizlikka asosan

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|\cdot|\varphi_k(y)|}{|\lambda_k|^m}\le\frac{1}{|\lambda_{n+1}|^{m-2}}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2}\right\}^{1/2}\le$$

$$\le\frac{1}{|\lambda_{n+1}|^{m-2}}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(x)|^2}{\lambda_k^2}\right\}^{1/2}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|\varphi_k(y)|^2}{\lambda_k^2}\right\}^{1/2}\le\frac{N}{|\lambda_{n+1}|^{m-2}}.$$

Bu tengsizlikdan $\lambda_{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ uchun yuqoridagi fikrning to‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi.

Bizga II bobdan ma’lumki, agar yadro, xususiy holda simmetrik yadro asosiy kvadratda uzluksiz bo‘lsa, $\varphi_n(x)$ xos funksiyalar ham asosiy oraliqda uzluksiz bo‘ladi. Demak, (46) qator tekis yaqinlashuvchi bo‘lgani uchun *iteratsiyalangan yadrolar uchinchisidan boshlab asosiy kvadratda uzluksiz bo‘ladi.*

5- §. Simmetrik integral tenglamalarni yechish

Simmetrik integral tenglama Fredgolm umumiy tenglamasining xususiy holi bo‘lgani uchun bu tenglamani yechish uchun II bobda bayon qilingan umumiy usullardan foydalanish mumkin. Biz bu yerda masalani boshqacharoq qo‘yamiz: simmetrik integral tenglamaning xos sonlari va xos funksiyalari ma’lum bo‘lganda uning yechimi topilsin.

Simmetrik

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)dy=f(x) \tag{47}$$

integral tenglama berilgan bo‘lib, uning ozod hadi $[a,b]$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi bo‘lsin. Odatdagidek, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n,...,$ va $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x),...$ orqali $K(x,y)$ yadroning xos sonlari va xos funksiyalari sistemasini belgilab olamiz. Tenglamaning yechimini ham, tabiiy $L_2[a,b]$ sinfda izlaymiz.

Avval λ xos son bo‘lmagan holni qaraymiz. U holda (47) tenglama kvadrati bilan jamlanuvchi $\varphi(x)$ yechimga ega bo‘ladi, $\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy$ integral yadro orqali ifodalanuvchi funksiyadan iborat. Bu funksiya uchun Gilbert—Shmidt teoremasi o‘rinlidir; agar $\varphi(x)$ funksiyaga

$$\varphi(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}c_n\varphi_n(x),\quad c_n=\int_a^b\varphi(x)\varphi_n(x)dx$$

Furye qatori mos bo'lsa, Gilbert—Shmidt teoremasiga asosan

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n(x). \tag{48}$$

Bu integralning qiymatini (47) tenglamaga qo'yamiz:

$$\varphi(x) - \lambda\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{\lambda_n}\varphi_n(x) = f(x). \tag{49}$$

Agar c_n koeffitsientlarni hisoblashimiz mumkin bo'lsa, (49) tenglama, tabiiy izlanayotgan yechimni aniqlaydi. (49) tenglamani $\varphi_m(x)$ ga ko'paytirib, $\varphi_n(x)$ funksiyalarning ortonormalligidan foydalansak, ushbu

$$c_m\left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_m}\right) = a_m, \qquad a_m = \int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx \tag{50}$$

tenglikka ega bo'lamiz. λ — xos son bo'lmagani uchun $\frac{\lambda}{\lambda_m} - 1 \neq 0$ bo'ladi va

$$c_m = \frac{\lambda_m a_m}{\lambda_m - \lambda}.$$

Buni (49) tenglamaga qo'yib, (47) tenglamaning yechimini quyidagi ko'rinishda hosil qilamiz:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x)$$

yoki a_n o'rniga uning ifodasini qo'ysak,

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n - \lambda} f(y)dy. \tag{51}$$

Endi (51) formulada yig'indi va integrallash tartibini o'zgartirish mumkinligini ko'rsatamiz. Quyidagi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n - \lambda} \tag{52}$$

qatorni tekshiramiz. $\varphi_n(x)\varphi_n(y)$, $n = 1, 2, ...$ funksiyalar asosiy kvadratda ortonormallangan. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{|\lambda_n-\lambda|^2} \tag{53}$$

qator esa yaqinlashuvchi bo'ladi. Haqiqatan ham $\lambda_n \to \infty$ bo'lgani uchun yetarli katta n da $|\lambda_n|>2|\lambda|$ bo'ladi. Bundan, $|\lambda|<\frac{|\lambda_n|}{2}$, $|\lambda_n-\lambda|>\frac{|\lambda_n|}{2}$ va $\frac{1}{|\lambda_n-\lambda|}<\frac{2}{|\lambda_n|}$. Endi (53) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi 3- § da isbotlangan $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_n^2}$ qatorning yaqinlashuvchi ekanidan kelib chiqadi.

Riss—Fisher teoremasidan λ ning ixtiyoriy xos son bo'lmagan qiymati uchun (52) qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. 4- § dagi mulohazalarni qaytarib, (52) qatorni avval y ning ixtiyoriy kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyasiga ko'paytirib, uni hadlab integrallash mumkinligini topamiz. Bu esa (51) formuladagi yig'indi bilan integral o'rnini almashtirish mumkinligini bildiradi, ya'ni

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b f(y)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n-\lambda}dy.$$

Bu formulani II bobdagi (15) formula bilan taqqoslab, (52) qatorning yig'indisi $K(x,y)$ simmetrik yadroning rezolventasi ekanligiga ishonch hosil qilamiz, ya'ni

$$R(x,y:\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n-\lambda}.$$

Bu formuladan simmetrik yadroning rezolventasi faqat oddiy qutblarga ega ekanligi kelib chiqadi.

Endi λ xos son bo'lgan holni tekshiramiz. $\lambda=\lambda_p=\lambda_{p+1}=\ldots=\lambda_q$ bo'lsin. Shunga qaramasdan (47) tenglama echiladigan deb hisoblasak, biz yana (50) munosabatga kelamiz. Agar m son $p, p+1, \ldots, q$ sonlarning birortasi bilan ustma-ust tushmasa, $1-\frac{\lambda}{\lambda_m}\neq 0$ bo'ladi va avvalgidek $c_m=\frac{\lambda_m a_m}{\lambda_m-\lambda}$. Agar m son p, $p+1, \ldots, q$ sonlarning birortasiga teng bo'lsa, (50) munosabatga asosan $a_m=0$ bo'ladi, yoki

$$\int_a^b f(x)\varphi_m(x)dx = 0, \ m = p, \ p+1, ..., q. \tag{54}$$

Shunday qilib, agar λ xos son bo'lsa, integral tenglama yechimga ega bo'lishi uchun uning ozod hadi berilgan xos songa mos yadroning xos funksiyalariga ortogonal bo'lishi zarur.

Agar (54) shartlar bajarilsa, $m = p, \ p+1, ..., q$ qiymatlarda (50) tenglama ayniyatga aylanadi. Bu holda, (47) tenglama cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi va ular ushbu

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{a_n}{\lambda_n - \lambda}\varphi_n(x) + \sum_{n=p}^{q} c_n\varphi_n(x) \tag{55}$$

formula bilan aniqlanadi. Bu formulaning birinchi yig'indisidagi shtrix $n = p, \ p+1, ..., q$ nomerli hadlarni tushirib qoldirish kerakligini bildiradi, bu qiymatlarda a_n surat va $\lambda_n - \lambda$ maxraj nolga aylanadi; ikkinchi yig'indidagi c_n koeffitsientlar ixtiyoriy o'zgarmaslardir.

Shunday qilib, biz quyidagi natijaga keldik: *agar λ ning qiymati xos son bo'lib, bu xos songa mos*

$$\varphi_p(x), \varphi_{p+1}(x), ..., \varphi_q(x)$$

xos funksiyalar bo'lsa, (47) tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun uning ozod hadi yadroning mos xos funksiyalariga ortogonal bo'lishi zarur va yetarlidir.

Bu natija II bobda isbotlangan Fredgolmning uchinchi teoremasiga to'la mos keladi, chunki bu holda bir jinsli qo'shma integral tenglamalar ustma-ust tushadi.

Misol. Ushbu

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy = \cos\pi x$$

tenglama yechilsin, bu yerda

$$K(x,y) = \begin{cases} (1+x)y, & 0 \le x \le y, \\ (1+y)x, & y \le x \le 1. \end{cases}$$

Bu tenglamaning xos sonlari

$$\lambda_0 = 1, \ \lambda_n = -n^2\pi^2, \ n = 1, 2, ...$$

sonlardan, bularga mos xos funksiyalari

$$\varphi_0(x) = e^x, \ \varphi_n(x) = \sin\pi x + n\pi\cos\pi x, \ n = 1, 2, ...$$

funksiyalardan iborat.

Agar $\lambda \neq 1$ va $\lambda \neq -n^2\pi^2$ bo'lsa, berilgan tenglamaning yechimi

$$\varphi(x) = \cos\pi x - \lambda\left[\frac{a_0 e^x}{\lambda - 1} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{\lambda + n^2\pi^2}(\sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x)\right]$$

formula bilan aniqlanadi. a_0 va a_n koeffitsientlarni (50) formulaga asosan hisoblaymiz:

$$a_0 = \int_0^1 e^x \cos\pi x dx = -\frac{1+e}{1+\pi^2},$$

$$a_n = \int_0^1 \cos\pi x(\sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq 1, \\ \dfrac{\pi}{2}, & n = 1. \end{cases}$$

Demak, yechim

$$\varphi(x) = \cos\pi x + \left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda + \pi^2)}(\sin\pi x + \pi\cos\pi x)\right]$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

$\lambda = 1$ va $\lambda = -\pi^2 (n = 1)$ bo'lganda tenglamaning ozod hadi, ya'ni $\cos\pi x$ funksiya mos $\varphi_0(x) = e^x$, $\varphi_1(x) = \sin\pi x + \pi\cos\pi x$ xos funksiyalarga ortogonal bo'lmagani uchun tenglama yechimga ega bo'lmaydi.

Agar $\lambda = -n^2\pi^2$ bo'lsa, bunda $n = 2,3,\ldots$, berilgan integral tenglama cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi va yechimlar (55) ga asosan quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\varphi(x) = \cos\pi x + \lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\frac{e^x}{\lambda - 1} - \frac{\pi}{2(\lambda + \pi^2)}(\sin\pi x + \pi\cos\pi x)\right] +$$

$$+C(\sin n\pi x + n\pi\cos n\pi x),$$

bu yerda C — ixtiyoriy o'zgarmas.

6- §. Simmetrik yadrolar klassifikatsiyasi (tasnifi). Merser teoremasi

$K(x,y)$ — simmetrik yadro va $h(x), q(x) - [a,b]$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar bo'lsin. Bichiziqli

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_iy_k \quad (a_{ik}=a_{ki})$$

(a_{ik} — haqiqiy sonlar) formulaga o‘xshash

$$J(h,q)=\int_a^b\int_a^b K(x,y)h(x)q(y)dxdy \tag{56}$$

bichiziqli funksionalni tekshiramiz. Gilbert—Shmidt teoremasini qo‘llab,

$$\int_a^b K(x,y)h(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k}{\lambda_k}\varphi_k(y) \tag{57}$$

tenglikni hosil qilamiz, bu yerda

$$h_k=\int_a^b h(x)\varphi_k(x)dx.$$

$h(x)$ funksiyaning $K(x,y)$ yadro $\{\varphi_k(x)\}$ xos funksiyalari sistemasi bo‘yicha Furye koeffitsientlari.

(57) tenglikning har ikki tomonini $q(y)$ ga ko‘paytirib, y bo‘yicha a dan b gacha integrallaymiz va $q(x)$ funksiya Furye qatorining koeffitsientlarini q_k orqali belgilab olsak, ushbu

$$\int_a^b\int_a^b K(x,y)h(x)q(y)dxdy=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_kq_k}{\lambda_k} \tag{58}$$

tenglikni hosil qilamiz. $h(x)=q(x)$ bo‘lganda kvadratik formaga o‘xshash

$$J(h,h)=\int_a^b\int_a^b K(x,y)h(x)h(y)dxdy=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{h_k^2}{\lambda_k} \tag{59}$$

formulaga ega bo‘lamiz. Bu formulaga asosan simmetrik yadrolar tasniflanadi.

Simmetrik yadro barcha xos sonlarining musbat bo‘lishi uchun barcha $h(x)$ kvadrati bilan jamlanuvchi funksiyalar uchun $J(h,h)\geq 0$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Haqiqatan ham, agar barcha $\lambda_k>0$ bo‘lsa, (59) tenglikdan $J(h,h)\geq 0$ bo‘lishi kelib chiqadi. Endi xos sonlardan bittasi, masalan $\lambda_1<0$ bo‘lsin. $h(x)=\varphi_1(x)$ deb olamiz. Xos funksiyalar ortonormal bo‘lgani uchun $h_1=1$, boshqalari esa, $h_k=0$ $(k>1)$ bo‘ladi. Bu holda (59) ifoda $\frac{1}{\lambda_1}$ ga teng bo‘lib, $J(h,h)<0$ bo‘ladi.

Agar $J(h,h)\geq 0$ $(h\in L_2)$ bo‘lsa, $K(x,y)$ yadro musbat, $J(h,h)>0$ bo‘lsa, yadro aniq musbat deyiladi.

Xuddi shunga o'xshash yadroning manfiy va aniq manfiyligi ta'riflanadi.

Merser teoremasi. *Agar simmetrik yadro asosiy kvadratda uzluksiz bo'lib, uning xos sonlari musbat bo'lsa, bu yadroning bichiziqli qatori absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi.*

Avvalo (36) bichiziqli qatorning absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatamiz. Shu maqsadda $K(x, x) \geq 0$ tengsizlikni, ya'ni teoremadagi shartlarni qanoatlantiruvchi yadro $x = y$ diagonalda manfiy emasligini isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni diagonalning biror (x_0, x_0) nuqtasida $K(x, y)$ yadro manfiy bo'lsin. U holda yadro uzluksiz bo'lgani uchun bu nuqtaning biror $\delta_\varepsilon : x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon, \; x_0 - \varepsilon \leq y \leq x_0 + \varepsilon$ atrofida ham manfiy bo'ladi. Uzluksiz $h(x)$ funksiyani quyidagicha aniqlaymiz:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & x_0 - \varepsilon \leq x \leq x_0 + \varepsilon, \\ 0, & a \leq x < x_0 - \varepsilon, \; x_0 + \varepsilon < x \leq b. \end{cases}$$

U holda

$$J(h, h) = \iint_{\delta_\varepsilon} K(x, y) dx dy < 0.$$

Bu tengsizlik $K(x, y)$ ning musbat yadro ekanligiga qarama-qarshidir. Ushbu

$$K^*(x, y) = K(x, y) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k} \tag{60}$$

ayirmani tekshiramiz. $K(x, y)$ yadro simmetrik va uzluksiz bo'lgani uchun bu ayirma ham simmetrik va ixtiyoriy m uchun uzluksiz bo'ladi.

(60) ifodani yadro deb qarasak, u uzluksiz, simmetrik va barcha xos sonlari musbat bo'ladi. Shuning uchun ham, isbot qilganimizga asosan

$$K^*(x, x) \geq 0 \text{ yoki } \sum_{k=1}^{m} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \leq K(x, x)$$

bo'ladi. Bu tengsizlik har qanday m da o'rinli bo'lgani uchun, hamma hadlari musbat bo'lgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k} \tag{61}$$

qator ixtiyoriy x, $a \leq x \leq b$ uchun yaqinlashuvchi bo'ladi. Ixtiyoriy musbat n, p sonlar jufti uchun Bunyakovskiy—Shvars tengsizligiga asosan

$$\left[\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}\right|\right]^2 \le \sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{\varphi_k^2(y)}{\lambda_k} \qquad (62)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Bunga asosan tayin y uchun

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}$$

qator x ga nisbatan absolyut va tekis yaqinlashadi, tayin x da esa, y ga nisbatan absolyut va tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Bu qatorning yig'indisini $S(x,y)$ orqali belgilab olamiz. $S(x,y)$ tayin x uchun y ga nisbatan uzluksiz va aksincha bo'ladi.

Endi $S(x,y)=K(x,y)$ bo'lishini ko'rsatamiz. Yuqorida yozilgan qator yaqinlashuvchi bo'lgani uchun ixtiyoriy musbat ε uchun shunday musbat n_0 son topiladiki, $n > n_0$ bo'lganda

$$\int_a^b\int_a^b\left[\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}\right]^2 dxdx < \varepsilon \qquad (63)$$

bo'ladi. (63) ga asosan

$$\int_a^b\int_a^b\left[S(x,y)-\Phi_n(x,y)\right]^2 dxdy < \varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda

$$\Phi_n(x,y)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\varphi_n(x)\varphi_n(y)}{\lambda_n}.$$

Ikkinchi tomondan (41) formulaga asosan, yetarli katta n_0^* dan katta bo'lgan barcha n lar uchun

$$\int_a^b\int_a^b\left[K(x,y)-\Phi_n(x,y)\right]^2 dxdy < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi.

Agar

$$n > \max\left(n_0,\, n_0^*\right)$$

bo'lsa, u holda

$$\int_a^b\int_a^b\left[S(x,y)-K(x,y)\right]^2 dxdy = \int_a^b\int_a^b\left[S(x,y)-\Phi_n(x,y)-\right.$$

$$-\left(K(x,y)-\Phi_n(x,y)\right)\Big]^2 dxdy \le 2\int_a^b\int_a^b\left[S(x,y)-\Phi_n(x,y)\right]^2 dxdy +$$

$$+2\int_a^b\int_a^b\left[K(x,y)-\Phi_n(x,y)\right]^2 dxdy < 4\varepsilon.$$

Shunday qilib, deyarli barcha $\{a \le x,\ y \le b\}$ kvadratda $S(x,y)=K(x,y)$ bo'ladi, ya'ni

$$K(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}. \tag{64}$$

Shu bilan birga, bu qatorning absolyut va x, y o'zgaruvchilarning har biriga nisbatan tekis yaqinlashuvchi bo'lishi isbotlandi.

Endi (64) qatorning har ikki o'zgaruvchilarga nisbatan bir vaqtda tekis yaqinlashuvchi bo'lishini ko'rsatish qoldi. Buning uchun (62) tengsizlikka asosan (61) qatorning tekis yaqinlashishini ko'rsatish yetarlidir. Hozirgina isbotlanganiga muvofiq

$$K(x,x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\varphi_k^2(x)}{\lambda_k}$$

va $K(x,x)$ funksiya uzluksiz.

Matematik analizdan ma'lum bo'lgan Dini teoremasiga asosan, agar qatorning hadlari musbat funksiyalardan iborat bo'lib, qatorning yig'indisi uzluksiz funksiya bo'lsa, u holda bu qator tekis yaqinlashuvchi bo'ladi. Shu bilan Merser teoremasi to'la isbotlandi.

Izoh. Agar simmetrik yadroning chekli sonda manfiy xos sonlari bo'lsa, (64) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishini o'zgartirmaydi, chunki manfiy xos sonlarga mos $\frac{\varphi_k(x)\varphi_k(y)}{\lambda_k}$ hadlarni chiqarib tashlangandan so'ng, yadro musbat bo'lib qoladi.

Shunday qilib, simmetrik yadro chekli sonda manfiy xos sonlarga ega bo'lsa ham, Merser teoremasi o'rinli bo'ladi.

7- §. Xos sonlar va xos funksiyalarning ekstremal xossalari

Agar $h(y)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lsa, Gilbert—Shmidt teoremasiga asosan

$$Kh = \int_a^b K(x,y)h(y)dy = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x).$$

Bu tenglikning har ikki tomonini $h(x)$ ga skalyar ko'paytiramiz. Bu yerdagi qator o'rtacha yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, skalyar ko'paytmani hadlab bajarish mumkin:

$$(Kh,\, h) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k,\, h\right).$$

O'zgarmas $\frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}$ ko'paytuvchini skalyar ko'paytma belgisidan tashqariga chiqarib,

$$(Kh,\, h) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left[(h,\, \varphi_k)\right]^2}{\lambda_k} \tag{65}$$

tenglikni hosil qilamiz. Odatdagidek, λ_k sonlar absolyut qiymatlarining o'sishi bo'yicha joylashgan bo'lsin, shu sababli, eng kichik absolyut qiymatga λ_1 son ega bo'ladi. Bu holda (65) formuladan

$$|(Kh,h)| \leq \frac{1}{|\lambda_1|}\sum_{k=1}^{\infty}\left[(h,\varphi_k)\right]^2$$

tengsizlik kelib chiqadi. (h,φ_k) sonlar $h(x)$ funksiyaning $\{\varphi_k(x)\}$ sistema bo'yicha Furye koeffitsientlari bo'lgani uchun II bobda keltirilgan Bessel tengsizligiga asosan

$$|(Kh,\, h)| \leq \frac{\|h\|^2}{|\lambda_1|}.$$

Normalangan $h(x)$ funksiyalar uchun bu tengsizlik

$$|(Kh,\, h)| \leq \frac{1}{|\lambda_1|}, \quad \|h\| = 1 \tag{66}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $h(x) = \varphi_1(x)$ bo'lganda (66) tengsizlikda tenglikka erishiladi. Haqiqatan ham, $\varphi_1(x)$ funksiya $K(x,y)$ yadroning λ_1 xos soniga mos kelgan normalangan xos funksiyasi bo'lgani uchun

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 K\varphi_1$$

bo'ladi. Oxirgi ifodani $\varphi_1(x)$ ga skalyar ko'paytirib, quyidagi tenglikka ega bo'lamiz:

$$(K\varphi_1, \varphi_1) = \frac{\|\varphi_1\|^2}{\lambda_1} = \frac{1}{\lambda_1}.$$

Shunday qilib, quyidagi xulosaga keldik. *Normalangan funksiyalar to'plamida* $|(Kh, h)|$ *miqdor* $\frac{1}{|\lambda_1|}$ *ga teng bo'lgan maksimumga ega bo'ladi. Bu maksimumga* $h(x) = \varphi_1(x)$ *bo'lganda erishiladi.*

Endi birinchi m-1 xos funksiyalarga ortogonal bo'lgan normalangan h (x) funksiyalar to'plamini tekshiramiz:

$$\|h\| = 1, \ (h,\varphi_1) = (h,\varphi_2) = \ldots = (h,\varphi_{m-1}) = 0.$$

Bu holda

$$Kh = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(h,\varphi_k)}{\lambda_k}\varphi_k(x).$$

Yuqorida bayon qilingan mulohazalarni takrorlab, ushbu xulosaga kelamiz. *Normalangan va* $K(x,y)$ *yadroning birinchi* $m-1$ *ta xos funksiyalariga ortogonal bo'lgan funksiyalar to'plamida* $|(Kh,h)|$ *miqdor,* $\frac{1}{|\lambda_m|}$ *ga teng bo'lgan maksimumga ega bo'ladi. Bu maksimumga* $h(x) = \varphi_m(x)$ *bo'lganda erishiladi.*

Keltirilgan xulosalar simmetrik yadroning xos sonlari va xos funksiyalarini hisoblashda variatsion hisoblash usullarini qo'llashda katta ahamiyatga ega.

8- §. Simmetrik integral tenglamalarga keladigan integral tenglamalar

Simmetrik yadroli Fredgolm integral tenglamalarining ajoyib xossalari berilgan integral tenglamani iloji boricha simmetrik yadroli integral tenglamaga keltirish maqsadga muvofiqligini ko'rsatadi. Ayrim hollarda bunday keltirishni sodda usullar bilan amalga oshirish imkoni bo'ladi.

1. Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamalari. Ushbu

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\,p(y)\varphi(y)\,dy = f(x) \qquad (67)$$

integral tenglamani tekshiramiz, bu yerda $K(x,y)$—haqiqiy simmetrik yadro va $p(x) > 0$ bo'lgan $[a, b]$ oraliqda aniqlangan funksiya. (67) tenglamaning har ikki tomonini $\sqrt{p(x)}$ ga ko'paytirib, yangi

$\psi(x)=\sqrt{p(x)}\varphi(x)$ noma'lum funksiya kiritsak, (67) integral tenglama

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b L(x,y)\ \psi(y)dy=\sqrt{p(x)}\,f(x)$$

ko'rinishga keladi, bundagi

$$L(x,y)=K(x,y)\sqrt{p(x)p(y)}$$

yadro simmetrik yadrodir.

$L(x,y)$ yadroning xos sonlari λ_k va xos funksiyalari $\psi_k(x)$ bo'lsin. $\psi_k(x)$ funksiyalarni ortonormal deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\int_a^b \psi_i(x)\psi_j(x)dx=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

$\psi_k(x)=\varphi_k(x)\sqrt{p(x)}$ tenglikni e'tiborga olsak, $K(x,y)p(y)$ yadroning xos funksiyalari $p(x)$ vazn bilan ortonormal bo'ladi:

$$\int_a^b p(x)\ \varphi_i(x)\varphi_j(x)dx=\begin{cases}1, & i=j,\\ 0, & i\neq j.\end{cases}$$

Mexanikaning bir qator masalalari, masalan, aylanuvchi valning kritik tezligi, to'sin (balka)ning ko'ndalang tebranishi va boshqalar (67) ko'rinishdagi integral tenglamaga keladi.

Umumiyroq holda, ya'ni yadrosi simmetrik bo'lmagan

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\ \varphi(y)dy=f(x) \tag{68}$$

integral tenglama berilgan bo'lsin. Uni $K(x,z)$ ga ko'paytirib, x bo'yicha a dan b gacha integrallaymiz, natijada ushbu

$$\int_a^b K(x,z)\varphi(x)dx-\lambda\int_a^b K(x,z)\ dx\int_a^b K(x,y)\ \varphi(y)dy=$$
$$=\int_a^b K(x,z)f(x)dx$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu tenglamaning birinchi qo'shiluvchisida va o'ng tomonida x ni y ga, z ni x ga, ikkinchi qo'shiluvchida esa, x ni z ga, z ni x ga almashtirib, uni

$$\int_a^b \left[K(y,x)-\lambda K_L(x,y)\right]\varphi(y)dy=\int_a^b K(y,x)f(y)dy \tag{69}$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda

$$K_L(x,y)=\int_a^b K(z,x)K(z,y)dz.$$

$K_L(x,y)$ ni $K(x,y)$ yadroning *chap iteratsiyalangan yadrosi* deyiladi. Ravshanki bu yadro simmetrik. (69) tenglamani $-\lambda$ ga ko‘paytiramiz, so‘ngra (68) tenglama bilan qo‘shib, yangi Fredgolm integral tenglamasiga ega bo‘lamiz:

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b\left[K(x,y)+K(y,x)-\lambda K_L(x,y)\right]\varphi(y)dy=$$

$$=f(x)-\lambda\int_a^b K(y,x)f(y)dy.$$

Bu tenglamaning yadrosi simmetrik bo‘lib, yana λ parametrga ham bog‘liqdir. Xuddi shunga o‘xshash (68) tenglamaga qo‘shma bo‘lgan

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b K(y,x)\ \psi(y)dy=g(x)$$

tenglamaga asoslanib, simmetrik yadroli boshqa

$$\psi(x)-\lambda\int_a^b\left[K(x,y)+K(y,x)-\lambda K_R(x,y)\right]\psi(y)dy=$$

$$=g(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)g(y)dy$$

integral tenglamani hosil qilamiz, bundagi

$$K_R(x,y)=\int_a^b K(x,z)K(y,z)dz$$

yadro $K(x,y)$ *yadroning o‘ng iteratsiyalangan yadrosi* deyiladi.

K_L va K_R simmetrik yadrolarni kiritish, simmetrik yadroli integral tenglamalar nazariyasining ko‘p natijalarini umumiy ko‘rinishdagi tenglamalarga o‘tkazish imkonini beradi. Shuni yodda tutish kerakki, har ikki K_L va K_R yadro musbat bo‘ladi, chunki

$$\int_a^b\int_a^b K_L(x,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdy=$$

$$=\int_a^b\int_a^b\int_a^b K(z,x)K(z,y)\varphi(x)\varphi(y)dxdydz=$$

$$= \int_a^b dz \int_a^b \int_a^b K(z,x)K(z,y)\varphi(x)\varphi(y)\,dxdy =$$

$$= \int_a^b \left[\int_a^b K(z,x)\varphi(x)\,dx \right]^2 dz \geq 0,$$

xuddi shunga o'xshash ifoda $K_R(x,y)$ yadro uchun ham kelib chiqadi. K_L va K_R yadrolarning bir xil karrali bir xil sondagi musbat xos sonlarga ega bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Bundan tashqari, agar $K_L(x,y)$ yadroning λ^2 xos soniga mos xos funksiyasini $\gamma(x)$ orqali belgilab olsak,

$$\mu(x) = \lambda \int_a^b K(x,y)\gamma(y)\,dy \qquad (70)$$

funksiya $K_R(x,y)$ yadroning o'sha λ^2 xos soniga mos xos funksiyasi bo'ladi. Aksincha, agar $\mu(x)$ funksiya $K_R(x,y)$ yadroning λ^2 xos songa mos xos funksiyasi bo'lsa,

$$\gamma(x) = \lambda \int_a^b K(y,x)\mu(y)\,dy \qquad (71)$$

funksiya $K_L(x,y)$ yadroning λ^2 xos songa mos xos funksiyasi bo'ladi. Haqiqatan ham, xos son va xos funksiyalarning ta'rifiga asosan:

$$\gamma(x) = \lambda^2 \int_a^b K_L(x,y)\gamma(y)\,dy = \lambda^2 \int_a^b K(z,x)\,dz \int_a^b K(z,y)\,\gamma(y)\,dy.$$

Agar (70) tenglikni e'tiborga olsak, avvalgi tenglikdan

$$\gamma(x) = \lambda \int_a^b K(z,x)\mu(z)\,dz$$

tenglik kelib chiqadi. Bu ifodani (70) tenglikka qo'yamiz, u holda:

$$\mu(x) = \lambda^2 \int_a^b K(x,y)dy \int_a^b K(z,y)\mu(z)\,dz =$$

$$= \lambda^2 \int_a^b \mu(z)\,dz \int_a^b K(x,y)K(z,y)\,dy =$$

$$= \lambda \int_a^b K_R(x,z)\mu(z)\,dz.$$

Demak, $\mu(x)$ funksiya $K_R(x,z)$ yadroning λ^2 xos songa mos xos funksiyasi ekan. Teskarisi ham xuddi shunday isbotlanadi.

Endi, $K_L(x,y)$ va $K_R(x,y)$ yadrolarning spektri

$$\lambda_1^2, \lambda_2^2, \lambda_3^2, \ldots,$$

sonlardan tashkil topgan bo'lsin, shu bilan birga

$$0<\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3 \ldots$$

$K_R(x,y)$ yadroning bu xos sonlarga mos ortonormal xos funksiyalari

$$\mu_1(x), \mu_2(x), \mu_3(x), \ldots,$$

$K_L(x,y)$ yadroning (71) formula yordamida hisoblangan xos funksiyalari

$$\gamma_1(x), \gamma_2(x), \gamma_3(x), \ldots$$

bo'lsin. Bu oxirgi funksiyalar ham ortonormal sistemani tashkil qiladi. Haqiqatan ham,

$$\int_a^b \gamma_i(x)\gamma_j(x)dx = \lambda_i\lambda_j \int_a^b\int_a^b\int_a^b K(y,x)K(z,x)\mu_i(y)\mu_j(z)dxdydz =$$

$$= \lambda_i\lambda_j \int_a^b\int_a^b K_R(y,z)\mu_i(y)\mu_j(z)dydz\,.$$

$\mu_j(y)$ funksiya $K_R(y,z)$ yadroning λ_j^2 xos songa mos xos funksiyasi bo'lgani uchun

$$\mu_j(y) = \lambda_j^2 \int_a^b K_R(y,z)\mu_j(z)dz$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bunga asosan, oldingi ifoda quyidagicha yoziladi:

$$\int_a^b \gamma_i(x)\gamma_j(x)dx = \frac{\lambda_i}{\lambda_j}\int_a^b \mu_i(y)\mu_j(y)dy = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j. \end{cases}$$

K_L va K_R yadrolar musbat bo'lgani uchun, ularni asosiy kvadratda uzluksiz deb hisoblasak, Merser teoremasiga asosan absolut va tekis yaqinlashuvchi

$$K_L(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\gamma_i(x)\gamma_i(y)}{\lambda_i^2}, \quad K_R(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu_i(x)\mu_i(y)}{\lambda_i^2}$$

bichiziqli qatorlar bilan ifodalanadi.

2. Fredgolmning birinchi tur integral tenglamalari. Fredgolmning ikkinchi tur integral tenglamalari nazariyasidan farqli ravishda, birinchi tur

$$\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy = f(x) \tag{72}$$

integral tenglamalarini o'rganishda muhim qiyinchiliklar kelib chiqadi. Agar *K (x, y)* yadro simmetrik bo'lsa, uning λ_k xos sonlari va $\varphi_k(x)$ xos funksiyalarini aniqlay olsak, ya'ni agar (72) tenglamaga mos ikkinchi tur

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)dy = f(x)$$

tenglamani to'la o'zlashtirgan bo'lsak, bu holda Gilbert—Shmidt teoremasi (72) tenglamani L_2 fazoda sodda va mukammal tekshirish imkonini beradi. Gilbert—Shmidt teoremasiga asosan (72) tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun *f (x)* funksiya *K (x, y)* yadroning $\{\varphi_k(x)\}$ xos funksiyalari bo'yicha

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x), \quad a_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx \tag{73}$$

Furye qatoriga yoyilishi zarur. Bu shart bajarilganda (72) tenglamaning $\varphi(x)$ yechimini

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} C_k\varphi_k(x), \quad C_k = \int_a^b \varphi(x)\varphi_k(x)dx \tag{74}$$

ko'rinishda izlaymiz. (74) ifodani (72) ga qo'yib, $\varphi_k(x)$ funksiyalar *K (x, y)* yadroning xos funksiyalari ekanligini, ya'ni

$$\varphi_k(x) = \lambda_k\int_a^b K(x,y)\varphi_k(y)dy$$

tenglikni e'tiborga olsak,

$$C_k = a_k\lambda_k \tag{75}$$

tenglik kelib chiqadi. Demak, (74) yoyilmaning koeffitsientlari (75) formula bilan aniqlanadi. Riss—Fisher teoremasiga asosan (74) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi ushbu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\lambda_k^2 \tag{76}$$

sonli qatorning yaqinlashishiga bog'liq.

Agar simmetrik *K (x, y)* yadro xos funksiyalarining $\{\varphi_k(x)\}$ sistemasi yopiq bo'lsa, *K (x, y) yopiq yadro* deyiladi. *f (x)* funksiya L_2 *[a, b]* sinfga tegishli bo'lsin. Endi quyidagi teoremani isbotlaymiz.

Teorema. *(76) qator yaqinlashuvchi bo'lgani holda va faqat shu holdagina yopiq yadroli birinchi turdagi (72) tenglama yechimga ega bo'ladi va bu yechim* L_2 *[a, b] sinfda yagona bo'ladi.*

Isbot. (72) tenglamaning kvadrati bilan jamlanuvchi $\varphi(x)$ yechim mavjud bo'lsin. U holda

$$a_k = \int_a^b f(x)\varphi_k(x)dx = \int_a^b\left\{\int_a^b K(x,y)\varphi(y)dy\right\}\varphi_k(x)dx =$$

$$= \int_a^b\left\{\int_a^b K(x,y)\varphi_k(x)dx\right\}\varphi(y)dy = \frac{1}{\lambda_k}\int_a^b \varphi_k(y)\varphi(y)dy.$$

yoki

$$\int_a^b \varphi(y)\varphi_k(y)dy = a_k\lambda_k. \tag{77}$$

Bu tenglikdan $a_k\lambda_k$ sonlar $\varphi(x)$ funksiyaning Furye koeffitsientlari ekanligi kelib chiqadi. Ma'lumki, bu koeffitsientlar kvadratlaridan tashkil topgan (76) qatorning yaqinlashuvchi bo'lishi zarur. Aksincha, (76) qator yaqinlashuvchi bo'lsin. Bu holda Riss—Fisher teoremasiga asosan, yagona $\varphi(x)\in L_2[a,b]$ funksiya mavjud bo'lib, bu funksiya uchun $a_k\lambda_k$ sonlar $\{\varphi_k(x)\}$ funksiyalar sistemasi bo'yicha Furye koeffitsientlaridan iborat bo'ladi, ya'ni (77) tenglik barcha *k (k = 1,2,3,...)* lar uchun bajariladi. Bu $\varphi(x)$ funksiya berilgan (72) tenglamani qanoatlantiradi. Haqiqatan ham, $\varphi(x)$ funksiyaning tuzilishiga asosan *f (x)* va $\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)dy$ funksiyalar *K (x, y)* yadro xos funksiyalarining to'la $\{\varphi_k(x,y)\}$ sistemasiga nisbatan bir xil Furye koeffitsientlariga ega. Demak, bu funksiyalar L_2 fazoda aynan bir-biriga teng. Shu bilan teorema isbot bo'ldi. Agar *K (x, y)* yopiq yadro bo'lmasa, (72) tenglamaning yechimi yagona bo'lmaydi. Φ_1 *(x)*, ..., Φ_k *(x)* funksiyalar deyarli hamma joyda noldan farqli va barcha $\{\varphi_k(x)\}$ funksiyalarga ortogonal bo'lib, $\varphi(x)$ funksiya (72) tenglamaning yechimi bo'lsin. U holda

$$\varphi(x)+\sum_{i=1}^{k} C_i \Phi_i(x)$$

funksiya ham (72) tenglamning yechimi bo'ladi va aksincha, bu yerda C_i — ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Misol uchun (72) tenglamaning yadrosi ushbu

$$K(x,y)=\begin{cases}(1-x)y, & 0\le y\le x\le 1,\\ x(1-y), & 0\le x\le y\le 1\end{cases}$$

funksiyadan iborat bo'lsin, ya'ni tenglama

$$\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy=f(x)$$

ko'rinishga ega bo'lsin. Bu tenglamaning yadrosi simmetrik va $\lambda_k=(k\pi)^2$ sonlar $\varphi_k(x)=\sqrt{2}\sin k\pi x,\quad k=1,2,...,$ funksiyalar uning xos sonlari va xos funksiyalaridan iborat bo'lishini tekshirib ko'rish qiyin emas. Bu tenglama

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2\lambda_k^2=\pi^4\sum_{k=1}^{\infty}\left(k^2 a_k\right)^2,\quad a_k=\sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin k\pi x dx$$

qator yaqinlashuvchi bo'lgan holda va faqat shu holdagina L_2 sinfda yagona yechimga ega bo'ladi. Bu shart haqiqatan juda ham og'ir shartdir.

9- §. Oddiy differensial tenglama uchun chegaraviy masalani integral tenglamaga keltirish

n- tartibli koeffitsientlari va ozod hadi uzluksiz bo'lgan ushbu

$$Ly\equiv a_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=F(x)\quad (78)$$

chiziqli differensial tenglamaning

$$y(a)=c_0,\ y'(a)=c_1,...,\quad y^{(n-1)}(a)=c_{n-1}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi I bobda Volterraning ikkinchi tur integral tenglamasini yechishga keltirilgan edi. Bu tenglama asosiy *(a, b)* oraliqning har ikki $x=a$ va

$x = b$ chetida qo‘shimcha shartlar berilganda, umuman aytganda, Fredgolm integral tenglamasiga keladi. Bunday qo‘shimcha shartlarning juda ham umumiy sinfini $2n$ ta

$$y(a), y'(a), \ldots, y^{(n-1)}(a);\; y(b), y'(b), \ldots, y^{(n-1)}(b)$$

miqdorning n ta chiziqli kombinatsiyasi avvaldan berilgan qiymatlarini qabul qiladi deb hosil qilish mumkin, ya’ni

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} y^{(j)}(a) - \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} y^{(j)}(b) = c_i, \quad i = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{79}$$

bu yerda a_{ij}, b_{ij}, c_i — berilgan o‘zgarmaslar. Ravshanki, barcha a_{ij} va b_{ij} biror i uchun nolga teng bo‘lmasligi kerak. Umumiylikka ziyon yetkazmay, $c_0 = c_1 = \ldots = c_{n-1} = 0$ deb hisoblab, bir jinsli

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij} y^{(j)}(a) = \sum_{j=0}^{n-1} b_{ij} y^{(j)}(b), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1 \tag{80}$$

chegaraviy shartlarni qarash mumkin. Haqiqatan ham, agar $y(x)$ funksiya (78) tenglamaning (79) chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi bo‘lib, $f_0(x)$ funksiya n marta differensiallanuvchi va (79) shartlarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy funksiya bo‘lsa, $y(x) = f_0(x) + z(x)$ desak, $z(x)$ funksiya (80) chegaraviy shartlarni va o‘ng tomoni boshqa funksiyadan iborat bo‘lgan (78) tenglamani qanoatlantiradi. (78), (80) masala Fredgolm ikkinchi tur integral tenglamasiga ekvivalent bo‘ladi. Bu fikrning to‘g‘riligini ko‘rsatish maqsadida qo‘shma operator tushunchasini kiritamiz. $a_k(x)$, $k = 0, 1, \ldots, n$ koeffitsientlar tekshirilayotgan oraliqda $n - k$ tartibgacha hosilalarga ega bo‘lsin.

Ly operatorga *qo‘shma operator* deb, ushbu

$$Mz = (-1)^n \frac{d^n(a_0 z)}{dx^n} + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}(a_1 z)}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x) z(x)$$

operatorga aytiladi.

Agar $L \equiv M$ bo‘lsa, L operatorni o‘zi-o‘ziga qo‘shma operator deyiladi. Bundan keyin biz eng muhim $n=2$ hol bilan chegaralanamiz. $n>2$ bo‘lgan hol oddiy differensial tenglamalar darsliklarida bayon qilinadi. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglamani hamma vaqt o‘zi-o‘ziga qo‘shma ko‘rinishga keltirish mumkin. Buning uchun, tabiiy bo‘lgan $a_0(x) \neq 0$ shart bajariladi deb hisoblab, (78) tenglamani $(n = 2)$ $p(x)\, a_0(x)$ funksiyaga ko‘paytiramiz, bunda

$$p(x)=e^{\int\frac{a_1(x)}{a_0(x)}dx}.$$

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglamani kvadraturalarda bir jinsli tenglamaga keltirish mumkinligini e'tiborga olib, $F(x)\equiv 0$ deb hisoblashimiz mumkin Shunday qilib, o'zi-o'ziga qo'shma

$$Ly(x)\equiv\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right]+q(x)y=0 \qquad (81)$$

tenglamaga ega bo'lamiz, bu yerda:

$$q(x)=p(x)\frac{a_2(x)}{a_0(x)}.$$

Quyidagi ayniyat o'rinlidir:

$$z(x)Ly(x)-y(x)Lz(x)=$$

$$=\frac{d}{dx}\left\{p(x)\left[z(x)\frac{dy(x)}{dx}-y(x)\frac{dz(x)}{dx}\right]\right\}. \qquad (82)$$

Agar ushbu

$$A_i[y(x)]=a_{i0}y(x)+a_{i1}y'(x),$$

$$B_i[y(x)]=b_{i0}y(x)+b_{i1}y'(x), \quad i=0,1$$

differensial operatorlarni va qisqacha

$$A_i[y(x_0)]\equiv\{A_i[y(x)]\}_{x=x_0}, \quad B_i[y(x_0)]\equiv\{B_i[y(x)]\}_{x=x_0}$$

belgilashlarni kiritsak, (80) chegaraviy shartlarni sodda

$$A_i[y(a)]=B_i[y(b)], \; i=0,1 \qquad (83)$$

ko'rinishda yozib olish mumkin.

(81) tenglamaning (83) shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi, qisqacha, (81), (83) masala, umumiy holda faqat trivial $y(x)=0$ yechimga ega bo'ladi. Haqiqatan ham, agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funsiyalar (81) tenglama yechimlarining fundamental sistemasini tashkil qilsa, uning umumiy yechimi

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$$

ko'rinishda yoziladi. C_1 va C_2 o'zgarmaslarni (83) chegaraviy shartlarga asosan aniqlash masalasi ushbu

$$C_1\{A_0[y_1(a)]-B_0[y_1(b)]\}+C_2\{A_0[y_2(a)]-B_0[y_2(b)]\}=0,$$

$$C_1\{A_1[y_1(a)]-B_1[y_1(b)]\}+C_2\{A_1[y_2(a)]-B_1[y_2(b)]\}=0.$$

bir jinsli algebraik sistemaga keladi. Umumiy holda

$$\Delta=\begin{vmatrix} A_0[y_1(a)]-B_0[y_1(b)] & A_0[y_2(a)]-B_0[y_2(b)] \\ A_1[y_1(a)]-B_1[y_1(b)] & A_1[y_2(a)]-B_1[y_2(b)] \end{vmatrix}\neq 0 \qquad (84)$$

bo'lgani uchun bu sistema, umuman aytganda, faqat $C_1=C_2=0$ yechimga ega bo'ladi.

Bundan keyingi mulohazalarimizda $\Delta\neq 0$ deb hisoblaymiz. (81) tenglama o'rniga λ parametrni o'z ichiga olgan ushbu

$$Ly(x)+\lambda r(x)y(x)=\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{d}{dx}\right]+\left[q(x)+\lambda r(x)\right]y=0 \quad (85)$$

tenglamani tekshiramiz.

(85), (83) masalani odatda *Shturm—Liuvill masalasi* deyiladi.

λ ning qanday qiymatlari uchun (85), (83) Shturm—Liuvill masalasi trivial bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi? — degan savol tug'iladi.

Bu savolni o'rganish matematik fizika, mexanika va boshqa sohalarda muhim ahamiyatga ega bo'lib, uni Fredgolmning ikkinchi turdagi integral tenglamasini tekshirishga keltirish mumkin. Shu maqsadda (82) Grin formulasidan va (81), (83) masalaning Grin funksiyasidan foydalanamiz.

Bu masalaning $G(x,\xi)$ Grin funksiyasi x o'zgaruvchining va $\xi(a<\xi<b)$ parametrning funksiyasi bo'lib, quyidagi uchta shartni qanoatlantiradi:

1. $G(x,\xi)$ Grin funksiyasi x o'zgaruvchining funksiyasi sifatida $x=\xi$ nuqtadan tashqari *(a, b)* oraliqning barcha nuqtalarida (81) tenglamani qanoatlantiradi;

2. $G(x,\xi)$ funksiya har ikki (83) chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi;

3. $G(x,\xi)$ funksiya barcha $a\le x\le b$ oraliqda uzluksiz, uning $G'_x(x,\xi)$ hosilasi esa, $a\le x<\xi$ va $\xi<x\le b$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $x=\xi$ nuqtada chekli uzilishga ega , ya'ni

$$G'_x(\xi+0,\xi)-G'_x(\xi-0,\xi)=-\frac{1}{p(\xi)}. \qquad (86)$$

Agar biz (81) tenglama yechimlarining fundamental sistemasini topishni bilsak, u holda Grin funksiyasini osongina tuzishimiz mumkin. Buning uchun

$$G(x,\xi)=\begin{cases} C_1(\xi)y_1(x)+C_2(\xi)y_2(x), & a\le x<\xi, \\ D_1(\xi)y_1(x)+D_2(\xi)y_2(x), & \xi<x\le b, \end{cases}$$

deb belgilash yetarli, bu yerdagi to'rtta $C_1(\xi), C_2(\xi)$, $D_1(\xi)$ va $D_2(\xi)$ noma'lum funksiyalarni (83) chegaraviy shartlar, $G(\xi+0,\xi)=G(\xi-0,\xi)$ uzluksizlik sharti va (86) shartdan foydalanib aniqlash kerak. Bu to'rtta munosabat quyidagi bir jinsli bo'lmagan chiziqli algebraik sistemaga olib keladi:

$$C_1(\xi)A_0[y_1(a)]+C_2(\xi)A_0[y_2(a)]-D_1(\xi)B_0[y_1(b)]-$$
$$-D_2(\xi)B_0[y_2(b)]=0,$$

$$C_1(\xi)A_1[y_1(a)]+C_2(\xi)A_1[y_2(a)]-D_1(\xi)B_1[y_1(b)]-$$
$$-D_2(\xi)B_1[y_2(b)]=0,$$

$$-C_1(\xi)y_1(\xi)-C_2(\xi)y_2(\xi)+D_1(\xi)y_1(\xi)+D_2(\xi)y_2(\xi)=0,$$

$$-C_1(\xi)y_1'(\xi)-C_2(\xi)y_2'(\xi)+$$
$$+D_1(\xi)y_1'(\xi)+D_2(\xi)y_2'(\xi)=-\frac{1}{p(\xi)}.$$

Bu sistemaning determinanti

$$\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix}\Delta$$

ga teng va (84) ga asosan u noldan farqli bo'ladi. Shunday qilib, $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$, $D_1(\xi)$ va $D_2(\xi)$ koeffitsientlar birma-bir aniqlanadi. Endi $z(x)=G(x,\xi)$ deb olib, (82) ayniyatning har ikki tomonini asosiy *(a, b)* oraliq bo'yicha integrallaymiz. $LG(x,\xi)=0$ tenglikni e'tiborga olib,

$$\int_a^b G(x,\xi)Ly(x)dx=\int_a^b \frac{d}{dx}\left\{p(x)\left[G(x,\xi)\frac{dy}{dx}-y(x)\frac{dG(x,\xi)}{dx}\right]\right\}dx$$

tenglikni hosil qilamiz. $G_x^{'}(x,\xi)$ funksiyaning uzilishga ega ekanligini, ya'ni (86) formulani e'tiborga olsak, ushbu

$$\int_a^b \frac{d}{dx}\left[p(x)y(x)G_x^{'}(x,\xi)\right]dx=\left[p(x)y(x)G_x^{'}(x,\xi)\right]_a^b-$$

$$-p(\xi)y(\xi)\left[G_x^{'}(\xi+0,\xi)-G_x^{'}(\xi-0,\xi)\right]=$$

$$=\left[p(x)y(x)G_x^{'}(x,\xi)\right]_a^b+y(\xi)$$

munosabatga ega bo'lamiz. Bunga asosan

$$\int_a^b G(x,\xi)Ly(x)dx=\left[p(x)\left(G\frac{dy}{dx}-y\frac{\partial G}{\partial x}\right)\right]_a^b-y(\xi). \qquad (87)$$

Bu formulani soddalashtirish mumkin. Shu maqsadda (87) formulaning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchini, $G(x,\xi)$ vaqtincha *z (x)* o'rniga yozib, quyidagi ko'rinishda yozib olishimiz mumkin:

$$\left[p(x)\left(z\frac{dy}{dx}-y\frac{dz}{dx}\right)\right]_a^b=p(a)\begin{vmatrix} y(a) & z(a)\\ y'(a) & z'(a)\end{vmatrix}-p(b)\begin{vmatrix} y(b) & z(b)\\ y'(b) & z'(b)\end{vmatrix}. \qquad (88)$$

Determinantlarni ko'paytirish qoidasiga asosan (biz yo'llarni ustunlarga ko'paytiramiz) ushbu

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01}\\ a_{10} & a_{11}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} y(a) & z(a)\\ y'(a) & z'(a)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} A_0[y(a)] & A_0[z(a)]\\ A_1[y(a)] & A_1[z(a)]\end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} b_{00} & b_{01}\\ b_{10} & b_{11}\end{vmatrix}\begin{vmatrix} y(b) & z(b)\\ y'(b) & z'(b)\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} B_0[y(b)] & B_0[z(b)]\\ B_1[y(b)] & B_1[z(b)]\end{vmatrix}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Agar $y(x)$ va $z(x)$ funksiyalarning ikkalasi ham (83) chegaraviy shartlarni qanoatlantirsa, avvalgi tengliklarning o'ng tomonidagi determinantlar bir-biriga teng bo'ladi.

$$\begin{vmatrix} a_{00} & a_{01} \\ a_{10} & a_{11} \end{vmatrix} = \bar{a}, \quad \begin{vmatrix} b_{00} & b_{01} \\ b_{10} & b_{11} \end{vmatrix} = \bar{b}$$

deb belgilab, ushbu

$$\bar{a}\left[y(a)z'(a) - y'(a)z(a)\right] = \bar{b}\left[y(b)z'(b) - y'(b)z(b)\right]$$

tenglikka ega bo'lamiz.

Agar

$$\bar{a}p(b) = \bar{b}p(a) \tag{89}$$

shart bajariladi deb hisoblasak, odatda bu shartni o'zi-o'ziga qo'shma chegaraviy shart deyiladi, (88) ifoda nolga teng bo'ladi. Shu sababli, $z(x)$ o'rniga yana $G(x,\xi)$ yozsak, (87) tenglama sodda

$$\int_a^b G(x,\xi)Ly(x)dx = -y(\xi) \tag{90}$$

ko'rinishga keladi.

Shunday qilib, (90) tenglamada $Ly(x)$ o'rniga (85) ga muvofiq $-\lambda r(x)y(x)$ ifodani qo'ysak, (85), (83) masala Fredgolmning quyidagi bir jinsli ikkinchi tur integral tenglamasiga keladi:

$$y(\xi) - \lambda\int_a^b G(x,\xi)r(x)y(x)dx = 0\,. \tag{91}$$

Bu tenglamaning yadrosi simmetrik emas. Lekin Grin funksiyasi $G(x,\xi)$ simmetrik funksiyadir. Haqiqatan ham, (82) Grin formulasida

$$y(x) = G(x,\xi), \quad z(x) = G(x,y) \quad (\xi \neq \eta)$$

desak, (87) formulani hosil qilgandagi mulohazalarni qaytarib, ushbu

$$0 = \left[p(x)\left\{G(x,\eta)G'_x(x,\xi) - G(x,\xi)G'_x(x,\eta)\right\}\right]_a^b +$$
$$+\ G(\xi,\eta) - G(\eta,\xi)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Agar (89) shart bajarilsa, $G(x,\xi)$ ham, $G(x,\eta)$ ham (83) chegaraviy shartni qanoatlantirgani uchun avvalgi tenglikning o'ng tomonidagi birinchi qo'shiluvchi nolga teng bo'ladi.

Shuning uchun

$$G(\xi,\eta)=G(\eta,\xi).$$

Bizga shu bobning 8- § idan ma'lumki, agar

$$r(x)>0 \tag{92}$$

(agar *r (x) < 0* bo'lsa, *r (x)* ni $-$ *r (x)* ga va λ ni $-\lambda$ ga almashtiramiz) bo'lsa, yangi

$$y(x)\sqrt{r(x)}=\varphi(x) \tag{93}$$

funksiya kiritib, simmetrik

$$K(x,y)=\sqrt{r(x)r(y)}\,G(x,y) \tag{94}$$

yadroli

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\,dy=0$$

tenglamaga ega bo'lamiz. Shunday qilib biz quyidagi natijaga keldik:

Agar p (x) > 0 bo'lib, (84), (89), (92) shartlar bajarilsa va (94) yadro kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lsa, u holda (85), (83) Shturm-Liuvill masalasi λ parametrning faqat sanoqli sondagi haqiqiy $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\dots$ qiymatlari, chunonchi, (94) simmetrik yadroning xos sonlari uchun trivial bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi.

Har bir xos songa (85), (83) masalaning ko'pi bilan ikkita chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlari to'g'ri keladi, bu yechimlar berilgan yadroning xos funksiyalari bilan (93) tenglik yordamida bog'langan bo'ladi.

Bitta ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning ikkitadan ortiq chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarini topish mumkin bo'lmaganligi sababli, (94) yadro barcha xos sonlari ko'pi bilan ikki karrali bo'ladi.

Misol. Ushbu

$$Ly(x)\equiv\frac{d^2y(x)}{dx^2}-y(x)=f(x),$$

$$y(0)=0,\ y(1)=0$$

chegaraviy masala yechilsin. Bu masalaning Grin funksiyasini tuzamiz. Bir jinsli

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-y(x)=0$$

tenglama e^x va e^{-x} chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega. Shuning uchun uning umumiy yechimi

$$y(x)=C_1e^x+C_2e^{-x}$$

ko'rinishda yoziladi. $G(x,\xi)$ Grin funksiyasi $x<\xi$ va $x>\xi$ da berilgan tenglamaning yechimi bo'lgani uchun uni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz:

$$G(x,\xi)=C_1(\xi)e^x+C_2(\xi)e^{-x},\quad 0\le x<\xi,$$

$$G(x,\xi)=D_1(\xi)e^x+D_2(\xi)e^{-x},\quad \xi<x\le 1.$$

Grin funksiyasining 2- shartiga muvofiq

$$G(0,\xi)=0,\quad G(1,\xi)=0$$

bo'lishi kerak. Bunga asosan

$$C_1(\xi)+C_2(\xi)=0,$$

$$D_1(\xi)e+D_2(\xi)e^{-1}=0$$

tengliklarni hosil qilamiz. Grin funksiyasi $x=\xi$ bo'lganda uzluksiz bo'lgani uchun

$$C_1(\xi)e^{\xi}+C_2(\xi)e^{-\xi}=D_1(\xi)e^{\xi}+D_2(\xi)e^{-\xi}$$

va nihoyat, Grin funksiyasining 3- shartiga asosan

$$D_1(\xi)e^{\xi}-D_2(\xi)e^{-\xi}-\left[C_1(\xi)e^{\xi}-C_2(\xi)e^{-\xi}\right]=-1\ .$$

Yuqoridagi to'rtta munosabatdan noma'lum $C_1(\xi)$, $C_2(\xi)$, $D_1(\xi)$ va $D_2(\xi)$ funksiyalarni aniqlasak, Grin funksiyasi ushbu

$$G(x,\xi)=\begin{cases}-\dfrac{sh x\, sh(\xi-1)}{sh 1}, & 0\le x\le\xi,\\[2mm] -\dfrac{sh\xi\, sh(x-1)}{sh 1}, & \xi\le x\le 1\end{cases}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Grin funksiyasi ma'lum bo'lgandan so'ng, berilgan masalaning yechimi, darhol, (90) formula orqali topiladi.

Ayrim hollarda bir jinsli bo'lmagan simmetrik integral tenglamani oddiy differensial tenglama uchun bir jinsli bo'lmagan chegaraviy masalaga keltirish mumkin.

Integral tenglamaning yadrosi $K(x, y)$ biror chiziqli differensial operatorning Grin funksiyasidan iborat bo'lgan holdagina bunday qilish mumkin. Buni bir misolda ko'rsatamiz.

Misol. Ushbu

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^1 K(x, y)\, \varphi(y)\, dy = e^x \tag{95}$$

integral tenglama yechilsin, bu yerda:

$$K(x, y) = \begin{cases} \dfrac{shx\, sh(y-1)}{sh1}, & 0 \le x \le y, \\ \dfrac{shy\, sh(x-1)}{sh1}, & y \le x \le 1. \end{cases}$$

Yechish. (95) tenglamani

$$\varphi(x) = e^x + \frac{\lambda sh(x-1)}{sh1} \int_0^x shy\varphi(y)\, dy + \frac{\lambda shx}{sh1} \int_x^1 sh(y-1)\varphi(y)\, dy \tag{96}$$

ko'rinishda yozib olamiz. (96) tenglikni ikki marta differensiallaymiz:

$$\varphi'(x) = e^x + \frac{\lambda ch(x-1)}{sh1} \int_0^x shy\varphi(y)dy + \frac{\lambda chx}{sh1} \int_x^1 sh(y-1)\varphi(y)dy,$$

$$\varphi''(x) = e^x + \frac{\lambda sh(x-1)}{sh1} \int_0^x shy\varphi(y)dy + \frac{\lambda chx}{sh1} \int_x^1 sh(y-1)\varphi(y)dy +$$

$$+ \frac{\lambda ch(x-1)}{sh1} shx\varphi(x) - \frac{\lambda chx}{sh1} sh(x-1)\varphi(x).$$

(96) va oxirgi tenglikdan

$$\varphi''(x) = \varphi(x) + \lambda\varphi(x)$$

tenglama hosil bo'ladi.

(96) da $x = 0$ va $x = 1$ desak, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(1) = e$ bo'ladi. Shunday qilib, izlanayotgan $\varphi(x)$ funksiya

$$\varphi''(x) - (\lambda + 1)\varphi(x) = 0, \tag{97}$$

$$\varphi(0)=1, \quad \varphi(1)=e, \tag{98}$$

chegaraviy masalaning yechimidan iboratdir.

Quyidagi hollarni tekshiramiz:

1) $\lambda+1=0$, ya'ni $\lambda=-1$. (97) tenglama $\varphi''(x)=0$ ko'rinishga ega bo'lib, $\varphi(x)= C_1x + C_2$ funksiya uning umumiy yechimi bo'ladi. (98) chegaraviy shartlarga muvofiq C_1 va C_2 noma'lumlarni aniqlash uchun

$$C_2 = 1,$$
$$C_1 + C_2 = e,$$

sistemani hosil qilamiz, bundan $C_1 = e-1$, $C_2=1$.

Demak,

$$\varphi(x)=(e-1)x+1.$$

2) $\lambda+1>0$, ya'ni $\lambda>-1(\lambda\neq0)$. (97) tenglamaning umumiy yechimi

$$\varphi(x)=C_1ch\sqrt{\lambda+1}\,x+C_2sh\sqrt{\lambda+1}\,x$$

bo'ladi. (98) chegaraviy shartlarga asosan C_1 va C_2 noma'lumlarni topamiz:

$$C_1=1, \quad C_2=\frac{e-ch\sqrt{\lambda+1}}{sh\sqrt{\lambda+1}}.$$

Ma'lum bo'lgan

$$sh(x-y)=shx\,chy-chx\,shy$$

formulani e'tiborga olsak, noma'lum $\varphi(x)$ funksiya ushbu

$$\varphi(x)=\frac{ch\sqrt{\lambda+1}(1-x)+e\cdot sh\sqrt{\lambda+1}\,x}{sh\sqrt{\lambda+1}}$$

formula bilan aniqlanadi.

3) $\lambda+1<0$, ya'ni $\lambda<-1$. $\lambda+1=-\mu^2$ deb belgilab olsak, $\varphi(x)=C_1\cos\mu x+C_2\sin\mu x$ funksiya (97) tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. (98) chegaraviy shartlarga asosan C_1 va C_2 o'zgarmaslarni aniqlash uchun

$$C_1 = 1,\ \ C_1 \cos\mu + C_2 \sin\mu = e, \tag{99}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Bu yerda o'z navbatida:

a) μ son $\sin\mu = 0$ tenglamaning ildizi bo'lmasin. U holda,

$$C_1 = 1,\ \ C_2 = \frac{e - \cos\mu}{\sin\mu}$$

va natijada $$\varphi(x) = \cos\mu x + \frac{e - \cos\mu}{\sin\mu}\sin\mu x,$$

bu yerda $\mu = \sqrt{-\lambda - 1}$.

b) μ son $\sin\mu = 0$ tenglamaning ildizi bo'lsin, ya'ni $\mu = n\pi\,(n = 1, 2, ...)$. (99) sistema birgalikda bo'lmaydi, natijada berilgan integral tenglama yechimga ega bo'lmaydi. Bu holda mos

$$\varphi(x) + \left(1 + n^2\pi^2\right)\int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy = 0 \tag{100}$$

bir jinsli tenglama trivial bo'lmagan yechimga ega bo'ladi, ya'ni $\lambda_n = -\left(1 + n^2\pi^2\right)$ sonlar (100) tenglamaning xos sonlari, $\varphi_n(x) = \sin n\pi x$ funksiyalar esa, xos funksiyalari bo'ladi.

Mashqlar. Quyidagi simmetrik integral tenglamalar yechilsin:

1. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy = x,$

bu yerda

$$K(x, y) = \begin{cases} x(y - 1), & 0 \le x \le y, \\ y(x - 1), & y \le x \le 1. \end{cases}$$

Javob. $\lambda_n = -\pi^2 n^2$ – xos sonlar, $\varphi_n(x) = \sin\pi\pi nx$ — xos funksiyalar. Agar $\lambda \ne \lambda_n$ bo'lsa,

$$\varphi(x) = x - \frac{\lambda}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n\left(\lambda + n^2\pi^2\right)}\sin n\pi x.$$

2. $\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x, y)\varphi(y)\,dy = \cos\pi x,$

bu yerda:

$$K(x,y)=\begin{cases}(x+1)y, & 0\le x\le y,\\ (y+1)x, & y\le x\le 1.\end{cases}$$

Javob. $\lambda_0=1,\ \lambda_n=-n^2\pi^2\ (n=1,2,...)$ — xos sonlar,

$\varphi_0(x)=e^x,\ \varphi_n(x)=\sin n\pi x+n\pi\cos n\pi x\ \ (n=1,2,..)$ — x o s funksiyalar.

Agar $\lambda_0\ne 1,\ \lambda_n\ne -n^2\pi^2\ (n=1,2,...)$ bo'lsa, u holda tenglamaning yechimi

$$\varphi(x)=\cos\pi x+\lambda\left[\frac{1+e}{1+\pi^2}\frac{e^x}{\lambda-1}-\frac{\pi}{2(\lambda+\pi^2)}(\sin\pi x+\pi\cos\pi x)\right]$$

ko'rinishda bo'ladi.

$$\textbf{3.}\quad \varphi(x)+\int_0^1 K(x,y)\varphi(y)dy=xe^x,$$

bu yerda

$$K(x,y)=\begin{cases}\dfrac{sh x\, sh(y-1)}{sh 1}, & 0\le x\le y,\\[2mm] \dfrac{sh y\, sh(x-1)}{sh 1}, & y\le x\le 1.\end{cases}$$

Javob. $\varphi(x)=2e^x-2+(2-e)x.$

$$\textbf{4.}\quad \varphi(x)-2\int_0^{\frac{\pi}{2}} K(x,y)\varphi(y)dy=\cos 2x,$$

bu yerda

$$K(x,y)=\begin{cases}\sin x\cos y, & 0\le x\le y,\\ \sin y\cos x, & y\le x\le \dfrac{\pi}{2}.\end{cases}$$

Javob. $\varphi(x) = 3\cos 2x + \dfrac{2\sin\sqrt{3}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin\dfrac{\sqrt{3}\,\pi}{4}}.$

5. $\varphi(x) - \int\limits_0^1 K(x,y)\varphi(y)\,dy = shx,$

bu yerda

$$K(x,y) = \begin{cases} -e^{-y} shx, & 0 \le x \le y, \\ -e^{-x} shy, & y \le x \le 1. \end{cases}$$

Javob. $\varphi(x) = \dfrac{e \cdot sh\sqrt{2}\,x}{sh\sqrt{2} + \sqrt{2}\,ch\sqrt{2}}.$

1- §. Umumiy mulohozalar va misollar

Ushbu

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,y)\,\varphi(y)dy=f(x) \qquad (1)$$

integral tenglamani qaraymiz. Agar (1) tenglamaning yadrosi $K(x, y)$ asosiy $\{a\le x,y\le b\}$ (a, b cheksiz ham bo'lishi mumkin) kvadratda kvadrati bilan jamlanuvchi bo'lsa, ya'ni

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,y)\,dx\,dy<+\infty \qquad (2)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda (1) tenglama uchun Fredgolmning teoremalari o'rinli bo'ladi. Xususan, (1) tenglamaning spektri, ya'ni xos sonlarining to'plami diskret bo'lib, har bir xos songa chekli sondagi xos funksiyalar mos keladi (xos sonlar chekli karrali bo'ladi).

Agar (2) shart bajarilmasa, (1) integral tenglamaning spektri uzluksiz bo'lishi mumkin, ya'ni xos sonlar butun oraliqni to'ldirishi mumkin va xos sonlar cheksiz karrali bo'lishi mumkin.

Bu aytganlarimizni misollarda ko'rsatamiz.

Quyidagi Lalesko—Pikar tenglamasini tekshiramiz:

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-y|}\varphi(y)dy=f(x). \qquad (3)$$

Bu tenglamaning yadrosi $K(x,y)=e^{-|x-y|}$ (2) shartni qanoatlantirmaydi, u cheksiz normaga ega bo'ladi. Haqiqatan ham,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-2|x-y|}dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}dx\int_{-\infty}^{\infty}e^{-2|x-y|}dy=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}dx\left[\int_{-\infty}^{x}e^{-2x}e^{2y}dy+\int_{x}^{\infty}e^{2x}e^{-2y}dy\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{e^{-2x}\left[e^{2y}\right]_{-\infty}^{x}-e^{2x}\left[e^{-2y}\right]_{x}^{\infty}\right\}dx=\int_{-\infty}^{\infty}dx.$$

(3) integral tenglamani

$$\varphi(x)-\lambda\left[e^{-x}\int_{-\infty}^{x}e^{y}\varphi(y)dy+e^{x}\int_{x}^{\infty}e^{-y}\varphi(y)dy\right]=f(x)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Agar $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar ikki marta uzluksiz differensiallanuvchi bo'lsa, berilgan tenglama

$$\varphi''(x)+(2\lambda-1)\varphi(x)=f''(x)-f(x)$$

oddiy differensial tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Bu tenglamaning $f(x)\equiv 0$ bo'lgan holdagi umumiy yechimi

$$\varphi(x)=C_1e^{\mu x}+C_2e^{-\mu x} \tag{4}$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bunda $\mu=\sqrt{1-2\lambda}$, C_1, C_2 esa ixtiyoriy o'zgarmaslar. (3) tenglamaning chap tomonidagi integralning mavjud bo'lishi uchun $|\mathrm{Re}\,\mu|<1$ bo'lishi, haqiqiy λ lar uchun $\lambda>0$ bo'lishi zarurdir.

Demak, haqiqiy sonlar sohasida (3) tenglamaning spektri $0<\lambda<\infty$ oraliqdan iborat. Bu oraliqning har bir nuqtasi (3) tenglama uchun ikki karrali xos son bo'ladi, ya'ni har bir $\lambda\in(0,\infty)$ ga ikkita chiziqli bog'liq bo'lmagan silliq $e^{\mu x}$ va $e^{-\mu x}$ xos funksiyalar mos keladi. Ammo, ishonch hosil qilish qiyin emaski, bu xos funksiyalar $L_2(-\infty,+\infty)$ sinfga tegishli bo'lmaydi. $\lambda>\frac{1}{2}$ bo'lganda (4) ga asosan $\sin\sqrt{2\lambda-1}\,x$, $\cos\sqrt{2\lambda-1}\,x$ lar xos funksiyalar bo'ladi, $\lambda=\frac{1}{2}$ da $\varphi(x)=c_1+c_2x$ ga ega bo'lamiz.

Shunday qilib, $\lambda \geq \frac{1}{2}$ bo'lganda $(-\infty, +\infty)$ oraliqda chegaralangan xos funksiyalar mavjud bo'ladi, lekin ular $L_2(-\infty, +\infty)$ sinfga tegishli bo'lmaydi. Bu misoldan integral tenglamaning yechimi qaysi sinfdan izlanishi muhim ekanligi ko'rinayapti.

Yana bir misol ko'ramiz. $\varphi(x)$ funksiya $[0, \infty)$ oraliqda absolyut integrallanuvchi uzluksiz bo'lib, Ox o'qning ixtiyoriy chekli oralig'ida chekli sonda maksimum va minimumlarga ega bo'lsin. Bu funksiya uchun Furyening kosinus-almashtirishini tuzamiz:

$$\varphi_1(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi(x) \cos tx \, dx.$$

U holda

$$\varphi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \varphi_1(t) \cos tx \, dt.$$

Bu ikki formulani qo'shib,

$$\varphi(x) + \varphi_1(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \left[\varphi(y) + \varphi_1(y)\right] \cos xy \, dy$$

tenglikni hosil qilamiz, ya'ni yuqoridagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\varphi(x)$ funksiya ixtiyoriy tanlanganda $\psi(x) = \varphi(x) + \varphi_1(x)$ funksiya, $\lambda = \sqrt{2/\pi}$ xos qiymatga mos

$$\psi(x) = \lambda \int_0^{+\infty} \psi(y) \cos xy \, dy \tag{5}$$

integral tenglamaning xos funksiyasidan iborat bo'ladi. Demak, $\varphi(x)$ ixtiyoriy funksiya bo'lgani uchun, λ ning ko'rsatilgan qiymatida (5) tenglama cheksiz ko'p chiziqli bog'liq bo'lmagan xos funksiyalarga ega bo'ladi.

Masalan, $\varphi(x) = e^{-ax}$ $(a > 0)$ bo'lsin. Bu holda

$$\varphi_1(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}e^{-at}\cos xt\,dt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}.$$

Shu sababli

$$\psi(x)=\varphi(x)+\varphi_1(x)=e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}. \tag{6}$$

$\psi(x)$ funksiyaning bu qiymatini (5) tenglamaga qo'yamiz:

$$e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}=\lambda\left[\int_0^{+\infty}e^{-ay}\cos xy+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{+\infty}\frac{a\cos xy}{a^2+y^2}\,dy\right].$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi integrallarning qiymatlari ma'lum:

$$\int_0^{+\infty}e^{-ay}\cos xy\,dy=\frac{a}{a^2+x^2},\quad \int_0^{+\infty}\frac{\cos xy}{a^2+y^2}\,dy=\frac{\pi}{2a}e^{-ax}.$$

Demak, avvalgi tenglikdan

$$e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}=\lambda\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\;e^{-ax}+\frac{a}{a^2+x^2}\right)$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan, agar $\lambda=\sqrt{2/\pi}$ bo'lsa,

$$\psi(x)=e^{-ax}+\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{a}{a^2+x^2}\neq 0$$

funksiya (5) integral tenglamaning yechimi ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Shunday qilib, $\lambda=\sqrt{2/\pi}$ son (5) tenglamaning xos soni bo'lib, $\psi(x)$ funksiya mos xos funksiya bo'ladi. $a>0$ — ixtiyoriy haqiqiy son bo‘lgani uchun $\lambda = \sqrt{2/\pi}$ xos songa cheksiz ko‘p chiziqli bog‘liq bo‘lmagan (6) xos funksiyalar to‘g‘ri keladi.

2- §. Koshi tipidagi integral

1. Koshi tipidagi integral ta’rifi va misollar. Kompleks o‘zgaruvchili z tekisligida L — silliq yopiq egri chiziq bo‘lsin. Ma’lumki, silliq egri chiziq yoki silliq kontur deganda, o‘zi-o‘zi bilan kesishmaydigan, urinmasi uzluksiz o‘zgaradigan va qaytish nuqtalariga ega bo‘lmagan yopiq yoki ochiq chiziq tushuniladi. L egri chiziq bilan chegaralangan sohani D^+ orqali, $D^+ + L$ ning barcha kompleks tekislikkacha to‘ldiruvchisini D^- orqali belgilaymiz.

Agar $f(z)$ funksiya D^+ sohada analitik va $D^+ + L$ da uzluksiz funksiya bo‘lsa, kompleks o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan ma’lum bo‘lgan Koshi formulasiga asosan:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(z), & z \in D^+; \\ 0, & z \in D^-. \end{cases} \tag{7}$$

Agar $f(z)$ funksiya D^- sohada analitik, $D^- + L$ da uzluksiz bo‘lsa, u holda

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - z}d\tau = \begin{cases} f(\infty), & z \in D^+ \\ -f(z) + f(\infty), & z \in D^- \end{cases} \tag{8}$$

Koshi formulasi, agar funksiyaning soha chegarasidagi qiymati ma’lum bo‘lsa, uni sohaning ixtiyoriy nuqtasidagi qiymatini hisoblashga imkon beradi; qisqa qilib aytganda Koshi formulasi analitik funksiyalar uchun chegaraviy masalani hal qiladi. (7) va (8) formulalar chap tomonidagi integral *Koshi integrali* deyiladi.

Endi L yopiq yoki ochiq silliq chiziq, τ uning nuqtalarining kompleks koordinati va $\varphi(\tau)$ bu chiziqdagi uzluksiz funksiya bo‘lsin. U holda

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}d\tau \tag{9}$$

integral *Koshi tipidagi integral* deyiladi, $\varphi(\tau)$ funksiya uning *zichligi*, $\dfrac{1}{\tau - z}$ esa, *yadrosi* deyiladi.

Ravshanki, $\Phi(z)$ funksiya L egri chiziqning nuqtalaridan tashqari barcha kompleks tekislikda analitik funksiyadir, shu bilan birga $\Phi(\infty)=0$. Demak, L chiziq $\Phi(z)$ funksiya uchun maxsus chiziq bo'ladi. Koshi tipidagi integralning z nuqta L egri chiziqqa yaqinlashganda va unda yotgandagi holati to'g'risidagi muhim masalalarni keyinroq bayon qilamiz.

Agar L — ochiq egri chiziq bo'lsa, $\Phi(z)$ maxsus L chiqiqqa ega bo'lgan barcha tekislikda analitik funksiya bo'ladi. L — endi yopiq egri chiziq bo'lsin. Bu holda $\Phi(z)$ ikkita mustaqil funksiyaga ajraladi: D^+ sohada aniqlangan $\Phi^+(z)$ va D^- soha nuqtalari uchun aniqlangan $\Phi^-(z)$. Bu ikkita funksiya, umuman aytganda, biri ikkinchisining analitik davomi bo'lmaydi.

Bir-birini to'la tekislikka to'ldiruvchi D^+, D^- sohalarda ikkita mustaqil $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ ifodalar bilan aniqlanadigan $\Phi(z)$ analitik funksiyani odatda *bo'lak-bo'lak analitik funksiya* deyiladi.

1- misol. $L = ab$ yoy, $\varphi(z)=1$ bo'lsin. Bu holda

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{d\tau}{\tau - z}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a},$$

bu yerda

$$\ln\frac{z-b}{z-a}=\ln\frac{b-z}{a-z}$$

deb, ab yoy bo'yicha kesilgan tekislikda analitik, cheksizlikda nolga aylanuvchi funksiya tushuniladi.

2- misol. $L - |z|=1$ birlik aylana, $\varphi(\tau)=\dfrac{2}{\tau(\tau-2)}$ bo'lsin. U holda

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{2}{\tau(\tau-2)}\frac{d\tau}{\tau-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_l\frac{1}{\tau-2}\frac{d\tau}{\tau-z}-\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1}{\tau}\frac{d\tau}{\tau-z}.$$

D^+ sohada $\dfrac{1}{z-2}$ funksiya analitik, $\dfrac{1}{z}$ esa, D^- da analitik va cheksizlikda nolga aylanadi. Shuning uchun ham avvalgi tenglikdagi birinchi integral (7) formulaga asosan $z\in D^+$ uchun $\dfrac{1}{z-2}$ ga teng, ikkinchi integral esa (8) formulaga binoan $z\in D^-$ uchun $-\dfrac{1}{z}$ ga teng, $z\in D^+$ uchun esa nolga teng. Bundan

$$\Phi^+(z)=\frac{1}{z-2},\ \Phi^-(z)=\frac{1}{z}.$$

2. Koshi tipidagi integralning bosh qiymati (singulyar integral). Matematik analiz kursidan ma'lumki, integral yig'indilarning limiti sifatida aniqlangan integral faqat chegaralangan funksiyalar uchun ma'noga ega. Agar integral ostidagi funksiya chegaralanmagan bo'lsa, u holda xosmas integral tushunchasi kiritiladi. Buni eslatib o'tamiz.

$f(x)$ funksiya $a\le x\le b$ kesmada aniqlangan bo'lib, bu kesmaning c nuqtasi atrofida chegaralanmagan bo'lsin. Lekin musbat ε_1 va ε_2 sonlar qanday kichik bo'lmasin $f(x)$ funksiya $a\le x\le c-\varepsilon_1$, $c+\varepsilon_2\le x\le b$ kesmalarning har birida integrallanuvchi bo'lsin. Ushbu

$$\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx \tag{10}$$

yig'indini tuzamiz. Agar bu yig'indi ε_1 va ε_2 bir-biriga bog'liq bo'lmay nolga intilganda limitga ega bo'lsa, bu limit $f(x)$ funksiyaning *xosmas integrali* deyiladi:

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\substack{\varepsilon_1\to 0\\ \varepsilon_2\to 0}}\left[\int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx+\int_{c+\varepsilon_2}^{b} f(x)dx\right].$$

(10) yig'indi, ε_1 va ε_2 bir-biriga bog'liq bo'lmay nolga intilganda limitga ega bo'lmasligi, lekin ε_1 va ε_2 biror munosabat bilan bog'liq bo'lib nolga intilganda limiti mavjud bo'lishi mumkin. Misol uchun $f(x)=\dfrac{1}{x-c}$, $a<c<b$ funksiyani tekshiramiz. (10) yig'indini tuzib,

$$\int_a^{c-\varepsilon_1}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon_2}^{b}\frac{dx}{x-c}=\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \tag{11}$$

tenglikka ega bo'lamiz. (11) miqdor ε_1 va ε_2 nolga intilganda limitga intilmaydi, chunki $\dfrac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}$ nisbat bu holda ixtiyoriy o'zgarishi mumkin. Agar ε_1 va ε_2 biri-biriga bog'liq bo'lsa, masalan $\varepsilon_1=k\varepsilon_2$, bunda k — musbat o'zgarmas, u holda (11) yig'indi limitga ega bo'lib, bu limit

$$\ln\frac{b-c}{c-a}+\ln k$$

ga teng bo'ladi. Xususiy holda $\varepsilon_1=\varepsilon_2=\varepsilon$ desak,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}\frac{dx}{x-c}+\int_{c+\varepsilon}^{b}\frac{dx}{x-c}\right]=\ln\frac{b-c}{c-a}$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu misoldan so'ng quyidagi ta'rifni kiritamiz. *f(x)* funksiya $a\le x\le b$ kesmada aniqlangan bo'lib, musbat ε son qanday kichik bo'lmasin bu funksiya $a\le x\le c-\varepsilon$ va $c+\varepsilon\le x\le b$ kesmalarda integrallanuvchi bo'lsin.

Ushbu

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_a^{c-\varepsilon}f(x)dx+\int_{c+\varepsilon}^{b}f(x)dx\right]$$

limit (agar mavjud bo'lsa) f(x) funksiyadan $a\le x\le b$ *oraliqda olingan integralning Koshi ma'nosidagi bosh qiymati* deyiladi.

"Integralning bosh qiymati" o‘rniga ko‘pincha *singulyar (maxsus) integral* deb aytiladi. Bosh qiymat tushunchasi va atamaning o‘zi ham Koshi tomonidan kiritilgan.

Biz singulyar integralni oddiy

$$\int_a^b f(x)dx$$

simvol bilan belgilaymiz. Singulyar integralni ifodalashda

$$v.p\int_a^b f(x)\,dx;\ \int_a^{'b} f(x)\,dx;\ \int_a^{*b} f(x)\,dx$$

simvollar ham ishlatiladi, bunda *v* va *p* fransuzcha *voleur principale* so‘zlarining birinchi harflari bo‘lib, o‘zbekchada "bosh qiymat" ni bildiradi. Agar oddiy (xos yoki xosmas) integral mavjud bo‘lsa, singulyar integral bu oddiy integral bilan ustma-ust tushadi. (11) fomuladan ushbu

$$\int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln\frac{b-c}{c-a} \qquad (12)$$

singulyar integralning mavjudligi kelib chiqadi. Bu ko‘rilgan misoldan umumiyroq integralni tekshirish maqsadida Gyolder yoki N sinfga tegishli funksiyalar tushunchasini eslatib o‘tamiz.

$f(x)$ funksiya $a \le x \le b$ kesmada aniqlangan bo‘lsin. Agar *$a \le x \le b$ kesmaning ixtiyoriy ikkita x_1 va x_2 nuqtasi uchun*

$$|f(x_1) - f(x_2)| \le A|x_1 - x_2|^\alpha$$

shart bajarilsa, $f(x)$ funksiya $a \le x \le b$ kesmada Gyolder (N) shartini qanoatlantiradi deyiladi, bundagi, α , A — musbat o‘zgarmas sonlar, shu bilan birga $0 < \alpha \le 1$. A — Gyolder o‘zgarmasi, α — Gyolder ko‘rsatkichi deb yuritiladi.

Agar α birdan katta bo‘lsa, Gyolder shartidan $f(x)$ ning *(a, b)* oraliqda nolga tengligi kelib chiqadi va funksiya o‘zgarmasga aynan teng bo‘lib qoladi. Agar $\alpha = 1$ bo‘lsa, u holda Gyolder sharti ma’lum Lipshis sharti bilan ustma-ust tushadi.Bu ta’rifda $f(x)$ funksiyakesmada berilgan edi. Ammo funksiya biror ochiq yoki yopiq egri chiziqda berilishi ham mumkin.

L — silliq egri chiziq bo'lib, $\varphi(t)$ — bu egri chiziq nuqtalarining funksiyasi bo'lsin.

Agar L egri chiziqning ixtiyoriy ikkita t_1 va t_2 nuqtalari uchun

$$|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| \le A|t_1-t_2|^{\alpha}$$

shart bajarilsa, $\varphi(t)$ funksiya L egri chiziqda Gyolder shartini qanoatlantiradi deyiladi, bu yerda ham A va α—o'zgarmaslar, $0<\alpha\le 1$.

L egri chiziqda berilgan funksiya ko'p o'zgaruvchili bo'lishi ham mumkin. Masalan, ikki o'zgaruvchili $\varphi(t,\tau)$ bo'lsin. Agar L da yotuvchi ikki juft (t_1,τ_1) va (t_2,τ_2) nuqtalar uchun

$$|\varphi(t_1,\tau_1)-\varphi(t_2,\tau_2)| \le K\left(|t_1-t_2|^{\mu}+|\tau_1-\tau_2|^{\nu}\right)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\varphi(t,\tau)$ funksiya L da Gyolder shartini qanoatlaniradi deb aytiladi, bunda K,μ,ν — musbat o'zgarmaslar, shu bilan $\mu\le 1$, $\nu\le 1$.

Agar μ va ν sonlarning eng kichigi α bo'lsa, shunday o'zgarmas C ni topish mumkinki,

$$|\varphi(t_1,\tau_1)-\varphi(t_2,\tau_2)| \le C\left(|t_1-t_2|^{\alpha}-|\tau_1-\tau_2|^{\alpha}\right)$$

tengsizlik bajariladi. Endi

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx \tag{13}$$

inegralni tekshiramiz, bunda $\varphi(x)$ Gyolder shartini qanoatlantiruvchi biror funksiya. Bu integralni

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)dx}{x-c} = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx+\varphi(c)\int_a^b \frac{dx}{x-c}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral xosmas integral sifatida mavjud, chunki Gyolder shartiga asosan

$$\left|\frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}\right| < \frac{A}{|x-c|^{1-\alpha}},$$

ikkinchi integral esa (12) integral bilan ustma-ust tushadi, ya'ni u singulyar integraldir. Shunday qilib, $\varphi(x)$ funksiya *Gyolder shartini qanoatlantirsa, (13) integral Koshi bo'yicha bosh qiymat ma'nosida mavjud bo'lib, u quyidagiga teng bo'ladi:*

$$\int_a^b \frac{\varphi(x)}{x-c}dx = \int_a^b \frac{\varphi(x)-\varphi(c)}{x-c}dx + \varphi(c)\ln\frac{b-c}{c-a}.$$

Singulyar integral tushunchasi egri chiziqli integrallar uchun ham xuddi yuqoridagiday kiritiladi. L — bo'laklari silliq yopiq yoki ochiq egri chiziq bo'lib, τ, t — uning nuqtalarining kompleks koordinatlari bo'lsin. τ nuqtani markaz qilib yetarli kichik ε radiusli $\gamma: |t-\tau| = \varepsilon$ aylana chizamiz. L_ε — yopiq $|t-\tau| \leq \varepsilon$ doiradan tashqarida yotuvchi L ning qismi bo'lsin. Ravshanki,

$$J_\varepsilon(\tau) = \int_{L_\varepsilon} \frac{\varphi(t)dt}{t-\tau}dt$$

integral oddiy tushunchada ma'noga ega. Agar

$$\lim_{\varepsilon \to 0} J_\varepsilon(\tau) = J(\tau)$$

limit mavjud bo'lsa, u integralning *Koshi ma'nosidagi bosh qiymati yoki singulyar integral* deyiladi. Buni ham, xuddi yuqoridagidek, integralning oddiy simvoli bilan belgilaymiz:

$$J(\tau) = \int_L \frac{\varphi(t)dt}{t-\tau} \tag{14}$$

Bu holda ham, agar $\varphi(t)$ funksiya Gyolder shartini qanoatlantirsa, (14) singulyar integral mavjud bo'ladi.

Endi kompleks o'zgaruvchili funksiyalar kursidan ma'lum bo'lgan Soxoskiy—Plemel formulalarini eslatib o'tamiz.

L —yopiq silliq egri chiziq bo'lsin. $\Phi^{+}(t)$ orqali z nuqta L ning ichidan turib L dagi t nuqtaga intilgandagi (9) Koshi tipidagi integral bilan ifodalangan Φ (z) funksiyaning limit qiymatini, $\Phi^{-}(t)$ orqali L ning tashqarisidan intilgandagi limit qiymatini belgilaymiz. Agar $\varphi(t)$ funksiya L da Gyolder shartini qanoatlantirsa, u holda

$$\Phi^{+}(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

$$\Phi^{-}(t)=-\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau \tag{15}$$

formulalar o'rinli bo'ladi, bundagi integrallar singulyar integrallardir. (15) formulalarni bir-biridan ayirib va bir-biriga qo'shib, ularga teng kuchli formulalrni hosil qilamiz:

$$\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t)=\varphi(t),\quad \Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}\,dt. \tag{16}$$

(16) formulalar Soxoskiy—Plemel formulalari deb ataladi.

Bu formulalar to'g'risida ayrim fikrlarni aytib o'tamiz. L egri chiziq bo'ylab soat miliga qarshi harakat qilinganida, bu bilan chegaralangan soha chap tomonda qoladi deb faraz qilamiz. z nuqta t ga intilishi to'g'risida gapirilganda, z nuqta harakati davomida chizilgan egri chiziq L egri chiziqqa urinmaydi deb hisoblaymiz, aks holda bu formulalar to'g'ri bo'lmasligi mumkin.

Agar L yopiq egri chiziq bo'lmay, oddiy yoydan iborat bo'lsa, "sohaning ichidan" va "sohaning tashqarisidan" tushunchalari ma'noga ega bo'lmaydi, shunga qaramasdan (15) formulalar o'z kuchini saqlab qoladi. Bu holda L biror L' yoy bilan soat miliga qarshi aylanib o'tiladigan yopiq egri chiziqqacha to'ldiriladi. D — bu egri chiziq bilan chegaralangan soha bo'lsin. U holda (15) formulalardagi " + " va " − " belgilarni mos ravishda D sohaning ichidan yoki tashqarisidan (ya'ni L egri chiziqning chapidan va o'ngidan) yo'nalish deb tushuniladi.

3. Singulyar integrallar kompozitsiyasining formulasi. L — yopiq egri chiziq bo'lib,

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,\quad \varphi_2(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t}d\tau$$

bo‘lsin, $\varphi_2(t)$ funksiyaning bevosita φ τ orqali qanday ifodalanishini topamiz. Shu maqsadda Koshi tipidagi

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau, \quad f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-z}d\tau$$

integrallarni tekshiramiz. (15) formulalarning birinchisiga asosan:

$$f^+(t)=\frac{1}{2}\varphi(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau,$$

$$f_1^+(t)=\frac{1}{2}\varphi_1(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_1(\tau)}{\tau-t}dt.$$

Bulardan, $\varphi_1(t)$ va $\varphi_2(t)$ funksiyalarning aniqlanishiga ko‘ra

$$\varphi_1(t)=f^+(t)-\frac{1}{2}\varphi(t), \qquad \varphi_2(t)=f_1^+(t)-\frac{1}{2}\varphi_1(t) \tag{17}$$

tengliklarni hosil qilamiz. (17) dan $\varphi_1(t)$ ning qiymatini $f_1(z)$ ga olib borib qo‘yamiz:

$$f_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{f^+(\tau)}{\tau-z}d\tau-\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)}{\tau-z}d\tau. \tag{18}$$

(18) dagi birinchi integral Koshi integralidir, chunki uning $f^+(\tau)$ zichligi L egri chiziq ichida analitik $f(z)$ funksiyaning limit qiymati. Demak, bu integral $f(z)$ ga teng. (18) dagi ikkinchi integral esa, ravshanki, $\frac{1}{2}f(z)$ ga teng.

Shunday qilib,

$$f_1(z)=\frac{1}{2}f(z) \text{ va } f_1^+(t)=\frac{1}{2}f^+(t).$$

Endi (17) tenglikdan

$$\varphi_2(t)=\frac{1}{2}f^+(t)-\frac{1}{2}\left[f^+(t)-\frac{1}{2}\varphi(t)\right]=\frac{1}{4}\varphi(t).$$

$\varphi_1(t)$ funksiyaning ifodasini

$$\varphi_1(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}\,d\zeta$$

ko'rinishda yozib olsak, singulyar integralning kompozitsiyasi bo'lgan ushbu

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\tau}\,d\zeta=\frac{1}{4}\varphi(t) \qquad (19)$$

Puankare—Bertran formulasini hosil qilamiz. (19) formulada ikki karrali singulyar integralda integrallash tartibini o'zgartirish mumkin emas; agar integrallash tartibini o'zgartirsak,

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L \varphi(\zeta)d\zeta\int_L \frac{d\tau}{(\zeta-\tau)(\tau-t)}$$

integral hosil bo'ladi, bu integral esa nolga teng. Haqiqatan ham, agar $\zeta \neq t$ bo'lsa,

$$\int_L \frac{d\tau}{(\zeta-\tau)(\tau-t)}=\frac{1}{\zeta-t}\left[\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}-\int_L \frac{d\tau}{\tau-\zeta}\right].$$

(9) formulada $\varphi(\tau)=1$ bo'lsin. Agar z nuqta L egri chiziqning ichida yotsa, $\Phi(z)=1$ bo'ladi. Bu holda, (15) formulaning birinchisidan

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-t}=\frac{1}{2}.$$

Xuddi shunday

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{d\tau}{\tau-\zeta}=\frac{1}{2}.$$

Demak,

$$\int_L \frac{d\tau}{(\zeta-\tau)(\tau-t)}=0, \qquad \zeta \neq t.$$

Agar $\varphi(\tau,\zeta)$ funksiya L da Gyolder shartini qanoatlantirsa, (19) ga nisbatan umumiyroq

$$\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\int_L \frac{\varphi(\tau,\zeta)}{\zeta - \tau}d\zeta = -\pi^2\varphi(t,t) + \int_L d\zeta \int_L \frac{\varphi(\tau,\zeta)}{(\tau - t)(\zeta - \tau)}d\tau$$

Puankare—Bertran formulasi to'g'ri bo'ladi. Agar $\varphi(\tau,\zeta)$ funksiya τ ga bog'liq bo'lmasa, avvalgi formuladan darhol (19) kelib chiqadi.

Ushbu $\dfrac{1}{\tau - t}$ ifoda, bunda τ va $t - L$ egri chiziqning nuqtalari, Koshi yadrosi, $ctg\dfrac{\sigma - s}{2}$ esa, Gilbert yadrosi deb ataladi, bu yerda σ va $s -$ $[0,2\pi]$ oraliqda o'zgaradigan haqiqiy o'zgaruvchilar.

3- §. Koshi yadroli singulyar integral tenglamalar

1. Asosiy tushunchalar. Agar chiziqli

$$\varphi(t) + \int_L K(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t)$$

integral tenglamaning yadrosi

$$K(t,\tau) = \frac{M(t,\tau)}{|\tau - t|^\alpha}, \quad 0 \le \alpha < 1,$$

ko'rinishga ega bo'lsa (bu yerda $M(t,\tau)$ uzluksiz funksiya), bizga ma'lumki, uni iteratsiya yordamida uzluksiz yadroli integral tenglamaga keltirish mumkin. Bunday tenglama Fredgolm tenglamasining barcha xossalariga ega bo'ladi.

Agar $\alpha = 1$ bo'lsa, u holda integral singulyar integraldan iborat bo'ladi va tenglamani Fredgolm integral tenglamasiga keltirish usuli o'z kuchini yo'qotadi. Integral tenglamaning $K(t,\tau)$ yadrosi $\tau = t$ bo'lganda cheksizlikka aylanib, integral Koshi bo'yicha bosh qiymat ma'nosida mavjud bo'lsa, bunday integral tenglama *singular integral tenglama* deb yuritiladi. Koshi yadroli integral tenglama

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t,\tau)}{\tau - t}\varphi(\tau)d\tau = f(t) \qquad (20)$$

ko'rinishda yoziladi, bundagi L — ochiq yoki yopiq silliq egri chiziq. $K\varphi$ operatorni *singulyar operator* deyiladi.

L da berilgan $a(t)$, $f(t)$ va $K(t,\tau)$ funksiyalarni Gyolder shartini qanoatlantiradi deb hisoblaymiz. (20) tenglamaning yadrosini

$$\frac{K(t,\tau)}{\tau - t} = \frac{K(t,\tau) - K(t,t)}{\tau - t} + \frac{K(t,t)}{\tau - t}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Ushbu

$$K(t,t) = b(t), \quad \frac{1}{\pi i}\frac{K(t,\tau) - K(t,t)}{\tau - t} = k(t,\tau) \qquad (21)$$

belgilashlarni kiritsak, (20) tenglama

$$K\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t) \quad (22)$$

ko'rinishda yoziladi. (21) formulalardan ko'rinayaptiki, funksiya barcha L da, $K(t,\tau)$ esa, $\tau = t$ nuqtadan tashqari hamma joyda Gyolder shartini qanoatlantiradi va

$$|k(t,\tau)| < \frac{A}{|\tau - t|^{1-\alpha}}, \qquad 0 < \alpha \le 1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. (22) tenglamani *to'la singular integral tenglama* deyiladi.

$$K^{\circ}\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau$$

ifodani to'la integral tenglamaning xarakteristik, $\int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$ ifodani esa *regular qismi* deb yuritiladi. Ushbu

$$K^{\circ}\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t) \qquad (23)$$

tenglama (22) to'la tenglamaga mos *xarakteristik tenglama* deyiladi. Agar $f(t)$ funksiya aynan nolga teng bo'lmasa, (22) tenglama *bir jinsli bo'lmagan*, aks holda *bir jinsli tenglama* deb ataladi.

Bir jinsli $K\varphi = 0$ tenglamadan yadro o'zgaruvchilarining o'rnini almashtirish natijasida hosil bo'lgan

$$K'\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L k(\tau,t)\psi(\tau)d\tau = 0$$

tenglama $K\varphi = 0$ tenglamaga *qo'shma tenglama* deyiladi. Xususan,

$$K^{\circ\prime}\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{b(\tau)}{\tau - t}\psi(\tau)d\tau = 0$$

tenglama (23) xarakteristik tenglamaga qo'shma tenglama bo'ladi. Shu narsaga e'tiborni jalb qilamizki, xarakteristik K° operatorga qo'shma bo'lgan $K^{\circ\prime}$ operator, umuman aytganda, K' operatorning xarakteristik $K^{\prime\circ}$ qismidan iborat bo'lmaydi, chunki K' ning xarakteristik qismini ajratish uchun uning ifodasida

$$\int_L \frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau - t}d\tau = \int_L \frac{b(\tau) - b(t)}{\tau - t}\psi(\tau)d\tau + b(t)\int_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

almashtirishni bajarib, bundagi birinchi integralni uning regulyar qismiga qo'shib qo'ysak, K' operatorning xarakteristik qismi

$$K^{\prime\circ}\psi \equiv a(t)\psi(t) - \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

formula bilan aniqlanadi. Demak, $K^{\circ\prime}$ va $K^{\prime\circ}$ belgilashlarni bir biridan farq qilish kerak.

Quyidagi

$$s(t) = a(t) + b(t), \quad d(t) = a(t) - b(t) \tag{24}$$

belgilashlarni kiritamiz va bu funksiyalarni L da nolga aylanmaydi deb hisoblaymiz. Bu holda (20) yoki (22) tenglama *normal tipdagi tenglama* deb aytiladi.

Izoh. (20) tenglamani shunday ko'rinishda ifodalash mumkinki, bunda o'zgaruvchilar haqiqiy miqdorlardan iborat bo'ladi. Buni turli usullar bilan amalga oshirish mumkin. L— markazi koordinat boshida va radiusi 1 ga teng bo'lgan aylanadan iborat bo'lsin. Ushbu

$$\tau = \ell^{i\theta}, t = \ell^{i\sigma}$$

belgilashlarni kiritamiz. U holda

$$\frac{d\tau}{\tau - t} = \frac{ie^{i\theta}d\theta}{e^{i\theta} - e^{i\sigma}} \cdot \frac{e^{-i\frac{\theta+\sigma}{2}}}{e^{-i\frac{\theta+\sigma}{2}}} = \frac{ie^{i\frac{\theta-\sigma}{2}}d\theta}{e^{i\frac{\theta-\sigma}{2}} - e^{-i\frac{\theta-\sigma}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\cos\frac{\theta-\sigma}{2} + i\sin\frac{\theta-\sigma}{2}}{\sin\frac{\theta-\sigma}{2}}d\theta = \frac{1}{2}ctg\frac{\theta-\sigma}{2}d\theta + \frac{i}{2}d\theta.$$

Bu ifodani (20) tenglamaga qo'yib, uni (22) tenglamaga keltirishda qanday amallarni bajargan bo'lsak, xuddi shunday amallarni bajarib, quyidagi tenglamaga kelamiz:

$$a(\sigma)\psi(\sigma) + \frac{b(\sigma)}{2\pi}\int_0^{2\pi} ctg\frac{\theta-\sigma}{2}\psi(\theta)d\theta + \int_0^{2\pi} l(\sigma,\theta)d\theta = g(\sigma),$$

bunda $a(\sigma)$, $b(\sigma)$, $g(\sigma)$ — 2π davrli H shartni qanoatlantiruvchi berilgan funksiyalar, $l(\sigma,\theta)$ ham 2π davrli kuchsiz maxsuslikka ega bo'lgan berilgan funksiya.

Agar L birlik aylana bo'lmay, uzunligi 2π ga teng bo'lgan Lyapunov shartini qanoatlantiradigan yopiq egri chiziqdan iborat bo'lsa ham (20) tenglamani oxirgi ko'rinishdagi tenglamaga keltirish mumkin [10]. Aksincha, agar Gilbert yadroli oxirgi tenglama berilgan bo'lsa, uni yuqoridagi almashtirishlarga asosan Koshi yadroli (22) tenglamaga keltirish qiyin emas.

2. Xarakteristik tenglama. Avvalo (23) xarakteristik tenglamada $a(t)=0,\ b(t)=1$ holni, ya'ni birinchi turdagi

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau = f(t) \tag{25}$$

tenglamani tekshiramiz. L — silliq yopiq egri chiziq bo'lsin. (19) Puankare—Bertran formulasiga asosan

$$\frac{1}{(2\pi i)^2}\int_L \frac{d\tau}{\tau - t}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - \tau}d\zeta = \frac{1}{4}\varphi(t), \tag{26}$$

bundan darhol

$$\varphi(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau \tag{27}$$

funksiya (25) tenglamani qanoatlantirishi kelib chiqadi. Bu tenglamaning yechimi yagona ekanligiga ishonch hosil qitish qiyin emas. Haqiqatan ham, (25) tenglamaning har ikki tomonini $\frac{1}{\pi i}\frac{1}{t-\zeta}$ ga ko'paytirib, t bo'yicha integrallaymiz. (26) formulani e'tiborga olsak, (27) ni hosil qilamiz. Qisqa qilib aytganda (25) va (27) formulalar (26) ga asosan, biri ikkinchisining natijasidir. Endi (23) tenglamadagi $a(t)$ va $b(t)$ koeffitsientlar o'zgarmas bo'lsin. Bu tenglamaning har ikki tomoniga

$$\mathrm{M}\psi(\tau) = a\psi(\tau) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta \tag{28}$$

operatorni qo'llaymiz:

$$a\left[a\varphi(t) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta\right] +$$

$$+\frac{b}{\pi i}\int_L \frac{1}{\tau-t}\left[a\varphi(\tau) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta-\tau}d\zeta\right]d\tau = af(t) - \frac{b}{\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta.$$

Bundan darhol, (24) ifodalar noldan farqli bo'lganligi sababli, (26) formulaga asosan

$$\varphi(t) = \frac{a}{a^2-b^2}f(t) - \frac{b}{\left(a^2-b^2\right)\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta-t}d\zeta \tag{29}$$

ni hosil qilamiz. (29) formula bilan aniqlangan $\varphi(t)$ funksiyaning $a(t)$ va $b(t)$ lar o'zgarmas bo'lganda (23) tenglamani qanoatlantirishiga ishonch hosil qilish qiyin emas. Umumiy (22) tenglama tekshirilganda (28) operatorni qo'llash natijasida (22) tenglama Fredgolm tenglamasiga keladi. Agar a, b o'zgarmas bo'lsa, hosil bo'lgan Fredgolm tenglamasi (22) tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Umumiy holda qo'shimcha tadqiqotlarni olib borishga to'g'ri keladi. Shu maqsadda, singulyar integral tenglamalarni o'rganishda muhim ahamiyatga ega bo'lgan analitik funksiyalar chegaraviy masalalari nazariyasidan Riman masalasini tekshiramiz.

4- §. Riman masalasi

1. Masalaning qo'yilishi. *L*— kompleks o'zgaruvchining tekisligini ichki D^+ va tashqi D^- sohaga ajratib turuvchi silliq yopiq egri chiziq bo'lib, $G(t)$ va $g(t)$ — L da berilgan Gyolder shartini qanoatlantiruvchi funksiyalar bo'lsin, shu bilan birga $G(t)$ nolga aylanmasin. Limit qiymatlari L egri chiziqda

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \tag{30}$$

shartni qanoatlantiruvchi bo'lak-bo'lak analitik $\Phi(z)$ funksiya topilsin.

Eslatib o'tamiz, bir-birini to'la tekislikkacha to'ldiruvchi D^+ va D^- sohalarda ikkita mustaqil $\Phi^+(z)$, $\Phi^-(z)$ ifodalar bilan aniqlanuvchi $\Phi(z)$ analitik funksiyani *bo'lak-bo'lak analitik funksiya* deyiladi. Bu masala *ulash masalasi* yoki *Gilbert masalasi ham* deb yuritiladi. $G(t)$ funksiyani *Riman masalasining koeffitsienti*, $g(t)$ funksiyani esa *uning ozod hadi* deyiladi.

Avval Riman masalasining xususiy holini tekshramiz. L yopiq egri chiziqda Gyolder shartini qanoatlantiruvchi $\varphi(t)$ funksiya berilgan bo'lsin. Cheksizlikda nolga aylanuvchi va L egri chiziqdan o'tishda $\varphi(t)$ sakrashga ega bo'lgan, ya'ni

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \tag{31}$$

shartni qanoatlantiruvchi bo'lak-bo'lak analitik $\Phi(z)\big(\Phi(z) = \Phi^+(z),\ z \in D^+,\ \Phi(z) = \Phi^-(z),\ z \in D^-\big)$ funksiya topilsin. Bu masalaning yechimi (16) formulaga asosan, ushbu

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau \tag{32}$$

funksiyadan iborat bo'lishi ravshan. Bu yechimning yagonaligini isbot qilish qiyin emas. Haqiqatan ham, ikkita yechim bor deb hisoblab, ularning ayirmasini tekshirsak, L bu ayirma uchun egri chiziqdagi sakrash nolga teng bo'ladi.

Agar $\Phi^-(\infty) = 0$ qo'shimcha shart olib tashlansa, masalaninig yechimi

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - z}\,d\tau + \text{const}$$

formula bilan aniqlanishini ko'rish qiyin emas. Riman masalasini yechishda

$$\chi = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_L$$

formula bilan aniqlanadigan χ butun son muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Bu yerdagi $[\ ]_L$ belgi qavs ichidagi ifodaning L chiziq musbat yo'nalishi bo'yicha aylanishidagi orttirmasini bildiradi. Bu χ sonni $G(t)$ *funksiyaning indeksi* yoki *Riman masalasining indeksi* deyiladi.

$\ln G(t) = \ln|G(t)| + i\arg G(t)$ bo'lgani uchun va $\ln|G(t)|$ funksiya chiziqni aylanib chiqqandan so'ng o'zining boshlang'ich qiymatiga qaytib kelganligi sababli

$$\left[\ln G(t)\right]_L = i\left[\arg G(t)\right]_L$$

bo'ladi, demak,

$$\chi = Ind G(t) = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln G(t)\right]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_L.$$

Masalaning shartlari o'zgarmas bo'lganda indeksning qiymati L ning musbat yo'nalishini tanlab olishga bog'liq emasligini, ya'ni χ son masalaninig invarianti ekanligini ko'rsatish qiyin emas.

Indeksni integral ko'rinishida ham yozish mumkin:

$$\chi = Ind G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t) = \frac{1}{2\pi}\int_L d\arg G(t).$$

Indeks ta'rifidan bevosita quyidagi fikrlar kelib chiqadi:

1°. *Funksiyalar ko'paytmasining indeksi ko'payuvchilar indekslarining yig'indisiga teng. Kasrning indeksi bo'linuvchi va bo'luvchi indekslarining ayirmasiga teng.* Endi $G(t)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lib, L chiziqning ichida yoki tashqarisidagi analitik funksiyaning chegaraviy qiymatidan iborat bo'lsin. U holda

$$\chi = \frac{1}{2\pi i}\int_L d\ln G(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G'(t)}{G(t)}\,dt,$$

ya'ni indeks $G(t)$ funksiyaning logarifmik qoldig'iga teng.

Indeksning keyingi xossalarini bayon qilish uchun kompleks o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidan argument prinsipini eslatib o'tamiz. Yopiq L egri chiziq bilan chegaralangan D sohada $f(z)$ funksiya chekli sondagi qutblardan boshqa hamma nuqtalarda analitik bo'lsin. Bu funksiyaning biror z_0 nuqta atrofidagi qatorga yoyilmasi quyidagicha bo'lsin:

$$f(z) = c_n(z - z_0)^n + c_{n+1}(z - z_0)^{n+1} + \ldots = (z - z_0)^n f_1(z),$$
$$f_1(z_0) = c_n \neq 0,$$

n sonni funksiyaning z_0 nuqtadagi *tartibi* deyiladi.

Agar $n > 0$ bo'lsa, funksiyaning tartibi uning noli tartibidan iborat, agar $n > 0$ bo'lsa, u holda uning tartibi teskari ishorasi bilan qutb tartibidan iborat. Agar funksiyaning z_0 nuqtadagi tartibi nol bo'lsa, bu nuqtada funksiya noldan farqli bo'lgan chekli qiymat qabul qiladi. Cheksiz uzoqlashgan nuqta tekshirilganda $z - z_0$ binomni $\frac{1}{z}$ bilan almashtirish kerak. Funksiyaning sohadagi nol va qutblarining sonini mos ravishda N_D va P_D orqali belgilab olamiz.

Argument prinsipi. $f(z)$ funksiyaning yopiq L egri chiziq ichidagi nollari soni bilan qutblari sonining ayirmasi, z nuqta L ni musbat yo'nalishda aylangandagi $\arg f(z)$ o'zgarishining 2π ga nisbatiga teng. Argument prinsipidan indeksning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

2°. Agar $G(t)$ funksiya yopiq egri chiziq ichidagi yoki tashqarisidagi analitik funksiyaning chegaraviy qiymati bo'lsa, u holda uning indeksi chiziq ichidagi nollarining soniga teng yoki chiziq tashqarisidagi minus ishora bilan olingan nollarining soniga teng.

3°. Agar $G(z)$ funksiya yopiq egri chiziq ichidagi chekli sondagi qutblardan tashqari hamma nuqtalarda analitik bo'lsa, u holda nollar sonini nollar soni bilan qutblar soni ayirmasiga almashtirish kerak.

Nollar va qutblarning kattaligi qancha bo'lsa, ular shuncha marta hisoblanadi. Qo'shma kompleks funksiyalarning indekslari ishorasi bilan teskari bo'lishini qayd qilib o'tamiz.

Misol. Koordinatalar boshini o'z ichiga olgan ixtiyoriy yopiq L egri chiziq bo'yicha $G(t) = t^n$ funksiyaning indeksi hisoblansin.

t^n funksiya egri chiziq ichida tartibi n ga teng bo'lgan bitta nolga ega z^n funksiyaning chegaraviy qiymatidan iborat bo'lgani uchun $\chi = Ind\, t^n = n$ bo'ladi.

Boshqacha usul bilan ham bu indeksni hisoblash mumkin. Agar t ning argumenti φ bo'lsa, t^n ning argumenti $n\varphi$ ga teng bo'ladi. t

nuqta L chiziqni aylanib, boshlang'ich qiymatiga qaytib kelganda, φ argument orttirmaga ega bo'ladi. Demak, $Ind\, t^n = n$.

2. Kanonik yechim. Bir jinsli masalaning yechilishi. Bir jinsli bo'lmagan (30) va bir jinsli

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \tag{33}$$

masalalarning umumiy yechimlari yordamchi funksiya orqali ifodalanadi. Shu funksiyani topishdan boshlaymiz. Bir jinsli (33) masalaning xususiy yechimini egri chiziqda nolga aylanmaydigan funksiyalar sinfidan izlaymiz. Izlanayotgan funksiyalarning D^+, D^- sohalardagi nollarining soni mos ravishda N_+ va N_- bo'lsin. Indeksning 1° va 2° xossalariga asosan (33) tenglikning har ikki tomonidan indeksni olsak, u

$$N_+ + N_- = Ind\, G(t) = \chi \tag{34}$$

bo'ladi.

$\chi = 0$ bo'lsin. Bu shart bajarilganda $\ln G(t)$ bir qiymatli funksiya bo'ladi. (34) tenglikdan $N_+ = N_- = 0$ bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni yechim barcha tekislikda nollarga ega emas. Shu sababli $\ln \Phi^\pm(z)$ funksiyalar o'z sohalarida analitik bo'ladi, demak, o'zlarining chegaraviy $\ln \Phi^\pm(t)$ qiymatlari bilan birga bir qiymatli bo'ladi. (33) shartni logarifmlab,

$$\ln \Phi^+(t) - \ln \Phi^-(t) = \ln G(t)$$

tengliklarni hosil qilamiz. $\ln G(t)$ uchun ixtiyoriy shohchani olish mumkin. Oxirgi natija shohchani tanlashga bog'liq emasligini tekshirib ko'rish qiyin emas.

Shunday qilib, biz L da berilgan sakrash bo'yicha bo'lak-bo'lak $\ln \Phi(z)$ analitik funksiyani topish masalasiga keldik. Bu masalaning yechimi $\ln \Phi^-(\infty) = 0$ shart bajarilganda

$$\ln \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau \tag{35}$$

formula bilan aniqlanishi bizga ma'lum. Qisqalik uchun

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau - z} d\tau = \Gamma(z)$$

belgini kiritamiz. (33) chegaraviy masalaning $\Phi^-(\infty)=1$ shartni qanoatlantiruvchi yechimlari Soxoskiy—Plemel formulalariga asosan

$$\Phi^+(z)=e^{\Gamma^+(z)},\ \Phi^-(z)=e^{\Gamma^-(z)}$$

funksiyalardan iborat bo'ladi. Agar qo'shimcha $\Phi^-(\infty)=1$ shart bo'lmasa, u holda (35) formulada ixtiyoriy $\ln A$ o'zgarmas sonni qo'shib qo'yish kerak va yechim quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\Phi^+(z)=Ae^{\Gamma^+(z)},\quad \Phi^-(z)=Ae^{\Gamma^-(z)}. \tag{36}$$

$\Gamma^-(\infty)=0$ bo'lgani uchun A o'zgarmas son $\Phi^-(z)$ funksiyaning cheksizlikdagi qiymatidan iborat bo'ladi. Shunday qilib, $\chi=0$ bo'lgan holda va ixtiyoriy $\Phi^-(\infty)\neq 0$ da yechim ixtiyoriy o'zgarmasni o'z ichiga oladi, demak, bitta chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimga ega bo'lamiz. Agar $\Phi^-(\infty)=0$ bo'lsa, $A=0$ bo'ladi va masala faqat trivial yechimga ega bo'ladi, bunday bo'lishi $N_-=0$ ga asosan tabiiydir. Bu mulohazalardan muhim hulosa kelib chiqadi.

L chiziqda berilgan, Gelder shartini qanoatlantiruvchi va indeksi nolga teng bo'lgan ixtiyoriy $G(t)\neq 0$ *funksiyani* D^+, D^- *sohalarda analitik va bu sohalarda nollarga ega bo'lmagan funksiyaning* $\Phi^+(t)$ *va* $\Phi^-(t)$ *chegaraviy qiymatlarining nisbati ko'rinishida ifodalash mumkin. Bu funksiyalar o'zgarmas ko'paytma aniqligida topiladi va (36) formulalar bilan beriladi.*

Endi umumiy, ya'ni $\chi\neq 0$ bo'lgan holni tekshirishga o'tamiz. Bir jinsli (33) shartni qanoatlantiruvchi va tartibi masalaning indeksiga teng bo'lgan bitta yolg'iz nuqtadan tashqari barcha tekislikda nolinchi tartibga ega bo'lgan bo'lak-bo'lak analitik funksiyani izlaymiz. Yolg'iz nuqta sifatida tekislikning ixtiyoriy nuqtasini olish mumkin. Bundan keyin, teskarisi aytilgan bo'lmasa, yolg'iz nuqta deb cheksiz uzoqlashgan nuqtani olamiz.

Kanonik $X(z)$ *yechim yoki funksiya* deb, tartibi masalaning indeksiga teng bo'lgan cheksiz uzoqlashgan nuqtadan tashqari barcha tekislikda bo'lak-bo'lak analitik va (33) chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi funksiyani aytiladi. Bu funksiyani indeks nolga teng bo'lgan holga keltirish bilan tuzish mumkin. Chegaraviy shartni

$$\Phi^+(t)=t^{\chi}t^{-\chi}G(t)\Phi^-(t)$$

ko'rinishda yozib olamiz. Nolinchi indeksga ega bo'lgan $t^{-\chi}G(t)$ funksiyani analitik funksiyalar chegaraviy qiymatlarining nisbati sifatida tasvirlab,

$$t^{-\chi}G(t)=\frac{\Gamma^+(t)}{\Gamma^-(t)},\ \Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln\left[\tau^{-\chi}G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau \tag{37}$$

kanonik yechim uchun ushbu

$$X^+(z)=e^{\Gamma^+(z)},\qquad X^-(z)=z^{-\chi}e^{\Gamma^-(z)} \tag{38}$$

ifodani hosil qilamiz. $X^+(t)=G(t)X^-(t)$ tenglikdan Riman masalasining koeffitsientini kanonik yechimlarning nisbati sifatida ifodalash mumkinligi kelib chiqadi:

$$G(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)}. \tag{39}$$

$\chi>0$ bo'lganda, cheksizlikda χ tartibli nolga ega bo'lgan kanonik yechim, (33) masalaning xususiy yechimlaridan biri bo'ladi. $\chi<0$ bo'lganda kanonik yechim cheksizlikda $|\chi|$ tartibli qutbga ega bo'ladi va u endi yechim bo'lmaydi, lekin bir jinsli bo'lmagan masalani yechishda undan yordamchi funksiya sifatida foydalaniladi. Endi bir jinsli masalani yechishga o'tamiz. $\chi=IndG(t)$ ixtiyoriy butun son bo'lsin. $G(t)$ funksiyani (39) formula bilan ifodalab,(33) chegaraviy shartni

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Bu tenglikning chap tomonida D^+ sohada analitik funksiyaning chegaraviy qiymati, o'ng tomonida esa cheksizlikda $-\chi$ dan kam bo'lmagan tartibga ega bo'lgan funksiyaning chegaraviy qiymati turibdi (ta'rifga binoan $X(z)$ ning tartibi χ). Shunday qilib, $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ funksiya barcha tekislikda analitik bo'lib, cheksizlikda chekli tartibga ega, demak, $\chi>0$ da bu funksiya koeffitsientlari ixtiyoriy bo'lgan χ darajali ko'phaddan iboratdir. Agar $\chi<0$ bo'lsa, bu funksiya o'zgarmas sondan iborat bo'ladi. Lekin cheksizlikda nolga aylangani uchun u aynan nolga teng bo'ladi. Demak, $\chi < 0$ bo'lganda bir jinsli masala faqat trivial yechimga ega bo'ladi.

$\chi > 0$ da ixtiyoriy koeffitsientli χ darajali ko'phadni $P_\chi(z)$ orqali belgilab, bir jinsli masalaning yechimini quyidagi ko'rinishda hosil qilamiz:

$$\Phi(z) = P_\chi(z) X(z) \text{ yoki}$$

$$\Phi^+(z) = P_\chi(z) e^{\Gamma^+(z)}, \quad \Phi^-(z) = z^{-\chi} P_\chi(z) e^{\Gamma^-(z)}, \tag{40}$$

bu yerdagi $\Gamma(z)$ (37) formula bilan aniqlanadi. Shunday qilib, quyidagi natijaga keldik.

Agar Riman chegaraviy masalasining χ indeksi manfiy bo'lmasa, (33) bir jinsli masala $\chi+1$ ta chiziqli bog'liq bo'lmagan

$$\Phi_k^+(z) = z^k C^{\Gamma^+(z)}, \Phi_k^-(z) = z^{k-\chi} C^{\Gamma^-(z)}, k = 0,1...,\chi$$

yechimlarga ega bo'ladi. Umumiy yechim $\chi+1$ ta ixtiyoriy o'zgarmasni o'z ichiga olib, (40) formula bilan aniqlanadi. Indeks manfiy bo'lganda (33) masala trivial $\Phi(z) = 0$ yechimdan boshqa cheksizlikda nolga aylanadigan yechimlarga ega bo'lmaydi.

3. Bir jinsli bo'lmagan masalani yechish. (30) chegaraviy shartni (39) tenglikka asosan

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}$$

ko'rinishda yozib olamiz. $\dfrac{g(t)}{X^+(t)}$ funksiya Gyolder shartini qanoatlantiradi. Bu funksiyani 1- bandda bayon qilganimizga asosan analitik funksiyalar chegaraviy qiymatlarining ayirmasi sifatida tasvirlash mumkin, ya'ni

$$\frac{g(t)}{X^+(t)} = \Psi^+(t) - \Psi^-(t), \text{ bunda}$$

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \frac{d\tau}{\tau - z}. \tag{41}$$

Bu holda chegaraviy shartni

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t)$$

ko'rinishda yozish mumkin. $\chi \geq 0$ bo'lganda $\dfrac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)}$ funksiya cheksizlikda χ tartibli qutbga, $\chi < 0$ da esa, shu tartibli nolga ega bo'ladi. Bir jinsli masalani yechganda qanday yo'l tutgan bo'lsak, xuddi shunday mulohazalarni takrorlab, quyidagi natijalarga kelamiz:

1°. $\chi \geq 0$ bo'lsin. U holda

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)} - \Psi^{+}(t) = \frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)} - \Psi^{-}(t) = P_{\chi}(t).$$

Bundan

$$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + P_{\chi}(z)\right]$$

yechimga ega bo'lamiz, shu bilan birga $X(z), \Psi(z)$ funksiyalar (38) va (41) formulalar bilan ifodalanadi, $P_{\chi}(z)$ esa koeffitsientlari ixtiyoriy bo'lgan χ darajali ko'phaddir. Oxirgi formula bir jinsli masalaning umumiy $X(z)P_{\chi}(z)$ yechimini qo'shiluvchi sifatida o'z ichiga olgani uchun bir jinsli bo'lmagan masalaning umumiy yechimi ekanligini ko'rish qiyin emas.

2°. $\chi < 0$ bo'lsin. Bu holda $\dfrac{\Phi^{-}(z)}{X^{-}(z)}$ funksiya cheksizlikda nolga teng bo'ladi va

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{X^{+}(t)} - \Psi^{+}(t) = \frac{\Phi^{-}(t)}{X^{-}(t)} - \Psi^{-}(t) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bundan

$$\Phi(z) = X(z)\Psi(z)$$

tenglik kelib chiqadi. $\Phi^{-}(z)$ funksiya ifodasidagi birinchi ko'paytuvchi (38) formulaga asosan cheksizlikda $-\chi$ tartibli qutbga ega, ikkinchisi esa (41) Koshi tipidagi integral sifatida umuman aytganda cheksizlikda birinchi tartibli nolga ega. Demak, $\Phi^{-}(z)$ cheksizlikda tartibi $-\chi - 1$ dan katta bo'lmagan qutbga ega bo'ladi. Shunday qilib, agar $\chi < -1$ bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan masala, umuman aytganda, trivial yechimdan boshqa yechimlarga ega bo'lmaydi. Bu masala uning ozod hadi ba'zi qo'shimcha shartlarni qanoatlantirgandagina yechimga ega bo'ladi. Bu shartlarni hosil qilish uchun (41) Koshi tipidagi integralni cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida qatorga yoyamiz:

$$\Psi^{-}(z)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k z^{-k}, \quad \text{bu yerda}$$

$$c_k=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\tau^{k-1}d\tau.$$

$\Phi^{-}(z)$ funksiyaning cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida analitik bo'lishi uchun $\Psi^{-}(z)$ funksiya yoyilmasining birinchi $-\chi-1$ koeffitsientlari nolga aylanishi kerak. Bundan, indeks manfiy $(\chi<-1)$ bo'lgan holda bir jinsli bo'lmagan masalaning yechimga ega bo'lishi uchun quyidagi

$$\int_L \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\tau^{k-1}d\tau=0,\ k=1,2,...,-\chi-1 \qquad (42)$$

shartning bajarilishining zarur va yetarliligi kelib chiqadi. Natijada quyidagi xulosaga keldik.

Rimanning bir jinsli bo'lmagan masalasi $\chi\geq 0$ bo'lgan holda ixtiyoriy ozod hadda yechimga ega bo'ladi va uning umumiy yechimi

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(\tau)}{X^{+}(\tau)}\frac{d\tau}{\tau-z}+X(z)P(z) \qquad (43)$$

formula bilan aniqlanadi. Agar $\chi=-1$ bo'lsa ham bir jinsli bo'lmagan masala yechimga ega bo'ladi va yechim yagona bo'ladi.

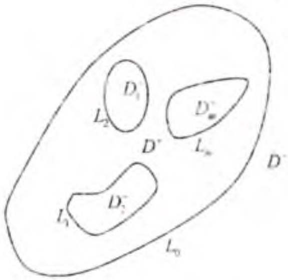
Bir jinsli bo'lmagan masala $\chi<-1$ bo'lgan holda umuman aytganda, yechimga ega bo'lmaydi. Uning yechimga ega bo'lishi uchun ozod hadi $-\chi-1$ ta (42) shartlarni qanoatlantirishi zarur va yetarlidir. Bu shartlar bajarilganda yagona yechim (43) formula bilan aniqlanadi, faqat bunda $P_{\chi}(z)\equiv 0$ deb hisoblash kerak.

Bu masalaning cheksiz uzoqlashgan nuqta atrofida nolga teng bo'ladigan yechimi keyinchalik muhim tatbiqqa egadir. Bu holda χ darajali ko'phad o'rniga $\chi-1$ darajali ko'phad olish kerak. Indeks manfiy bo'lgan holda masalaning yechimga ega bo'lishi uchun $c_{-\chi}$ koeffitsientning ham nolga teng bo'lishini talab qilish kerak.

Demak, $\Phi^{-}(\infty)=0$ shartda $\chi\geq 0$ bo'lganda yechim

$$\Phi(z)=X(z)\left[\Psi(z)+P_{\chi-1}(z)\right] \qquad (44)$$

formula bilan aniqlanadi ($\chi = 0$ bo‘lganda $P_{\chi-1}(z) \equiv 0$ deb hisoblash kerak). Agar $\chi \geq 0$ bo‘lsa, yechilishning $\int_L \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)} \tau^{k-1} d\tau = 0,\ k = 1, 2, \dots, -\chi$ shartlari bajarilganda, yechim avvalgiday (44) formula bilan ifodalanadi, bunda $P_{\chi-1}(z) \equiv 0$ bo‘ladi.



5- chizma.

4. Ko‘p bog‘lamli soha uchun Riman masalasi. Faraz qilaylik, L egri chiziq, m + 1 ta o‘zaro kesishmaydigan yopiq egri chiziqlarning to‘plamidan iborat bo‘lsin, ya’ni $L = L_0 + \quad + L_1 + \dots + L_m$, shu bilan birga L_0 yopiq egri chiziq qolgan hammasini o‘z ichiga olgan bo‘lsin (5- chizma). L_0 egri chiziqning ichida, $L_1, \dots L_m$ egri chiziqlarning tashqarisida yotuvchi (m+1) — bog‘lamli sohani D^+ orqali, $D^+ + L$ ni to‘la tekislikkacha to‘ldiruvchisini D^- orqali belgilaymiz. L egri chiziqni musbat aylanib chiqish deganda D^+ sohani chapda qoldiruvchi aylanish hisoblanadi, ya’ni L_0 yopiq egri chiziqni soat strelkasiga qarshi, $L_1, \dots L_m$ yopiq egri chiziqlarni esa, soat strelkasi bo‘yicha aylanish kerak.

Sakrash to‘g‘risidagi

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g(t)$$

masala, bir bog‘lamli sohadek, ushbu

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\tau) d\tau}{\tau - z}$$

formula bilan yechiladi. Riman masalasi bir bog‘lamli soha uchun qanday qo‘yilgan bo‘lsa, bu holda ham xuddi shunday qo‘yiladi. Ushbu

$$\chi_k = \frac{1}{2\pi} \left[\arg G(t) \right]_{L_k}$$

belgilashni kiritamiz. Masalaning indeksi deb,

$$\chi = \sum_{k=0}^{m} \chi_k$$

miqdorni aytiladi. Agar ichki egri chiziqlar uchun $\chi_k (k=1,...,m)$ lar nolga teng bo'lsa, masalaning yechimi bir bog'lamli sohada qanday ko'rinishga ega bo'lsa, bu holda ham shunday ko'rinishda bo'lishini ko'rish qiyin emas.

Umumiy holni sodda holga keltirish uchun

$$\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}$$

funksiyani kiritamiz, bundagi z_k – ichki L_k yopiq egri chiziqlarda yotuvchi ba'zi nuqtalar. Agar $k \neq j$ bo'lsa, $\left[\arg(t-z_k)\right]_{L_j}=0$ va $\left[\arg(t-z_j)\right]_{L_j}=-2\pi$ ekanligini e'tiborga olib,

$$\frac{1}{2\pi}\left[\arg\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}\right]_{L_j}=\frac{1}{2\pi}\left[\arg(t-z_j)^{\chi}\right]_{L_j}=-\chi_j, \quad j=1,2,...,m$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan

$$\left\{\arg\left[G(t)\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}\right]\right\}_{L_j}=0, \quad j=1,2,...,m$$

bo'lishi kelib chiqadi. Endi $G(t)\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}$ funksiya argumentining egri chiziq bo'yicha o'zgarishini hisoblaymiz:

$$\frac{1}{2\pi}\left\{\arg\left[G(t)\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}\right]\right\}_{L_0}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\arg G(t)\right]_{L_0}+\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{m}\left[\chi_k\arg(t-z_k)\right]_{L_0}=$$

$$=\chi_0+\sum_{k=1}^{m}\chi_k=\chi.$$

Koordinat boshi D^+ sohada yotganligi uchun

$$\left[\arg t\right]_{L_k}=0,\ k=1,2,...,m,\ \left[\arg t\right]_{L_0}=2\pi$$

bo'ladi. Shu sababli

$$\left\{\arg\left[t^{-\chi}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}G(t)\right]\right\}_{L_k}=0$$

tenglik kelib chiqadi.

Endi bir jinsli masalani yechishga o'tamiz. Chegaraviy

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)$$

shartni

$$\Phi^+(t)=\frac{t^{\chi}}{\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}}\left[t^{-\chi}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}G(t)\right]\Phi^-(t) \tag{45}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Har bir L_k, $k=0,1,...,m$, yopiq egri chiziqda indeksi nolga teng bo'lgan $t^{-\chi}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi}G(t)$ funksiyani ushbu nisbat ko'rinishida ifodalash mumkin:

$$t^{\chi}\prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}G(t)=\frac{e^{\Gamma^+(t)}}{e^{\Gamma^-(t)}},$$

bunda

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\ln\left[\tau^{-\chi}\prod_{k=1}^{m}(\tau-z_k)^{\chi_k}G(\tau)\right]}{\tau-z}d\tau\,. \tag{46}$$

Masalaning kanonik yechimlari

$$X^+(z)=\prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{-\chi}e^{\Gamma^+(z)},\; X^-(z)=z^{-\chi}e^{\Gamma^-(z)} \tag{47}$$

formulalar bilan aniqlanadi. (45) chegaraviy shart

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}=\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}$$

ko'rinishda yoziladi. 2 -banddagi mulohazalarni takrorlab,

$$\begin{aligned} \Phi^{+}(z) &= \prod_{k=1}^{m}(z-z_k)^{-\chi_k} e^{\Gamma^{+}(z)} P_{\chi}(z), \\ \Phi^{-}(z) &= z^{-\chi} e^{\Gamma^{-}(z)} P_{\chi}(z) \end{aligned} \tag{48}$$

yechimlarga ega bo'lamiz. Bulardan ko'rinayaptiki, yechim bir bog'lamli soha uchun olingan yechimdan $\Phi^{+}(z)$ funksiyadagi $\prod_{k=1}^{\infty}(z-z_k)^{-\chi_k}$ ko'paytma bilan farq qiladi.

Qo'shimcha $\Phi^{-}(\infty)=0$ shart qo'yilganda (48) formulalarda $P_{\chi-1}(z)$ ko'phad olish kerak. Keyinchalik bizga kerak bo'ladigan $X(z)$ kanonik yechimning egri chiziqdagi limit qiymatlarini hisoblaymiz. (46) formuladan Soxotskiy—Plemel formulalariga asosan limit qiymatlarini topamiz:

$$\Gamma^{\pm}(t) = \pm\frac{1}{2}\ln\left[t^{-\chi}\prod(t)G(t)\right] + \Gamma(t), \tag{49}$$

bunda $\Gamma(t)$ — (46) integralning bosh qiymati va

$$\prod(t) = \prod_{k=1}^{m}(t-z_k)^{\chi_k}.$$

(49) tengliklarni e'tiborga olib, (47) formulalarda $z \to t$ da limitga o'tsak,

$$X^{+}(t) = \sqrt{\frac{G(t)}{t^{\chi}\prod(t)}}\, e^{\Gamma(t)},\quad X^{-}(t) = \frac{1}{\sqrt{t^{\chi}\prod(t)G(t)}}\, e^{\Gamma(t)}$$

formulalarni hosil qilamiz. Bir jinsli bo'lmagan masalani tekshirganda xuddi 3- banddagidek chegaraviy

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t)$$

shartni

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \Psi^+(t) = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} - \Psi^-(t)$$

ko'rinishda ifodalab olamiz. Bu yerdagi $\Psi(z)$ funksiya (41) formula bilan aniqlanadi. Bundan umumiy

$$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + P_\chi(z)\right]$$

yechimni topamiz. Agar yechimga $\Phi^-(\infty) = 0$ shart qo'yilsa, u

$$\Phi(z) = X(z)\left[\Psi(z) + P_{\chi-1}(z)\right]$$

ko'rinishga ega bo'ladi. $\chi < 0$ bo'lgan holda bir jinsli bo'lmagan masala

$$\int_L \frac{g(t)}{X^+(t)} t^{k-1} dt = 0$$

shart bajarilgandagina yechimga ega bo'ladi, bu yerdagi k, agar yechim cheksizlikda chegaralangan bo'lsa, 1 dan $-\chi - 1$ gacha, agar $\Phi^-(\infty) = 0$ shart bajarilsa, 1 dan $-\chi$ gacha qiymatlarni qabul qiladi. Bu shart bajarilganda yechimni yuqoridagi formulalarda $P_\chi(z) \equiv 0$ deb hisoblab, hosil qilish mumkin.

Agar tashqi L_0 yopiq egri chiziq bo'lmasa, D^+ soha teshiklari bo'lgan barcha tekislikdan iborat bo'ladi. Bu holda cheksiz uzoqlashgan nuqta D^- sohaga emas, balki D^+ sohaga tegishli bo'ladi. Shuning uchun ham cheksizlikda $\Phi^-(z)$ funksiyani emas, $\Phi^+(z)$ funksiyaning holatini e'tiborga olish kerak. Bu holning avvalgi holdan muhim farqi shundaki, barcha $L_k\,(k = 1.2,...,m)$ yopiq egri chiziqlarga nisbatan $\prod_{k=1}^{m}(t - z_k)^{\chi_k} G(t)$ funksiyaning indeksi nolga teng bo'ladi va bu funksiyada $t^{-\chi}$ ko'paytma ishtirok etmaydi. Shu sababli masalaning yechimini hosil qilish uchun bu ko'paytmani tushirib qoldirib, avvalgi mulohazalarni qaytarish yetarlidir.

5. Ochiq egri chiziqlar uchun Riman masalasi. L egri chiziq chetlaridan boshqa umumiy nuqtalarga ega bo'lmagan silliq L_k, $k=1,2,...,\rho$, ochiq yoylardan tashkil topgan bo'lsin. L egri chiziqning tugunlarini, ya'ni L ni tashkil qiluvchi yoylarning chetki nuqtalarini c_k, $k=1,2,...,n$, orqali, yoki soddagina c deb belgilab olamiz. L chiziqning tugunlaridan boshqa nuqtalarini oddiy nuqtalar deyiladi. L chiziqning nuqtalarini o'z ichiga olmagan tekislikning har bir chekli sohasida analitik, L ga chapdan va o'ngdan uzluksiz davom etdiriladigan, tugunlar atrofida esa,

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad 0 \le \alpha = \text{const} < 1$$

shartni qanoatlantiradigan $\Phi(z)$ funksiyani bo'lak-bo'lak analitik funksiya deb ataladi. G *(t)* va g *(t)* funksiyalar L da berilgan va Gyolder shartini qanoatlantiruvchi bo'lib, barcha L da $G(t) \neq 0$ bo'lsin.

Riman masalasi quyidagicha qo'yilganda, *cheksizlikda chekli tartibda, L chiziqqa chapdan va o'ngdan yaqinlashganda* $\Phi^+(t), \Phi^-(t)$ *chegaraviy qiymatlari*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \tag{50}$$

chegaraviy shartni qanoatlantiruvchi bo'lak-bo'lak analitik $\Phi(z)$ *funksiya topilsin.*

L chiziqda (50) chegaraviy shart bajariladi deganda, bu shart oddiy nuqtalarda bajarilishi tushuniladi. Xuddi yuqoridagidek, $g(t)=0$ bo'lsa, ya'ni

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \tag{51}$$

shart bajarilsa, masalani *bir jinsli masala* deb yuritamiz.

Agar nafaqat X (z) funksiya, balki $\frac{1}{X(z)}$ funksiya ham bo'lak-bo'lak analitik bo'lsa, X (z) ni (51) masalaning *kanonik yechimi* deyiladi.

Bo'lak-bo'lak analitik funksiyaning ta'rifiga asosan c tugunlar yaqinida

$$|\mathrm{X}(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \ \alpha < 1,$$

$$\frac{1}{|\mathrm{X}(z)|} < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \ \alpha < 1 \qquad (52)$$

shartlar bajarilishi kerak.

Kanonik yechimni tuzishga o'tamiz. $\ln G(t)$ deganda har bir $L_1, L_2, ..., L_p$ yoyda uzluksiz o'zgaruvchi aniq qiymat tushuniladi. Farazimizga asosan $G(t)$ funksiya Gyolder shartini qanoatlantirgani uchun $\ln G(t)$ funksiya ham bu shartni qanoatlantiradi. L chiziqning tugunlarini $c_1, c_2, .., c_n$ orqali belgilab olamiz. Chetki nuqtasi c_k bo'lgan L_j yoy bo'yicha t nuqta c_k tugunga intilganda $\ln G(t)$ funksiya aniq limitga intiladi, buni biz $\ln G_j(c_k)$ orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$\ln G_j(c_k) = \lim_{t \to c_k} \ln G(t).$$

Endi ushbu

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)\,dt}{t-z}$$

funksiyani tekshiramiz. Soxotskiy—Plemel formulalariga asosan, z nuqta oddiy $t_o \in L$ nuqtaga chapdan va o'ngdan intilganda

$$\Gamma^+(t_0) = \frac{1}{2}\ln G(t_0) + \Gamma(t_0),$$

$$\Gamma^-(t_0) = -\frac{1}{2}\ln G(t_0) + \Gamma(t_0),$$

yoki

$$e^{\Gamma^+(t_0)} = G^{\frac{1}{2}}(t_0)e^{\Gamma(t_0)}, \ e^{\Gamma^-(t_0)} = G^{-\frac{1}{2}}(t_0)e^{\Gamma(t_0)}$$

formulalar o'rinli bo'ladi. Bulardan $e^{\Gamma(z)}$ funksiyaning (51) chegaraviy shartni qanoatlantirishi kelib chiqadi. Endi $\Gamma(z)$ funksiyaning tugunlar yaqinida holatini aniqlash qoldi.

Ma'lumki [10], Koshi tipidagi integral c_k tugun yaqinida quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$\Gamma(z)=(\alpha_k+i\beta_k)\ln(z-c_k)+\Gamma_0(z),$$

$$\alpha_k+i\beta_k=\sum_j\frac{\pm\ln G_j(c_k)}{2\pi i},$$

bu yerda yig'indi L_j yoylarning c_k tugunda uchrashuvchi barcha j nomerlariga tarqaladi, shu bilan birga "−" belgi c_k dan boshlanadigan, "+" esa, tugaydigan yoylarga mos keladi. Shunday qilib, c_k tugun yaqinida

$$e^{\Gamma(z)}=(z-c_k)^{\alpha_k+i\beta_k}\,\Omega(z)$$

formulaga ega bo'lamiz, bunda $\Omega(z)-z\to c_k$ da noldan farqli aniq limitga intiluvchi, c_k yaqinida analitik funksiya. Endi $\prod(z)$ ushbu

$$\prod(z)=\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\lambda_k}$$

formula bilan aniqlangan ratsional funksiya bo'lsin, bunda λ_k

$$-1<\alpha_k+\lambda_k<1,\quad k=1,2,..,n \tag{53}$$

shartni qanoatlantiruvchi butun sonlardan iborat. Endi tekshirib ko'rish qiyin emaski, ushbu

$$X(z)=\prod(z)e^{\Gamma(z)}=e^{\Gamma(z)}\prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\lambda_k} \tag{54}$$

funksiya kanonik yechim bo'ladi yoki, aniqroq, kanonik yechimlardan bittasi bo'ladi. Haqiqatan ham, $X(z)$ funksiya L chiziqdan tashqari barcha tekislikda nolga aylanmaydi, (53) tengsizlikka asosan (52) shartlar bajariladi.

α_k butun sonlar bo'lgan c_k tugunlarni maxsus, qolganlarini esa, maxsus bo'lmagan tugunlar deyiladi.

Maxsus bo'lmagan tugunlar uchun λ_k sonlar ± 1 qo'shiluvchi aniqligida topiladi,chunonchi λ_k ni shunday tanlashimiz mumkinki, yoki $\alpha_k + \lambda_k < 0$ yoki $\alpha_k + \lambda_k > 0$ tengsizlik bajarilsin. Maxsus tugunlar uchun $\alpha_k + \lambda_k = 0$ bo'ladi. Yuqorida aytganlarimizga asosan (51) masalaning yechimlari tugunlar yaqinida chegaralanmagan bo'lishi mumkin deb hisobladik. Ayrim hollarda, avvaldan berilgan, ba'zi $c_1, c_2, ..., c_q$ maxsus bo'lmagan tugunlar yaqinida izlanayotgan yechimning chegaralangan bo'lishini talab qilish maqsadga muvofiq bo'ladi. Bu shartni qanoatlantiruvchi $\Phi(z)$ yechimlarni $h(c_1, c_2, ..., c_q)$ sinf yechimlari deb aytiladi. $q = 0$ ga mos sinfni h (0) yoki h_o orqali belgilanadi.

$h(c_1, c_2, ..., c_q)$ sinfning kanonik yechimi deb, (54) formula bilan aniqlanadigan X (z) yechimni aytiladi, bundagi λ_k butun sonlar shunday tanlanadiki, $c_1, c_2, ..., c_q$ tugunlar uchun $\alpha_k + \lambda_k > 0$ va barcha qolgan maxsus bo'lmagan tugunlar uchun $\alpha_k + \lambda_k < 0$ bo'lsin.

Ushbu

$$\chi = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k$$

formula bilan aniqlanadigan χ butun sonni berilgan $h(c_1, c_2, ..., c_q)$ sinfning *indeksi* deyiladi.

Berilgan $h(c_1, c_2, ..., c_q)$ sinfning $X(z)$ kanonik yechimi bo'lsin. Ravshanki,

$$\Phi(z) = X(z) P(z) \tag{55}$$

funksiya ham berilgan sinfning yechimidan iborat bo'ladi, bundagi P (z) – ixtiyoriy ko'phad. Endi teskarisini isbotlaymiz. P (z) ko'phad mos tanlab olinganda berilgan sinfning har bir yechimi (55) formula bilan aniqlanadi. Haqiqatan ham,

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t),\ \mathrm{X}^{+}(t)=G(t)\mathrm{X}^{-}(t)$$

munosabatlardan L da

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}=\frac{\Phi^{-}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)}$$

tenglik kelib chiqadi. Bu tenglik shuni ko'rsatadiki, agar L chiziqning oddiy nuqtalarida $\frac{\Phi(z)}{\mathrm{X}(z)}$ funksiyaga zarur qiymatlarni yozib qo'yilsa, u tugunlar va cheksiz uzoqlashgan nuqtadan tashqari barcha tekislikda analitik bo'ladi. Bu funksiya tugunlar yaqinida 1 dan kichik tartibda cheksizlikka aylanishi mumkin, demak, tugunlar qutilib bo'ladigan maxsus nuqtalardan iborat bo'ladi. $\Phi(z)$ funksiya shartga ko'ra cheksizlikda chekli tartibga ega bo'lgani uchun $\frac{\Phi(z)}{\mathrm{X}(z)}$ ko'phaddan iborat bo'ladi. Shu bilan yuqoridagi fikr isbot bo'ldi. Bir jinsli bo'lmagan (50)masalaning yechimlarini ham $h(c_1,c_2,...,c_q)$ sinfdan izlaymiz. Bir jinsli (51) masalaning shu sinfga tegishli bo'lgan kanonik yechimi $\mathrm{X}(z)$ bo'lsin. Bu funksiyani shu sinfdagi (50) masalaning *kanonik funksiyasi* deyiladi. $\mathrm{X}^{+}(t)=G(t)\mathrm{X}^{-}(t)$ tenglikni e'tiborga olib,(50) shartni

$$\frac{\Phi^{+}(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}-\frac{\Phi^{-}(t)}{\mathrm{X}^{-}(t)}=\frac{g(t)}{\mathrm{X}^{+}(t)}$$

ko'rinishda yozib olamiz. Shartga binoan $\Phi(z)$ funksiya $\mathrm{X}(z)$ nolga aylanadigan $c_1,c_2,...,c_q$ tugunlarda chegaralangan bo'lgani uchun, bu tugunlar yaqinida

$$\left|\frac{\Phi(z)}{\mathrm{X}(z)}\right|<\frac{\text{const}}{\left|z-c_j\right|^{\alpha}},\quad \alpha<1$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ funksiya bo'lak-bo'lak analitik bo'lib, cheksizlikda chekli tartibga ega bo'ladi. Shuning uchun xuddi avvalgidek

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P(z) \qquad (56)$$

formulaga ega bo'lamiz, bundagi P (z) ixtiyoriy ko'phad.

Bu esa, berilgan sinfdagi (50) bir jinsli bo'lmagan masalaning umumiy yechimidan iboratdir. (56) formuladagi ikkinchi qo'shiluvchi berilgan sinfdagi mos bir jinsli masalaning umumiy yechimi, birinchisi esa, berilgan bir jinsli bo'lmagan masalaning biror xususiy yechimidir.

Tatbiq nuqtai nazaridan (50) bir jinsli bo'lmagan masalaning cheksizlikda nolga aylanadigan yechimlarini topish alohida ahamiyatga egadir. X (z) funksiyaning cheksizlikdagi tartibi aynan $(-\chi)$ ga, ya'ni $h(c_1,c_2,...,c_q)$ sinf indeksining teskari ishorasi bilan olinganiga tengligini e'tiborga olib, (56) formulaga asosan quyidagi xulosaga kelamiz:

$\chi \geq 0$ *bo'lganda, cheksizlikda nolga aylanuvchi berilgan sinfdagi yechimlar*

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P_{\chi-1}(z) \qquad (57)$$

formula bilan aniqlanadi, bundagi $P_{\chi-1}(z)$ *darajasi* $\chi-1$ *dan katta bo'lmagan ko'phad* $\left(\chi=0 \text{ да } P_{\chi-1}(z)=0\right)$. $\chi<0$ *bo'lganda, cheksizlikda nolga aylanuvchi berilgan sinfdagi yechimlar* $\Phi(\infty)=0$ *ekanligini ifodalovchi*

$$\int_L \frac{t^j g(t)dt}{X^-(t)}=0, \quad j=0,1,\ldots,-\chi-1$$

shartlar bajarilgan holda va faqat shu holdagina mavjud bo'ladi. Bu shartlar bajarilganda yagona yechim $P_{\chi-1}(z)$=0 bo'lganda (57) formula bilan aniqlanadi.

5- §. Singular integral tenglamalarni yechish

1. Xarakteristik tenglamani yechish. Ushbu

$$K^{0}\varphi \equiv a(t)\varphi(t)+\frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau-t}d\tau = f(t) \tag{58}$$

xarakteristik tenglamani tekshiramiz, bu yerda L chizmada ko'rsatilgan umumiy nuqtalarga ega bo'lmagan yopiq silliq egri chiziqlardan tashkil topgan chiziq, $a(t), b(t), f(t)$ lar Gyolder sinfiga tegishli funksiyalar. Noma'lum $\varphi(t)$ funksiyani ham shu sinfdan izlaymiz. Zichligi xarakteristik tenglamaning izlanayotgan yechimidan iborat bo'lgan Koshi tipidagi integral bilan berilgan bo'lak-bo'lak analitik funksiya kiritamiz:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}.$$

Soxotskiy—Plemel formulalariga asosan quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\varphi(t)=\Phi^{+}(t)-\Phi^{-}(t), \quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\Phi^{+}(t)+\Phi^{-}(t). \tag{59}$$

Bularni (58) tenglamaga qo'yib, $\Phi(z)$ funksiyaning ushbu

$$\Phi^{+}(t)=G(t)\Phi^{-}(t)+\frac{f(t)}{a(t)+b(t)} \tag{60}$$

Riman masalasining yechimidan iborat bo'lishi kelib chiqadi, bunda

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}.$$

Izlanayotgan $\Phi(z)$ funksiya Koshi tipidagi integral bilan ifodalangani uchun

$$\Phi^{-}(\infty)=0$$

shartni qanoatlantirishi kerak. (60) Riman masalasi $\dfrac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$ koeffitsientining indeksini (58) *integral tenglamaning indeksi* deyiladi. (60) chegaraviy masalani yechib, (59) formulaga asosan (58) tenglamaning yechimini topamiz. Tenglama bilan chegaraviy masalaning teng kuchli ekanligini ko'rsatish uchun, teskarisini, ya'ni chegaraviy masalani yechish natijasida (59) formulalarning birinchisidan topilgan $\varphi(t)$ funksiya (58) tenglamani qanoatlantirishini ko'rsatish kerak. Bu holda $\Phi(z)$ funksiya (4- § 1- band) Koshi tipidagi integral bilan tasvirlanadi, demak, (59) formulalardan ikkinchisi ham o'rinli bo'ladi, bu esa, $\varphi(t)$ funksiyani berilgan (57) tenglamaning yechimi ekanligini ko'rsatadi. (60) Riman masalasiga mos xarakteristik funksiya X (z) bo'lsin. U holda (60) masalaning cheksizlikda nolga aylanuvchi yechimi (4- §) $\chi \geq 0$ bo'lganda

$$\Phi(z)=\frac{\mathrm{X}(z)}{2\pi i}\int_{L}\frac{f(\tau)d\tau}{\left[a(t)+b(t)\right]\mathrm{X}^{+}(\tau)(\tau-z)}-\frac{1}{2}\mathrm{X}(z)\mathrm{P}_{\chi-1}(z) \quad (61)$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda keyinchalik qulay bo'lishi uchun darajasi $\chi-1$ dan katta bo'lmagan ixtiyoriy ko'phad $-\frac{1}{2}\mathrm{P}_{\chi-1}(z)$ ko'rinishda olinadi, shu bilan birga $\chi=0$ bo'lganda $\mathrm{P}_{\chi-1}(z)=0$ bo'ladi. $\chi<0$ bo'lganda yechim faqat

$$\int_{L}\frac{t^{k}f(\tau)d\tau}{\left[a(\tau)+b(\tau)\right]\mathrm{X}^{+}(\tau)}=0, \quad k=0,1,\ldots,-\chi-1$$

shartlar bajarilgandagina mavjud bo'ladi; agar bu shartlar bajarilsa, u holda yagona yechim $\mathrm{P}_{\chi-1}(z)=0$ bo'lgan (61) formula bilan aniqlanadi. Tekshirilayotgan (58) integral tenglamaning yechimini

$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$ formulaga asosan topamiz. Buning uchun $\Phi^+(t)$ va $\Phi^-(t)$ chegaraviy qiymatlarni Soxotskiy—Plemel formulasi bilan hisoblaymiz:

$$\Phi^+(t)=\frac{f(t)\mathrm{X}^+(t)}{2\left[a(t)+b(t)\right]\mathrm{X}^+(t)}+\frac{\mathrm{X}^+(t)}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_L\frac{f(\tau)d\tau}{\left[a(\tau)+b(\tau)\right]\mathrm{X}^+(\tau)(\tau-t)}-\frac{1}{2}\mathrm{X}^-(t)\mathrm{P}_{\chi-1}(t),$$

$$\Phi^-(t)=-\frac{f(t)\mathrm{X}^-(t)}{2\left[a(t)+b(t)\right]\mathrm{X}^+(t)}+\frac{\mathrm{X}^-(t)}{2\pi i}\times$$

$$\times\int_L\frac{f(\tau)d\tau}{\left[a(\tau)+b(\tau)\right]\mathrm{X}^+(\tau)(\tau-t)}-\frac{1}{2}\mathrm{X}^-(t)\mathrm{P}_{\chi-1}(t).$$

Demak,

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\frac{\mathrm{X}^+(t)+\mathrm{X}^-(t)}{2\left[a(t)+b(t)\right]\mathrm{X}^+(t)}f(t)+$$

$$+\frac{\mathrm{X}^+(t)-\mathrm{X}^-(t)}{2\pi i}\int_L\frac{f(\tau)d\tau}{\left[a(\tau)+b(\tau)\right]\mathrm{X}^+(\tau)(\tau-t)}-$$

$$-\frac{1}{2}\left[\mathrm{X}^+(t)-\mathrm{X}^-(t)\right]\mathrm{P}_{\chi-1}(t). \tag{62}$$

Xarakteristik X (z) funksiyaning aniqlanishiga asosan

$$\frac{\mathrm{X}^+(t)}{\mathrm{X}^-(t)}=G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}$$

tenglikka egamiz. Buni e'tiborga olib, quyidagi ifodalarni hosil qilamiz:

$$\frac{X^+(t)+X^-(t)}{2\left[a(t)+b(t)\right]X^+(t)}=\frac{1}{2\left[a(t)+b(t)\right]}+$$

$$+\frac{1}{2\left[a(t)+b(t)\right]}\frac{X^-(t)}{X^+(t)}=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)},$$

$$X^+(t)-X^-(t)=X^+(t)\left[1-\frac{X^-(t)}{X^+(t)}\right]=$$

$$=\frac{2b(t)X^+(t)}{a(t)-b(t)}=-\frac{2b(t)\left[a(t)+b(t)\right]X^+[t]}{a^2(t)-b^2(t)}.$$

Endi, ushbu

$$a^*(t)=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)},\ b^*(t)=\frac{b(t)}{a^2(t)-b^2(t)},$$

$$Z(t)=\left[a(t)+b(t)\right]X^+(t)=\left[a(t)-b(t)\right]X^-(t),$$

$$K^*f\equiv a^*(t)f(t)-\frac{b^*(t)Z(t)}{\pi i}\int\limits_L\frac{f(\tau)d\tau}{Z(\tau)(\tau-t)}$$

belgilashlarni kiritib, (62) yechimni

$$\varphi(t)=K^*f+b^*(t)Z(t)P_{\chi-1}(t) \tag{63}$$

ko‘rinishda yozishimiz mumkin. Bu yerdagi $Z(t)$ funksiyani 4- § ning 4- bandidagi $X^+(t)$ va $X^-(t)$ funksiyalarning qiymatlariga asosan osongina hisoblash mumkin. $Z(t)$ funksiyani (58) tenglamaga mos *kanonik funksiya* deyiladi. (63) formula (58) integral tenglamaning $\chi\geq 0$ bo‘lganda umumiy yechimini beradi.

Agar $\chi<0$ bo‘lsa, biz bilamizki, (60) Riman masalasi, demak, (58) tenglama ham, umuman aytganda, yechimga ega bo‘lmaydi. Uning yechimga ega bo‘lish shartlari

$$\int_L \frac{t^k f(t)}{Z(t)} dt = 0, \equiv 0,1,...,-\chi - 1$$

tengliklarning bajarilishidan iborat.

Agar yechimga ega bo'lish shartlari bajarilsa, u holda (58) bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimi $P_{\chi-1}(x) = 0$ bo'lgan (63) formula bilan aniqlanadi.

Agar $f(t) = 0$ bo'lsa, ya'ni tenglama bir jinsli bo'lgan holda, oldingi natijalardan ko'rinadiki, $\chi \le 0$ bo'lsa, bir jinsli tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lmaydi, $\chi > 0$ bo'lganda esa, roppa-rosa χ chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'lib, ularning to'plami

$$\varphi(t) = b^*(t) Z(t) P_{\chi-1}(t)$$

formula bilan aniqlanadi, bunda $P_{\chi-1}(t)$ — darajasi $\chi - 1$ dan katta bo'lmagan ixtiyoriy ko'phad. Shunday qilib, biz quyidagi natijalarga keldik.

1°. Agar $\chi > 0$ *bo'lsa, bir jinsli* $K^o\varphi = 0$ *tenglama roppa-rosa* χ *chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi.*

2°. Agar $\chi \le 0$ *bo'lsa, bu tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lmaydi.*

3°. Agar $\chi \ge 0$ *bo'lsa, bir jinsli bo'lmagan* $K^o\varphi = f$ *tenglama ixtiyoriy* f *funksiya uchun yechimga ega bo'ladi va uning umumiy yechimi ta ixtiyoriy o'zgarmasga bog'liq bo'ladi.*

4°. Agar $\chi < 0$ *bo'lsa, bu tenglamaning o'ng tomonidagi f funksiya ushbu*

$$\int_L f(t)\psi_k(t) dt = 0, \ k = 0,1,...,-\chi - 1$$

ko'rinishdagi $-\chi$ ta shartlarni qanoatlantirgan holda va faqat shu holdagina yechimga ega bo'ladi, bu yerdagi $\psi_k(t) = \frac{t^k}{Z(t)}$ — chiziqli bog'liq bo'lmagan funksiyalar.

Bu shartlar bajarilganda tenglama bitta va faqat bitta yechimga ega bo'ladi.

2. Xarakteristik tenglamaga qo'shma bo'lgan tenglamani yechish. Endi $K^o\varphi = f$ tenglamaga qo'shma bo'lgan

$$K^{o}\psi \equiv a(t)\psi(t)-\frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{b(\tau)\psi(\tau)d\tau}{\tau-t}=g(t) \tag{64}$$

tenglamani tekshiramiz. (64) tenglamani sodda usul bilan Riman masalasiga keltirish mumkin. Shu maqsadda cheksizlikda nolga aylanuvchi bo‘lak-bo‘lak analitik

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L}\frac{b(\tau)\psi(\tau)d\tau}{\tau-z}$$

funksiyani kiritamiz. Ushbu

$$b(t)\psi(t)=\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t),\quad \frac{1}{\pi i}\int_{L}\frac{b(\tau)\psi(\tau)}{\tau-t}d\tau=\Psi^{+}(t)+\Psi^{-}(t)$$

formulalarga va (64) tenlamaga asosan

$$a(t)\psi(t)=\Psi^{+}(t)+\Psi^{-}(t)+g(t),$$
$$b(t)\psi(t)=\Psi^{+}(t)-\Psi^{-}(t)$$

yoki

$$\begin{aligned}(a+b)\psi(t)&=2\Psi^{+}(t)+g(t),\\(a-b)\psi(t)&=2\Psi^{-}(t)+g(t)\end{aligned} \tag{65}$$

tengliklarni hosil qilamiz. Bularga asosan quyidagi Riman masalasiga kelamiz:

$$\Psi^{+}(t)=\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)}\Psi^{-}(t)+\frac{b(t)g(t)}{a(t)-b(t)}\,. \tag{66}$$

(64) tenglamaga mos (66) masalaning koeffitsienti (58) tenglamaga mos (60) masala koeffitsientining teskarisiga teng bo‘lgan miqdordan iborat.

Demak,

$$\chi' = Ind\frac{a(t)+b(t)}{a(t)-b(t)} = -Ind\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} = -\chi .$$

Bir jinsli Riman masalasi kanonik funksiyasini ifodalovchi (38) yoki (39) formulani esga olsak, (65), (60) masalalarning kanonik funksiyalari miqdori bo‘yicha bir-biriga teskari bo‘ladi, ya’ni (60) masalaning kanonik funksiyasi $X(z)$ bo‘lsa, (66) masalaning kanonik funksiyasi $\left[X(z)\right]^{-1}$ bo‘ladi. Shunga muvofiq, (66) masalaning cheksizlikda nolga aylanuvchi umumiy yechimi $\chi \geq 0$ (ya’ni $\chi \leq 0$ da) bo‘lganda

$$\Psi(z) = \frac{\left[X(z)\right]^{-1}}{2\pi i}\int_L \frac{X^+(\tau)b(\tau)g(\tau)d\tau}{\left[a(\tau)-b(\tau)\right](\tau - z)} + \frac{1}{2}\left[X(z)\right]^{-1} P_{\chi'-1}(z) \quad (67)$$

ko‘rinishda ifodalanadi, bunda $P_{\chi'-1}(t)$— darajasi $\chi' - 1$ dan katta bo‘lmagan ixtiyoriy ko‘phad ($\chi' = 0$ da $P_{\chi'-1} = 0$ bo‘ladi). Keyinchalik qulay bo‘lishi uchun bu ko‘phad oldiga $\frac{1}{2}$ ko‘paytuvchi qo‘ydik. $\chi < 0$ (ya’ni, $\chi > 0$) bo‘lganda, agar masala yechimga ega bo‘lishining zarur va yetarli

$$\int_L \frac{X^+(t)b(t)g(t)t^k dt}{a(t)-b(t)} = 0, \quad k = 0,1,\dots,-\chi' - 1$$

shartlari bajarilsa, yechim $P_{\chi'-1}(z) = 0$ bo‘lgandagi yana o‘sha (67) formula bilan aniqlanadi. Soxotskiy—Plemel formulasiga asosan (67) dan $\Psi^+(t)$ ni hisoblaymiz:

$$\Psi^+(t) = \frac{b(t)g(t)}{2\left[a(t)-b(t)\right]} +$$

$$+\frac{\left[X^+(t)\right]^{-1}}{2\pi i}\int_L \frac{X^+(\tau)b(\tau)g(\tau)d\tau}{\left[a(\tau)-b(\tau)\right](\tau - t)} + \frac{1}{2}\left[X^+(t)\right]^{-1} P_{\chi'-1}(t).$$

Endi (65) formulalarning birinchisiga asosan (64) tenglamaning yechimini topamiz:

$$\psi(t) = \mathrm{K}^* g + \frac{\mathrm{P}_{\chi'-1}(t)}{\mathrm{Z}(t)}, \tag{68}$$

bu yerda K* orqali avvalgi banddagi K* operatorga qo‘shma bo‘lgan operator belgilandi, ya’ni

$$\mathrm{K}^* g = a^*(t) g(t) + \frac{1}{\pi i \mathrm{Z}(t)} \int_L \frac{\mathrm{Z}(\tau) b^*(\tau) g(\tau) d\tau}{\tau - t},$$

shu bilan birga $a^*(t)$, b* (t), Z (t) avvalgi banddagi belgilashlarning o‘zidir. Agar (67) dan $\Psi^-(t)$ ni hisoblab, (65) formulalarning ikkinchisidan $\psi(t)$ ni topsak ham yana (68) formula hosil bo‘ladi. Bir jinsli (g = 0) tenglamaning umumiy yechimi $\chi' > 0$ da

$$\psi(t) = \frac{\mathrm{P}_{\chi'-1}(t)}{\mathrm{Z}(t)}$$

formula bilan aniqlanadi Demak, $\chi' > 0$ bo‘lganda bir jinsli tenglama roppa-rosa χ' chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarga ega bo‘ladi; $\chi' \leq 0$ bo‘lganda esa bir jinsli tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo‘lmaydi.

Shunday qilib, $\mathrm{K}^o \varphi = f$ tenglama qanday xossalarga ega bo‘lsa, $\mathrm{K}^o \psi = g$ tenglama ham shunday xossalarga ega bo‘ladi. Endi biz ko‘rayapmizki, $\mathrm{K}^o \varphi = f$ tenglamaning yechimga ega bo‘lishi uchun 4°- xossadagi shartlarda qatnashgan ψ_k funksiyalar qo‘shma bir jinsli $\mathrm{K}^o \psi = 0$ tenglamaning chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarining to‘la sistemasidan iborat ekan. Keyinchalik isbot qilinadigan muhim umumiy teoremaning xususiy holi bo‘lgan quyidagi fikrni qayd qilib o‘tamiz: bir jinsli $\mathrm{K}^o \varphi = 0$ tenglama chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarining soni k, qo‘shma bir jinsli $\mathrm{K}^o \psi = 0$ tenglama chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlarining soni k' ga teng bo‘lsa, bu sonlarning ayirmasi K° operatorning indeksiga teng bo‘ladi, ya’ni

$$k - k' = \chi$$

Haqiqatan ham, $\chi \geq 0$ bo'lganda $k = \chi,\ k' = 0$; $\chi \leq 0$ da $k = 0,\ k' = -\chi$ bo'ladi.

3. Singulyar operatorlar kompozitsiyasi. K_1 va K_2 ushbu

$$K_1\varphi \equiv a_1(t)\varphi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

$$K_2\psi \equiv a_2(t)\psi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(t,\tau)\psi(\tau)d\tau}{\tau - t}$$

formulalar bilan aniqlanadigan singulyar operatorlar bo'lsin. Ushbu

$$K^*\psi = K_1(K_2\psi)$$

formula bilan aniqlanadigan

$$K^* = K_1K_2$$

operatorni ko'rsatilgan tartibda K_1 va K_2 *operatorlarning kompozitsiyasi* yoki *ko'paytmasi* deyiladi (operatorlarning ko'paytmasi, umuman aytganda, kommutativ bo'lmaydi, ya'ni K_1K_2 va K_2K_1 bir-biridan farq qaladi). K^* operator uchun ifodani topamiz:

$$K^*\psi = K_1K_2\psi \equiv a_1(t)\left[a_2(t)\psi(t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(t,\tau)\psi(\tau)d\tau}{\tau - t}\right] +$$

$$+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(t,\tau)}{\tau - t}\left[a_2(\tau)\psi(\tau) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(\tau,\tau_1)\psi(\tau_1)d\tau_1}{\tau_1 - t}\right]d\tau.$$

Bu ifodaning xarakteristik qismini ajratib olamiz. Buning uchun quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$\int_L \frac{K_2(t,\tau)\psi(\tau)d\tau}{\tau - t} = K_2(t,t)\int_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau - t} +$$

$$+ \int_L \frac{K_2(t,\tau) - K_2(t,t)}{\tau - t}\psi(\tau)d\tau,$$

$$\int_L \frac{a_2(\tau)K_1(t,\tau)}{\tau - t}\psi(\tau)d\tau = a_2(t)K_1(t,t)\int_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau - t} +$$

$$+ \int_L \frac{a_2(\tau)K_1(t,\tau) - a_2(t)K_1(t,t)}{\tau - t}\psi(\tau)d\tau, \tag{69}$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(t,\tau)}{\tau - t}d\tau \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(\tau,\tau_1)}{\tau_1 - \tau}\psi(\tau_1)d\tau_1 = K_1(t,t)K_2(t,t)\psi(t) +$$

$$+ \frac{1}{\pi i}\int_L \psi(\tau_1)d\tau_1 \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(t,\tau)K_2(\tau,\tau_1)}{(\tau_1 - \tau)(\tau - t)}d\tau.$$

Oxirgi tenglikda biz (20) Puankare—Bertran formulasidan foydalandik. (69) formulalar o‘ng tomonidagi ikkinchi qo‘shiluvchilardagi integrallarning yadrosi $\tau = t$ nuqtada tartibi $|\tau - t|^{\lambda-1}$ $(\lambda < 1)$ dan katta bo‘lmagan maxsuslikka ega bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Oxirgi takroriy integralda $K(t,\tau,\tau_1) = K_1(t,\tau)K_2(\tau,\tau_1)$ belgilashni kiritib, quyidagi almashtirishni bajaramiz:

$$\int_L \frac{K(t,\tau,\tau_1)}{(\tau_1 - \tau)(\tau - t)}dt = \frac{1}{\tau_1 - t}\left[\int_L \frac{K(t,\tau,\tau_1)}{\tau - t}d\tau - \int_L \frac{K(t,\tau,\tau_1)}{\tau - \tau_1}d\tau\right] =$$

$$= \frac{\omega_1(t,\tau_1) - \omega_2(t,\tau_1)}{\tau_1 - t},$$

bu yerda

$$\omega_1(t,\tau_1)=\int_L \frac{K(t,\tau,\tau_1)}{\tau-t}d\tau, \quad \omega_2(t,\tau_1)=\int_L \frac{K(t,\tau,\tau_1)}{\tau-\tau_1}d\tau.$$

$\omega_1(t,\tau)$, $\omega_2(t,\tau_1)$ funksiyalar Gyolder shartini qanoatlantiradi va bundan tashqari $\omega_1(t,t)=\omega_2(t,t)$. Shuning uchun oxirgi yadro ham $\tau=t$ bo'lganda $|\tau-t|^{\lambda-1}$ dan katta bo'lmagan maxsuslikka ega bo'ladi.

3- § ning 1- bandidagidek

$$K_1(t,t)=b_1(t), \quad K_2(t,t)=b_2(t)$$

belgilashlardan foydalanib, K_1 va K_2 singulyar operatorlar K kompozitsiyasiining xarakteristik K° operatori ushbu

$$K^\circ\psi=(K_1K_2)^\circ\psi=[a_1(t)a_2(t)+b_1(t)b_2(t)]\psi(t)+$$
$$+\frac{a_1(t)b_2(t)+a_2(t)b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau-t}$$

formula bilan ifodalanishiga ishonch hosil qilamiz. K_1 va K_2 operatorlarning xarakteristik qismini ajratib (22) ko'rinishda yozib olamiz:

$$K_1\varphi\equiv a_1(t)\varphi(t)+\frac{b_1(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\int_L k_1(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau,$$

$$K_2\psi\equiv a_2(t)\psi(t)+\frac{b_2(t)}{\pi i}\int_L \frac{\psi(\tau)d\tau}{\tau-t}+\int_L k_2(t,\tau)\psi(\tau)d\tau.$$

K° operatorning koeffitsientlarini $a^\circ(t)$ va $b^\circ(t)$ orqali belgilab olamiz, ya'ni

$$\begin{aligned} a^\circ(t)&=a_1(t)a_2(t)+b_1(t)b_2(t),\\ b^\circ(t)&=a_1(t)b_2(t)+a_2(t)b_1(t). \end{aligned} \tag{70}$$

Bu formulalar k_1, k_2 regulyar yadrolarni o'z ichiga olmaydi va ular 1 va 2 indekslarga nisbatan simmetrikdir. Shunday qilib, ko'paytmadagi operatorlar tartibining o'zgarishi, shuningdek ular regulyar qismining o'zgarishi operatorlar ko'paytmasining faqat regulyar qismiga ta'sir qilib, uning xarakteristik qismiga ta'sir qilmaydi.

Agar

$$S_j = a_j + b_j, D_j = a_j - b_j, \ j = 1,2; \quad S^\circ = a^\circ + b^\circ, D^\circ = a^\circ - b^\circ$$

desak, (70) tenglikdan

$$S^\circ = S_1 S_2, D^\circ = D_1 D_2$$

formulalarni hosil qilamiz. Bu formulalardan indeksning ta'rifiga asosan K° operatorning $\overset{\circ}{\chi}$ indeksi K_1K_2 operatorlar χ_1 va χ_2 indekslarining yig'indisi, ya'ni $\overset{\circ}{\chi} = \chi_1 + \chi_2$ ekanligi kelib chiqadi. Agar singulyar K_1 operator shunday bo'lsaki, K_1K_2 operator Fredgolm operatoridan iborat bo'lsa, u holda K_1 operator K_2 operatorni *regulyarizatsiyalaydigan operator yoki qisqacha, uning regulyarizatori* deyiladi.

K° operatorning Fredgolm operatori bo'lishi uchun $b^\circ = 0$ yoki $S^\circ = D^\circ$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Shunday qilib, agar K_1 operator K_2 uchun regulyarizator bo'lsa,

$$a_1 b_2 + a_2 b_1 = 0 \tag{71}$$

yoki

$$S_1 S_2 = D_1 D_2$$

tenglik o'rinli bo'ladi va teskarisi. Yuqoridagi mulohazalardan shu narsa kelib chiqadiki, agar K_2 operator berilgan bo'lsa, uning regulyarizatori K_1 operatorni cheksiz ko'p usullar bilan tanlash mumkin. Masalan, $\overset{\circ}{S} = D \neq 0$ funksiyani ixtiyoriy berish mumkin, u holda S_1 va D_1 lar ushbu

$$S_1 = \frac{S^\circ}{S_2}, D = \frac{S^\circ}{D_2}$$

formulalar bilan aniqlanadi, xususiy holda $S^\circ = D^\circ = 1$ deb olish mumkin. Odatda, (71) shartni qanoatlantirish uchun

$$a_1 = a_2,\ b_1 = -b_2$$

deb olish qulay bo'ladi.

Shunday qilib, *regulyarizatsiyalaydigan operatorni tanlashda operatorlarning xarakteristik qismigina ahamiyatga ega* ekanligini ko'ramiz.

Fredgolm operatorining indeksi nolga teng bo'lgani uchun, bir-birini regulyarizatsiyalaydigan K_1 va K_2 operatorlarning indeksi miqdori bo'yicha teng va ishoralari qarama-qarshidir.

Ixtiyoriy ikkita singulyar operatorlar uchun

$$\left(K_1 K_2\right)' = K_2' K_1'$$

tenglik va ixtiyoriy ikkita φ va ψ funksiyalar uchun

$$\int_L \psi K\varphi\, dt = \int_L \varphi K' \psi\, dt \tag{72}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu xossalarning to'g'riligiga bevosita tekshirib ko'rish bilan ishonch hosil qilish mumkin. Ko'rsatish qiyin emaski, (72) xossa qo'shma operatorlar tushunchasi uchun xarakterli xossa hisoblanadi, ya'ni agar ikkita singulyar K va K' operatorlar uchun (72) tenglik bajarilsa, Gyolder shartini qanoatlantiruvchi φ va ψ funksiyalar qanday bo'lmasin, K va K' operatorlar boshlang'ich ta'rif ma'nosida qo'shma bo'ladi.

(72) tenglikdan quyidagi fikr kelib chiqadi: *agar* $K\varphi = f$ *tenglama yechimga ega bo'lsa, u holda*

$$\int_L f\, \psi\, dt = 0 \tag{73}$$

shartning bajarilishi zarurdir, bu yerda ψ — *qo'shma bir jinsli* $K'\psi = 0$ *tenglamaning ixtiyoriy yechimi*.

Haqiqatan ham, agar φ funksiya $K\varphi = f$ tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda

$$\int_L f\psi\, dt = \int_L \psi K\varphi\, dt = \int_L \varphi K'\psi\, dt = 0$$

bo'ladi. Teskari fikr ham o'rinli bo'ladi; uni biz keyinroq isbotlaymiz.

4. Fredgolm tenglamasining rezolventasi to'g'risida. Bizga Fredgolmning ikkinchi turdagi

$$\mathrm{N}\varphi \equiv \varphi(t) - \int_L n(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = g(t) \tag{74}$$

tenglamasi berilgan bo'lsin. II bobdan bizga ma'lumki, agar bir jinsli

$$\mathrm{N}\varphi = 0 \tag{75}$$

tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lmasa, u holda ixtiyoriy g (t) o'ng tomon uchun (74) tenglama yagona yechimga ega bo'ladi va bu yechim

$$\varphi(t) = Rg \equiv g(t) + \int_L R(t,\tau)g(\tau)d\tau \tag{76}$$

formula bilan aniqlanadi, bu yerda $R(t,\tau)$ funksiya (74) tenlamaning rezolventasi. Endi (75) bir jinsli tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lgan holga murojaat qilamiz. Bizga ma'lumki, bu tenglama va unga qo'shma bo'lgan

$$\mathrm{N}'\psi = 0 \tag{77}$$

tenglama bir xil chekli sondagi chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi. (75) va (77) tenglamalarning chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining to'la sistemasini mos ravishda $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ va $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_n$ orqali belgilab olamiz. Bir jinsli bo'lmagan (74) tenglama uning o'ng tomoni

$$\int_L g(t)\psi_j(t)dt = 0,\ j - 1, 2, \ldots, n \tag{78}$$

shartlarni qanoatlantirgan holda va faqat shu holdagina yechimga ega bo'ladi. Tekshirilayotgan holda ham, (76) formulada qatnashayotgan operator ko'rinishidagi R operator mavjud bo'lishini ko'rsatamiz. Agar (78) shartlar bajarilsa, u holda

$$\varphi(t) = Rg \equiv g(t) + \int_L R(t,\tau)g(\tau)d\tau$$

funksiya (74) tenglamaning yechimi(aniqrog'i, yechimlaridan biri) bo'ladi, bu yerdagi $R(t,\tau)$ funksiya (74) tenglamaning *umumlashgan rezolventasi* deyiladi.

Biz qo'llaydigan usul tekshirilayotgan holni bir jinsli tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lmagan holga keltirishdan iboratdir. Shu maqsadda $\varphi_1(t),\varphi_2(t),...,\varphi_n(t)$ va $\psi_1(t),\psi_2(t),...,\psi_n(t)$ funksiyalar bilan ushbu

$$\int_L \varphi_i \xi_j dt = \delta_{ij}, \quad \int_L \psi_i \eta_j dt = \delta_{ij}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j, \\ 0, i \neq j \end{cases} \tag{79}$$

munosabatlar bilan bog'langan H sinfga tegishli bo'lgan ikkita $\xi_1(t),\xi_2(t),...,\xi_n(t)$ va $\eta_1(t),\eta_2(t),...,\eta_n(t)$ funksiyalar sistemasini kiritamiz. Bunday ξ_i va η_i funksiyalarni cheksiz ko'p usullar bilan hamma vaqt tuzish mumkin [10]. (74) integral tenglama bilan bir qatorda quyidagi Fredgolm integral tenglamasini tekshiramiz:

$$\varphi(t) - \int_L \left[n(t,\tau) - \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t)\xi_i(\tau) \right] \varphi(\tau) d\tau = g(t) \tag{80}$$

va uning har bir yechimi, agar (78) shartlar bajarilsa, (74) tenglamaning yechimi bo'lishini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $\varphi(t)$ funksiya (80) tenglamaning biror yechimi (agar shunday yechim mavjud bo'lsa)bo'lsin. U holda shu tenglamaga asosan

$$\mathrm{N}\varphi + \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i(t) = g(t) \tag{81}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bundagi a_i — o'zgarmaslar

$$a_i = \int_L \varphi(\tau)\xi_i(\tau) d\tau \tag{82}$$

formula bilan aniqlanadi. (81) tenglamani $\psi_k(t)$ ga ko'paytirib, L bo'yicha integrallaymiz:

$$\int_L \psi_k \mathrm{N}\varphi dt + \sum_{i=1}^{n} a_i \int_L \psi_k \eta_i dt = \int_L g(t)\psi_k(t) dt . \tag{83}$$

(78) shartlarga asosan bu tenglikning o'ng tomoni nolga teng. $\mathrm{N}'\psi_k = 0$ bo'lgani uchun (72) formulaga asosan

$$\int_L \psi_k \mathrm{N}\varphi dt = \int_L \varphi \mathrm{N}' \psi_k dt = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz va natijada $a_k = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, (83) tenglikdagi barcha $a_i = 0$ va shuning uchun ham $\mathrm{N}\varphi = g(t)$, bu esa, talab qilingan narsaning isbotidir. Nihoyat, g (t)= 0 bo'lganda (80) dan kelib chiqadigan bir jinsli tenglamaning noldan farqli yechimlarga ega bo'lmasligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, oxirga tenglamaninig yechimi g (t)= =0 da (78) shart bajarilgani uchun $\mathrm{N}\varphi = 0$ tenglamaning ham yechimi bo'ladi. Demak, birinchidan, $\varphi = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + ..., b_n\varphi_n$, bu yerda $b_1, b_2, ..., b_n$ — o'zgarmaslar, ikkinchidan $a_i = 0$ ekanligini eslasak, (82) dan

$$\int_L (b_1\varphi_1 + ... + b_n\varphi_n)\xi_i dt = 0, \quad i = 1, 2, ..., n$$

tenglik kelib chiqadi. Bundan, (79) ni e'tiborga olsak, barcha $b_j = 0$ bo'ladi, demak, bir jinsli (80) tenglama noldan boshqa yechimlarga ega emas. Avvalgi aytganlarimizga asosan (80) tenglama ixtiyoriy g (t) o'ng qismi uchun yagona yechimga ega bo'ldi va bu yechimni $\varphi = R_g$ ko'rinishda ifodalash mumkin, bundagi R — yuqorida ko'rsatilgan operator ko'rinishidagi operatordir. (74) tenglamaning umumiy yechimi (78) shartlar bajarilgan, ushbu

$$\varphi = \Gamma\varphi + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + ... + c_n\varphi_n$$

ko'rinishda ifodalanadi.

R operator $\mathrm{N}\varphi = g$ tenglamaga nisbatan qanday rol o'ynasa, R operatorga qo'shma bo'lgan R' operator $\mathrm{N}'\varphi = g$ tenglamaga nisbatan xuddi shu rolni o'ynashini tekshirib ko'rish qiyin emas.

5. To'la singulyar integral tenglamani regulyarizatsiyalash. Biz 3- § ning 2- bandida, ayrim sodda singulyar integral tenglamalarning yechimlarini aniq ko'rinishda yozib olish mumkin ekanini ko'rdik. Umumiy holda, singulyar integral tenglamalarni tekshirishning odatdagi usuli uchun regulyarizatsiyalash, ya'ni Fredgolm tenglamasiga keltirishdan iboratdir.

Singulyar integral tenglama

$$\mathrm{K}\varphi = f \tag{84}$$

berilgan bo'lib, M — K ni regulyarizatsiyalaydigan biror singulyar operator bo'lsin. Avvalgi tenglamaning har ikki tomonida M operatsiyani bajarib,

$$N\varphi \equiv MK\varphi = Mf \tag{85}$$

Fredgolm tenglamasiga ega bo'lamiz. Berilgan tenglamaning har bir yechimi (85) Fredgolm tenglamasining ham yechimi bo'lishi ravshan; teskari xulosa umuman aytganda o'rinli bo'lmaydi; demak, (84) va (85) tenglamalar, umuman aytganda, ekvivalent emas. Ammo (85) tenglamaning barcha yechimlarini topishni bilsak, berilgan (84) tenglmaning barcha yechimlarini topish mumkin bo'lishini ko'rish qiyin emas. Bu to'g'rida biz keyinchalik batafsil to'xtaymiz. Hozircha avvalgi fikrlardan kelib chiqadigan natijani keltiramiz.

Bir jinsli singulyar integral

$$K\varphi = 0$$

tenglamaning chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining soni cheklidir.

Haqiqatan ham, bu tenglamaning barcha yechimlari bir vaqtda bir jinsli Fredgolm tenglamasining yechimlari bo'ladi; ma'lumki, oxirgi tenglama yechimlarining soni esa cheklidir. (85) Fredgolm tenglamasi yechimlari ichida (84) tenglamaning barcha yechimlari yotishini biz yuqorida aytib o'tdik. Endi (85) tenglamaning umumiy yechimini bilgan holda (84) tenglamaning umumiy yechimini topishni maqsad qilib qo'yamiz. Avvalo (85) tenglamaning yechimga ega bo'lish shartlarini yozib olamaz. Bu shartlar

$$\int_L \omega_j Mf dt = 0, \ j = 1, 2, \dots, n$$

ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerdagi $\omega_j = \omega_j(t)$ — (85) tenglamaga qo'shma bo'lgan bir jinsli

$$N'\psi \equiv K'M'\psi = 0$$

Fredgolm tenglamasi chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining to'la sistemasidir. (72) formulaga asosan, bu shartlarni

$$\int_L f M'\omega_j \cdot dt = 0, \ j = 1, 2, \dots, n \tag{86}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin. Bu holda (85) tenglamaning umumiy yechimi, 4- banddan bizga ma'lumki,

$$\varphi(t) = RMf(t) + \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i(t) \tag{87}$$

ko'rinishda yoziladi, bundagi R avvalgi bandda ko'rsatilgan aniq operator, $\chi_i(t)(i=1,2,...,n)$ funksiyalar $\mathrm{MK}\varphi=0$ tenglama chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining to'la sistemasi, c_i — ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Lekin (85) tenglamaning bu yechimi (84) tenglamaning yechimi bo'lmasligi ham mumkin. Haqiqatan ham, agar φ funksiya (85) tenglamaning, ya'ni

$$\mathrm{M}(\mathrm{K}\varphi-f)=0$$

tenglamaning biror yechimi bo'lsa, u holda

$$\mathrm{K}\varphi-f=\sum_{i=1}^{n}a_i\xi_i \tag{88}$$

bo'lishi ravshan, bu yerda $\xi_1,...,\xi_n - \mathrm{M}\xi=0$ tenglama chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining to'la sistemasi, a_1, ..., a_n — biror o'zgarmaslar. Bu o'zgarmaslar, agar φ funksiya berilgan bo'lsa, ya'ni (87) formuladagi c_1, ..., c_n o'zgarmaslar berilgan bo'lsa, to'la aniqlanadi. (85) tenglamaning (87) yechimi (84) tenglamaning ham yechimi bo'lishi uchun barcha $a_i=0$ bo'lishi zarur va yetarlidir. Bu shartni berilgan φ funksiya va c_i o'zgarmaslar orqali ifodalaymiz. Buning uchun (88) formuladagi a_i o'zgarmaslarni c_i lar orqali aniqlaymiz. Shu maqsadda L egri chiziqda H sinfga tegishli bo'lgan shunday ξ_1^*, ξ_2^*, ..., ξ_n^* aniq funksiyalarni olamizki, ushbu

$$\int_L \xi_i(t)\xi_j^*(t)\,dt=\delta_{ij}\left(\delta_{ij}=1,\quad i=j,\quad \delta_{ij}=0,\quad i\neq j\right) \tag{89}$$

shartlar bajarilsin. Bunday funksiyalarni hamma vaqt tanlab olish mumkin [10].

Endi (88) tenglikning har ikki tomonini $\xi_j^*(t)$ ga ko'paytiramiz va L bo'ylab integrallaymiz. U holda (89) ni e'tiborga olsak, ushbu

$$a_j=\int_L \xi_j^*(\mathrm{K}\varphi-f)\,dt$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglikda $\varphi(t)$ o'rniga uning (87) ifodasini qo'yamiz va

$$\int_L \xi_j^*\mathrm{K}R\mathrm{M}f\,dt=\int_L f\mathrm{M}'R'\mathrm{K}'\xi_j^*\,dt$$

formuladan foydalanib, quyidagi

$$f_j^*(t)=\mathrm{M}'R'K'\xi_j^*(t)-\xi_j^*,$$

$$\mathrm{A}_{ji}=\int_L \xi_j^*(t)\chi_i(t)\,dt,$$

$$f_j = \int_L f(t) f_j^*(t)\,dt \tag{90}$$

belgilashlarini kiritsak,

$$a_j = f_j + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{ji} c_i \tag{91}$$

formulani hosil qilamiz. Demak, (87) formula bilan aniqlangan $\varphi(t)$ funksiya berilgan (84) tenglamaning yechimi bo'lishi uchun c_i o'zgarmaslar ushbu

$$\sum_{i=1}^{n} \mathrm{A}_{ji} c_i + f_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \tag{92}$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasining yechimi bo'lishi zarur va yetarlidir. Agar bu sistema yechimga ega bo'lsa, u holda berilgan integral tenglama ham yechimga ega bo'ladi va aksincha. (92) sistemaning yechimga ega bo'lishi shartlari, bizga ma'lumki, chekli sondagi (bu sonning hozircha bizga qandayligining ahamiyati yo'q)

$$\sum_{j=1}^{n} \mathrm{B}_{ij} f_j = 0$$

ko'rinishdagi munosabatlar bilan aniqlanadi, bundagi B_{ij} — o'zgarmas sonlar. O'zgarmas f_j sonlar (90) ko'rinishga ega ekanligini eslasak, avvalgi shartlarni

$$\int_L f(t) \psi_j^*(t)\,dt = 0 \tag{93}$$

ko'rinishda yozib olishimiz mumkin, bu yerdagi $\psi_j^*(t) - H$ sinfga tegishli f ga bog'liq bo'lmagan aniq funksiyalardir. Shunday qilib biz quyidagi xulosaga keldik.

Berilgan (84) integral tenglamaning yechimga ega bo'lishining zaruriy va yetarli shartlari chekli sondagi (93) ko'rinishdagi shartlar bilan ifodalanadi.

6. Nyoter teoremalari. Endi Fredgolm tenglamalari uchun bizga ma'lum bo'lgan Fredgolm teoremalari qanday rol o'ynasa, singulyar integral tenglamalar nazariyasida ham xuddi shunday ahamiyatga ega bo'lgan, nemis matematigi F.Nyoterga tegishli uchta teoremani isbotlaymiz.

1 teorema*. (84) singulyar integral tenglama yechimlarining soni cheklidir.* Bu teoremaning isboti 5- banddagi mulohazalardan darhol kelib chiqadi. (84) tenglamaning har bir yechimi (85) tenglamaning, ya'ni $M(K\varphi - f) = 0$ bir jinsli tenglamaning ham yechimidir. Demak, (84) tenglama yechimlarining soni (85) Fredgolm tenglamasi yechimlari sonidan katta emas. Bundan teoremaning to'g'riligi kelib chiqadi.

2 ***teorema.*** *(84) singulyar integral tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun*

$$\int_L f(t)\psi_j(t)dt = 0, \quad j = 1,2,\ldots,k' \tag{94}$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarli, bundagi $\psi_1(t),\ldots,\psi_k(t)$ *— qo'shma bir jinsli* $K'\psi = 0$ *tenglama chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining to'la sistemasi.*

Isbot. (94) shartlarning zarurligi (73) formuladan bevosita kelib chiqadi. Bu shartlarning yetarli ekanligini isbotlaymiz. Buning uchun (84) tenglamaning yechimga ega bo'lishi uchun yetarli bo'lgan (93) shartlar (94) shartlarning natijasi ekanligini ko'rsatish kifoyadir. g (t)— H sinfga tegishli bo'lgan ixtiyoriy funksiya bo'lsin.

Ushbu $K\varphi = Kg$ tenglama yechimga ega bo'ladi, chunki uning yechimlaridan bittasi $\varphi = g$. Demak, (93) shartlarning zarurligidan

$$\int_L \psi_j^* Kg dt = \int_L g K' \psi_j^* dt = 0$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu tenglik ixtiyoriy g funksiya uchun o'rinli bo'ladi, u holda $K'\psi_j^* = 0$ bo'lishi kerak, ya'ni ψ_j^* funksiya bir jinsli $K'\psi_j^* = 0$ tenglamaning yechimidir. Demak, ψ_j^* funksiya ψ_i funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat. Shuning uchun ham (93) shartlar (94) shartlarning natijasidir, shu bilan teorema isbotlandi.

3 ***teorema.*** *Bir jinsli* $K\varphi = 0$ *tenglama chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining* k *soni va qo'shma bir jinsli* $K'\psi_j^* = 0$ *tenglama chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlari* k' *sonining ayirmasi K operatorning faqat xarakteristik qismiga bog'liq bo'ladi va bu ayirma shu operatorning indeksiga teng bo'ladi, ya'ni*

$$k - k' = \chi \; .$$

Isbot. M — K ni regulyarizatsiyalaydigan ixtiyoriy operator bo'lsin. Bir-biri bilan qo'shma bo'lgan bir jinsli

$$MK\varphi = 0, \quad K'M'\psi = 0 \tag{95}$$

Fredgolm tenglamalarini tekshiramiz. Bu tenglamalar bir xil sonda chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega. Bu sonni ikki usul bilan hisoblaymiz va natijalarni taqqoslab, teorema birinchi qismining to'g'riligiga ishonch hosil qilamiz. Ushbu

$$\mathrm{K}\varphi = 0,\ \mathrm{K}'\psi = 0,\ \mathrm{M}\chi = 0,\ \mathrm{M}'\omega = 0$$

tenglamalarning chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining to'la sistemasini mos ravishda

$$\varphi_j\left(j = 1,...,k\right),\ \psi_j\left(j = 1,...,k'\right),$$

$$\chi_j\left(j = 1,...,m\right),\ \omega_j\left(j = 1,...,m'\right)$$

orqali belgilab olamiz. $\mathrm{MK}\varphi = 0$ tenglamaning barcha yechimlari

$$\mathrm{K}\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_j \tag{96}$$

tenglamani qanoatlantiradi, bunda a_j — o'zgarmaslar. Bu o'zgarmaslarni shunday tanlash kerakki, natijada avvalgi tenglama yechimga ega bo'lsin, ya'ni II teoremaga asosan

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{A}_{ij} a_j = 0, \quad i = 1,2,...,k' \tag{97}$$

shartlar bajarilsin, bu yerda

$$\mathrm{A}_{ij} = \int_L \psi_i \chi_j\, dt, \quad i = 1,2,...,k', \ \ j = 1,2,..,m' \ .$$

Faraz qilaylik $\left\|\mathrm{A}_{ij}\right\|$ matritsaning rangi r ga teng bo'lsin. U holda, ma'lumki, (97) sistemani qanoatlantiruvchi a_1, a_2,... a_m o'zgarmaslardan $m - r$ tasi ixtiyoriy bo'lib, qolgan r tasi esa ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Ixtiyoriy o'zgarmaslarni b_1, b_2,... b_{m-r} orqali belgilab olamiz. (96) tenglamaning o'ng tomoniga a_j lar o'rniga ularning b_j lar orqali ifodasini qo'yib, (96) tenglamani

$$\mathrm{K}\varphi = \sum_{i=1}^{m-r} b_i \xi_i \tag{98}$$

ko'rinishda yozib olamiz, bundagi $\xi_i - \chi_j$ funksiyalarning biror chiziqli kombinatsiyasi. ξ_i funksiyalar chiziqli bog'liq emas. Haqiqatan ham, b_i o'zgarmaslarning ba'zi bir qiymatlarida

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i \xi_i = 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu yig'indi kelib chiqqan ushbu

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i$$

yig'indi ham a_i lar o'rniga ularning b_j orqali ifodalarini qo'yilgandan so'ng nolga teng bo'ladi. Demak, χ_i lar chiziqli bog'liq bo'lmagani uchun barcha $a_i = 0$ bo'ladi. Ammo b_j lar a_i larning ayirmalari bo'lgani uchun barcha $b_j = 0$ bo'ladi. (98) tenglama har qanday b_i lar uchun yechimga ega bo'ladi, uni yechib,

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m-r} b_i \eta_i + \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j$$

tenglikka ega bo'lamiz, bundagi c_j — ixtiyoriy o'zgarmaslar, η_i lar esa, $K\varphi = \xi_i \, (i = 1, 2, ..., m-r)$ tenglamalarning qandaydir yechimlari. η_i, φ_j funksiyalar chiziqli bog'liq emasligini ko'rish qiyin emas. Haqiqatan, agar b_i, c_j larning qandaydir qiymatlarida

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i \eta_i + \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j = 0$$

tenglikka ega bo'lsak, bu tenglikning har ikki tomoniga K operator bilan ta'sir qilib,

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i \xi_i = 0$$

tenglikni hosil qilamiz, bundan $b_i = 0$. U holda

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j = 0,$$

bundan barcha $c_j = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, (95) tenglamalardan birinchisi roppa-rosa $m - r + k$ chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarga ega bo'ladi. Endi (95) tenglamalarning ikkinchisiga murojaat qilsak, xudda shunga o'xshash natijaga erishamiz; faqat mulohazalarda M va K ni mos ravishda K' va M' bilan va, demak, χ_i va φ_i larni mos ravishda ψ_i va ω_i lar bilan almashtirish kerak bo'ladi. Shu munosabat bilan A_{ij} o'zgarmaslar o'rniga

$$A'_{ij} = \int_L \chi_i \psi_j \, dt$$

o'zgarmaslarni hosil qilamiz, shu sababli $\|A'_{ij}\|$ matritsaning rangi ham avvalgi $\|A_{ij}\|$ matritsaning rangi r ga teng bo'ladi. Shunday qilib, (95) tenglamalar ikkinchisining chiziqli bog'liq bo'lmagan yechimlarining soni $k' - r - m'$ ekanligini ko'rsatdik. Bu natijani avvalgisi bilan taqqoslab,

$$m' - r + k' = m - r + k$$

yoki

$$k - k' = m' - m \tag{99}$$

tenglikka ega bo'lamiz. Xarakteristik qismlari bir xil bo'lgan $K\varphi = 0$ ko'rinishdagi tenglamalar uchun xuddi o'sha regulyarizatsiyalaydigan M operatorni olish mumkin, shuning uchun $m' - m$ son ham bir xil bo'lganligi sababli, (99) tenglik teoremaning birinchi qismi to'g'riligini isbotlaydi.

Teoremaning ikkinchi qismini isbotlash uchun uning birinchi qismiga asosan $k - k'$ ayirmani hisoblashda K operatorning xarakteristik qismini qoldirish yetarlidir. Bu holda $K\varphi = 0$ tenglama bir jinsli xarakteristik tenglamaga aylanadi va teoremaning 2- bandi oxirida bayon qilingan fikrlardan darhol kelib chiqadi.

Izoh. Agar $K\varphi = f$ tenglamada barcha ma'lum funksiyalar haqiqiy funksiyalar bo'lib, t o'zgaruvchi haqiqiy o'zgaruvchi bo'lsa, shu bilan birga noma'lum funksiyani ham haqiqiy o'zgaruvchili funksiyalar sinfida izlansa, yuqorida keltirilgan teoremalar ravshanki, o'z kuchini saqlab qoladi.

7. I.N. Vekuaning ekvivalentlik teoremasi. Biz 5- bandda ko'rsatib o'tgan singulyar integral tenglamani regulyarizatsiyalash usuli shunday muhim kamchilikka egaki, natijada hosil bo'lgan Fredgolm tenglamasi hamma vaqt ham berilgan tenglamaga ekvivalent bo'lmaydi. Ammo bu singulyar integral tenglamani ekvivalent Fredgolm tenglamasiga keltirib bo'lmaydi degani emas. Aksincha, quyidagi teorema o'rinlidir.

Teorema (I.N. Vekua). *(84) singulyar integral tenglama, undan faqat kvadratura yordamida hosil bo'ladigan biror Fredgolm tenglamasiga hamma vaqt ekvivalent bo'ladi.*

Isbot. (84) tenglamaning indeksini χ orqali belgilab olamiz va bu indeks musbat va manfiy bo'lgan hollarni alohida-alohida tekshiramiz.

1. $\chi \geq 0$ bo'lsin. Bu holda K operatorni regulyarizatsiyalaydigan shunday M operator mavjud bo'ladiki, bir jinsli $M\omega = 0$ tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lmaydi. Bunday operator sifatida $K^{0'}$ operatorni, ya'ni K operatorning xarakteristik qismiga qo'shma

operatorni, yoki K^{*0} operatorni, ya'ni K operatorga qo'shma K^{*} operatorning xarakteristik qismini olish mumkin. Bu operatorlarning har ikkisining indeksi ham $-\chi \leq 0$ ga teng bo'ladi va shuning uchun M bunday tanlanganda $M\omega = 0$ tenglama faqat trivial $\omega = 0$ yechimga ega bo'ladi. Shu bilan birga M ni regulyarizatsiyalaydigan operator bo'lishi (71) va K^{0*}, K^{*0} operatorlarni ifodalaydigan formulalardan kelib chiqadi.

M — ko'rsatilgan xossalarga ega bo'lgan biror operator bo'lsin. U holda

$$MK\varphi = Mf$$

Fredgolm tenglamasi boshlang'ich tenglamaga ekvivalent bo'ladi, chunki $K\varphi = f$ tenglamaning barcha yechimlari, ravshanki, $MK\varphi = Mf$ tenglamaning ham yechimlari bo'ladi va aksincha, oxirgi tenglamaning har bir yechimi dastlabki tenglamaning yechimi bo'ladi, chunki avvalgi tenglamadan $M(K\varphi - f) = 0$ tenglik kelib chiqadi, va, demak, $K\varphi - f = 0$ bo'ladi.

2. $\chi < 0$ bo'lsin. U holda shunday M operator mavjud bo'ladiki, operator K uchun M regulyarizatsiyalash operatori bo'ladi va shu bilan birga

$$M\psi = g \tag{100}$$

tenglama ixtiyoriy o'ng tomon uchun yechimga ega bo'ladi. M sifatida, masalan, K^{0*} yoki K^{*0} operatordan bittasini olish mumkin. Bu safar ularning indeksi $-\chi > 0$ bo'lgani uchun, ular talab qilingan xossalarga ega bo'ladi; operatorning bunday tanlanishi yana bir ustunlikka ega bo'ladiki, (100) tenglama kvadratura yordamida (1- va 2- bandlar) ψ ga nisbatan aniq ko'rinishda yechiladi. Endi

$$\varphi = M\psi \tag{101}$$

almashtirishni bajaramiz, bunda ψ — yangi noma'lum funksiya. U holda (84) tenglama ushbu

$$KM\psi = f \tag{102}$$

Fredgolm tenglamasiga keladi. Bu tenglama boshlang'ich tenglamaga quyidagi ma'noda ekvivalent bo'ladi: (84) va (102) tenglamalar bir vaqtda yechimga ega bo'ladi yoki ega bo'lmaydi, va yechimga ega bo'lgan holda bularning yechimlaridan bittasi bevosita ikkinchisining yechimiga olib keladi, shu bilan birga, agar M operator sifatida K^{0*}, K^{*0} operatorlardan bittasi olinsa, bitta tenglamaning yechimidan ikkinchisining yechimiga o'tish kvadratura yordamida amalga oshiriladi.

Haqiqatan ham, (102) tenglamaning har bir ψ yechimiga (84) tenglamaning bitta φ yechimi to‘g‘ri keladi, (84) tenglamaning har bir φ yechimiga esa, (102) tenglamaning (hech bo‘lmaganda bitta) ψ yechimi to‘g‘ri keladi, bu yechimni (101) tenglamani ψ ga nisbatan yechib hosil qilamiz. Shunday qilib, (84) va (102) tenglamalar bir vaqtda yechimga ega bo‘ladi, yoki ega bo‘lmaydi.

Endi bu tenglamalar yechimga ega bo‘lsin. (102) tenglamaning umumiy yechimi

$$\psi = \psi_o + \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i$$

formula bilan aniqlanadi, bunda ψ_o — biror xususiy yechim, $\psi_i\left(i=1,\ldots,m\right) - \mathrm{KM}\psi = 0$ tenglamaning chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlari, a_i — ixtiyoriy o‘zgarmaslar. Yuqorida bayon qilinganlardan ko‘rinadiki, berilgan tenglama yechimlarining barcha to‘plami

$$\varphi = \mathrm{M}\psi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \mathrm{M}\psi_i$$

formula bilan aniqlanadi. Bu formuladan bir jinsli $\mathrm{K}\varphi = 0$ tenglama chiziqli bog‘liq bo‘lmagan yechimlariningg soni *m* ga teng degan xulosa chiqarish mumkin emas, chunki ψ_i funksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘lmasa ham, $\mathrm{M}\psi_i\left(i=1,\ldots,m\right)$ funksiyalar orasida o‘zaro chiziqli bog‘liqlari bo‘lishi mumkin. Xuddi shunga o‘xshash, (84) tenglamaning yechimlari bo‘yicha (102) tenglamaning umumiy yechimi topiladi.

8. T. Karleman — I. N. Vekuaning regulyarizatsiyalash usuli. Ushbu

$$a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau + \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau = f(t) \qquad (103)$$

singulyar integral tenglama berilgan bo‘lsin. Bu tenglama xarakteristik va regulyar qismlari uchun quyidagi

$$\mathrm{K}^0\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}d\tau,$$

$$k\varphi \equiv \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

belgilashlardan foydalanib, tenglamani

$$\mathrm{K}^{\circ}\varphi = f(t) - k\varphi \tag{104}$$

ko‘rinishda yozib olamiz. Bu tenglamaning o‘ng tomonini vaqtincha ma’lum deb hisoblab, uni xarakteristik tenglama sifatida echamiz. (63) formulaga asosan yechim

$$\varphi(t) = \mathrm{K}^{*}f - \mathrm{K}^{*}k\varphi + b^{*}(t)\mathrm{Z}(t)\mathrm{P}_{\chi-1}(t)$$

yoki

$$\varphi(t) + \mathrm{K}^{*}k\varphi = \mathrm{K}^{*}f + b^{*}(t)\mathrm{Z}(t)\mathrm{P}_{\chi-1}(t) \tag{105}$$

ko‘rinishda yoziladi, bunda

$$\mathrm{K}^{*}f \equiv a^{*}(t)f(t) - \frac{b^{*}(t)\mathrm{Z}(t)}{\pi i}\int_{L}\frac{f(\tau)d\tau}{\mathrm{Z}(\tau)(\tau-t)},$$

$\mathrm{P}_{\chi-1}(t)$ esa darajasi $\chi-1$ dan katta bo‘lmagan ko‘phad ($\chi \le 0$ bo‘lganda $\mathrm{P}_{\chi-1}=0$). $\mathrm{Z}(t)$, $a^{*}(t)$, $b^{*}(t)$ funksiyalar 1- bandda ko‘rsatilgan formulalar bilan aniqlanadi. $K^{*}k$ operator, 3- bandda bayon qilinganlarga asosan birinchi turdagi Fredgolm operatori, ya’ni

$$\mathrm{K}^{*}k\varphi \equiv \int_{L}\mathrm{N}(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau$$

ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas, bunda

$$\mathrm{N}(t,\tau) = \mathrm{K}^{*}k(t,\tau).$$

1- band natijalariga asosan, agar (103) tenglamaning indeksi $\chi \ge 0$ bo‘lsa, berilgan (103) tenglama (105) tenglamaga ekvivalent bo‘ladi, agar $\chi < 0$ bo‘lsa, (105) tenglamaga (104) tenglamaning yechimga ega bo‘lish shartlaridan kelib chiqadigan ushbu

$$\int_{L}\frac{t^{k}k\varphi(t)dt}{\mathrm{Z}(t)} = \int_{L}\frac{t^{k}f(t)dt}{\mathrm{Z}(t)}, \quad k = 0,1,\ldots,\chi-1 \tag{106}$$

tenglamalarni qo‘shib qo‘yish kerak, u holda berilgan (103) tenglama (105) tenglamaga va (106) tenglamalar to‘plamiga ekvivalent bo‘ladi. (105) tenglama ikkinchi turdagi Fredgolm tenglamasidan iboratdir.

Shunday qilib, berilgan tenglamani regulyarizatsiyalashga erishdik, shu bilan birga, eng muhimi, ekvivalentlik ta’minlandi. To‘g‘risini aytganda, $\chi < 0$ bo‘lgan holda biz ikkinchi turdagi Fredgolm tenglamasidan tashqari, qo‘shimcha (106) tenglamalarga ega bo‘ldik, ammo bu muhim emas, chunki masala asosan (105) Fredgolm tenglamasini yechishga olib kelindi.

Izoh. Fredgolm teoremalari bilan Nyoter teoremalarini solishtirsak, shu narsaga ishonch hosil qilamizki, Fredgolm teoremalarining bittasidan tashqari qolgan ikkitasi singulyar integral tenglamalar uchun ham o'rinli bo'ladi. Fredgolm va singulyar tenglamalar orasidagi asosiy farq shundan iboratki, Fredgolm tenglamalari uchun $k = k'$ yoki $k - k' = 0$ tenglik to'g'ri bo'lsa, singulyar tenglamalar uchun $k - k' = \chi$ tenglik o'rinli bo'ladi. Lekin, singulyar integral tenglamalar orasidan tenglamalarning bitta sinfini ajratib olish mumkinki, bular uchun Fredgolmning barcha teoremalari to'g'ri bo'ladi. Bular indeksi nolga teng bo'lgan singulyar tenglamalardir. Bu holda $k = k'$, agar bir jinsli $\mathrm{K}\varphi = 0$ tenglama noldan farqli yechimlarga ega bo'lmasa, bir jinsli bo'lmagan $\mathrm{K}\varphi = f$ tenglama H sinfga tegishli bo'lgan ixtiyoriy o'ng tomon uchun yechimga ega bo'ladi. Bunday tenglamalarni *kvazifredgolm tenglamalar*, ularga mos operatorlarni esa *kvazifredgolm operatorlar* deb ham ataladi.

9. Ochiq egri chiziqlar uchun singulyar integral tenglamalar. L orqali bo'lakli silliq egri chiziqni belgilaymiz. L ni tashkil qiluvchi silliq yoylarni L_k, k = 1,2, ..., p, orqali, L chiziqning tugunlarini esa, c_k, k = 1,2, ... , n orqali belgilab olamiz.

Ushbu

$$\mathrm{K}\varphi \equiv \mathrm{K}^{\circ}\varphi + k\varphi = f \tag{107}$$

integral tenglamani tekshiramiz, bu yerda

$$\mathrm{K}^{\circ}\varphi \equiv a(t)\varphi(t) + \frac{b(t)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - t},$$

$$k\varphi \equiv \int_L k(t,\tau)\varphi(\tau)d\tau.$$

Shu narsani ta'kidlab o'tamizki, (107) tenglama L chiziqning tugunlari bilan ustma-ust tushadigan nuqtalarda qanoatlantiriladi deb talab qilmaymiz. Shu bilan birga, L chiziqning tugunlari deganda uning faqat geometrik ma'nodagi tugunlari emas, balki qaralayotgan funksiyalar, asosan a (t) va b (t) funksiyalar uzilishiga ega bo'lgan L chiziqning boshqa nuqtalari ham tushuniladi. (107) tenglamani tekshirganda

$$a^2(t)-b^2(t)\neq 0$$

shart bajarilsin, ya'ni tenglama normal tipdagi tenglama bo'lsin deb hisoblaymiz. $K^{\circ}\varphi=f$ xarakteristik tenglamani yechishda, xuddi 1-banddagidek, cheksizlikda nolga aylanadigan bo'lak-bo'lak analitik

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-z}$$

funksiyani kiritib, Soxotskiy—Plemel formulalariga asosan ushbu

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\ \frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau-t}=\Phi^+(t)+\Phi^-(t)$$

tengliklardan foydalanib, xarakteristik tenglamani yechishni unga ekvivalent bo'lgan

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+\frac{f(t)}{a(t)+b(t)},G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)} \tag{108}$$

Riman masalasini yechishga olib kelamiz. Bu masalani biz 4- § ning 5- bandida to'la o'rganganmiz. (108) masalaga mos maxsus va maxsus bo'lmagan tugunlarni $K^{\circ}\varphi=f$ *tenglamaga mos maxsus va maxsus bo'lmagan tugunlar* deyiladi.

$K^{\circ}\varphi=f$ tenglama berilgan $h(c_1,...,c_q)$ sinfining χ indeksi deb, shu sinfga tegishli (108) masalaning indeksini aytiladi. Bu tenglamaning $h(c_1,...,c_q)$ sinfdagi yechimiga (108) tenglamaning shu sinfdagi yechimi mos keladi. Shuning uchun ham tenglamaning shu sinfga tegishli barcha yechimlarini topish uchun (108) masalaning shu sinfga tegishli, cheksizlikda nolga aylanuvchi barcha yechimlarini topish yetarlidir. Bunday yechimlar 4- § ning 5-bandida topilgan. Xuddi shu usul bilan xarakteristik tenglamaga qo'shma bo'lgan tenglama yechiladi. (107) to'la singulyar integral tenglama tekshirilganda, $K^{\circ}\varphi=f$ xarakteristik tenglama uchun olingan natijalar asosida 8- banddagidek juda sodda Fredgolm tenglamasiga olib kelinadi. Tabiiy, bu holda ham Nyoterning barcha teoremalari o'z kuchini saqlab qoladi.

ADABIYOTLAR

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики, Москва, "Наука", 1982.

2. Васильева А.Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения, Москва, Физматлит. 2002.

3. Владимиров В.С. Уравнения математической физики, Москва, "Наука", 1971.

4. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. Москва. "Наука", 1977.

5. Гурса Э. Курс математического анализа. т. III, часть II, Государственное технико-теоретическое издательство, Москва, 1934. Ленинград.

6. Краснов М.Л. Интегральные уравнения, Москва, "Наука" 1975.

7. Курант Р. И., Гельберт Д. Методы математической физики. т. I, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1951, Ленинград.

8. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1957.

9. Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1959.

10. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения, Государственное издательство физико-математической литературы, Москва, 1962.

11. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, Государственное технико-теоретическое издательство, Ленинград, 1934, Москва.

12. Петровский И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1951, Ленинград.

13. Привалов И.И.Интегральные уравнения, Объединенное научно-техническое издательство, Москва, 1935, Ленинград.

14. Saloxitdinov M. Matematik fizika tenglamalari, Toshkent, «O‘zbekiston», 2002.

15. Салахитдинов М.С., Мирсабуров М. Нелокальные задачи для уравнений смешанного типа с сингулярными коэффициентами, Ташкент, "Universitet" , "Yangiyol poligraf servis", 2005.

16. Смирнов В.И. Курс высшей математики, т. IV, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1951, Ленинград.

17. Соболев С.Л. Уравнения математической физики, Государственное издательство технико-теоретической литературы, Москва, 1954.

18. Трикоми Ф. Интегральные уравнения, Издательство иностранной литературы, Москва, 1960.

MUNDARIJA

SALOHIDDINOV MAHMUD

INTEGRAL TENGLAMALAR

Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik

Toshkent — «Yangiyul poligraph service» — 2007

Muharrir *M. Sa'dullayev*
Rassom *T. Qanoatov*
Texnik muharrir *J. Bekiyeva*
Musahhiha *N. Nurmatova*
Sahifalovchi *H. Xodjayeva*

Original-maketdan bosishga ruxsat etildi 20.08.2007.
Bichimi 60x90 $^1/_{16}$. Kegli 11 shponli.
«Timez TAD» garniturasi.
Ofset bosma usulda bosildi. Shartli bosma tabog'i 16,0.
Nashr bosma tabog'i 13,6. Bosma tabog'i 16,0.
Nusxasi 1000. Buyurtma № 32.

Bahosi shartnoma asosida.

«Yangiyul poligraph service» MCHJ bosmaxonasida bosildi.
Yangiyo'l sh. Samarqand ko'chasi, 44.

INTEGRAL TENGLAMALAR

ISBN 978-9943-309-27-2