M. RAISOV

MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH

TOSHKENT – 2013

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

M. RAISOV

MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH

O'zbekiston Respublikasi oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi Oliy o'quv yurti talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etgan

Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi
Toshkent – 2013

UO'K: 51(075)
KBK 22.18ya73
R25

Taqrizchilar:

A.R. Artikov – fizika-matematika fanlari doktori, professor,
B.X. Xujayorov – fizika-matematika fanlari doktori, professor

Raisov M.
R25 Matematik programmalashtirish: darslik /M.Raisov; O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi. – Toshkent: Cho'lpon nomidagi NMIU, 2013 – 208-b.
ISBN 978-9943-05-604-6

Ushbu darslik 5230600-«Moliya» 5230700-«Bank ishi» 5230900-«Buxgalteriya hisobi va audit», ta'lim yo'nalishlari bo'yicha yozildi.

Mazkur darslik Davlat ta'lim standartlari hamda o'quv dasturiga mos ravishda yozilgan bo'lib, matematik programmalashtirishning quyidagi bo'limlarini o'z ichiga oladi: chiziqli programmalashtirish masalalari, chiziqli programmalashtirishning maxsus masalalari, dinamik programmalashtirish.

UO'K: 51(075)
KBK 22.18ya73

ISBN 978-9943-05-604-6

SO'ZBOSHI

O'zbekiston oliy o'quv yurtlarida ko'p bosqichli ta'lim tizimi joriy etilib, bakalavriat va magistraturada mutaxassislar tayyorlash yo'lga qo'yilgan. Bu esa oliy o'quv yurti o'qituvchilaridan jahon andozalariga to'la javob beradigan, mustaqillik talab va ehtiyojlariga javob beradigan bakalavr va magistrlar o'quv rejasi, o'quv rejaga to'la mos keluvchi o'quv dasturlari, oliy kasbiy ta'limning davlat standartlari asosida darslik, uslubiy qo'llanma, o'quv qo'llanma kabi adabiyotlarning yaratilishini taqozo etadi. Ushbu darslikda matematik programmalashtirish faniga tegishli masalalarni yechish metodikasi nazariy va amaliy jihatdan keng ko'lamda berilgan. Darslikda matematik modellarning optimal yechimlarini EHM ni qo'llab yechish uchun matematik modellar original usullarda yoritib berilgan.

Ushbu darslik lotin alifbosida birinchi marta chop etilganligi bois ayrim kamchiliklari bo'lishi mumkin. Shuning uchun bu darslik bo'yicha bildirilgan barcha taklif va fikrlar muallif tomonidan mamnuniyat bilan qabul qilinadi.

Muallif

KIRISH

Matematika fanining fundamental rivojlanishi boshqa fanlarning ham rivojlanishiga olib keldi. Hozirgi vaqtda matematika usullari qo'llanilmagan fan va texnikaning biror sohasi yo'q. Xalq xo'jaligini rejalashtirish va boshqarish masalalari juda murakkab bo'lib, bu masalalarni yechish uchun matematik modellarni qo'llashga to'g'ri keladi.

Ayniqsa bozor iqtisodiyotiga o'tish davrida va undan keyin barcha iqtisodiy masalalarni yechganda matematik modellashtirishning tatbiqi juda katta ahamiyatga ega bo'ladi. Shuning uchun darslikda har bir masala iqtisodiy masala ekanligiga asosiy e'tibor beriladi. Misol va masalalar shunday tanlab olinganki, talabalar uni yechganda ortiqcha tashvishga tushmasin. Har bir mavzuni boshlaganda bu mavzuda qo'llaniladigan nazariy qismlar sodda holatda berildi. Shu bilan bir qatorda har bir mavzuga doir masalalar yechildi. Umuman, darslikda hamma mavzularga atroflicha tushunish uchun kerak bo'lgan barcha nazariy va amaliy usullar ham berildi. Masalalar tuzilganda, ularni soddalashtirishga harakat qilindi. Masalalar shunday tanlab olindiki, kelgusida bu masalalarni EHM da hisoblash mumkin bo'lsin. Masalalarni tanlashda juda ko'p adabiyotlardan foydalanildi.

«Matematik programmalashtirish» fani quyidagi bo'limlarni o'z ichiga oladi: optimizatsiya usullari, o'yinlar nazariyasi, stoxastik usullar, iqtisodiy usullar, chiziqli programmalashtirish, modellarning sezgirlik darajasining tahlili, ikki taraflama baholash, chiziqsiz programmalashtirish, Lagranjning ko'paytmalar usuli, qavariq programmalashtirish masalalari, Kun-Taker nazariyasi, kvadratik programmalashtirish masalalari va boshqa asosiy tushunchalar

Xalq xo'jaligining iqtisodiy masalalarini yechish uchun yuqoridagi usullar keyingi vaqtda ko'p qo'llanilmoqda. Lekin shuni ham ta'kidlash lozimki, barcha ishlab chiqarish korxonalarining mablag' va xomashyo bilan ta'minlanishi chegaralangan. Shuni hisobga olib, iqtisodiy masalalar yechilganda bu yechimlar ichida kerakli yechimlarni tanlashga to'g'ri keladi. Demak, har bir aniq iqtisodiy masalani yechish uchun harakat programmasini nazariy va amaliy asoslab berish kerak.

Yuqoridagi usullarni tasavvur qilish uchun bir nechta masalalar yechib ko'rsatiladi.

1. Materiallarni optimal bichish masalasi

1-masala. Yarimtayyor mahsulotlar korxonaga to'qilgan materiallar, temir, taxta va oyna varaqlari sifatida keltiriladi. Bu yarimtayyor mahsulotlardan iloji boricha ko'proq detallar to'plami tayyorlash talab etiladi. Shu bilan birga quyidagi shartlar bajarilishi lozim. Jami n partiya material bo'lib, i partiya q_i birlikka ega. To'plam esa m xil turli detaldan iborat. Har bir to'plamga esa k xil detaldan p_k ta kiradi. Yarimtayyor mahsulotlar birligi s ta turli usul bilan bichilishi mumkin.

i partiya yarimtayyor mahsulot j usul bilan bichilganda k xil detaldan a_{ikj} ta hosil bo'ladi deb faraz qilaylik.

x_{ij} bilan i-partiyaning j usul bilan bichilgandagi soni (miqdori)ni belgilaylik. Bu usulda bichilgandagi k xil detal miqdori $a_{ikj}x_{ij}$ bo'ladi. Bichishning barcha usullaridan hosil bo'ladigan k xil detal soni $\sum_{j=1}^{s} a_{ikj}x_{ij}$ ga teng. Har bir partiya material belgilangan k xil detalning k xil umumiy soni quyidagicha ifodadan aniqlanadi.

$$\sum_{j=1}^{s} a_{1kj}x_{1j} + \sum_{j=1}^{s} a_{2kj}x_{2j} + \ldots + \sum_{j=1}^{s} a_{nkj}x_{nj} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ikj}x_{ij}\ .$$

Har bir to'plam k xil detaldan p_k taga ega. Shuning uchun k xil detal bilan ta'minlangan to'plam soni quyidagiga teng:

$$Z_k = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{s} a_{ikj}x_{ij}\ .$$

To'plam barcha xil detallar bilan ta'minlangan bo'lishi shart, ya'ni materiallarni optimal bichish masalasida shunday x_{ij} sonlarni topish kerakki, ular Z_k nisbatining minimal qiymatiga maksimum qiymat bersinlar, ya'ni

$$Z_k > Z \qquad \left(k = \overline{1,n}\right) \tag{1}$$

shart bajarilganda Z ga maksimum qiymat berish talab qilinadi. Shu bilan bir qatorda

$$\sum_{j=1}^{s} x_{ij} = q_i, \quad \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{2}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \left(i = \overline{1,n}, \qquad j = \overline{1,n}\right). \tag{3}$$

Yuqoridagilardan ko'rinib turibdiki, (2) formuladagi shartlar, i-partiya q_i birlik materialga ega bo'lganligini, (3) formula esa mahsulot sonining manfiy bo'lmasligini ko'rsatadi.

2. Transport masalasi

2-masala. Samarqand viloyatining ikkita bazasidan uchta tumanga bir jinsli tovarlarni tashish kerak bo'lsin. Tovarlar zaxirasi birinchi bazada 400 tonna, ikkinchi bazada 600 tonna. Birinchi tumanning tovarga ehtiyoji 350 tonna, ikkinchisiniki 450 tonna va uchinchisiniki 200 tonna. Birinchi bazadan uchta tumangacha bo'lgan masofalar mos holda 10 km, 20 km va 30 km. Ikkinchi bazadan uchta tumangacha bo'lgan masofalar mos ravishda 40 km, 50 km va 60 km ga teng. Tumanlarga tovar tashish xarajatlarining optimal variantlarini topish talab etiladi.

Bu masalani yechish uchun quyidagi jadval tuziladi.

1- jadval

Bazalar	**Tovar zaxiralari**	**Tumanlar**		
		1	2	3
Joraboy	400 t	10 x_{11}	20 x_{12}	30 x_{13}
Juma	600 t	40 x_{21}	50 x_{22}	60 x_{23}
Tovarlarga bo'lgan talab	1000 t	350 t	450 t	200 t

Tumanlarning bazalardan olgan yuklari x_{ij} $\left(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3}\right)$ har xil taqsimlanishi mumkin. Misol uchun 1-bazadagi yuklarni quyidagicha taqsimlash mumkin:

$$x_{11}=150,\quad x_{12}=150,\quad x_{13}=100 \text{ t.}$$

2-bazadagi yuklarni esa mos ravishda iste'molchilarga quyidagicha taqsimlanadi: $x_{21}=200,\quad x_{22}=300,\quad x_{23}=100$ t.

Bu taqsimot bo'yicha transport xarajatlari quyidagicha bo'ladi:

$$F_1=150\cdot10+150\cdot20+100\cdot30+$$
$$+200\cdot40+300\cdot50+100\cdot60=36500\ m.km.$$

Agar x_{ij} lar ikkinchi marta boshqacha tanlab taqsimlangan, ya'ni

$$x_{11}=50\ m,\ x_{12}=200\ m,$$
$$x_{13}=150\ m,\ x_{21}=300\ m,\ x_{22}=250\ m,\ x_{23}=100\ m.$$ bo'lsa,

u vaqtda transport xarajatlari quyidagicha bo'ladi:

$$F_2=50\cdot10+200\cdot20+150\cdot30+300\cdot40+250\cdot50+100\cdot60=39000\ m.km.$$

1- va 2- variantlardagi xarajatlarning farqi quyidagicha bo'ladi:

$$F_2-F_1=39000\ m.km-36500\ m.km=2500\ m.km.$$

Demak, transport xarajatlari oshadi. Ya'ni F_1 F_2 dan ko'ra yaxshiroq. Shunday qilib, F_i ko'p variantlari ichidan optimalini, ya'ni eng kam transport xarajatlarini talab qiladigan variantni topish kerak.

Birinchi jadvalga asoslanib, quyidagi matematik modelni tuzish mumkin:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}=400,\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=600,\\ x_{11}+x_{21}=350,\\ x_{12}+x_{22}=450,\\ x_{13}+x_{23}=200. \end{cases} \tag{4}$$

Bu shartlarga asoslanib, transport xarajatlarini quyidagicha yozish mumkin:

$$F = 10x_{11} + 20x_{12} + 30x_{13} + 40x_{21} + 50x_{22} + 60x_{23} . \quad (5)$$

Shunday qilib, (4) sistemaning shunday musbat yechimlarini topish kerakki, (5) chiziqli forma (maqsad funksiyasi) minimum qiymatga ega bo'lsin.

3. Ratsion haqidagi masala

Faraz qilaylik, mahalliy sayyohning bir oylik ratsionini 12 kg birlik, ya'ni tarkibi tashkil topgan mahsulotdan iborat. Sayyohning ratsioni go'sht, makaron mahsulotlari va sabzavotlardan iborat.

Mahsulotlar tarkibi bo'yicha ma'lumotlar quyidagi jadvalda berilgan.

2- jadval

Ko'rsatkichlar	**Birlik o'lchovi**	**Sabzavotlar, x_1**	**Makaron mahsulotlari, x_2**	**Go'sht, x_3**	**Jami kerakli mahsulotlar**
Oqsilning koeffitsient birligi	kg	0,18	0,24	1,2	12
Oqsilning miqdori	g	10	8	200	1000
Vitaminlar	mg	15	1	1,5	450
1 kg ning narxi	tiyin	1	1,2	7,5	

Masalaning matematik modelini tuzing.

Jadvalga asosan quyidagi model tuziladi:

$$\left.\begin{aligned} 0,18x_1 + 0,24x_2 + 1,2x_3 &\geq 12, \\ 10x_1 + 8x_2 + 200x_3 &\geq 1000, \\ 15x_1 + 1x_2 + 1,5x_3 &\geq 450. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

$$x_1 \geq 0, \; x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0.$$

Chiziqli funksiya esa quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$F(x_1, x_2, x_3) = 1x_1 + 1,2x_2 + 1,75x_3 . \quad (7)$$

Shunday qilib, (6) sistemaning shunday nolli va musbat yechimlarini topish kerakki, (7) maqsadli funksiya qiymati minimum bo'lsin.

Bunday masalalarni yechish hollarini keyingi mavzularda ko'ramiz.

I BOB
CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH

1-§. Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasi va chiziqli programmalashtirish masalalarini asosiy masalaga keltirish

Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasi ta'rifini quyidagicha berish mumkin.

Bizga chiziqli funksiya (maqsadli funksiya)

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.1}$$

va n-noma'lumli m-ta chiziqli tenglamalar sistemasi

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right\} \tag{1.2}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \ldots \quad , \quad x_n \geq 0.$$

berilgan bo'lsin.

Bu yerda (1.2) sistemaning shunday yechimlarini topish kerakki, (1.1) chiziqli funksiya (maqsad funksiyasi) eng katta (maksimum) yoki eng kichik (minimum) qiymat qabul qilsin.

Maqsad funksiyasining eng katta yoki eng kichik qiymatlarini topish masalaning qo'yilishiga bog'liq. Ishlab chiqarishda daromad olish talab etilsa, chiziqli funksiyaning eng katta (max) qiymatlari topiladi.

Agar ishlab chiqarishda xarajatlarni rejalashtirish kerak bo'lsa, u holda chiziqli funksiyaning eng kichik (min) qiymatlarini topish talab etiladi.

Ko'p masalalarni yechganda $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarga qo'yilgan cheklovlar chiziqli tengsizliklar sistemasi ko'rinishida beriladi, ya'ni

$$
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m.
\end{array}\right\} \quad (1.3)
$$

Har qanday (1.3) ko'rinishdagi shartlarni chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasidagi ko'rinishiga keltirish mumkin.

Haqiqatan ham, (1.3) sistemasining birinchi tengsizligiga y_1, ikkinchisiga y_2 va h.k. m-tengsizligiga y_m qo'shsak, (1.3) sistemaga ekvivalent bo'lgan quyidagi sistema hosil bo'ladi.

$$
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + y_m = b_m.
\end{array}\right\} \quad (1.3')
$$

$$
x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n},\ \ldots,\ y_j \geq 0,\ j = \overline{1, m}
$$

Shuni qayd qilish kerakki, (1.3') chiziqli tengsizliklar sistemasining yechimi (1.3) tengliklar sistemasini ham qanoatlantiradi yoki aksincha.

Tengsizliklar sistemasi quyidagi ko'rinishda

$$
\left.\begin{array}{l}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \geq b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \geq b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \geq b_m.
\end{array}\right\} \quad (1.4)
$$

$$
x_i \geq 0,\ i = \overline{1, n},\ \ldots,\ y_j \geq 0,\ j = \overline{1, m}
$$

bo'lganda ham masala yuqoridagi kabi yechiladi, ya'ni bu yerda musbat $y_1, y_2, \ldots, y_m$ lar mos ravishda ayriladi. Demak, chiziqli programmalashtirish masalalarini asosiy masalaga keltirish mumkin. Shunday qilib, (1.2) sistemani 0 ga teng yoki noldan katta yechimlarini topish kerakki, (1.1) chiziqli forma (maqsadli funksiya) eng katta (max) yoki bo'lmasa eng kichik (min) qiymat qabul qilsin.

Ta'rif. (1.2) sistemaning manfiy bo'lmagan har qanday yechimlar to'plamiga mumkin bo'lgan yechimlari yoki masalaning tayanch rejasi deyiladi:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Bundan keyin chiziqli funksiya maqsad funksiyasi deb yuritiladi. Maqsad funksiyasini maksimumlashtiruvchi (minimumlashtiruvchi) mumkin bo'lgan barcha yechimlariga optimal yechimlar deyiladi yoki optimal reja ham deb yuritiladi.

Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasini yechganda, odatda, simpleks usulidan foydalaniladi.

2-§. Simpleks usuli

Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasini geometrik usul yordamida yechilganda tenglamalar sistemasiga va maqsad funksiyasiga kiruvchi o'zgaruvchilar soni qancha kam bo'lsa, masalani yechish shuncha osonlashadi. Agar o'zgaruvchilar soni juda ko'p bo'lsa, masalan, qavariq shakl uchlarining soni bir necha million bo'lsa, u holda maqsad funksiyasining eng katta (eng kichik) qiymatlarini topish hozirgi zamon hisoblash mashinalariga ham og'irlik qiladi.

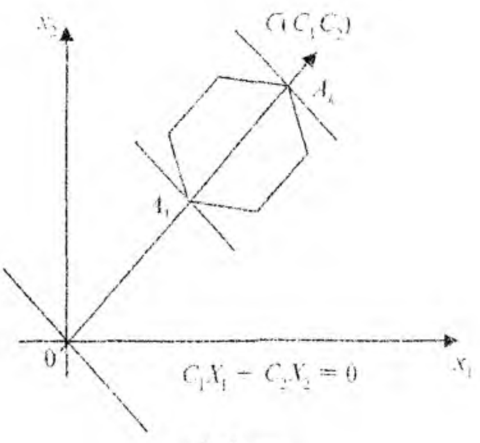
1.1-chizma.

Haqiqatan ham, n! ta uchga ega bo'lgan qavariq ko'pyoqlik berilgan bo'lsin (1.1-chizma). Masalani yechish uchun ko'pyoqlikning n! ta uchlarining koordinatalarini topib maqsad funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlarini taqqoslash kerak. Agar operatsiyalar soni $n>15$ bo'lsa, u holda masalaning zarur bo'lgan yechimini topish hozirgi zamon hisoblash mashinalariga ham og'irlik qiladi. Buni ko'rsatish uchun Stirling formulasidan foydalaniladi:

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n}.$$

Agar qavariq ko'pyoqlik uchlarining soni $n=20$ bo'lsa, masalaning shartlari $2 \cdot 10^{18}$ dan ham oshib ketadi. Bu yerda qavariq ko'pyoqlikning lozim bo'lgan uchi koordinatalarini tanlab olish uchun sekundiga 10 million operatsiyani bajaradigan hozirgi zamon hisoblash mashinalariga 5000 yil ham kamlik qiladi.

Yuqoridagi misoldan ko'rinib turibdiki, bunday masalalarni yechish uchun maxsus usullar ishlab chiqarish lozimki, ko'pyoqlikning uchlarini tanlash tartibsiz emas, balki maqsadli ravishda amalga oshirilsin. Masalan, ko'pyoqlikning qirralari bo'ylab shunday harakat qilish lozimki, har bir qadamda maqsad funksiyasi F ning qiymati maksimum (minimum) qiymatga tomon tartibli ravishda intilsin (1.2-chizma).



1.2-chizma.

Simpleks usul birinchi bo'lib amerikalik olim D. Dansig tomonidan 1949- yili taklif etilib, keyinchalik 1956- yilda Dansig, Ford, Fulkeron va boshqalar tomonidan to'la rivojlantirildi. Lekin, 1939-yilda rus matematigi L.V. Kantorovich va uning shogirdlari asos solgan yechuvchi ko'paytuvchilar usuli simpleks usulidan ko'p farq qilmaydi. «Simpleks« so'zi n -o'lchovli fazodagi $n+1$ ta uchga ega bo'lgan oddiy qavariq ko'p yoqlikni ifodalaydi. Simpleks bu $\sum_{k=1}^{n} x_k \leq 1$ ko'rinishdagi tengsizliklarning yechimlari sohasidir.

Simpleks usuli yordamida chiziqli programmalashtirishning ko'pgina masalalari yechiladi.

Bu usul yordamida chekli qadamlarda optimal yechimlarni topish mumkin. Har bir qadamda shunday mumkin bo'lgan yechimlarni topish kerakki, maqsad funksiyasining qiymati oldingi qadamdagi qiymati (miqdori)dan katta (kichik) bo'lsin. Bu jarayon maqsad funksiyasi optimal (maksimum yoki minimum) yechimga ega bo'lguncha davom ettiriladi.

Simpleks usulini tushuntirish uchun quyidagi masalani ko'rib chiqaylik.

Masala. Quyidagi tengsizliklar sistemasining

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \leq b_m. \end{array}\right\} \tag{1.5}$$

manfiy bo'lmagan shunday yechimlari $x_1=\alpha_1$, $x_2=\alpha_2$, ..., $x_n=\alpha_n$ topilsinki, maqsad funksiya

$$F(x_1, \ x_2, \ \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.6}$$

maksimum yoki minimum qiymatga ega bo'lsin.

Bu masalani yechish uchun (1.5) chiziqli tengsizliklar sistemasiga shunday y_1, y_2 ,..., y_n manfiy bo'lmagan o'zgaruvchilarni mos ravishda qo'shib, quyidagi ekvivalent sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n + y_1 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n + y_2 = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n + y_m = b_m, \end{array}\right\} \quad (1.7)$$

bunda $x_i \geq 0,\quad y_j \geq 0,\quad i = \overline{1,n},\quad j = \overline{1,m}$.

U holda maqsad funksiyasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{aligned} &F(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n,\ y_1,\ y_2,\dots,y_m) = \\ &= c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n + \\ &+0\cdot y_1 + 0\cdot y_2 + \dots + 0\cdot y_m. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Agar (1.7) dan $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ deb olsak, birinchi mumkin bo'lgan yechimlar to'plami $y_j = b_j,\ j = \overline{1,m},\quad x_i = 0,\quad i = \overline{1,n}$ hosil bo'ladi. Bu holda maqsad funksiyasi 0 ga teng, ya'ni

$$F(0,0,\dots,0,b_1,b_2,\dots,b_m) = 0\,.$$

Simpleks usulini qo'llaganda ketma-ket jadvallarni almashtirish ancha qulay bo'ladi. Jadvalni tuzishga o'tamiz:

1) eng yuqoridagi $m+1$ satriga maqsad funksiyasining koeffitsientlari joylashtiriladi;

2) jadvalning yuqoridagi 2-satriga o'zgaruvchi $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n,\ y_1,$ $y_2,\dots,\ y_m$ lar yoziladi;

3) $x_1,\ x_2,\dots,\ x_n$ larning koeffitsientlari jadvalning asosiy qismini tashkil qiladi (asosiy matritsa), $y_1,\ y_2,\dots,\ y_m$ o'zgaruvchilarning koeffitsientlari esa bosh diagonal bo'yicha yozilib, birlik matritsani tashkil etadi;

4) jadvalning oxirgi satriga indekslar satri deyiladi va bu satr maqsad funksiyasiga qatnashuvchi o'zgaruvchilarning koeffitsientlarini teskari ishora bilan olingan koeffitsientlar orqali to'ldiriladi.

Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvali

m+1	I	II	III	c_1	c_2	...	c_n	0	0	...	0	Maqsad funksiya satri
				x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_2	...	ym	O'zgaruvchilar satri
1	0	y_1	b_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}	1	0	...	0	Birlik matritsa
2	0	y_2	b_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}	0	1	...	0	
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	0	y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}	0	0	...	1	
Indeks satri			0	$-s_1$	$-s_2$	...	$-c_n$	0	0	...	0	

Maqsadli ustun O'zgarmaslar ustuni Asosiy matritsa

O'zgaruvchilar ustuni

Bu jadvalga asoslanib, birinchi simpleks jadval tuziladi.

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvalini tahlil qilamiz. Indekslar satrini tahlil qilganda satr elementlarining musbat va manfiy qiymatlariga e'tibor beriladi. Agar indeks satri elementlarining hammasi musbat bo'lsa, u holda mumkin bo'lgan yechimini o'zgartirib bo'lmaydi va bu yechim optimal yechim bo'ladi. Faraz qilaylik, indeks satri elementlarining ichida bir nechta manfiy sonlar mavjud va bu manfiy son ($-s_i$) ga teng bo'lsin. ($-s_i$) ni qora chiziqli to'rtburchak ichiga olamiz. Bu ustunga yechuvchi ustun deyiladi. ($-s_1$) joylashgan ustun elementlarini ham qora chiziq bilan chizilgan to'rtburchak ichiga olinadi. Bu yerda shuni ham aytish kerakki, agar bordi-yu indeks satrida bir-biriga teng bir necha kichik manfiy sonlar bo'lsa, u holda chap tomondan boshlab birinchi katakdagi manfiy son tanlanadi. Yechuvchi satrni topish uchun o'zgaruvchilar ustunidagi sonlarni kalitli ustundagi mos musbat sonlarga bo'lib, ular ichidan eng kichik musbat son tanlab olinadi. Faraz qilaylik,

bu son $\frac{b_1}{a_{12}}$ bo'lsin, ya'ni

$$K = \text{eng kichik}\left\{\frac{b_1}{a_{12}},\ \frac{b_2}{a_{22}},\ \ldots,\ \frac{b_m}{a_{m2}}\right\} = \frac{b_1}{a_{11}}.$$

Birinchi simpleks jadvalda $S_1, S_2, \ldots, S_{m+1}$ ning qiymatlari quyidagicha topiladi:

$$S_1 = 1 + b_1 + \sum_{i=1}^{n} a_{1i}, \qquad S_2 = 1 + b_2 + \sum_{i=1}^{n} a_{2i},$$

....

$$S_m = 1 + b_m + \sum_{i=1}^{n} a_{mi},$$

$$S_{m+1} = 0 - \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

$$S = \sum_{i=1}^{m+1} S_i = m + 1 + \sum_{i=1}^{m} b_i + \sum_{i=1}^{m} a_{1i} + \sum_{i=1}^{m} a_{2i} + \ldots + \sum_{i=1}^{m} a_{mi} - \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Ikkinchi simpleks jadvalni tuzishga o'tamiz. Ikkinchi simpleks jadvalda o'zgaruvchilar ustuni o'zgaradi. Bu ustunda yangi o'zgaruvchi x_1 yechuvchi satrdagi u_1 ning o'rnini egallaydi. Ya'ni yechuvchi ustundagi o'zgaruvchi yechuvchi satrdagi o'zgaruvchining o'rnini egallaydi.

Bundan keyingi jadvallarni tuzganda ham bu qoida saqlanadi. Birinchi simpleks jadvaldagi yechuvchi satrga ikkinchi simpleks jadvalda bosh satr deb ataladi va bu satrdagi har bir katak quyidagi formula yordamida to'ldiriladi:

$$B_i = \frac{O_i}{K},$$

bunda:

K — yechuvchi son;

O_i — oldingi son;

B_i — bosh satr elementlari.

Ikkinchi simpleks jadvalida bosh satrlardagi kataklar quyidagi formula yordamida to'ldiriladi. Yechuvchi ustun bilan yechuvchi satr kesishgan kataklarda turgan son $K = \dfrac{b_1}{a_{11}}$ ga yechuvchi son deyiladi. Yechuvchi satr ham qora chiziq bilan to'rtburchak ichiga olinadi. Dastlabki berilganlar jadvalining oxirgi ustuniga tekshirish ustuni joylashtiriladi. Tekshirish ustunidagi har bir son o'zgarmaslar ustunidan boshlab satrdagi sonlar yig'indisiga tengdir. Tekshirish ustunidagi sonlar yechuvchi ustunni topishda qo'llanilmaydi. Natijada birinchi simpleks jadval hosil bo'ladi.

Birinchi simpleks jadval

M+1	I	II	III	s_1	s_2	...	s_n	0	0	...	0	0
				x_1	x_2	...	x_n	y_1	y_2	...	y_m	Tekshirish ustuni
1	0	y_1	B_1	a_{11}	a_{12}	...	A_{1n}	1	0	...	0	S_1 yechuvchi satr
2	0	y_2	B_2	a_{21}	a_{22}	...	A_{2n}	0	1	...	0	S_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
M	0	y_m	b_m	a_{m1}	a_{m2}		a_{mn}	0	0		1	S_m
Indeks satri	Maqsadli ustun		F=0	$-C_1$	C_2	...	C_n	0	0		0	S_{m+1}

Yechuvchi ustuni

Yechuvchi son

Boshqa satrdagi kataklar quyidagi formula yordamida to'ldiriladi:

$$A_{ij} = O_i - \frac{K_1 K_2}{K},$$

bunda:

O_i – oldingi son,

K – yechuvchi son;

K_1 – O_i ga mos bo'lgan yechuvchi satrdagi son;

K_2 – O_i ga mos bo'lgan yechuvchi ustundagi son.

Yuqoridagi formulalar asosida yangi elementlarni [illegible] simpleks jadval elementlari orqali hisoblab chiqsak [illegible] simpleks jadval hosil bo'ladi. Bundan keyin maqsadli satrni yozmasak ham bo'ladi, chunki bu satr elementlari keyingi jadvallarda qo'llanilmaydi.

Ikkinchi simpleks jadval

M+1	**I**	**II**	**III**	**x_1**	**x_2**	**...**	**xn**	**s_1**	**s_2**	**...**	**s_n**	**Tekshirish ustuni**
1	0	x_1	F_1	$s_{11}=1$	s_{12}	...	s_{1n}	$1/a_{11}$	0	...	0	S'_1 –bosh satr
2	0	y_2	F_2	$c_{21}=0$	c_{22}	...	c_{2n}	d_{21}	d_{22}	...	d_{2m}	S'_2
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
M	0	y_m	F_m	$c_{m1}=0$	c_{m2}	...	c_{mn}	d_{m1}	D_{m2}	...	d_{mm}	S'_m
Indeks satri			F'_1	α_1	α_2	...	α_n	β_1	β_2	...	β_m	S'_{m+1}

Bu jadval kataklaridagi sonlar quyidagilarga teng:

$$S'_1 = F_1 + \frac{1}{a_{11}} + \sum_{i=1}^{n} c_{1i},$$

$$S'_2 = F_2 + \sum_{i=1}^{n} c_{2i} + \sum_{j=1}^{m} d_{2j},$$

....

$$S'_m = F_m + \sum_{i=1}^{n} c_{mi} + \sum_{j=1}^{m} d_{mj},$$

$$S'_{m+1} = F'_1 + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j.$$

Bosh satr elementlari:

$$F_1 = \frac{b_1}{a_{11}}, \quad c_{11} = \frac{a_{11}}{a_{11}} = 1, \quad c_{12} = \frac{a_{12}}{a_{11}}, \quad \ldots, \quad c_{1n} = \frac{a_{1n}}{a_{11}}.$$

$$d_{11}=\frac{1}{a_{11}},\quad d_{12}=\frac{0}{a_{11}}=0,\quad \ldots,\quad d_{1n}=\frac{0}{a_{11}}=0.$$

Ikkinchi satr kataklaridagi sonlar:

$$F_2=b_2-\frac{b_1a_{21}}{a_{11}},\quad c_{21}=a_{21}-\frac{a_{11}a_{21}}{a_{11}}=0,\quad \ldots,\quad c_{2n}=a_{2n}-\frac{a_{21}a_{1n}}{a_{11}}$$

....

m-satr elementlari:

$$F_m=b_m-\frac{b_1a_{m1}}{a_{11}},\quad c=a_{m1}-\frac{a_{m1}a_{11}}{a_{11}}=0,\quad c_{mn}=a_{mn}-\frac{a_{m1}a_{1n}}{a_{11}},$$

$$d_{m1}=0-\frac{a_{m1}\cdot 1}{a_{11}},\quad \ldots, d_{m2}=1-\frac{0\cdot a_{m1}}{a_{11}}.$$

Indeks satr elementlari:

$$F_1=0-\frac{(-c_1)b_1}{a_{11}},\quad \alpha_1=-c_1-\frac{(-c_1)a_{11}}{a_{11}}=0,$$

$$\alpha_2=-c_2-\frac{(-c_1)a_{12}}{a_{11}},\quad \ldots,\quad \alpha_n=-c_n-\frac{(-c_1)a_{1n}}{a_{11}},$$

$$\beta_1=0-\frac{1\cdot(-c_1)}{a_{11}},\quad \ldots,\quad \beta_m=0-\frac{0\cdot(-c_1)}{a_{11}}=0.$$

Agar ikkinchi simpleks jadvalning indeks satridagi kataklardagi sonlarning hammasi musbat bo'lsa, u holda bu jadvaldagi yechimlarga optimal yechimlar deyiladi va maqsad funksiyasining optimal qiymati

$$F_1(F_1,\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0,\ F_2,\ F_3,\ \ldots,\ F_m)=c_1F_1+c_2\cdot 0+\ldots+c_n\cdot$$
$$\cdot 0+0\cdot 0+F_2\cdot 0+F_3\cdot 0+\ldots+F_m\cdot 0=c_1F_1$$

bo'ladi, bunda:

$$x_1=F_1,\quad x_2=0,\quad x_3=0,\quad \ldots, x_n=0,$$
$$y_1=0,\quad y_2=F_2,\quad y_3=F_3,\quad \ldots,\quad y_m=F_m.$$

Agar indeks satrida manfiy sonlar mavjud bo'lsa, yuqoridagi yechimlar optimal yechim bo'lmaydi. Shuning uchun yuqoridagi qoidalarni ikkinchi simpleks jadvalga qo'llab, uchinchi simpleks jadval tuziladi. Jadvallarni almashtirish (yaxshilash) indeks satrida hamma kataklardagi sonlar musbat bo'lguncha davom ettiriladi.

Simpleks jadvallarni tuzganda quyidagi qoidalarga asosiy e'tiborni berish kerak:

1) agar yechuvchi ustunda nol bo'lsa, kelgusi jadvalda shu nol turgan satr o'zgarmaydi;

2) yechuvchi satrda nol bo'lsa, bu nol turgan ustun kelgusi jadvalda o'zgarmaydi;

3) har bir o'zgaruvchi ustun va mos o'zgaruvchi satr kesishgan katakdagi son 1 ga teng bo'lsa, bu ustundagi boshqa katakdagi sonlar nolga teng.

Shu vaqtgacha maqsad funksiyasining maksimum qiymatini izlagan edik. Lekin ayrim masalalarda maqsad funksiyasining minimum qiymatlarini topish talab etiladi, ya'ni

$$F_{min} = -F_{max} = -c_1x_1 - c_2x - \ldots - c_nx_n \text{ yoki,}$$

$$F_{max} = -F_{min} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n.$$

Bundan ko'rinadiki, masalaning maksimumini topish yetarli. Shunday qilib, har qanday maksimum qiymat talab qilingan masalalarni unga ekvivalent bo'lgan minimum qiymatni talab qilgan masalalar bilan almashtirish mumkin.

Yuqoridagi qoida va formulalardan foydalanib, quyidagi masalani yechamiz.

1-masala. Korxonada ikki tur buyum ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Birinchi tur buyum ishlab chiqarish uchun birinchi xil xomashyodan 6 kg, ikkinchi xil xomashyodan 3 kg, uchinchi xil xomashyodan 4 kg ishlatiladi. Agar korxona birinchi xomashyodan 600 kg, ikkinchi xil xomashyodan 520 kg, uchunchi xil xomashyodan 600 kg ta'min etilgan va birinchi xil buyumni sotganda har bir donasidan 6 so'm , ikkinchi xil buyumni sotganda esa 3 so'm foyda olganda, korxona ishlab chiqarishini shunday rejalashtiringki, olingan daromad maksimal bo'lsin.

Yechish. Faraz qilaylik, birinchi tur buyumdan x_1 dona, ikkinchi tur buyumdan x_2 dona ishlab chiqarilsin

Masalaning shartini x_1 va x_2 o'zgaruvchilarni o'z ichiga olgan quyidagi tengsizliklar sistemasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &\le 600, \\ 4x_1 + 3x_2 &\le 520, \\ 3x_1 + 4x_2 &\le 600. \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

U holda maqsad funksiyasi

$$F(x_1,\ x_2) = 6x_1 + 3x_2 \tag{1.10}$$

bo'ladi.

Demak, (1.9) chiziqli tengsizliklar sohasida shunday manfiy bo'lmagan yechimlarini topish kerakki, maqsad funksiyasi $F(x_1,\ x_2)$ maksimal qiymatga ega bo'lsin.

Masalani simpleks usuli bilan yechish uchun (1.9) tengsizliklar sistemasi tenglamalar sistemasiga keltiriladi:

$$\left.\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 + y_1 &= 600, \\ 4x_1 + 3x_2 + y_2 &= 520, \\ 3x_1 + 4x_2 + y_3 &= 600. \end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_3 \ge 0.$$

Maqsad funksiyasi esa quyidagicha bo'ladi:

$$F(x_1, x_2, y_1, y_2, y_3) = 6x_1 + 3x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3. \tag{1.12}$$

Agar (1.10) dan $x_1=0$, $x_2=0$ deb olsak, u holda $y_1=600$, $y_2=520$, $y_3=600$ ga teng bo'ladi. Demak, birinchi bazisli yechimlar $x_1=0$, $x_2=0$, $y_1=600$, $y_2=520$, $y_3=600$ bo'ladi. Endi maqsad funksiyasining bu yechimlarga mos qiymati topiladi:

$F(0, 0, 600, 520, 600)=6\cdot0+3\cdot0+600\cdot0+520\cdot0+600\cdot0=0.$

Bundan ko'rinib turibdiki, ishlab chiqarish hali boshlanmagan. Simpleks usul qoidalaridan foydalanib, dastlabki berilganlarning asosiy jadvali tuziladi.

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvali

	I	II	III	6	3	0	0	0	Maqsad satri
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	O'zgaruvchilar satri
1	0	y_1	600	6	2	1	0	0	Asosiy matritsa
2	0	y_2	520	4	3	0	1	0	Birlik matritsa
3	0	y_3	600	3	4	0	0	1	
Indeks satri	Maqsad ustuni	O'zgaruvchilar ustuni	F=0	-6	-3	0	0	0	

Dastlabki berilganlarning asosiy jadvaliga asoslanib, birinchi simpleks jadval tuziladi.

Birinchi simpleks jadval

IV	I	II	III	6	3	0	0	0	Tekshirish ustuni
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1	0	Y_1	600	6	2	1	0	0	609 Kalitli satr
2	0	Y_2	520	4	3	0	1	0	528
3	0	Y_3	600	3	4	0	0	1	608
Indeks satri		Maqsad ustuni	$F_0=0$	-6	-3	0	0	0	

Yechuvchi ustun Yechuvchi son

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, indeks satrida manfiy sonlar bor. Bu sonlar ichidan eng kichigi topiladi. Eng kichigi {-6, -3} -6 bo'lgani uchun bu ustun yechuvchi ustundir. O'zgarmaslar ustunidagi sonlarni mos ravishda yechuvchi ustundagi sonlarga bo'lib, ular ichidan eng kichigi topiladi.

$$\min\left\{\frac{600}{6}, \quad \frac{520}{4}, \quad \frac{600}{3}\right\} = \frac{600}{6} = 100.$$

Bu satrga yechuvchi satr deyiladi. Yechuvchi ustun va yechuvchi satr kesishgan katakda joylashgan $K = 6$ songa yechuvchi son deyiladi.

Simpleks jadval tuzish qoida va formulalaridan foydalanib, *ikkinchi simpleks jadval* tuziladi.

Ikkinchi simpleks jadval

IV	I	II	III	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Tekshirish ustuni
III	6	x_1	100	1	1/3	1/6	0	0	$101\frac{1}{2}$ bosh satr
II	0	y_2	120	0	5/3	-2/3	1	0	122 yechuvchi satr
I	0	y_3	300	0	3	-1/2	0	1	$303\frac{1}{2}$
Indeks satri			$F_1=600$	0	-1	1	0	0	600

Yechuvchi ustun

Yechuvchi son

Indeks satrida manfiy son mavjud bo'lgani uchun ikkinchi simpleks jadval tuzilgani kabi uchinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

Uchinchi simpleks jadval

IV	I	II	III	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	Tekshirish ustuni
I	6	x_1	76	1	0	3/10	-1/5	0	$77\frac{1}{10}$
II	3	x_2	72		1	-2/5	3/5	0	$73\frac{1}{5}$ bosh satr
III	0	y_3	272		0	7/5	-9/5	1	$272\frac{3}{5}$
Indeks satri			F_1=672		0	3/5	3/5	0	$673\frac{1}{5}$

Shunday qilib, uchinchi simpleks jadvalning indeks satrida manfiy sonlar yo'q. Shuning uchun bu jadval optimal programmadir. Optimal yechim esa x_1=76, x_2=72, y_1=0, y_2=0, y_3=272 ga teng. Bu yechimni (1.11) formulaga qo'ysak quyidagi hosil bo'ladi:

$$F(76, 72, 0, 0, 272) = 6\cdot76+3\cdot72+0\cdot0+0\cdot0+0\cdot272=6\cdot76+3\cdot72=672,$$

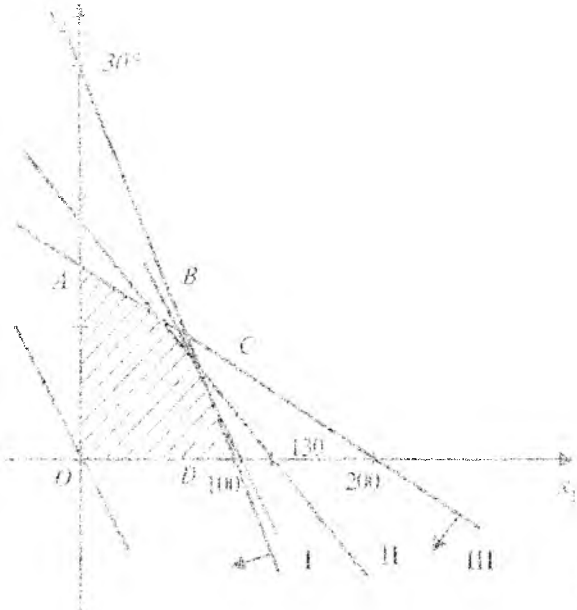
$$F_{max}=672 \text{ so'm.}$$

Demak, maksimum daromad olish uchun birinchi tur buyumdan x_1=76 dona, ikkinchi tur buyumdan esa x_2=72 dona ishlab chiqarish kerak ekan. Endi yuqoridagi simpleks usul bilan yechilgan masalaning geometrik talqinini beramiz. Oldin (1.8) tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi soha chiziladi. Buning uchun (1.8) tengsizliklar sistemasi tenglamalar sistemasi ko'rinishida yoziladi ($x_i \geq 0, \quad i=\overline{1,2}$):

$$\left.\begin{aligned} 6x_1+2x_2&=600, \quad (I)\\ 4x_1+3x_2&=520, \quad (II)\\ 3x_1+4x_2&=600. \quad (III) \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0.$$

Bu sistemaga kiruvchi to'g'ri chiziqlarni chizib, yarim tekisliklar tashkil qilgan soha topiladi.



1.3-chizma.

OABCD ko'pburchak uchlarining koordinatalari to'plami optimal yechimlar to'plamiga kiradi (1.3-chizma): *O*(0; 0), *B*(14; 119,5), *C*(76, 72), *D*(100; 0), *A*(0; 150).

Endi maqsad funksiyasining *OABSD* ko'pburchakning uchlaridagi qiymatlari hisoblanadi:

$F_O(0;\ 0)=\ 0$ so'm,

$F_A(0;\ 150)=\ 6\cdot0+3\cdot150=450$ so'm,

$F_B(14;\ 119{,}5)=\ 6\cdot14+3\cdot119{,}5\ =84+358{,}5=442{,}5$ so'm,

$F_C(76;\ 72)=\ 6\cdot76+3\cdot72=456+216=672$ so'm.

$F_D(100;\ 0)=\ 6\cdot100+3\cdot0\ =600$ so'm.

Demak,

$$F_{max}=\max\{F_O,\ F_A,\ F_B,\ F_K,\ F_D\}=672 \text{ so'm.}$$

Agar sath chizig'i 6x1+3x2=K bo'lsa, *K* ga 0,1,2, ... qiymatlar berib, $\overline{C}(6,3)$ vektori yo'nalishini o'zgartirmasdan siljitib borsak, tayanch chizig'i C nuqtada urinib o'tadi. Maqsadli funksiya shu nuqtada optimal yechimga ega bo'ladi. Tayanch chizig'ining tenglamasi: $x_2-72=-2(x_1-76)$; $F(76;\ 72)=672$ so'm maksimum daromad bo'lib, simpleks usul yordamida topilgan optimal yechimga mos keladi.

2-masala. Quyidagi masalani chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasi ko'rinishida yozing:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 \le 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 \le 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 \le 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 \ge 8. \end{array}\right\}$$

$$x_1,\quad x_2,\quad x_3,\quad x_4,\quad x_5 \ge 0.$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 \quad \max.$$

Yechish. Bu masalani chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasi ko'rinishida yozish uchun musbat bazisli o'zgaruvchilar x_6, x_7, x_8, x_9 ni «≤» belgi bo'lgan tengsizliklarning chap tarafiga qo'shiladi yoki «≥» ishorali bo'lgan tengsizliklarning chap tarafidan ayriladi. U holda quyidagi hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 = 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 = 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 = 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 = 8. \end{array}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0.$$

Shunday qilib, bu masalani chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasi ko'rinishida yozish mumkin. Quyidagi shartlar

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_3 - x_4 + x_5 + x_6 &= 2, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 + x_5 + x_7 &= 3, \\ 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 + x_8 &= 6, \\ x_1 + x_4 - 5x_5 - x_9 &= 8. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 \geq 0$$

bajarilganda,

$F(x_1, x_2, \dots, x_9) = 3x_1 - 2x_2 - 5x_4 + x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 + 0 \cdot x_9$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

3-masala. Masalani quyidagi chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasi ko'rinishida yozing:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &\leq 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &\geq 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 &\leq 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 &= 15. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, \; x_2, \; x_3, \; x_4 \geq 0.$$

$$F(x_1, x_2, x_3, x_4) = -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \to \min.$$

Yechish. Bu masala shartida maqsad funksiyaning minimum qiymatini topish talab etiladi. Shuning uchun maqsadli funksiyaning minimum qiymatini topish o‘rniga $F_1 = -F$ ning maksimum qiymatini yuqoridagi shartlar bo‘yicha topiladi.

Demak, masala quyidagicha qo‘yiladi:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_5 &= 6, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_6 &= 8, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_7 &= 10, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 3x_4 + 0 &= 15. \end{aligned}\right|$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7 \geq 0$$

shartlar bajarilganda

$F(x_1, x_2, \ldots, x_7) = -x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7$ ning maksimum qiymatini toping.

Topshiriqlar

Quyidagi masalalarni chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasiga keltiring.

1.1.
$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\leq 3, \\ x_1 + 2x_2 &\geq 1, \\ -3x_1 + 8x_2 &\leq 3. \end{aligned}\right|$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$$

1.2.
$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 3x_2 - x_3 &\leq 24, \\ 3x_1 + 8x_2 &\geq 14, \\ x_1 &\geq 2. \end{aligned}\right|$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

$$F = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

3-§. Sun'iy bazis usuli

Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasini ko'rganda, uni tayanch rejasini ko'rsatish mumkin edi. Agarda P_i vektorlar komponentlari berilgan chiziqli tenglamalar sistemasida qatnashuvchi x_1, x_2,..., x_n noma'lumlar koeffitsientlaridan iborat bo'lib, unda n ta birlik vektor qatnashsa. Lekin shuni ham aytish kerakki chiziqli programmalashtirishning ko'pgina masalalarini yechganda P_j vektorlar ichida hammasi ham birlik vektorlar bo'lmasligi mumkin. Faraz qilaylik, quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.13)$$

$$Xj \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \quad (1.14)$$

$$F(x_1, x_2, \ldots x_n) = s_1x_1 + s_2x_2 + \ldots + s_nx_n. \quad (1.15)$$

funksiyaning maksimum qiymatini topish kerak bo'lsin, bu yerda $b_i \geq 0$, $\left(i = \overline{1, m}\right)$, $m<n$ va quyidagi vektorlar ichida

$$P_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{m1} \end{pmatrix}; \; P_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{m2} \end{pmatrix}; \; --- \; ; \; P_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ a_{mn} \end{pmatrix};$$

P_j – vektorlar ichida birlik vektorlar yo'q.

Ta'rif. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \quad (1.16)$$

$$X_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1, n+m}\right) \quad (1.17)$$

$$F(X) = C_1x_1 + C_2x_2 + \ldots + C_nx_n - Mx_{n+1} - \ldots - Mx_{n+m}. \quad (1.18)$$

$$X=(x_1,x_2,\dots,x_n,\ x_{n+1},\dots,\ x_{n+n}).$$

Bunda M istalgancha katta musbat son bo'lib, qiymati, odatda, berilmaydi, $F(X)$ funksiyaning maksimum qiymatini topishga chiziqli programmalashtirishning (1.16) = (1.14) masalalarga nisbatan kengaytirilgan masala deyiladi.

Kengaytirilgan masalaning tayanch rejasi

$$X=(\underbrace{0;\ 0;\ \dots;\ 0}_{n\text{ ta nol}},\ v_1;\ v_2;\ \dots;\ v_m)$$

P_{n+1}, $P_{n+2},\dots,$ P_{n+m} birlik vektorlar sistemasi orqali aniqlanib, n ta vektorlar fazosida bazisni tashkil qiladi, qaysikim sun'iy bazis deyiladi. Shu bilan bir qatorda, P_{n+1}, $P_{n+2},\dots,$ P_{n+m} vektorlarga va $x^x_{n+1};x^x_{n+2},\dots,x^x_{n+m}$ o'zgaruvchilarga sun'iy o'zgaruvchilar deyiladi. Kengaytirilgan masala tayanch rejaga ega bo'lgani uchun, uning yechimlarini simpleks usul bilan topish mumkin. Bu yerda quyidagi teorema o'rinlidir.

1.1-teorema. Agar kengaytirilgan masalani (2.4)−(2.6) ni $\overline{X}^x=(x_1^x;x_2^x;\dots,x_n^x;\quad x^x_{n+1};x^x_{n+2};\dots,x^x_{n+m})$ optimal rejaga ega bo'lib, sun'iy o'zgaruvchilarning qiymatlari $x^x_{n+l}=0$, (i=1,m) bo'lsa, u vaqtda $X^x(x_1^x,x_2^x,\dots,x_n^x)$ (1.13)−(1.14) masalaning optimal rejasi bo'ladi.

Shunday qilib, kengaytirilgan masalaning topilgan optimal rejada sun'iy o'zgaruvchilar nolga teng bo'lsa, u vaqtda dastlabki masalaning optimal rejasi topilgan bo'ladi.

Shuning uchun kengaytirilgan masalani optimal rejasini topishga alohida to'xtab o'tamiz.

Demak, $X=(0;0;0;\dots;0;\ b_1;\ b_2;\dots;\ b_m)$ kengaytirilgan masalaning tayanch rejasi bo'lsa, u vaqtda chiziqli forma $F_0=-M\sum_{i=1}^{m}bi$ ga teng bo'lib, $\Delta_j=Z_j-C_i$ ning qiymati $\Delta i=-M\sum_{i=1}^{m}\alpha ij-Cj$. Shunday qilib, F_0 va Z_j-C_i ayirma bir-biriga bog'liq bo'lmagan ikkita qismdan iborat, bittasi M ga bog'liq, ikkinchisi esa bog'liq emas. Bundan keyin F_0 va Δ_j qiymatlarni hisoblaganda kengaytirilgan masalaning berilgan qiymatlari jadvalga kiritiladi, bu jadvalda bitta qator oldingi simpleks jadvaldan ko'p bo'ladi. Shundan keyin $(m+2)$ qatorga M ning koeffitsentlari joylashtiriladi, keyin esa $(m+1)$ qatorga M ga bog'liq bo'lmagan koeffitsentlarni joylashtiriladi.

Bir tayanch rejadan ikkinchi tayanch rejaga o'tganda bazisga $(m+2)$ qatordagi absolut qiymat jihatdan eng katta bo'lgan manfiy songa mos bo'lgan vektor kiritiladi. Bazisdan chiqarilgan vektorni bir necha almashtirishlardan keyin jadvalga yozmasa ham bo'ladi. Lekin ikkinchi masala yechilganda bunday almashtirishlar kerak bo'ladi.

Shuni ham aytish kerakki bir necha almashtirishlardan keyin sun'iy vektor bazisdan chiqmasligi mumkin. Shuning uchun simpleks jadvallarni hisoblaganda birinchi tayanch rejadan, ikkinchisiga o'tganda simpleks usulning umumiy qoidalariga asoslanish kerak. Simpleks jadvalning $(m+2)$ satrini almashtirish quyidagi holatgacha davom ettiriladi:

1) hamma sun'iy vektorlar sun'iy bazisdan chiqarilguncha;

2) hamma sun'iy vektorlar $(m+2)$ qatordan bazisdan chiqarilmagan, ya'ni manfiy elementlar R_1 $R_2,\ldots,$ R_{n+m} vektorlarning ustunida yo'q. Birinchi holatda bazis bir nechta tayanch rejaga javob beradi. Shuning uchun $(m+1)$ satrni to'ldirib, tayanch reja topiladi.

Ikkinchi holatda, agar $(m+2)$ satrning R_0 vektor ustunida manfiy son bo'lsa, dastlabki masala yechimga ega emas; agar u 0 ga teng bo'lsa, u vaqtda topilgan tayanch reja va bu rejaga tug'ma reja deyiladi va bazis kamida bitta sun'iy bazis vektoriga ega deyiladi.

Agar dastlabki masala bir necha birlik vektorlariga ega bo'lsa, u vaqtda ularni sun'iy bazisga kiritish kerak. Shunday qilib, chiziqli programmalashtirish masalalarini sun'iy bazis usuli bilan yechish uchun quyidagi qoidalarga rioya qilinadi:

1) kengaytirilgan masalani tuzish;

2) kengaytirilgan masalaning tayanch rejasini topish;

3) oddiy hisoblash natijasida simpleks usuldan foydalanib, sun'iy vektorlarni bazisdan chiqarish.

Natijada:

a) tayanch reja topiladi;

b) tayanch rejaga ega emasligi ko'rsatiladi.

4) topilgan tayanch rejaga asoslanib simpleks usuldan foydalanib, masala yechiladi yoki bo'lmasa masala yechimga ega emasligi ko'rsatiladi.

4-masala. Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24; \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 22; \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \ge 10. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

$F = -2x_1 + 3x_2 - 6x_3 - x_4$ funksiyaning minimum qiymatini toping.

Yechish. Masala chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasi ko'rinishiga keltiriladi:

Quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, (j = \overline{1,6})$$

$F(x) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 x_4$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Masalaning oxirgi sistemasidagi noma'lumlarni koeffitsentlaridan tuzilgan vektorlarni ko'rib chiqaylik:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad P_0 = \begin{pmatrix} 24 \\ 22 \\ 10 \end{pmatrix}.$$

R_1, R_2, R_3, R_4, R_5, va R_6 vektorlar ichida faqat ikkita birlik vektor mavjud (R_4 va R_5). Shuning uchun sistemadagi 3-tenglamaning chap qismiga musbat qo'shimcha o'zgaruvchi x_7 ni kiritamiz va kengaytirilgan masalani yechamiz:

Ya'ni quyidagi chegaraviy shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0(\overline{1,7})$$

$F(X) = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7$ funksiyaning maksimum qiymati topiladi. Bundla $P_7 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Kengaytirilgan masalani R_4, R_5, va R_6 birlik vektorlari orqali aniqlangan tayanch yechimi $X = (0;\ 0;\ 0;\ 24;\ 22;\ 0;\ 10)$ ga teng.

Dastlabki berilganlarga qarab quyidagi jadval tuziladi.

1- jadval

	Bazis	$\mathbf{S_0}$	$\mathbf{P_0}$	**2**	**–3**	**6**	**1**	**0**	**0**	**–M**
				P_0	P_1	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_4	1	24	2	1	–2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	–M	10	1	–1	2	0	0	–1	1
4			24	0	4	–8	0	0	0	0
5			–10	–1	1	–2	0	0	1	0

Bu jadvalni 4. va 5 (m+1, m+2) satrlarini to'ldirish uchun $F(x_0) = -M\sum_{i=1}^{m} b_i$ va $\Delta_j = c_{11}x_{i_1j} + c_{i_2}x_{i_2j} + ... + c_{i_m}x_{i_mj} - c_j$. Bunda i_1, i_2, ..., i_m bazisli vektorlarning tartib raqamlari, x_{i1j}, x_{i2j}, ..., x_{imj} esa P_ij — vektor yoyilmasining koeffitsientlari.

Bazis vektorlarga mos bo'lgan $X_i(i=\overline{1,7})$ yozib olinadi. U quyidagicha bo'ladi:

$$X_1=(0;0;0;2;10;7);$$

$$X_2=(0;0;0;1;2;0;-1);$$

$$X_3=(0;0;0;-2;40;2);$$

$$X_4=(0;0;0;1;0;0;0);$$

$$X_5=(0;0;0;0;1;0;0);$$

$$X_6=(0;0;0;0;0;0;-1);$$

$$X_7=(0;0;0;0;0;0;1).$$

Yuqoridagi tayanch yechimlarga mos bo'lgan $F_0(x)$ va $Z_i(x_i)$ $(i=1,7)$ larning qiymatlari hisoblab chiqiladi:

$$F_0(x)=24-M;$$

$$Z_1(X_1)=2-M;$$

$$Z_2(X_2)=1+M;$$

$$Z_3(X_3)=-2-2M;$$

$$Z_4(X_4)=1+0\cdot M;$$

$$Z_5(X_5)=0+0\cdot M;$$

$$Z_6(X_6)=0+M;$$

$$Z_7(X_7)=0-M.$$

Endi $\Delta_i=z_i-c_i$ ayirmalar hisoblab chiqiladi:

$$\Delta_1=z_1-c_1=0-M;$$

$$\Delta_2=z_2-c_2=4+M;$$

$$\Delta_3=z_3-c_3=-8-2M;$$

$$\Delta_4=z_4-c_4=1-1=0;$$

$$\Delta_5=z_5-c_5=0-0=0;$$

$$\Delta_6=z_6-c_6=0+M;$$

$$\Delta_7 = z_7 - c_7 = -M + M = 0.$$

Buтda F_0 va Δ_j larning tarkibiy qismlari ikkita yig'indidan iborat. Shuning uchun bu yig'indilarni M ga bog'liq bo'lmaganlarini 4-satrga, bog'liq bo'lganlarining koeffitsientlari 5-satrga yoziladi. Bunday yozish jadvallarni almashtirishni osonlashtiradi (1-jadvalga qarang).

1-jadvalning 5-satrida ikkita manfiy son mavjud (1−; −2). Bu shuni ko'rsatadiki, kengaytirilgan masalaning rejasi optimal emas. Simpleks usulni qo'llab, bu rejani ketma-ket yaxshilab boramiz. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

2- jadval

i	Bazis	S_0	P_0	2	−3	6	1	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P4	1	35			0	1	0	−1
2	P5	0	2		3−1	4	0	1	2
3	P7	0	5		−1/2	−1/2	0	0	−1/2
4	Indeks satri		64	4	0	0	0	0	−4

Bu jadvalda 4 ta satr mavjud, chunki sun'iy bazis P_7 vektor bazisdan chiqarildi. 2- javdaldan ko'rinib turibdiki, $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = 5$, $x_4 = 34$, $x_5 = 2$ dastlabki masalaning tayanch yechimlaridir. $X = (0; 0; 5; 34; 2)$ esa tayanch rejadir. $F = (0; 0; 5; 34; 2) = 64$ maqsad funksiyaning bu rejaga mos bo'lgan qiymatidir.

2- jadvalning indeks satrida R_6vektor ustunida (−4)manfiy son mavjud. Shuning uchun R_6vektorni bazisga kiritilib, R_5 vektor bazisdan chiqariladi va simpleks jadval tuziladi.

3- jadval

i	Bazis	S_0	P_0	2	−3	6	1	0	0
				P_0	P_1	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0
2	P_5	0	1	−1/2	2	0	0	1/2	1
3	P_7	6	11/2	1/4	1/2	1	0	1/4	0
4	Indeks satri		F=68	2	8	0	0	2	0

Jadvalda $\Delta_j = z_j - c_j$ lar ichida manfiy sonlar yo'q. Shuning uchun bu jadvalga asosan topilgan yangi tayanch reja optimaldir. Demak, dastlabki masalaning tayanch rejasi X*=(0; 0; 11/2; 0; 1) optimal rejadir.

Bu rejaga asosan maqsad funksiyaning qiymati

$$F_{max} = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 = 2\cdot 0 - 3\cdot 0 + 6\cdot\frac{11}{2} + 1\cdot 35 = 68 \text{ teng.}$$

5-masala. Quyidagi shartlar

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 3. \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \quad j = 1,2,3,4$$

bajarilganda,

$$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. Ma'lumki, sistemada birlik matritsa mavjud emas. Har bir tenglamaga bittadan manfiy bo'lmagan, mos ravishda $x_5 \geq 0$, $x_6 \geq 0$, sun'iy bazisli o'zgaruvchilar kiritiladi. Natijada berilgan masalaga nisbatan **kengaytirilgan masala** deb ataluvchi masalaga o'tiladi.

Quyidagi shartlar

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 3, \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3. \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1-6}$$

bajarilganda

$$F = 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 - x_4 - Mx_5 - Mx_6$$

maqsad funksiyaning maksimum qiymatini toping (bunda M yetarlicha kichik manfiy son, masala minimumga yechilayotgan bo'lsa yetarlicha katta musbat son deb ataladi) shartlar vektor shaklida yoziladi:

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + P_4x_4 + P_5x_5 + P_6x_6 = P_0x_0.$$

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad P_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad P_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$P_4=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\ P_5=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ P_6=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix},\ P_0=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$$

x_5, x_6 o'zgaruvchilar bazis o'zgaruvchilar bo'lsin. U holda birinchi tayanch yechim X_0=(0,0,0,0,3,3) hosil bo'ladi. Simpleks usul qo'llanib. optimal yechim topiladi.

1-simpleks jadvalni tuzamiz:

Jadvalning 3- va 4- satrlarini to'ldirishda

$$F(X_0)=C_6X_0=-M\cdot 3=M\cdot 3+0=0-6M.$$

Bazisli vektorlarga mos bo'lgan $X_i(i-\overline{1,6})$ lar va $Z_i(X_i)$ lar hisoblanadi:

$$X_1=(0;0;0;0;1;2)\quad Z_1(X_1)=-3M$$

$$X_2=(0;0;0;0;3;2)\quad Z_2(X_2)=-5M$$

$$X_3=(0;0;0;0;2;1)\quad Z_3(X_3)=-3M$$

$$X_4=(0;0;0;0;2;1)\quad Z_4(X_4)=-3M$$

$$X_5=(0;0;0;0;1;0)\quad Z_5(X_5)=0\cdot M$$

$$X_6=(0;0;0;0;0;1)\quad Z_1(X_1)=0\cdot M$$

Endi $\Delta_i=Z_i-c_i$ ayirma hisoblanadi:

$$\Delta_1=-5-3M;\qquad \Delta_2=-3-5M;\qquad \Delta_3=-4-3M;$$

$$\Delta_4=1-3M;\qquad \Delta_5=0+0\cdot M;\qquad \Delta_6=0+0\cdot M$$

hisoblashlarni bajarib, Z_i-c_i qiymatlari topiladi va M ning chiziqli funksiyasi ekanligi aniqlanadi.

Bu yerda F_0 va Δ_i larning tarkibiy qismlari ikkita yig'indidan iborat. Shuning uchun bu yig'indilarni M ga bog'liq bo'lganlarini 1- jadvalning 3-satriga ($m+1$satriga), M ga bog'liq bo'lganlarini 4-satriga yoziladi. Natijada 1- jadval to'la to'ldiradi.

Jadvalning ($m+2$) satrida manfiy sonlarning mavjudligi tayanch yechimning optimal emasligini bildiradi va uni yaxshilash mumkin bo'ladi. Jadvalning ($m+2$) satrida eng kichik son (-5) R_2 vektor bahosi bo'lganligi uchun yechuvchi ustun R_2 ustuni bo'ladi.

$\min(\frac{3}{3},\frac{3}{2})=1$, ularning kesishishmasidagi 3 element bo'lganligi

1- simpleks jadval

i	Bazis-lar	Bazis koeffitsientlar	R_0	5	3	4	1	−M	−M
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
1	R_5	−M	3	1	3	2	2	1	0
2	R_6	−M	3	2	2	1	1	0	1
m+1	$Z_j - c_j$		0	−5	−3	−4	1	0	0
m+2	$Z_j - c_j$		−6	−3	−5	−3	−3	0	0

uchun R_5 vektor satri yechuvchi satr bilan yechuvchi ustun kesishgan katakdagi yechuvchi element bo'ladi. Demak, R_5 ni bazisdan chiqarib, o'rniga R_2 vektor bazisga kiritiladi. 2-simpleks jadval tuziladi.

2- simpleks jadval

i	Bazis-lar	Bazis koeffitsientlar	R_0	5	3	4	1	−M	−M
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
1	R_2	3	1	1/3	1	2/3	2/3	1/3	0
2	R_6	−M	1	1/3	0	−1/3	−1/3	−2/3	1
m+1	$Z_j - c_j$		3	−4	0	−2	3	1	0
m+2	$Z_j - c_j$		−1	−4/3	0	1/3	1/3	5/3	0

2-simpleks jadvalning $(m+2)$ satri asosiy qismida (−4/3) manfiy son bo'lganligi uchun R_1 vektor ustuni yechuvchi ustun, R_6 vektor satri yechuvchi satr, 4/3 yechuvchi element bo'ladi. Bazisdan R_6 sun'iy vektorni chiqarib, R_1 vektorni bazisga kiritib, 2-simpleks jadvaldagidek, 3-simpleks jadvalni hosil qilamiz.

3-simpleks jadval

i	Bazis-lar	Bazis koeffitsientlar	R_0	5	3	4	1	−M	−M
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
1	R_2	3	3/4	0	1	3/4	3/4	1/2	−1/4
2	R_6	5	3/4	1	0	−1/4	−1/4	−1/2	3/4
m+1	$Z_j - c_j$		6	0	0	−3	2	−1	3
m+2	$Z_j - c_j$		0	0	0	0	0	1	1

Z-jadvalda $(m+2)$ satrda sun'iy bazis qiymatlaridan tashqari hamma qiymatlar 0 ga teng bo'ladi:

M sonning tanlanishiga asosan R_5 va R_6 vektorlar endi bazisga tushmaydi.

$\overline{X}_0^2 = (3/4, 3/4, 0, 0, 0, 0)$ yechim berilgan masalaning yechimi bo'ladi, lekin u optimal emas, chunki $(m+1)$ satrda manfiy qiymat mavjud. Endi yechimni yaxshilash $(m+1)$ satr bo'yicha olib boriladi. $Z_3 - C_3 = -3 < 0$, bo'lganligi uchun R_3 vektor ustuni yechuvchi ustun, R_2 vektor satri yechuvchi satr, 3/4 yechuvchi element bo'lib, $m+2$ -satr endi hisobga olinmaydi. Yuqorida ko'rsatilgan usul bilan 4-simpleks jadval tuziladi:

4-simpleks jadval

i	Bazis-lar	Bazis koeffitsientlar	R_0	5	3	4	1	$-M$	$-M$
				R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
1	R_3	4	1	0	4/3	1	1	2/3	$-1/3$
2	R_1	5	1	1	1/3	0	0	$-1/3$	2/3
m+1	$Z_j - c_j$		9	0	4	0	5	1+M	2+M

3-simpleks jadvaldan qo'yilgan masalaning optimal yechimi $\overline{X} = (1,0,1,0,0)$ bo'lib, $Z_{max}(\overline{X}) = 9$ bo'ladi. Birinchi va ikkinchi satrlarni o'zaro almashtirib, R_5 va R_6 vektorlar ustunida teskari matritsani hosil qilamiz.

Tayanch iboralar

Programma, matematik programmalashtirish, chiziqli programmalashtirish, chiziqli forma, maqsad funksiya, asosiy masala, tayanch chizig'i, tayanch yechim, mumkin bo'lgan yechimlar sohasi, bazisli o'zgaruvchilar, qo'shimcha o'zgaruvchilar, standart sistema, simpleks, yechuvchi ustun, yechuvchi satr, yechuvchi son, indeks satri, optimal reja, optimal yechim, muvozanat chizig'i, yo'naltiruvchi vektor (nuqtasi, tekisligi).

Takrorlash uchun savollar

1. Matematik model nima?
2. Matematik programmalashtirish nima?
3. Chiziqli programmalashtirishda qanday masalalar o'rganiladi?
4. Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasi nima?
5. Chiziqli programmalashtirish masalasi nima?

6. Chiziqli programmalashtirishning tayanch yechimi deb nimaga aytiladi?
7. Maqsadli funksiya deb nimaga aytiladi?
8. Simpleks deb nimaga aytiladi?
9. Dastlabki berilganlar jadvali qanday tuziladi?
10. Birinchi simpleks jadval qanday tuziladi?
11. Ikkinchi simpleks jadval qanday tuziladi?
12. Simpleks jadvallar tuzish qachon to'xtatiladi?
13. Optimal yechimlar jadvalning qaysi ustunidan olinadi?
14. Muvozanat chizig'i deb nimaga aytiladi?
15. Yechimlar sohasi deb nimaga aytiladi?
16. Yo'naltiruvchi vektor deb nimaga aytiladi?
17. Tayanch chizig'i deb nimaga aytiladi?
18. Tayanch yechim deb nimaga aytiladi?
19. Tayanch reja deb nimaga aytiladi?

II BOB
CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISHNING IKKILANISH MASALALARI

1-§. Ikkilangan masalalar haqida asosiy tushunchalar

Bizga chiziqli programmalashtirish masalasi berilgan bo'lsin.

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{array}\right| \qquad (2.1)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_3 \ge 0$$

maqsad funksiyasi

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (2.2)$$

ning maksimum qiymatini topish kerak bo'lsin.

Har qanday chiziqli programmalashtirish masalasini ikkilangan masala deb ataluvchi masala bilan uzviy bog'liq ekanligini ko'rsatish mumkin.

Ta'rif. Quyidagi shartlar

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}y_1 + a_{2m}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n. \end{array}\right| \qquad (2.3)$$

$$y_1, y_2, \ldots, y_m \ge 0$$

qanoatlantirilganda

$$F = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \qquad (2.4)$$

funksiyaning minimum qiymatini topishga (2.1), (2.2) chiziqli programmalashtirish masalasining ikkilangan masalasi deyiladi.

Bu masalalarning optimal yechimlari o'zaro quyidagi teorema asosida bog'langan.

Teorema. Agar berilgan masala yoki unga ikkilangan masalalardan birortasi optimal yechimga ega bo'lsa, u holda ikkinchisi ham optimal yechimga ega bo'ladi hamda bu masalalardagi chiziqli funksiyaning optimal qiymatlari o'zaro teng bo'ladi, ya'ni

$$F_{\max} = F^{*}_{\min}.$$

Agar $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ yoki $F'(y_1, y_2, ..., y_n)$ – chiziqli funksiyalardan birontasi chegaralanmagan bo'lsa, u holda masala hech qanday yechimga ega bo'lmaydi.

Ikkilanganlik masalalari simmetrik va simmetrik bo'lmagan masalalarga bo'linadi. Yuqoridagi teorema simmetrik bo'lmagan masalalarni yechishda qo'llaniladi. Shuni ham aytish kerakki, tengsizliklar sistemasini qo'shimcha o'zgaruvchilar yordamida tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keltiriladi. Demak, simmetrik ikkilanmalik masalalarini simmetrik bo'lmagan ikkilanmalik masalaga keltirish mumkin. Shuning uchun simmetrik bo'lmagan ikkilanish masalalarining optimal yechimlari haqidagi teorema simmetrik ikkilangan masalalar uchun ham o'rinlidir.

2.1-masala. Quyidagi shartlar bilan berilgan masalani ikkilangan masalaga keltiring:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 7x_2 - 4x_3 &\le -3, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &\ge 8, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 &\ge 2, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &\ge 3 \end{aligned}\right|$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_3 \ge 0$$

$$F = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \rightarrow \min$$

Masalani ikkilangan masalaga keltirish uchun oldin chegaralovchi shartlar bir xil ko'rinishdagi tengsizliklarga keltiriladi. Buning uchun birinchi tengsizlik teskari ko'rinishga keltirladi:

$$
\left.\begin{array}{r}
-x_1 + 7x_2 + 4x_3 \geq 3, \\
x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 8, \\
x_1 + 2x_2 - x_3 \geq 2, \\
2x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 3.
\end{array}\right|
$$

$$
x_1, \quad x_2, \quad x_3 \geq 0
$$

$$
F = x_1 + 2x_2 + 4x_3 \to \min .
$$

Hosil bo'lgan masalaga ikkilangan masala quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$
\left.\begin{array}{r}
-y_1 + y_2 + y_3 + 2y_4 \leq 1, \\
7y_1 + y_2 + 2y_3 + y_4 \leq 2, \\
4y_1 - 2y_2 - y_3 - 2y_4 \leq 4.
\end{array}\right|
$$

$$
y_1, y_2, \quad y_3, \quad y_4 \geq 0
$$

$$
F^* = 3y_1 + 8y_2 + 2y_3 + 3y_4 \to \max .
$$

Ikkilangan masalani chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasiga keltirib, simpleks usul bilan yechish mumkin.

2-§. Ikkilangan simpleks usul

Bu usul oldin akademik L.V. Kantorovich tomonidan ko'rsatilgan edi. Lekin bu usulni boshqa ko'rinishda Lemks degan olim ko'rsatgan. Shuni ham aytish kerakki, agar bironta chiziqli programmalashtirish masalasini yechish kerak bo'lsa, uning o'rniga ikkilangan masalani yechish mumkin. Agar ikkilangan masala optimal yechimga ega bo'lsa, u holda dastlabki berilgan masala ham optimal yechimga ega bo'ladi.

Dastlab A matritsaga A' — transponirlangan matritsa yozib olinadi. Matritsaga transponirlangan matritsani yozganda ustunlar va satrlarning roli o'zgaradi, ya'ni berilgan masalaning satri to'g'risida so'z ketsa u ustunga o'tadi.

Xususiy holda simpleks jadvallarning indeks satri to‘g‘risida gap ketsa, ikkilangan masalalarda ozod hadlar ustuni to‘g‘risida gap ketadi. Buni quyidagi ikkita masalada ko‘ramiz.

2.2- masala. Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} 4x_1 + 9x_2 \le 56, \\ 5x_1 + 3x_2 \le 37, \\ -x_1 + 2x_2 \le 2. \end{cases}$$

$$x_1, \quad x_2 \ge 0$$

$F = 3x_1 + 4x_2$ — funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Simpleks usul qoidalaridan foydalanib, dastlabki berilganlarning asosiy jadvalini tuzamiz.

1- jadval

	I	$-x_1$	$-x_2$	Tek.ustuni
y_1	56	4	9	69
y_2	37	5	3	45
y_3	2	−1	2	3
F	0	−3	−4	−7

Indeks satridan F dan absolut qiymat bo‘yicha eng katta manfiy son olinadi. Bu son yechuvchi ustunni ko‘rsatadi.

1. Ozod hadlarni mos ravishda yechuvchi ustundagi musbat sonlarga bo‘lib, ularning eng kichigi tanlanadi. Bu satrga yechuvchi satr deyiladi $\left\{\frac{56}{9}, \ \frac{37}{3}, \ \frac{2}{2}\right\} = \frac{2}{2} = 1$.

2. Yechuvchi ustun va yechuvchi satr kesishgan katakdagi songa yechuvchi son deyiladi.

3. Simpleks jaldvallarni to‘ldirish formulalaridan foydalanib, qolgan kataklar to‘ldiriladi. Natijada 2- jadval hosil bo‘ladi. Bu jadvalda x_2 asosiy o‘zgaruvchilar safiga o‘tkaziladi. y_3 qo‘shimcha o‘zgaruvchilar safiga o‘tkaziladi.

2- jadval

	1	$-x_1$	$-y_3$	Tek. ustuni
y_1	47	7/2	$-\frac{9}{2}$	51
y_2	34	13/2	−3/2	39
x_2	1	1/2	$\frac{1}{2}$	1
F	4	−5	2	1

F indeks satrida manfiy son (−5) bo'lgani uchun 3- simpleks jadval tuziladi. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

3- jadval

	1	$-y_2$	$-y_3$
y_1	$^{33}/_{13}$	$-^{17}/_{13}$	$-^{33}/_{13}$
x_1	$^{68}/_{13}$	$^{2}/_{13}$	$-^{3}/_{13}$
x_2	$^{47}/_{13}$	$^{1}/_{13}$	$^{5}/_{13}$
F	$^{392}/_{13}$	$^{10}/_{13}$	$^{11}/_{13}$

F indeks satri hadlarining hammasi musbat bo'lgani uchun quyidagi yechim:

$$y_1 = \frac{33}{13}; \quad x_1 = \frac{68}{13}; \quad x_2 = \frac{47}{13}; \quad y_2 = 0; \quad y_3 = 0$$

optimal yechim bo'ladi. Unga maqsad funksiyasining quyidagi F_n mos keladi.

$$F_{\max} = \frac{10}{13}(-y_2) + \frac{11}{13}(-y_3) + \frac{392}{13} = \frac{392}{13}.$$

2.3.-masala. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} 4u_1 + 5u_2 - u_3 \geq 3, \\ 9u_1 + 3u_2 + 2u_3 \geq 4, \end{aligned}\right|$$

$$u_1, u_2, u_3 \geq 0.$$

$F^{*} = 56u_1 + 37u_2 + 2u_3$ funksiyaning minimum qiymatini toping.

Simpleks usul qoidalaridan foydalanib, berilganlarning asosiy jadvalini tuzamiz.

1- jadval

	I	u_1	u_2	u_3
v_1	−3	4	5	−1
v_2	−4	9	3	2
F	0	56	37	2

1. Ozod hadlar ustunidan manfiy sonlar ichidan eng kichik manfiy son olinadi. Bu son turgan satr yechuvchi satrni ko'rsatadi.

2. F satr hadlarini mos ravishda yechuvchi satrdagi sonlarga bo'lib, eng kichigi olinadi:

$$\min\left\{\frac{56}{9};\ \frac{37}{3};\ \frac{2}{2}\right\} = \frac{2}{2}.$$

Bu ustunga yechuvchi ustun deyiladi.

3. Yechuvchi satr va yechuvchi ustun kesishgan katakdagi son yechuvchi son deyiladi.

4. Qo'shimcha o'zgaruvchi u_3 ni, v_2 asosiy o'zgaruvchi sifatida bazisga kiritamiz. Simpleks jadvallarni tuzish formulalaridan foydalanib, 2- simpleks jadval tuziladi:

2- jadval

	I	u_1	u_2	v_2	Tekshirish ustuni
v_1	−5	$17/2$	$13/2$	$-1/2$	$91/2$
u_3	2	$-9/2$	$-3/2$	$1/2$	$-3\frac{1}{2}$
F*	4	47	34	1	83

O‘zgarmaslar ustunida manfiy son (−5) bo‘lgani uchun bu jadval ham yuqoridagi kabi almashtiriladi. Natijada quyidagi jadval hosil bo‘ladi.

3- jadval

	I	u_1	v_1	v_2
u_2	$\frac{10}{13}$	$-\frac{17}{13}$	$\frac{2}{13}$	$\frac{1}{13}$
u_3	$\frac{11}{13}$	$-\frac{33}{13}$	$-\frac{3}{13}$	$\frac{5}{13}$
F*	$\frac{392}{13}$	$\frac{33}{13}$	$\frac{68}{13}$	$\frac{47}{13}$

Ozod hadlar ustunida hamma hadlar musbat bo‘lgani uchun quyidagi yechim optimal bo‘ladi:

$$u_2 = \frac{10}{13}; \quad u_3 = \frac{11}{13}; \quad u_1 = 0; \quad v_1 = 0; \quad v_2 = 0,$$

$$F_{\min} = \frac{33}{13}u_1 + \frac{68}{13}v_1 + \frac{47}{13}v_2 + \frac{392}{13} = \frac{392}{13}.$$

Shunday qilib, ikkilangan simpleks usul orqali masala yechildi.

Topshiriqlar

Quyidagi masalalarni chiziqli programmalashtirishning ikkilangan masalasiga keltiring va ikkilangan simpleks usul bilan yeching

2.4.
$$\left.\begin{array}{r} 5x_1 + 3x_2 \le 52, \\ x_2 \le 2, \\ 10x_1 + 4x_2 \le 70, \end{array}\right\}$$

$x_1, \quad x_2 \ge 0.$

$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$

2.5.
$$\left.\begin{array}{r} 9x_1 + 11x_2 \le 46, \\ 5x_1 + x_2 \le 42, \\ x_1 + 13x_2 \le 4, \end{array}\right\}$$

$x_1, \quad x_2 \ge 0.$

$F = 5x_1 + x_2 \to \max$

3-§. Ikkilangan masalalarning geometrik talqini

Agar berilgan va unga ikkilangan masalalarda o'zgaruvchilar soni ikkiga teng bo'lsa, chiziqli programmalashtirish masalalarining geometrik tahlilini berish osonlashadi.

Bu holda bir-birini istsino qiluvchi quyidagi uchta hol bo'lishi mumkin:

1) ikkala masala ham optimal yechimga ega;

2) faqat bitta masala optimal yechimga ega;

3) ikkala masalaning optimal rejalari bo'sh to'plamni tashkil qiladi.

2.6-masala. Quyidagi shartlar bo'yicha

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 3x_2 &\le 14, \\ x_1 + x_2 &\le 8. \end{aligned}\right|$$

$$x_1, \quad x_2 \ge 0$$

$$F = 2x_1 + 7x_2 \to \max$$

masalani ikkilangan masalaga keltiring va ikkala masalaning yechimlarini toping.

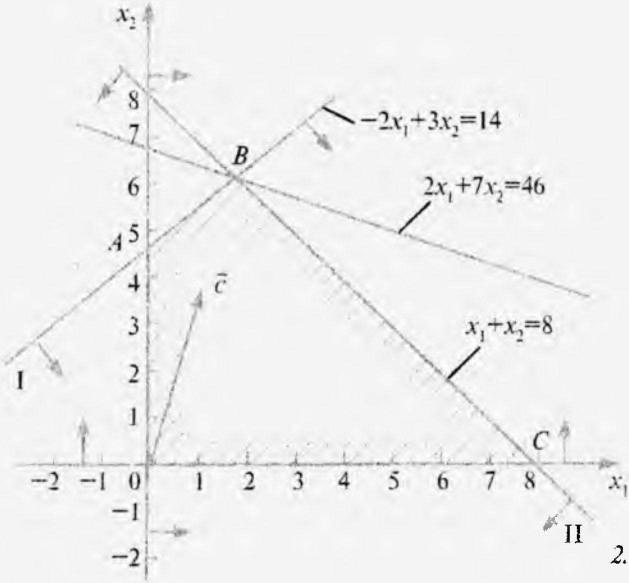
Yechish. Bu masalaga ikkilangan masala: $F^* = 14y_1 + 8y_2$ funksiyaning quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} -2y_1 + y_2 &\ge 2, \\ 3y_1 + y_2 &\ge 7, \end{aligned}\right|$$

$$y_1, \quad y_2 \ge 0$$

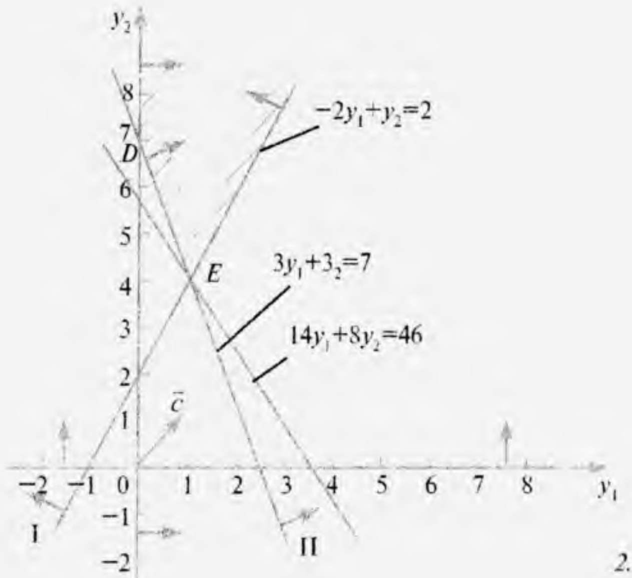
minimum qiymatini topishdan iborat bo'ladi.

Berilgan va unga ikkilangan masalada ham noma'lumlar soni ikkita (x_1 va x_2), (y_1 va y_2) uning uchun geometrik usul bilan yechish mumkin. Dastlabki masalada maqsad funksiyasi B nuqtada maksimum qiymatga ega. Shuning uchun B(2; 6) nuqtada F (2; 6)=2·2+7·6=46 maqsad funksiyasi optimal rejaga (planga) ega (2.1-chizma).

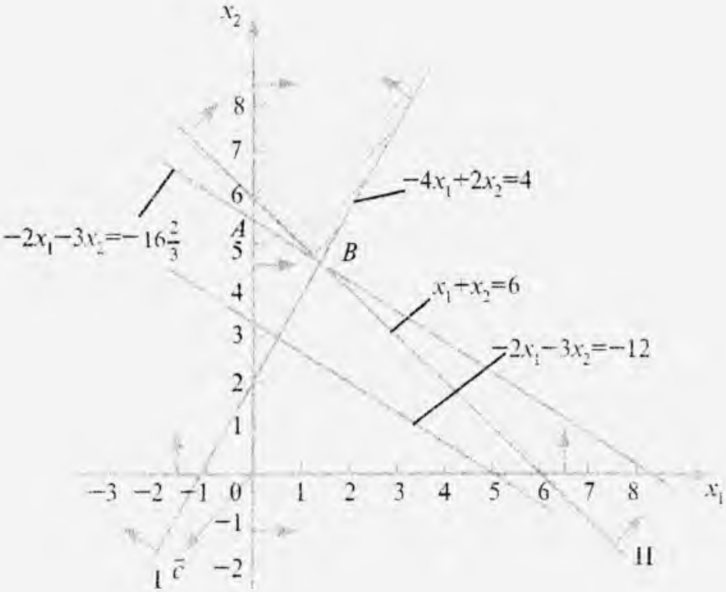


2.1-chizma.

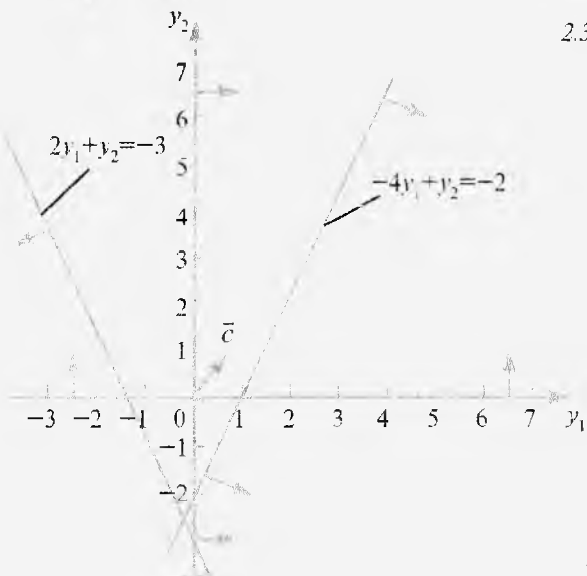
Ikkilangan masala esa $E(1;\ 4)$ nuqtada minimum qiymatga (2.2-chizma) ega. Shuning uchun $F^*(1;\ 4) = 14\cdot1+8\cdot4=46$ maqsad funksiyasining minimal qiymatidir.



2.2-chizma.



2.3-chizma.



2.4-chizma.

2.7-masala. Ikkilangan masalalar juftligining yechimlarini toping.

Dastlabki masala

$$\left.\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &\geq 4, \\ x_1 + x_2 &\geq 6. \end{aligned}\right|$$

$$x_1, \quad x_2 \geq 0.$$

$$F = -2x_1 - 3x_2 \to \min$$

Ikkilangan masala

$$\left.\begin{aligned} -4y_1 + y_2 &\leq -2, \\ 2y_1 + y_2 &\leq -3. \end{aligned}\right|$$

$$y_1, \quad y_2 \geq 0.$$

$$F' = 4y_1 + 6y_2 \to \max$$

Yechish. Dastlabki masala va unga ikkilangan masala ham ikkitadan o'zgaruvchiga ega. Shuning uchun ular geometrik usul bilan yechiladi. Ikkala masala uchun ham shakllar chiziladi (2.3, 2.4-chizmalar).

2.3-chizmadan ko'rinib turibdiki, dastlabki masala yechimga ega emas. Chunki maqsad funksiyasi $F = -2x_1 - 3x_2$ mumkin bo'lgan yechimlar to'plamida quyidan chegaralanmagan. 2.4-chizmadan ko'rinib turibdiki, ikkilangan masalaning ham optimal rejalari yo'q, chunki yechimlar ko'pburchagi bo'sh to'plamni tashkil qiladi. Shunday qilib, dastlabki masala optimal rejaga ega bo'lmasa (maqsad funksiyasi mumkin bo'lgan yechimlar to'plamida chegaralanmagan bo'lgani uchun) unga ikkilangan masala ham optimal rejaga ega bo'lmaydi.

Tayanch iboralar

Asosiy masala, ikkilanma masala, yechuvchi son, yechuvchi ustun, yechuvchi satr, optimal reja.

Takrorlash uchun savollar

1. *Ikkilanma masala deb qanday masalalarga aytiladi?*
2. *Ikkilanma simpleks usuli qanday qo'llaniladi?*
3. *Ikkilangan simpleks jadvalda yechuvchi satr, yechuvchi ustun, yechuvchi son qanday topiladi?*

III BOB
TRANSPORT MASALASI

1-§. Taqsimot usuli

Faraz qilaylik, m ta ishlab chiqarish korxonasi berilgan bo'lsin. Bu korxonalarda mos ravishda a_1, a_2, ..., a_m tonnadan bir jinsli mahsulotlar ishlab chiqarilgan bo'lib, B_1, B_2, ..., B_n – iste'molchilarga mos ravishda b_1, b_2, ..., b_n tonnadan tarqatish kerak. A_i – ishlab chiqarish korxonasidan B_j iste'molchilargacha mahsulotlarni tashish bahosi quyidagi tarif matritsasi ko'rinishida berilgan bo'lsin:

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

Yuqoridagilarga asosan quyidagi jadvalni tuzish mumkin.

1- jadval

Ishlab chiqarish korxonalari	Korxonada bo'lgan ishlab chiqarilgan mahsulotlar (tonna hisobida)	Iste'molchilar va ularning talabi				
		B_1	B_2	B_3	...	B_n
		b_1t	b_2t	b_3t	...	b_nt
A_1	a_1t	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2t	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...			...	...
A_m	a_mt	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}

Agar ishlab chiqarish korxonasidagi jami bir jinsli mahsulotlar miqdori iste'molchilarning talabini to'la qondirsa, ya'ni

$$a = a_1 + a_2 + \cdots + a_m,$$
$$b = b_1 + b_2 + \cdots + b_n,$$
$$a = b$$

bo'lsa, yuqoridagi jadvalga asoslanib tuzilgan modelga yopiq matematik model deyiladi.

Agar masalan, $a>b$ bo'lsa, tuzilgan matematik modelga ochiq model deyiladi.

Iste'molchilar safiga soxta iste'molchi B_{n+1} ni kiritamiz.

Soxta iste'molchi mahsulot joylashgan korxona bo'lgani uchun mahsulotlarni tashish bahosi 0 ga teng.

Shunday qilib, ochiq matematik modelni yopiq matematik modelga keltirsa bo'ladi.

Jadvalni quyidagicha tushuntirish mumkin: $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ lar A_1 ishlab chiqarish korxonasidagi mahsulotni mos ravishda $B_1, B_2, \ldots, B_n$ iste'molchilarga tarqatiladigan miqdori $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}$ lar A_2 ishlab chiqarish korxonasidagi mahsulotni mos ravishda $B_1, B_2, \ldots, B_n$ iste'molchilarga tarqatiladigan miqdori va hokazo. C_{ij} lar esa 1 tonna mahsulotni i-ishlab chiqarish korxonasidan j-iste'molchigacha tashish bahosi, ya'ni tarif.

Shunday qilib, transport masalasining shartini berilgan jadvalga asoslanib, $x_{i,j}$ larni o'z ichiga olgan quyidagi $n+m$ ta tenglamalar sistemasi ko'rinishida yozish mumkin:

$$\left.\begin{array}{l}
\left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{12} + \cdots + x_{1n} = a_1, \\
x_{21} + x_{22} + \cdots + x_{2n} = a_2, \\
x_{m1} + x_{m2} + \cdots + x_{mn} = a_m.
\end{array}\right\} \quad (a) \\
\left.\begin{array}{l}
x_{11} + x_{21} + \cdots + x_{m1} = b_1, \\
x_{12} + x_{22} + \cdots + x_{m2} = b_2, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_{1n} + x_{2n} + \cdots + x_{nn} = b_n.
\end{array}\right\} \quad (b)
\end{array}\right\} \qquad (3.1)$$

$$x_{ij} \geq 0, \; i = \overline{1, n}, \; j = \overline{1, m}$$

Transport xarajatlari (maqsadli funksiya) esa quyidagiga teng:

$$f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + \cdots + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + \cdots + c_{mn}x_{mn} \quad (3.2)$$

Demak, (3.1) chiziqli tenglamalar sistemasida shunday 0 li va musbat yechimlarini topish kerakki, (3.2) maqsad funksiyasi minimum qiymat qabul qilsin.

(3.1) tenglamalar sistemasini va (3.2) tenglikni quyidagi ko'rinishda ixcham yozish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ (i = \overline{1,m}) \\ &\sum_{j=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ (j = \overline{1,n}) \end{aligned}\right| \quad (3.1')$$

va

$$f = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \to \min \quad (3.3)$$

Shuni ham aytish kerakki (3.1) tenglamalar sistemasining hamma tenglamalari bir-biri bilan chiziqli bog'liq yoki chiziqli bog'liq emas bo'lishi mumkin. Chiziqli bog'liq bo'lmaganlar soni $m + n - 1$ dan kichik yoki teng bo'ladi.

Taqsimot usulini umumiy holda algoritmini tushuntirish ancha og'ir.

1. Shimoli-g'arb burchak usuli. «Shimoli-g'arb burchak» usulining umumiy qoidasi quyidagilardan iborat. Eng avval dastlabki berilganlarning jadvalidan «Shimoli-g'arbida joylashgan x_{11} noma'lumning qiymatini aniqlaymiz».

$$x_{11} = \min(a,b)$$

Bunda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $a_1 \le b_1$ bo'lsa, $x_{11} = a_1$ va $x_{1j} = 0$ $(j = \overline{2,n})$; $b_1^1 = b_1 - a_1$;

2) $a_1 \ge b_1$ bo'lsa, $x_{11} = a_{b1}$ va $a_1^1 = a_1 - b_1$; A.

Agar birinchi hol bajarilsa, birinchi qadamdan so'ng masalaning yechimlaridan tashkil topgan matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} x_{11}=a_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & a_m \\ b_2-a_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & f \end{pmatrix}.$$

Endi ikkinchi qatordagi birinchi element topiladi.
Bu yerda ham ikki hol bo'lishi mumkin:

1) Agar $a_2 \geq b_1 - a_1$ bo'lsa, $x_{21}=b_1-a_1$ va
$x_{2j}=0$ $j=\overline{2,m}$; $a_2^1 = a_2 - (b_1 - a_1)$.

2) Agar $a_2 \leq b_1 - a_1$ bo'lsa, $x_{21}=a_2$ va $b_1^1 = b_1 - a_1 - a_2$.

Agar bu yerda ham birinchi hol bajarilsa, u holda ikkinchi qadamdan so'ng yangi matritsa quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{pmatrix} x_{11}=a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ x_{21}=b_1-a_1 & x_{22} & x_{23} & \cdots & x_{2n} & a_2^1 = a_2-(b_1-a_1) \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \cdots & a_{3n} & a_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{m1} & x_{m2} & x_{m3} & \cdots & x_{mn} & a_m \\ b_1^1 = b_1-a_1-a_2 & b_2 & b_3 & \cdots & b_n & f \end{pmatrix}$$

Bu jarayon qadam-baqadam barcha a_i va b_j lar nolga aylanguncha davom ettiriladi. Ma'lumki, har bir x_{ij} ning qiymati va b_j larning turli kombinatsiyalarini ayirish yoki qo'shish yordamida topiladi. Shundan keyin (3.2) formula orqali transport xarajatlari hisoblaniladi.

2. Minimal xarajatlar usuli. Minimal xarajatlar usulining qoidasi quyidagicha:

1. Transport masalasi xarajatlaridan tashkil topgan ta'rif matritsasi belgilab olinadi:

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{pmatrix}.$$

2. T matritsaning minimal elementini topamiz:

$$\min\{c_{ij}\} = k.$$

Faraz qilaylik, bu element

$$c_{i_{j2}} = k.$$

U holda

$$x_{i_1} \cdot x_{j_2} = \min(a_{i_1} \cdot b_{j_2}).$$

Berilganlarga asosan quyidagi ikki hol bo'lishi mumkin:

$$1)\ a_{i_1} \leq b_{j_1},$$

$$2)\ a_{i_1} \leq b_{i_1}.$$

Birinchi holda i_1 satrning barcha elementlari $x_{i_1 j} = 0$, $(j \neq j_1)$ bo'ladi, bunday holda i_1 satr elementlari o'chiriladi.

Ikkinchi holda j_1 ustunning barcha elementlari $x_{ij_1} = 0$, $(i \neq i_1)$ va bu holda barcha j_1 ustun elementlari o'chiriladi.

Ustun va satr elementlarini o'chirish natijasida hosil bo'lgan yangi matritsaning ustun va satrlar soni T matritsaga nisbatan bittaga kamayadi. Ikkinchi qadamda yuqoridagi jarayon yangi matritsa uchun yana bajariladi. Shunday qilib, qo'yilgan masalaning boshlang'ich optimal planini topish uchun minimal xarajatlar usulida $n+m-1$ ta qadamni bajarish kerak.

Endi quyidagi masalani ko'rib chiqaylik.

Masala. Samarqand viloyatining Jomboy va Juma bazasidan Kattaqo'rg'on, Ishtixon va Narpay tumanlariga bir jinsli tovarlarni tashish kerak, tovarlar zaxirasi Jomboy bazasida 400 tonna, Juma bazasida esa 600 tonna. Kattaqo'rg'on tumanining tovarga talabi 350 tonna, Ishtixon tumaniniki 450 tonna va Narpay tumaniniki esa 200 tonna. Jomboy bazasidan uchta tumangacha bo'lgan masofalar mos ravishda 100 km, 60 km va 110 km. Juma bazasidan uchta tumangacha bo'lgan masofalar mos ravishda 40 km, 70 km va 50 km ga teng. Tumanlarga tovar tashishning optimal variantini toping.

Yechish. Masalaning shartiga asosan quyidagi jadvalni tuzamiz.

1- jadval

Bazalar	**Bazalardagi tovar zaxiralari**	**Tumanlar**		
		Kattaqo'rg'on	Ishtixon	Narpay
Jomboy I	400t	100 x_{11}	60 x_{12}	110 x_{13}
Juma II	600t	40 x_{21}	70 x_{22}	50 x_{23}
Tovarlarga bo'lgan talab	1000t	350t	450t	200t

Bu masalada bazalar soni m=2, iste'molchilar soni esa n= 3 ta.

Shuning uchun mahsulotlarni taqsimlagandan keyin to'ldirigan kataklar soni $m+n-1=2+3-1=4$ ta bo'lishi kerak.

1- jadvalga asoslanib, 2- jadvalni tuzamiz.

2- jadval

Bazalar	**Bazalardagi tovar zaxiralari**	**Tumanlar va ularning tovar mahsulotlariga talabi**		
		Kattaqo'rg'on 350 1	Ishtixon 450 2	Narpay 200 3
Jomboy I	400t	100 350	60 50	110 0
Juma II	600t	40 0	70 400	50 200

Transport xarajatlarini 2- jadvalga asoslanib hisoblasak,

$$f_1 = 350 \cdot 100 + 50 \cdot 60 + 400 \cdot 70 + 200 \cdot 50 =$$
$$= 35000 + 3000 + 28000 + 10000 = 76000 \text{ t.km ni}$$

tashkil etadi. 2- jadvalning optimalligini tekshiramiz.

Buning uchun bo'sh kataklarga nisbatan zanjirlar tuzamiz.

Bunday zanjirlar Δ_{13} va Δ_{21} lardan iborat.

Δ_{13} – zanjir quyidagi ko'rinishga ega. Bo'sh katak indeksining ishorasi musbat ishora bilan olinadi. Qolgan indekslar ishorasi almashib turadi.

60		110
−		+
	$\Delta_{13}=110-60+70-50=70$	
+		−
70		50

Bu zanjir musbat, shuning uchun boshqa bo'sh zanjir, ya'ni Δ_{21} tekshiriladi.

Δ_{21} zanjirning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

350		60
−		+
	$\Delta_{21}=40-100+60-70=-70$	
+		−
		400

Demak, Δ_{21} zanjir manfiy ishoraga ega, shuning uchun bu zanjirni yaxshilaymiz. Manfiy uchlarda joylashgan yuklarning eng kichigi olinadi, ya'ni min {350,400}=350.

Bundan keyin 350 manfiy uchlardagi yuklardan ayiriladi va musbat uchlarda turgan yuklarga qo'shiladi.

350–350=0		50+350=400
−		+
+		−
0+350=350		400–350=50

Δ_{21} zanjirdagi o'zgarishlarni hisobga olib 3- jadval tuziladi.

3- jadval

Bazalar	Bazalardagi tovar zaxiralari	Tumanlar va ularning tovar mahsulotlariga talabi		
		Kattaqo'rg'on 350 t 1	Ishtixon 450 t 2	Narpay 200 3
Jomboy I	400t 1	100 0+	60 0+	110
Juma II	600t 2	40 350	70 50	50 200

3- jadvaldagi programma bo'yicha transport xarajatlari

$f_2 = 100 \cdot 0 + 400 \cdot 60 + 110 \cdot 0 + 350 \cdot 40 + 50 \cdot 70 + 200 \cdot 50 =$

$= 0 + 24000 + 0 + 14000 + 3500 + 10000 = 51500$ t km ni tashkil etadi.

2- va 3- jadvalga joylashtirilgan programmalarning farqi $f_1 - f_2 = 76000 - 51500 = 24500$ t km ni tashkil etadi. Demak, iqtisodiy tejash 24500 tonna km ni tashkil etadi.

Endi 3- jadvaldagi bo'sh kataklarga nisbatan tuzilgan zanjirlarning ishorasini yuqoridagi kabi tekshirib chiqsak Δ_{11}, Δ_{13} larning ishoralari musbat ekaligi ko'rinadi.

Shuning uchun 3- jadvalga joylashtirilgan programma optimal programma bo'lib, bu programma bo'yicha: Kattaqo'rg'on tumani Juma bazasidan 350 tonna yuk olinishi kerak bo'lib, transport xarajatlari

$F_1 = 0 \cdot 100 + 350 \cdot 40 = 14000$ t km ni tashkil etadi.

Ishtixon tumani 400 tonna yukni Jomboy bazasidan, 50 tonna yukni esa Juma bazasidan olganda transport xarajatlari

$F_2 = 400 \cdot 60 + 50 \cdot 70 = 24000 + 3500 = 27500$ t km ni tashkil etadi.

Narpay tumani 200 tonna yukni Juma bazasidan oladi va transport xarajatlari

$F_3 = 0 \cdot 110 + 200 \cdot 50 = 10000$ t km ni tashkil etadi.

Jami transport xarajatlari

$f_2 = F_1 + F_2 + F_3 = 14000 + 27500 + 10000 = 5150$ t km ni tashkil etadi.

2- jadvalga joylashtirilgan programma bo'yicha transport xarajatlari tumanlar bo'yicha:

Kattaqo'rg'on $f_1 = 100 \cdot 3500 = 35000$ t km;

Ishtixon $f_2 = 50 \cdot 60 + 400 \cdot 70 = 3000 + 28000 = 31000$ t km;

Narpay $f_3 = 200 \cdot 50 = 10000$ t km;

Jami $f_1 + f_2 + f_3 = 76000$ t km.

Tumanlar bo'yicha tejalgan transport xarajatlari:

Kattaqo'rg'on $f_2 - F_2 = 35000 - 14000 = 21000$ t km;

Ishtixon $f_2 - F_2 = 3100 - 27500 = 4500$ t km;

Narpay $f_3 - F_3 = 10000 - 10000 = 0$ t km.

Shunday qilib, 1 tonna yukni 1 km ga tashish uchun 100 so'm mablag' sarflanganda, tumanlar bo'yicha iqtisodiy tejash:

Kattaqo'rg'on $21000 \cdot 100 = 2100000 = 2$ mln 100 ming so'm;

Ishtixon $4500 \cdot 100 = 450000 = 450$ ming so'mni tashkil etadi.

Jami viloyat bo'yicha iqtisodiy tejash 3- jadvaldagi programma bo'yicha 2 million 550 ming so'mni tashkil etadi.

1- jadvalga asoslanib quyidagi modelni tuzish mumkin:

$$\left.\begin{aligned} &x_{11} + x_{12} + x_{13} = 400, \\ &x_{21} + x_{22} + x_{23} = 600, \\ &x_{11} + x_{21} = 350, \\ &x_{12} + x_{22} = 450, \\ &x_{13} + x_{23} = 200. \end{aligned}\right\}$$

$$x_{ij} \geq 0.$$

$$f = 100x_{11} + 60x_{12} + 110x_{13} + 40x_{21} + 70 \cdot x_{22} + 50 \cdot x_{23}.$$

Yuqoridagi sistemani yechsak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$x_{11} = 0, \qquad x_{21} = 350,$$
$$x_{12} = 400, \qquad x_{22} = 50,$$
$$x_{13} = 0, \qquad x_{23} = 200.$$

$$f = 100 \cdot 0 + 60 \cdot 400 + 110 \cdot 0 + 40 \cdot 50 + 70 \cdot 50 + 50 \cdot 200 = 51500$$
tonna km.

Yuqoridagi optimal programma matematik model yechimlari bilan mos keldi.

Shuni ham aytish kerakki, masalalar yechganda Δ_{ij} larning bir nechtasi manfiy bo‘ladi. U vaqtda manfiy Δ_{ij} lar ichidan eng kichik zanjir tanlanadi va u yaxshilanadi.

Agar zanjirlarda bir nechta o‘zaro teng manfiy sonlar paydo bo‘lsa, u vaqtda birinchi (istalgan) manfiy zanjir yaxshilanadi. Ayrim vaqtda to‘ldirilgan kataklar soni $n+m-1$ dan kam bo‘ladi. Shuning uchun bironta katakka 0 qo‘yib, u katak yuk bilan ta’minlanadi va to‘ldirilgan kataklar soni $n+m-1$ ga teng bo‘ladi. Bo‘sh katakka 0 qo‘yishda katakni shunday tanlash kerakki, u katak bilan tuzilgan barcha zanjirlarda Δ_{ij} lar musbat bo‘lsin.

Minimal xarajatlar usuli bilan masalalar yechishni talabalarning o‘zlariga tavsiya qilamiz.

2-§. Potensiallar usuli

Faraz qilaylik, transport masalasi quyidagi jadval ko‘rinishida berilgan bo‘lsin.

Ishlab chiqarish korxonalari	**Korxonalarda ishlab chiqarilgan mahsulotlar (tonna hisobida)**	**Iste’molchilar va ularning talabi**				
		B_1	**B_2**	**B_3**	**...**	**B_n**
		b_1t	b_2t	b_3t	...	b_nt
A_1	a_1t	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2t	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}
...	...	...			...	...
A_m	a_mt	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}

Bu jadval «shimoli-g'arb burchak» usulidan foydalangandan keyin boshlang'ich tayanch reja bo'lsin, x_{ij} – taqsimlangan yuk (zaxira)lar c'_{ij} yuklar bo'lmagan, ya'ni to'ldirilmagan kataklar, c_{ij} lar esa to'ldirilgan kataklar bo'lsin.

Boshlang'ich tayanch rejaga asosan transport xarajatlari $f = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + c_{23}x_{23} + \cdots + c_{2n}x_{2n} + \cdots + c_{m3}x_{m3} + \cdots + c_{mn}x_{mn}$ ga teng bo'ladi.

1- jadvalga $A_1, A_2, \ldots, A_m$ korxonalarga mos ravishda $u_1, u_2, \ldots, u_m$ shartli variantlar (potensiallar) kiritamiz $B_1, B_2, \ldots, B_n$ iste'molchilarga mos ravishda $v_1, v_2, \ldots, v_n$ shartli variantlar (potensiallar) kiritamiz. Demak, A – korxonaning potensiali (shartli varianti) u_i – miqdor.

B_j – iste'molchining potensiali (shartli varianti) v_j – miqdor $\begin{pmatrix} i = \overline{1,m} \\ j = \overline{1,n} \end{pmatrix}$

Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

1-jadval

Ishlab chiqarish korxonalari	**Korxonalarda ishlab chiqarilgan mahsulotlar (tonna)**	**Iste'molchilar va ularning talabi**					
		B_1	**B_2**	**B_3**	**...**	**B_n**	
		b_1t	b_2t	b_3t	...	b_nt	u_i — variant sharti
A_1	a_1t	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	c_{13} x_{13}	...	c_{1n} x_{1n}	u_1
A_2	a_2t	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	c_{23} x_{23}	...	c_{2n} x_{2n}	u_2
A_3	a_3t	c_{31} x_{31}	c_{32} x_{32}	c_{33} x_{33}	...	c_{3n} x_{3n}	u_3
...	...	...		...	...	...	...
A_m	a_mt	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	c_{m3} x_{m3}	...	c_{mn} x_{mn}	u_m
v_j-	Shartli varianti	v_1	v_2	v_3	...	v_n	

u_i va v_j sonlarini shunday tanlab olish kerakki, ularning yig'indisi to'ldirilgan katakdagi tarif c_{ij} ga teng bo'lsin. U vaqtda yuqoridagi jadvalga asosan quyidagi $n+m-1$ ta, hozircha noma'lum bo'lgan u_i va v_j larga nisbatan chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{array}{ll} u_1+v_1=c_{11}, & u_3+v_2=c_{32}, \\ u_1+v_2=c_{12}, & u_3+v_3=c_{33}. \\ u_1+v_3=c_{13}, & \\ u_2+v_3=c_{23}, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_2+v_3=c_{23}, & u_m+v_n=c_{mn}. \end{array}\right|$$

Bu sistemada noma'lumlar soni $n+m$ ta. Shuning uchun ulardan ixtiyoriy birontasini ixtiyoriy qiymatga tenglashtirib (masalan 0 ga) olib, qolgan u_i va v_j larni birin-ketin topamiz.

Endi bo'sh kataklar uchun jadvalga asoslanib yuqoridagi kabi chiziqli tenglamalar sistemasini tuzib olamiz:

$$\left.\begin{array}{l} u_1+v_3=c'_{13}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_1+v_n=c'_{1n}, \\ u_2+v_1=c'_{21}, \\ u_2+v_2=c'_{22}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ u_m+v_1=c'_{n1}, \\ u_m+v_2=c'_{m2}. \end{array}\right| \quad c'_{ij} - \text{larga bilvosita ta'riflar deyiladi.}$$

u_i va v_j larning qiymatlarini qo'yib, bilvosita ta'riflarni $-$ c'_{ij} hisoblab chiqamiz.

Agar birinchi programmada quyidagi hamma ayirmalar $c'_{ij}-c_{ij}<0$ bo'lsa, u vaqtda bu reja optimal reja bo'ladi.

Agar ayirmaning birontasi $c'_{ij}-c_{ij}>0$ bo'lsa, u vaqtda optimal yechim hali topilmagan bo'ladi.

Demak, 1- programmani yaxshilash kerak.

Buning uchun $\max\{(c'_{ij}-c_{ij})>0\}$ ni topamiz va shu zanjirni taqsimot usuli bilan o'zgartiramiz.

Natijada yangi reja hosil bo'ladi.

Hosil bo'lgan reja uchun transport xarajatlari hisoblab chiqariladi.

2- rejaga ham potensiallar usuli qo'llaniladi. Potensiallar usulini qo'llash jarayoni barcha $c'_{ij} - c_{ij} > 0$ bo'lguncha davom ettiriladi.

Shunday qilib, potensiallar usuli yordamida boshlang'ich tayanch rejadan boshlab, optimal yechimga yaqinroq bo'lgan yangi tayanch rejaga o'tamiz va chekli sondagi almashtirishlardan (iteratsiyalardan) so'ng masalaning optimal yechimini topamiz.

Potensiallar usulining algoritmi quyidagilardan iborat:

1. Shimoli-g'arb burchak yoki minimal xarajatlar usulini qo'llab, boshlang'ich tayanch reja (birinchi bazisli yechim) topiladi.

2. Ishlab chiqaruvchilar va iste'molchilarning potensiallari hisoblanadi (u_i va v_j lar).

3. c'_{ij} bilvosita ta'riflar topiladi.

4. Hamma $c'_{ij} - c_{ij}$ ayirmalar hisoblaniladi. 1) agar $c'_{ij} - c_{ij} \leq 0$ bo'lsa, tuzilgan reja optimal reja bo'ladi va bu rejaga asosan transport xarajatlari hisoblanadi; 2) $c'_{ij} - c_{ij} > 0$ bo'lsa, u vaqtda bularning ichidan $\max\{(c'_{ij} - c_{ij}) > 0\}$ ni topib olib bu zanjirni yaxshilaymiz. Ya'ni yangi bazisli o'zgaruvchi x_{kl} kiritiladi va yangi tayanch reja tuziladi.

Masala. Taqsimot usulidagi masalaning birinchi tayanch rejasi berilgan bo'lsin. Bu jadvalga shartli variantlarni kiritib, quyidagi ko'rinishda yozamiz.

2- jadval.

Bazalar	Bazalardagi tovar zaxiralari (tonna)	Tumanlar va ularning tovarlarga talabi 1- tayanch reja (1 t. hisobi).			
		Kattaqo'rg'on 350	Ishtixon 450	Narpay 200	
A_1	400	100 350	60 50	110	u_1
A_2	600	40	70 400	50 200	u_2
v_j		v_1	v_2	v_3	

$f_1 = 76000$ t km transport xarajati.

To‘ldirilgan kataklar uchun quyidagi sistema tuziladi:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 100, \\ u_1 + v_2 &= 60, \\ u_2 + v_2 &= 70, \\ u_2 + v_3 &= 50, \end{aligned}\right|$$

bu sistemada 5 ta noma’lum bor. Shuning uchun noma’lumlardan birontasi 0 ga tenglashtiriladi, faraz qilaylik $u_1=0$ bo‘lsin. U vaqtda sistema quyidagi yechimlarga ega:

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ v_1 &= 100, \\ v_2 &= 60, \\ u_2 &= 10, \\ v_3 &= 40. \end{aligned}\right| \qquad \text{(A)}$$

Bo‘sh kataklar uchun u_i va v_j potensiallarga asoslanib, quyidagi sistema tuziladi:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_3 &= c'_{13}, \\ u_2 + v_1 &= c'_{21}. \end{aligned}\right\}$$

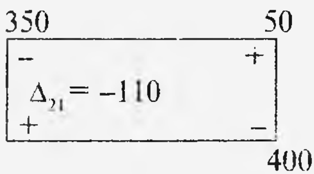
Bu sistemaga (A) yechimlar qo‘yilsa, bilvosita ta’riflar kelib chiqadi.

$$c'_{13} = 110, \; c'_{21} = 40.$$

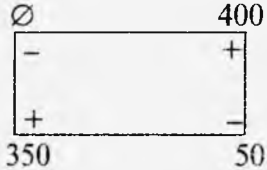
Endi $c'_{ij} - c_{ij}$ – ayirmalar hisoblanadi.

$$c'_{13} - c_{13} = 40 - 110 = -70 < 0,$$
$$c'_{21} - c_{21} = 110 - 40 = 70 > 0.$$

$c'_{21} - c_{21} = 70 > 0$ bo‘lgani uchun bu zanjirni yaxshilaymiz. Oldin zanjirning ko‘rinishi chizib olinadi.



Bu zanjirdagi yuklarni qaytadan 1-§ da taqsimlagan edik. Uning ko'rinishi quyidagicha:



Yuqoridagi o'zgarishlarga asoslanib, tayanch rejaning jadvali tuziladi.

3- jadval

Baza-lar	**Bazalardagi yuk zaxirasi**	**Iste'molchilar va ularning talabi**			
		Kattaqo'rg'on 350	Ishtixon 450	Narpay 200	u_i
A_1	400	100	60 400	110	u_1
A_2	600	40 350	70 50	50 200	u_2
v_j		v_1	v_2	v_3	

$f_2 = 51500$ t km transport xarajatlari.

To'ldirilgan kataklar uchun quyidagi sistemani u_i va v_j potensiallarni qo'llab tuzamiz.

Yuqoridagi kabi $u_i = 0$ deb olsak,

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= 60, \\ u_2 + v_1 &= 40, \\ u_2 + v_2 &= 70, \\ u_2 + v_3 &= 50. \end{aligned}\right| \qquad \left.\begin{aligned} u_1 &= 0, \\ u_2 &= 60, \\ u_2 &= 10, \\ u_1 &= 30, \\ v_3 &= 40. \end{aligned}\right| \qquad \text{(B)}$$

Bo'sh kataklar uchun $u_i + v_j = c'_{ij}$ larni hisoblaymiz:

$$\left.\begin{aligned} u_1 + v_1 &= c'_{11}, \\ u_1 + v_3 &= c'_{13}, \end{aligned}\right|$$

u_i va v_j larni (B) dan bu sistemaga qo'yilsa $c'_{11} = 30$, $c'_{13} = 40$ kelib chiqadi.

Endi $c'_{ij} - c_{ij}$ ayirmalar hisoblanadi:

$$c'_{11} - c_{11} = 30 - 100 = -70 < 0,$$
$$c'_{13} - c_{13} = 40 - 110 = -70 < 0.$$

Bu reja optimal reja hisoblanadi, chunki $c'_{ij} - c_{ij} < 0$.

Optimal yechimlar (tonna hisobida):

$$x_{11} = 0, \quad x_{21} = 350$$
$$x_{12} = 400, \quad x_{22} = 50$$
$$x_{13} = 0, \quad x_{23} = 200$$

Bu yechim uchun

f tayanch reja $=100x_{11}+60x_{13}+110x_{13}+40 \cdot x_{21}+70 \cdot x_{22}+50 \cdot x_{23}=51500$ t km,

$f_1 - f$ tayanch reja $=76000-51500=24500$ t km.

Topshiriqlar

Quyidagi transport masalalarini yeching (3.1 – 3.6).

Masala. Viloyatning uchta A_1, A_2 va A_3 korxonalarida bir jinsli mahsulotlar ishlab chiqarilib, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni beshta B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 iste'molchilarga jo'natish kerak.

A_1, A_2 va A_3 korxonalarda mos ravishda a_1, a_2, a_3 tonna bir jinsli ishlab chiqarilgan mahsulotni B_1, B_2, B_3, B_4 va B_5 iste'molchilarga mos ravishda b_1, b_2, b_3, b_4 va b_5 tonna yuklarni jo'natish kerak.

Ishlab chiqarish korxonalaridan iste'molchilargacha bo'lgan masofalar quyidagi matritsada berilgan:

$$T = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & c_{15} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & c_{25} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & c_{35} \end{pmatrix}$$

Ishlab chiqarish korxonalaridan mahsulotlarni iste'molchilargacha tashish xarajatlarining minimal variantini toping:

3.1.

$$a_1 = 330,\quad a_2 = 270,\quad a_3 = 350$$
$$b_1 = 220,\quad b_2 = 170,\quad b_3 = 150,\quad b_4 = 150,\quad b_5 = 200,$$
$$T = \begin{pmatrix} 17 & 3 & 6 & 12 & 32 \\ 14 & 10 & 2 & 10 & 36 \\ 14 & 11 & 5 & 8 & 34 \end{pmatrix}$$

3.2.

$$a_1 = 260,\quad a_2 = 150,\quad a_3 = 200,\quad b_1 = 100,\quad b_2 = 70,\quad b_3 = 130,\quad b_4 = 110,\quad b_5 = 200,$$
$$T = \begin{pmatrix} 10 & 12 & 24 & 50 & 42 \\ 12 & 22 & 49 & 66 & 32 \\ 26 & 27 & 35 & 68 & 62 \end{pmatrix}$$

3.3.

$$a_1 = 200,\quad a_2 = 350,\quad a_3 = 300,\quad b_1 = 270,\quad b_2 = 130,\quad b_3 = 100,\quad b_4 = 190,\quad b_5 = 110,$$
$$T = \begin{pmatrix} 27 & 19 & 20 & 10 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 13 & 18 \\ 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \end{pmatrix}$$

3.4.

$$a_1 = 250,\ b_2 = 135,\quad a_2 = 300,\ b_3 = 120,\quad a_3 = 200,\ b_4 = 150,\quad b_1 = 135,\ b_5 = 210,$$
$$T = \begin{pmatrix} 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \\ 50 & 47 & 23 & 17 & 21 \\ 35 & 59 & 55 & 27 & 41 \end{pmatrix}$$

3.5.

$$a_1 = 300,\quad a_2 = 350,\quad a_3 = 200,\quad b_1 = 110,\quad b_2 = 150,\quad b_3 = 190,\quad b_4 = 150,\quad b_5 = 250,$$
$$T = \begin{pmatrix} 26 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 27 & 19 & 20 & 16 & 22 \\ 20 & 10 & 13 & 19 & 18 \end{pmatrix}.$$

3.6.

$$a_1 = 170,\quad a_2 = 250,\quad a_3 = 230,\quad b_1 = 150,\quad b_2 = 110,\quad b_3 = 160,\quad b_4 = 90,\quad b_5 = 140,$$
$$T = \begin{pmatrix} 46 & 27 & 36 & 40 & 45 \\ 49 & 26 & 27 & 16 & 38 \\ 40 & 19 & 25 & 25 & 35 \end{pmatrix}$$

Tayanch iboralar
Taqsimot, ta'rif, ta'rif indeksi, shimoli-g'arb burchak usuli, optimal reja, yopiq model, ochiq model, shartli varianta, potensial. indeks, ta'rif, optimal reja. optimal yechish.

Takrorlash uchun savollar
1. *Transport masalasi deb qanday masalaga aytiladi?*
2. *Birinchi programma qanday tuziladi?*
3. *Taqsimot uslubi deb nimaga aytiladi?*
4. *Transport masalasida jadvallarning optimalligi qanday tekshriladi?*
5. *Transport masalasida programmalarni qanday yaxshilash mumkin?*
6. *Potensiallar uslubi yordamida birinchi programma qanday tuziladi?*
7. *Ochiq model deb nimaga aytiladi?*
8. *Yopiq model deb nimaga aytiladi?*
9. *Transport masalasini yechganda ochiq modelni qanday qilib yopiq modelga keltirish mumkin.*
10. *Programmada to'ldirilgan kataklar soni qanday topiladi?*
11. *Optimal yechish qanday aniqlanadi?*

IV BOB
BUTUN SONLI PROGRAMMALASHTIRISH

Bizga quyidagi n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{array}\right|$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0$$

va maqsadli funksiya

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n.$$

Bunda x_i — ishlab chiqarilgan mahsulotlar birligi; o'zgaruvchilar har qanday musbat son bo'lishi mumkin.

Chiziqli programmalashtirishning ko'pgina masalalarini yechganda x_i — o'zgaruvchilarga butun sonli bo'lish sharti qo'yiladi. Bunday masalalarga butun sonli programmalashtirish masalalari deb ataladi. Butun sonli programmalashtirish, materiallarni optimal bichish, transport masalalarini marshrutlarga optimal taqsimlash, bo'linmaydigan mahsulot ishlab chiqaruvchi korxonalarning ishini optimal planlashtirish kabi masalalarni yechishda qo'llaniladi. Yuqoridagilarni yaxshi anglab olish uchun quyidagi masalani ko'rib chiqamiz.

1-§. Marketolog haqidagi masala

Faraz qilaylik, A_i shaharda yashovchi marketolog n ta $A_1, A_2, \ldots, A_n$ shaharlarda bir martadan bo'lib, minimal vaqt ichida A_i shaharga qaytib kelishi kerak bo'lsin. Bu masalaning matematik modelini tuzish uchun marketologning A_i shahardan A_j shaharga borishi uchun sarf qilgan vaqtini $t_{ij}(i,j=\overline{1,n})$ bilan hamda uning har bir A_i shahardan A_j shaharga borishi ko'rsatkichini x_{ij} bilan belgilab olsak, u vaqtda marketolog A_i shahardan A_j shaharga borsa $x_{ij}=1$, bormasa $x_{ij}=0$ ga teng.

Yuqoridagi masalaning matematik modelini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, \qquad (j=\overline{1,n}). \tag{4.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \qquad (i=\overline{1,n}). \tag{4.2}$$

$$x_{ij}=0, \text{ yoki } x_{ij}=1. \tag{4.3}$$

$$F_{\min}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} t_{ij}x_{ij}. \tag{4.4}$$

Butun sonli programmalashtirish masalalaridagi x_{ij} larning hammasi uchun butun bo'lishlik sharti qo'yilsa, bunday masalalar to'liq butun sonli programmalashtirish masalalari, agar ularning ma'lum bir qismi uchun bu shart qo'yilsa, qisman butun sonli programmalashtirish masalalari deyiladi.

Agar (4.3) ko'rinishdagi shartlar butun sonli programmalashtirish masalalaridagi o'zgaruvchilarga qo'yilgan bo'lsa, u vaqtda bunday masala *Bul programmalashtirish masalasi* deyiladi.

Butun sonli programmalashtirish masalalarini yechish uchun uning xususiyatlarini e'tiborga oluvchi usullar yaratilgan. Ulardan biri Amerika olimi R. Gomori tomonidan yaratilgan bo'lib, optimal yechimni beruvchi eng aniq usul hisoblanadi.

R. Gomori usuli quyidagidan iborat.

Oldin chiziqli programmalashtirish masalasi simpleks usul bilan yechiladi.

Agar $x_i(i=\overline{1,n})$ yechim butun sonli bo'lsa, u butun sonli programmalashtirish masalasining ham yechimi bo'ladi.

Faraz qilaylik, p_{i-1} -masala simpleks usul bilan yechilgan va uning yechimi x_{i-1} butun bo'lish shartini qanoatlantirmaydi. Yuqoridagilarni hisobga olib, quyidagilarni belgilab olaylik:

$\{a\} - x_i = a$ yechimning kasr qismi;

k — oxirgi simpleks jadvaldagi erkli o'zgaruvchilarning indeksi;

$s - \{a_{s0}\}$ larning jadvaldagi eng kattasi joylashgan satr.

U vaqtda R. Gomori x_i noma'lumlarning butun bo'lishlik shartini e'tiborga oluvchi va «kesuvchi tenglama» deb ataluvchi qo'shimcha tenglama tuzadi.

Bu holda to'liq butun sonli masalani yechish uchun Gomorining I kesimini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

$$\{a_{s0}\} - \sum_k \{a_{sk}\} x_k \le 0. \tag{4.5}$$

Qisman butun sonli masalani yechish uchun Gomorining II kesimini (bu kesimni to'liq butun sonli masalani yechish uchun ham qo'llasa bo'ladi) quyidagicha yozish mumkin:

$$\{a_{s0}\} - \sum \{a_{sk}\} x_k \le 0, \tag{4.6}$$

bunda a_{sk} — koeffitsientlar quyidagi nisbatlardan topiladi.

1) x_k lar butun son bo'lmasligi talab qilinmagan holda

$$a_{sk} = \begin{cases} a_{sk}, & \text{agar} \quad a_{sk} \ge 0. \\ \dfrac{\{a_{s0}\}}{1 - \{a_{so}\}} \{a_{sk}\}, & \text{agar} \quad a_{sk} < 0. \end{cases}$$

2) x_k larga butun son bo'lishi talab qilingan holda

$$a_{sk} = \begin{cases} a_{sk}, & \text{agar} \quad \{a_{sk}\} \le \{a_{so}\}, \\ \dfrac{\{a_{s0}\}}{1 - \{a_{so}\}} (1 - \{a_{sk}\}, & \text{agar} \quad \{a_{sk} > \{a_{so}\}. \end{cases}$$

To'liq yoki qisman butun sonli masalalarni yechish uchun ketma-ket jadvallarni almashtirish jarayonlarini bajarish quyidagi tartibda amalga oshiriladi:

1) p_{i-1} masala yechilib, x_{i-1} optimal yechimlar topiladi;

2) agar x_{i-1} yechimlar butun sonli bo'lsa, simpleks jadvallar tuzish to'xtatiladi;

3) agar p_{i-1} masalada x_{i-1} yechimlar butun sonli bo'lmasa, u vaqtda Gomorining I yoki II kesimlari tuziladi;

4) p_{i-1} masalaga 3) holdagi shartlar to'ldirilib, p_i masala tuziladi va yana 1) holni bajarishga to'g'ri keladi.

2-§. To'la butun sonli programmalashtirish

1. Quyidagi shartlarda butun sonli masalani yeching:

$$\left.\begin{aligned}-x_1 + 2x_2 + y_1 = 2,\\ 3x_1 + 2x_2 + y_2 = 6.\end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\; x_2 \geq 0,\; y_1 \geq 0,\; y_2 \geq 0$$

hamma $x_k (k = 1,2)$ butun son $y_1 \geq 0,\ y_2 \geq 0$, $F = x_1 + 4x_2 \rightarrow \max$.

Yechish. Masalaning dastlab butun sonli yechimlari bo'lishini talab qilmasdan simpleks usul bilan chiqamiz.

1- simpleks jadval

№	$c_б$	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmaslar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	0	x_2	2	−1	2	1	0	1
2.	0	y_2	6	3	2			3
3.		F	F=0	−1	−4	0	0	

2- simpleks jadval

№	$c_б$	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmaslar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	4	x_1	1	−1/2	1	1/2	0	
2.	0	y_2	4	2	0	−1	1	
3.		F	F=4	−3	0	2	0	

№	c_δ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgaruvchilar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	4	x_2	3/2	0	1	3/8	1/8	
2.	1	x_1	2	1	0	−1/2	1/2	
3.		F	F=7	0	0	5/4	3/4	

3- simpleks jadvaldan ko'rinib turibdiki, $\overline{\overline{p}}$ masalaning optimal yechimlari $x_1=1$, $x_2=3/2$, $y_1=0$, $y_2=0$ ga teng. Bu yechimlar ichida $x_2=3/2$ – kasr son. Shuning uchun yuqoridagi 3- va 4- hollarni qo'llab, $\overline{\overline{P_1}}$ masalani tuzamiz. 3- simpleks jadvalda yagona 1 satrda kasr yechimlar bor ($1 - a_{j0}$, $s=1$).

U vaqtda Gomorining birinchi kesimi quydagicha yoziladi.

$$\left\{\frac{3}{2}\right\} - \left(\left\{\frac{3}{8}\right\}y_2 + \left\{\frac{1}{8}\right\}y_2\right) \le 0 \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{2} - \left(\frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_2\right) \le 0.$$

Bu tengsizlikka bazisli o'zgaruvchi y_3 ni kiritib, quyidagi tenglama ko'rinishida yozamiz:

$$\frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_2 - y_3 = \frac{1}{2}.$$

Bu tenglamani oldingi 2- tenglamalar safiga birlashtirib yozsak, u vaqtda $\overline{P_1}$ – masala hosil bo'ladi.

Oxirgi simpleks jadval $\overline{P_1}$ masalasi uchun quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$\frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_2 - y_3 = \frac{1}{2}$ – tenglamada y_3 o'zgaruvchi bazisli o'zgaruvchi bo'lishi mumkin, lekin uning oldidagi koeffitsienti manfiy son. Shuning uchun p_1 -masala uchun tuzilgan 4- jadvaldagi yechimlar optimal yechimlar bo'la olmaydi. (y_3 =–1/2). Demak, 4- simpleks jadvalni yana almashtirish kerak.

4- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zga-ruvchil-ar	O'zgar-maslar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i3}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
1.	4	x_1	3/2	0	1	3/8	1/8	0	4	12
2.	1	x_2	2	1	0	−1/2	1/2	0	0	0
3.		y_3	1/2	0	0	3/8	1/8	−1	4/3	4
4.		F	F=7	0	0	5/4	3/4	0	0	0

4- jadvalning 3- satrini yechuvchi satr deb tanlab (3- va 4 - shartlarni qo'llab), $\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$ topiladi. U vaqtda $\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$ joylashgan uchinchi ustun yechuvchi ustun bo'ladi.

Agar bunday ustun topilmasa, u vaqtda yechuvchi ustun deb tanlangan satrdagi eng kichik elementga ega bo'lgan ustun tanlab olinadi (ya'ni $\min\left\{\frac{a_{i0}}{a_{ip}}\right\}$).

Bundan keyin y_3 ni bazisga kiritib 5-simpleks jadvalni tuzish mumkin. Bu yerda tanlangan satr va ustun yuqoridagi talabga javob beradi.

5- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zga-ruvchilar	O'zgar-maslar ustuni a_{i0}	1	4	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i3}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3		
1.	4	x_2	1	0	1	0	0	1		
2.	1	x_1	4/3	1	0	0	1/3	−2/3		
3.		y_1	4/3	0	0	1	1/3	−8/3		
4.		F	16/3	0	0	0	1/3	10/3		

Bu jadvaldagi yechimlar ham optimal yechimlar bo'lib, quyidagilarga teng:

$$x_1=4/3,\ x_2=1,\ y_1=4/3,\ y_2=0,\ y_3=0.$$

Lekin bu yechim ham butun sonli emas. Shuning uchun P_2-masalani tuzishga kirishamiz.

Mos kesimlar quyidagicha bo'ladi:

$$\left\{\frac{4}{3}\right\}-\left(\left\{\frac{1}{3}\right\}y_2+\left\{\frac{-2}{3}\right\}y_3\right)\leq 0.$$

Bunda

$$\left\{\frac{4}{3}\right\}=\frac{1}{3},\ \left\{\frac{1}{3}\right\}=\frac{1}{3}\ \text{va}\left\{\frac{-2}{3}\right\}=\frac{-2}{3}-\left[\frac{-2}{3}\right]=\frac{-2}{3}-(-1)=\frac{1}{3}\ \text{bo'lganligi}$$

uchun kesuvchi tenglamaning ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{1}{3}y_2+\frac{1}{3}y_3-y_4=\frac{1}{3},$$

u vaqtda 5- jadvaldagi 4-satrni bu tenglamaga asosan yozsak, quyidagi jadval hosil bo'ladi.

6- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zga-ruvchilar	O'zgar-maslar ustuni	1	4	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{i4}}$	$\frac{a_{i0}}{a_{i5}}$
			a_{i0}	x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4		
1.	4	x_2	1	0	1	0	0	1	0		
2.	1	x_1	1	1	0	0	0	−1	1		
3.	0	y_1	1	0	0	1	0	−3	1		
4.		y_2	1	0	0	0	1	1	−3		
5.	Indeks satri	F	F=5	0	0	0	0	3	1		

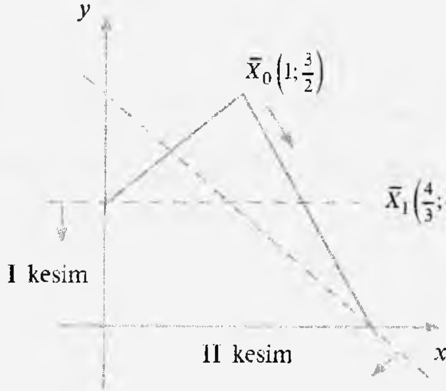
Indeks satrida hamma sonlar butun sonlar bo'lganligi uchun bu jadval optimal yechimni beradi:

$$x_1=1,\ x_2=1,\ y_1=1,\ y_2=1,\ y_3=0,\ y_4=0\ \text{va}$$

$$f_{max} = 1x_1 + 4x_2 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3 + 0 \cdot y_4 =$$
$$= 1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 5.$$
$$f_{max} = 5.$$

Agar indeks satrida manfiy sonlar bo'lganda simpleks jadvallar tuzish davom ettirilardi.

Masalaning geometrik izohi quyidagi ko'rinishda bo'ladi. Oldin P_0 masalaning optimal yechimi shaklini chizamiz.



4.1-chizma.

p_1- masalani yechganda I kesim quyidagi tengsizlik orqali kiritilgan edi: $\frac{3}{8}y_1 + \frac{1}{8}y_2 \geq \frac{1}{2}$. Bu tengsizlikka dastlabki tengsizliklarni qo'llab y_1 va y_2 lar qisqartirilsa, $x_1 \leq 1$ kelib chiqadi. Shuning uchun bu tengsizlikka x_2=1 to'g'ri chiziq mos keladi. x_2=1 chiziq butun sonli bo'lmagan optimal yechimlarni $x_0(1; \frac{3}{2})$ ajratadi, lekin hamma butun sonli yechimlar sohasini (0; 1), (1; 1), (1; 0), (2; 0) saqlab qoladi. p_1 masalada yangi optimal yechimlar: $\bar{x}_1(4/3,\ 1,\ 0,\ 4/3)$ sohasi hosil bo'ladi. Endi $\frac{1}{3}y_3 + \frac{1}{3}y_4 \geq \frac{1}{2} - II$ kesimni kiritib p_2 masalani tuziladi. Bu masaladan yuqoridagi kabi bazisli o'zgaruvchilarni qisqartirsak, x_1=x_2≤ 2 hosil bo'ladi. Yangi soha butun sonli optimal soha bo'ladi (4.1- chizma ga qarang).

Topshiriqlar

Quyidagi masalalarning to'liq butun sonli yechimlarini toping va geometrik izohini (mumkin bo'lgan joyda) bering (bunda $x_k \geq 0$).

4.1. $\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\geq 6, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 36, \\ x_2 &\leq 13. \end{aligned}\right\}$

$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max.$

4.2. $\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leq 8, \\ x_1 + 4x_2 &\leq 10. \end{aligned}\right\}$

$F = 3x_1 + 4x_2 \to \max.$

3-§. Qisman butun sonli programmalashtirish

Quyidagi shartlarda qisman butun sonli masalani yeching:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 9, \\ 0{,}16x_1 + x_2 &\leq 1{,}9. \end{aligned}\right\} \qquad f = x_1 + 8x_2 \to \max.$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

va x_k – butun sonli (k = 1,2...).

Yechish. Bu masala to'liq butun sonli masala emas, chunki sistemadagi ikkinchi tengsizlikni kanonik ko'rinishga keltirsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi: $0{,}16x_1 + x_1 + y_2 = 1{,}9$. Bu tenglamada y_2 ning butun qiymatlarida x_1 va x_2 butun sonli qiymatlarni qabul qilmaydi. Shuning uchun bu masalaga qisman butun sonli masala deyiladi. Masalani yechish uchun oldin P_0 masalani simpleks usulni qo'llab yechamiz.

1- simpleks jadval

№	$\overline{C}_\sigma$	Bazisli yechimlar	O'zgar-maslar ustuni a_{i0}	1	8	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	0	y_1	9	1	1	1	0	9
2.	0	y_2	1,9	0,16	1	0	1	1,9
3.	Indeks satri		F=0	–1	–8	0	0	

Bu jadvalning indeks satrida manfiy sonlar bo'lgani uchun simpleks uslubni qo'llab ikkinchi simpleks jadval tuziladi.

2- simpleks jadval

№	c_σ	Bazisli yechimlar	O'zgarmaslar ustuni a_{i0}	1	8	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	
1.	0	x_1	7,1	2,84	0	1	−1	
2.	8	x_2	1,9	0,16	1	0	1	
3.	Indeks satri	F	F=15,2	0,28	0	0	8	

Ikkinchi satrda manfiy sonlar yo'q. Demak, 1- almashtirishdan keyin optimal yechimlar quyidagidan iborat:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,9;\ y_1 = 7,1,\ y_2 = 0.$$

Optimal yechim ichida y_1=7,1 butun sonli yechim emas. Shuning uchun p_1 -masalani tuzish kerak. (6.6) formuladan foydalanib, 2-satrga asoslanib (s=2) P_1 -masala uchun Gomorining kesimi tuziladi. U vaqtda jadvaldan quyidagi hosil bo'ladi:

$$\{a_{20}\} - (a_{21}x_1 + a_{24}y_2) \geq 0.$$

Yuqorida ko'rdikki, x_1 – butun sonli o'zgaruvchi va $\{a_{21}\}<\{a_{20}\}$ bo'lgani uchun,

$$\{a_{21}\} = \{a_{21}\} = 0,16. \qquad (4.7)$$

(4.7) tenglikdan foydalanib, a_{24} ni topamiz (1 kesimdan foydalanib).

y_2 ga butun sonli bo'lish talab qilinmagani va a_{24}>0 bo'lgani uchun yuqoridagi kesimdan foydalansak, bu kesim quyidagicha bo'ladi: a_{24}=1, $0,16x_1+y_2-y_3 = 0,9$.

Bu tenglamani yuqoridagi jadvalga kiritsak, p_1 -masala chiqadi.

P_1 -masalada simpleks jadvallarni ikki marta almashtirgandan keyin optimal yechim quyidagicha bo'ladi:

$$x_1 = 8/3,\ x_2 = 1;\ y_1 = 0,\ = 71/150.$$

Optimal yechim ichida 1- satrdagi x_1 =8/3 butun son emas. Shuning uchun yuqoridagi qoidalardan foydalanib, yangi kesimni tuzib butun optimal yechim topiladi.

P_1 -masala uchun tuzilgan simpleks jadvallar quyidagicha:

1-simpleks jadval

№	$\overline{C_\sigma}$	**Bazisli o'zgaruvchilar**	**O'zgarmaslarustuni a_{i0}**	**1**	**8**	**0**	**0**	**0**	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1.	0	x_1	7,1	2,84	0	1	−1	0	0
2.	8	x_2	1.9	0,16	1	0	1	0	1,9
3.	0	y_3	0,9	0,16	0	0	1	−1	0,16
4.	Indeks satri		F=15,2	0,28	0	0	8	0	

2- simpleks jadval

№	$\overline{C_\sigma}$	**Bazisli o'zgaruvchilar**	**O'zgarmaslar ustuni a_{i0}**	**1**	**8**	**0**	**0**	**0**	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1.	0	y_1	8	3	0	1	0	−1	8/3
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	1	0
3.	0	y_2	0,9	0,28	0,16	0	0	1	90/16
4.	Indeks satri		F=8	−1	0	0	0	8	

3- simpleks jadval

№	$\overline{C_\sigma}$	**Bazisli o'zgaruvchilar**	**O'zgarmaslar ustuni a_{i0}**	**1**	**8**	**0**	**0**	**0**	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	
1.	1	x_1	8/3	1	0	1/3	0	−1/3	
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	1	
3.	0	y_2	71/150	0	0	−4/75	1	71/75	
4.	Indeks satri	F	F=32/3	0	0	1/3	0	23/3	

3-jadvalning 1-satridan ko'rinadiki, x_1 =8/3 optimal yechim butun sonli emas.

Shuning uchun 1-satrga asoslanib, Gomorining kesimini tuzamiz:

$$\left\{\frac{8}{3}\right\} - (a_{13}y_1 + a_{15}y_3) \geq 0.$$

bunda

$$a_{12} = \frac{1}{3}, \; a_{15} = \frac{\left\{\frac{8}{3}\right\}}{1 - \left\{\frac{8}{3}\right\}}\{a_{15}\} = \frac{2}{3}.$$

Yuqoridagilardan quyidagi tenglama kelib chiqadi:

$$y_1 + 2y_3 - y_4 = 2.$$

Bu tenglamani 3- jadvalga kiritsak, P_2 masala hosil bo'ladi. P_2 masalani simpleks usul bilan yechamiz.

1-simpleks jadval

№	$\overline{C_\sigma}$	**Bazisli o'zga-ruvchi-lar**	**O'zgar-maslar ustuni a_{i0}**	**1**	**8**	**0**	**0**	**0**	**0**	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
1.	1	x_1	8/3	1	0	1/3	0	0	0	8
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	0	0	0
3.		y_3	71/150	0	0	−4/75	1	71/75	0	0
4.		y_4	2	0	0	1	0	2	−1	2
5.	Indeks satri		F=32/3	0	0	1/3	0	23/3	0	0

№	$\overline{C_\sigma}$	Bazisli o'zga-ruvchi-lar	O'zgar-maslar ustuni a_{i0}	1	8	0	0	0	0	$\frac{a_{i0}}{a_{ip}}$
				x_1	x_2	y_1	y_2	y_3	y_4	
1.	1	x_1	2	1	0	0	0	−1	1/3	0
2.	8	x_2	1	0	1	0	0	1	0	0
3.		y_3	0,58	0	0	0	1	0,84	−4/75	0
4.		y_4	2	0	0	1	0	2	0	0
5.	Ind. satri		F=10	0	0	0	0	7	1/3	0

2-simpleks jadvaldan ko'rinadiki, qisman optimal yechimlar quyidagiga teng:

$$x_1=2,\ x_2=1\ y_3=0{,}58,\ y_4=2,\ y_1=0,\ y_2=0.$$

Bu yechim ichida $y_3=0{,}58$, lekin bu yechimni ham to'liq butun songa keltirish mumkin.

Xususan, sistemadagi 2- tengsizlikni 100 ga ko'paytirib, bazisli o'zgaruvchi kiritsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi.

$$16x_1+100x_2+y_3=190.$$

Bu tenglamadan ko'rinib turibdiki, y_3 butun bo'lganida x_1 va x_2 lar butun qiymatlarida butun qiymat qabul qilishi mumkin.

Topshiriqlar

Quyidagi shartlarda qisman butun sonli masalani yeching ($x_k \geq 0$ shart bajarilganda).

4.3. $\left.\begin{aligned} -2{,}9x_1+6x_2 &\leq 17{,}4, \\ 3x_1-x_2 &\leq 1. \end{aligned}\right\}$

x_1 va x_2 butun son,

$F=6x_1+x_2 \to \max.$

4.4. $\left.\begin{aligned} x_1+3x_2 &\leq 12, \\ 3x_1-8x_2 &\leq 24. \end{aligned}\right\}$

x_1 butun son,

$F=x_1 \to \max.$

4.5. $$\left.\begin{array}{l} 0,5x_1 + x_2 \le 1,75, \\ x_1 + 0,3x_2 \le 1,5. \end{array}\right\}$$
x_1 va x_2 butun son,
$F = 0,25x_1 + x_2 \to \max$.

4.6. $$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 + 2x_2 \le 4. \end{array}\right\}$$
x_2 butun son,
$F = x_1 + x_2 \to \max$.

4.7 $$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 3,5. \\ -2x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 1,5, \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 + x_4 = 4. \end{array}\right\}$$
x_2 butun son,
$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max$.

Tayanch iboralar

Birinchi kesim, ikkinchi kesim, butun sonli programmalashtirish, to'liq butun sonli programmalashtirish, qisman butun sonli programmalashtirish.

Takrorlash uchun savollar

1. Butun sonli programmalashtirish deb nimaga aytiladi?
2. To'liq butun sonli programmalashtirish deb nimaga aytiladi?
3. Qismal butun sonli programmalashtirish deb nimaga aytiladi?
4. R.Gamorining birinchi kesimi qanday aniqlanadi?
5. R.Gamorining ikkinchi kesimi qanday aniqlanadi?

V BOB
PARAMETRIK PROGRAMMALASHTIRISH

Xalq xo'jaligini boshqarish va rejalashtirish jarayonida iqtisodda quyidagi xususiyatlarga ega bo'lgan masalalarga duch kelinadi:

1) izlanayotgan miqdorlarning juda ko'p parametrlarga bog'liqligi;

2) yechilayotgan masala cheksiz yechimga ega bo'lib, ulardan optimal yechimini tanlab olish.

Optimallashtirish masalalarini chiziqli programmalashtirish usullari bilan to'liq yechish uchun bu masalalarda qatnashayotgan koeffitsientlar aniq qiymatlarni qabul qiladi, deb faraz qilinadi. Lekin amalda ko'pchilik masalalarda bu koeffitsientlarning taqribiy qiymatlari yoki ularning mavjud bo'lish oralig'i ma'lum bo'ladi. Shuning uchun chiziqli programmalashtirish masalasining optimal yechimi har bir qatnashayotgan koeffitsientning mavjud bo'lish oralig'ida o'zgarishiga qanchalik bog'liqligiga, ya'ni masaladagi koeffitsientlarning o'zgarishi uning yechimlar to'plamiga qanday ta'sir qilishini aniqlash masalasi talab etiladi.

Ana shunday qo'yilgan masalalarni hal qilish parametrik programmalashtirishning predmetini tashkil etadi.

1-§. Parametrik programmalashtirish masalalarining iqtisodiy va geometrik talqini

Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasini ko'rib chiqaylik.

$$AX = B \text{ bunda } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

$$X \geq 0, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad F(X) = CX \to \max.$$

Keltirilgan masalada A matritsaning a_{ij} elementlari, B va C vektorlarning tarkibiy qismlari qandaydir t parametrga bog'liq o'zgarishi mumkin. Bunday masalalarga parametrik programmalashtirish masalalari deyiladi.

Agar faqat C vektorning tarkibiy qismlari t parametrga bog'liq bo'lsa, ya'ni $C' = C' + C''t$, $t \in [\alpha, \beta]$ berilgan masala maqsad funksiyasi parametrga bog'liq masala deyiladi.

Agar B vektorning tarkibiy qismlari t parametrga bog'liq bo'lsa, ya'ni $B = B' + tB''$, $t \in [\alpha', \beta']$ u vaqtda bu masalaga ozod hadi parametrga bog'liq bo'lgan masala deyiladi. Bunda α, β, α', β' ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Demak, t parametrning o'zgarish sohasida F maqsad funksiyaning maksimum (minimum) qiymatini topish kerak.

Agar bordi-yu maqsadli funksiyaning koeffitsientlari va ozod hadning tarkibiy qismlari t parametrga chiziqli bog'liq bo'lsa, u vaqtda quyidagi shartlarda

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i = b'_i + b''_i t \quad (i = \overline{1,m}), \tag{5.1}$$

$$X_i \geq 0, \ (i = \overline{1,n}). \tag{5.2}$$

Maqsad funksiyasi

$$F = \sum_{i=1}^{n} (c'_i + c''_i t) x_i \tag{5.3}$$

ning maksimum (minimum) qiymatini $t \in [a, b]$ oraliqda topish kerak.

Yuqorida ko'rilgan masalalarni umumlashtiruvchi masalaga parametrik programmalashtirishning umumiy masalasi deyiladi. Boshqacha aytganda, quyidagi shartlarda

$$\sum_{i=1}^{n}(a'_{ij}+a''_{ij}t)x_i = b'_j+b''_j t \quad (j=\overline{1,m})$$

$$X_j \geq 0, \quad (i=\overline{1,n})$$

t ning $[\alpha, \beta]$ oraliqda o'zgarish sohasida $F = \sum_{i=1}^{n}(c'_i+c''_i t)x_i$ ning maksimum (minimum) qiymatini topishga parametrik programmalashtirishning umumiy masalasi deyiladi.

Yuqoridagi kabi masalalarni chiziqli programmalashtirish usullari bilan yechish mumkin.

Kelgusida bunday masalalar to'liq o'rganib chiqiladi.

Endi (5.1) – (5.3) masalaning geometrik talqinini ko'ramiz.

Faraz qilaylik, (5.1) sistemaning musbat yechimlar to'plami (qavariq yechimlar to'plami: ko'pburchak, ko'pyoqlik uchlarining koordinatalari to'plami) bo'sh to'plam bo'lmasin va bu nuqtalar soni birdan ortiq bo'lsin. U vaqtda berilgan t parametrning $[\alpha, \beta]$ da joylashgan qavariq to'plamdagi ko'pyoqlikning uchlarini koordinatalarida (5.3) maqsadli funksiyani maksimum qiymatga erishtiradigan nuqtaning koordinatalarini topishga to'g'ri keladi.

Bu nuqtani topish uchun t ga $t = t_0$ qiymat berib, masalani chiziqli programmalashtirishning geometrik uslubi bilan yechamiz. Bu yerda ikki xil hol bo'lishi mumkin:

1. Ko'pyoqlik uchlari koordinatalarining birontasida optimal qiymat qabul qiladi.

2. $t = t_0$ da yechish mumkin bo'lmasligi aniqlanadi.

Agar birinchi shart bajarilsa, u vaqtda F maqsadli funksiya maksimum qiymatga ega bo'ladigan nuqtani topamiz.

Endi t ning yangi $t = t_1$ qiymatini olamiz va yana yuqoridagi kabi yechishni davom ettiramiz. Chekli qadamlardan keyin parametrning $[\alpha, \beta]$ qiymatlarida F maqsadli funksiyaning optimal rejasi topiladi.

Yuqoridagi qoida va formulalardan foydalanib, quyidagi masalalar yechiladi.

5.1-masala. Korxonada ikki tur mahsulot ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotga ketadigan xomashyo me'yori va zaxirasi quyidagi jadvalda berilgan.

Xomashyo xillari	Har bir ishlab chiqarilgan buyumga ketadigan xomashyo me'yori		Xomashyo zaxirasi
	1-tur	2-tur	
1	4	1	16
2	2	2	22
3	6	3	36

Shu bilan birga birinchi tur mahsulotlarni realizatsiya qilganda, narxi 2 so'mdan 12 so'mgacha, ikkinchi xil mahsulotlarni realizatsiya qilganda, narxi 13 so'mdan to 3 so'mgacha o'zgarib, bu o'zgarishlar quyidagi tengliklar bilan aniqlanadi:

$$c_1 = 2 + t, \quad c_2 = 13 - t, \quad 0 \le t \le 10.$$

Ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi yuqoridagi ko'rsatilgan oraliqlarda o'zgarganda ishlab chiqarishdan maksimum daromad olish rejasini toping.

Yechish. Faraz qilaylik, birinchi tur mahsulot x_1 birlik, ikkinchi tur mahsulot x_2 birlik ishlab chiqarish kerak bo'lsin. U vaqtda $t \in [0,\ 10]$ oraliqda o'zgarganda quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 16, \\ 2x_1 + 2x_2 \le 22, \\ 6x_1 + 3x_2 \le 36. \end{cases} \tag{5.4}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 \tag{5.5}$$

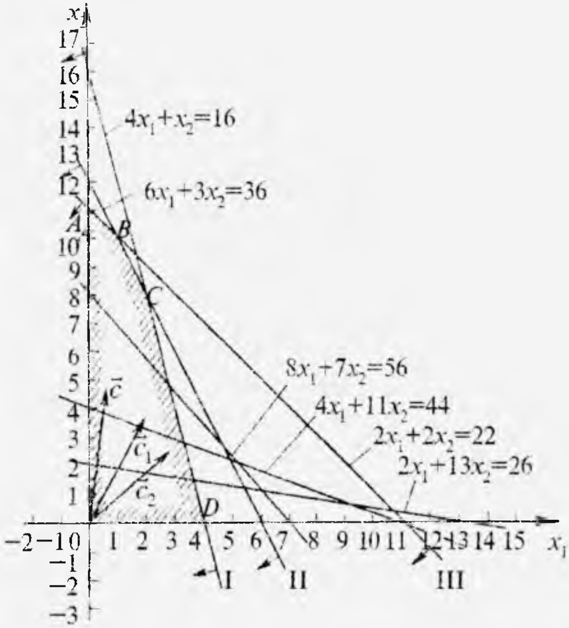
$$F(x_1, x_2) = (2+t)x_1 + (13-t)x_2 \tag{5.6}$$

(5.6) ning maksimum qiymatini topish talab etiladi. Endi (5.4) – (5.6) masalaning yechimini topish uchun (5.4) sistemaga asoslanib, yechimlar to'plamini izohlovchi ko'pburchak shaklini chizamiz (5.1-chizma).

Agar [0, 10] oraliqda t ning qiymatini $t = 0$ deb olib, $2x_1 + 13x_2 = k$, (bunda, $k = 0, 1, 2, ..., 26$) shaklini chizsak va uni

$\bar{C}(2;13)$ vektor bo'yicha $OABCD$ ko'pburchak tomon harakatlantirsak, bu to'g'ri chiziq $A(0;\ 11)$ nuqtada ko'pburchakka urinadi.

Shunday qilib, $t = 0$ bo'lganda birinchi qadamda $x_1 = 0$, $x_2 = 11$ optimal yechim bo'ladi.



5.1-chizma.

Bu yechimga asosan birinchi tur mahsulot narxi 2+0 = 2 so'mni, ikkinchi tur mahsulot narxi esa 13–0=13 so'mni tashkil etadi. Optimal rejada maqsad funksiyasining qiymati quyidagicha topiladi:

$F_{1\max} = (2+0)\cdot 0 + (13-0)\cdot 11 = 13\cdot 11 = 146$ so'm.

Agar $t = 2$ deb olinsa, sath chizig'i quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$(2+2)x_1 + (13-2)x_2 = 4x_1 + 11x_2 = k$, k ga qiymatlar berib, $\bar{C}(4;11)$ vektor bo'yicha siljitilsa, k=44 bo'lganda $OABCD$ ko'pburchakka $A(0;11)$ nuqtada urinadi. Demak, A nuqtada F maqsadli funksiya maksimum qiymatga ega bo'ladi va $x_1 = 0$, $x_2 = 11$ lar optimal yechimlar bo'ladi. Bu yechimga asosan birinchi tur mahsulot narxi 2 + 2=4 so'mni, ikkinchi tur mahsulot narxi 13–2=11 so'mni tashkil etadi.

Demak, $F_{max} = (2+2)\cdot 0 + (13-2)\cdot 11 = 121$ so'm.

5.1-chizmadan ko'rinib turibdiki, mahsulotlarni ishlab chiqarish t ning har qanday qiymatida optimal bo'ladi, toki to'g'ri chiziq $2x_1 + 2x_2 = 22$, $\frac{2+t}{2} = \frac{13-t}{2}$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lsa. Bu shart bajariladi, agarda t=5,5 bo'lsa, t ning bu qiymatida AB kesmaning istalgan nuqtasi optimal rejani beradi.

Shunday qilib, t ning quyidagi oraliqdagi $t \in [0;5,5]$ barcha qiymatlarida x_1=0, x_2=11 optimal yechim bo'ladi va maqsadli funksiyaning maksimum qiymati $F_{1\max} = 143 - 11t$ ga teng.

Endi t ning qiymatini 5,5 dan katta qilib olsak, masalan t=6 bo'lganda berilgan masalaning yechimini topish uchun $(2+6)x_1 + (13-6)x_2 = k$ to'g'ri chiziqni tuzamiz (bunda k=0,1,2,...).

Misol uchun k=56 bo'lganda bu to'g'ri chiziq quyidagi ko'rinishda bo'ladi. $8x_1 + 7x_2 = 56$. Bu to'g'ri chiziqni $\bar{C}(8;7)$ vektor bo'yicha siljitsak, $OABCD$ ko'pburchak bilan eng chetki B(1;10) nuqtada urinadi. Shunday qilib, t =6 bo'lganda uchinchi qadamda $x_1 = 2+6 = 8$ so'm, $x_2 = 13-6 = 7$ so'm optimal yechim bo'ladi va ishlab chiqarish natijasida maqsad funksiyasi

$$F_{max} = 8\cdot 1 + 7\cdot 10 = 78 \text{ so'mga teng.}$$

5.1-chizmadan ko'rinib turibdiki, B(1,10) nuqtaning koordinatalari t >5,5 qiymatida optimal yechim bo'ladi, toki $2x_1 + 13x_2 + (x_1 - x_2)t = k$ to'g'ri chiziq $6x_1 + 3x_2 = 36$ to'g'ri chiziqqa parallel bo'lguncha.

Bu shart bajariladi, agar $\frac{2+t}{6} = \frac{13-t}{3}$ bo'lsa, ya'ni t =5,5 ga teng bo'lganda t ning bu qiymatida AB kesmaning istalgan nuqtasi optimal rejani beradi.

Shunday qilib, $t \in [5,5;8]$ oraliqda t ning barcha qiymatlarida x_1=1; x_2=10 yechim optimal reja bo'ladi. Shu bilan birga $t \in [5,5;8]$ oralig'ida AB kesmaning barcha koordinatalari optimal yechim bo'ladi, ya'ni $F_{2\max} = (2+t)1 + (13-t)10 = 132 - 9t$ ga teng.

Yuqoridagi kabi $t \in [8;10]$ oralig'ida $x_1=2$; $x_2=8$ optimal yechim topiladi (5.1 -chizmaga qarang). Demak, birinchi tur mahsulotning bahosi 10 so'mdan 12 so'mgacha, ikkinchi tur mahsulotning bahosi 3 so'mdan 5 so'mgacha o'zgaradi, birinchi tur mahsulotlar 2 birlik, ikkinchi tur mahsulotlar 12 birlik ishlab chiqariladi.

Shu bilan birga $t \in [8;10]$ oraliqdagi qiymatlarida ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi

$$F_{3\max} = 108 - 6t \text{ ga teng.}$$

Shunday qilib, masalaning geometrik talqinidan quyidagi optimal yechimlarni topdik:

1) $t \in [0;5,5]$ oraliqda $x_1=0$; $x_2=11$, $F_{1\max}=143-11t$;

2) $t \in [5,5;8]$ oraliqda $x_1=1$; $x_2=10$, $F_{2\max}=132-9\,t$;

3) $t \in [8;10]$ oraliqda $x_1=2$; $x_2=8$, $F_{3\max}=108-16\,t$.

2-§. Maqsad funksiyasi parametriga bog'liq bo'lgan masalalar

1-§ da ko'rib chiqilgan (5.1) — (5.3) masalalar berilgan bo'lsin.

$[\alpha;\ \beta]$ oraliqda t parametrning bironta $t = t_0$ qiymatini olib, bu masalani simpleks usul bilan yechamiz. Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) $t = t_0$ nuqtada masala optimal rejaga ega bo'ladi;

2) $t = t_0$ masalani yechish mumkin emasligi aniqlanadi.

Faraz qilaylik, birinchi hol bajarilgan bo'lsin. U vaqtda oxirgi simpleks jadvalning $(N + 1)$ (indeks satridan) satridan $J_i(t_0) = J'_i + t_0\ \ J''_i$ ni yozib olamiz. Bundan quyidagilar topiladi:

$$T_0 = \begin{cases} \max\left(-\dfrac{J'_i}{J''_i}\right), & \text{agar } J''_i > 0 \\ -\infty, & \text{agar } J''_i \le 0 \end{cases} \quad \text{mavjud bo'lsa,}$$

$$T = \begin{cases} \min\left(-\dfrac{J'_i}{J''_i}\right), & \text{agar } J''_i < 0 \\ \infty, & \text{agar jami } J''_i \ge 0 \end{cases} \quad \text{mavjud bo'lsa.}$$

U vaqtda $T_0 \le t \le T$ da berilgan masala (barcha t lar uchun) $t = t_0$ qiymatda bir xil optimal rejaga ega bo'ladi.

Agar $t = t_0$ qiymatda masalani yechish mumkin bo'lmasa va oxirgi simpleks jadvalning $N+1$ satrida uning yechimi $J_k = J'_k + t_0 J''_k$, $(x_{ik} < 0,\ i = \overline{1,m})$ songa teng bo'lsa:

1) $J''_k = 0$ bo'lganda berilgan masalani istalgan t uchun yechish mumkin emas;

2) agar $J''_k < 0$ bo'lsa, berilgan masalani $t < t_1 = -\frac{j'_k}{J''_k}$ larning barchasi uchun yechish mumkin emas;

3) agar $J''_k > 0$ bo'lsa, berilgan masalani barcha $t > t_1$ lar uchun yechish mumkin emas;

4) birinchi qadamda t ning o'zgarish sohasi aniqlaniladi, yuqoridagi qadamni $t \in [\alpha, \beta]$ oraliqda t ning boshqa qiymatini olib, ya'na simpleks usuli qo'llanadi;

5) chekli almashtirishlar natijasida masalaning optimal rejasi topiladi yoki masalani yechish mumkin emasligi aniqlanadi.

5.2-masala. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 10, \\ -x_1 + x_2 + x_5 = 6. \end{array}\right| \tag{5.7}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

$F=(x_1, x_2)=2x_1+(3+4t)x_2$ maqsadli funksiyani (5.8). $t \in (-\infty, +\infty)$ oraliqda t ning barcha qiymatlari uchun maksimum qiymatini toping.

Yechish. Berilgan oraliqda parametrning istalgan qiymatini olish mumkin.

Oldin dastlabki berilganlarga asoslanib, birinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

1- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmas koeffitsientlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	0	x_3	12	1	1	1	0	0
2.	0	x_4	10	3	−1	0	1	0
3.	0	x_5	6	−1	1	0	0	1
4.	Indeks satri		F=0	−2	−3−4t	0	0	0

Bu jadvalga asoslanib ikkinchi simpleks jadvalni tuzamiz.

2- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	C(t) O'zgarmas koeffitsientlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	0	x_3	6	2	0	1	0	−1
2.	0	x_4	16	0	0	0	1	1
3.	3+4t	x_2	6	−1	1	0	0	1
4.	Indeks satri		F=18+24t	−5−4t	0	0	0	3+4t

2- jadvalning indeks satrida manfiy miqdorlar bo'lgani uchun 3-simpleks jadvalni tuzamiz.

3- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	C(t) O'zgarmas koeffitsientlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	0	x_1	3	1	0	1/2	0	−1/2
2.	0	x_4	16	0	0	0	1	1
3.	3+4t	x_2	9	0	1	1/2	0	1/2
4.	Indeks satri		F=33+36 t	0	0	2,5+2t	0	0,5+2 t

Bu jadvalga $t=0$ qiymatning indeks satridagi t ning o'rniga qo'ysak $x_1=3$, $x_2=9$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=0$ optimal yechim va maqsadli funksiya $F_{1\max}=2\cdot3-(3+4\cdot0)\cdot9=6+27=33$ qiymatga ega bo'ladi.

Endi F_1 ning qiymatiga asoslanib t ning qiymatini topamiz.

3-simpleks jadvalning indeks satri elementlari musbat bo'lishi uchun $2{,}5+2t\geq0$ va $0{,}5+2t\geq0$ bo'lishi kerak. Bu tengsizliklardan $t\geq-0{,}25$ kelib chiqadi. Demak, $t\in[-0{,}25;\ +\infty)$ oraliqda t ning barcha qiymatlarida $x_1=3$, $x_2=9$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=0$ yechim optimal yechim bo'ladi va $F_{1\max}=33+36t$ ga teng.

Ikkinchi qadamda t ning 0,25 dan kichik qiymatini olib 3-simpleks jadvalning indeks satridan x_5 ni bazisli yechimlar safiga o'tkazamiz u vaqtda x_4 qo'shimcha o'zgaruvchilar safiga o'tadi. Natijada 4-simpleks jadval hosil bo'ladi (3-simpleks jadvalni almashtirgandan keyin).

4-simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	C(t) O'zgarmas koeffitsientlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	2	x_1	11	1	0	0,5	0,5	0
2.	0	x_5	16	16	0	0	1	1
3.	3+4t	x_2	1	0	1	0,5	−0,5	0
4.	Indeks satri		F=25+4t	0	0	2,5+2t	−0,5−	0

Bu jadvalga asosan $x_1=11$, $x_2=1$, $x_3=0$, $x_4=0$, $x_5=16$ yechim $2{,}5+2t\geq0$ va $-0{,}5-2t\geq0$ bo'lganda, berilgan masala uchun optimal yechim bo'ladi.

Demak, $t\in[-1{,}25;\ -0{,}25]$ – da $F_{\max}=25+4t$ bo'ladi. Uchinchi qadamda $t<-1{,}25$ bo'lganda x_3 indeks satridagi qiymati manfiy bo'ladi. Shuning uchun simpleks usulni qo'llab, 4- jadvaldan 5-jadvalga o'tamiz.

№	C_σ	Bazisli o'zga-ruvchilar	C(t) O'zgarmas koeffitsientlar ustuni	2	3+4t	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	2	x_1	10	1	−1	0	1	0
2.	0	x_5	16	0	0	0	1	1
3.	0	x_3	2	0	2	1	−1	0
4.	Indeks satri		F=20	0	−5−4 t	0	2	0

Bu jadvalda bazis yechim: x_1=10, x_2=0, x_3=4, x_4=0, x_5=16 optimal yechimlar bo'ladi va $t \in (-\infty, -1,25]$ – da $F_{3\max} = 20$.

Shunday qilib, yuqoridagi jadvallardan quyidagi optimal rejani yozish mumkin:

1) $t \in [-\infty, -1,25]$ oraliqda x_1=10, x_2=0, x_3=2, x_4=0, x_5=16. $F_{\max} = 20$;

2) $t \in [-1,25, -0,25]$ oraliqda x_1=11, x_2=1, x_3=0, x_4=0, x_5=16. $F_{\max} = 25 + 4t$;

3) $t \in [-0,25, +\infty]$ oraliqda x_1=3, x_2=9, x_3=0, x_4=16, x_5=0. $F_{\max} = 33 + 36t$.

5.3-masala. Korxonada uch tur mahsulot ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Har bir ishlab chiqarilgan mahsulot birligiga ketadigan xomashyo me'yori va narxi, xomashyo zaxirasi quyidagi jadvalda berilgan.

Xomashyo xillari	**Har bir ishlab chiqarilgan buyumga ketadigan xomashyo me'yori**		
	1-tur buyum	2-tur buyum	3-tur buyum
1	18	15	12
2	6	4	8
3	5	3	3
Har bir ishlab chiqarilgan mahsulot narxi (so'm)	9	10	16
Xomashyo zaxirasi	360 kg	192 kg	180 kg

Shu bilan birga ishlab chiqarilgan mahsulotlarni to'la sotish ta'min etilgan. Ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzingki, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishga tarqatganda qiymat jihatidan maksimum daromad olinsin. Shu bilan birga narx-navoning o'zgarishini hisobga olib, optimal reja turg'unligining tahlili berilsin.

Yechish. Faraz qilaylik, birinchi tur mahsulot x_1 birlik, ikkinchi tur mahsulot x_2 birlik, uchunchi tur mahsulot x_3 birlik ishlab chiqarilishi kerak bo'lsin.

U vaqtda masalaning matematik modelini ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} &18x_1+15x_2+12x_3 \le 360,\\ &6x_1+4x_2+8x_3 \le 192,\\ &5x_1+3x_2+3x_3 \le 180. \end{aligned}\right\} \tag{5.9}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \tag{5.10}$$

$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$ funksiya maksimum qiymatni toping.

(5.9) tengsizliklar sistemasiga y_1, y_2, y_3 bazis o'zgaruvchilar kiritib, tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishga keltiriladi:

$$\left.\begin{aligned} &18x_1+15x_2+12x_3+y_1 \le 360,\\ &6x_1+4x_2+8x_3+y_2 \le 192.\\ &5x_1+3x_2+3x_3+y_3 \le 180. \end{aligned}\right\} \tag{5.11}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,$$
$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0.$$

U vaqtda (5.10) maqsadli funksiya quyidagi ko'rinishni oladi:

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot y_3\,. \tag{5.12}$$

Bunda $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ x_3 = 0$ deb olsak, $F = 0$ bo'ladi (simpleks usulga qarang).

(5.11) – (5.12) larga asoslanib, birinchi simpleks jadval tuziladi va simpleks jadvallarni ketma-ket almashtirib, masalaning optimal yechimlari topiladi.

1- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zga-ruvchilar	O'zgarmas koeffitsient-lar ustuni	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	2	y_1	360	18	16	12	1	0	0
2.	0	y_2	196	6	4	8	0	1	0
3.	0	y_3	180	5	3	3	0	0	1
4.	Indeks satri		F=0	−9	−10	−16	0	0	0

2- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchi-lar	O'zgar-mas koeffitsi-entlar ustuni	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	0	y_1	72	9	9	0	1	−3/2	0
2.	16	x_3	24	3/4	1/2	1	0	1/8	0
3.	0	y_3	180	11/4	3/2	0	0	−3/8	1
4.	Indeks satri		F=384	3	−2	0	0	2	0

3- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zga-ruvchilar	O'zgar-mas koeffitsi-entlar ustuni	9	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	10	x_2	8	1	1	0	1/9	−1/6	0
2.	16	x_3	20	1/4	0	1	−1/18	5/24	0
3.	0	y_3	96	5/4	0	0	−1/6	−1/8	1
4.	Indeks satri		F=400	5	0	0	2/9	5/3	0

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, birinchi tur mahsulotlar $x_1=0$ dona, ikkinchi tur mahsulotlar $x_2=8$ dona, uchinchi tur mahsulotlar $x_5=20$ dona ishlab chiqariladi.

Bu reja optimal reja bo'lib, daromad

$$F_{1\max} = 9 \cdot 0 + 10 \cdot 8 + 16 \cdot 20 + 0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + 0 \cdot 96 = 80 + 320 = 400.$$

so'mni tashkil etadi.

Endi yuqoridagi optimal rejaga asoslanib, ishlab chiqarilgan mahsulot turlari bahosining o'zgarish chegaralari aniqlanadi.

Oldin birinchi tur mahsulotdan boshlaymiz. Faraz qilaylik, birinchi tur mahsulotning qiymati $c_1= 9$ so'm emas, ya'ni $c_1=(90+t_1)$ so'm bo'lsin.

Bu yerda t_1 parametr $t_1 \in (9;\ \infty)$ oraliqda o'zgarishi mumkin. U vaqtda yuqoridagi optimal rejaga asoslanib, masalaning shartiga ko'ra $F = (9 + t_1)x_1 + 10x_2 + 16x_3$ maqsad funksiyasining maksimum qiymatini topish talab etiladi. Maqsad funksiyaning bu qiymatini hisobga olib, 4-simpleks jadvalni shunday yozish mumkin.

4- simpleks jadval

№	C_σ	Bazisli o'zgaruvchilar	O'zgarmas koeffitsientlar ustuni	$9+t_1$	10	16	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	y_1	y_2	y_3
1.	10	x_2	8	1	1	0	1/2	−1/6	0
2.	16	x_3	20	1/4	0	1	−1/18	5/24	0
3.	0	y_3	96	5/4	0	0	−1/6	−1/8	1
4.	Indeks satri		F=400	$5-t_1$	0	0	2/9	5/3	0

Bu jadvaldan ko'rinib turibdiki, $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=20$ yechimlar parametrik programmalashtirishning optimal rejasi bo'ladi, agarda $5- t_1 \geq 0$ bo'lsa, ($t \leq 5$).

Demak birinchi tur mahsulotning qiymati $c_1 \leq 14$ so'm bo'lsa, $x_1=0$, $x_2=8$, $x_3=20$ optimal yechim bo'ladi. Ishlab chiqarish korxonasi birinchi tur mahsulotning qiymati 14 so'mdan oshmasligidan manfaatdor emas. Shu bilan birinchi tur mahsulotning qiymati o'zgarganda, ikkinchi va uchunchi tur mahsulotning qiymati berilgan masalaning shartlarida o'zgarmaydi deb hisoblaymiz. Xuddi shunday ikkinchi tur mahsulotlarning qiymati $8 \le c_2 \le 20$ oraliqda o'zgarganda masalaning dastlabki shartlarida ikkinchi tur mahsulotning qiymati $x_2 = 8$ so'm, uchinchi tur mahsulotning qiymati 20 so'mni tashkil etadi va bu reja optimal reja bo'ladi. Lekin shuni ham aytish kerakki, ko'rsatilgan reja optimal bo'lishiga qaramasdan c_1 ning har xil qiymatlarida maqsadli funksiya har xil qiymatlar qabul qiladi. Agar uchinchi tur mahsulotning narxi $8 \le c_2 \le 20$ oraliqda o'zgarganda ham ikkinchi tur mahsulotning narxi 8 so'm, uchunchi tur mahsulotning narxi 20 so'mni tashkil etadi va bu reja optimal reja bo'ladi. Shunday qilib, berilgan masala maqsad funksiyasining bitta koeffitsientiga parametr kiritib optimal rejaning sezgirlik darajasini tahlil qildik.

Xuddi shunday optimal rejaning sezgirlik darajasini hamma tur mahsulotlarning qiymatlari o'zgarganda ham tahlil qilish mumkin.

3-§. Ozod hadlari parametriga bog'liq bo'lgan masalalar

(5.1) – (5.3) masalalar berilgan bo'lsin. Bu masalani yechish uchun yuqoridagi kabi t parametrning qiymatini $t \in [\alpha, \beta]$ oraliqda $t=t_0$ songa tenglashtirib chiziqli programmalashtirish usulini qo'llab, masalaning yechilishini ko'rsatamiz. Bu yerda ham ikki hol bo'ladi:

1) $t=t_0$ qiymatda masala optimal rejaga ega;

2) $t=t_0$ qiymatda masalani yechish mumkin emasligi aniqlanadi.

Birinchi holda $T_0 \le t \le T$ oraliqda t ning barcha qiymatlarida topilgan reja optimal reja bo'ladi, bunda

$$T_0 = \begin{cases} \max(-j'_i / j''_i), & \text{agar } j''_i > 0, \\ -\infty, & \text{agar } j''_i \le 0. \end{cases} \quad \text{mavjud bo'lsa.}$$

$$T = \begin{cases} \min(-j'_i / j''_i), & \text{agar } j''_i < 0, \\ \infty, & \text{agar } j''_i \ge 0. \end{cases} \quad \text{mavjud bo'lsa.}$$

J'_i va J''_i lar quyidagi $J_i = J'_i + t_0 \; J''_i$ optimal rejaning tarkibiy qismlari bo'lib, t_0 ga bog'liqdir.

Agar $t = t_0$ qiymatda berilgan masalani yechish mumkin bo'lmasa, u vaqtda bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) maqsad funksiya optimal rejalar to'plamida chegaralanmagan;

2) berilgan sistema musbat yechimlarga ega emas.

Birinchi holda masala t $[\alpha, \beta]$ oraliqda t ning istalgan qiymatida yechimga ega emas.

Ikkinchi holda sistemaning t $[\alpha, \beta]$ oraliqda t ning qaysi qiymatlarida birgalikda mavjud bo'lmagan qiymatlari aniqlaniladi va uni masalaning aniqlanish sohasidan chiqariladi. Shundan keyin t ning boshqa qiymatini $t \in [\alpha, \beta]$ oraliqda olib, yana simpleks usul qo'llaniladi va chekli almashtirishlar natijasida masalaning optimal rejasi topiladi yoki masalani yechish mumkin emasligini aniqlaymiz.

Shunday qilib, (5.1) — (5.3) masalani yechish uchun quyidagi jaryonlar amalga oshiriladi:

1. t parametrning bironta aniq t_0 qiymatini $[\alpha, \beta]$ oraliqda olib, chiziqli programmalashtirish uslubini qo'llab, masalaning optimal rejasi topiladi yoki masalani yechish mumkin emasligini ko'rsatamiz.

2. Parametr $t \in [\alpha, \beta]$ ning qaysi qiymatlarida bir xil optimal rejaga ega bo'lishi yoki yechish mumkin emasligi aniqlaniladi va t ning bu qiymatlarini $[\alpha, \beta]$ oraliqdan chiqariladi.

3. $[\alpha, \beta]$ oraliqning qolgan qismidan t ning bironta qiymatini olib, masalaning optimal rejasi topiladi. Buni yechish uchun ikkilamchi simpleks usuli qo'llaniladi.

4. Chekli almashtirishlar natijasida t parametrni qaysi to'plamlar qiymatida bir xil optimal rejaga ega bo'lishini yoki bo'lmasligini $[\alpha, \beta]$ oraliqda aniqlanadi.

5.4-masala. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 12 + t, \\ 2x_1 - x_2 + x_4 &= 8 + 4t, \\ -2x_1 + 2x_2 + x_5 &= 10 - 6t. \end{aligned}\right| \tag{5.13}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ x_3 \geq 0,\ x_4 \geq 0,\ x_5 \geq 0.$$

$$F = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5) = 3x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 \tag{5.14}$$

funksiyaning $t \in (-\infty\ +\infty)$ oraliqqa maksimum qiymatini toping.

Yechish. $(-\infty\ +\infty)$ oraliqda t parametrning istalgan qiymatini olib, chiziqli programmalashtirish usullarini qo'llab masala yechiladi. Faraz qilaylik, $t=0$ bo'lsin, u vaqtda quyidagi simpleks jadvalni tuzish mumkin.

1-jadvalga asoslanib, masalaning optimal yechimi topiladi. Birinchi jadvaldan ko'rinib turibdiki $x_1=0$, $x_2=5-3t$, $x_3=7-4t$, $x_4=13+t$, $x_5=0$ bo'lganda berilgan masalaning optimal rejasi bo'ladi.

1- jadval

№	C_β	Bazisli o'zgaruvchilar	x_0	3	−2	5	0	−4
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
1.	5	x_3	12+t	1	1	1	0	0
2.	0	x_4	8+4 t	2	−1	0	1	0
3.	−4	x_5	10−t	−2	2	0	0	1
4.			F=20+29 t	10	−1	0	0	0
1.	5	x_3	7+4 t	2	0	1	0	−1/2
2.	0	x_4	13+ t	1	0	0	1	1/2
3.	−2	x_2	5−3t	−1	1	0	0	1/2
4.	Indeks satri		F=25+26 t	9	0	0	0	1/2

Yuqoridagi yechimlar to'plami optimal yechim bo'ladi, agarda $7+4t \geq 0,\ 13+t \geq 0.\ 5-3t \geq 0$ bo'lsa, ya'ni

1) $t \geq -\frac{7}{4}$;

2) $t \geq -13$;

3) $t \leq \frac{5}{3}$ bo'lsa.

Shunday qilib, $t \in \left[-\frac{7}{4}, \frac{5}{3}\right]$ oraliqda $x_1 = 0,\ x_2 = 5 - 3t,$ $x_3 = 7 + 4t,\ \ x_4 = 13 + t,\ x_5 = 0$ bo'lsa, optimal reja $F_{1\max} = 25 + 26t$ bo'ladi.

Endi $t > \frac{5}{3}$ bo'lgan qiymatlarida berilgan masala optimal yechimga egami yoki yo'qligi tekshiriladi. $t > \frac{5}{3}$ bo'lganda $5 - 3t < 0$ bo'lgani uchun x_1=0, x_2=5–3t, x_3=7+4t, x_4=13+t, x_5=0 optimal reja bo'la olmaydi. Shuning uchun $t \geq \frac{5}{3}$ bo'lganda yangi rejaga o'tish kerak. Lekin yangi rejaga o'tish uchun oldin x_2 bazis o'zgaruvchi joylashgan satr elementlari tekshiriladi.

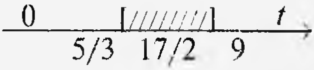
Bu satr elementlari ichida manfiy son $x'_{2l} = -1$ bo'lgani uchun yangi tayanch rejaga o'tiladi (agar bu satrda manfiy son bo'lmaganda, yangi tayanch rejaga o'tib bo'lmas edi). Bu yerda x_2 o'zgaruvchini bazis o'zgaruvchilar safidan chiqarib, uning o'rniga x_1 o'zgaruvchi kiritiladi va yangi tayanch rejaga o'tiladi.

Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

2- jadval

№	**C_σ**	**Bazis o'zgaruvchilar**	x_0	**3**	**–2**	**5**	**0**	**–4**
				x_1	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**
1.	5	x_3	17–2t	0	2	1	0	1/2
2.	0	x_4	18–2t	0	1	0	1	1
3.	3	x_1	–5+3t	1	–1	0	0	–1/2
4.	Indeks satri		70–t	0	9	0	0	5

Demak, 2- jadvalga asosan dastlabki masalaning kerakli rejasi x_1=–5+3t, x_2=0, x_3=17–2t, x_4=18–2t, x_5=0 bo'ladi, agarda barcha t lar uchun $-5 + 3t \geq 0,\ 17 - 2t \geq 0,\ 18 - 2t \geq 0$ bo'lsa. Bu tengsizliklarni yechsak $t \geq \frac{5}{3}$, $t \leq \frac{17}{2}$, $t \leq 9$ hosil bo‘ladi. Shunday qilib, $t \in \left[\frac{5}{3}, \frac{17}{2}\right]$ oraliqda maqsad funksiyasi



$F_{max} = 70 - t$ dastlabki masalaning optimal rejasi bo‘ladi.

Agar $t > \frac{17}{2}$ bo‘lsa, $x_1=-5+3t$, $x_3=17-2t$, $x_2=0$, $x_3=18-2t$, $x_5=0$ optimal reja bo‘lmaydi, chunki optimal reja tarkibida $x_3=17-2t$ manfiy songa teng. Birinchi jadvalning $x_{1,}$ satrida manfiy elementlar bo‘lmagani uchun $t > \frac{17}{2}$ bo‘lganda masalani yechish mumkin emas.

Endi 1-jadvaldan $t < -\frac{7}{4}$ bo‘lganda masalaning yechimi tekshiriladi.

Bu holda $x_1=0$, $x_2=5-3t$, $x_3=7+4t$, $x_4=13+t$, $x_5=0$ optimal reja bo‘la olmaydi, chunki $x_3=7+4t$ manfiy qiymatga ega.

Shuning uchun t parametrning bu qiymatlarida optimal reja mavjudligini tekshirish uchun birinchi jadvaldan x_3 ni bazis o‘zgaruvchilar safidan chiqarib, uning o‘rniga x_5 kiritiladi. (x_3 turgan satrda $x'_{15} - \frac{1}{2}$ manfiy son bo‘lgani uchun bu jarayonni bajarish mumkin).

Natijada quyidagi jadval hosil bo‘ladi.

3- jadval

№				**3**	**−2**	**5**	**0**	**−4**
	$C_т$	**Bazisli o‘zgaruvchilar**	x_0	**x_1**	**x_2**	**x_3**	**x_4**	**x_5**
1.	−4	x_5	−14−8 t	−4	0	−2	0	1
2.	0	x_4	20+5 t	3	0	1	1	0
3.	2	x_1	12+t	1	1	1	0	0
4.	Indeks satri		F=32+30 t	11	0	1	0	0

Uchinchi jadvalga asosan $x_1=12+t$, $x_2=0$, $x_3=0$, $x_4=20+5t$, $x_5=-14-8t$ va t parametrning quyidagi shartlarni $-14-8t\geq 0$, $20+5t\geq 0$, $12+t\geq 0$ qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida, ya'ni $t_1\leq -\frac{7}{4}$,

$$\begin{matrix} t_2\geq -4, \\ t_3\geq -12 \end{matrix} \text{ bo'lganda}$$

$$\xrightarrow[\quad -4\ [\backslash\backslash\backslash\backslash\backslash\backslash\backslash]\ -7\backslash 4 \quad]{} t$$

optimal reja bo'ladi.

Shunday qilib $t\in[-4;\ -\frac{7}{4}]$ oraliqda berilgan masalaning yechimlari $x_1=0$, $x_2=12+t$, $x_3=0$, $x_4=20+5t$, $x_5=-14-8t$ bo'ladi va $F_{\max}=32+30t$.

Uchinchi jadvaldan ko'rinib turibdiki, $t>-4$ bo'lganda berilgan masala yechimga ega emas, chunki x_4 element joylashgan satrda manfiy elementlar yo'q.

Demak,

1) agar $t\in(-\infty;\ -4]$ bo'lsa, masala optimal yechimga ega emas;

2) agar $t\in[-4;\ -\frac{7}{4}]$ bo'lsa, masalaning optimal yechimlari $x_1=0$, $x_2=12+t$, $x_3=0$, $x_4=20+5t$, $x_5=-14-8t$ bo'lib, $F_{\max}=32+30t$ ga teng;

3) agar $t\in[-7;\ \frac{5}{3}]$ bo'lsa, masalaning optimal yechimlari $x_1=0$, $x_2=5-3t$, $x_3=7+4t$, $x_4=13+t$, $x_5=0$ bo'lib, $F_{0\max}=25+26t$ ga teng;

4) agar $t\in[\frac{5}{3};\ \frac{17}{2}]$ bo'lsa, masalaning optimal yechimlari $x_1=-5+3t$, $x_2=0$, $x_3=17-2t$, $x_4=18-2t$, $x_5=0$ bo'lib, $F_{0\max}=70-t$ ga teng;

5) agar $t\in[\frac{17}{2},\ \infty)$ bo'lsa, masalani yechish mumkin emas.

5.5-masala. Korxonada uch tur mahsulot ishlab chiqarish uchun uch xil xomashyo ishlatiladi. Korxona birinchi xil xomashyodan

180 t, ikkinchi xil xomashyodan 210 t va uchunchi xil xomashyodan 244 t ta'min etilgan.

Har bir ishlab chiqarilgan mahsulot birligiga ketadigan xomashyo me'yori va narxi 4- jadvalda berilgan.

4- jadval

Xomashyo xillari	**Har bir ishlab chiqarilgan buyumga ketadigan xomashyo me'yori**		
	1-tur buyum	2-tur buyum	3-tur buyum
1	4	2	1
2	3	1	3
3	1	2	5
Har bir ishlab chiqarilgan mahsulotning narxi (so'm)	10	14	12

Ishlab chiqarishning shunday rejasini tuzingki, ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotishga tarqatganda qiymat jihatidan maksimum daromad olinsin.

Shu bilan birga xomashyo miqdorini hisobga olib, optimal reja turg'unligining tahlili berilsin.

Yechish. Faraz qilaylik, birinchi tur mahsulot x_1 birlik, ikkinchi tur mahsulot x_2 birlik, uchinchi tur mahsulot x_3 birlik ishlab chiqarilsin, u vaqtda masalaning matematik modelini ushbu ko'rinishda yozish mumkin.

Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + x_3 \le 180, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 244. \end{array}\right\} \qquad (5.15)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \qquad (5.16)$$

$$F = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \qquad (5.17)$$

funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. Masalani simpleks usulni qo'llab yechamiz.

Yechish jarayonining hammasini bitta jadval ko'rinishida yozamiz.

5- jadval

№	C_β	Bazis o'zgaruvchi-lar	x_0	10	14	12	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.	0	x_4	180	4	2	1	1	0	0
2.	0	x_5	210	3	1	3	0	1	0
3.	0	x_6	244	1	2	5	0	0	1
4.	Indeks satri		$F_1=0$	−10	−14	−12	0	0	0
1.	14	x_2	90	2	1	1/2	$^1/_2$	0	0
2.	0	x_5	120	1	0	5/2	−1/2	1	0
3.	0	x_6	64	−3	0	4	−1	0	1
4.	Indeks satri		$F_2=1260$	18	0	−5	7	0	0
1.	14	x_2	82	19/8	1	0	5/8	0	−1/8
2.	0	x_5	80	23/8	0	0	1/8	1	−5/8
3.	12	x_3	16	−3/4	0	1	−1/4	0	1/4
4.	Indeks satri		1340	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Bu jadvalga asosan optimal yechim $x_1=0$, $x_2=82$, $x_3=16$, $x_4=0$, $x_5=0$, $x_6=0$ ga teng.

Bu yechimni (5.7) ga qo'ysak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$F = 10 \cdot 0 + 14 \cdot 82 + 12 \cdot 16 = 1340 \text{ so‘m.}$$

Demak, bu rejaga asosan daromad $F_{max} = 1340$ so'mni tashkil etadi.

Endi bu rejaning turg'unligi tahlilini ko'rsatamiz. Buning uchun xomashyo xillari (hajmlari)ning miqdorlarini o'zgartirib uni maqsad funksiyaga ta'siri ko'rib chiqiladi.

Oldin birinchi xil xomashyo hajmi t_1 tonnaga o'zgartiriladi, ya'ni birinchi xil xomashyo 180 + t_1 tonna bo'lsin. Bunda t –

parametr, t_1 parametr umum holda $(-\infty, +\infty)$ oraliqdagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin, u vaqtda masalaning sharti quyidagicha bo'ladi. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 180 + t_1, \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 &\le 210, \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 &\le 244. \end{aligned}\right\} \tag{5.18}$$

$$x_1 \ge 0, \; x_2 \ge 0, \; x_3 \ge 0. \tag{5.19}$$

$$F = (x_1, x_2, x_3) = 10x_1 + 14x_2 + 12x_3 \tag{5.20}$$

(5.20) funksiyaning maksimum qiymatini shunday topingki, $x_1 = 0,\ x_2 = 82,\ x_3 = 16$ optimal yechim bo'lsin. Buning uchun (5.18) – (5.20) parametrik programmalashtirish masalasini yechamiz.

Beshinchi jadvalning oxirgi qismi quyidagicha yozib olinadi.

6- simpleks jadval

№	$C_т$	Bazis o'zgaruvchilar	x_0	10	14	12	0	0	0
				x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
1.	14	x_2	b'_0	19/8	1	0	5/8	0	−1/8
2.	0	x_5	b'_5	23/8	0	0	1/8	1	−5/8
3.	12	x_3	b'_3	−3/4	0	1	1/4	0	1/4
4.	Indeks satri		F'_0	57/4	0	0	23/4	0	5/4

Oltinchi jadval 5- jadvaldan x_0 vektor joylashgan ustun elementlari bilan farq qiladi. x_0 vektorning tarkibiy qismlarini b'_2, b'_5, b'_3 oxirgi jadvaldagi bazisli vektorlar x_2, x_5, x_3 bo'yicha yoyib quyidagicha yozish mumkin:

$$B^{-1}X_0 = \begin{pmatrix} b'_2 \\ b'_5 \\ b'_3 \end{pmatrix}, \tag{5.21}$$

bunda B^{-1} matritsa B matritsaga teskari matritsa bo'lib, x_1, x_5, x_3 vektorlarning dastlabki tarkibiy qismlaridan iborat.

Matritsa B^{-1} 5- simpleks jadvalning vektorlar joylashgan ustun elementlaridan iborat, x_0 vektor esa 5- jadvalning dastlabki x_0 jadvalida joylashgan ustun elementlaridan iborat:

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 1 & -5/8 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}, \quad X_0 = \begin{pmatrix} 180+t_1 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix}$$

B^{-1} va X_0 matritsalarni (5.21) formulaga qo'ysak, quyidagi hosil bo'ladi:

$$X'_0 = \begin{pmatrix} b'_2 \\ b'_5 \\ b'_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/8 & 0 & -1/8 \\ 1/8 & 1 & -5/8 \\ -1/4 & 0 & 1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 180+t_1 \\ 210 \\ 244 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82+5/8t_1 \\ 80+1/8t_1 \\ 16-1/4t_1 \end{pmatrix}.$$

Yuqorida topilgan X'_0 vektor (5.15) – (5.17) masalaning optimal yechimi bo'ladi:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 82+5/8t_1,\ x_3 = 16-1/4t_1,\ x_4 = 0,\ x_5 = 80+1/8t_1,\ x_6 = 0$$

va $F_{\max} = 10\cdot 0 + (82+5/8t_1)\cdot 14 + (16-1/4t_1)\cdot 12 = 1340 + 5\frac{3}{4}t_1$.

Demak, yuqoridagi yechim bo'lsa, musbat t parametrning barcha qiymatlarida 7 optimal reja bo'ladi.

t_1=0 bo'lsa, $F_{\max}$=1340 so'm bo'lib, 5- simpleks jadvalning maqsad funksiyaning miqdori qiymatiga to'g'ri keladi.

Bu shuni ko'rsatadiki, t_1 parametrning o'zgarishi x_1 optimal yechimga ta'sir qiladi.

Misol uchun t_1=16 ga teng deb olsak, ishlab chiqarishning optimal rejasi x_1=0, x_2=92, x_3=12 ga teng bo'ladi va ikkinchi tur buyum 92 birlik, uchinchi tur buyum 12 birlikka teng bo'ladi.

Bu holda $F_{\max} = 92\cdot 14 + 12\cdot 12 = 1432$ so'mni tashkil qiladi.

Agar ikkinchi xil xomashyo miqdorini eng ko'pi bilan 80 tonnaga kamaytirsak u vaqtda reja optimal reja bo'ladi va ikkinchi tur mahsulotdan 82 birlik, uchinchi tur mahsulotdan 16 birlik ishlab chiqariladi.

Bu holda $F_{\max} = 14\cdot 82 + 12\cdot 16 = 1148$ so'mni tashkil etadi. Ko'rsatish mumkinki uchunchi xil xomashyo miqdorini o'zgartirsak,

$x_1=0$, $x_2=82$, $x_3=16$ tayanch yechim o'zgaradi. Ya'ni bu yechim turg'un yechim emas.

Shunday qilib, (5.15) – (5.17) masalaning optimal rejasi hamda xomashyolarning hajmini o'zgartirganda sezgirlik tahlilini ko'rsatdik. Xuddi shunday optimal reja sezgirlik tahlilini uch xil xomashyo miqdorini bir vaqtning o'zida o'zgartirganda ham ko'rsatish mumkin.

4- §. Ozod hadlar va maqsad funksiya parametriga bog'liq bo'lgan masalalar

1-§ da ko'rib chiqilgan (5.1) – (5.3) masalalar berilgan bo'lsin. 1–3-§ larda yechgan parametrik programmalashtirish masalalarini yechish usulidan foydalanib, quyidagi masalani yechamiz.

5.6-masala. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 &= 24 - 12t, \\ -x_1 + 2x_2 + x_4 &= -18 + 10. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ t \in (-\infty,\ +\infty).$$

$$F = (x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) =$$
$$= (8-5t)x_1 + (9-3t)x_2 + (-3+5t)x_3 - (2+4t)x_4 \to \max$$

qiymatini toping.

Yechish. t parametrning qiymatini ixtiyoriy tanlab olamiz. Faraz qilaylik, $t = 2$ bo'lsin. Dastlabki berilganlarga asoslanib, masalani simpleks usul bilan yechamiz.

1- simpleks jadval

№	$G_б$	Bazis o'zgaruvchilar	x_0	8–5t	9–3t	–3–5t	–2–4t
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	–3+5t	x_3	24+2t	1	–1	1	0
2.	–2–4t	x_4	–18+10t	–1	2	0	1
4.	Indeks satri		F=0	–8+5t	–9+3t	3–5t	2+4t

Uchinchi simpleks jadvaldan ko'rinib turibdiki, $t = 2$ bo'lganda $x_1 = 0$, $x_2 = -9 + 5t$, $x_3 = 15 - 7t$, $x_4 = 0$ berilgan masalaning optimal yechimi bo'ladi.

2- simpleks jadval

№	$G_б$	Bazis o'zgaruvchilar	x_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3-5t$	$-2-4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	−3+5t	x_3	24+2t	1	−1	1	0
2.	−2−4t	x_4	18+10t	−1	2	0	1
4.	Indeks satri		F=−36+ 208t-100t²	−11+10t	−6t−2t	0	2+4t

3- simpleks jadval

№	$G_б$	Bazis o'zgaruvchilar	x_0	$8-5t$	$9-3t$	$-3-5t$	$-2-4t$
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	−3+5t	x_3	15−7t	1/2	0	1	1/2
2.	9−3t	x_2	−9+5t	−1/2	1	0	1/2
4.	Indeks satri		F_{max}=−126+ 168t−50t²	9t−14	0	0	5+5t

Bu yechim 9t − 14 ≥ 0 bo'lganda, ya'ni $t \geq \frac{14}{9}$ qiymatlarda ham musbat yechim bo'ladi. Shunday qilib, $t \in [9/5,\ 15/7]$ oraliqda t ning barcha qiymatlarida masalaning optimal yechimlari $x_1 = 0$, $x_2=15-7t$, $x_3=-9+5t$, $x_4=0$ bo'lganda $F_{\max} = -126 + 168t - 50t^2$ ga teng.

Agar $t < \frac{9}{5}$ bo'lsa, ya'ni $-9+5t<0$ bo'lsa, yuqorida ko'rsatilgan yechim optimal reja bo'lmaydi.

Shuning uchun $t < \frac{9}{5}$ bo'lganda yangi simpleks jadval tuzish mumkin, chunki x_2 element joylashgan satrda (3- simpleks jadval) −1/2 manfiy son mavjud. $x'_{21} = -1/2$ sonni kalitli son deb tanlab olib, yangi simpleks jadval tuziladi. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

4- simpleks jadval

№	$G_б$	Bazis o'zgaruvchi-lar	x_0	8−5t	9−3t	−3−5t	−2−4t
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	−3+5t	x_3	6−2t	0	1	1	1
2.	8−5t	x_1	18−10t	1	−2	0	−1
3.	Indeks satri		F_{max}=126−134t+40t²	0	−28+1	0	14t−9

To'rtinchi jadvaldan ko'rinib turibdiki, $6-2t \geq 0$ va $18-10t \geq 0$ bo'lganda (yuqorida $t \geq \frac{14}{9}$ qimatini ko'rgan edik) oraliqdagi $t \in [14/9,\ 9/5]$ oraliqdagi qiymatlarida x_1=18–10t, x_2=0, x_3=6–2t, x_4=0 masalaning optimal yechimi bo'lib, $F_{\max} = 126 - 134t + 40t^2$ ga teng.

Endi $t > \frac{15}{7}$ bo'lganda masalaning yechimlarini tekshiraylik.

$t > \frac{15}{7}$ bo'lsa, $x_1 = 0,\ x_2 = -9 + 5t,\ x_3 = 15 - 7t,\ x_4 = 0$ yechim optimal reja bo'la olmaydi, chunki $15 - 7t < 0$. Shu bilan birga x_3 turgan satrda manfiy son yo'q bo'lgani uchun masalani yechish mumkin emas. Shunday qilib, biz masalani $t \in [14/9,\ +\infty)$ oraliqda yechdik. Masalani to'la yechish navbati $t \in [-\infty,\ 14/9)$ keldi. Agar $t < \frac{14}{9}$ bo'lsa, $-28 + 18t < 0$ bo'ladi. Shuning uchun yangi simpleks jadvalga o'tamiz.

Beshinchi simpleks jadvaldan ko'rinib turibdiki, $t \in [-\infty,\ 14/9)$ oraliqdagi t ning barcha qiymatlarida x_1=30–14t, x_2=6–2t, x_3=0, x_4=0 optimal yechim bo'lib, $F_{\max} = 294 - 298t + 76t^2$ ga teng. Demak:

1. Agar $t \in [-\infty,\ 14/9]$ bo'lsa, masala optimal rejaga ega bo'lib,

№	$G_б$	Bazis o'zgaruvchilar	x_0	8−5t	9−3t	−3−5t	−2−4t
				x_1	x_2	x_3	x_4
1.	9−3t	x_2	6−2t	0	1	1	1
2.	8−5t	x_1	30+14t	1	0	2	−1
3.	Indeks satri	$F=294+298t+76t^2$		0	0	28−18t	19−4t

$x_1 = 30 - 14t,\ x_2 = 6 - 2t,\ x_3 = 0,\ x_4 = 0$ va

$F_{2\max} = 294 - 298t + 76t^2$ ga teng.

2. Agar $t \in [14/9,\ 9/5]$ masala bo'lsa, optimal rejaga ega bo'lib $x_1 = 18 - 10t,\ x_2 = 0,\ x_3 = 6 - 9t,\ x_4 = 0$ va

$F_{0\max} = -134t + 40t^2$ ga teng.

3. Agar $t \in [9/5,\ 15/7]$ masala optimal rejaga ega bo'lib $x_1 = 0,\ x_2 = -9 + 5t,\ x_3 = 15 - 7t,\ x_4 = 0$

$F_{\max} = 126 + 168t - 50t^2$ ga teng.

Topshiriqlar

Quyidagi 5.7 parametrik programmalashtirish masalani $t \in (-\infty,\ +\infty)$ oraliqda optimal rejasini toping.

5.7. $$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 2, \\ -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 &= 1. \end{aligned}\right\}$$

$$x_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}.$$

$$F = (t-1)x_1 + (4-t)x_2 + (t-2)x_3 + (2-t)x_4 + (2t-3)x_5 \to \max.$$

Tayanch iboralar

Parametr, parametrga bog'liq bo'lgan maqsadli funksiya, parametrik programmalashtirish.

Takrorlash uchun savollar

1. Parametrik programmalashtirishning iqtisodiy talqini nima?
2. Parametrik programmalashtirishning geometrik talqini nima?
3. Parametrning ma'nosi nima?
4. Parametrik programmalashtirish masalalari ko'rinishlarini bilasizmi?

VI BOB
DINAMIK PROGRAMMALASHTIRISH

1-§. Dinamik programmalashtirish masalalarining umumiy xususiyatlari

Chiziqli programmalashtirish masalalarini yechganda vaqtga bog'liq bo'lmagan statik va iqtisodiy jarayonlar ko'rilgan edi. Masalalarning optimal yechimlarini topganda bu yechimlar vaqtga bog'liq bo'lmagan bir bosqichli optimal yechimlardan iborat deb hisobladik. Shuning uchun vaqtga bog'liq bo'lmagan bunday masalalarni bir bosqichli masalalar deb ataladi. Lekin ko'p iqtisodiy masalalarni yechish jarayonida bu masalalar o'z-o'zidan bir nechta bosqichlarga bo'lingan bo'ladi. Shu bilan birga iqtisodiyotning rivojlanish jarayoni ayniqsa bozor iqtisodiyotiga o'tish davrida ko'p omillarga bog'liqdir. Shuning uchun bunday masalalarning yechimi yagona bo'lmaydi. Balki har bir bosqichga mos keluvchi yechimlar to'plamidan iborat bo'ladi. Bu yechimlar to'plamidan eng maqbulini tanlab olishga optimal strategiya deyiladi.

Dinamik programmalashtirish iqtisodiyotda uchraydigan ko'p masalalarni bosqichma-bosqich yechish uchun ishlatiladi.

Bunga misol sifatida quyidagi masalalar kiradi: yuklarni optimal joylashtirish; eng qisqa yo'lni aniqlash, tezlikka bog'liq bo'lgan masalalarda optimal tezlikni topish; sarmoyalarni optimal joylashtirish; optimal rejalashtirish masalalari.

Demak dinamik programmalashtirish quyidagi xususiyatga ega bo'lgan masalalarni yechadi;

1) ko'p bosqichli iqtisodiy jarayonning birdan bir yagona yechimini emas, balki har bir qadamga mos keluvchi va asosiy manfaatni ko'zlovchi yechimlar to'plamini topishga yordam beradi;

2) dinamik programmalashtirish uslub va usullari yordamida yechilayotgan ko'p bosqichli masalaning ma'lum bir bosqichi uchun topilgan yechimi undan oldingi bosqichlarda topilgan yechimga bog'liq bo'lmaydi. Unda faqat shu bosqichni ifodalovchi omillar nazarga olinadi;

3) dinamik programmalashtirish yordamida ko'p bosqichli masalani yechish jarayonida har bir bosqichida asosiy maqsadni ko'zlovchi yechimni aniqlash kerak, yana yechimlar to'plami orasida asosiy maqsadga erishishga maksimal ulush qo'shuvchi yechimni tanlab olishga to'g'ri keladi.

Dinamik programmalashtirishning asosiy usul va uslublari amerikalik matematik R. Bellman va uning shogirdlari tomonidan asoslangan bo'lib, optimallik prinsipiga amal qiladi. Endi dinamik programmalashtirish uslub va usullari bilan yechiladigan ba'zi iqtisodiy masalalarni ko'rib chiqamiz.

2-§. Yuklarni optimal joylashtirish haqida masalalar

6.1-masala. Muzxonaga har xil xomashyolarni joylashtirish kerak. Muzxonaga jami W tonna xomashyoni joylashtirish mumkin. Xomashyolar to'g'risida quyidagi ma'lumotlar mavjud:

P_i — i xil xomashyoning og'irligi;

V_i — i xil xomashyoning bahosi (narxi);

X_i — muzxonaga joylashtiriladigan i xil xomashyoning soni.

Muzxonaga xomashyolarni shunday joylashtiringki, maksimum qiymatga ega bo'lgan xomashyolar joylashsin.

Demak, bu masalani umumiy holda quyidagi ko'rinishda yozish mumkin.

Quyidagi shartlarda

1. $\sum_{i=1}^{N} X_i \quad P_i \leq W$;

2. $X_i = 0, 1, 2.3, \ldots$. (konteynerlarga joylashgan xomashyolar soni yoki yashiklar soni);

3. $f(W) = \sum_{i=1}^{N} X_i \quad V_i$ —ning maksimum qiymatini toping.

Masalada X_i — xomashyolar butun qismlardan iborat.

Agar 2-shart bo'lmaganda edi, u vaqtda masalani chiziqli programmalashtirish masalasi ko'rinishida yechish mumkin edi. Shuning uchun masalani quyidagi ko'rinishda yechamiz.

1. Oldin muzxonaga birinchi xil xomashyolar joylashtiriladi. Joylashtirilgan yuklarning qiymatini $f_i(W)$ deb belgilasak:

$f_i(W)=\max\{X_i W\}$, (6.1) agarda quyidagi shartlar bajarilsa.

1. $X_1 P_1 \leq W$;
2. $X_1=0,1,2,3,\ldots$

(6.2) tengsizlikdan $X_1 \leq \frac{W}{P_1}$ bo'lgani uchun $f_1(W)=\left\{\frac{W}{P_1}\right\}V_1$ bo'ladi.

Bu funksiyaning grafigi 6.1-chizmada ko'rsatilgan. Shunday qilib, muzxona birinchi xil xomashyo bilan to'ldirilganda $f_i(W)$ ning qiymati topildi. Endi muzxonaga x_1 va x_2 xil xomashyolar joylashtirilganda $f_2(W)$ ning maksimum qiymatini topaylik.

Agar ikkinchi xil xomashyodan x_2 dona joylashtirilgan bo'lsa, u vaqtda muzxonaning hajmini hisobga olsak, birinchi xil xomashyodan $W - X_2 P_2$ tonna olish mumkin va uning qiymati $f_1(W - X_2 P_2)$ so'mga teng bo'ladi. Umumiy qiymat esa $X_2 V_2 + f_1(W - X_2 P_2)$ ga teng bo'ladi. Bularga asoslanib, faqat x_2 ning qiymatini topsak bas. Shunday qilib, muzxonaga joylashtirilgan birinchi va ikkinchi xil xomashyolarning maksimum qiymati quyidagicha bo'ladi:

$$f_2(W)=\max\{X_1 V_2 + f_2(W - X_2 P_2)\}.$$

$$0 < X_2 < \left\{\frac{W}{P_2}\right\}$$

Ketma - ket yuqoridagi usul qo'llanilsa,

$$f_N(W)=\max\{X_N V_N + f_{N-1}(W - X_N P_N)\}.$$

$$0 < X_N < \left\{\frac{W}{P_N}\right\}$$

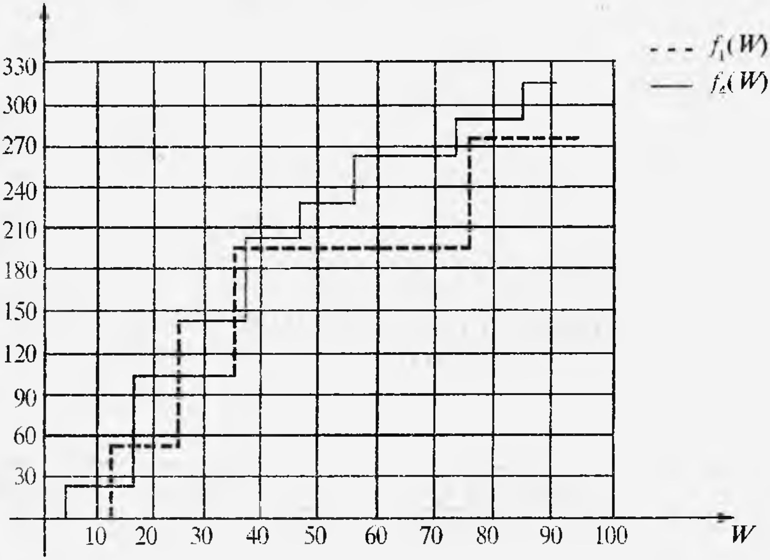
teng bo'ladi.

Bunda $f_N(W)$ muzxonaga joylashtirilgan N xil yuklarning maksimum narxi;

$X_N V_n - N$ – xil joylashtirilgan mahsulotning qiymati;

$f_{N-1}(W - X_N P_N)$ – umumiy og'irligi $W - X_N P_N$ tonnadan ko'p bo'lmaydigan $(N-1)$ xil yuklarning maksimum qiymati.

Bunda $\left\{\frac{W}{P_i}\right\}$ soni $\frac{W}{P_i}$ dan oshmaydigan butun son.



Yuqorida topilgan rekkurrent formulalardan ketma-ket $f_1(W)$, $f_2(W),\dots,f_N(W)$ funksiyalarning qiymatlarini topish mumkin.

6.2-masala. Muzxonasining umumiy hajmi $v = 83m^3$ bo'lgan firmaga hajmlari $p_1 = 24m^3$, $p_2 = 22m^3$, $p_3 = 16m^3$, $p_4 = 10m^3$ bo'lgan konteynerlar bilan yuk olib kelindi.

Bu yuklarning har birining narxi mos ravishda $v_1 = 96$ ming so'm, $v_2 = 85$ so'm, $v_3 = 50$ so'm va $v_4 = 20$ so'mni tashkil etadi. Konteynerlar ochilmasdan saqlanishi kerak. Muzxonaga konteynerlarni shunday joylashtirish kerakki, joylashgan yuklar maksimum qiymatga ega bo'lsin.

Yechish. Masalani yechish uchun $f_N(W)$ ni N ning har xil qiymatida hisoblash kerak:

$f_4(83)$ ni hisoblash uchun $f_4(83 - x_4p_4)$ ni topish kerak. Shuning uchun pog'onama-pog'ona W ning har qanday qiymatlarida har xil yuklar muzxonaga bittama-bitta hisoblab joylashtiriladi.

Natijada 6.1- jadval hosil bo'ladi.

6.1- jadval

W	**$f_1(W)$ — funksiya**	**x_1**
0–23	0	0
24–47	96	1
48–71	192	2
72–87	288	3

Birinchi xil yukni joylashtirish uchun (x_1) 0–23 tonnaga x_1 yo'q. 24–47 tonnagacha yuklar joylashtirilsa x_1 =1 dona bo'ladi va uning qiymati 96 ming so'mni tashkil etadi, 48–71 tonnagacha yuklar joylashtirilsa, x_1=2 dona bo'ladi va uning qiymati 192 ming so'mni tashkil etadi. 72–87 tonnagacha yuklar joylashtirilsa, x_1=3 dona bo'ladi va uning qiymati f = 288 ming so'mni tashkil etadi.

Endi $f_2(W)$, $f_3(W)$ va $f_4(W)$ funksiyalar uchun jadvallar tuzamiz:

6.2- jadval

W	**$f_2(W)$ – funksiya**	**x_2**
0–21	0	0
22–23	85	1
24–25	96	0
46–47	181	1
48–49	192	0
70–71	277	1
72–87	288	0

6.3- jadval

W	**$f_3(W)$ – funksiya**	**x_3**
0–15	0	0
16–21	50	1
22–23	85	0
24–37	96	0
38–39	135	1
40–45	146	1
46–47	181	0
48–63	192	0
64–69	242	1
70–71	277	0
72–78	288	1

6.4- jadval

W	**$f_4(W)$ —funksiya**	**x_4**
0–9	0	0
10–15	20	1
16–21	50	0
22–23	85	0
24–33	96	0
34–37	116	1
38–39	135	0
40–45	146	0
46–47	181	0
48–57	192	0
58–63	212	1
64–69	242	0
70–71	277	0
72–81	288	0
81–87	308	1

Quyidagi

$$f_2(W)=\max\{X_1V_2+f_2(W-X_2P_2)\}$$

$$0<X_1<\left\{\frac{W}{P_1}\right\}$$

tenglikdan foydalanib. $f_2(W)$ funksiyani hisoblanish yo'lini ko'rsataniz. x_2 miqdor 0,1,2,3 qiymatlar qabul qilishi mumkin bo'lgani uchun 6.1- jadvaldan foydalanib, $\{X_2\cdot 85+f_1(70-x_2\cdot 22)\} = =f_2(W)$ funksiya hisoblanadi:

$$x_2=0;\qquad f_1(70)=192.\qquad f_2(W)=192;$$
$$x_2=1;\qquad f_2(70)=85+f_1(48)=277;$$
$$x_2=2;\qquad f_2(70)=2\cdot 85+f_1(26)=266;$$
$$x_3=3;\qquad f_2(70)=3\cdot 85+f_1(4)=255.$$

Hisoblash shuni ko'rsatdiki, $x_2=1$ bo'lganda $f_2(70)=277$ eng katta qiymatga ega. Xuddi yuqoridagi kabi $f_3(W)$ va $f_4(W)$ funksiyalarning qiymatini hisoblab, 6.3, 6.4- jadvallarni tuzish mumkin.

6.4- jadvalga asosan $f_4(83)=308$ ming so'mga teng. Demak, 4 xil konteynerdan $x_4=1$ donasini muzxonaga joylashtirish mumkin. $P_4=10$ tonna bo'lgani uchun muzxonaga yana $83-10=73$ tonna yuk joylashtirish talab etiladi. 6.3- va 6.2- jadvallardan ko'rinib turibdiki, $W=73$ bo'lganda yukning soni $x_4=0$; $x_1=0$ donaga teng. 6.1- jadvaldan ko'rinadiki, $x_3=3$ dona konteyner joylashtirish mumkin. Demak,

$$f_4\max=96\cdot x_1+20\cdot x_4=96\cdot 3+20\cdot 1=288+20=308 \text{ ming so'm.}$$

3-§. Dinamik programmalashtirish usullarining iqtisodiy masalalarni yechishdagi tahlili. Optimal rejalashtirish masalasi

Faraz qilaylik, viloyatda n ta korxonani o'z ichiga olgan sanoat birlashmasining T yillik rejasini tuzish masalasi o'rtaga qo'yilgan bo'lsin. Rejalashtirilayotgan T davrning boshida birlashmaga K_0 miqdorda mablag' ajratilgan. Bu mablag' n ta korxonaga taqsimlanadi. Taqsimlanayotgan mablag' korxonalarda to'la yoki qisman ishlatilishi va shunga qarab ma'lum miqdorda foyda (daromad) olish mumkin. Keyingi qadamlarda mablag'lar korxonalararo qayta taqsimlanishi mumkin.

Natijada quyidagi masala hosil bo'ladi. Korxonalararo K mablag'ni qadam-baqadam shunday taqsimlash va qayta taqsimlash kerakki, birlashmaning T yil davomida olgan daromadlar yig'indisi maksimum qiymatga ega bo'lsin.

Har bir ishlab chiqarish boshqariluvchi jarayon hisoblanadi va bu jarayon ajratilayotgan xomashyo, mablag', uskunalarni yangilash kabi muammolarga bog'liqdir. Bu muammolarni hal qilishni qadam-baqadam tashkil qilishga boshqarish deyiladi.

Demak, bosqichdagi boshqarish

$$U^t = (u_1^t, u_2^t, ..., u_n^t)$$

vektor funksiya kabi ifodalanadi. Bunda U_j^t $j(j=\overline{1,n})$ korxona uchun qadamning boshida ajratilgan xomashyo, mablag' va hokazolarning miqdorini ko'rsatuvchi vektor.

Jami korxonalar birlashmasining T davr ichida boshqarishini $U = (u^1, u^2, ..., u^T)$ vektor funksiya orqali ifodalash mumkin.

Birlashmadagi korxonalarning taraqqiyot dinamikasini ifodalash uchun ularning holat darajasini ko'rsatuvchi $X_i = (x_i^1, x_i^2, ..., x_i^T)$ vektorni kiritiladi, bunda X_i^t $t(t=\overline{1,T})$ qadam boshida korxonalarning moddiy va moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatuvchi ko'rsatkich bo'lib, uning tarkibiy qismlari korxonadagi mehnat resurslari, asosiy fondlar moliyaviy ahvol darajasini ko'rsatadi, ya'ni

$$X_i^t = (x_{i1}^t, x_{i2}^t, ..., x_{ik}^t).$$

Shunday qilib, yuqoridagidan xulosa qilib aytish mumkinki, boshqarish vektori U^t korxonalarning t qadamning boshidagi holatini ko'rsatuvchi vektordir, ya'ni

$$U^t = U^t(X^{t-1}).$$

Demak, sistemaning boshlang'ich holati X_0 berilgan bo'ladi. Maqsadli funksiya sifatida korxonalar birlashmasining T davr ichida oladigan daromadlar yig'indisini ifodalovchi

$Z = \sum_{t=1}^{T} Z^t \to \max$ funksiya kiritiladi.

Har bir t qadamning boshida sistemaning X^t holat darajasiga va U^t boshqarish vektoriga ma'lum bir chegaralovchi shartlar qo'yiladi. Bu shartlar birlashmasi G bilan belgilanadi va uni mumkin bo'lgan boshqarishlar to'plami deb ataladi. Natijada quyidagi dinamik programmalashtirish masalasiga ega bo'lamiz:

$$U^t \in G \tag{6.1}$$

$$Z = \sum_{i=1}^{T} Z^t \to \max . \tag{6.2}$$

Hosil bo'lgan (6.1), (6.2) modelga ishlab chiqarishning dinamik modeli deyiladi.

6.3-masala. Katta talabga ega bo'lgan mahsulotni ishlab chiqarish maqsadida korxonalarga kapital qurilish uchun S ming so'mlik mablag' ajratildi. Bu mablag'dan i korxona X_i ming so'm ishlatganda $f_i(x_i)$ (egri chiziqli funksiya) ko'rinishdagi o'sishga ega bo'ladi. Kapital qurilishga ajratilgan mablag'ni korxonalar o'rtasida shunday taqsimlangki, korxonalar ishga tushganda maksimal daromad beruvchi mahsulotlar ishlab chiqarish qobiliyatiga ega bo'lsin.

Yechish. Masalaning matematik modelini tuzamiz. Demak, quyidagi shartlarda

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = S.$$

$$X_i \geq 0, \ (i = \overline{1,n})$$

$F = \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$ funksiyaning eng katta qiymatini topish kerak.

Agar $F = \sum_{i=1}^{n} f(X_i)$ funksiya qavariq yoki botiq funksiya bo'lsa, u vaqtda bu masalani egri chiziqli programmalashtirishdagi Lagranjning ko'paytmalar usulini qo'llab yechish mumkin. Agar F funksiya qavariq yoki botiq bo'lmasa, u vaqtda bu masala dinamik programmalashtirish usulidan foydalanib yechiladi.

Har bir korxonaga ajratilgan mablag' qadam-baqadam qanday samara berishini hisoblab chiqiladi va bularning ichidan optimal strategiya tanlab olinadi.

6.4-masala. Ishlab chiqarish jarayonini tashkil qilish uchun korxonani yangi uskunalar bilan jihozlash kerak. Uskunalarning ish unumdorligi vaqt o'tishiga bog'liq bo'lib, unga ketadigan xarajatlar 6.5- jadval ko'rinishida berilgan.

6.5- jadval

	Uskunalarni ishlash vaqti (yil hisobida)					
	0	1	2	3	4	5
Bir yilda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning narxi (qiymati) R(y) (ming so'm hisobida)	80	75	65	60	60	55
Uskunalarni ta'mirlash va saqlash uchun ketadigan xarajatlar Z(й) (ming so'm hisobida)	20	25	30	35	45	55

Korxonani yangi uskunalar bilan jihozlash uchun 40 ming so'm ketganini hisobga olib, uskunalarning xizmatini o'taganlarini hisobdan chiqarishning, besh yillik rejasini shunday tuzingki, korxona maksimum umumiy daromad olsin.

Yechish. Bu masalani yechish uchun boshqaruv jarayonini ikkiga bo'lib ko'ramiz:

a) U_1 – uskunalarning ishlab chiqarish qobiliyatini saqlovchi yechimlar to'plami bo'lsin;

b) U_2 – ishlash qobiliyati tamom bo'lgan uskunalarni almashtiruvchi yechimlar to'plami bo'lsin.

Birinchi bosqichda beshinchi besh yillikning boshidan, birinchi yilning boshiga qadar uskunalarning holatini shartli optimal boshqaruvchi yechimlar to'plami topiladi. Ikkinchi bosqichda ishlab chiqarish harakatini birinchi yilning boshlanish qismidan, beshinchi yilning boshlanish qismigacha, har yil uchun tuzilgan shartli optimal yechimlarga asosan uskunalarni almashtirish besh yillik optimal rejasini tuzamiz.

Shartli optimal yechimlar to'plamini tuzish uchun oldin bu masalaga moslashtirib, Bellmanning funksional tenglamasi tuziladi.

Har bir yil boshida (K- yil, $K=\overline{1,5}$) ikkita holatdan bittasi bo'ladi: uskunalar kerakmi yoki yo'qmi?

U vaqtda k- (k=1, 2, 3, 4, 5) yilda korxonaning daromadi quyidagicha bo'ladi:

$$F_k\left(Y^{(k)},\ U_k\right)_k=\begin{cases} R\left(Y^{(k)}\right)-Z\left(Y^{(k)}\right), & U_1 \\ R\left(Y^{(k)}=0\right)-Z\left(Y^{(k)}=0\right)-C_n, & U_2 \end{cases}$$ bo'lganda,

bunda $Y^{(k)}$ — uskunalarning k yil boshidagi ishlagan yillar soni (yoshi), U_k — k- yil boshidagi boshqaruv vektori; S_n — yangi uskunalarning qiymati, k=1,2,..., 5.

Shunday qilib, bu holda Bellmanning funksional tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$F_k\left(Y^{(k)}\right)=\max_Y\begin{cases} R\left(Y^{(k)}\right)-Z\left(Y^{(k)}\right)+F_{k+1}\left(Y^{(k+1)}\right), \\ R\left(Y^{(k)}=0\right)-Z\left(Y^{(k)}=0\right)-C_n+F_{k+1}\left(Y^{(k)}=1\right). \end{cases} \quad (6.1')$$

Endi (6.1') tenglamani qo'llab, dastlabki masalaning yechimi topiladi. Besh yillikning boshida hamma uskunalar yangi bo'lgani uchun $Y^{(1)}=0$ bo'ladi. Beshinchi yilning boshlanishida esa uskunalardan foydalanish muddati 1, 2, 3, 4 bo'lishi mumkin. Shuning uchun berilgan sistemaning mumkin bo'lgan holati quyidagicha bo'ladi:

$$Y_1^{(5)}=1, \quad Y_2^{(5)}=2, \quad Y_3^{(5)}=3, \quad Y_4^{(5)}=4 .$$

Bu holatlarning har biriga mos ravishda shartli optimal yechimlari va ularga mos bo'lgan $F_5\left(Y^{(5)}\right)$ funksiyaning qiymatlari aniqlanadi.

Endi (6.1) tenglamadan foydalanib, $F_5\left(Y^{(k+1)}\right)=0$ ni hisobga olgan holda quyidagi topiladi:

$$F_5\left(Y^{(5)}\right)=\max\begin{cases} R\left(Y^{(5)}\right)-Z\left(Y^{(5)}\right), \\ R\left(Y^{(5)}=0\right)-Z\left(Y^{(5)}=0\right)-C. \end{cases} \quad (6.2')$$

(6.2') formulaga $Y^{(5)}=1$ va 6.5-jadvaldagi berilganlar qo'yilsa quyidagi hosil bo'ladi:

$$F_5\left(Y_1^{(5)}\right)=\max\begin{Bmatrix} R\left(Y_1^{(5)}=1\right)-Z\left(Y_1^{(5)}=1\right) \\ R\left(Y_1^{(5)}=0\right)-Z\left(Y_1^{(5)}=0\right)-C_n \end{Bmatrix}=\max\begin{Bmatrix} 75-25 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix}=50.$$

Demak, bu holda shartli optimal yechim $U^0=U_1$ ga teng.

Xuddi shunday hisoblarni 5- yil boshida boshqa holatlar uchun ham yuqoridagi kabi bajariladi:

$$F_5(Y_2^{(5)})=\max\begin{Bmatrix} 65-30 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix}=35, U^0=U_1,$$

$$F_5(Y_3^{(5)})=\max\begin{Bmatrix} 66-35 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix}=25, U^0=U_2,$$

$$F_5(Y_4^{(5)})=\max\begin{Bmatrix} 60-45 \\ 80-20-40 \end{Bmatrix}=20, U^0=U_3.$$

Hosil bo'lgan bu qiymatlarni quyidagi jadval ko'rinishida yozish mumkin.

6.6- jadval

Uskunalardan foydalanish muddati (yil)	**$F_5(U^{(5)})$ funksiyaning qiymatlari (ming so'm hisobida)**	**Shartli optimal yechimlar U^0**
1	50	U^0
2	35	U_1
3	25	U_2
4	20	U_3

To'rtinchi yilning boshlanishida uskunalardan foydalanish muddati 1,2,3 bo'lishi mumkin. Shuning uchun berilgan sistemaning mumkin bo'lgan holati quyidagicha bo'ladi:

$$Y_1^{(4)}=1, Y_2^{(4)}=2, Y_3^{(4)}=3.$$

Bu holatlarning har biriga mos ravishda shartli optimal yechimlar to'plamini va ularga mos bo'lgan $F_n(Y^{(4)})$ uskunaning qiymatlarini yuqoridagi kabi 6.5- va 6.6- jadvaldan foydalanib hisoblaymiz:

$$F_4(Y_1^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} R(Y^{(4)}=1) - Z(Y^{(4)}=1) + F_5(Y^{(5)}=2) \\ R(Y^{(4)}=0) - Z(Y^{(4)}=0) - C_n + F_5(Y^{(5)}=1) \end{Bmatrix} =$$

$$= \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 35 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 85, U^0 = U_1.$$

$$F_4(Y_2^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70, U^0 = U_2,$$

$$F_4(Y_3^{(4)}) = \max\begin{Bmatrix} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70, U^0 = U_2.$$

Hosil bo'lgan natijalarga asoslanib, quyidagi jadvalni tuzamiz.

6.7- jadval

Uskunalardan foydalanish muddati (yil)—$Y^{(4)}$	**$F_4(Y^{(4)})$ funksiyaning qiymati(ming so'm hisobida)**	**Shartli optimal yechimlari U^0**
1	85	U_1
2	70	U_2
3	70	U_3

Uchinchi yilning boshida uskunalardan foydalanish muddati 1,2 bo'lishi mumkin. Shuning uchun berilgan sistemaning mumkin bo'lgan holati $U_1^{(3)} = 1, U_2^{(3)} = 2$ bo'ladi. Bu holatlarning har biriga mos ravishda shartli optimal yechimlar to'plamini va ularga mos bo'lgan $F_3(Y^{(3)})$ funksiyaning qiymatlari yuqoridagi kabi (6.1/) formuladan foydalanib hisoblanadi:

$$F_3(Y_1^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} R(Y^{(3)}=1) - Z(Y^{(3)}=1) + F_4(Y^{(4)}=2), \\ R(Y^{(3)}=0) - Z(Y^{(3)}=0) - C_n + F_4(Y^{(4)}=1. \end{Bmatrix};$$

$$F_3(Y_2^{(3)}) = \max\begin{Bmatrix} R(Y^{(3)}=2) - Z(Y^{(3)}=2) + F_4(Y^{(4)}=3, \\ R(Y^{(3)}=0) - Z(Y^{(3)}=0) - C_n + F_4(Y^{(4)}=1) \end{Bmatrix}.$$

6.5- va 6.6- jadvaldagi berilganlardan foydalanib, quyidagilar topiladi:

$$F_3(Y_1^{(3)}) = \max\begin{cases}75-25+70\\80-20-40+85\end{cases} = 120, U^0 = U_1;$$

$$F_3(Y_2^{(3)}) = \max\begin{cases}65-30+70\\80-20-40+85\end{cases} = 105, U^0 = U_2.$$

Oxirgi tenglikdan ko'rinib turibdiki, $F_3(U_2^{(3)}) = 105$ da boshqaruv shartli optimal yechimlardan Y_1 yoki Y_2 qaysisini olmaylik uskunalarni ishlash muddati besh yillikning uchinchi yili boshida ishlash muddati 2 yilni tashkil qilgani uchun mehnat unumdorligi bir xil bo'ladi. Hosil bo'lgan natijalar 6.8- jadvalga yoziladi.

6.8- jadval

Uskunalarning ishlash muddati (yil hisobida)	$F_3(Y^{(3)})$funksiyaning qiymati (ming so'm hisobida)	Shartli optimal yechimlar
1	120	U_1
2	10	U_2

Besh yillikning ikkinchi yilining boshida uskunalardan foydalanish muddati 1 yil bo'ladi, $Y^{(2)}=1$. Bu yerda uskunani almashtirish kerakmi degan savol tug'iladi. Bu savolga javob berish uchun quyidagilar hisoblaniladi:

$$F_2(U_2^{(2)}) = \max\begin{cases}R(Y^{(2)}=1) - Z(Y^{(2)}=1) + F_3(Y^{(3)}=2)\\R(Y^{(2)}=0) - Z^{(3)}(Y^{(2)}=0) - C_n + F_3(Y^{(3)}=1)\end{cases} =$$

$$= \max\begin{cases}75-25+105\\80-20-40+120\end{cases} = \max\begin{cases}155\\144\end{cases} = 155, U_1.$$

Bu natijaga asoslanib 6.9- jadval tuziladi.

6.9- jadval

Uskunalarning ishlash muddati (yil hisobida) $Y^{(2)}$ yil	$F_3(Y^{(2)})$funksiyaning qiymati (ming so'm hisobida)	Shartli optimal yechimlar
1	155	U_1

Masalaning shartiga ko'ra besh yillikning boshida uskunalarni yangi uskunalar bilan almashtirish shart emas. Demak, boshqaruv vektori yoki shartli optimal yechim U_1 bo'ladi. Korxonaning daromadi esa

$$F_1(Y_1^{(1)}) = R(Y_2^{(1)} = 0) = 0) - Z(Y_1^{(1)} = 1) = 80 - 20 + 155 = 215 \text{ so‘m.}$$

Demak, korxonaning maksimum daromadi $F_1(Y^{(1)})$=215 so'mni tashkil qiladi. Shunday qilib, korxona uskunalarini almashtirishning optimal rejasini 6.10- jadval orqali ifodalash mumkin.

6.10- jadval

Uskunalarning ishlash yillari					
	1 yilda	2 yilda	3 yilda	4 yilda	5 yilda
Masalaning optimal yechimlari	Uskunalarni almashtirish kerak emas	Uskunalarni almashtirish kerak emas	Uskunalarni almashtirish kerak	Uskunalarni almashtirish kerak emas	Uskunalarni almashtirish kerak emas

6.5-masala. Katta ehtiyojga ega bo'lgan mahsulotni ishlab chiqarish uchun uchta korxona kapital qurilishiga S=700 ming so'm mablag' ajratilgan. Bu mablag'dan uchta korxonaga mos x_i ravishda x_1, x_2, x_3 ming so'mdan ishlatganda kapital qurilish hajmining o'sishiga mos ravishda ishlab chiqarilgan mahsulotlarning hajmi o'sishi $F_i(x_1)$ so'mni tashkil qiladi. Kapital qurilishga ajratilgan mablag'ni korxonalar o'rtasida shunday taqsimlangki, korxonalar ishga tushganda maksimum daromad beruvchi mahsulotlar ishlab chiqarish qobiliyatiga ega bo'lsin. x_1 va $F_i(x_1)$ miqdorlar 6.11-jadvalda berilgan.

6.11- jadval

Kapital qurilishga ajratilgan mablag'ning hajmi x_i, (ming so'm)	**Kapital qurilishga ajratilgan mablag' hajmiga mahsulotlar ishlab chiqarishning o'sish ko'rsatkichi $F_i(x_i)$ (ming hisobida)**		
	1-korxona	**2-korxona**	**3-korxona**
0	0	0	0
10	30	50	40

200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Yechish. Masalani yechish uchun Bellmanning o'zaro bog'lanish rekkurent formulalari tuziladi. Bu masala uchun o'zaro bog'lanishni quyidagi funksional tenglamalar ko'rinishida yozish mumkin:

$$\varphi_1(x) = \max_{0 \le x_j \le x}\left[F_1(x_1)\right];$$

$$\varphi_2(x) = \max_{0 \le x_2 \le x}\left[F_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)\right]; \qquad (6.3)$$

$$\varphi_{n-1}(x) = \max_{0 \le x_{n-1} \le x}\left[F_{n-1}(x_{n-1}) + \varphi_{n-2}(x - x_n)\right].$$

(6.3) formulada $\varphi_i(x)(i = \overline{1, n-1})$ uchta korxona 0 taqsimlangan x ming so'm kapital mablag' natijasida o'sish sur'ati(ko'rsatkichi). Shuning uchun $f_n(x)$ ning qiymatini x=S=700 ming so'm deb olamiz. Chunki uchta korxona kapital qurilishiga S=700 ming so'm ajratilgan. (6.3) formulani 6.11- jadval yordamida hisoblab chiqilsa, u vaqtda birinchi korxona uchun ajratilgan shartli optimal kapital mablag'ni aniqlash uchun $\varphi_i(x)$ ni x=0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 va 700 qiymatlarida 6.11- jadvalni qo'llab hisoblab chiqiladi:

1. x=0, $\varphi_1(0)$=0. O'sish yo'q, ya'ni $X_1^0 = 0$.

2. x=100, $\varphi_2(100) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 100}\{0, 30\} = 30, X_2^0 = 100.$

3. x=200, $\varphi_1(200) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 200}\{0, 30, 50\} = 50, X_3^0 = 200.$

4. x=300, $\varphi_1(300) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 300}\{0, 30, 50, 90\} = 90, X_4^0 = 300.$

5. x=400, $\varphi_1(400) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 400} \{0,30,50,90,110\} = 110, X_5^0 = 400.$

6. x=500, $\varphi_1(500) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 500} \{0,30,50,90,110,170\} = 170, X_6^0 = 500.$

7. x=600, $\varphi_1(600) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 600} \{0,30,50,90,110,170,180\} =$

$= 180, X_6^0 = 600.$

8. x=700, $\varphi_1(700) = \max\limits_{0 \le x_1 \le 700} \{0,30,50,90,110,170,180,210\} =$

$= 210, X_1^0 = 700.$

Hisoblash natijalari va shartli optimal yechimlar 6.12- jadvalga yoziladi.

6.12- jadval

Birinchi korxonaga ajratilgan x kapital mablag'ning hajmi (ming so'm)	**φ_1(x) maksimum o'sish ko'rsatkichi (ming so'm)**	**Birinchi korxonaga ajratilgan shartli optimal mablag' (ming so'm)**
0	0	0
100	30	100
200	50	200
300	90	300
400	110	400
500	170	500
600	180	600
700	210	700

6.11- va 6.12- jadvaldagi natijalarga asoslanib, ikkinchi korxonaga ajratilgan kapital mablag'ning shartli optimal hajmini hisoblash uchun $\varphi_2(x) = \max\limits_{0 \le x_2 \le x} [F_2(x_2) + \varphi_1(x - x_2)]$ ni x=0, 100, 200, 300, 400, 500, 600 va 700 qiymatlarida hisoblanadi:

1. x=0, $\varphi_2 = 0, X_1^0 = 0;$

2. $x=100, \varphi_2(100) = \max\limits_{0\le x_2 \le 100} \begin{Bmatrix} 0+50 \\ 50+0 \end{Bmatrix} = 50, X_2^0 = 100;$

3. $x=200, \varphi_2(200) = \max\limits_{0\le x_2 \le 200} \begin{Bmatrix} 0+50 \\ 50+30 \\ 80+0 \end{Bmatrix} = 80, X_3^0 = 100;$

4. $x=300, \varphi_2(300) = \max\limits_{0\le x_2 \le 300} \begin{Bmatrix} 0+90 \\ 50+50 \\ 80+30 \\ 90+0 \end{Bmatrix} = 110, X_4^0 = 200;$

5. $x=400, \varphi_2(400) = \max\limits_{0\le x_2 \le 400} \begin{Bmatrix} 0+110 \\ 50+90 \\ 80+50 \\ 90+30 \\ 150+0 \end{Bmatrix} = 150. X_5^0 = 400;$

6. $x=500, \varphi_2(500) = \max\limits_{0\le x_2 \le 500} \begin{Bmatrix} 0+170 \\ 50+110 \\ 80+90 \\ 90+50 \\ 150+30 \\ 190+0 \end{Bmatrix} = 190, X_6^0 = 500;$

7. $x=600, \varphi_2(600) = \max\limits_{0\le x_2 \le 600} \begin{Bmatrix} 0+180 \\ 50+170 \\ 80+110 \\ 90+90 \\ 150+50 \\ 190+30 \\ 210+0 \end{Bmatrix} = 220, X_7^0 = 100;$

8. x=700, $\varphi_2(700) = \max_{0 \le x_2 \le 700} \begin{Bmatrix} 0+210 \\ 50+80 \\ 80+170 \\ 90+110 \\ 150+90 \\ 210+30 \\ 22+0 \end{Bmatrix} = 250, X_8^0 = 200.$

Olingan natijalarni va korxonaga ajratiladigan kapital mablag'ning shartli optimal hajmlari 6.13- jadvalga yoziladi.

6.13- jadval

Ikkita korxonaga ajratiladigan kapital mablag' hajmi, x,(ming so'm)	**φ_2(x) maksimum o'sish ko'rsatkichi (ming so'm)**	**Ikkinchi korxonaga ajratiladigan shartli optimal mablag', x_2^0, (ming so'm)**
0	0	0
100	50	100
200	80	100
300	110	300
400	150	400
500	190	500
600	220	100
700	250	200

6.11- va 6.13- jadvalga asoslanib,

$\varphi_3(x) = \max_{0 \le x_3 \le x} [F_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)]$ funksiyaning qiymatlari hisoblanadi. Bu yerda korxonalar soni n=3 bo'lgani uchun hisoblash faqat x=700 ming so'm uchun bajariladi:

$$X = 700,\ \varphi_3(700) = \max_{0 \le x_3 \le 700} \begin{Bmatrix} 0+250 \\ 40+220 \\ 50+190 \\ 100+150 \\ 120+110 \\ 180+80 \\ 220+50 \\ 240+0 \end{Bmatrix} = 270,\ X_1^0 = 600.$$

Demak, maksimum o'sish ko'rsatkichi $\varphi(700)=270$ ming so'mni tashkil qiladi. Bu ko'rsatkichga erishish mumkin, faqatgina uchinchi korxona 600 ming so'm, birinchi va ikkinchi korxonalarga esa 100 ming so'm kapital mablag' ajratilsa. 6.13- jadvaldan ko'rinib turibdiki, ikkinchi korxonaga 100 ming so'm ajratish kerak.

Topshiriqlar

Dinamik programmalashtirish usullarini qo'llab, quyidagi 6.6-masalani yeching.

6.6-masala. To'rtta korxona qurish uchun 200 ming so'm sarmoya ajratilgan. Har bir korxona o'ziga ajratilgan sarmoyaning miqdoriga bog'liq ravishda turli miqdordagi daromadga erishadi. Bu daromadlar 6.14- jadvalda ko'rsatilgan.

6.14- jadval

Korxonalarga ajratiladigan sarmoya miqdori (ming so'm)	**Korxonalarning daromadi**			
	$Z_1(x)$	$Z_2(x)$	$Z_3(x)$	$Z_4(x)$
0	0	0	0	0
40	15	14	17	13
80	28	30	33	35
120	60	55	58	57
160	75	73	73	76
20	90	85	92	68

Mavjud sarmoyalarni korxonalararo shunday taqsimlash kerakki, natijada hamma korxonalarning olgan daromadlarining yig'indisi maksimal bo'lsin.

Tayanch iboralar
Dinamik programmalashtirish, optimal prinsip, shartli optimal, shartli optimal hajm.

Takrorlash uchun savollar
1. Dinamik programmalashtirish deb nimaga aytiladi?
2. R.Bellmanning optimallik prinsipi deb nimaga aytiladi?
3. Bosqichma-bosqich rejalashrtirish qanday ahamiyatga ega?

VII BOB
CHIZIQSIZ PROGRAMMALASHTIRISH

1-§. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarining iqtisodiy va geometrik talqini

Faraz qilaylik, bizga yuklarni optimal joylashtirish masalalari berilgan bo'lsin. Bu vaqtgacha bunday masalalarni yechganda har bir ishlab chiqarilgan mahsulot maksimal bo'lishi uchun ishlab chiqarish xarajatlarini o'zgarmas deb hisoblagan edik. Bundan keyin bu xarajatlarni o'zgaruvchi (o'zgarmas emas) deb qaraymiz. Ishlab chiqarish xarajatlari ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmiga proporsional emas. Ishlab chiqarilgan mahsulotlar hajmi x_i -korxona uchun x_i, korxona xarajatlari esa $f_i(x_i)$ funksiyaga teng bo'ladi. Ishlab chiqarish quvvati esa har xil bo'lishi mumkin (butun sonli, kasr sonli va h.k.).

Natijada ushbu iqtisodiy masala kelib chiqadi.

Quyidagi shartlar bajarilganda:

1. $X_i \geq 0$ (musbat miqdorda mahsulotlar tashilgan);

2. $X_i = \sum_{j=1}^{m} x_{ij}$ (ishlab chiqarilgan mahsulotlar to'la iste'molchilarga yetkazilgan);

3. $\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = B_i$ j=1 m (har bir iste'molchi eng kamida ozining talabini qondiruvchi mahsulotlar hajmini oladi);

$F(x) = \sum_{i=1}^{n} f_1(x_i) + \sum_{i=1}^{n} C_{ij}(x_{ij})$ $F(x)$ funksiyaning minimumini toping.

$F(x)$ maqsad funksiya va yuqoridagi shartlardan birortasi chiziqsiz bo'lsa, bunday masalalar chiziqsiz programmalashtirish masalalariga kiradi.

Shunday qilib, chiziqsiz programmalashtirishning masalasi ta'rifini quyidagicha yozish mumkin:

Quyidagi shartlar bajarilganda

$$\begin{cases} q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) <= b_j, (i = \overline{1,k}) \\ q_j(x_1, x_2, \dots, x_n) <= b_j, (j = \overline{k+1, m}) \end{cases} \quad (7.1)$$

$$F(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (7.2)$$

$F(X)$ funksiyaning maksimum (minimum) qiymatini toping. Bunda f va q_i n – o'zgaruvchili funksiyalar, b_i – berilgan sonlar, $\{\geq, \leq, =\}$ belgilardan masalaning shartiga ko'ra faqat bittasi bo'ladi va shu bilan bir qatorda, turli munosabatlarga turli belgilar mos bo'lishi mumkin.

(7.1) va (7.2) shartlarda chegaraviy shartlar qatnashmasa, u vaqtda bu masalaga shartsiz optimallashtirish masalasi deyiladi. Chegaraviy shartlar (7.1) shartga kiritilgan bo'lishi mumkin yoki bo'lmasa (7.1), (7.2) masala quyidagicha berilgan bo'lishi mumkin:

$$q_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b_i, (i = \overline{1,m}); \quad (7.3)$$

$$x_j \geq 0. \quad (j = \overline{1,n}); \quad (7.4)$$

$$F(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \to \max(\min) \quad (7.5)$$

Noma'lumlarning manfiy emaslik sharti (7.4) qatnashmagan masalalarga, bu shartlarni osonlik bilan kiritish mumkin.

E_n Evklid fazosida (7.1) sistema masalaning mumkin bo'lgan yechimlari sohasini ifodalaydi.

Agar (7.1), (7.2) masalaning mumkin bo'lgan yechimlari sohasi aniqlangan bo'lsa, u vaqtda bu sohaning eng yuqori (eng chetki) yoki bo'lmasa eng quyi nuqtalari $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = R$ giperbolik sirtning (sath tekisligining) o'tgan nuqtalariga mos keladi.

Bu nuqtalar yechimlar sohasini chegara nuqtalarida yoki bo'lmasa sohaning ichki nuqtalarida ham joylashgan bo'lishi mumkin.

Chiziqsiz programmalashtirish masalalarining geometrik talqini quyidagi bosqichlardan iborat:

1. (7.1) masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi aniqlanadi (agar bu yechimlar sohasi bo'sh to'plamni tashkil qilsa, u vaqtda masala yechimga ega emas).

2. $f(x_1, x_2, \ldots, x_l)=R$ giperbolik sirt chiziladi.

3. Eng yuqori va eng quyi giperbolik sath sirti aniqlanadi yoki bo'lmasa $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ yuqoridan (quyidan) chegaralanmagani aniqlanadi (bu holda masala yechimga ega emas).

4. Giperbolik sath tekisligi o'tgan eng chetki, eng quyi urinib o'tgan nuqta aniqlanadi va bu nuqtada $F(x)=f(x_1, x_2, \ldots, x_l)$ qiymati aniqlanadi.

7.1-masala. Quyidagi shartlar

$$\left.\begin{array}{l} 2x_1 + 3x_2 \le 24 \\ x_1 + 2x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 24 \\ x_2 \le 4 \end{array}\right| \tag{7.6}$$

$$x_1, x_2 \ge 0 \tag{7.7}$$

bajarilganda

$$F(x)=x_2-x_1^2+6x_1 \tag{7.8}$$

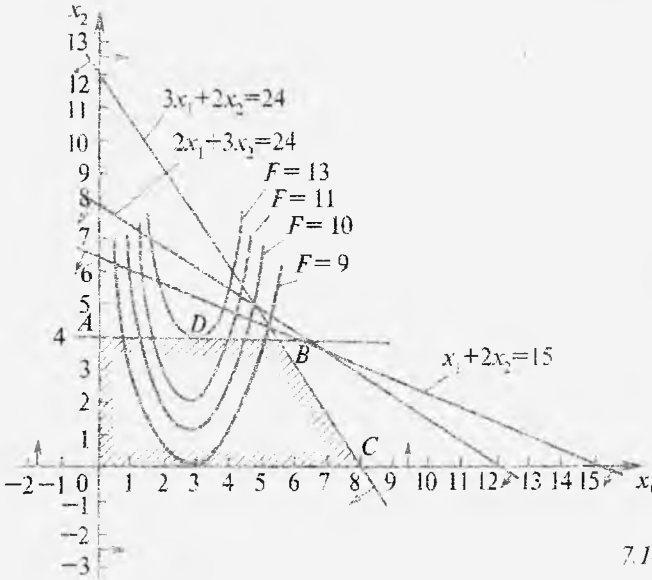
funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. Oldin (7.6) sistemaning aniqlanish sohasi topiladi (7.1-chizma). Bu sistemaning mumkin bo'lgan yechimlari sohasi *OABC* ko'pburchak bo'ladi. *OABC* ko'pburchakning qaysi nuqtasida (7.8) funksiya maksimum qiymat qabul qilishini izlaymiz. Buning uchun $F=k=x_2-x_1^2+6x_1$ sath egri chizig'idagi k ga qiymatlar berib chizamiz va (7.8) egri chiziq paraboladan iborat bo'lib, k ga o'sib borish tartibida qiymatlarni: 9,10,11,13 bersak. bu parabola *OX* o'qidan borgan sayin yuqoriga ko'tariladi. Natijada *OABC* ko'pburchagining D nuqtasida urinadi. Demak, D nuqtada $F(x)$ funksiya maksimum qiymatga ega bo'ladi:

$$\left|\begin{array}{l} x_2 - x_1^2 + 6x_1 = 13 \\ x_2 = 4 \end{array}\right.$$

Bu sistemani yechib, D nuqta topiladi $D(3,4)$:

$$F_{D\max}=F_{D\max}=x_2-x_1^2+6x_1=4-9+6\cdot 3=13$$



7.1-chizma.

7.2-masala. Quyidagi shartlar

$$\left.\begin{array}{l} 3x_1+2x_2\le 7 \\ 10x_1-x_2\le 8 \\ -18x_1+4x_2\le 12 \end{array}\right\} \qquad (7.9)$$

$$x_1, x_2\ge 0 \qquad (7.10)$$

bajarilganda

$$F(x_1,x_2)=(x_1-3)^2+(x_2-4)^2$$

funksiyaning maksimum va minimum qiymatlarini toping.

Yechish: (7.9) – (7.10) masalaning mumkin bo‘lgan yechimlari sohasi ABC uchburchakdan iborat. Maqsad funksiyani $F(x_1,x_2)=k$ deb olsak,

$(x_1-3)^2+(x_2-4)^2=k$ aylana hosil bo‘ladi.

Bu aylananing markazi $E(3,4)$ nuqtada bo‘lib, radiusi $R=\sqrt{k}$ teng.

Agar k ga qiymatlar bersak, $F(x_1,x_2)$ funksiyaning qiymatlari k o'sganda o'sadi (k kamaysa $F(x_1,x_2)$ kamayadi) va D nuqtada maqsad funksiya yechimlari sohasi ABC uchburchakka urinib, urinish nuqtasida minimal qiymatga ega bo'ladi. D nuqta koordinatalarini topish uchun quyidagi to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsentlarining tengligidan foydalaniladi:

$10x_1-x_2=8$ va aylanaga D nuqtada o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziq

$$2(x_1-3)+2(x_2-4)\,x_2'=0.$$

Bundan

$$x_2'=-(x_1-2)/(x_2-4)$$

$x_2=10x_1+8$, $k=10$, $x_2'=k=10$ bo'lgani uchun quyidagi sistemani yechib,

$$\begin{cases} x_1+x_2=43, \\ 10x_1-x_2=8. \end{cases}$$

$E(x_1^*,x_2^*)$ nuqtaning koordinatalari topiladi:

$$x_2^*=123/101,\ \ x_2^*=422/101\ .$$

Shunday qilib, $F_{min}=(123/101-3)^2+(422/101-4)^2=324/101=3\frac{24}{101}$.

7.2-chizmadan ko'rinib turibdiki, agar (7.10) aylana radiusi k ning qiymatlarini oshirib borilsa, u C nuqtada maksimum qiymatga ega bo'ladi.

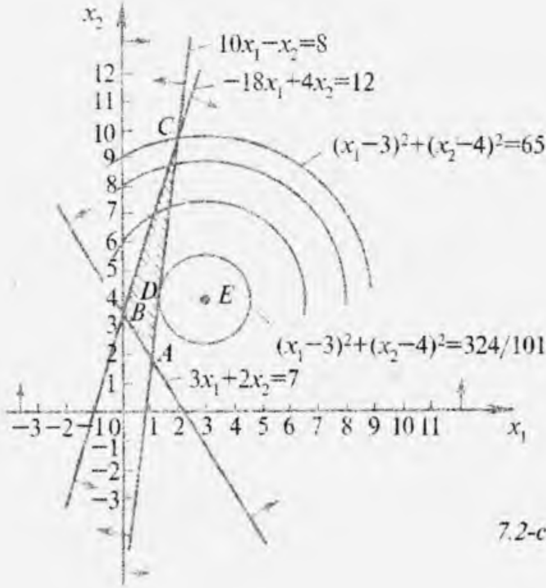
C nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} 10x_1-x_2=8, \\ -18x_1+4x_2=12. \end{cases}$$

Natijada $x_1=2$; $x_1=12$ optimal yechim bo'ladi, va

$$F_{max}=f(2,12)=(2-1)^2+(12-4)^2=65.$$

Demak, $F_{max}=65$ maqsad funksiyaning maksimal qiymatidir.



7.2-chizma.

7.3-masala. Quyidagi shartlar

$$\left.\begin{aligned} x_1, x_2 &\geq 3, \\ x_1^2 + x_2^2 &\leq 36. \end{aligned}\right\} \quad (7.11)$$

$$x_1, x_2 \geq 0 \quad (7.12)$$

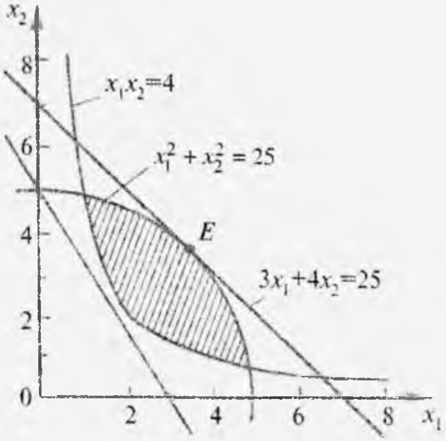
bajarilganda

$$F(x_1,x_2)=12x_1+4x_2 \quad (7.13)$$

$F(x_1,x_2)$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. Bu masalaning aniqlanish sohasi 7.3- chizmada ko'rsatilgan. Chizmadan ko'rinib turibdiki, maqsad funksiya maksimum qiymatga, to'g'ri chiziq aylanaga uringan E nuqtada erishadi. E nuqtaning koordinatalarini topish uchun $12x_1+4x_2=k$ va $x_1^2 + x_2^2 = 36$ aylanaga o'tkazilgan urinma to'g'ri chiziqlarning burchak koeffitsientlari tengligidan foydalaniladi. Aylananing tenglamasidan x_2 ni x_1 ga nisbatan oshkormas funksiya deb olib differensiallansa, quyidagi hosil bo'ladi:

$$2x_1+2x_2 \cdot x'_2=0, \text{ bundan } x'_2= -\frac{x_1}{x_2} =r =-3.$$



7.3-chizma.

Demak, urinma to‘g‘ri chiziqning tenglamasi $2x_1-6x_2=0$ yoki $x_1-3x_2=0$ bo‘ladi. Shunday qilib, E nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} 2x_1-6x_2=0, \\ x_1^2+x_2^2=36. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3x_2, \\ 9x_2^2+x_2^2=36. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=3x_2, \\ x_2=\pm\dfrac{6}{\sqrt{10}}. \end{cases}$$

Demak,

$x_1^*=\dfrac{18}{\sqrt{10}}$, $x_2^*=\dfrac{6}{\sqrt{10}}$. optimal yechim bo‘lib,

$$F_{\max}=\frac{18^2}{10}+\frac{6^2}{10}=36 \text{ teng.}$$

Topshiriqlar

Chiziqsiz programmalashtirish masalalarini yeching (7.4–7.5).

7.4-masala. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} x_1 \cdot x_2 &\geq 4, \\ x_1^2+x_2^2 &\leq 25. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

$F(x_1,x_2)=3x_1+4x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.5-masala. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} 6x_1+4x_2&\le 12,\\ 2x_1+3x_2&\le 24,\\ -3x_1+4x_2&\le 12.\end{aligned}\right\}$$

$$x_1, x_2 \ge 0.$$

$F(x_1,x_2)=x_1x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

2-§. Lagranjning ko'paytmalar usuli

Faraz qilaylik, bizga (7.1), (7.2) masalalar berilgan bo'lsin va sistema (7.1)da faqat tenglamalar qatnashsin (nomanfiylik sharti qatnashsin). Shu bilan bir qatorda $f(x_1,x_2,...x_n)$ funksiya va ulardan olingan xususiy hosilalari bilan birga uzluksiz bo'lsin, ya'ni

$$g_i\,(x_1,x_2,...x_n)= l_i,\ i=\overline{1,n} \qquad (7.14)$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi va

$$F(x)=f(x_1,x_2,...x_n) \qquad (7.15)$$

funksiyaga maksimum (minimum) qiymat topilsin $(x_1,x_2,...x_n)$. Bunda yechimlarning to'plamini topamiz. Matematik analizda (7.14), (7.15) masalaga shartli ekstremum yoki optimallashtirishning klassik masalasi deyiladi. Bu masalani yechish uchun $F(X)$ funksiyaga $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ o'zgaruvchilar kiritiladi. Bu o'zgaruvchilarga Lagranj ko'paytuvchilari deb aytiladi. Shunday qilib, yuqoridagilarga asosan Lagranj funksiyasini tuzamiz.

$$F(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,...\lambda_m)=f(x_1,x_2,...,x_n)+$$
$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[e_i-q_i(x_1,x_2,...,x_n)] \qquad (7.16)$$

Lagranj funksiyasidan quyidagi xususiy hosilalar olinadi.

$$\frac{\partial F}{\partial X_1},\frac{\partial F}{\partial X_2},...,\frac{\partial F}{\partial X_m}\ \text{va}\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1},\frac{\partial F}{\partial \lambda_2},...,\frac{\partial F}{\partial \lambda_m} \qquad (7.17)$$

va quyidagi $n+m$ noma'lumli $n+m$ tenglamalar sistemasini

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial F}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f}{\partial x_j} - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i \dfrac{\partial g_i}{\partial x_i} = 0, (j = 1, \overline{m}); \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_i} = b_i - g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0 (i = 1, \overline{m}), \end{array}\right| \qquad (7.18)$$

va $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_n$ yechimlar topiladi.

(7.18) sistemaning har qanday yechimlari shunday $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtani aniqlaydiki, bu nuqtada $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maqsad funksiya ekstremumga ega bo‘lishi mumkin. Shunday qilib, (7.18) sistemaning yechimlarida (7.15) funksiya ekstremal qiymatlarga ega bo‘lishi mumkin. Keyingi tekshirishlar shartsiz ekstremumlarni tekshirish kabi olib boriladi.

Demak, (7.14), (7.15) masalalarni Lagranjning ko‘paytmalar usuli bilan ekstremal nuqtalarni topish quyidagi hollarni o‘z ichiga oladi:

1. Lagranj funksiyasi tuziladi.
2. Lagranj funksiyasidan x_j va λ_i bo‘yicha xususiy hosilalar olinib, nolga tenglashtiriladi.
3. (7.18) sistemani yechib $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ maqsad funksiya ekstremumga ega bo‘lishi mumkin bo‘lgan nuqtalari topiladi.
4. Ekstremumga bo‘lishi mumkin bo‘lgan nuqtalar ichidan ekstremumga ega bo‘lgan nuqtalarni topib, maqsadli funksiyaning bu nuqtalardagi qiymati hisoblanadi.

7.6-masala. Ishlab chiqarish korxonasining rejasi bo‘yicha 180 ta buyum chiqarilishi mo‘ljallangan. Bu buyumlarni ishlab chiqarish uchun ikki xil texnologik jarayon ishlatiladi. Birinchi texnologik usulni qo‘llab x_1 dona buyumlarni tayyorlaganda, xarajatlar $4x_1+x_1^2$ so‘mni, ikkinchi xil jarayon x_2 dona buyumlarni tayyorlaganda esa xarajatlar $8x_2+x_2^2$ so‘mni tashkil etadi. Korxona rejasini shunday tuzingki, ikki xil usul bilan ishlab chiqarish buyumlariga ketgan xarajatlar minimal bo‘lsin.

Yechish. Masalaning sharti bo‘yicha $F(x)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2$ funksiyaning minimal qiymatini $x_1+x_2=180$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ shartlar bajarilganda topish kerak, ya’ni

$$x_1+x_2=180. \qquad (7.19)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0 \qquad (7.20)$$

shartlar bajarilganda

$$F(x)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2=(x_1+2)^2+(x_2+4)^2-20 \rightarrow \min. \qquad (7.21)$$

Funksyaning minimum qiymatini topish kerak.

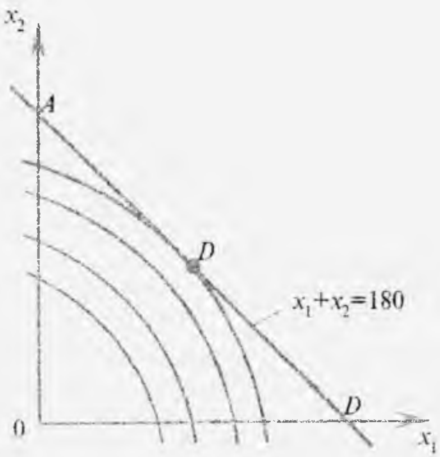
Oldin masalani geometrik usulni qo'llab yechamiz. (7.21) funksiya, markazi (-2;-4) nuqtada bo'lgan aylanadan iborat. Bu masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasi $x_1+x_2=180$ to'g'ri chiziq tashkil qilgan AB kesma ustida joylashgan bo'lib, (7.4 chizma) sath chizig'ining markazi E(−2;−4) nuqtada joylashgan aylanadan iborat.

Ushbu

$$(x_1+2)^2+(x_2+4)^2=S \qquad (7.22)$$

aylananing $x_1+x_2=180$ to'g'ri chiziqqa uringan D nuqtada maqsad funksiya $F(x)$ minimum qiymatga ega bo'ladi.

(7.22) tenglamadagi S ga qiymatlar berib borilsa, aylana $x_1+x_2=180$ to'g'ri chiziqqa D nuqtada urinadi.



7.4 chizma

Aylanaga D nuqtada o'tkazilgan urinma chiziqning burchak koeffitsienti AB to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientiga teng bo'lib, $k=-1$ teng.

Agar aylananing tenglamasidagi x_2 ni oshkormas funksiya deb, x_1 argument bo'yicha hosila olsak, quyidagi hosil bo'ladi.

$$4+2x_1+8x_2'+2x_2x_2'=0 \text{ yoki } x_2'=-\frac{2+X_1}{4+X_2}.$$

Yuqoridagilarga asosan $k=x_2' =-1$.

Demak, $-\dfrac{2+X_1}{4+X_2}=-1$ yoki $x_1-x_2=2$.

D nuqtaning koordinatalarini topish uchun quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{cases} X_1 - X_2 = 2, \\ X_1 + X_2 = 180 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 = 91, \\ X_2 = 89. \end{cases}$$

Bu yerdan optimal yechim $x_1^*=91$, $x_2^*=89$ ga teng. Shunday qilib birinchi xil texnologik jarayon bilan $x_1^*=91$, ikkinchi texnologik jarayon bilan $x_2^*=89$ dona buyum ishlab chiqarilganda maqsad funksiya eng kam qiymat qabul qiladi va xarajatlar $F_{min}=4\cdot 91+91^2+8\cdot 89+892=17278$ so'mni tashkil etadi.

Endi (7.19)–(7.21) masala Lagranjning ko'paytmalar usulini qo'llab yechiladi.

Buning uchun oldin Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1,x_2,\lambda)=4x_1+x_1^2+8x_2+x_2^2+\lambda(180-x_1-x_2).$$

Endi x_1, x_2, λ bo'yicha xususiy hosilalar topiladi va xususiy hosilalar nolga tenglashtiriladi:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x_1} &= 4+2x_1-\lambda=0, \\ \frac{\partial F}{\partial x_2} &= 8+2x_2-\lambda=0, \\ \frac{\partial F}{\partial \lambda} &= 180-x_1-x_2=0. \end{aligned}\right| \qquad (7.23)$$

Sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalardan λ ni topib tenglashtirilsa quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 2, \\ x_1 + x_2 &= 180. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemani yechib $D(x_1^*, x_2^*)$ nuqtaning koordinatalari topiladi: $x_1^*=91$, $x_2^*=89$.

Bu nuqta ekstremumga shubhali nuqta hisoblanadi.

Ikkinchi tartibli xususiy hosilalar (7.23) dan topiladi.

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1^2} = (4 + 2x_1 - \lambda)'_{x_1} = 2, \\ B &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_2} = (4 + 2x_1 - \lambda)'_{x_2} = 0, \\ C &= \frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2} = (8 + 2x_2 - \lambda)'_{x_2} = 2. \end{aligned}\right\}$$

Ikki o'zgaruvchi funksiya ekstremumi haqidagi teoremaga asosan

$$A = \frac{\partial^2 F}{\partial x_1} = 2 > 0 \quad \text{va} \quad \Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

bo'lgani uchun $D(91;89)$ nuqtada $F(x_1,x_2)$ mininiumga ega.

7.7-masala. Quyidagi shartlar

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 2, \\ x_2 + x_3 &= 2. \end{aligned}\right\}$$

bajarilganda, $F=x_1x_2+x_2x_3$ funksiyaning shartli ekstremumga ega bo'lgan nuqtasini toping.

Yechish. Masalaning shartiga asosan Lagranj funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega:

$$F(x_1,x_2,x_3,\lambda_1,\lambda_2)=x_1x_2+x_2x_3+\lambda_1(x_1+x_2-2)+\lambda_2(x_2+x_3-2).$$

Bu funksiyadan 1-hosilalar xususiy hosilalarni olib, nolga tenglashtirilsa, quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda_1 = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x_3} = x_2 + \lambda_2 = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 - 2 = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x_2} = x_2 + x_3 - 2 = 0.
\end{aligned}\right|$$

Bu sistemadagi birinchi va uchinchi tenglamadan $\lambda_1=-x_2$, $\lambda_2=-x_2$. Shuning uchun

$$\left.\begin{aligned}
&x_1 - 2x_2 + x_3 = 0,\\
&x_1 + x_2 = 2,\\
&x_2 + x_3 = 2.
\end{aligned}\right|$$

Bu sistema yechilsa, $x_1=x_2=x_3=1$ bo'ladi. U vaqtda $f=1\cdot 1+1\cdot 1=2$.

7.8-masala. Quyidagi shartda $x_1+x_2=7$, $f(x_1,x_2)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$ funksyani $0\le x_1\le 5$, $0\le x_2\le 10$ sohada shartli ekstremumini tekshiring.

Yechish. Lagranj funksiyasini tuzamiz:

$$F(x_1,x_2,\lambda)=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2-\lambda(3-x_1-x_2).$$

$F(x_1,x_2,\lambda)$ funksiyadan x_1,x_2,λ bo'yicha xususiy hosilalarni olib, nolga tenglashtirilsa quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial F}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) - \lambda = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) - \lambda = 0,\\
&\frac{\partial F}{\partial \lambda_1} = Z - x_1 - x_2 = 0.
\end{aligned}\right|$$

Sistemaning birinchi va ikkinchi tenglamalaridan λ ni topib tenglashtirib olsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$2(x_1-2)=2(x_2-3).$$

Bu tenglamani sistemaning uchinchi tenglamasi bilan birgalikda yechilsa,

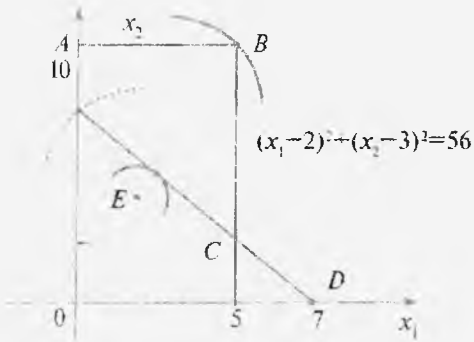
$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + 2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 7 = 0. \end{cases}$$

$x_1=3$ va $x_2=2$ yechimlar topiladi.

U vaqtda masalaning geometrik shakli chizilsa, 7.5- chizma hosil bo'ladi.

Sistemaning aniqlanish sohasi $OABC$ yopiq soha. Shuning uchun global va lokal ekstremumlar mavjud. Bog'lanish tenglamasi DE kesma to'rtburchak $OABC$ ichiga joylashgan. Demak, $F(x_1,x_2)$ funksiyaning qiymatlarini DE kesmada yotgan nuqtalarda taqqoslab tekshiriladi. $(x_1-2)^2+(x_2-3)^2=k$ sath chizig'i tenglamasi bo'lib, markazi $O_1(2;3)$ nuqtada joylashgan. 7.5-chizmadan ko'rinib turibdiki shartsiz ekstremumga $O_1(2;3)$ va $B(5;2)$ nuqtalarda erishiladi:

$$F_{0_1\min} = (2-2)^2+(3-3)^2 = 0, \; f_{B\max} = (5-2)^2 + (10-3)^2 = 9 + 49 = 58.$$



7.5-chizma.

Shu bilan birga $F_{0_1\min}=0$ ham lokal, ham global minimum bo'ladi. $F_B=58$ esa global maksimumga ega bo'ladi.

Agar faqat DE to'g'ri chiziq ustida yotgan nuqtalar ko'rib chiqilsa, shartli global maksimum $E(0,7)$ nuqtada erishiladi va

$F_{E\max}=(0-2)^2+(7-3)^2=20$. D nuqtaning koordinatalarini topish uchun aylanaga urinma chiziq tenglamasini tuzamiz:

$F_{x_2}^{1'}(x_1,x_2)=2(x_1-2)+2(x_2-3)x_2'=0$, $\quad 2(x_1-2)+2(x_2-3)\cdot(-1)=0$,

$x_2'=k_{DE}=-1$ bo'lgani uchun $\quad 2x_1-2-2x_2+6=0$,

$$2x_1-2x_2+2=0$$

va quyidagi sistemani yechamiz:

$$\begin{array}{r} x_1-x_2+1=0 \\ + \\ x_1+x_2-7=0 \\ \hline 2x_1-6=0 \\ x_1=3,\ x_2=4. \end{array}$$

Demak, G nuqtaning koordinatalari $x_1=3$, $x_2=4$ bo'lib, $F_{G\min}(3-2)^2+(4-3)^2=1+1=2$. Shunday qilib, G statsionar nuqtaning koordinatalari topiladi.

Topshiriqlar

Quyidagi masalalarda (7.9)–(7.10) Lagranj usulini qo'llab statsionar nuqtalarni toping va shartli ekstremumlarni aniqlang.

7.9. $F=x_1^2+x_2^2$, $\quad x_1+x_2=1$ bo'lganda.

7.10. $F=3x_1^2+2x_2^2-3x_1+1$, $\quad x_1^2+x_2^2=4$ bo'lganda.

3-§. Qavariq programmalashtirish masalalari

Quyidagi shartlarni

$$q_i(x_1,x_2,\dots x_n)\le b_i \quad (i=1,\ m) \qquad (7.24)$$

$$x_i\ge 0 \ (i=\overline{1,n}) \qquad (7.25)$$

$$F(x)=f(x_1,x_2,\dots x_n)\to\max \qquad (7.26)$$

qanoatlantiruvchi chiziqsiz programmalashtirish masalasi berilgan bo'lsin. Bunda f va q_i – $x_1,x_2,\dots x_n$ o'zgaruvchilarga bog'liq funksiyalar. Yuqorida ko'rsatilgan masalani yechish uchun bironta umumiy usul yo'q. Shuning uchun f va q_i funksiyalarga har xil shartlar qo'yib, chiziqsiz programmalashtirish masalalarini kerakli usullar yordamida yechish mumkin. Xususiy holda (7.26) funksiyaga qavariq (botiq) funksiya, (7.25) va (7.24) qavariq soha shartlari bajarilganda masalalarni yechish mumkin. Shuning uchun quyidagi ayrim zarur ta'rif va teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

7.1-ta'rif. Agar $f(x_1,x_2,...x_n)$ funksiya $G\subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $x_1\in G$, $x_2\in G$ nuqtalar va $0\leq\lambda\leq1$ son uchun

$$f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\leq\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1) \qquad (7.27)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya pastga qavariq deyiladi.

7.2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya $G\subset E_n$ qavariq to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoriy $x_1\in G$, $x_2\in G$ nuqtalar va $0\leq\lambda\leq1$ son uchun

$$f(\lambda x_2+(1-\lambda)x_1)\geq\lambda f(x_2)+(1-\lambda)f(x_1) \qquad (7.28)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya yuqoriga qavariq deyiladi.

7.3-ta'rif. Agar $f(x_1,x_2,...x_n)$ qavariq (botiq) funksiya bo'lib, $q_i(x)$, $x=(x_1,x_2,...x_n)$ $(i=\overline{1,m})$ qavariq bo'lsa, u vaqtda (7.24)–(7.26) masalaga qavariq programmalashtirish masalasi deyiladi.

7.1-teorema. Qavariq programmalashtirish masalasining istalgan lokal maksimumi (minimumi) global maksimum (minimum) bo'ladi.

7.4-ta'rif. $L(x)$ funksiyaga (7.24)–(7.26) qavariq programmalashtirish masalasining Lagranj funksiyasi deyiladi, bunda

$$L(x)=L(x_1,x_2,...,x_n,\lambda_1,\lambda_2,\ ...,\ \lambda_m)=f(x_1,x_2,...x_n)+$$

$$+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\,[b_i-q_i(x_1,x_2,...,x_n)], \qquad (7.29)$$

$\lambda_1,\lambda_2,\ ...,\ \lambda_m$ – Lagranj ko'paytuvchilari.

7.5-ta'rif. $(x_0,\ \lambda_0)=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\ \lambda_1^0,\lambda_2^0,\ ...,\ \lambda_m^0)$ nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi deyiladi, agar barcha $x_j\geq0$ $(i=\overline{1,m})$ va $\lambda_i\geq0$ $(i=\overline{1,m})$ lar uchun $L(x_1,x_2,...,x_n,\ \lambda_1^0,\lambda_2^0,\ ...,\ \lambda_m^0)\leq L(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\ \lambda_1^0,\lambda_2^0,\ ...,\lambda_m^0)\leq L(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0,\ \lambda_1,\lambda_2,\ ...,\ \lambda_m)$ bo'lsa.

Qavariq funksiyalarning ayrim xossalari va teoremalar isbotsiz keltiriladi:

1. G qavariq to'plamda $f(x_1,x_2,...x_n)$ funksiya pastga qavariq bo'lsa, ixtiyoriy haqiqiy b son uchun $f(x)\leq b$, $x=(x_1,x_2,...x_n)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qavariq bo'ladi.

2. G qavariq to'plamda $f(x_1,x_2,...x_n)$ funksiya yuqoriga qavariq bo'lsa, b ixtiyoriy son bo'lganda $f(x_1,x_2,...x_n)\leq b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami qavariq bo'ladi,

3. Ikkita G_1 va G_2 qavariq to'plamning kesishmasi ham qavariq to'plam bo'lganligi sababli: G qavariq to'plamda aniqlangan $q_i(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_m)$ $(i=1,\ m)$ funksiyalar past (yuqori)ga qavariq bo'lib, b_i $(i=1,\ m)$ ixtiyoriy sonlar bo'lganda

$$q_i(x_1,x_2,\dots,x_m)\le b_i \quad (q_i(x_1,x_2,\dots,x_m)\le b_i),\ (i=1,\ m),$$

tengsizliklar sistemasini qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami past (yuqori)ga qavariq to'plam bo'ladi (1- va 2- xossalarga asosan).

4. G qavariq to'plamda aniqlangan $f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(i=1,\ m)$ funksiya past (yuqori)ga qavariq bo'lsa, ularning nomanfiy chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lgan

$$q(x_1,x_2,\dots,x_m)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i q_i(x_1,x_2,\dots,x_m) \qquad (7.30)$$

funksiya ham past (yuqori)ga qavariq bo'ladi.

5. G qavariq to'plamda aniqlangan $f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiya past (yuqori)ga qavariq bo'lishi uchun u o'z ichiga olgan noma'lumlarning ixtiyoriy biri bo'yicha, qolganlarining belgilab olgan (misol uchun $\overline{x_1},\overline{x_2},\overline{x_3},\dots,\overline{x_n}$) qiymatlarida, past (yuqori)ga qavariq bo'lishi zarur va yetarlidir.

6. Agar $fi(x_1,x_2,\dots,x_n)$, $(i=1,\ n)$ funksiyalar G qavariq to'plamda aniqlangan qavariq funksiyalar bo'lsa, $f(x_1,x_2,\dots,x_n)=\max f_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $(1\le i\le m)$ funksiya ham qavariq bo'ladi. Agar kamida bitta $x\in G$ nuqtada $q_i(x)>b_i$ $(i=1,\ m)$ tengsizlik, ya'ni Sleyter sharti bajarilsa, u vaqtda quyidagi teorema o'rinli bo'ladi. (Kun – Takker teoremasi).

7.2-teorema. $x=(x_1^0,x_2^0,\dots,x_n^0)\ge 0$ nuqta (7.23) – (7.25) masalaning optimal yechimi bo'lishi uchun bu nuqtada

$$\frac{\partial L(x_1^0,x_2^0\dots x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\dots\lambda_m^0)}{\partial x_j}\le 0, \qquad (7.31)$$

$$x_j^0\,\frac{\partial L(x_1^0,x_2^0\dots x_n^0)}{\partial x_j}=0,\quad x_j^0\le 0, \qquad (7.32)$$

$$\frac{\partial L(x_1^0,x_2^0\dots x_n^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0,\dots\lambda_m^0)}{\partial \lambda_j}\ge 0, \qquad (7.33)$$

$$\lambda_i^o \frac{\partial L(x_1^0, x_2^0 ... x_n^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, ... \lambda_m^0)}{\partial \lambda_j} = 0, \quad \lambda_i^o \geq 0 \qquad (7.34)$$

$$(i=1, m, j=1, m)$$

shartlarning bajarilishi zarur va yetarlidir.

7.11-masala. Quydagi shartlarda

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ 2x_1 - x_2 \leq 12. \end{array}\right\} \qquad (7.35)$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0 \qquad (7.36)$$

$$f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 \qquad (7.37)$$

f funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. $f(x_1, x_2)$ funksiya botiq funksiya, chunki f_1 $(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$ chiziqli funksiyalar yig'indisidan iborat (shuning uchun uni botiq funksiya sifatida ko'rish mumkin) va $f_2 = -x_1^2 - 2x_2^2$ funksiya esa manfiy aniqlangan funksiya bo'lib, botiq qavariq hisoblanadi. (7.35) sistema esa chiziqli tengsizliklar sistemasidan iborat.

Demak, Kun-Takker teoremasidan foydalansa bo'ladi.

Boshlab Lagranj funksiyasi tuziladi.

$$L = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2 + \lambda \ (8 - x_1 - 2x_2) + \lambda_2 (12 - 2x_1 + x_2).$$

Lagranj funksiyasi $L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2)$ ga (7.31) – (7.34) shartlarni qo'llansa, quyidagilar hosil bo'ladi.

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial x_1} = 2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} = 4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 \leq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 8 - x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + \lambda_2 \geq 0. \end{array}\right| \qquad (7.38)$$

va

$$\left.\begin{aligned}
x_1 \frac{\partial L}{\partial x_1} &= x_1(2 - 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\
x_2 \frac{\partial L}{\partial x_2} &= x_2(4 - 4x_2 - 2\lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\
\lambda_1 \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= \lambda_1(8 - x_1 - 2x_2) = 0, \\
\lambda_2 \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= \lambda_2(12 - 2x_1 + x_2) = 0.
\end{aligned}\right| \tag{7.39}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0. \tag{7.40}$$

(7.38) sistemani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz:

$$\left.\begin{aligned}
2X_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 &\geq 2, \\
4X_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 &\geq 4, \\
X_1 + 2X_2 &\leq 8, \\
2X_1 - X_2 &\leq 12.
\end{aligned}\right| \tag{7.41}$$

(7.42) sistemaga qo'shimcha musbat bazisli o'zgaruvchilar kiritib, quyidagi sistemani hosil qilamiz ($\vartheta_1,\ \vartheta_2, W_1, W_2$):

$$\left.\begin{aligned}
2X_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \vartheta_1 &= 2, \\
4X_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - \vartheta_2 &= 4, \\
X_1 + 2X_2 + W_1 &= 8, \\
2X_1 - X_2 + W_2 &= 12.
\end{aligned}\right| \tag{7.42}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ \vartheta_1 \geq 0,\ \vartheta_2 \geq 0, W_1 \geq 0, W_2 \geq 0. \tag{7.43}$$

(7.42) tenglikni hisobga olib, quyidagini yozib olish mumkin:

$$\vartheta_1 x_1 = 0,\ \vartheta_2 x_2 = 0,\ W_1 \lambda_1 = 0,\ W_2 \lambda_2 = 0. \tag{7.44}$$

Agar (7.42) sistemaning bazisli yechimlarini (7.44) shartlarini hisobga olib yechsak, Lagranj funksiyasining egarli nuqtasi topiladi va shu bilan masalaning optimal yechimi aniqlanadi. (7.42) sistemaning bazisli yechimlarini topish uchun chiziqli programmalashtirishning sun'iy bazis usulidan foydalaniladi.

Bu usuldan foydalanish uchun sistemadagi birinchi va ikkinchi tenglamalarga qo'shimcha z_1 va z_2 musbat o'zgaruvchilar kiritib, chiziqli programmalashtirishning quyidagi masalasiga keltiriladi:

$$\left.\begin{array}{c} 2x_1 + \lambda_1 + 2\lambda_2 - \vartheta_1 + z_1 = 2, \\ 4x_2 + 2\lambda_1 - \lambda_2 - \vartheta_2 + z_2 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + W_1 = 8. \\ 2x_1 - x_2 + W_2 = 12. \end{array}\right| \qquad (7.45)$$

$$f = -Mz_1 - Mz_2 \to \max \qquad (7.46)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0,\ \lambda_1 \geq 0,\ \lambda_2 \geq 0,\ W_1 \geq 0, W_2 \geq 0,\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0 \qquad (7.47)$$

(7.45) – (7.47) masalani yechish paytida hamma vaqt (7.44) shartni hisobga olib sistemaning (7.45) yechimi topiladi.

7.1- jadval

№	Bazis	S_o	R_o	0	0	0	0	0	0	0	0	–M	–M
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	Z_1	z_2
1	z_1	–M	2	2	0	1	2	–1	0	0	0	1	0
2	z_2	–M	4	0	4	2	–1	0	–1	0	0	0	1
3	w_2	O	8	1	2	0	0	0	0	1	0	0	0
4	w_2	O	12	2	–1	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
			–										
6			–6	–2	–4	–3	–1	1	1	0	0	0	0

7.2- jadval

№	Bazis	S_o	R_o	0	0	0	0	0	0	0	0	–M	–M
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2
1	z_1	–	2	2	0	1	2	–1	1	0	0	1	0
2	z_2	–M	1	0	1	1/2	–1/4	0	0	0	0	0	1/4
3	w_2	0	6	1	0	0–	1/2	0	–	1	0	0	–1/2
4	w_2	0	13	2	0	1	–1/4	0	1/4	0	0	0	1/4
5		0	0	0	0	1/2	0	0	1/2	0	1	0	0
			–			0			–				
6			–2	–2	–0	–1	–2	1	1/4	0	0	0	1
									0				

№	Bazis	S_o	R_o	0	0	0	0	0	0	0	0	−M	−M
				x_1	x_2	λ_1	λ_2	v_1	v_2	w_1	w_2	z_1	z_2
1	z_1	0	1	1	0	1/2	1	—	0	0	0	1/2	0
2	z_2	0	1	0	1	0	0	1/2	0	0	0	0	0
3	w_2	0	5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
4	w_2	0	11	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
5			0	0	0	0	0	0 0	0	0	0	0	0

bu jadvalga asosan yechim quyidagilarga teng $x_1^0=1$, $x_2^0=1$, $w_1=5$; $w_2=11$, $\lambda_1^0=\lambda_2^0=v_1=v_2=0$.

Yuqoridagilarga asosan

$x_1^0 v_1=0$, $x_2^0 v_2=0$, $\lambda_1^0 w_1=0$, $\lambda_2^0 w_2=0$, $(x_0, \lambda_0)=(1,1,0\ 0)$ nuqta (7.24) – (7.26) masalaga tuzilgan Lagranj funksiyasi uchun nuqtasi bo'ladi.

Demak, $x_1=1$, $x_2=2$ (7.24) – (7.26) masalaning optimal qiymati $F_{max}=2\cdot 1+4\cdot 1-1-2=3$ ga teng.

7.12-masala. Kun-Takker shartlaridan foydalanib, $x^0=(1;0)$ nuqta quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalasining yechimi ekanligini ko'rsating.

$$\left.\begin{aligned} 4X_1+5X_2 &\le 8,\\ 2X_1+X_2 &\le 4. \end{aligned}\right\}$$

$$X_1 \ge 0, X_2 \ge 0.$$

$$F_{min}=f(x)=x_1^2-2x_1+3x_2^2.$$

Yechish. $X^0=(1,0)$ nuqtada Sleyter shartlari bajariladi (shartlar qat'iy tengsizlikka aylanadi). Demak, bu holda $\lambda_0=1$ deb qabul qilish mumkin.

Yuqoridagi asosiy masala shartlariga asoslanib, Lagranj funksiyasi tuziladi:

$$L(x_1,x_2,\ \lambda_1,\lambda_2)=x_1^2-2x_1+3x_2^2-\lambda_1(8-4x_1-5x_2)-\lambda_2(4-2x_1-x_2),$$

$$X_i \ge 0,\quad i=\overline{1,2},\quad \lambda_i \ge 0,\quad i=\overline{1,2}.$$

Kun-Takker shartlarining bajarilishi tekshirib chiqilsa:

$$\frac{\partial L(X_1^0,X_2^0,\lambda_1^0,\lambda_2^0)}{\partial X_1}=(2X_1-2+4\lambda_1+2\lambda_2)x^0\geq 0,$$

$$\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial X_2}=(6X_2+5\lambda_1+\lambda_2)x^0\geq 0,$$

$$\frac{\partial L(X_1^0,X^0)}{\partial \lambda_1}=(4X_1+5X_2-8)X^0=-4<0,$$

$$\frac{\partial L(X_1^0,\lambda_2^0)}{\partial \lambda_2}=(2x_1+x_2-4)x^0=-2<0,$$

$$\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_1}\cdot X_1^0=0,\ \frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial x_2}X_2^0=0,\quad x_1,x_2\geq 0,$$

$$\frac{\partial L(X^0,\lambda^0)}{\partial \lambda^0{}_{T1}}\cdot\lambda_1^0=0\Rightarrow(-4)\cdot 0\rightarrow\lambda_1^0=0,$$

$$\frac{\partial L(X_2^0,X^0)}{\partial \lambda_2}\cdot\lambda_2^0=0\Rightarrow(-2)\lambda_2^0\Rightarrow 0\Rightarrow\lambda_2^0=0.$$

Shunday qilib, $(x^0, \lambda^0)=(1{,}0;0;0)$ nuqta Kun-Takker teoremasining hamma shartlarini qanoatlantiradi. Demak, $(x^0, \lambda^0)=(1{,}0;0;0)$ nuqta Lagranj funksiyasining egar nuqtasi bo'ladi. Shuning uchun X^0 (1;0) nuqta dastlabki berilgan chiziqsiz programmalashtirish masalasining yechimi topiladi va $f_{min}=1^2-2\cdot 1+3\cdot 0=-1$ ga teng.

Topshiriqlar

7.13-masala. Kun-Takker teoremasining shartlaridan foydalanib, $x^0(0{,}8;\ 0{,}4)$ nuqtaning quyidagi qavariq usullari masalaning yechimi ekanligini ko'rsating:

$$\left.\begin{aligned}&2x_1+x_2\geq 2,\\&2x_1+x_2\leq 8,\\&x_1+x_2\leq 6.\end{aligned}\right|$$

$$x_1\geq 0, x_2\geq 0.$$

$$f_{max}=f_1(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2$$

Quyidagi qavariq programmalashtirish masalaini yeching.

7.14-masala.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 12, \\ 3x_1 + x_2 &\le 15, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$$f(x_1,x_2)= x_1+4x_2+x_1x_2-2x_1^2-2x_2^2\to\max$$

4-§. Kvadratik programmalashtirish masalalari

Kvadratik programmalashtirish masalasi qavariq programmalashtirish masalasining xususiy bir holidir. Faqat uning matematik modelidagi chegaraviy shartlar chiziqli tenglama va tengsizliklardan, maqsad funksiyasi esa umumiy holda chiziqli kvadratik formalarning yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \{\le, =, \ge\} bi, \quad i = \overline{1,m} \tag{7.48}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{7.49}$$

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j + d_{11}x_1^2 + d_{12}x_1x_2 + \ldots d_{nn}x^2_{nn} \to \max\ (\min). \tag{7.50}$$

(7.48) – (7.50) kvadratik programmalashtirish masalalarini yechish uchun ayrim zarur bo'lgan ta'rif va teoremalar isbotsiz keltiriladi.

7.6-ta'rif. Quyidagi ko'rinishdagi

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} d_{ij}X_{ij}=d_{11}x_1^2+d_{22}x_2^2+\ldots d_{nn}x_n^2+2d_{12}x_1x_2+$$

$$+2d_{13}x_{13}+\ldots+2d_{n-1}x_{n-1} \tag{7.51}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ o'zgaruvchilarga nisbatan o'zgaruvchi sonli funksiyaga kvadratik forma deyiladi.

(7.51) formani vektor ko'rinishda yozish mumkin

$$f(x)=X^1DX. \tag{7.52}$$

Bunda

$$X^1=(x_1,\ x_2,\ldots,x_n),\ (d_{ij}=d_{ji}),\ i,j=1,n.$$

$$D = \begin{pmatrix} d_{11} d_{12} \dots d_{1n} \\ d_{21} d_{22} \dots d_{2n} \\ ------ \\ d_{n1} d_{n2} \dots d_{nn} \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

(7.50) kvadratik funksiyaning past (yuqori)ga qavariq bo'lishi (7.51) kvadratik formaning past (yuqori)ga qavariq bo'lishiga bog'liqdir.

7.7-ta'rif. $X=0$ dan boshqa barcha $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ lar uchun $f(X)<0$ o'rinli bo'lsa, $f(X)$ ga manfiy aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

7.8-ta'rif. $X=0$ dan boshqa barcha $X=(x_1, x_2,\dots,x_n)$ lar uchun $f(X)>0$ o'rinli bo'lsa, $f(X)$ ga musbat aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

7.9-ta'rif. Agar X^1DX kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'lsa, X^1DX kvadratik formaga nomanfiy aniqlangan deyiladi.

7.10-ta'rif. Agar $X^1DX \leq 0$ tengsizlik barcha $X\neq0$ lar uchun to'g'ri chiziqli, bunda $X=0$ uchun $X^1DX=0$ bajarilsa, X^1DX ga nomusbat aniqlangan kvadratik forma deyiladi.

7.3-teorema. Agar $f(x_1,x_2,\dots,x_n)= \sum_{i=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} d_{ii}x_{ij}$ kvadratik formada barcha tartibdagi

$$D_1=d_{11},\quad D_2= \begin{vmatrix} d_{11} d_{12} \\ d_{21} d_{22} \end{vmatrix}, \dots, D_n = \begin{vmatrix} d_{11} d_{12} \dots d_{1n} \\ d_{21} d_{22} \dots d_{2n} \\ d_{n1} d_{n2} \dots d_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D_i = \overline{1,n}$$

aniqlovchilar noldan farqli bo'lsa, $f(x_1, x_2,\dots,x_n))$ kvadratik formani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$f(x_1, x_2,\dots,x_n)= \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_n y_n^2,$$

bunda $$\alpha_i = \frac{D_i}{D_1}, i = \overline{1,n}$$

Demak, α_i koeffitsientlarning ishorasi D_i aniqlovchilarning ishoralariga bog'liq bo'lib, kvadratik formaning ko'rinishini aniqlaydi va quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

1. Agar $D_1, D_2, ..., D_n$ aniqlovchilarning har biri musbat bo'lsa, $f(X)$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'ladi.

2. Agar, $D_i, i=\overline{1,n}$ sonlar ketma-ketligida ishoralar navbat bilan almashib kelsa, α_i koeffitsientlar manfiy bo'lsa, $f(X)$ forma manfiy aniqlangan bo'ladi.

3. Agar D matritsaning rangi $r<$n bo'lsa, hamda D_i, $i=\overline{1,n}$ aniqlovchilar musbat ishorali bo'lib, qolganlari nolga teng bo'lsa, $f(X)$ kvadratik forma nomanfiy aniqlangan bo'ladi.

4. Agar D matritsaning rangi $r<n$ bo'lib, 1, D_i, $i=\overline{1,n}$ qatorda ishoralar almashib kelsa hamda $D_{r+i}=0$ $i=\overline{1,n}$ bo'lsa, kvadratik forma nomusbat aniqlangan bo'ladi.

5. Agar, 1, D_i, $i=\overline{1,n}$ sonlar ketma-ketligida ishoralar almashmasa hamda manfiy ishorali aniqlovchilar mavjud bo'lsa, $f(X)$ kvadratik formaning ishorasi aniqlanmagan bo'ladi.

7.15-masala. Quyidagi formulaning ko'rinishi aniqlansin:

$$f(x_1,x_2,x_3)=-2x_1^2+2x_1x_2-3x_1x_3-x_2^2+2x_2x_3-4x_3^2.$$

Yechish.

$$D=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -4 \end{pmatrix}, \qquad D_1=-2$$

$$D_2=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=+2-1=1, \qquad D_3=\begin{vmatrix} -2 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 1 & -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & 1 & -4 \end{vmatrix}=-2\frac{3}{4}.$$

Demak, 1, D_1, D_2, D_3 ya'ni 1, –2, 1, $-2\frac{3}{4}$ sonlar ketma-ketligida ishoralar navbat bilan almashgani uchun $F(x_1, x_2, x_3)$ kvadratik forma manfiy aniqlangandir.

7.4-teorema. Nomanfiy $F(X) = XDX$ kvadratik forma E_n Evklid fazosida qavariq funksiyasidir. Agar kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lsa, u qat'iy qavariq funksiya bo'ladi.

7.5-teorema. Nomusbat $F(X) = XDX$ kvadratik forma En Evklid fazosida yuqoriga qavariq funksiyadir. Agar kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lsa, u vaqtda qat'iy yuqoriga qavariq funksiya bo'ladi.

Shunday qilib, kvadratik programmalashtirish masalasining ta'rifini quyidagicha berish mumkin.

7.11-ta'rif. Quyidagi shartlarni

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le b_i \qquad (i = \overline{1,m}) \tag{7.53}$$

$$x_j \ge 0, \qquad (j = \overline{1,n}) \tag{7.54}$$

qanoatlantiruvchi

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{kj} x_k x_j \tag{7.55}$$

funksiyaning maksimum (minimum) qiymatini topishga kvadratik programmalashtirish masalasi deyiladi. Bunda $\sum\limits_{k=1}^{n} \sum\limits_{j=1}^{n} C_{kj} x_j$ – manfiy (musbat) – yarim aniqlangan kvadratik forma.

(7.53) – (7.55) kvadratik programmalashtirish masalasini yechish uchun funksiyasini quyidagicha tuzib olamiz:

$$L(X,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j + \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} C_{kj} x_k x_j + \lambda_i \left(b_i - \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \right) \qquad (i = \overline{1,m})$$

Agar $L(X,\lambda)$ funksiya $(X_0, \lambda_0) = (x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)$ egar nuqtaga ega bo'lsa, ya'ni quyidagi shartlar qanoatlantirilsa:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} \le 0, \qquad (j = \overline{1,n}); \tag{7.56}$$

$$X_j^0 \frac{\partial L_0}{\partial x_j} = 0, \qquad (j = \overline{1,n}); \tag{7.57}$$

$$X_j^0 \ge 0. \qquad (j = \overline{1,n}); \tag{7.58}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.59}$$

$$\lambda_i^0 \frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} = 0, \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.60}$$

$$\lambda_i^0 \geq 0, \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.61}$$

bunda $\frac{\partial L_0}{\partial x_j}$ va $\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_i}$ Lagranj funksiyasidan olingan xususiy hosilalarning egar nuqtadagi qiymatlari. Endi (7.55) va (7.58) tengsizliklarga $\vartheta_j\left(i = \overline{1,n}\right)$ va $W_i\,(i = \overline{1,m})$ qo'shimcha o'zgaruvchilar kiritib (7.56) – (7.61) tengsizliklar tenglamalar sistemasi ko'rinishiga keltiriladi:

$$\frac{\partial L_0}{\partial x_j} + \vartheta_j = 0 \quad (j = \overline{1,n}); \tag{7.62}$$

$$\frac{\partial L_0}{\partial \lambda_j} - W_j = 0 \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.63}$$

$$X_i^0 \vartheta_j = 0 \quad (i = \overline{1,n}); \tag{7.64}$$

$$\lambda_i^0 W_j = 0 \quad (i = \overline{1,m}); \tag{7.65}$$

$$X_i^0 \geq 0, \vartheta_j \geq 0, W_i \geq 0\left(j = \overline{1,n}, \quad i = \overline{1,m}\right) \tag{7.66}$$

Demak, (7.53) – (7.55) kvadratik programmalashtirish masalasini hal qilish uchun (7.62 va (7.66) sistemalarning shunday manfiy bo'lmagan yechimlarini topish kerakki, bu yechimlar (7.63) va (7.65) shartlarni albatta qanoatlantirsin.

Bu yechimlar to'plamini sun'iy bazislar usulidan foydalanib, $f(X, \lambda) = -\sum_{i=1}^{m} M\lambda i$ funksiyaning (7.62) – (7.65) shartlarini qanoatlantiruvchi maksimum (minimum) qiymatlari topiladi.

Shunday qilib, (7.53) – (7.55) kvadratik programmalashtirish masalasini yechish uchun quyidagi bosqichlarni bajarish kerak:

1. Lagranj funksiyasini tuzamiz.

2. Egar nuqtasi mavjudligining zarur va yetarli shartlari Lagranj funksiyasi uchun (7.62) – (7.66) ko'rinishda yoziladi.

3. Sun'iy bazis usulini qo'llab, Lagranj funksiyasi uchun egar nuqtasining mavjudligini yoki mavjud emasligini ko'rsatamiz va bu nuqtaning koordinatalari topiladi.

4. Optimal yechimlari yoziladi va optimal reja tuziladi.

Yuqoridagi formulalar va qoidalarning qo'llanishini (7.26) yechilgan masalada ko'rish mumkin.

Topshiriqlar

Quyidagi kvadratik programmalashtirish masalalarini (7.16–7.18) yeching:

7.16. Quyidagi kvadratik masalasining yechimlarini Kun-Taker teoremasi shartlaridan foydalanib toping.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 13, \\ 2x_1 + x_2 \le 9. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

$$f(X) = -4x_1^2 - 6x_2^2 + 8x_1 + 44x_2 + 2x_1x_2 \to \max.$$

7.17.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\le 4, \\ x_1 + x_2 &\le 2. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$$f_{\max} = 2X_1 + 3x_2 - 2X_2^2.$$

7.18.

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 3x_2 &\ge 5, \\ 2x_1 + \frac{1}{2}x_2 &\ge 2. \end{aligned}\right\}$$

$$X_1 \ge 0,\ X_2 \ge 0$$

$$f_{\min} = 4X_1^2 + 3X_2^2.$$

5-§. Gradiyent usuli

Shu vaqtgacha chiziqsiz programmalashtirish masalalarini simpleks usulini qo'llab yechgan edik. Lekin simpleks usuli chekli imkoniyatga ega bo'lganligi uchun chegaraviy shartlari va maqsad fuknsiyasining tarkibiy qismi murakkab bo'lgan masalalarga qo'llab bo'lmaydi. Shuning uchun bunday hollarda kvadratik va qavariq programmalashtirish masalalarini yechish uchun gradiyent usullarini qo'llash ancha qulaylik yaratadi. Chiziqsiz programmalashtirish masalalarini gradiyent usullarini qo'llab yechish uchun ayrim zarur bo'lgan ta'rif va qoidalarni keltiramiz.

Bizga n o'lchovli E_n Evklid fazosi berilgan bo'lsin. E_n fazosining biror sohasida $f(x)=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya o'zining xususiy hosilalari bilan birgalikda uzluksiz funksiyalar to'plamini tashkil etsin. Bu funksiyalar to'plami C^1S^1 bilan belgilansa, E_n da $f\in C^1$ funksiyaning gradiyenti proyeksiyalarini quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}.$$

Demak, En da $f\in C_1$ funksiyaning gradiyenti proyeksiyalari vektor ustun bo'lib, u simvolik ravishda quyidagicha yoziladi.

$$gradf = \Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1}\overline{\ell}_1, \frac{\partial f}{\partial x_2}\overline{\ell}_2, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\overline{\ell}_n.$$

bunda $\overline{\ell_1}, \overline{\ell_2}, ..., \overline{\ell_n}$ ortlar.

Gradiyentni E_n da koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagicha yoziladi:

$$\nabla f(X) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\overline{\ell}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}\overline{\ell}_2 + ... + \frac{\partial f}{\partial x_n}\overline{\ell}_n\right).$$

$f(X)$ funksiyaning berilgan x^0 nuqtadagi gradiyentini quyidagi

$$\nabla f(X^0) = \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}.$$

ko'rinishida yozish mumkin.

O'yinlarni $x^0=(x_1^0,x_2^0,...,x_n^0)$ nuqtada $f(X)$ funksiyadan gradiyent yo'nalishi bo'yicha olingan hosila eng katta qiymatga erishadi, ya'ni

$$\left|\nabla f(X^0)\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right)^2}$$

ga teng bo'ladi va gradiyent yo'nalishi eng tez o'sish yo'nalishi bo'ladi.

$f(X)$ funksiyaning E_n ichki x^0 nuqtasidagi gradiyenti $\nabla f(X^0)$ nuqtadan o'tuvchi yuksaklik sirti ($f(X)$=const) ga perpendikular bo'ladi:

$$-\nabla f(X^0)=\left(-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2},\ldots,-\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_n}\right).$$

Vektor $f(X)$ funksiyaning x^0 nuqtadagi eng tez kamayish yo'nalishini ko'rsatadi va uning x^0 nuqtadagi antigradiyenti deyiladi.

Agar X nuqtada $f(X)$ funksiya uchun $\nabla f(X)=0$ bo'lsa, u vaqtda $X=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ nuqtaga statsionar nuqta deyiladi.

Endi $f(X)\in C^1$ funksiyadan ixtiyoriy yo'nalish bo'yicha xususiy hosila olish tushunchasini kiritamiz.

7.12-ta'rif. Berilgan $X^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ nuqtada $f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in C^1$ funksiyadan $S(s_1,s_2,\ldots,s_n)$ ($\|S\|=1$) yo'nalish bo'yicha olingan hosila deb quyidagi limitga aytiladi:

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=\lim_{\lambda\to 0}\frac{f\left(X^0+\lambda S\right)-f(X^0)}{\lambda}.$$

Agar $f(X)$ funksiya $X^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$ nuqtada differensiallanuvchi funksiya bo'lsa, ixtiyoriy $S(\|S\|=1)$ uchun $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ mavjud bo'ladi, hamda $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=(\nabla f(X^0),S)$ (7.67) o'rinli bo'ladi.

Haqiqatan ham ixtiyoriy cheksiz kichik $\lambda>0$ uchun quyidagi tenglik

$$f(X^0+\lambda S)-f(X^0)=(\nabla f(X^0),(X^0+\lambda S-X^0))+0(\|x^0+\lambda S-x^0\|)$$

bajariladi.

Bunda

$$f(X^0+\lambda S)=f(X^0)+\lambda(\nabla f(X^0)\ S)+0(\|\lambda S\|).$$

va

$$\lim_{\lambda\to+0}\frac{f(X^0+\lambda S)-f(X^0)}{\lambda}=$$

$$=\lim_{\lambda\to+0}\frac{\lambda(\nabla f(X^0),S)+0(\|\lambda S\|)}{\lambda}=(\nabla f(X^0),S)$$

Bizga ma'lumki,

$$(\nabla f(X^0),S)=\|\nabla f(X^0)\|\|S\| \cos(\nabla f(X^0)^\wedge.S).$$

Demak,

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=\|\nabla f(X^0)\|\|S\|\cos(\nabla f(X^0)^\wedge,S).$$

Shunday qilib, bundan ko'rinadiki, $f(X)$ funksiyadan X^0 nuqtada S yo'nalish bo'yicha olingan hosila

$$\cos(f(\nabla X^0)^\wedge.S)=1$$

bo'lganda maksimal qiymatga ega bo'ladi.

Demak, S yo'nalish x^0 nuqtadagi funksiya gradiyentining ($\nabla f(X^0)$) yo'nalish bilan bir xil bo'lganda $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ maksimal qiymatga erishadi.

7.19-masala. $f(x_1,x_2)=3x_1^2+12x_2^2$ funksiyadan $x^0=(3;4)$ tekshirib $S=(1,1)$, $S(\|S\|=1)$ yo'nalish bo'yicha olingan hosila topilsin.

Yechish.

$$\nabla(X^0)=\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)'$$

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}=6X_1,\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2}=24x_2$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}=6\cdot 3=18$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}=24\cdot 4=96.$$

Demak. $\nabla f(X^0)=(18;96)$

(7.67) ga asosan

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=(\nabla f(X^0),S).$$

ya'ni $$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=(18,96),\ (1,1).$$

Bunda $$\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}=18+96=114.$$

7.20-masala. $f(X)=4x_1^2+7x_2^2$ funksiyaning $x^0=(1;2)$ nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi aniqlansin.

Yechish. $f(X)$ funksiyaning x^0 nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi:

$$S=(\nabla f(X^0).$$

$$\nabla f(X^0)=\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right),\quad \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}=8x_1,\quad \frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}=14x^2.$$

Demak, $S=\nabla f(X^0)=(8,1;\ 14;2)$

$S=(8;2)$

yo'nalish berilgan $f(X)=4x_1^2+7x^2$ funksiyaning $x^0=(1;2)$ nuqtadagi eng tez o'sish yo'nalishi bo'ladi.

7.21-masala. $f(X)=5x_1^2+10x_2^2$ funksiyaning $x^0=(2,3)$ nuqtadagi $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}\le 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi barcha S yo'nalishlari topilsin.

Yechish. $S=(X-X^0)=(x_1-2;\ x_2-3)$.

Shartga ko'ra $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}\le 0$

$$(\nabla f(X^0),S)\le 0$$

$$\nabla f(X^0)=\left(\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1},\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}\right)$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_1}=10x_1|_{x=2}=20$$

$$\frac{\partial f(X^0)}{\partial x_2}=20x_2|x_{2=3}=60$$

$$\nabla f(X^0)=(20;60).$$

Demak, $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ $((20;60),\ (x_1-2;\ x_2-3))\le 0$

$$20(x_1-2)+60(x_2-3)\le 0,$$

yoki

$$20x_1+60x_2-220\le 0,$$
$$x_1+3x_2-11\le 0$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday nuqtalar to'plami $\frac{\partial f(X^0)}{\partial S}$ noldan katta bo'lmagan qiymat beruvchi yo'nalishlarni aniqlaydi.

Shuni ham aytish kerakki, ayrim vaqtlarda bu yo'nalish ichida mumkin bo'lgan yoki mumkin bo'lmagan yo'nalishlar ham bo'lishi mumkin.

7.13-ta'rif. Shunday $\bar{\lambda}$ son mavjud bo'lib, har qanday $\lambda\in[0,\bar{\lambda}]$ uchun $x^0+\lambda S\in M$ o'rinli bo'lsa, $X^0\in M$ boshlanadigan yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish deyiladi.

7.6-teorema. Agar M to'plam

$g_i(x)\le 0\left(i=\overline{1,m}\right)$ tengsizliklar sistemasi orqali aniqlangan to'plam bo'lib, $x^0\in$ M va $g_i(x)=0$ shartni bajaruvchi i indekslar to'plami $I(x)$ bo'lsa, u holda

$$(\nabla g(x^0),S)+\varepsilon\le 0,\quad (i\in i(x^0)\ ) \tag{7.67}$$

tengsizliklar sistemasini ba'zi $\varepsilon>0$ da qanoatlantiruvchi S yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish bo'ladi.

7.7-teorema. Agar $x^0\in$ M nuqtadagi S yo'nalish mumkin bo'lgan yo'nalish bo'lsa, u holda har qanday $i\in i(x^0)$ uchun

$$(\nabla g_i(X^0),S)\le 0 \tag{7.68}$$

tengsizlik o'rinlidir.

Yuqoridagi gradiyent usullaridan foydalanib har qanday chiziqsiz programmalashtirish masalalari yechiladi va umumiy holda lokal ekstremumlarni topish mumkin bo'ladi.

Shuning uchun gradiyent usullarini qo'llab, qavariq programmalashtirish masalalarining lokal ekstremumlarini topish mumkin. Har qanday lokal ekstremum, bir vaqtning o'zida global ekstremum ham bo'ladi.

Gradiyent usullarini qo'llab masalalarni yechish jarayoni bironta $X^{(k)}$ nuqtadan boshlab, ketma-ket izlash natijasida dastlabki masalaning yechimi topiladi.

Gradiyent usullarini ikkita guruhga ajratish mumkin:

1. Izlanadigan $X^{(k)}$ nuqtalar mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan chetga chiqmaydigan masalalarning yechish usuli;

2. Izlanadigan $X^{(k)}$ nuqtalar mumkin bo'lqan yechimlar sohasida va izlanadigan yechim mumkin bo'lgan sohadan tashqarida bo'lgan masalalarni yechish usullari.

Birinchi guruhga qarashli masalalarni Frank-Vulf usuli bilan, Ikkinchi guruhga qarashli masalalarni esa jarima funksiyasi usuli bilan yoki Errou – Gurvis usuli bilan yechish mumkin.

1. **Frank –Vulf usuli.** Faraz qilaylik, quyidagi shartlarda

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \leq b_i \qquad (i=\overline{1,m}) \tag{7.69}$$

$$x_i \geq 0, (i=\overline{1,n}) \tag{7.70}$$

$$f(X)=f(x_1,x_2,\ldots,x_n), \tag{7.71}$$

botiq funksiyaning maksimum qiymatini topish kerak bo'lsin.

Bu masalaning xususiyatlaridan biri tengsizliklar sistemasi chiziqli tengsizliklardan iborat bo'lganidadir. Shunday xususiyatlardan foydalanib, chiziqsiz programmalashtirish masalalari ko'rinishiga keltirish va masalani ketma-ketligini almashtirishlar yordamida yechish mumkin.

(7.69) – (7.81) masalani yechish jarayoni masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan bironta $x^{(k)}$ nuqtasini topishdan boshlanadi va $x^{(k)}$ nuqtada $f(X)$ funksiyaning gradiyenti topiladi.

Endi $x^{(k)}$ nuqtada $f(X)$ funksiyaning gradiyentini topamiz:

$$\nabla f(x^{(k)}) = \left(\frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1}; \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2}; \ldots, \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} \right)$$

va bunga asosan chiziqli funksiyani

$$F(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_2} x_2 + \ldots + \frac{\partial f\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_n} X_n \tag{7.72}$$

Bundan keyin (7.69) – (7.70) shartlarga asosan $f(x_1,x_2,...,x_n)$, funksiyaning maksimum qiymatini topamiz. Faraz qilaylik $Z^{(k)}$ nuqtada $F(X)$ funksiya maksimum qiymat qabul qilsin. U vaqtda dastlabki masalaning mumkin bo'lgan yechimining koordinati $x^{(k+1)}$ nuqtada bo'ladi:

$$x^{(k+1)}=x^{(k)}+\lambda(Z^{(k)}-X^{(k)}), \qquad (7.73)$$

Bunda λk – ixtiyoriy son bo'lib, hisoblash qadami deb aytiladi va

$0 \leq \lambda_k \leq 1$ ga teng.

λ_1 – ixtiyoriy son bo'lib, uni shunday tanlash kerakki, $f(X)$ funksiyaning $X=X^{(k+1)}$ nuqtadagi λ_k bog'liq bo'lgan qiymati maksimum qiymat ya'ni $f_{max}=f(X^{(k+1)})$ bo'lsin. Shuning uchun $\frac{df}{d\lambda_k}=0$ tenglamani yechib, λ_k ildizlari ichidan eng kichigi tanlab olinadi.

Agar bu izlanadigan ildizlar birdan katta bo'lsa, u vaqtda $\lambda_k=1$ deb olamiz va shundan keyin nuqtadagi $X^{(k+1)}$ nuqtaning koordinatlarini hisoblab, maqsad funksiyaning bu nuqtadagi qiymati topiladi. Shundan keyin yangi $X^{(k+2)}$ nuqtaga o'tish zarurmi yoki yo'qligi aniqlanadi. Agar zarur bo'lsa, teoremaga u vaqtda $X^{(k+1)}$ nuqtada maqsad funksiyasining gradiyentini hisoblab va chiziqli programmalashtirish masalasini yechib, $X^{(k+2)}$ yechimlari topiladi. $X^{(k+2)}$ nuqta ham yuqoridagi kabi tekshiriladi.

Demak, chekli qadamlar natijasida, ma'lum aniqlikda dastlabki masalaning yechimlarini topish mumkin Shunday qilib, (7.69)–(7.71) masalani Frank-Vulf usuli bilan yechish jarayoni quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi:

1) dastlabki mumkin bo'lgan yechimi topiladi;

2) (7.71) funksiyaning mumkin bo'lgan yechimini aniqlovchi nuqtada gradiyenti hisoblaniladi;

3) (7.72) funksiyani tuzib (7.69) va (7.70) shartlarda minimal qiymati hisoblaniladi;

4) hisobash qadami λ_k topiladi;

5) (7.73) formula yordamida mumkin bo'lgan yechimining tarkibiy qismlari yangidan topiladi;

6) keyingi mumkin bo'lgan yechimga o'tish zarurligi ko'rib chiqiladi. Agar zarur bo'lsa, ikkinchi bosqichga o'tiladi. Agar zarur bo'lmasa dastlabki xususiyatlaridan kerakli yechimi topib hisoblaniladi.

7.22-masala. Frank-Vulf usulini qo'llab, quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_1 &\le 8, \\ 2x_1 - x_2 &\le 12. \end{aligned}\right\} \tag{7.74}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{7.75}$$

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 - x_1^2 - 2x_2^2. \tag{7.76}$$

$f(x_1,x_2)$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Yechish. $f(X_1,X_2)$ funksiyaning gradiyentini topamiz:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}\right) = [2(1-x_1);\ 4(1-x_2)]$$

va masalaning mumkin bo'lgan dastlabki yechimi deb $x^{(0)}=(0;0)$ topiladi, yechimining aniqlik sifatini esa $|f(X^{(k+1)})-f(X^{(k+1)})|<\varepsilon$, bunda $\varepsilon=0,01$ deb olinadi. Endi bu yechimni qadam-baqadam yaxshilaymiz.

I. **Almashtirish** (yaxshilash, o'zgartirish, yangilash).

$x^{(0)}$ nuqtada $f(x_1,x_2)$ funksiyaning gradiyenti $x_1=0$; $x_2=0$ nuqtada topiladi.

$$\nabla f(X^0)=(2;4).$$

Demak, birinchi bosqichda masalani quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_1 &\le 8, \\ 2x_1 - x_2 &\le 12. \end{aligned}\right\} \tag{7.77}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{7.78}$$

$$f(x_1,x_2) = 2x_1 + 4x_2 \tag{7.79}$$

$f(x_1,x_2)$ funksiyaning maksimum qiymatini topish talab etiladi.

(7.77)–(7.79) masalani simpleks usul bilan yechib, dastlabki optimal reja $Z^0=(0,4)$ topiladi.

Masalaning mumkin bo'lgan yechimi (7.73) formula yordamida topiladi.

$$x^{(k)}=x^{(0)}+\lambda_1(Z^{(0)}-X^{(0)}), \text{ bunda } 0\le\lambda\le 1. \qquad (7.80)$$

$X^{(0)}$ va $Z^{(0)}$ lar qiymatlarini (7.79) ga qo'ysak,

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(1)} &= 0+\lambda;0, \\ x_2^{(2)} &= 0+\lambda;4. \end{aligned}\right| \qquad (7.81)$$

kelib chiqadi. Bundan $\lambda_1$ni topish uchun x_1 va x_2 larning qiymatlarini (7.81)dan topib, (7.79) ga qo'yilsa, quyidagi kelib chiqadi:

$$f(\lambda_1)=16\lambda_1-32\lambda_1^2.$$

$f(\lambda_1)$ funksiyadan hosila olib 0 ga tenglashtirib yechilsa, quyidagi hosil bo'ladi:

$$F^1(\lambda_1)=16-64\lambda_1=0, \quad \lambda_1=\frac{1}{4}=0{,}25.$$

$0\le\lambda_1\le 1$ bo'lgani uchun, λ_1 ning xuddi qiymatini qadam deb qabul qilamiz. U vaqtda $x^{(1)}=(0;1)$

$$f(x^{(1)}) = 2$$

$$f(x^{(1)})-f(x^{(0)})=2 > \varepsilon=0{,}01.$$

II. **Almashtirish.** Dastlabki masalaning $X^{(1)}$nuqtadagi gradiyenti $\nabla f(X^{(1)})=(2;0)$ bo'lgani uchun $f_2(x_1,0)=2x_1$ maqsadli funksiyani (7.77) va (7.78) shartlarga asosan maksimum qiymatini topish talab etiladi. Bu masalani simpleks usulni qo'llab yechsak $Z^{(1)}=(6{,}4;0{,}8)$ yechim kelib chiqadi.

Endi $X^{(2)}=X^{(1)}+\lambda_2(Z^{(1)}-X^{(1)})$ aniqlanadi. Oxirgi tenglikni quyidagicha yozish mumkin.

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 6{,}4\lambda_2, \\ x_2^{(2)} &= 1-02\lambda_2. \end{aligned}\right| \qquad (7.82)$$

(7.82) ni (7.76) ga qo'ysak, λ_2 ga nisbatan quyidagi tenglik hosil bo'ladi.

$F(\lambda_2)=2+12{,}8\lambda_2-41{,}76\lambda_2^2$, bundan $F_1(\lambda_2)=12{,}8-83{,}52\lambda_2$. $F_1(\lambda_2)$ ni 0 ga tenglashtirilsa $\lambda_2\approx 0{,}15$ hosil bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} x_1^{(2)} &= 0,96, \\ x_2^{(2)} &= 0,97. \end{aligned}\right\}$$

$X^{(2)}$ = (0,96;0,97), $f(X^{(2)})$=2,996 bo'lgani uchun $f(X^{(2)})-f(X^{(1)})=2,9966-2=0,9966>\varepsilon=0,01$ kelib chiqadi.

III. **Almashtirish.** $X^{(2)}$ nuqtada $f(X)$ funksiyaning gradiyentini hisoblaymiz:

$$\nabla f\ (X^{(2)}) = (0,08;0,12).$$

Demak $F_3(X)$ funksiyaning nuqtadagi ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$F_3(x_1,x_2)=0,08x_1+0,12x_2. \qquad (7.83)$$

Endi (7.83) funksiyaning (7.74) va (7.75) shartlarga asosan qiymati topiladi. Bu qiymat quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi: $Z^{(2)}=(6;0)$.

Yuqoridagilarga asosan $x^{(3)}$ ni aniqlaymiz:

$$x^{(3)}=x^{(2)}+\lambda_3(Z^{(2)}-X^{(2)}).$$

Natijada quyidagilar topiladi:

$$\begin{cases} x_1^{(3)} = 0,96 + \lambda_3\,(6-0,96) = 0,96 + 5,04\lambda_3, \\ x_2^{(3)} = 0,97 + \lambda_3\,(0-0,97) = 0,97 - 0,97\lambda_3. \end{cases}$$

$$F(\lambda_3)=2,9384+0,4032\lambda_2-27,3416\lambda_3^2,$$

$$F(\lambda_3)=0,4032-54,6832\lambda_3,$$

$$0,4032-54,6832\lambda_3=0,$$

$$\lambda_3 = \frac{0,4032}{54,6832} \approx 0,007.$$

$$\text{Demak, } X^{(3)}=(0,99528;\ 0,96321)$$

$$F(X^{(3)})=2,99957$$

$$F(X^{(3)})-F(X^{(2)})=2,99957-2,9966=0,00297<\varepsilon=0,01.$$

Shunday qilib, $X^{(3)}$=(0,99528; 0,96321) (7.84)–(7.86) masalaning izlanayotgan yechimi hisoblanadi va bu yechim qavariq programmalashtirish masalalarini yechganda ko'rgan 7.27-

masalaning $X^x=(1;\ 1)$ ga ancha yaqindir. Agar ε miqdorga yana kamroq qiymat berilsa, $X^{(k)}=(1,1)$ yechimga yanada yaqinroq maksimal yechimini topish mumkin.

Jarima funksiya usuli. Quyidagi shartlarda

$$g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)\le v_i \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$$

$$x_i\ge 0,\left(i=\overline{1,n}\right)$$

$F(X)=f(x_1,x_2,x_3,\dots,x_n)$ botiq funksiyaning maksimum qiymatini topish shunday bo'lsin.

Bunda $g_i(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ funksiyalar qavariq funksiyalar to'plamini tashkil qiladi.

Bundan keyin maqsad funksiyaning maksimum qiymatini izlash o'rniga $F(x_1,x_2,\dots,x_n)=f((x_1,x_2,\dots,x_n))+H(x_1,x_2,\dots,x_n)$ funksiyaning maksimum qiymatini izlaymiz, ya'ni

$$F(X)=f(X)+H(X)\to\max,\ X=(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Demak, $F(X)$ funksiya maqsad funksiya va $H(X)$ ma'lum chegaralar sistemasi bilan aniqlangan Jarima funksiyasi yig'indisidan iborat.

$H(X)$ jarima funksiyasini har xil usullar bilan tuzish mumkin. Ko'pincha jarima funksiyasi quyidagi ko'rinishda izlanadi:

$$H(X)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)g_i(x),\ X=(x_1,x_2,\dots,x_n).$$

Bu shunday $\alpha_i(x)=\begin{cases}0, \ agarda & b_1-g_i(x)\ge 0,\\ \alpha_i, \ agarda & b_1-g_i(x)\le 0.\end{cases}$ (7.84)

$\alpha_1(x)\ge 0$ — o'zgarmas sonlar bo'lib, og'irlik koeffitsientlari deb ataladi.

Jarima funksiyasidan foydalanib, ketma-ket bir nuqtadan ikkinchi va hokazo nuqtalarda qadam-baqadam davom etib, bu jarayon kerakli yechimlar topilguncha davom ettiriladi.

Shu bilan birga har bir kelgusi nuqtaning koordinatasi quyidagi formula yordamida topiladi:

$$X_i^{(k+1)}=\max\left\{0; X_j^k+\left[\frac{\partial f\left(X^k\right)}{\partial x_i}+\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\frac{\partial g_i\left(X^{(k)}\right)}{\partial x_j}\right]\right\}. \tag{7.85}$$

(7.85) dan ko'rinib turibdiki, agar kelgusi nuqta dastlabki masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasida bo'lsa, kvadrat qavs qo'shiluvchi nolga teng va kelgusi nuqtaning koordinatasida maqsad funksiyasining gradiyenti topiladi. Agar nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan tashqarida bo'lsa, u vaqtda yana qaytadan yechimlar sohasiga o'tishga to'g'ri keladi va qaytadan o'zgartiriladi.

Shunday qilib, jarima funksiyasi usuli qavariq programmalashtirish masalalarini yechish jarayonida quyidagi bosqichlarni o'z ichiga oladi:

1) dastlabki masalaning mumkin bo'lgan yechimlari aniqlanadi;

2) nisoblash qadami aniqlaniladi;

3) maqsadli funksiyadan hamma o'zgaruvchilar bo'yicha xususiy hosilalar va mumkin bo'lgan sohasini aniqlovchi funksiya topiladi;

4) (7.85) formula yordamida mumkin bo'lgan yangi yechim nuqtalari aniqlanadi;

5) topilgan nuqtalarning koordinatalari berilgan chegara shartlarini qanoatlantirishi tekshiriladi. Qanoatlantirmasa kelgusi bosqichga o'tiladi. Agar topilgan nuqtaning koordinatalari mumkin bo'lgan yechimlar sohasida aniqlansa, u vaqtda kelgusi mumkin bo'lgan yechimlariga o'tish zarurligi o'rganiladi. Agar zarur bo'lsa, masalani yechishning ikkinchi bosqichiga o'tiladi. Agar zarur bo'lmasa, topilgan yechimlar dastlabki masalaning kerakli yechimlari hisoblanadi;

6) koeffitsientlarining qiymatlari aniqlanadi va 4-bosqichga o'tiladi.

7.23-masala. Quyidagi chegaraviy shartlarida

$$(x_1-7)^2+(x^2-7)^2\leq 18, \tag{7.86}$$

$$x_1\geq 0, \quad x_2\geq 0. \tag{7.87}$$

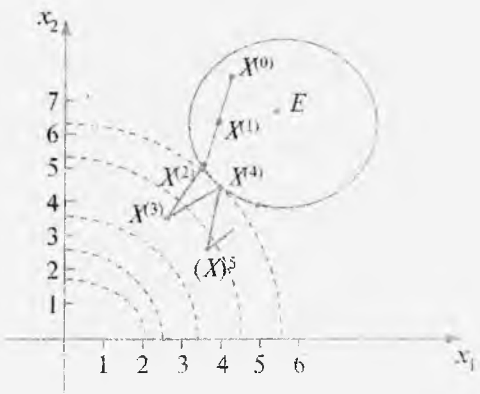
$$f(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2\to\max \tag{7.88}$$

Yechish. Maqsadli funksiya manfiy aniqlangan kvadratik forma bo'lgani uchun, u botiq funksiyadir. Mumkin bo'lgan yechimlar sohasi (7.86), (7.87) esa qavariq sohadir. Demak, (7.85)–(7.87) masala qavariq programmalashtirish sohasining masalasidir. Masalani yechish uchun jarima funksiyalar usuli qo'llaniladi. Oldin mumkin bo'lgan yechimlar sohasi aniqlaniladi (7.6-chizma). Keyin sath chizig'ini $f(x_1,x_2)=h$ chizib olamiz. Sath chizig'i markazi $O(0;0)$ nuqtada bo'lgan aylanadan iboratdir. Shu aniqlanganlar to'plamidan birontasi mumkin bo'lgan yechimlar sohasiga urinadi. Bu nuqtada maqsad funksiyasi izlanayotgan maksimum qiymatga ega bo'ladi. X^0 nuqtani aniqlanish sohasidan olsak, $X^0=(6,7)$ ga teng bo'ladi. λ ning qiymatini $\lambda=0,1$ deb olib va $g(x_1,x_2)=18-(x_1-7)^2-(x_2-7)^2$ deb belgilab, undan x_1 va x_2 o'zgaruvchilar bo'yicha birinchi tartibli xususiy hosilalar olinsa, quyidagilar hosil bo'ladi:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=-2x_1;\quad \frac{\partial g}{\partial x_1}=-2x_1+14;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}=-2x_1;\quad \frac{\partial g}{\partial x_2}=-2x_2+14.$$

Endi (7.85) formulani qo'llab, nuqtalar ketma-ketligini tuzib chiqiladi. Natijada nuqtalarning ichidan kerak bo'lgan yechim topiladi.



7.6-chizma.

I. Almashtirish. $X^{(0)}=(6,7)$ nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasida bo'lgani uchun (7.85) formuladagi kvadrat qavs ichidagi ifoda nolga teng. Demak, jadvalda nuqtaning koordinatlari quyidagi formula yordamida hisoblaniladi:

$$x_1^{(1)}=\max=\left\{0;X_1^{(0)}+\lambda\frac{\partial f\left(X^{(0)}\right)}{\partial x_1}\right\}=\max\{0;6+0,1\cdot(-2)\cdot 6\}=$$

$$=\max\{0;\ 4,8\}=4,8,$$

$$x_2^{(1)}=\max\left\{0;X_2^{(0)}+\lambda\frac{\partial f\left(X^{(0)}\right)}{\partial x_2}\right\}=\max\{0;7+0,1\cdot(-2)\cdot 7\}=5,4\,.$$

Endi $X^{(1)}=(4,8;\ 5,6)$ nuqtani masalaning yechimlar to'plami sohasiga kiradimi yoki yo'qmi tekshiriladi. $g(X^{(1)})=18-4,84-1,96=11,2$ bo'lgani uchun $g(X^{(1)})=-54,4$.

II. Almashtirish. Yuqoridagilarga asosan quyidagilarni topamiz:

$$x_1^{(2)}=\max\{0;\ 0,48+0,1\cdot(-2)\cdot 4,8\}=3,48;$$

$$x_2^{(2)}=\max\{0;\ 0,56+0,1\cdot(-2)\cdot 5,6\}=4,48;$$

$$g(X^{(2)})=18-9,9856-6,3504=1,664>0,\ f(x^{(2)})=-34,816.$$

III. Almashtirish. Endi masala quyidagicha hisoblanadi:

$$x_1^{(3)}=\max\{0;\ 0,384+0,1\cdot(-2)\cdot 3,84\}=3,072;$$

$$x_2^{(3)}=\max\{0;\ 4,48+0,1\cdot(-2)\ 4,48\}=3,584;$$

$$g(x^{(3)})=18-15,429184-11,669056\approx-9,0981.$$

IV. Almashtirish. $X^{(3)}$ nuqta masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasiga kirmaydi.

Shuning uchun,

$$x_1^{(4)}=\max\left\{0;x_1^{(3)}+\lambda\left[\frac{\partial f\left(X^{(3)}\right)}{\partial x_1}+\alpha\frac{\partial f\left(X^{(3)}\right)}{\partial x_1}\right]\right\}=$$

$=\max\{0;3{,}072+0{,}1\cdot[((-2)\cdot 3{,}072)+$
$+\alpha((-2)\cdot 3{,}072+14)]\}=\max\{0;2{,}4576+\alpha\cdot 0{,}7856\}$

$$x_2^{(4)}=\max\left\{0;x_2^{(3)}+\lambda\left[\frac{\partial f\left(X^{(3)}\right)}{\partial x_2}+\alpha\frac{\partial f\left(X^{(3)}\right)}{\partial x_2}\right]\right\}=$$

$=\max\{0;3{,}584+0{,}1[(-2)\cdot 3{,}584)+$
$+\alpha((-2)\cdot 3{,}584+14)]\}=\max\{0;2{,}8672+\alpha\cdot 0{,}6832\}.$

Bunda α sonni tanlash muammosi kelib chiqadi. α sonni shunday tanlash kerakki $X^{(4)}$ nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasining chegarasiga yaqin va shu sohada joylashgan bo'lsin.

Bu talabni $\alpha=1{,}9$ qiymat qoniqtiradi.

$\alpha=1{,}9$ qiymatda $x_1^{(4)}$, $x_2^{(4)}$ lar hisoblanadi:
$x_1^{(4)}=\max\{0;2{,}4576+1{,}9\cdot 0{,}7856\}\approx 3{,}950;$
$x_2^{(4)}=\max\{0;2{,}8672+1{,}9\cdot 0{,}6832\}\approx 4{,}165;$
$g(X^{(4)})=9{,}3025+8{,}037225\approx 0{,}660;$
$f(X^{(4)})\approx -32{,}950.$

V. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:
$x_1^{(5)}=\max\{0;3{,}950+0{,}1\cdot(-2)\cdot 3{,}950\}=$
$=\max\{0;3{,}950-0{,}790\}=\max\{0;3{,}18\}=3{,}18;$
$x_2^{(5)}=\max\{0;4{,}165+0{,}1\cdot(-2)\cdot 4{,}165\}=3{,}332;$
$g(X^{(5)})=18-14{,}7456-13{,}454224\approx -10{,}2.$

VI. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:
$x_1^{(6)}=\max\{0;3{,}18+0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}18+1{,}9\cdot$
$\cdot((-2)\cdot 3{,}18+14)\}\approx 3{,}987;$
$x_2^{(6)}=\max\{0;3{,}332+0{,}1\cdot[(-2)\cdot 3{,}332+1{,}9\cdot$
$\cdot((-2)\cdot 3{,}332+14)]\}\approx 4{,}059;$
$g(X^{(6)})=18-9{,}078169-8{,}649481\approx 0{,}272;$
$f(X^{(6)})\approx -32{,}372.$

VII. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:
$x_1^{(7)}=\max\{0;3{,}987+0{,}1\cdot(-2)\cdot 3{,}987\}\approx 3{,}189;$
$x_2^{(7)}=\max\{0;4{,}059+0{,}1(-2)\cdot 4{,}059\}\approx 3{,}247;$
$g(X^{(7)})=18-10{,}169721-10{,}543009\approx -2{,}713;$

$f(X^{(7)})\approx-3,189^2-3,247^2\approx-10,24.$

VIII. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:

$x_1^{(8)}=\max\{0;3,189+0,1\cdot[(-2)\cdot3,189+1,9$
$((-2)\cdot3,189+14)\}\approx3,999;$
$x_2^{(8)}=\max\{0;3,247+0,1\cdot[(-2)\cdot3,247+1,9$
$\cdot((-2)\cdot3,247+14)]\}\approx4,027;$
$g(X^{(8)})=18-9,006001-8,856576\approx0,137;$
$f(X^{(8)})\approx-32,185.$

IX. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:

$x_1^{(9)}=\max\{0;3,999+0,1\cdot[(-2)\cdot3,99]\}\approx3,199;$
$x_2^{(9)}=\max\{0;4,024+0,1\cdot[(-2)\cdot4,024]\}\approx3,219;$
$g(X^{(9)})=18-14,447601-14,29596\approx-10,744;$
$f(X^{(9)})\approx-3,199^2-3,219^2\approx-10,22.$

X. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:

$x_1^{(10)}=\max\{0;3,199+0,1\cdot[(-2)\cdot3,199+1,9$
$((-2)\cdot319+14)]\}\approx4,004;$
$x_2^{(10)}=\max\{0;3,219+0,1\cdot[(-2)\cdot3,219+1,9$
$((-2)\cdot3,219+14]\}\approx4,012;$
$g(X^{(10)})=18-8,976016-8,928144\approx0,096;$
$f(X^{(10)})\approx-32,128;$

XI. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:

$x_1^{(11)}=\max\{0;4,004+0,1\cdot[(-2)\cdot4,004]\}\approx3,203;$
$x_2^{(11)}=\max\{0;4,012+0,1\cdot[(-2)\cdot4,012]\}\approx3,210;$
$g(X^{(11)})=18-14,417209-14,3641\approx-10,781;$
$f(X^{(11)})\approx-3,203^2-3,210^2\approx-10,18.$

XII. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:

$x_1^{(12)}=\max\{0;3,203+0,1\cdot[(-2)\cdot3,203+1,9$
$((-2)\cdot3,203+14)]\}\approx4,005;$
$x_2^{(12)}=\max\{0;3,210+0,1\cdot[(-2)\cdot3,210+1,9$
$((-2)\cdot3,210+14]\}\approx4,008;$
$g(X^{(12)})=-32,104;$
$f(X^{(12)})\approx-4,005^2-4,008^2\approx-32,104.$

Agar X va XII almashtirishlar o'zaro taqqoslansa, 10^{-1} aniqlikda bir-biriga teng bo'ladi. Demak, bu yechim oxirgi almashtirish natijasida maksimal yechim bo'ladi. Xuddi yechimlaridagi kabi maqsad funksiya qiymatlarini $f(X)$ va $g(X)$ funksiyalar gradiyentini $X^{(12)}=(4{,}005;\ 4{,}008)$ nuqtada tekshirib ko'rish mumkin; ya'ni

$\nabla f(X^{(12)})=(-8{,}01;\ -8{,}016)$; $\nabla f(X^{(12)})=(5{,}99;\ 5{,}984)$.

Mos ravishda koordinatlarining nisbatini hisoblasak;

$$\frac{-8{,}01}{5{,}99}\approx-1{,}337,\qquad \frac{-8{,}016}{5{,}984}\approx-1{,}339.$$

Bu koordinatlardan ko'rinib turibdiki, ular deyarli bir-biriga teng. Demak, $\nabla f(X^{(12)})$ va $\nabla g(X^{(12)})$ vektorlar deyarli parallel vektorlardir. Shu bilan birga $X^{(12)}=(4{,}005;\ 4{,}008)$ nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasi chegarasiga nihoyat yaqin joylashgan, chunki $\nabla g(X^{(12)})\approx 0{,}078$ bo'lgani uchun $x_1^{(12)}=4{,}005$ va $x_2^{(12)}=4{,}008$ masalaning kerakli yechimlari desa bo'ladi. Yuqoridagi ko'rsatilgan almashtirishlarni davom ettirib, yechimlarni kattaroq aniqlikda topish mumkin.

Koordinatlardan masalaning geometrik talqini 7.6-chizmada ham ko'rinib turibdi.

3. Errou — Gurvis usuli. Yuqorida jarima funksiyasi usulini qo'llab, egri chiziqli programmalashtirish masalasini yechdik. Lekin bu usulni qo'llaganda α_i larning qiymatlarini ixtiyoriy tanlab olgan edik va har bir aniqlangan $X^{(i)}$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ nuqta dastlab mumkin bo'lgan yechimlar sohasidan ancha uzoqlashib siljigan edi. Bu kamchilikka Errou — Gurvis usulini qo'llaganda o'rin qolmaydi. Bu usulga, asosan, har bir kelgusi qadam $\alpha_i^{(k)}$ quyidagi formula yordamida hisoblaniladi:

$$\alpha_i^{(k)}=\max\{0;\ \alpha_i^{(k-1)}-\lambda g_i(X^{(k)})\};\ \left(i=\overline{1,n}\right). \tag{7.89}$$

$\alpha_i^{(k)}$ ning dastlabki $\alpha_i^{(0)}$ qiymati deb ixtiyoriy musbat son olinadi.

7.51-masala. Errou — Gurvits usulini qo'llab, (7.50) masalani yeching: ya'ni quyidagi chegara shartlarida

$$(x_1-7)^2+(x_2-7)^2\leq 18, \tag{7.90}$$

$$x_1\geq 0,\ x^2\geq 0. \tag{7.91}$$

$$F(x_1, x_2)=-x_1^2-x_2^2 \quad \to \max.$$

Yechish. Errou – Gurvis usulini qo'llab, (7.50) masala yechilganda birinchi uchta almashtirishda λ=0,1 bo'lganda yechimlar bir-biriga to'g'ri keladi. Bu shuni ko'rsatadiki, har bir topilgan nuqta mumkin bo'lgan yechimlar sohasida joylashgan bo'lib, $X_i^{(K)}$ qiymatlarini ixtiyoriy (7.84) va (7.89) formulalar bilan hisoblaganda bir-biridan farq qilmaydi, ya'ni $X_1^{(K)}=0\left(k=\overline{1,3}\right)$, bo'ladi.

IV. Almashtirish. $g(X^{(3)})<0$ bo'lgani uchun kelgusi $X^{(4)}$ nuqtani (7.84) formula yordamida hisoblaymiz:

$$x_1^{(4)}=\max\left\{0, x_1^{(3)}+\lambda\left[\frac{gf\left(X^{(3)}\right)}{gx_1}+\alpha^{(4)}\frac{df\left(X^{(3)}\right)}{dx_1}\right]\right\}=$$

$$\max\{0,3,072+0,1[(-3,072+\alpha^{(4)}((-2)\cdot 3,072+14)]\}.$$

$$x_2^{(4)}=\max\left\{0, x_2^{(3)}+\lambda\left[\frac{df\left(X^{(3)}\right)}{dx_2}+\alpha^{(4)}\frac{dg\left(X^{(3)}\right)}{dx_2}\right]\right\}=$$

$$\max\{0;3,584+0,1[(-2)\cdot 3,584+\alpha^{(4)}((-2)\cdot 3,584+14)]\}.$$

$\alpha^{(4)}$ – ni (7.89) formula yordamida hisoblanadi:
$\alpha^{(4)}=\max\{0;\ \alpha^{(3)}-0,1\cdot g(X^{(3)})\}=\max\{0;0-0,1\cdot(-9,0981)\}\approx 0.91.$
Demak, $x_1^{(4)}\approx 3,172$; $x_2^{(4)}\approx 3,489$; $g(x^{(4)})\approx -8,981$.

V. Almashtirish. Topilgan $X^{(4)}=(3,172;\ 3,489)$ dastlabki berilgan masalaning mumkin bo'lgan yechimlar sohasiga kirmaydi. Shuning uchun (7.85) formula yordamida topiladi. Lekin oldin (7.89) formula yordamida quyidagi hisoblanadi:

$\alpha^{(5)}=\max\{0;0,91-0,1(-8,981)\}\approx 1,81$
$x_1^{(5)}=\max\{0;3,172+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,172+1,81$
$((-2)\cdot 3.172+14]\}\approx 3,923.$
$x_2^{(5)}=\max\{0;3,489+0,1\cdot[(-2)\cdot 3,489+1.81$
$((-2)\cdot 3.489+14]\}\approx 4,062.$
$g(X^{(5)})\approx -0,1.$

VI. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:

$\alpha^{(6)}=\max\{0;1,81-0,1\cdot(-0,1)\}\approx1,82$

$x_1^{(6)}=\max\{0;3,923+0,1\cdot[(-2)\cdot3,923+1,82$
$((-2)\cdot3,923+14]\}\approx4,258.$

$x_2^{(6)}=\max\{0;4,062+0,1\cdot[(-2)\cdot4,062+1,82$
$((-2)\cdot4,062+14]\}\approx4,319.$

$g(X^{(6)})\approx1,294;$

$f(X^{(6)})\approx-36,784.$

VII. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:

$x_1^{(7)}=\max\{0;4,258+0,1\cdot[(-2)\cdot4,258]\}\approx3,406.$

$x_2^{(7)}=\max\{0;4,319+0,1\cdot[(-2)\cdot4,319]\}\approx3,455.$

$g(X^{(7)})\approx-7,484.$

VIII. Almashtirish. Quyidagilar hisoblanadi:

$\alpha^{(8)}=\max\{0;1,82-0,1(-7,484)\}\approx2,57;$

$x_1^{(8)}=\max\{0;3,406+0,1[(-2)\cdot3,406+2,57$
$((-2)\cdot3,406+14]\}\approx4,572;$

$x_2^{(8)}=\max\{0;3,455+0,1\cdot[(-2)\cdot3,455+2,57$
$((-2)\cdot3,455+14]\}\approx4,586;$

$g(X^{(8)})\approx6,278;$

$f(X^{(8)})\approx-41,935.$

IX. Almashtirish. $x_1^{(9)}$, $X_2^{(9)}$, va $g(X^{(9)})$ lar topiladi:

$x_1^{(9)}=\max\{0;4,572+0,1[(-2)\cdot4,572]\}\approx3,658;$

$x_2^{(9)}=\max\{0;4,586+0,1[(-2)\cdot4,586]\}\approx3,669;$

$g(X^{(9)})\approx4,265.$

X. Almashtirish. $\alpha^{(10)}$, $x_1^{(10)}$, $x_2^{(10)}$ va $g(X^{(10)})$ lar topiladi:

$\alpha^{(10)}=\max\{0;2,57-0,1\cdot(-4,265)\}\approx3,0$

$x_1^{(10)}=\max\{0;3,658+0,1[(-2)\cdot3,658+3,0\cdot$
$\cdot((-2)\cdot3,658+14]\}\approx4,931;$

$x_2^{(10)}=\max\{0;3,669+0,1\cdot[(-2)\cdot3,669+3,0$
$((-2)\cdot3,669+14]\}\approx4,934;$

$g(X^{(10)})\approx9,451.$

XI. Almashtirish. $x_1^{(11)}$, $x_2^{(11)}$, va $g(X^{(11)})$lar hisoblanadi:

$x_1^{(11)}=\max\{0;4,931+0,1\cdot[(-2)\cdot4,931]\}\approx3,945;$

$x_2^{(11)}=\max\{0;4,934+0,1[(-2)\cdot4,934]\}\approx3,947;$

$g(X_2^{(11)})\approx-0,654.$

XII. Almashtirish. $\alpha^{(12)}$, $x_1^{(12)}$, $x_2^{(12)}$, va $g(X^{(12)})$, $f(X^{(12)})$ lar topiladi:

$x_1^{(12)}=\max\{0;3{,}945+0{,}1\cdot[(-2)\cdot3{,}945+3{,}06$
$((-2)\cdot3{,}945+14]\}\approx5{,}026;$
$x_2^{(12)}=\max\{0;3{,}947+0{,}1\cdot[(-2)\cdot3{,}947+3{,}06\cdot$
$((-2)\cdot3{,}947+14]\}\approx5{,}026;$
$g(X^{(12)})\approx10{,}207;$
$f(x^{(12)})\approx-50{,}521.$

XIII. Almashtirish. $x_1^{(13)}$, $x_2^{(13)}$, $g(X^{(13)})$ va $f(X^{(13)})$ lar hisoblanadi:

$x_1^{(13)}=\max\{0;\ 5{,}026+0{,}1\cdot[(-2)\cdot5{,}026]\}\approx4{,}021;$
$x_2^{(13)}=\max\{0;\ 5{,}026+0{,}1\cdot[(-2)\cdot5{,}026]\}\approx4{,}021;$
$g(X_2^{(13)})\approx0{,}251;$
$f(X^{(13)})\approx-32{,}337.$

Bu almashtirishda topilgan X=(4,021; 4,021) yechimlarni kerakli yechimlar deb hisoblasa bo'ladi. Shuni aytish kerakki, yuqoridagi almashtirishlar jarayonini davom ettirsa, dastlabki masalaning yechimlarini istalgan aniqlikda topsa bo'ladi.

Topshiriqlar

Quyidagi chiziqsiz programmalashtirish masalalarini (7.52—7.54) gradiyent usullarini qo'llab yeching.

7.52. Quyidagi funksiyalarning berilgan nuqtalarda gradiyentlarini toping.

1) $Z=x^2y-2xy+\dfrac{x}{y}$, $X^{(0)}=(1;2)$;

2) $Z=x_1^3-2x_1x_2$, $X^{(0)}=(0;1)$;

3) $Z=x_1^2+x_2^2$ $X^{(0)}=(2;0)$

4) $Z=\dfrac{x_1^2+x_2^2}{x_1+x_2}$, $X^{(0)}=(1;0)$.

7.53. Quyidagi funksiya gradiyentining sath chizig'ini va gradiyentlarini berilgan nuqtalarda hisoblab tuzing:

1) $Z=(x_1-2)^2+(x_2-1)^2$, $X^{(0)}=(4;5)$;
2) $Z=(x_1-2)^2-(x_2-3)^2$, $X^{(0)}=(6;4)$;
3) $Z=2(x_1-1)^2+3(x_2-2)^2$, $X^{(0)}=(3;3)$;
4) $Z=2x_1-x_2^2-x_2$, $X^{(0)}=(1;2)$.

7.54. Gradiyentlar usulini qo'llab, $Z=4x_1+2x_2-x_1^2-x_2^2+5$ funksiyani almashtirish jarayonini $X^{(0)}=(4;5)$ nuqtadan boshlab maksimum qiymatini toping va yechimni topishning geometrik talqinini ko'rsating.

Frank–Vulf usulini qo'llab 7.55–7.56 masalalarni yeching.

7.55. Boshlang'ich nuqtasi $X^{(0)}=(2;2)$ bo'lganda quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\le 8, \\ 2x_2 - x_2 &\le 12. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$F(x_1,x_2)=2x_1+4x_2-x_1^2-2x_2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.56. Boshlang'ich nuqtasi $x^{(0)}=(0;0;0)$ nuqta va almashtirish jarayonining ko'rsatkichi $f(X^{(k+1)})-f(X^{(k)})<0{,}01$ bo'lganda. quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\le 6, \\ 2x_2 + x_2 + x_3 &\le 6. \\ x_3 &\ge 3, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$$

$F(x_1,x_2,x_3) = 6x_2+6x_3- x_1^2 - x_2^2 - x_3^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Jarima funksiyasi va Errou–Gurvis usulini qo'llab, (7.57–7.59) masalalarni yeching.

7.57. Quyidagi shartlarda

$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &\le 4, \\ x_2 &\le 2. \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$F(x_1,x_2)=4x_1+10x_2-x_1^2-x_2^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.58. Quyidagi shartlarda

$$(x_1-5)^2+(x^2-5)^2\le 8, \qquad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$F(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

7.59. Quyidagi juft shartlarda

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\le 2, \\ 2x_1 + x_2 &\le 4 \\ x_1 + x_2 &\le 6, \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

$F(x_1,x_2)=-x_1^2-x_2^2$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Tayanch iboralar

Chiziqsiz programmalashtirish, shartsiz optimallash, eng chetki nuqta, maksimum, minimum, optimal yechim, daromad, ekstremum, funksiya, klassik nazariya, aniqmas ko'paytuvchi, Langranj usuli, xususiy hosila, shubhali ekstremum, maqsadli funksiya, qavariq va botiq funksiyalar, kvadratik va qavariq masalalar, usullar, chiziqsiz programmalashtirish, gradiyenti, funksiyaning yo'nalishi, funksiyaning tezligi, mumkin bo'lgan berilganlar sohasi, Jarima funksiyasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqsiz masalalar deganda nimani tushunasiz?
2. Chiziqsiz programmalarning iqtisodiy talqini deganda nimani tushunasiz?
3. Shartsiz optimal nima?
4. Eng chetki nuqta nima?
5. Optimal yechim nima?
6. Lagranj funksiyasi qanday tuziladi?
7. Funksiyaga matematik analizning qaysi nazariyasi qo'llaniladi?
8. Aniqmas ko'paytuvchi deganda nimani tushunasiz?
9. Xususiy hosila deb nimaga aytiladi?
10. Shubhali ekstremum nima?
11. Maqsadli funksiya nima?
12. Qanday funksiya qavariq funksiya deyiladi?
13. Global maksimum nima?
14. Kvadratik funksiya nima?
15. Kvadratik va qavariq funksiya deb nimaga aytiladi?
16. Funksiyaning gradiyenti qanday topiladi?
17. Frank—Vulf usuli orqali qanday masalalar yechiladi?
18. Yo'nalishi qanday topiladi?
19. Jarima funksiyasi usulini ayting.

VIII BOB
MATRITSALI O‘YINLAR NAZARIYASI VA CHIZIQLI PROGRAMMALASHTIRISH

1-§. Matritsali o‘yinlar nazariyasining iqtisodiy va geometrik talqini

Bir-biriga zid manfaatlarning to‘qnash kelishida eng optimal (foydali) yo‘l tanlash nazariyasi *o‘yinlar nazariyasi* deyiladi. O‘yinning matematik tushunchasi har xil o‘yinlar to‘plamini qarab chiqishdan hosil bo‘lgan. Lekin uning tatbiq etilish sohasi ancha keng bo‘lib, bir-biriga zid manfaatlar to‘qnashadigan xilma-xil holatlar to‘plamini o‘z ichiga oladi. Bu o‘yinlar to‘plamiga quyidagilar misol bo‘la oladi: shaxmat, shashka, karta o‘yinlari va boshqalar. O‘yinlar nazariyasiga asos solgan olim Fon Neymandir. Fon Neyman quyidagi masalani o‘rtaga qo‘yadi: agar n ta $R_1, R_2, \ldots, R_n$ o‘ynovchilar biror G o‘yinni o‘ynayotgan bo‘lsa, I — o‘ynovchi bu o‘yinda yutib chiqishi uchun qanday strategiyani tanlashi kerak?

Masalan, ikkita raqib (birinchi R_1 va ikkinchi R_2 o‘ynovchi) bo‘lib, ulardan har biri ish tutishining yo‘lini ikkinchisidan mustaqil ravishda strategiyani tanlab oladi.

Misol uchun oq donalar bilan R_1 shaxmatchining strategiyasini tanlash birinchi yurishni ko‘rsatish va R_2 qora donalarning mumkin bo‘lgan birinchi, ikkinchi, uchinchi yurishlariga oq donalarning qanday javob berishini ko‘satish demakdir; qora donalar bilan o‘ynovchining strategiyasini tanlash oq donalarning mumkin bo‘lgan har bir yurishiga qora donalarning qanday javob berishini ko‘rsatish demakdir. Shunday qilib, o‘yin natijalari faqat tanlab olingan strategiyalargagina (va ehtimol, natijasi o‘yinchilarga bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy sinovlarga) bog‘liq bo‘lgan to‘plamga ega bo‘ladi. Demak, agar o‘yinchi V yutuq natijasini olgan bo‘lsa, ikkinchi o‘yinchi birinchiga $f(v)$ so‘m to‘laydi yoki teskarisi.

R_1 o‘yinchi yutug‘ining $M(X, Y)$ matematik kutilmasi koordinatalarining mos ravishda R_1 va R_2 o‘yinchi tanlab olgan X va Y strategiyalargagina bog‘liq bo‘ladi.

Yuqoridagilarga asosan ko'rinadiki, o'yinlar nazariyasi quyidagi masalalarni o'rganadi:

1. R_1 o'yinchi R_2 o'yinchining qanday yo'l tutishiga bog'liq bo'lmagan holda imkon boricha ko'proq yutuq olishi uchun, ya'ni $\min_y M(X_0, Y) = \max_x \{\min_u M(x,y)\}$ bo'lishi uchun u qanday x_0 strategiya tanlab olish kerak;

2. R_2 o'yinchi R_1 o'yinchining qanday yo'l tutishidan qat'i nazar imkon kamroq yutqizishi uchun, ya'ni $\max_x M(X, Y_0) = \min_u \{\max_x M(x,y)\}$ bo'lishi uchun u qanday U_0 strategiya tanlab olishi kerak.

Har bir o'yinchining strategiyalar soni chekli bo'lgan holdagina bu masalalar prinsipial jihatdan yechiladi. Bu yerda umuman har bir o'yinchi qandaydir aniq bir strategiyani emas balki, har bir o'yinni takrorlaganda R_1 o'yinchi uchun ehtimollari $p_1, p_2, \ldots, p_n$ bo'lgan $x_1, x_2, \ldots, x_n$ strategiyalardan birini, R_2 o'yinchi uchun esa ehtimollari $q_1, q_2, \ldots, q_n$ bo'lgan $y_1, y_2, \ldots, y_m$ strategiyalardan birini tanlash foydali bo'ladi.

$(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ va $(q_1, q_2, \ldots, q_m)$ to'plamlarga o'yinchilarning aralash strategiyalari deyiladi. $\{P_n\}$ va $\{q_m\}$ to'plamlarni va R_1 o'yinchi yutug'ining matematik kutulmasini topishga o'yinning yechimi deyiladi. Endi o'yinlar nazariyasiga oid ayrim ta'rif va teoremalarni isbotsiz keltiramiz.

1-ta'rif. Har qanday G o'yinni o'yin matritsasi deb ataluvchi

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\alpha_{12}\ldots\alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\alpha_{22}\ldots\alpha_{2n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{m1}\alpha_{m2}\ldots\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

matritsa orqali aniqlash mumkin. Bu matritsa R_1 o'yinchi uchun yutuqlar matritsasi deb ataladi.

2-ta'rif. O'yinning natijasiga yutuq deyiladi.

3-ta'rif. Agar o'yinga faqat ikkita taraf (shaxs shaxs) qatnashsa, u hollarda o'yinga juft o'yin deyiladi.

4-ta'rif. Agar juft o'yinda yutuqlar nolga teng bo'lsa, ya'ni birinchi o'yinchining yutug'i, ikkinchi o'yinchining boy berishiga teng bo'lsa, bunday o'yin yig'indisi nolga teng yechim deyiladi.

5-ta'rif. Agar A yutuq matritsasi n ta ustun va m ta satrga ega bo'lsa, bunday o'yinga $n\times m$ o'lchovli chekli o'yin deyiladi.

6-ta'rif. Yutuq matritsasi topilgan $\alpha = \max\limits_i(\min\limits_j \alpha_{ij})$ songa o'yinning quyi yutug'i deyiladi (yoki maksimin strategiyasi deyiladi).

7-ta'rif. Yutuq matritsasidan topilgan $\beta = \min\limits_i(\max\limits_j \alpha_{ij})$ songa o'yinning yuqori yutug'i qiymati deyiladi (yoki minmaks strategiyasi deyiladi).

8-ta'rif. Agar $\alpha = \max\limits_i(\min\limits_j \alpha_{ij}) = \alpha = \min\limits_i(\max\limits_j \alpha_{ij}) = V$ bo'lsa, u vaqtda V – ga o'yinning yutuq qiymati deyiladi.

9-ta'rif. $\alpha=\beta$ o'yinga egar nuqtali o'yin deyiladi.

10-ta'rif. Egar nuqtali o'yinda maksimum va minumumni topishga optimal strategiya deyiladi.

11-ta'rif. Agar $\alpha\neq\beta$ bo'lsa, (egar nuqtaga ega bo'lmasa), u vaqtda sof strategiyani ko'rsatuvchi vektorning tarkibiy qismlariga siljigan strategiya deyiladi.

8.1-teorema. O'yinning quyi yutug'i yuqori yutug'idan katta bo'la olmaydi.

11 ta'rifdan ko'rinib turibdiki, sof strategiyani izohlovchi vektorning tarkibiy qismlari har bir o'yinchining nisbiy takrorlanish darajasini bildiradi va uning yig'indilari nol (bir)ga teng.

Agar birinchi o'yinchining siljigan strategiyasini $X=(x_1, x_2,\ldots,x_m)$ va ikkinchi o'yinchining siljigan strategiyasini

$Y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)$ deb belgilasak, u vaqtda $\sum\limits_{i=1}^{m} x_i = 1,\ \sum\limits_{i=1}^{m} y_j = 1$

bo'ladi, bunda $x_i \geq 0,\ \left(i=\overline{1,m}\right)\ y_j \geq 0,\ \left(j=\overline{1,m}\right)$. Yuqoridagilarga asoslanib, birinchi o'yinchining optimal strategiyasini x^*, ikkinchi birinchilarning optimal strategiyasini y^* bilan belgilasak, u vaqtda ikkala o'yinchining o'yini quyidagicha bo'ladi. Yuqoridagilardan

$$\vartheta = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_i^* y_j^*.$$

Optimal strategiya va o'yin yutug'ini aniqlash jarayoniga o'yinning yechimi deyiladi.

8.2-teorema. Har qanday yig'indisi nolga teng matritsa o'yini siljigan strategiyasi yechimga ega.

8.3-teorema. A matritsaning V o'yin yutug'i Y^* va Z^* optimal strategiya bo'lishi uchun quyidagi tengsizliklarning $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} u_i^* \geq \vartheta \ (i = \overline{1,m})$ va $\sum_{j=1}^{m} \alpha ij z_j^* \geq \vartheta \ (i = \overline{1,m})$ bajarilishi zarur va yetarlidir.

8.4-teorema. Agar o'yinchilardan birontasi siljigan optimal strategiyani qo'llasa, u vaqtda optimal strategiyaga (sof strategiya) qo'shilgan ikkinchi o'yinchining qanday chastotalar bilan o'yinga kirishidan qat'i nazar yutuq qiymati V ga teng bo'ladi.

8.1-masala. Quyidagi matritsa $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ bilan masalaning o'yin yechimini toping va geometrik talqinini bering.

Yechish. Oldin masalaning egar nuqtaga ega yoki yo'qligini tekshiramiz.

Buning uchun quyidagilar topiladi.

min{2;5}=2, max{2;6}=6,
min{6;4}=4, max{5;4}=5.

Demak, o'yinning quyi yutug'i α =max{2;4}=4, yuqori yutug'i ehtimollari β= min{6;5}=5, $\alpha=4\neq\beta=5$ bo'lgani uchun $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan o'yin yechimi siljigan optimal strategiyaga ega bo'lib, uning yutug'i V quyidagi oraliqda joylashgan $4 \leq v \leq 5$.

Agar A o'yinchining strategiyasi $U(u_1, u_2)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda 8.4 teoremaga asosan B o'yinchi B_1 yoki B_2 strategiyani qo'llaganda A o'yinchining o'rtacha yutug'ining qiymati quyidagi tengliklar bilan belgilanadi:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, & (B_1 \ \textit{strategiyani qo'llaganda}), \\ 2u_1^* + 4u_2^* = \vartheta & (B_2 \ \textit{strategiyani qo'llaganda}). \end{cases}$$

Bu o'yinlarning chastotalarining yig'indisi esa

$$u_1^*+u_2^*=1.$$

Yuqoridagilarga asosan quyidagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta, \\ u_1 + u_2 = 1. \end{cases}$$

Bu sistemani yechsak, $u_1^*=0,4$; $u_2^*=0,6$; $v=4,4$ yechim hosil bo'ladi.

Agar B_1 o'yinchining strategiyasi $Z=(z_1^*,z_2^*)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda 8.4-teoremaga asoslanib, quyidagi sistemani keltirib chiqarish mumkin:

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = 4,4, \\ 6z_1^* + 4z_2^* = 4,4, \\ z_1^* + z_2^* = 1. \end{cases}$$

sistemani yechsak quyidagi yechim hosil bo'ladi;

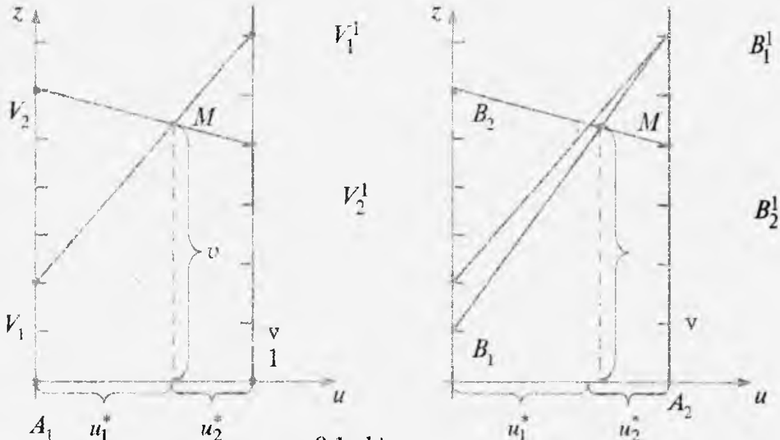
$$z_1^*=0,2; \quad z_2^*=0,8.$$

Shunday qilib, $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa bilan berilgan o'yin siljigan optimal strategiyasi $U^*=(0,4;\ 0,6)$, $Z^*=(0,4;\ 0,8)$ bo'lib, yutuq qiymati esa $v=4,4$ ga teng.

Endi masalaning geometrik talqinini beramiz. Buning uchun $y0z$ teksligida A o'yinchining siljigan strategiyasini $U=(u_1,u_2)$ bilan belgilasak, U vaqtda xususiy holda $A_1(0;1)$ nuqta A_1 strategiyani, $A_2(0;1)$ nuqta esa A_2 strategiyani belgilaydi va h.k.

Agar A_1 va A_2 nuqtalarga perpendikular chiziqlar o'tkazib, bu chiziqlarga o'yinchilarning yutuqlarini joylashtirib chiqilsa quyidagi 8.1-chizma hosil bo'ladi.

Agar A o'yinchi A_2 strategiyani tanlaganda B o'yinchining strategiyasi B_1 bo'lsa, u vaqtda A o'yinchining yutug'i 6 ga teng, B_2 bo'lganda esa 4 ga teng. Bu ikkala son A_2 nuqtaga perpendikular ustida yotgan B_1^1 va B_2^1 larni birlashtirsa, aniqlaydi. B_1 va B_1^1, B_2



8.1-chizma.

va B_2^1 nuqtalarni birlashtirsa ikkita to‘g‘ri chiziq hosil bo‘ladi. Bu to‘g‘ri chiziqlardan *ou* o‘qigacha bo‘lgan masofalar har qanday strategiyani tanlagandagi o‘rtacha yutuqni ko‘rsatadi. Masalan, B_1 B_1^1 kesmadan *ou* o‘qigacha bo‘lgan masofalar A_1 va A_2 strategiyalarning tanlagandagi o‘rtacha yutug‘i v_1(A_1 va A_2 strategiyalarning chastotalari mos ravishda u_1 va u_2 ga teng). B o‘yinchining strategiyasi esa B_1 ga teng bo‘lib, masofa $2u_1+6u_2=v_1$ ga teng. Xuddi shuningdek, B_2 strategiyani qo‘llaganda o‘rtacha yutuq B_2, B_2^1 kesmadan *ou* o‘qigacha bo‘lgan masofalarga teng bo‘lib, bu masofa $5u_1+4u_2=v_2$ ga teng. Shunday qilib strategiyani B_1 MB_2^1 chiziqning ordinatalari *A* o‘yinchining har qanday siljigan strategiyasi minimal yutug‘i bo‘ladi. Bu minimal yutuqlar ichida *M* nuqtaning ordinatasida maksimum qiymatga ega bo‘ladi. Demak, *M* nuqtaning ordinatalari optimal yechimlar bo‘ladi. Optimal strategiyasi $u^*=(u_1^*;\ u_2^*)$ o‘yin yutug‘ining qiymati esa *v* ga teng. $M=(u_1^*;\ u_2^*)$ nuqtaning koordinatalarini topish uchun B_1 B_1^1 va B_2 B_2^1 to‘g‘ri chiziq kesishish nuqtalarini quyidagi uchta tenglamalar sistemasini yechib topamiz:

$$\begin{cases} 2u_1^* + 6u_2^* = \vartheta, \\ 5u_1^* + 4u_2^* = \vartheta, \\ u_1^* + u_2 = 1. \end{cases}$$

Bundan $u_1^* = \frac{2}{5} = 0,4,\ u_1^* = \frac{3}{5} = 0,6 \cdot \vartheta = \frac{22}{5} = 4,4.$

Xuddi yuqoridagi kabi B o'yinchining optimal strategiyasini topamiz. Buning uchun quyidagi

$$\begin{cases} 2z_1^* + 5z_2^* = \frac{22}{5}, \\ z_1^* + z_2^* = 1 \end{cases}$$

sistemani yechib, $z_1^* = \frac{1}{5} = 0,2;\ z_2^* = \frac{4}{5} = 0,8$ siljigan optimal yechimlari topiladi. Natijada o'yinning siljigan optimal strategiyalarining yechimlari $U^*=(0,4;\ 0,6)$ va $Z^*=(0,2;\ 0,8)$ bo'ladi. O'yin yutug'ining qiymati esa $v=4,4$ ga teng.

8.2-masala. Quyidagi matritsa bilan berilgan o'yinning yechimini toping:

$$A=\begin{pmatrix} 7 & 9 & 8 \\ 10 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Yechish. Oldin masalaning egar nuqtaga ega yoki yo'qlig'i tekshiriladi.

Buning uchun quyidagilar topiladi:

min {7 9 8 }=7, max {7 10}=10,

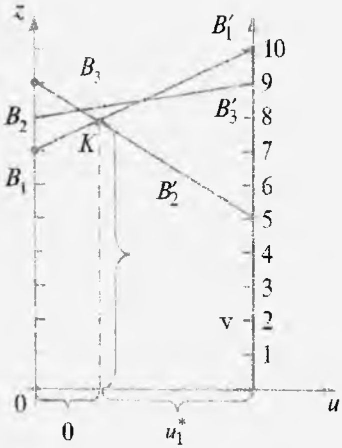
min {10 6 9 }=6, $\max\begin{Bmatrix} 9 \\ 6 \end{Bmatrix}=9,$

max {8 9}=9.

Demak, o'yinning quyi yutug'i α =max {7 6} =7, yuqori yutug'i esa β = min {10 9 9}=9, $\alpha=7\neq\beta=9$ bo'lgani uchun A matritsa bilan berilgan o'yin yechimi siljigan optimal strategiyaga ega bo'lib, yutug'i V quyidagi oraliqda joylashgan:

$$7<v<9.$$

Agar A o'yinchining strategiyasi $U(u_1,\ u_2)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda 8.4-teoremaga asosan B o'yinchi B_1 yoki B_2 yoki strategiyani qo'llaganda A o'yinchining o'rtacha yutug'ining qiymati quyidagi tengliklar bilan belgilanadi:



8.2-chizma.

$$
\begin{aligned}
&7u_1^* + 10u_2^* = \vartheta,\\
&9u_1^* + 6u_2^* = \vartheta,\\
&8u_1^* + 9u_2^* = \vartheta,\\
&u_1^* + u_2 = \vartheta.
\end{aligned}
$$

Bu sistemani yechsak quyidagi yechim hosil bo'ladi:

u_1*=2/3; u_2*=1/3. u*=(2/3, 1/3), v=8. B o'yinchining strategiyasi $Z^*=(z_1^*, z_2^*, z^*)$ vektor bilan berilgan bo'lsa, u vaqtda 8.4-teoremaga asoslanib, quyidagi sistemani keltirib chiqarish mumkin:

$$
\begin{aligned}
&7z_1^* + 9z_2^* + 8z_3^* = 8,\\
&10z_1^* + 6z_2^* + 9z_3^* = 8,\\
&z_1^* + z_2^* + z_3^* = 1.
\end{aligned}
$$

Bu sistemani yechsak, quyidagi yechimlar hosil bo'ladi:

z_1*=1/2=0,5, z_2*=1/2=0,5, z_3*=0 , Z*=(0,5; 0,5; 0) optimal yechim.

Yuqoridagi o'yin yechimining geometrik talqinini 8.2-chizmadan ko'rsatish mumkin: B_1 B^1, B_2 V_2^1 va B_3 B_1 to'g'ri chiziqlar siljigan optimal strategiya bo'lib, $B_1K\ B_2^1$ siniq chiziq B o'yinchining yutug'ini quyi chegarasini ko'rsatadi.

Shunday qilib 2×2 ko'rinishdagi o'yin yechimlarini topish usulidan foydalanib, $2\times n$ va $n\times 2$ ko'rinishdagi o'yinlarning yechimlarini topishni umumiy holda quyidagicha yozish mumkin:

1) ikkinchi (birinchi) o'yinchining strategiyalariga mos bo'lgan to'g'ri chiziqlar chiziladi;

2) o'iyn yutug'ining quyi (yuqori) chegaralari aniqlanadi;

3) ikkinchi (birinchi) o'yinchining ikkita strategiyasi topiladi va ularga mos masofalarga to'g'ri siljigani aniqlanadi. Shu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini maksimal (minimal) ordinataga ega bo'lgan qiymati topiladi;

4) o'yin yutug'ining qiymati va optimal strategiyasi aniqlanadi.

2-§. Matritsali o'yinlar nazariyasi masalalarini chiziqli programmalashtirish masalalariga keltirish

Faraz qilaylik $m \times n$ ko'rinishdagi matritsa bilan aniqlangan o'yin berilgan bo'lsin

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\ \alpha_{12}\ \dots\ \alpha_{1n} \\ \alpha_{21}\ \alpha_{22}\ \dots\ \alpha_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots \\ \alpha_{m1}\ \alpha_{n2}\ \dots\ \alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

1-§ dagi 8.1-teoremaga asosan p_1 o'yinchining optimal strategiyasi $U^*=(u_1^*,u_2^*,\dots,u_m^*)$ ga teng bo'lib, o'yin yutug'i v uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}U_i^* \geq \vartheta \qquad \left(i=\overline{1,n}\right).$$

Masalaning yechimini aniqlash uchun yutuq $v>0$ deb hisoblaymiz.

U vaqtda quyidagi ifoda hosil bo'ladi:

$$\sum_{i=1}^{m}\alpha_{ij}\frac{U^*}{\vartheta} \geq 1. \quad \left(j=\overline{1,n}\right)$$

Bu tengsizlikka $\frac{U_i^*}{\vartheta} = Y_i^*$ almashtirish kiritsak, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i^* \ge 1$

$\left(j = \overline{1,n}\right)$, $y_i^* \ge 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$ kelib chiqadi.

Agar $\sum_{i=1}^{m} u_i^* = 1$ shartdan foydalansak, tengliklar hosil bo'ladi:

$\sum_{i=1}^{m} y_i^* \frac{1}{\vartheta}$. Shart bo'yicha p_1 o'yinchi maksimum yutuqqa erishish uchun harakat qiladi, ya'ni 1/v miqdorning minimum qiymatini topishga intiladi.

Demak, p_1 o'yinchining optimal strategiyasini topish uchun quyidagi shartlarda $\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i^* \ge 1$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$, $y_i^* \ge 0$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$.

$F^* = \sum_{i=1}^{m} y_i$ funksiyaning minimal qiymatini topish kerak.

Xuddi shunday p_2 o'ynovchi optimal strategiyasini topish uchun quyidagi shartlarda

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} x_j \le 1 \quad \left(j = \overline{1,m}\right), \quad x_i \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right).$$

$F = \sum_{i=1}^{n} x_i$ funksiyaning qiymatini topish kerak (bunda $x_i = \frac{z_i}{\vartheta}$).

Shunday qilib, A o'yin matritsasi bilan berilgan $m \times n$ ko'rinishdagi bir juft o'yinni chiziqli programmalashtirish masalasi bilan almashtirib, quyidagi simmetrik, ikkilangan masalalar ko'rinishida yozish mumkin:

Birlamchi masala. Quyidagi chegaraviy shartlarni

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \le 1 \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \quad x_j \ge 0 \left(j = \overline{1,n}\right)$$

qanoatlantiruvchi $F(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{j=1}^{n} x_j$ funksiyaning maksimum qiymatini toping.

Ikkilamchi masala. Quyidagi chegaraviy shartlarni

$$\sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} y_i \geq 0 \quad \left(i=\overline{1,n}\right), \quad u_i \geq 0 \quad \left(i=\overline{1,m}\right)$$

qanoatlantiruvchi $F(u_1,u_2,...,u_n)=\sum_{j=1}^{n} y_j$ funksiyaning minimum qiymatini toping.

Ko'rsatilgan ikkilangan masalalarning yechimlaridan foydalanib, o'yin strategiyasini va yutug'ini quyidagi formulalar bilan topamiz:

$$u_i^* = \frac{y_i^*}{\sum_{j=1}^{n} y_i^*} = \vartheta y_i^*, \quad z_i^* = \frac{z_i^*}{\sum_{j=1}^{n} x_i^*} = \vartheta x_j^*,$$

$$\vartheta = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} x_j^*} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{m} y_i^*}; \quad \left(i=\overline{1,m}\,, j=\overline{1,n}\right).$$

Demak, p_i o'yin yechimini chiziqli programmalashtirish usullarini qo'llab, topish jarayoni quyidagi ketma-ketlikda amalga oshiriladi:

1) o'yin matritsasiga ekvivalent bo'lgan bir juft ikkilangan chiziqli programmalashtirish masalasi tuziladi;

2) bir juft ikkilangan masalaning optimal rejasi topiladi;

3) ikkilangan bir juft masalaning optimal rejasi bilan optimal strategiya va o'yin yutug'idan foydalanib, o'yinning yechimi topiladi.

8.3-masala. Quyidagi matritsa bilan berilgan o'yinning yechimi topilsin.

$$A=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 7 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

Yechish. Bu matritsa egar nuqtaga $a_{32}=5$ ega. Shuning uchun uning siljigan sof strategiyasi A_3 va B_2 bo'ladi, ya'ni $\overline{X}=(0,0,1)$ va $\overline{Y}=(0,1;\ 0)$ $v=5$ bo'lganda.

Bu matritsaga mos to'g'ri bir juft chiziqli programmalashtirishning ikkilangan masalasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

Datslabki masala:	Ikkilangan masala.
Quyidagi shartlarda	Quyidagi shartlarda
$\left.\begin{aligned} 6x_1+4x_2+5x_3\ge 1,\\ 2x_1+3x_2+5x_3\ge 1,\\ 5x_1+7x_2+6x_3\ge 1.\end{aligned}\right\}$	$\left.\begin{aligned} 6y_1+2y_2+5y_3\le 1,\\ 2y_1+3y_2+5y_3\le 1,\\ 5y_1+5y_2+6y_3\le 1.\end{aligned}\right\}$
$x_1\ge0,\ x_2\ge0,\ x_3\ge0.$	$u_1\ge0,\ u_2\ge0,\ u_3\ge0$
$f(x_1,x_2,x_3)=x_1+x_2+x_3$ funksiyaning minimum qiymatini toping	$f(u_1,u_2,u_3)=u_1+u_2+u_3$ funksiyaning maksimum qiymatini toping

Ikkilangan masala simpleks usul bilan yechilsa, quyidagi jadvallar hosil bo'ladi.

1- simpleks jadval

4	I	II	III	I	1	1	0	0	0	Σ
	C_6		A_{i0}	u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	
3	0	U_4	1	6	2	5	1	0	0	
2	0	u_5	1	4	3	7	0	1	0	
1	0	u_6	1	5	5	6	0	0	1	
			Z=0	−1	−1	−1	0	0	0	

4	1	2	3	1	1	1	0	0	0	Tek-shirish ustuni
	C_6			u_1	u_2	u_3	u_4	u_5	u_6	$6\frac{4}{5}$
3	0	u_4	3/5	4	0	13/5	0	0	−2/5	$4\frac{1}{5}$
2	0	u_5	2/5	1	0	17/5	0	0	−3/5	$3\frac{3}{5}$
1	1	u_2	1/5	1	1	6/5	0	0	1/5	3/5
Indeks satri			Z=1/5	0	0	1/5	0	0	1/5	3/5

Demak, indeks satridagi hamma kataklardagi sonlar musbat bo‘lgani uchun optimal yechim quyidagicha bo‘ladi $u_1=0$, $u_2=\frac{1}{5}$, $u_3=0$, $u_4=\frac{3}{5}$; $u_5=\frac{2}{5}$ va $Z_{max}=f_{min}=\frac{1}{5}$ bo‘ladi. O‘yin yutug‘i $\vartheta=\frac{1}{Z_{max}}=\frac{1}{\frac{1}{5}}=5$ bo‘lgani uchun optimal yechimlar $y_1*=0$, $y_2*=1$, $y_3*=0$ ga teng. Chiziqlarda qanday qilib V o‘yinchining optimal strategiyasi $\overline{Y}*$ (0; 1;0) ga teng.

A o‘yinchining yutug‘ini optimal yechimlarini, ya’ni dastlabki masalani optimal yechimlarini o‘zgarmaslar ustunidan y_4, y_5, y_6 sonlarni tanlab olamiz:

$x_1*=0$, $x_2=0$, $x_3=\frac{1}{5}$ optimal strategiyasi esa $\overline{X}*$ (0; 0;1) ga teng bo‘ladi.

Topshiriqlar

8.4–8.17-masalalar. Quyidagi matritsalar bilan berilgan o‘yinlarning yechimlari topilsin.

8.4. $A_1=\begin{pmatrix}3 & 4 & 5\\ 7 & 6 & 4\end{pmatrix}$

8.5. $A_2=\begin{pmatrix}8 & 5 & 3 & 6 & 7\\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8\end{pmatrix}$

8.6. $A_3=\begin{pmatrix}2 & 4 & 0 & 3 & 5\\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2\end{pmatrix}$

8.7. $A_4=\begin{pmatrix}5 & 3 & 6 & 4 & 5\\ 4 & 1 & 8 & 4 & 2\end{pmatrix}$

8.8. $A_5=\begin{pmatrix}4 & 7 & 1 & -2\\ 0 & -3 & 4 & 2\end{pmatrix}$

8.9. $A_6=\begin{pmatrix}2 & 5\\ 7 & 1\\ 3 & 7\\ 4 & 6\end{pmatrix}$

8.10. $A_7=\begin{pmatrix}7 & -1\\ 5 & 4\\ 1 & 5\\ 3 & -2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$

8.11. $A_8=\begin{pmatrix}2 & 8\\ 4 & 3\\ 0 & 6\\ 3 & 4\\ 5 & 2\end{pmatrix}$

8.12. $A_9=\begin{pmatrix}6 & 4\\ 5 & 3\\ 3 & 6\\ 1 & 8\\ 2 & 5\end{pmatrix}$

8.13. $A_{10}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ -1 & 0\\ 2 & -3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$

8.14. $A_{12}=\begin{pmatrix}4 & 7\\ 9 & 3\\ 5 & 9\\ 6 & 9\end{pmatrix}$

8.15. $A_{13}=\begin{pmatrix}8 & 4 & 7\\ 6 & 5 & 9\\ 7 & 7 & 8\end{pmatrix}$

8.16. $A_{14}=\begin{pmatrix}7 & 6 & 7 & 5\\ 6 & 7 & 9 & 8\\ 5 & 8 & 4 & 6\end{pmatrix}$

8.17. $A_{11}=\begin{pmatrix}5 & 6 & 7\\ 3 & 4 & 2\\ 2 & -3 & 8\end{pmatrix}$

Tayanch iboralar

Matritsa, o'yin matritsasi, o'yin yutug'i, egar nuqta, yechim, juft, juft o'yin, o'yinning quyi yutug'i, o'yinning yutug'i.

Takrorlash uchun savollar

1. O'yinlar nazariyasining iqtisodiy talqini deb nimaga aytiladi?
2. O'yinning geometrik talqini deganda nimani tushunasiz?
3. O'yin matritsasi nima?
4. O'yin yutug'i deganda nimani tushunasiz?
5. Egar nuqtali o'yin deb nimaga aytiladi?
6. O'yinning quyi va yuqori yutug'i deb nimaga aytiladi?

TEST SAVOLLARI

1. Maqsadli funksiya qanday tuziladi?

1) maqsadli funksiya $x_1, x_2, ..., x_n$ va $a_1, a_2, ..., a_n$ o'zgaruvchilardan tuziladi;
2) maqsadli funksiya bu tayanch chiziq;
3) maqsadli funksiya bu optimal reja;
4) maqsadli funksiya deb muvozanat chizig'iga aytiladi;
5) maqsadli funksiya deb matematik modelga aytiladi.

2. Transport masalasida yopiq matematik model deb nimaga aytiladi?

1. $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = 1$ ga aytiladi;

2. $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j} \prec 1$ ga aytiladi;

3. $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} \succ 1$ ga aytiladi;

4. $\dfrac{\sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{i=1}^{n} b_i} = \dfrac{1}{2}$ ga aytiladi.

3. Yechuvchi satr deb o'zgarmas ustundagi sonlarni mos ravishda yechuvchi ustundagi sonlarga bo'lganda...?

1) eng katta son turgan satrga aytiladi;
2) eng kichik son turgan satrga aytiladi;
3) musbat son bo'lgan satrga aytiladi;
4) manfiy satr bo'lgan satrga aytiladi;
5) manfiy bo'lgan satrga aytiladi.

4. Yechuvchi ustun qanday olinadi?

1) o'zgarmaslar ustunidagi eng kichik son turgan ustun olinadi;
2) indeks satridagi eng katta musbat son turgan ustun olinadi;

3) indeks satrida turgan eng kichik son turgan ustun olinadi;
4) indeks satridagi eng kichik manfiy son turgan ustun olinadi;
5) endeks satridagi turgan eng katta manfiy son olinadi.

5. Yechuvchi son qanday olinadi?
1) yechuvchi satr bilan o'zgarmaslar ustuni kesishgan katakdagi songa aytiladi;
2) yechuvchi satr bilan x_1 o'zgaruvchi joylashgan ustun kesishgan katakdagi songa aytiladi;
3) yechuvchi ustun bilan yechuvchi satr kesishgan katakdagi songa aytiladi;
4) yechuvchi satr bilan x_3 o'zgaruvchi turgan ustun kesishgan katakdagi songa aytiladi;
5) indeks satrida joylashgan birinchi katakdagi songa aytiladi.

6. Quyidagi masalaning

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 2, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 4. \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$F(x_1, x_2) = 5x_1 + x_2 \to \max$ muvozanat chizig'i tenglamasini toping.

1) $5x_1 + x_2 = 1;$

2) $5x_1 + x_2 \succ 1;$

3) $5x_1 + x_2 = K;$

4) $5x_1 + x_2 = 0;$

5) $5x_1 + x_2 \prec 0.$

7. Bosh satr elementlari qanday formula yordamida to'ldiriladi?

1) $\frac{O + A_{ij}}{K};$ 2) $\frac{K_1}{K_2};$

3) $\frac{O_i}{K};$ 4) $\frac{O_i}{K_i};$ 5) $\frac{O_i}{K_1 + K_2}.$

8. Bosh satrdan boshqa satrlardagi kataklar qanday formula yordamida to'ldiririladi?

1) $A_{ij} = O_i + \frac{K_1 K_2}{K};$ 2) $A_{ij} = 2O_i - \frac{K_1 K_2}{K};$

3) $A_i = O_1 - \frac{K_1 - K_2}{K};$ 4) $A_i = O_1 - \frac{K_1 + K_2}{K};$ 5) $A_{ij} = O_i - \frac{K_1}{K_2}.$

9. Transport masalasining birinchi programma xarajatlari qaysi formula yordamida hisoblanadi?

1) $L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}X_{ij}, L \to \max;$ 2) $L = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} C_{ij}X_{ij}, L \to \min;$

3) $L = \sum_{i=1}^{n} f_i + \sum_{i=1}^{m} b_i, L \to \min;$ 4) $L = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{j=1}^{m} b_j;$

5. $L = AX \to \max.$

10. Potensiallar uslubi bilan transport masalasini yechganda jadvallarning optimal bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?

1) $C'_{ij} - C_{ij} \prec 0;$ 2) $C_{ij} = ab;$

3) $C_{ij} - C'_{ij} \succ 0;$ 4) $a_i + b_j = C_{ij};$

5) $C'_{ij} - a_i \succ 0.$

11. Yechuvchi satr kelgusi jadvalda qanday satr deyiladi?

1) yechuvchi ko'paytuvchi; 2) yechuvchi ayirma;
3) bosh satr; 4) yechuvchi satr;
5) bosh bo'lmagan satr.

12. Transport masalasiga qanday vaqtda yangi iste'molchilar kiritmasdan optimallashtirish mumkin?

1) $a_i = b_j;$ 2) $a_i = \sum b_j;$

3) $\sum_{i=1}^{n} a_i = b_j;$ 4) $\sum a_i = \sum b_j;$

5) $a_i - b_j = f.$

13. Simpleks uslubida tekshirish ustuni qanday to'ldiriladi?
1) satr elementlarini bir-biriga ko'paytirib qo'shish bilan;
2) indeks satr elementlarini qo'shish bilan;
3) hamma satrlarni mos ravishda satr bo'yicha qo'shish bilan;
4) faqat bitta satr elementlarini qo'shish bilan;
5) ustun elementlarini qo'shish bilan.

14. Transport masalasining modeli qachon ochiq matematik model deyiladi?

1) $a = b$ bo'lganda; 2) $a_i = b_i$ bo'lganda;

3) $a_i \succ b_i$ bo'lganda; 4) $\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum b_i$ bo'lganda;

5) $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$ bo'lganda.

15. Matematik programmalashtirish masalalari qaysi olimning ishlarida birinchi marta ko'rila boshlangan?

1) R. Bellman; 2) D. Dansig;
3) S. X. Sirojiddinov; 4) L. V. Kantorovich;
5) A. S. Gershgorn.

16. Chiziqli programmalashtirishning umumiy masalasida qanday yechimlar o'rganiladi.

1) musbat va nolli yechimlar; 2) manfiy sohasida;
3) nolli yechimlar; 4) musbat yechimlar;
5) nolli, manfiy, musbat yechimlar.

17. Chiziqli programmalashtirishning asosiy masalasida qanday yechimlarni topish talab etiladi.

1) nolli yechimlar; 2) musbat yechimlar;
3) manfiy yechimlar; 4) musbat va nolli yechimlar;
5) musbat. manfiy va nolli yechimlar.

18. Quyidagilar berilganda transport masalasining birinchi programmasining xarajati nimaga teng?

Bazalardagi nollar $a_1 = 400$ t, $a_2 = 500$ t va iste'molchilar talabi $b_1 = 300$ t, $b_2 = 400$ t, $b_3 = 200$.

Ta'rif matritsasi $T = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 4 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

1. 3200; 2. 3100; 3. 3400; 4. 5400; 5. 1260.

19. Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} 15x_1 + 6x_2 \le 30, \\ x_1 \le 2. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$F = 7x_1 + 4x_2$ ning maksimum qiymatini toping.

1. 70; 2. 18; 3. 24; 4. 14; 5. 72;

20. Quyidagi funksiyaning

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 \le 8, \\ 4x_1 + x_2 \le 1. \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$

$F = 10x_1 + 20x_2$ ning maksimum qiymatini toping.

1. 18; 2. 32; 3. 20; 4. 5; 5. 28.

21. Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 + 2x_2 \le 24, \\ x_1 \le 12. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$F_{max} = 10x_1 + 20x_2 \to \max$. maksimum qiymatini toping.

1. 42 x^0=(12;6); 2. 35; 3. 32 x^0=(10;8);
4. 11; 5. 13.

22. Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 6, \\ 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \le 8. \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

$F = 9x_1 + 7x_2 + 12x_3 \to \max$. maksimum qiymatini toping?

1. F_{max}=53/3 x^0 =(0, 7/3, 2/3);
2. F_{max}=12 x^0=(1, 5, 3);
3. F_{max}=3 x^0=(2, 3/2, 2/3);
4. F_{max}=5 x^0=(0, 7/3,2/3);
5. F_{max}=4 x^0=(0, 7/3, 2/3).

23. Quyidagi shartlarda butun sonli yechimlarni toping.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 4x_3 \ge 2, \\ -x_1 + x_3 \ge 1, \\ -3x_1 + 3x_2 - 3x_3 \ge 1. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

$F(X) = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \to \min$. minimum qiymatini toping.

1. F_{min}= 8; 2. F_{min}= 4; 3. F_{min}= 5; 4. F_{min}= 6; 5. F_{min}= 3.

24. Quyidagi yutuqni toping:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. x_1=2/3, x_2=1/3;
2. x_1=3/2, x_2=4/3;
3. x_1=7/3, x_2=3/4;

4. $x_1=4/3$, $x_2=5/3$;
5. $x_1=1/3$, $x_2=4/3$.

25. Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 4x_3 \geq 2, \\ -x_1 + x_3 \geq 1, \\ -3x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 1. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

$F = 2x_1 + x_2 + 2x_3 \rightarrow \min$ butun sonli yechimlarini toping.

1. $F_{min}=8$, $x^0=(0;\ 6;\ 1;\ 0;\ 0;\ 8)$;
2. $F_{max}=4$, $x^0=(1;\ 2;\ 3;\ 4)$;
3. $F_{max}=5$, $x^0=(0;\ 0;\ 3;\ 1;\ 0;\ 7)$;
4. $F_{max}=6$, $x^0=(2;\ 3;\ 0;\ 0;\ 2)$;
5. $F_{max}=3$, $x^0=(0;\ 3;\ 7;\ 0;\ 0;\ 2)$.

26. Quyidagi shartlarda butun sonli programmalashtirish masalasini yeching

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ x_1 + 4x_2 \leq 11, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 13. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

$F = 4x_1 + 5x_2 + x_3 \rightarrow \min$. minumim qiymatini toping.

1. $x^0=(0;\ 3;\ -1;\ 3/2)$;
2. $x^0=(0;\ 2;\ -4;\ 6)$;
3. $x^0=(2;\ 2;\ 1;\ 0;\ 0;\ 1)$;
4. $x^0=(0;\ 0;\ -2;\ 3;\ 1)$;
5. $x^0=(3/4;\ 1/2;\ 3/2;\ 1;\ 2)$.

27. Quyidagi shartlarda Lagranj funksiyasini tuzing.

$$2x_1 + 2x_2 = 6,$$
$$F(X) = x_1^2 + x_2^2.$$

1. $L(x_1, x_2, \lambda) = \lambda(x_1^2 + x_2^2) + \lambda(6 - 2x_1 - 3x_2)$;
2. $L(x_1, x_2, \lambda) = \lambda x_1^2 + x_2^2 + \lambda(6 - 2x_1 - 3x_2)$;
3. $L(x_1, x_2, \lambda) = \lambda(6 + 2x_1 + 3x_2) - x_1^2 - x_2^2$;

4. $L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+x_2^2+\lambda(6-2x_1-3x_2)$;

5. $L(x_1,x_2,\lambda)=x_1^2+\lambda(6-2x_1-3x_2)$.

28. $F(x_1,x_2,...,x_n)$ **funksiya** X **qavariq to'plamda berilgan deyiladi, har qanday** x_1 **va** x_2 **lar uchun quyidagi shartlar bajarilsin.**

1. $F[x_2-(1-\lambda)x_1]\leq\lambda F(x_2)+(1-\lambda)F(x_1)$;

2. $F[\lambda x_2-(1-\lambda)x_1]\leq\lambda f(x_2)+(1-\lambda)F(x_1)$;

3. $F[(1-\lambda)x_2+(1-\lambda)x_1]\leq\lambda f(x_2)+(1+F(x_1))$;

4. $F[(1+\lambda)x_2+(1+\lambda)x_1]\leq f(x_2)+(1+F(x_1))$;

5. $F(1+\lambda x_1)\leq F(1+\lambda x_2)$.

29. Quyidagi shartlarda

$$\begin{cases}4x_1+6x_2\leq 4000,\\ x_1+2x_2\leq 12.\end{cases}$$
$$x_1\geq 0, x_2\geq 0.$$

$F(X)=5x_1+8x_2\to\min$. minumim qiymatini toping.

1. 5200; 2. 3200; 3. 2000; 4. 2200; 5. 1700.

30. $F(x_1x_2)=3x_1^2+12x_2^2$ **funksiyadan** $X^0=(3;4)$ **nuqtada** $S(1;1)\|S\|=1$ **yo'nalish bo'yicha hosila topilsin.**

1. $\dfrac{\partial F(X^0)}{\partial S}=114$; 2. $\dfrac{\partial F(X^0)}{\partial S}=110$;

3. $\dfrac{\partial F(X^0)}{\partial S}=100$; 4. $\dfrac{\partial F(X^0)}{\partial S}=120$;

5. $\dfrac{\partial F(X^0)}{\partial S}=94$.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. *M.Raisov* «Matematik programmalashtirish«. –T.: «Voris», 2009.

2. *X.N. Xujamaksimumyozov, B.Otaniyozov, L.P.Yugay, A.Xalimov.* «Matematik programmalashtirish». Subschot jamg'armasi. –T.: 2008.

3. *O. Abdullayev, T. Ahmedov, I.Ziyoxo'jayeva.* Hisoblash texnikasining injenerlik va iqtisodiy hisoblashlarda ishlatilishi. –T.: 1976.

4. *Абрамов Л.М., Капустин В.Ф.* Математическое программирование. –Ленинград: ЛГУ, 1976.

5. *Акулич Н.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М: Высшая школа, 1986.

6. *Баумол У.* Эконимеская исследований оператций. М., «Прогресс», 1985.

7. *Венцел Е.С.* Элементы теории игр. –М: Физмат. из. 1969.

8. *Голштейн В.Г., Юдин Д.В.* Новые направления в линейном программировании. – М.:1966.

9. *Гурьевич Т.Ф., Лушук В.О.* Сборник задач по математическому программированию. – М.: Колос, 1977.

10. *Давидов Е.Г.* Исследование операций. – М.: «Высшая школа», 1990.

11. *Данциг Д.* Линейное программирование, его применение и обощение. – М.: Прогресс. 1975.

12. *Доморяд А.П.* Математические игры и развлечения. –М.: Физмат. из. 1961.

13. *Заславский Ю.Л.* Сборник задач по линейному программированию. – М.: Наука, 1969.

14. *Калихман И.Л.* Сборник задач по программированию. – М.: Высшая школа, 1975.

15. *Канторович Л.В., Горстко А.Б.* Математическое оптимальное программирование в экономике. – М.: Знание. 1968.

16. *Козлова О.Б., Браянский Г.А., Разу М.Л.* Хозяйственные ситуации. – М.: Экономика.1976.

17. *Кузнецов Ю.Н., Кузубов В.И., Волошенко А.Б.* Математическое программирование. – М.: Высшая школа, 1976.

18. *Кринский Х.З.* Математика для экономистов. – М.: Изд. «Статистика», 1970.

19. *Михалевич В.С., Кукса А.И.* Методы последователной оптимизации. – М:. Наука, 1983.

20. *Мулин Е.* Теория игр с примерами из математической экономике. – М:.Мир, 1985.

21. *Nasriddinov G.N.* Matematik ekonomika elementlari. – T.: «O'qituvchi». 1984.

22. *Нестеров Е.П.* Транспортные задачи программирование. – М.:Изд. иностранной литературы, 1960.

23. *Рейнфельд Н., Фогель У.* Математическое программирование. – М.: Изд. Иностранной литературы, 1960.

24. *Safayeva K., Beknazarova N.R.* Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. 1-qism,– T.:, «O'qituvchi»,1984.

25. *Safayeva Q., Beknazarova N.R.* Operatsiyalarni tekshirishning matematik usullari. 2-qism . – T.: «O'qituvchi», 1990.

26. *Sicheva N.I Baltayeva L.R., Ishnazarov A.I., Saidov Z.X., Saidov M.M.* Transportni boshqarishda kompyuter texnologiyalari. O'quv qo'llanma. – T.: TAYI, 2003.

27. *Sicheva N.I, Baltayeva L.R., Ishnazarov A.I.* Kompyuter texnologiyalari asosida firma va tarmoqlarda yuklarni tashishni modellashtirish va boshqarish. O'quv qo'lanma. T..TDIU,TAYI, 2003.

28. *Тарасевич., Галперин В.М., Гребинников П.И., Леунсский А.И.* Марко экономика. Издательство Петербургский государственного университета экономики и финансов, 1999.

29. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование. – М.: Мир. 1967.

30. *Эрроу К. Дж., Гурвист Л., Удзава Х.* Исследования по линейному и программираванию. –М.: Изд. иност. л-ры, 1962.

31. *Юдин Д.Б.* Математические методы управления условиях неполной информации. – М.: Изд. «Сов Радио». 1974.

32. *Юдин Д.Б., Юдин А. Д.* Экстремальные модели в экономике. – М.: «Экономика» 1979.

Internet saytlari

1. http://www.uzsci.net–O'zbekiston Respublikasi Fanlar akademiyasi qoshidagi O'zbek milliy va maorif tarmog'ining serveri.

2. www.search.re.uz–Uzbekiston axborotlarini izlab topish tizimi.

3. www.msu.ru.–MDU serveri. Fanlar bo'yicha namunaviy, ishchi dasturlari. elektron adabiyotlarni olishni ta'minlaydi.

4. www.mesi.ru.–Moskva iqtisod-statistika instituti serveri. Fanlar bo'yicha namunaviy dasturlari elektron adabiyotlarni olishni ta'minlaydi.

5. www.atv-emmm.narod.ru–Rossiya Federatsiyasining matematik usullari modellashtirish bo'yicha turli mavzulardagi ma'lumotlarni olishni ta'minlovchi sayti.

6. www.oup.com.uk–Buyuk Britaniyadagi OKSFORD universiteti sayti. Matematik modellashtirish ekonomertika sohalari bo'yicha ma'lumotlarni olishni ta'minlaydi.

MUNDARIJA

MANSUR RAISOV

MATEMATIK PROGRAMMALASHTIRISH

Oliy o'quv yurtlari talabalari uchun darslik

Muharrir ***Xudoyberdi Po'latxo'jayev***
Badiiy muharrir ***Yasharbek Rahimov***
Texnik muharrir ***Yelena Tolochko***
Kichik muharrir ***Gulbayra Yeraliyeva***
Musahhih ***Zulfiya G'ulomova***
Kompyuterda sahifalovchi ***Gulchehra Azizova***

Litsenziya raqami AI № 163. 09.11.2009. Bosishga 2013-yil 31-oktabrda ruxsat etildi. Bichimi $60\times84^1/_{16}$. Ofset qog'ozi. Tayms garniturasi. Shartli bosma tabog'i 12,09. Nashr tabog'i 10,97. Adadi 500 nusxa. Shartnoma № 73—2013. Buyurtma № 68—5. Bahosi kelishilgan narxda.

O'zbekiston Matbuot va axborot agentligining Cho'lpon nomidagi nashriyot-matbaa ijodiy uyi. 100129, Toshkent, Navoiy ko'chasi, 30. Telefon: (371) 244-10-45. Faks (371) 244-58-55.

«TAFAKKUR-BO'STONI» MCHJ bosmaxonasida chop etildi. Toshkent shahar, Chilonzor ko'chasi, 1-uy.

Cho'lpon
NMIU
Cho'lpon nomidagi
nashriyot-matbaa ijodiy uyi

ISBN 978-9943-05-604-6
9 789943 056046