МАШРАБЖОН МАМАТОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАРДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

дифференциал тенгламалардан масалалар тўплами

Тошкент – 2006

Масалалар тўплами ҳозирда амалда қўлланилаётган дифференциал тенгламалар ўқув режасига мослаб тузилган.

Бу тўплам дарс давомида ечилиши керак бўлган масалалардан ташқари лаборатория ишларини ҳам ўз ичига олади.

Лаборатория ишлари 20 вариантда берилган. Масалалар билан биргаликда назарий савол ва топшириқлар ҳам киритилган.

Ушбу қўлланма математика ўқитиладиган олий ўқув юртлари талабалари, ўқитувчилари ва умуман, дифференциал тенгламалардан ўз билимларини чуқурлаштириш ниятида юрганларга мўлжалланган.

1-§. ЎЗГАРУВЧИЛАРИ АЖРАЛАДИГАН ВА УНГА КЕЛТИРИЛАДИГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1. Умумий тушунчалар.

$$\frac{dy}{dx}=f\left(x,y\right) \tag{1}$$

кўринишдаги тенглама ҳосилага нисбатан ечилган биринчи тартибли ***дифференциал тенглама*** дейилади. Бу ерда x – эркли ўзгарувчи, $y=y(x)-x$ аргументнинг номаълум функцияси; $f(x,y)$ эса (x,y) текисликнинг бирор D соҳасида (*соҳа* деганда, биз боғлиқли очиқ тўпламни назарда тутаяпмиз) аниқланган ва узлуксиз функция.

(a,b) оралиқда аниқланган, узлуксиз дифференциалланувчи $y=\varphi(x)$ функция (1) ***тенгламанинг ечими*** дейилади, агар y (a,b) оралиқда (1) тенгликни айниятга айлантирса: $\frac{d\varphi y}{dx}=f\left(x,y\right),\ x\in\left(a,b\right)$.

$$y=\varphi(x),\ x\in\left(a,b\right) \tag{2}$$

ечим (x,y) фазода чизиқни аниқлайди, шу чизиқ (1) тенгламанинг ***интеграл чизиғи*** дейилади.

(1) тенгламанинг $y_0=\varphi(x_0),\ \left(x_0,y_0\right)\in D$ шартни қаноатлантирувчи $y=\varphi(x)$ ечимини топиш масаласи ***Коши масаласи*** дейилади. Бундай ечим кўпинча $(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтувчи ечим ёки интеграл чизиқ деб ҳам юритилади.

$$y=\varphi(x,C),\ C\in R\ -\text{ўзгармас сон}, \tag{3}$$

функциялар синфи D соҳада (1) тенгламанинг ***умумий ечими*** дейилади, агар у қуйидаги шартларни қаноатланирса:

1) Барча $C\in R$ ларда (3) система (1) нинг ечимини беради;

2) C ни танлаб олиш ёрдамида (1) нинг D дан ўтувчи ихтиёрий ечимини (3) систамадан ҳосил қилиш мумкин.

Агар бизга (1) тенгламанинг (3) кўринишдаги умумий ечим маълум бўлса, унда Коши масаласининг ечимини ажратиб олиш мумкин. Бунинг учун (3) тенгликда $x=x_0,\ y=y_0$ деб C нинг шу тенгликни қаноатлантирувчи C_0 қийматини топиш ва уни (3) тенгликка олиб бориб қўйиш керак. Натижавий $y=\varphi\left(x,C_0\right)$ функция исталган ечимни беради.

Мисол. $y=\left(x-C\right)^3$ функциялар синфи ҳар бир $C\in R$ да $y'=3\sqrt[3]{y^2}$ тенгланинг ечими бўлишини, лекин бу тенглама учун умумий ечим бўла олмаслигини исботланг.

Ечими. Функциянинг ҳосиласини ҳисоблаб тенгламага қўямиз:

$$y' = \left[\left(x-C\right)^3\right]' = 3\left(x-C\right)^2,$$

$$3\left(x-C\right)^2 = 3\sqrt[3]{\left[\left(x-C\right)^3\right]^2} = 3\left(x-C\right)^2.$$

Берилган функция ихтиёрий C ларда тенгликни айниятга айлантираяпти, демак, y ҳар бир C да ечим бўлади. Лекин $y=\left(x-C\right)^3$ функциялар синфидаги C ни танлаш ҳисобига берилган тенгламанинг барча ечимларини ҳосил қилиб бўлмайди, масалан, $y=C$ ечимни.

Демак, берилган функциялар синфи тенглама учун умумий ечим бўла олмайди.

Мисол. $y = x + C\left(1+x^2\right)$, $C \in R$ функциялар синфи

$$\left(2xy - x^2 + 1\right)dx - \left(1+x^2\right)dy = 0$$

тенгламанинг умумий ечими бўлишини исботланг.

Ечими. Функцияни тенгламага қўйиб қуйидагини оламиз:

$$dy = y'\left(x\right)dx = 1 + 2Cx,$$

$$\left\{2x\left[x + C\left(1+x^2\right)\right] - x^2 + 1\right\}dx - \left(1+x^2\right)\left(1+2Cx\right)dx =$$

$$\left(2x^2 + 2Cx + 2Cx^3 - x^2 + 1\right)dx - \left(1 + 2Cx + x^2 + 2Cx^2\right)dx = 0, \quad C \in R.$$

Берилган функция тенгликни барча $C \in R$ ларда айниятга айлантирди.

Энди биз тенгламанинг ихтиёрий $y=\varphi\left(x\right)$ ечимини берилган функциялар синфига тегишли эканлигини кўрсатамиз. Ҳақиқатдан ҳам, $y=\varphi\left(x\right)$ ечим бўлгани учун тенгламани қаноатлантиради.

$$\left(2x\varphi\left(x\right) - x^2 + 1\right)dx - \left(1+x^2\right)d\varphi\left(x\right) = 0$$

ёки

$$2x\varphi\left(x\right) - x^2 + 1 - \left(1+x^2\right)\frac{d\varphi\left(x\right)}{dx} = 0.$$

$F\left(x\right) = \dfrac{\varphi\left(x\right) - x}{1+x^2}$ функциянинг хосиласи нолга тенглигини кўрсатамиз:

$$F'\left(x\right) = \frac{\left(1+x^2\right)\left(d\varphi\left(x\right)/dx - 1\right) - \left(\varphi\left(x\right) - x\right)2x}{\left(1+x^2\right)^2} =$$

$$= \frac{2x\varphi\left(x\right) - x^2 + 1 - \left(1+x^2\right)d\varphi\left(x\right)/dx}{\left(1+x^2\right)^2} = 0.$$

Бунда эса $F(x) = C_0,\ C_0 \in R$ эканлиги келиб чиқади ва демак,

$$F(x) = \frac{\varphi(x) - x}{1 + x^2} = C_0, \quad \varphi(x) = x + C_0\left(1 + x^2\right).$$

Шундай қилиб, берилган функциялар синфи тенглама учун умумий ечим экан.

2. Ўзгарувчиларини ажратиб ёки бошқача қилиб айтганда, ҳар иккала томонини бир хил функцияга кўпайтириб ёки бўлиб, бир томонида фақат x иккинчи томонида y иштирок этадиган кўринишга келтириш мумкин бўлган дифференциал тенглама ***ўзгарувчилари ажраладиган тенглама*** дейилади. Хусусан,

$$y' = f(x) \cdot g(x), \tag{4}$$

$$M(x) N(y) dx + P(x) \cdot Q(y) dy = 0, \tag{5}$$

кўринишидаги тенгламалар ўзгарувчилари ажраладиган тенгламалардир. Бундай тенгламаларни ечиш учун ўзгарувчиларини ажратиш ва ҳосил бўлган тенгликни интеграллаш керак.

Тенгламанинг ҳар икала томонини x ва y лар иштирок этган ифодага бўлинаётганда шу ифодани нолга айлантириладиган ечимларини йўқотиб қўйишдан эҳтиёт бўлиш керак.

Мисол. $2x^2yy' + y^2 = 2$ тенгламани ечинг.

Ечими. Тенгламани қуйидаги кўринишга келтириб оламиз:

$$2x^2yy' = 2 - y^2 / 2x^2ydy = \left(2 - y^2\right)dx.$$

Ҳосил бўлган тенгликнинг ҳар иккала қисмини $x^2\left(2 - y^2\right) \neq 0$ бўлиб,

$$\frac{2ydy}{1 - y^2} = \frac{dx}{x^2}$$

кўринишдаги ўзгарувчилари ажралган тенгламани оламиз ва интеграллаб:

$$\int \frac{2ydy}{1 - y^2} = \int \frac{dx}{x^2}; \ \ln\left|y^2 - 2\right| = 1/x + \ln C_1,\ C_1 > 0;$$

$$\left|y^2 - 2\right| = C_1 e^{1/x},\ C_1 > 0;$$

$$y^2 - 2 = \pm C_1 e^{1/x},\ C_1 > 0.$$

ечимлар тўпламига эга бўламиз.

Тенгликни $x^2\left(2 - y^2\right)$ га бўлганда $x = 0$ ва $y^2 - 2 = 0$ ёки $y = \pm\sqrt{2}$ ечимлар йўқотилган бўлиши мумкин. Тушунарлики, $x = 0$ тенгламанинг ечими эмас, $y = \pm\sqrt{2}$ эса ечим. Лекин бу ечимларни (6) ечимлар тўпламига бирлаштириш мумкин, бунинг учун $C_1 = 0$ деб олиш кифоя ва демак,

$$y^2-2=Ce^{1/x},\ C\in R.$$

3. $y'=f\left(ax+by+c\right)$ тенглама $z=ax+by+c$ алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтириб ечилади.

Мисол. $y'=y+2x-3$ тенгламани ечинг .

Ечими. $z\left(x\right)=y+2x-3$ алмаштирини бажариб, $z'=y'+2$, $y'=z'+2$ ва тенгламага қўйиб $z'=z+2$ ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани ўзгарувчиларини ажратиб интеграллаймиз:

$$\frac{dz}{dx}=z+2;\ \frac{dz}{z+2}=dx,\ z\neq 2;\ \int\frac{dz}{z+2}=\int dx;$$

$$\ln\left|z+2\right|=x+\ln C_1,\ C_1>0;\ z+2=\pm C_1e^x,\ C_1>0.$$

Бу ерда ҳам олдиндаги пунктдагидек $z+2=0$ ёки $z=-2$ ечим йўқотилган бўлиши мумкин. Ҳақиқатдан ҳам $z=-2$ тенгламанинг ечими ва буни ечимлар тўпламига қўшиб қўйиши учун $C_1=0$ деб олиш кифоя. Шундай қилиб, $z=Ce^x-2,\quad C\in R$ ифодани оламиз, эски ўзгарувчиларга қайтиб, тугал натижага эга бўламиз:

$$y+2x-3=Ce^x-2;\quad y=Ce^x-2x+1.$$

4. Агар ихтиёрий $k>0$ учун $F\left(kx,ky\right)=k^nF\left(x,y\right)$ тенглик ўринли бўлса, $F\left(x,y\right)$га ***n-даражали бир жинсли функция*** дейилади. Масалан,

$$\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},\quad \frac{x^5+xy^4}{x^4+y^4},\quad x^2+y^2-5xy,\quad x^n+x^{n-\lambda}y^\lambda+y^n$$

функциялар мос равишда 0, 1, 2, n-даражали бир жинслидир.

Агар $f\left(x,y\right)$ 0-даражали бир жинсли функция бўлса,

$$y'=f\left(x,y\right)$$

бир жинсли тенглама дейилади. Хусусан, $y'=f\left(y/x\right)$ ва агар $M\left(x,y\right)$, $N\left(x,y\right)$ лар бир хил даражали бир жинсли функциялар бўлса, $M\left(x,y\right)dx+N\left(x,y\right)dy=0$ тенгламалар бир жинслидир.

Бундай тенгламалар $y=x\bigcup\left(x\right)$ алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилиб ечилади.

Мисол. $xy'=y-xe^{y/x}$ тенгламани ечинг.

Ечими. Тенгламанинг ҳар икала томони $x,\ x\neq 0$ га бўлиб, $y'=y/x-e^{y/x}$ кўринишдаги бир жинсли тенгламани оламиз. Энди юқорида айтилганидек, $y=x\bigcup\left(x\right)$ алмаштиришни қўллаймиз, у ҳолда

$$dy = Udx + xdU, \quad y' = dy/dx = U + xdU/dx = U + xU'.$$

$y' = U + xU'$ ни тенгламага қўйиб, қуйидагини оламиз:

$$U + xU' = U - e^U; \quad xU' = -e^U.$$

Ҳосил бўлган тенгламанинг ўзгарувчиларини ажратиб ечамиз:

$$e^{-U}dU = -dx/x; \quad \int e^{-U}dU = -\int dx/x; \quad e^{-U} = \ln|x| + C.$$

Бундан эски ўзгарувчиларга қайтиб

$$e^{-y/x} = -\ln|x| + C$$

ифодани оламиз. Тенгликни x га бўлганимизда $x = 0$ ечимни йўқотишимиз мумкин эди, тушунарлики, $x = 0$ тенгламани ечими эмас, ҳатто аниқлаш соҳасига ҳам кирмайди.

5. $y' = f\left(\dfrac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right)$ тенглама координата бошини

$$a_1x + b_1y + c_1 = 0 \text{ ва } a_2x + b_2y + c_2 = 0$$

тўғри чизиқлар кесишадиган нуқтага кўчириш билан бир жинсли тенгламага келтирилади. Агар бу тўғри чизиқлар кесишмаса, $a_1x + b_1y = k\left(a_2x + b_2y\right)$ тенглик ўринли бўлади ва демак, берилган тенглама $y' = F\left(a_1x + b_1y\right)$ кўринишда экан. Бундай тенгламалар (3 пункт) $z = a_1x + b_1y$ алмаштириш ёрдамида ўзгарувчилари ажраладиган тенгламага келтирилади.

Мисол. $\left(2x - 4y + 6\right)dx + \left(x + y - 3\right)dy = 0$ тенгламани ечинг.

Ечими. Тенгламани бир жинсли ҳолга келтириш учун

$$2x - 4y + 6 = 0 \text{ ва } x + y - 3 = 0$$

тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини топиб координата бошини шу нуқтага кўчирамиз. Бунинг учун қуйидаги системани ечиб

$$\begin{cases} 2x - 4y + 6 = 0 \\ x + y - 3 = 0, \end{cases}$$

$x = 1,\ y = 2$ ларни оламиз. Энди $u = x - 1$ ва $v = y - 2$ алмаштиришни бажарамиз, тушунарлики, бу алмаштиришда координата боши $x = 1,\ y = 2$ нуқтага кўчади.

$$du = dx, \quad dv = dy;$$

$$\left(2\left(\mathrm{u}{+}1\right) - 4\left(v + 2\right) + 6\right)du + \left(u + 1 + v + 2 - 3\right)dv = 0;$$

$$\left(2u - 4v\right)du + \left(u + v\right)dv = 0.$$

Натижада, биз бир жинсли тенгламани олдик, уни ечиш учун $v = u \cdot z$ алмаштиришни бажарамиз:

$$dv = zdu + udz;$$

$$(2u-4uz)du + (u+uz)(zdu+udz) = 0 \text{ ёки}$$

$$\left(2-3z+z^2\right)du + u(1+z)dz = 0.$$

Бу тенгламани ўзгарувчиларини ажратиб ечамиз:

$$\frac{du}{u} = -\frac{1+z}{2-3z+z^2}dz, \quad u \neq 0, \quad 2-3z+z^2 \neq 0;$$

$$\frac{du}{u} = \left(\frac{2}{z-1} - \frac{3}{z-2}\right)dz; \quad \int\frac{du}{u} = \int\frac{2dz}{z-1} - \int\frac{3dz}{z-2};$$

$$\ln|u| = -\ln\frac{|z-2|^3}{|z-1|^2} + \ln C_1, \quad C_1 > 0;$$

$$\ln\left(|u|\frac{|z-2|^3}{|z-1|^2}\right) = \ln C_1, \quad C_1 > 0;$$

$$u\frac{|z-2|^3}{|z-1|^2} = \pm C_1, \quad C_1 > 0.$$

Эски ўзгарувчиларга қайтиб

$$(v/u-2)^3 u = \pm C_1 (v/u-1)^2, \; C_1 > 0;$$

$$(v-2u)^3 = \pm C_1 (v-u)^2, \; C_1 > 0;$$

$$(y-2x)^3 = \pm C_1 (y-x-1)^2, \; C_1 > 0.$$

Тенгликни $2-3z+z^2 = (z-1)(z-2)$ га бўлганимизда $z=1,\ z=2$ ёки x ва y ўзгарувчиларда $y=x+1,\ y=2x$ ечимларни йўқотган бўлишимиз мумкин. $y=2x$ ечимни топилган ечимлар тўпламига қўшиб қўйиш мумкин бунинг учун $C_1=0$ деб олиш кифоя. $y=x+1$ эса ечим ва уни ҳақиқатдан ҳам йўқотганмиз. Шундай қилиб,

$$(y-2x)^3 = C(y-x-1)^2, \quad C \in R, \quad y = x+1$$

ечимлар тўпламига эга бўламиз.

6. $y' = y/x + g(x)\cdot f(y/x)$. Бу тенгламани $y = xv(x)$ алмаштириш ёрдамида $xu' = g(x)\cdot f(u)$ кўринишга келтириш мумкин. Бундай тенгламаларни биз юқорида ўргандик.

7. Умумлашган бир жинсли тенглама. Агар $P(u,v,w)$ функция кўпҳад ёки умумийроқ ҳолда $au^{\lambda}v^{\mu}w^{\nu}$ кўринишдаги ҳадлар йиғиндисидан иборат бўлиб, r ва k ларнинг мос равишда танлаб олинган қийматларида $|r|+|k|>0$ нинг ҳамма ҳадлари бир хил даражали бўлса, $P(x,y,y')=0$ тенглама ***умумлашган бир жинсли*** дейилади. Бундай тенгламалар $y=z^m$ алмаштириш ёрдамида бир жинсли тенгламага келтирилади. Одатда m номаълум бўлади, уни топиш учун тенгламада $y=z^m$ $\left(y'=z^{m-1}z'\right)$ алмаштиришни бажариш керак. Ҳосил бўлган тенгламани бир жирсли деб фараз қилиб, m ни топилади, агар бундай m ни топиш мумкин бўлмаса, берилган тенгламани бу усул билан бир жинсли тенгламага келтириб бўлмайди. У ҳолда бошқачароқ алмаштиришлар қилишга ҳаракат қилиб кўриш керак, масалан,

$r\neq 0$ бўлганда $y(x)=|x|^k\,\eta(\xi),\quad \xi=\ln|x|;$

$r=0$ бўлганда $y'=u(x)y$ ва ҳоказо.

Мисол. $y'=y^2-2/x^2$ тенгламани ечинг.

Ечими. Тенгламада $y=z^m$ алмаштириш бажарамиз:

$y'=m\cdot z^{m-1}z'$ бўлгани учун $m\cdot z^{m-1}z'=z^{2m}-2x^{-2}$.

Бу тенгламани бир жинсли фараз қилиб,

$$m-1=2m=-2;\quad m=-1$$

тенгликни оламиз. Демак, юқоридаги тенгламани $y=z^{-1}=1/z,\ y\neq 0$ алмаштириши ёрдамида бир жинсли тенгламага келтириш мумкин экан. Шу алмаштиришни бажарайлик: $y'=-z^1/z^2$. Буни тенгламага қўйиб қуйидагини оламиз:

$$z'=2\cdot z^1/x^2-1.$$

Бу тенглама бир жинсли тенглама бўлгани учун энди $z/x=u$ ёки $z=xu(x)$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда

$$dz=xdx+udx,\ z'=u+u'x,\ z=xu(x)$$

бўлади. Буни тенгламага қўйиб,

$$u+u'x=2u^2-1;\ \ xu'=2u^2-u-1;$$

$$\frac{du}{\left(2u^2-u-1\right)}=\frac{dx}{x};\ \ 2u^2-u-1\neq 0$$

тенгликка эга бўламиз. Охирги тенгликни интеграллаб ва эски ўзгарувчиларга қайтиб қуйидагиларни оламиз:

$$\int\frac{du}{\left(2u^2-u-1\right)}=\int\frac{dx}{x};\quad \frac{1}{3}\int\frac{du}{(u-1)(u+1/2)}=\int\frac{dx}{x};$$

$$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{u-1}{u+1/2}\right|=\ln|x|+\frac{1}{3}\ln 2C_1,\quad C_1>0;\quad \left|\frac{u-1}{u+1/2}\right|^{1/3}\cdot\frac{1}{\left(2C_1\right)^{1/3}}=|x|;$$

$$\left|\frac{z/x-1}{z/x+1/2}\cdot\frac{1}{2C_1}\right|^{1/3}=|x|;\quad \frac{1/xy-1}{1/xy+1/2}=\pm 2C_1x^3,\quad C_1>0;$$

$$1-xy=\pm C_1x^3\left(2+xy\right),\quad C_1>0.$$

Юқорида алмаштириш бажарганимизда $y=0$ тенгликни иккала қисмини $2u^2-u-1=(u-1)(2u+1)$ га бўлганимизда $u=1,\ 2u=-1$ ёки эски ўзгарувчиларда $xy=1,\ xy=-2$ ечимларни йўқотган бўлишимиз мумкин. $y=0$ тенгламани ечими эмас, $xy=1$ тенгламанинг ечими ва уни юқорида олинган ечимлар тўпламига бирлаштириб юборилса бўлади, бунинг учун $C_1=0$ деб олиш кифоя. $xy=-2$ тенгламани ечими ва уни юқоридаги тўплам ифодасига киритиб бўлмайди.

Шундай қилиб, қуйидаги ечимлар тўпламини олдик:

$$1-xy=Cx^3\left(2+xy\right),\quad C\in R;\quad xy=-2.$$

8. Физик масалалар. Физик масалаларни ечишда аввало қайси миқдорни эркли ўзгарувчи, қайсинисини изланаётган функция сифатида олишни аниқлаш лозим. Кейин эса *x* миқдорга Δx орттирма берилганда масалада айтилаётган у миқдор қанчага ўзгаришини (яъни Δx орқали $y(x+\Delta x)-y(x)$ ни) аниқлаш керак. Олинган тенгликни иккала қисмини Δx га бўлиб, $\Delta x\to 0$ да лимитга ўтсак, дифференциал тенгламага эга бўламиз, уни ечиб, изланаётган функцияни топиб оламиз. Баъзи ҳолларда ҳосиланинг физик маъносидан фойдаланиб (агар *t* эркли ўзгарувчи бўлса, dy/dx *y* миқдорнинг ўзгариш тезлиги), дифференциял тенгламани қийинчиликсиз тузиш мумкин бўлади.

Мисоллар.

1) Ичида 20 л. Суви бўлган идишга ҳар литрда 0,2 кг туз булган қоришма минутига 5 л. Тезлик билан узулксиз қуйилаяпти. Идишда қоришма сув билан аралашиб, худи шу тезликда чиқиб кетаяпти. 4 минутдан кейин идишдаги туз миқдори қанча бўлади?

Ечими. $y(t)$ орқали *t* минутдан кейинги идишдаги тузнинг миқдорини белгилаймиз. $[t,t+\Delta t]$ оралиқда идишдаги идишдаги тузнинг миқдори қанчага ўзгаришини ҳисоблайлик. Δt вақт идишга 5 Δt миқдор қоришма тушади. Бу қоришманинг таркибида $0,2\cdot 5\cdot\Delta t=\Delta t$ кг туз бор.

Шу вақтнинг ичида идишдан 5 л қоришма чиқиб кетади. t моментда идишдаги тузнинг миқдори $y(t)$ кг эди, агар Δt вақтда идишдаги тузнинг миқдори ўзгармаса, 5 Δt л чиқиб кетаётган аралашма

$$y(t)/20\cdot 5\cdot \Delta t = 0,25\,y(t)\Delta t \text{ кг}$$

туз бор. Умуман олганда идишдаги тузнинг миқдори қандайдир α га ўзгаради ($\Delta t \to 0$ да $\alpha \to 0$), шунинг учун идишдан Δt вақтда оқиб чиққан тузнинг миқдори $0,25\big(y(t)+\beta\big)\Delta t$ кг бўлади, бу ерда $0<\beta<\alpha.$

Шундай қилиб $[t, t+\Delta t]$ вақт оралиғида идишга Δt кг туз тушади, $0,25\big(y(t)+\beta\big)\Delta t$ кг туз идишдан оқиб чиқади. Бундан

$$y(t, t+\Delta t) - y(t) = \Delta t - 0,25\big(y(t)+\beta\big)\Delta t$$

тенгликни оламиз. Тенгликни ҳар иккала томони Δt га бўлиб, $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтамиз. Агар биз $\Delta t \to 0$ да $\beta \to 0$ эканлигини эътиборга олсак, $y'(t) = 1 - 0,25y(t)$ дифференциял тенгламани оламиз. Бу тенгламанинг умумий интеграли $y(t) = 4 + Ce^{-t/4}$ кўринишда бўлади. $t=0$ да идишдаги тузнинг миқдори $y(0)=0$ бўлганлиги учун

$$y(0) = 4 + Ce^{0} = 4 + C = 0,$$

демак, $C=-4.$ Шундай қилиб, идишдаги тузнинг миқдори

$$y(t) = 4\left(1-e^{-t/4}\right)$$

қонун билан ўзгаради. $t=4$ моментдаги тузнинг миқдори $y(t) = 4\left(1-e^{-1}\right)$ кг га тенг бўлади.

2) Узунлиги L ва диаметри D бўлган темир темир йўл цистернаси керосин билан тўлдирилган. Керосин цистерна остида жойлашган ва кесим юзи ω бўлган қисқа чиқиш найчаси орқали оқизиб юборилганда цистерна қанча вақтда бўшашини аниқланг.

Ечими. Аввал бундай умумий ҳолда қандай ҳал қилинишини тушунтирамиз. Фараз қилайлик, кўндаланг кесим юзи S баландлик h нинг маълум $S = S\ (h)$ функцияси бўлган идиш H сатҳгача суюқлик билан тўлдирилган бўлсин. Идиш тубида юзи ω бўлган тешик бўлиб, ундан суюқлик оқиб чиқади. Суюқлик сатҳи дастлабки H ҳолатдан исталган h гача пасайиш вақти t ни ва идишнинг тўла бўшаш вақти T ни аниқлаймиз. Биз идишдаги суюқлик сатҳи нинг маълум $v = v\ (h)$ функцияси деб фараз қиламиз.

Бирор t моментда идишдаги суюқлик баландлиги h га тенг бўлсин. $\left[t, t+\Delta t\right]$ вақт оралиғида идишдан оқиб чиқадиган суюқлик миқдори ΔV ни топайлик: $\Delta V = \omega v\left(h\right)\Delta t,$ иккинчи томондан $\Delta V = -S\left(h\right)\Delta t$ (пасайганлиги учун манфий ишора билан олинди) бўлгани учун $\omega v\left(h\right)\Delta t = -S\left(h\right)\Delta t$ тенгликни оламиз. Тенгликни ҳар икки томони Δt га бўлиб, $\Delta t \to 0$ да лимитга ўтсак, қуйидаги дифференциал тенгламани оламиз:

$$dt = -\frac{S\left(h\right)}{\omega v\left(h\right)}dh.$$

Бу тенгламани интеграллаб,

$$t = -\frac{1}{\omega}\int_{H}^{h}\frac{S\left(h\right)}{\upsilon\left(h\right)}dh = \frac{1}{\omega}\int_{h}^{H}\frac{S\left(h\right)}{\upsilon\left(h\right)}dh$$

ечимни оламиз.

Идиш тўла бўшаганда h = 0 бўлгани учун унинг тўла бўшаш пайти Т қуйидагича топилади:

$$T = -\frac{1}{\omega}\int_{0}^{h}\frac{S\left(h\right)}{\upsilon\left(h\right)}dh.$$

Агар суюқлик кичик тешикдан ёки қисқа найчадан оқиб чиқаётган бўлса, Торричелли қонунига мувофиқ $\upsilon = \sqrt{2gh}\mu,$ бу ерда g – оғирлик кучи тезланиши, μ – эмпирик коэффициент (сарф бўлиш коэффициенти). У ҳолда ҳосил қилинган ифодалар қуйидаги кўринишни олади:

$$t = -\frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_{h}^{H}\frac{S\left(h\right)}{\sqrt{h}}dh, \qquad T = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_{0}^{H}\frac{S\left(h\right)}{\sqrt{h}}dh.$$

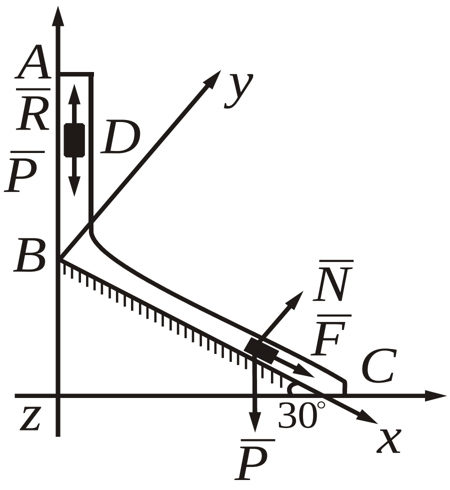
Бизнинг конкрет мисолимизда

$$S\left(h\right) = 2xL = 2L\sqrt{R^2 - \left(h-R\right)^2} = 2L\sqrt{\left(D-h\right)h}$$

бўлгани учун

$$T = \frac{1}{\omega\mu\sqrt{2g}}\int_{0}^{D}\frac{\left(D-h\right)h}{\sqrt{h}}dh = \frac{4LD\sqrt{D}}{3\omega\mu\sqrt{2g}}.$$

3) Массаси m бўлган D юк A нуқтада υ_0 бошланғич тезлик олиб ABC букилган трубада (*1-расмга қаранг*) ҳаракат қиляпти. AB бўлакка юкка оғирлик кучидан ташқари юкнинг υ тезлигига боғлиқ бўлган R қаршилик кучи таъсир этади. B нуқтадан юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг BC бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари F ўзгарувчи куч ҳам таъсир қилади. AB ва F_x (F_x – F кучнинг x ўқдаги проекцияси) маълум бўлса, юкнинг BC бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.



1-расм.

Берилган: m = 2 кг, $R = \mu\upsilon^2$, бу ерда $\mu = 0,4$ кг/м, $\upsilon_0 = 5$ м/с, $l = 2,5$ м, $F_x = 16\sin 4t$.

Топиш керак: $x = f(t)$ юкнинг BC бўлакдаги ҳаракат қонуни.

Ечими. ***а)*** Юкни материал нуқта деб қараб, AB бўлакдаги ҳаракатини кўриб чиқамиз. Юкка (ихтиёрий ҳолатда) таъсир қилувчи $\bar{P} = m\bar{g}$ ва R кучлар чизмада тасвирланган. Az ўқни ўтказиб, юкнинг ҳаракатини шу ўққа проекцияси дифференциял тенгламасини тузамиз:

$$m\frac{d\upsilon_z}{dt} = \Sigma F_{kz} \text{ ёки } \frac{d\upsilon_z}{dt} = \frac{d\upsilon_z}{dz}\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_z}{dz}\upsilon_z$$

бўлгани учун

$$m\upsilon_z\frac{d\upsilon_z}{dz} = P_z + R_z. \tag{1}$$

$R_z = P = mg$, $R_z = -R = -\mu\upsilon^2$, $\upsilon_z = \upsilon$ эканлигини эътиборга олсак, қуйидаги тенгликни оламиз:

$$m\upsilon\frac{d\upsilon}{dz}mg - \mu\upsilon^2 \text{ ёки } \upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = \frac{\mu}{m}\left(\frac{mg}{\mu} - \upsilon^2\right). \tag{2}$$

Ёзувни енгиллатиш учун

$$k = \mu/m = 0,72 \text{ м}^{-1},\ n = mg/\mu = 50 \text{ м}^2/\text{с}^2 \tag{3}$$

белгилашларни киритамиз (бу ерда $g \approx 10\text{м}^2/\text{с}^2$ деб олинди). У ҳолда (2) тенгламани

$$2\upsilon\frac{d\upsilon}{dz} = -2k\left(\upsilon^2 - n\right) \tag{4}$$

кўринишда ёзиш мумкин.

Ўзгарувчиларни ажратиб, ҳар иккала томонини интеграллаб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$\frac{2\upsilon d\upsilon}{\upsilon^2 - n} = -2kdz; \quad \ln\left(\upsilon^2 - n\right) = -2kz + C_1. \tag{5}$$

$z = 0$ да $\upsilon = \upsilon_0$ бўлгани учун (5) тенгликка кўра $C_1 = \ln\left(\upsilon_0^2 - n\right)$. Буни (5) тенгликка қўйиб,

$$\ln\left(\upsilon^2 - n\right) = -2kz + \ln\left(\upsilon_0^2 - n\right) \text{ ёки } \ln\left(\upsilon^2 - n\right) - \ln\left(\upsilon_0^2 - n\right) = -2kz$$

тенгликни оламиз. Буни эса

$$\upsilon^2 = n + \left(\upsilon_0^2 - n\right)e^{-kz} \tag{6}$$

тенгликни оламиз. (6) тенгликда $z = l = 2{,}5$ м, k, n лар (3) тенглик орқали ифодаланган эканлигини ҳисобга олиб, юкнинг B нуқтадаги υ_B тезликни топамиз:

$$\upsilon_B^2 = 50 - 25/e; \quad \upsilon_B = \sqrt{50 - 25/e} \approx 6{,}4 \text{ м/с}. \tag{7}$$

б) Энди юкнинг BC бўлакдаги ҳаракатини ўрганамиз: топилган υ_B тезлик юкнинг янги бўлакдаги бошланғич тезлиги $\left(\upsilon_0 = \upsilon_B\right)$ бўлади. Юкнинг ихтиёрий ҳолатида таъсир этувчи кучларни $\overline{P} = m\overline{g}$, $\overline{N}$, F билган ҳолда, B нуқтадан Bx ўқни ўтказиб, унинг ҳаракатини шу ўққа проекцияси дифференциfл тенгламасини тузамиз:

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = P_x + N_x + F_x. \tag{8}$$

$P_x = P\sin 30° = 0{,}5\, mg$, $N_x = 0$, $F_x = 16\sin 4t$ бўлгани учун (8) тенглама қуйидаги кўринишни олади

$$m\frac{d\upsilon_x}{dt} = 0{,}5\, mg + 16\sin 4t. \tag{9}$$

$m = 2$ кг, $g = 10\text{м/с}^2$ эканлигини эътиборга олиб, тенгламани интегралласак

$$\upsilon_x = 5t - 2\cos 4t + C_z \tag{10}$$

га эга бўламиз. t = 0 да $\upsilon_x = \upsilon_0 = \upsilon_B$ бўлгани учун (10) тенгликдан қуйидагини оламиз

$$C_z = \upsilon_B + 2\cos 0 + 6{,}4 + 2 = 8{,}4. \tag{11}$$

Буни (10) га қўйиб, ҳар иккала томонини dt га кўпайтириб интегралласак

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = 5t - 2\cos 4t + 8{,}4; \quad x = 2{,}5t^2 - 0{,}5\sin 4t + 8{,}4t + C_a$$

келиб чиқади. $t = 0$ да $x = 0$ бўлгани учун $C_a = 0$ бўлади. Демак, юкнинг BC бўлакдаги ҳаракат қонуни

$$x = 2,5t^2 - 0,5\sin 4t + 8,4t \qquad (12)$$

кўринишда бўлади (бу ерда x материалларда, t эса секундларда ўлчанган).

9. Геометрик масалаларни ечишда, аввал чизмани чизиб олиш керак. Кейин изланаётган функцияни $y = y(x)$ орқали белгилаб масала шартини миқдорларни x, y ва y' (y' уринманинг бурчак коэффициенти эканлигидан фойдаланиш керак)лар орқали ифодаланса, ҳосил бўлган тенглик дифференциал тенглама бўлади. Дифференциал тенгламани ечиб, $y = y(x)$ изланаётган функцияни топамиз.

Мисол. $F(x, y, C_1)$ эгри чизиқлар (C_1 – параметр) оиласининг изогонал траекторияларини топинг (шу оила эгри чизиқлари билан бир хил φ бурчак остида кесишувчи бошқа бир оила изогонал траекториялари дейилади)

Ечими. Берилган чизиқлар оиласининг дифференциал оиласини тузамиз. Бунинг учун қуйидаги системадан C параметрни йўқотамиз:

$$\begin{cases} F(x, y, C) = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial F}{\partial y} y' = 0. \end{cases} \qquad (1)$$

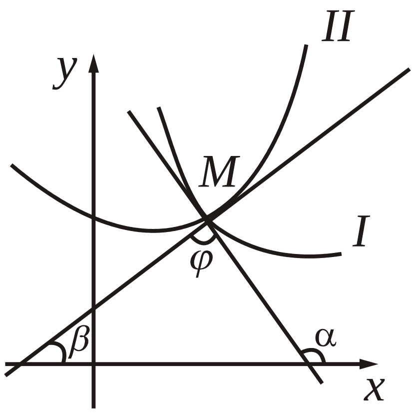
Натижада берилган чизиқлар оиласининг

$$y' = f(x, y)$$

кўринишдаги тенгламасини оламиз (бу ерда умуман олганда $g(x, y, y') = 0$ кўринишдаги тенглама ҳосил бўлади, биз уни y' га нисбатан ечиб олиш мумкин деб фараз қиламиз).

Маълумки, $M(x, y)$ нуқтада кесишувчи икки эгри чизиқ орасидаги бурчак деб, эгри чизиқларга бу нуқталарда ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади. Бири биринчи (берилган), иккинчиси иккинчи (топиш керак бўлган) чизиқлар оиласига тегишли бўлган $M(x, y)$ нуқтада ўзаро кесишувчи ихтиёрий иккита чизиқни I ва II деб белгилаб олайлик (*2-расмга қаранг*). I ва II чизиқларга M нуқтада ўтказилган уринмаларнинг OX ўқи билан ҳосил қилган бурчакларни мос равишда α ва β билан белгиласак, I ва II чизиқлар орасидаги бурчак $\varphi = \pm(\beta - \alpha)$ бўлади. Бундан

$$tg\beta = \frac{tg\alpha \pm tg\varphi}{1 \pm tg\varphi\, tg\alpha} \tag{2}$$



2-расм.

тенгликни оламиз. Тушунарлики, $tg\varphi$ – маълум (φ бурчак берилган),

$$tg\alpha = f(x,y),\ tg\beta = y'$$

(y' чизиққа берилган нуқтадан ўтказилган уринманинг бурчак коэффициентини беради).

Демак, (2) муносабат

$$y' = \frac{f(x,y) \pm tg\varphi}{1 \pm tg\varphi\ f(x,y)} \tag{3}$$

кўринишида бўлади. Бу умумий интеграли берилган эгри чизиқлар оиласи учун изогонал траекториялар бўлади, улар берилган эгри чизиқларни бир хил φ бурчак остида кесиб ўтади. Агар траекториялар ортогонал бўлса, у ҳолда

$$\varphi = \pi/2,\ \beta = \alpha \pm \pi/2,\ tg\beta = -ctg\alpha = -1/tg\alpha = -1/f(x,y)$$

бўлиб, ортогонал траекториялар оиласининг дифференциал тенгламаси ушбу кўринишда бўлади:

$$y' = -\frac{1}{f(x,y)}. \tag{4}$$

Хусусан, $y = C_1 x^4$ чизиқлар оиласига ортогонал бўлган (чизиқлар оиласини) траекторияларини топиш керак бўлсин.

Аввало, $y = Cx^4$ чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламасини тузиб оламиз:

$$\begin{matrix} y = C_1 x^4 \\ y' = 4C_1 x^3 \end{matrix} \quad \rightarrow \quad y' = 4y/x.$$

Демак, берилган чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламаси $y' = 4y/x$ экан. (4) тенгликка кўра изланаётган траекторияларнинг дифференциал тенгламаси

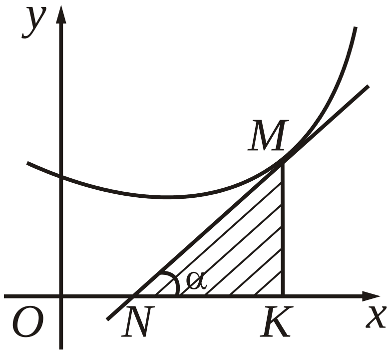
$$y' = -x/4y \tag{5}$$

кўринишда бўлади. Бу дифференциал тенгламани ечамиз

$$4ydy = -xdx;\quad \int 4ydy = -\int xdx;\quad 2y^2 = -x^2/2 + C_2.$$

Демак, изланаётган чизиқлар оиласининг тенгламаси $2y^2 = -x^2/2 + C_2$ бўлади.

Мисол. Шундай чизиқни топингки, унинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринма, уриниш нуқтаси ординатаси ва абсциссалар ўқи хосил қилган учбурчак юзи ўзгармас a^2 га тенг бўлсин.



3-расм.

Ечими. Изланаётган чизиқнинг ихтиёрий $M(x,y)$ нуқтасини олайлик (3-расмга қаранг). Тушунарлики, чизиққа $M(x,y)$ нуқтадан ўтказилган уринма билан OX ўқи орасидаги бурчак α учун $tg\alpha = y'$ тенглик ўринли. Биз қуйидагиларга эгамиз:

$$MK = y; \quad NK = \frac{y}{tg\alpha} = \frac{y}{y'};$$

$$S = \frac{1}{2}|MK||NK| = \frac{1}{2}\frac{y^2}{|y'|}.$$

Иккинчи томондан $S = a^2$, демак, қуйидаги дифференциал тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{1}{2}\frac{y^2}{y'} = \pm a^2 \quad \text{ёки} \quad y' = \pm\frac{1}{2a^2} + C.$$

Бу тенгламани ўзгарувчиларини ажратиб ечамиз:

$$\frac{dy}{y^2} = \pm\frac{1}{2a^2}dx; \quad \int\frac{dy}{y^2} = \pm\frac{1}{2a^2}\int dx; \quad -\frac{1}{y} = \pm\frac{x}{2a^2} + C.$$

Шундай қилиб, биз масаланинг ечимини олдик, изланган чизиқ $-\frac{1}{y} = \pm\frac{x}{2a^2} + C$ кўринишида бўлар экан.

Дифференциал тенгламани ечинг

1. $\sqrt{y}dx + x^2dy = 0$

2. $\left(1+y^2\right)dx = xdy$

3. $\cos^2 ydx - \left(x^2+1\right)dy = 0$

4. $\left(1+x^3\right)y' = 3x^2y, \quad y(0) = 2$

5. $y' = \sqrt[3]{2x-y} + 2$

6. $dx - xdy = 2ydy, \quad y(0) = -1$

7. $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0$

8. $tg\,x\sin^2 y\,dx + \cos^2 x\,ctg\,y\,dy = 0$

9. $4xdx - 3ydy = 3x^2ydy - 2xy^2dx$

10. $y' = \sin^2 x$

11. $y' = 5x\left(1 - x^2\right)^{3/2}$

12. $y' + 1/y^2 = 1$

13. $\sqrt{4 + y^2}dx - ydy = x^2 ydy$

14. $3e^x tg\, ydx + \left(1 - e^x\right)\sec^2 ydy = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^{-y^2}}{y} x$ сон $x,\ y > 0$

16. $z' = 2^{x+z},\ \ z(0) = -1$

17. $y' + 1 = \sqrt{x + y}$

18. $y' = \cos(y - x)$

19. $y'(x + y)^2 = 1$

20. $y' + y\sin 2x = 0,\ y(\pi/4) = 1$

21. $y' = e^{x-y} - 1$

22. $y' = -2\sqrt{|y|}$

23. $y' = \cos(y - x - 1)$

24. $y' = \sqrt[3]{(4x - y + 1)^2}$

25. $y' = tg\,(y - 2x)$

26. $y' = \sin(y - x - 1)$

27. $y' = y^2/x^2 + 4y/x + 2$

28. $xy'\cos(y/x) = y\cos(y/x) - 1$

29. $y' = (x + y)/(x - y)$

30. $xy' = y\left(1 + \ln(y/x)\right)$

31. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$

32. $(xy' - y)\ln(y/x) = y$

33. $2y' = y^2/x^2 + 6y/x + 3$

34. $xy' = y\ln(y/x)$

35. $xy' = \dfrac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}$

36. $\left(x - y\cos(y/x)\right)dx + x\cos(y/x)dy = 0$

37. $y' = \dfrac{4y - 2x - 6}{x + y - 3}$

38. $y' = \dfrac{5y + 5}{4x + 3y - 1}$

39. $y' = \dfrac{x + y + 2}{x + 1}$

40. $y' = \dfrac{2x + y - 3}{2x - 2}$

41. $y' = \dfrac{x + 5y - 6}{7x - y - 6}$

42. $y' = 2\left(\dfrac{y + 2}{x + y - 1}\right)$

43. $\left(x^2y^2 - 1\right)y' + xy^3 = 0$

44. $\left(y^4 - 3x^2\right)dy + xydx = 0$

45. $2y' + x = 4\sqrt{y}$

46. $y^3dx + 2\left(x^2 - xy^2\right)dy = 0$

47. $x^2y'^2 - 3xyy' + 2y^2 = 0$

48. $2x^2y' = y^3 + xy$

Тенгламани берилган шартини қаноатлантирувчи ечимини топинг

49. $x^2y'\cos y + 1 = 0,\ \ x \to +\infty$ да $y \to 16/3\cdot\pi$.

50. $e^y = e^{4y}y' + 1,\ \ x \to +\infty$ да y чегараланган.

51. α ва β ларнинг қандай қийматларида $y' = ax^{\alpha} + by^{\beta}$ тенгламани $y = z^{m}$ алмаштириш ёрдамида бир жинсли тенгламага келтириш мумкин?

52. Идишда 10 кг туз солинган 100 литрли қоришма бор. Идишга узлуксиз сув қуйиб (минутига 5 л) у қооришма билан аралашаётган бўлсин. Агар қоришма шундай тезлик билан идишдан чиқиб кетаётган бўлса, бир соатдан кейин идишда қанча туз қолади.

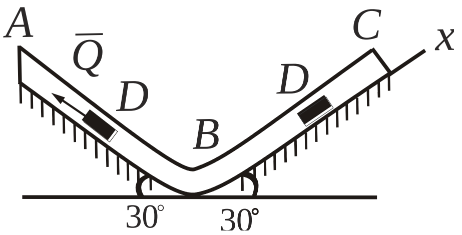
53. Материал нуқта тўғри чизиқ бўйлаб α тезланиш билан ҳаракат қилиняпти. Шу нуқтанинг ҳаракат қонунини топинг.

54. Тандирдан узиб олинган ноннинг температураси 20 минутда 100° дан 60° га тушади. Узиб олгандан неча минут кейин ноннинг температураси 30° бўлади?

55. Моторли қайиқ тинч сувда $\upsilon_0 = 20$ км/соат тезлик билан ҳаракат қилаяпти. Шу юришда қайиқнинг мотори ўчириб қўйилди ва 40 секунддан сўнг унинг тезлиги 8 км/соат бўлиб қолди. Сувнинг қаршилиги қайиқнинг тезлигига тўғри пропорционал бўлса, қайиқнинг мотори ўчирилгандан 2 минут кейинги тезлигини топинг.

56. Идиш конус шаклида бўлиб, асосининг радиуси R = 0,4 м, баландлиги H = 1 м, учи эса пастга қаратилган. Агар идишнинг учида 15 см диаметрли тешик бўлса, ундаги тўла сув қанча вақтда оқиб бўлади? (Сувнинг сатхи тешикдан h баландликда бўлганда унинг тезлиги $\upsilon = 0,6\sqrt{2gh}$ бўлади деб ҳисоблансин).

57. Массаси m = 6 кг бўлган D юк A нуқтада $\upsilon_0 = 15$ км/с бошланғич тезлик олиб, букилган ABC трубада (4-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин. AB бўлакда юкка оғирлик кўчидан ташқари $Q = 12\,H$ ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг υ тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши) $R = 0,6\,\upsilon^2$ қаршилик кучи таъсир этади, B нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг BC бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари F ўзгарувчи куч таъсир қилади. $AB = 5$ м ва $F_x = -5\sin 2t\left(F_x - F\right)$ кучнинг x ўқдаги проекцияси) эканлигини билган ҳолда юкнинг BC бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.



4-расм.

58. Қуйидаги чизиқлар оиласига ортогонал бўлган траекторияларни топинг: а) $y = Cx^2$; б) $y^2 = x + C$; в) $y = Ce^x$.

59. Координата бошидан ўтувчи, ўқи OY ўқига параллел бўлган барча параболаларнинг дифференциал тенгламасини тузинг.

60. Шундай чизиқларни топингки, уларда ихтиёрий уринмаларнинг абсцисса ўқи билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси уриниш нуқтасининг абсциссасидан икки марта ката бўлсин.

61. Шундай чизиқларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси, уриниш нуқтасининг абсциссаси ва ординатаси айирмасига тенг бўлсин.

62. Қуйидаги хоссага эга бўлган чизиқларни топинг: чизиққа ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринма ва нормаларнинг абсцисса ўқидан ажратган кесмаси $2a$ га тенг.

2-§. 1-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

Синов учун савол ва топшириқлар

1. Ўзгарувчилари ажраладиган дифференциал тенглама андай ечилади?

2. Ўзгарувчиларни алмаштириш ёрдамида қандай дифференциал тенгламаларни келтириш мумкин?

3. Биринчи тартибли бир жинсли дифференциал тенглама қандай ечилади?

4. Ушбу $y' = f\left(\dfrac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ кўринишдаги тенглама қандай усул билан бир жинсли тенгламага келтирилади?

5. Умумлашган бир жинсли тенгламалар ва уларни бир жинсли тенгламага келтириш усуллари.

6. $y' = \dfrac{y+2}{y+2x-4}$ тенгламани ечинг.

7. $\left(x^2y^2-1\right)y' + 2xy^3 = 0$ тенгламани ечинг.

1. Дифференциал тенгламани ечинг

1.1. a) $x\sqrt{3+y^2}dx + y\sqrt{2+x^2}dy = 0$

b) $y^2\sin xdx + \cos^2 x\ln ydy = 0$

1.2. a) $y'y\sqrt{\dfrac{1-x^2}{1-y^2}}+1=0$

b) $y'=(\sin\ln x+\cos\ln x+a)y$

1.3. a) $x\sqrt{5+y^2}dx+y\sqrt{4+x^2}dy=0$

b) $3y'\sin x\sin y+5\cos x\cos^3 y=0$

1.4. a) $\sqrt{4-x^2}y'+xy^2+x=0$

b) $y'+\cos\dfrac{x+y}{2}=\cos\dfrac{x-y}{2}$

1.5. a) $\sqrt{5+y^2}+y'y\sqrt{1-x^2}=0$

b) $\sec^2 x\,tgy\,dx+\sec^2 y\,tgx\,dy=0$

1.6. a) $6xdx-ydy=yx^2dy-3xy^2dx$

b) $y'+\sin(x-y)=\sin(x+y)$

1.7. a) $\sqrt{1-x^2}y'+xy^2+x=0$

b) $\sin(\ln x)dx-\cos(\ln y)dy=0$

1.8. a) $\sqrt{3+y^2}+\sqrt{1-x^2}yy'=0$

b) $\sin x\,dx-y\ln y\,dx=0$

1.9. a) $\sqrt{5+y^2}dx+4(x^2y+y)dy=0$

b) $y'+\sin\dfrac{x+y}{2}=\sin\dfrac{x-y}{2}$

1.10. a) $3(x^2y+y)dy+\sqrt{2+y^2}dx=0$

b) $y'+\cos(x-y)=\cos(x+y)$

1.11. a) $2x+2xy^2+\sqrt{2-x^2}y'=0$

b) $\sin y+\cos x\,dy=\cos y\sin x\,dx$

1.12. a) $20x\,dx-3y\,dy=3x^2y\,dy-5xy^2dx$

b) $(1+y)(e^xdx-e^{2y}dy)+(1+y^2)dy=0$

1.13. a) $y(4+e^x)dy-e^xdx=0$

b) $y'\sin y\cos x+\cos y\sin x=0$

1.14. a) $(e^x+8)dy-ye^xdx=0$

b) $y'+\dfrac{x\sin x}{y\cos y}=0$

1.15. a) $\left(3+e^{x}\right)yy'=e^{x}$

b) $x\sqrt{1-y^{2}}dx+y\sqrt{1-x^{2}}dy=0$

1.16. a) $x^{2}\left(y+1\right)dx+\left(x^{3}-1\right)\left(y-1\right)dy=0$

b) $ye^{2x}dx-\left(1+e^{2x}\right)dy=0$

1.17. a) $y\left(1+\ln y\right)+xy'=0$

b) $tg\,y\,dx-ctg\,x\,dy=0$

1.18. a) $\left(xy^{4}-x\right)dx+\left(y+xy\right)dy=0$

b) $1+x+\left(1+x^{2}\right)\left(e^{x}-e^{2y}y'\right)=0$

1.19. a) $y'-y^{2}-3y+4=0$

b) $\left(1+x^{2}\right)dy+y\sqrt{1+x^{2}}dx-xydx=0$

1.20. a) $\left(1-x^{2}\right)y'-xy=xy^{2}$

b) $\left(1+y^{2}\right)\left(e^{2x}dx-e^{y}dy\right)-\left(1+y\right)dy=0$

2. Дифференциал тенгламани ўзгарувчини алмаштириш йўли билан ечинг

2.1. $\left(2x+3y-1\right)dx+\left(4x+6y-5\right)dy=0$

2.2. $\left(2x-y\right)dx+\left(4x-2y+3\right)dy=0$

2.3. $\left(x^{2}+y^{2}\right)dx=xydy$ (қутб координаталарга ўтинг)

2.4. $y'=\dfrac{\sqrt{x^{2}+y^{2}}-x}{y}$ (қутб координаталарга ўтинг)

2.5. $y'=\left(8x+2y+1\right)^{2}$

2.6. $y'=\left(4x+y+1\right)^{2}$

2.7. $\left(x+2y+1\right)y'=\left(2x+4y+3\right)$

2.8. $y'+2y=3x+5$

2.9. $e^{x-y}y'=1$

2.10. $\left(x+y\right)^{2}y'=a^{2}$

2.11. $y'=\dfrac{1}{2x+y}$

2.12. $y' = \dfrac{1-3x-3y}{1+x+y}$

2.13. $(2x+2y-1)dy+(x+y-2)dy=0$

2.14. $(x-y+2)dx+(x-y+3)dy=0$

2.15. $y'=(4x+y-3)^2$

2.16. $y'-1=e^{x+2y}$

2.17. $y'=\cos(ay+bx), \quad a=0$

2.18. $y'\sqrt{1+x+y}=x+y-1$

2.19. $y'=\dfrac{3x-4y-2}{3x-4y-3}$

2.20. $y'=\sin(x-y)$

3. Диференциал тенгламани ечинг

3.1. a) $y'=\dfrac{x+2y}{2x+y}$

b) $x\ln\dfrac{x}{y}dy-ydx=0$

3.2. a) $xy'=2\sqrt{x^2+y^2}-y$

b) $y'=y/x+tg(y/x)$

3.3. a) $3y'=y^2/x^2+8y/x+4$

b) $y'=y/x+\sin(y/x)$

3.4. a) $xy'=\dfrac{3y^3+6yx^2}{2y^2+3x^2}$

b) $x\left(y'+e^{y/x}\right)=y$

3.5. a) $y'=\dfrac{x^2+xy+y^2}{x^2-2xy}$

b) $xdy-y\cos\ln(y/x)dx=0$

3.6. a) $xy'=\sqrt{2x^2+y^2}+y$

b) $\left(1+e^{y/x}\right)dx+e^{x/y}(1-x/y)dy=0$

3.7. a) $xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}$

b) $y' = y/x + e^{y/x}$

3.8. a) $y' = \frac{x^2 + 2xy + y^2}{2x^2 - 2xy}$

b) $y' = y/x + e^{y/x}$

3.9. a) $xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}$

b) $xy' = xe^{y/x} + y + x$

3.10. a) $y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}$

b) $xy' + x\cos(y/x) - y + x = 0$

3.11. a) $xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y$

b) $xy'ch(y/x) + 2xsh(y/x) - ych(y/x) = 0$

3.12. a) $2y' = y^2/x^2 + 8y/x + 8$

b) $(xy' - y)\cos^2(y/x) = xy'$

3.13. a) $xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}$

b) $(y\sin(y/x) - x\cos(y/x)) = xy'$

3.14. a) $y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}$

b) $dy/dx = \cos^2(y/x) + y/x$

3.15. a) $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}$

b) $(x - y\sin(y/x))dx + x\sin(y/x)dy = 0$

3.16. a) $xy' = 2\sqrt{3x^3 + y^2} + y$

b) $y' = y/x + \cos(y/x)$

3.17. a) $xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}$

b) $ydx = x(1 + \ln x - \ln y)dy$

3.18. a) $xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y$

b) $dx = \left(\sin^2(x/y) + (x/y)\right)dy$

3.19. a) $y' = \dfrac{x^2 + 2xy - 5y^2}{2x^2 - 6xy}$

b) $y\left(x' + e^{x/y}\right) = x$

3.20. a) $3y' = y^2/x^2 + 10y/x + 10$

b) $x' = x/y + ctg(x/y)$

4. Дифференциал тенгламани ечинг

4.1. $y' = \dfrac{x+2y-3}{2x-2}$

4.2. $y' = \dfrac{x+y-3}{2x-2}$

4.3. $y' = \dfrac{3y-x-4}{3x+3}$

4.4. $y' = \dfrac{2y-2}{x+y-2}$

4.5. $y' = \dfrac{2x+y-2}{3x-y-2}$

4.6. $y' = \dfrac{x+y-3}{x-1}$

4.7. $y' = \dfrac{x+7y-8}{9x-y-8}$

4.8. $y' = \dfrac{x+3y+4}{3x-6}$

4.9. $y' = \dfrac{3y+3}{2x+y-1}$

4.10. $y' = \dfrac{x+2y-3}{4x-y-3}$

4.11. $y' = \dfrac{x-2y+3}{-2x+2}$

4.12. $y' = \dfrac{x+8y-9}{10x-y-9}$

4.13. $y' = \dfrac{2x+2y-5}{5x-5}$

4.14. $y' = \dfrac{4y-8}{3x+2y-7}$

4.15. $y' = \dfrac{x+3y-4}{5x-y-4}$

4.16. $y' = \dfrac{y-2x+3}{x-1}$

4.17. $y' = \dfrac{x+2y-3}{x-1}$

4.18. $y' = \dfrac{3x+2y-1}{x+1}$

4.19. $y' = \dfrac{5y+5}{4x+3y-1}$

4.20. $y' = \dfrac{x+4y-5}{6x-y-5}$

V. Умумлашган бир жинсли тенгламани ечинг

V.1. $2xy'\left(x-y^2\right)+y^3=0$

V.2. $y'=y^2-2/x^2$

V.3. $\left(x+y^3\right)+3\left(y^3-x\right)y^2y'=0$

V.4. $y^3dx-2\left(x^2+xy^2\right)dy=0$

V.5. $x^2\left(y'+y^2\right)=xy-1$

V.6. $2y+\left(x^2y+1\right)xy'=0$

V.7. $\left(y^4+3x^2\right)y'+xy=0$

V.8. $y'\left(x^6-y^4\right)=x^5y$

V.9. $y^3dx+2\left(x^2-xy^2\right)dy=0$

V.10. $2y'+y^2-1/x^2=0$

V.11. $x^2yy'+2y^4=x^2$

V.12. $4y^6+x^3=6xy^5y'$

V.13. $x^4y^2dy+yxdx=0$

V.14. $xy^2\left(xy'+y\right)=1$

V.15. $yy'+y^3=1/x^3$

V.16. $y\left(1+\sqrt{x^2y^4-1}\right)dx+2xdy=0$

V.17. $xy^2y'-y^3=1/3\cdot x^4$

V.18. $x^2yy'+y=1/x$

V.19. $xyy'+2y^4=x^2$

V.20. $\left(x-2y^3\right)dx+3y^2\left(2x-y\right)dy=0$

6. Тенгламани берилган шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг

6.1. $y'/x-\cos 2y=1, \quad x\to+\infty$ да $y\to 3\pi/2$

6.2. $\cos 2y-2y'/3x^2=0, \quad x\to 0$ да $y\to\pi/2$

6.3. $x^2y'+\cos 2y=1, \quad x\to+\infty$ да $y\to 9\pi/4$

6.4. $\left(xy^2+x\right)dx+\left(x^2y-y\right)dy=0, \quad x=0$ да $y=1$

6.5. $\left(a^2+y^2\right)dx+2x\sqrt{ax-x^2}dy=0, \quad x=a$ да $y=0$

6.6 $x\sqrt{1-y^2}dx+y\sqrt{1-x^2}dy=0, \quad x=0$ да $y=1$

6.7. $x\sqrt{1+y^2}+y\sqrt{1+x^2}\,dy/dx=0, \quad x=0$ да $y=1$

6.8. $\left(xy'-y\right)arctg\left(y/x\right)=x, \quad x=0$ да $y=1$

6.9. $\left(y^2-3x^2\right)dy+2xydx=0, \quad x=0$ äà $y=1$

6.10. $\left(\sqrt{xy}-x\right)dy+ydx=0, \quad x=1$ да $y=1$

6.11. $y+xy'=6\left(1+x^3y'\right), \quad x=1$ да $y=1$

6.12. $\left(1-x^2\right)y'-2xy^2=xy, \quad x=1$ да $y=1$

6.13. $y + xy' = a(1 + xy), \quad x = 1/a$ да $y = a$

6.14. $(x+1)y' = y - 1, \quad x \to +\infty$ да y чегараланган

6.15. $y' = 2x(\pi + y), \quad x \to +\infty$ да y чегараланган

6.16. $x^2 y' + \sin 2y = 1, \quad x \to +\infty$ да $y \to 11\pi/4$

6.17. $y'x^2 \sin y = 1, \quad x \to +\infty$ да $y \to \pi/2$

6.18. $y'x^4 \sin y = 4, \quad x \to +\infty$ да $y \to \pi/2$

6.19. $y'x^3 \cos y = 2, \quad x \to +\infty$ да $y \to 0$

6.20. $y' = -4\big/\left(x^4 \cos y\right), \quad x \to +\infty$ да $y \to 0$

7. Масалани ечинг

7.1. Пиво ачитқисини тайёрлашда ишлатиладиган таъсир қилувчи фермент миқдорини ўсиш тезлиги унинг шу пайтдаги x миқдорига пропорционал. Ферментни бошланғич миқдори α га тенг. Бир соатдан сўнг у икки марта кўпайган бўлса, уч соатдан кейин неча марта кўпаяди?

7.2. Маълум баландликдан массаси m бўлган жисм вертикал йўналишда пастга ташлаб юборилди. Агар бу жисмга оғирлик кучи ва ҳавонинг жисм тезлигига пропорционал (пропорционаллик коэффициенти R) бўлган қаршилик кучи таъсир қилаётган бўлса, унинг υ тушиш тезлигининг ўзгариш қонунини топинг.

7.3. Учувчининг парашют билан биргаликдаги оғирлиги 80 кг. Ҳавонинг қаршилиги унинг тезлиги υ нинг квадратига пропорционал (пропорционаллик коэффициенти k = 400). Вақтга боғлиқ равишда тушиш тезлигини ва тушишдаги энг катта тезликни топинг.

7.4. Шамол ўрмон орқали ўтаётиб, дарахтлар қаршилигига учраш натижасида ўз тезлигининг бир қисмини йўқотади. Босиб ўтилган йўл чексиз кичик бўлса, бу йўқотиш бошланғич тезликка ва йўл узунлигига тўғри пропорционал бўлади. Агар шамолнинг бошланғич тезлиги $\upsilon_0 = 12$ м/с ўрмонда S = 1 м йўл босиб ўтгандан кейинги тезлиги $\upsilon_1 = 11{,}8$ м/с бўлса, ўрмонда 150 м йўл босиб ўтган шамолнинг тезлигини топинг.

7.5. Массаси m бўлган жисм 250 м баландликдан оғирлик кучи ҳавонинг қаршилик кучи таъсирида тушаётган бўлсин. Қаршилик кучини тезликка пропорционал (пропорционаллик коэффиценти R) деб олиб, жисмнинг ҳаракат қонуни $h = f\ (t)$ ни ва жисм туша бошлагандан неча минут кейин ерга етиб келишини аниқланг.

7.6. Ўлчамлари 60×75 см, баландлиги 80 см бўлган тўғри бурчакли параллелепипед шаклидаги идишга ҳар секунда 1,8 л сув тушаётган бўлсин. Унинг остки қисмида юзи $2{,}5\ \text{cm}^2$ бўлган тешик бор. Идиш қанча вақтда тўлади? Натижани худди шундай, лекин тешиги бўлмаган идишнинг тўлиш вақти билан солиштиринг. (Сувнинг сатҳи тешикдан h баландликда бўлганда, оқиб чиқаётган сувнинг тезлиги $\upsilon = 0{,}6\sqrt{2gh}$ бўлади, деб ҳисоблансин).

7.7. Диаметри $2R$ = 1,8 м ва баландлиги H = 2,45 м бўлган цилиндр шаклидаги идишдаги сув унинг остки қисмидаги $2r$ = 6 диаметрли тешикдан қанча вақтда оқиб тушади? Цилиндр ўқи горизонтал жойлашган, сувнинг сатҳи тешикдан h баландликда бўлганда унинг тезлиги $0{,}6\sqrt{2gh}$ бўлади, деб ҳисоблансин.

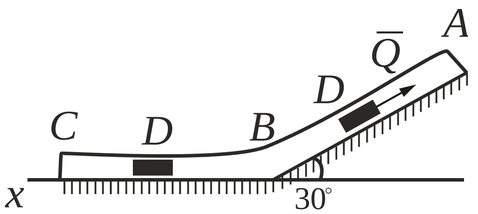
7.8. Моторли қайиқ унинг тезлигига пропорционал бўлган сувнинг қаршилиги таъсирида ўз тезлигини пасайтиради. Қайиқнинг бошланғич тезлиги 1,5 м/с бўлиб, 4 секунддан кейин унинг тезлиги 1 м/с бўлади. Қачон қайиқнинг тезлиги 1 см/с га тенг бўлади? Қайиқ тўхтагунча қанча йўл босиб ўтади?

7.9. Идиш конус шаклида бўлиб, асосининг радиуси R = 6 см, баландлиги H = 10 см учи эса пастга қаратилган. Агар идишнинг учида 0,5 см диаметрли тешик бўлса, ундаги тўла сув қанча вақтда оқиб бўлади? Сувнинг сатхи тешикдан h баландликда бўлганда унинг тезлиги $0{,}6\sqrt{2gh}$ бўлади, деб ҳисоблансин.

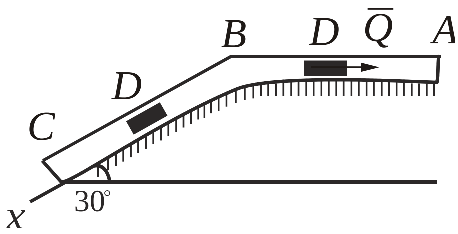
7.10. Остки қисмида тешиги бор бўлган цилиндр шаклидаги идиш вертикал равишда қўйилган. Идишдаги тўла сувнинг ярми тешикдан 5 минутда оқиб тушади. Қанча вақтда ҳамма сув оқиб бўлади? Сувнинг сатҳи тешикдан h баландликда бўлганда, унинг тезлиги $0{,}6\sqrt{2gh}$ бўлади, деб ҳисоблансин.

7.11. Диаметри $2R$ = 1,8 м ва баландлиги H = 2,45 м бўлган цилиндр шаклидаги идишдаги сув унинг остки қисмидаги $2r$ = 6 диаметрли тешикдан қанча вақтда оқиб тушади? Цилиндр ўқи вертикал жойлашган, сувнинг сатҳи тешикдан h баландликда бўлганда унинг тезлиги $0{,}6\sqrt{2gh}$ бўлади, деб ҳисоблансин.

7.12. Массаси m = 2 кг бўлган D юк A нуқтада 12 м/с бошланғич тезлик олиб, букилган ABC трубада (5-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин. AB бўлакда юкка оғирлик кучидан ташқари Q = 5 н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг υ тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши) $R=0{,}8\upsilon^2$ қаршилик кучи таъсир этади. *B* нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг *BC* бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари *F* ўзгарувчи куч таъсир қилади. *AB* = 1,5 м ҳамда $F_x = 4\sin 4t$ ($F_x - F$ кучнинг *x* ўқдаги проекцияси) эканини билган ҳолда юкнинг *BC* бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.



5-расм.



6-расм.

7.13. Массаси *m* = 1,8 кг бўлган *D* юк *A* нуқтада 24 м/сек бошланғич тезлик олиб, букилган *ABC* трубада (6-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин. *AB* бўлакда юкка оғирлик кучидан ташқари *Q* = 5 н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг υ тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши) $R=0{,}3\upsilon$ қаршилик кучи таъсир этади. *B* нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг *BC* бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари *F* ўзгарувчи куч таъсир қилади. *A* нгуқтадан *B* нуқтага ўтиш вақти $t_1 = 2$ сек ҳамда $F_x = -2\cos 2t$ ($F_x - F$ кучнинг *x* ўқдаги проекцияси) эканини билган ҳолда юкнинг *BC* бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.

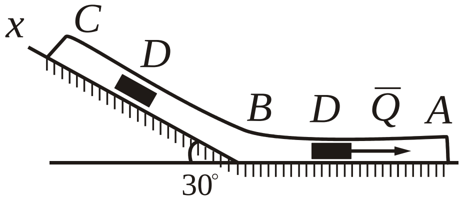
7.14. Тажрибаларга кўра ҳар бир грамм радийдан бир йилда 44 миллиграмм емирилади. Неча йилдан кейин радийнинг ярми емирилади? Радиоактив модданинг бирлик вақт ичида емирилиш миқдори мавжуд модда миқдорига пропорционал деб ҳисоблансин.

7.15. 30 кунда радиоактив модданинг 50 фоизи емирилади. Қанча вақтдан сўнг радиоактив модданинг бошланғич миқдорининг 1 фоизи қолади? Радиоактив модданинг бирлик вақт ичида емирилиш миқдори мавжуд модда миқдорига пропорционал деб ҳисоблансин.

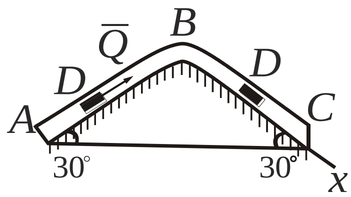
7.16. Жисм 10 минутда 100° дан 60° гача совийди. Атроф-муҳитнинг температураси 20° да ушлаб турилса, қачон жисмнинг температураси 25° бўлади? Жисмнинг совиш тезлиги жисм ва атроф-муҳит температуралари айирмасига пропорционал деб ҳисоблансин.

7.17. Жисм 10 минутда 100° дан 60° гача совийди. Атроф-муҳитнинг температураси 20° да ушлаб турилса, қачон жисмнинг температураси 25° бўлади? Жисмнинг совиш тезлиги жисм ва атроф-муҳит температуралари айирмасига пропорционал деб ҳисоблансин.

7.18. Массаси *m* = 8 кг бўлган *D* юк *A* нуқтада 10 м/сек бошланғич тезлик олиб, букилган *ABC* трубада (7-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин. *AB* бўлакда юкка оғирлик кучидан ташқари *Q* = 16 н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг υ тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши) $R = 0,5\,\upsilon^2$н қаршилик кучи таъсир этади. *B* нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг *BC* бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари *F* ўзгарувчи куч таъсир қилади. *AB* = 4 м ва $F_x = 6t^2$ ($F_x - F$ кучнинг *x* ўқдаги проекцияси) эканлиги маълум бўлса, юкнинг *BC* бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.



7-расм.



8-расм.

7.19. 20 л идишда ҳаво билан тўлдирилган (80% азот, 20% кислород). Идишга секундига 0,1 л азот киритилиб, тинимсиз аралаштирилиб турилибди ва худди шундай тезлик билан аралашма чиқиб кетаяпти. Қанча вақтдан кейин идишда 99% азот бўлади?

7.20. Массаси *m* = 3 кг бўлган *D* юк *A* нуқтада 22 м/сек бошланғич тезлик олиб, букилган *ABC* трубада (8-расмга қаранг) ҳаракат қилаётган бўлсин. *AB* бўлакда юкка оғирлик кучидан ташқари *Q* = 9 н ўзгармас куч (йўналиши чизмада кўрсатилган) ва юкнинг υ тезлигига боғлиқ бўлган (йўналиши юк ҳаракатига қарши) $R = 0,5\,\upsilon$ қаршилик кучи таъсир этади. *B* нуқтада юк ўз тезлигини ўзгартирмасдан трубанинг *BC* бўлагига ўтади, бу ерда юкка оғирлик кучидан ташқари *F* ўзгарувчи куч таъсир қилади. *A* нуқтадан *B* нуқтага ўтиш вақти $t_1 = 3$ сек ҳамда $F_x = 4\sin 2t$ ($F_x - F$ кучнинг *x* ўқдаги проекцияси) эканлиги маълум бўлса, юкнинг *BC* бўлакдаги ҳаракат қонунини топинг.

8. Масалани ечинг

8.1. Шундай чизиқларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси уриниш нуқтасининг абсциссасидан уч марта катта бўлсин.

8.2. Шундай чизиқларни топингки, уларда уринма ости уриниш нуқтасининг иккиланган абсцисса ва ординаталари айирмасига тенг бўлсин.

8.3. Шундай чизиқларни топингки, уларда уринма ости уриниш нуқтасининг обсцисса ва ординаталари айирмасига тенг бўлсин.

8.4. Чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринманинг ординаталар ўқидан ажратган кесмаси уриниш нуқтаси ординатасининг учланганига тенг эканлигини билган ҳолда, унинг тенгламасини тузинг.

8.5. Маркази координата бошида бўлган тўғри чизиқлар дастасига қуйидаги бурчаклар билан изогонал бўлган траекторияларни топинг:

A) 30°; B) 45°; C) 60°; D) 90°;

8.6. Қуйидаги хоссага эга бўлган чизиқларни топинг: агар чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан координата ўқларига улар билан кесишгунча параллел тўғри чизиқлар ўтказилса, ҳосил бўлган тўртбурчак юзини шу чизиққа 1:4 нисбатда бўлади.

8.7. $y = ax^2$ параболалар оиласига ортогонал траекторияларни топинг.

8.8. Шундай чизиқларни топингки, уларнинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринманинг абсцисса ўқи билан кесишиш нуқтаси, уриниш нуқтасидан ва координата бошидан баравар узоқликда бўлсин.

8.9. Шундай чизиқларни топингки, унинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринманинг координата бошигача бўлган масофа, уриниш нуқтасининг абсциссасига тенг бўлсин.

8.10. Шундай чизиқларни топингки, унинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринма, уриниш нуқтаси ординатаси ва абсциссалар ўқи ҳосил қилган учбурчакда катетлар йиғиндиси ўзгармас 0 сонга тенг бўлсин.

8.11. Шундай чизиқларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси уриниш нуқтасининг абсциссасидан икки марта кичик бўлсин.

8.12. Шундай чизиқларни топингки, уларда ҳар бир нуқтасида ўтказилган уринма қутб радиус ва қутб ўқлар билан бир хил бурчак ташкил қилсин.

8.13. Шундай чизиқларни топингки, уларда ихтиёрий уринманинг абсциссалар ўқи билан кесишиш нуқтасининг абсциссаси уриниш нуқтаси абсциссасининг 2/3 қисмига тенг бўлсин.

8.14. Шундай чизиқларни топингки, унинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринмадан координата бошигача бўлган масофа уриниш нуқтаси абсциссасининг модулига тенг бўлсин.

8.15. Чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан ўтказилган уринма ординаталар ўқида уриниш нуқтасининг иккиланган ординатасига тенг бўлган кесма ажратишни билган ҳолда унинг тенгламасини тузинг.

8.16. Шундай чизиқларни топингки, уларда уринма ости уриниш нуқтаси абсцисса ва ординаталар йиғиндисига тенг бўлсин.

8.17. Қуйидаги хоссага эга бўлган чизиқларни топинг: агар кесишгунча қадар параллел чизиқлар ўтказилса, ҳосил бўлган тўртбурчак юзи шу чизиқ 1:2 нисбатда бўлади.

8.18. Қуйидаги хоссага эга бўлган чизиқларни топинг: агар чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан координата ўқларига улар билан кесишгунча параллел чизиқлар ўтказилса, ҳосил бўлган тўртбурчак юзини шу чизиқ 1:3 нисбатда бўлади.

8.19. Марказлари $y = 2x$ чизиқда ётган радиуси 1 га тенг. Айланаларнинг дифференциал тенгламасини тузинг.

8.20. Ўқлари OY ўқига параллел ва бир пайтда $y = 0$ ҳамда $y = x$ чизиқларга уринадиган параболалар оиласининг дифференциал тенгламасини тузинг.

3-§. БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛИ ВА УНГА КЕЛТИРИЛДИГАН ТЕНГЛАМАЛАР. ТЎЛИҚ ДИФФЕРЕНЦИАЛ ТЕНГЛАМАЛАР

1. $y' + f(x)y = g(x)$ кўринишдаги тенглама ***биринчи тартибли чизиқли дифференциал тенглама*** дейилади. Бу тенгламани ечиш учун аввал унга мос бир жинсли (яъни $g(x) \equiv 0$ бўлган) тенгламани ечиб олинади

$$y' + f(x)y = 0 \qquad (1)$$

Бу ўзгарувчилари ажраладиган тенглама бўлгани учун, уни интеграллаб қуйидагини оламиз:

$$\frac{dy}{dx} = -f(x)y, \quad y \neq 0; \quad \frac{dy}{y} = -f(x)dx, \quad \int \frac{dy}{y} = -\int f(x)dx;$$

$$\ln|y| = -\int f(x)dx + \ln C_1, \quad C_1 > 0; \quad y = C_1 e^{-\int f(x)dx}, \quad C_1 > 0.$$

$y = Ce^{-\int f(x)dx}$, $C \in R$ ларда (1) тенгламанинг умумий ечими бўлади. Энди биз

$$y' + f(x)y = g(x) \tag{2}$$

тенгламанинг ечимини $y = C(x)e^{-\int f(x)dx}$ кўринишда қидириб кўрамиз, бу ерда $C(x)$ – ҳозирча номаълум бўлган функция. $C(x)$ номалум функцияни топиб олиш учун y' ҳосилани ҳисоблайлик:

$$y' = \frac{d}{dx}\left[C(x)e^{-\int f(x)dx}\right] = C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx}.$$

Энди y' ни (2) га қўйсак қуйидагига эга бўламиз:

$$C'(x)e^{-\int f(x)dx} - C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} + C(x)f(x)e^{-\int f(x)dx} = g(x),$$

$$C'(x) = g(x)e^{-\int f(x)dx}.$$

Охирги тенгликни интеграллаб

$$C(x) = \int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C_1$$

ифодани оламиз. Топилган $C(x)$ ни ўрнига олиб бориб қўйсак, (2) нинг умумий ечими учун

$$y = e^{-\int f(x)dx}\left[\int g(x)e^{\int f(x)dx}dx + C_1\right] \tag{3}$$

формулага эга бўламиз.

Агар биз (2) тенгламанинг (x_0, y_0) нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғини топмоқчи бўлсак, (3) дан фойдаланиб, унинг кўриниши

$$y = e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)dx}\left[\int_{x_0}^{x} g(x)e^{-\int_{x_0}^{x} f(x)dx}dx + y_0\right] \tag{4}$$

эканлигига қийинчиликсиз ишонч ҳосил қилишимиз мумкин.

Демак, (2) тенгламанинг (x_0, y_0) нуқтадан ўтувчи интеграл чизиғи (4) кўринишда ва умумий ечими (3) кўринишда экан.

Мисол. $y' - y\,ctg\,x = 2x\sin x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечими. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топиб олайлик

$$\frac{dy}{dx}-y\,ctg\,x=0,\quad \frac{dy}{y}=\frac{\cos x}{\sin x}dx,\quad \int\frac{dy}{y}=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx,$$

$$\ln|y|=\ln|\sin x|+\ln C_1,\quad C_1>0,\quad y=C\sin x,\quad C\in R.$$

Энди ўзгармасни вариациялаймиз, яъни берилган тенгламанинг ечимини $y=C(x)\sin x$ кўринишида излаймиз, бу ерда $C(x)$ ҳозирча номаълум функция.

$$y=C(x)\sin x\text{^}\,y'=C'(x)\sin x+C(x)\cos x$$

тенгламани қўйиб қуйидагини оламиз

$$C'(x)\sin x+C(x)\cos x-C(x)\cos x=2x\sin x,$$

$$C'(x)=2x,\quad C(x)=x^2+C_2,\quad y=\left(x^2+C_2\right)\sin x.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими $y=x^2\sin x+C_2\sin x$ кўринишда экан.

Албатта, охирги ифодани (3) формулани қўллаб ҳам олиш мумкин эди. Лекин жуда кўп мисоллларда бизга ўхшаб (3) формулани олиш учун қилинган барча ишни бажариб чиққан маъқулроқ.

2. $y'+f(x)y-g(x)y^n,\ n\neq 1$ **– Бернулли тенгламаси.**

Бу тенгламани $z=y^{1-n}$ алмаштириш ёрдамида чизиқли тенгламага келтириш мумкин.

Ҳақиқатдан ҳам аввал тенгламани ҳар иккала томони $y^n,\ y\neq 0$ га бўлиб, уни $y^{-n}y'+f(x)y^{1-n}=d(x)$ кўринишга келтириб олиб, $z'=(1-n)y^{-n}y'$ эканлигини эътиборга олинса,

$$z'+(1-n)f(x)z=g(x)(1-n)$$

кўринишдаги чизиқли тенглама хосил бўлади.

Мисол. $=y'+2y=y^2e^x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечими.

$$\frac{y'}{y^2}+\frac{2}{y}=e^x,\quad y\neq 0,\quad n=2,\quad z=y^{1-n}=y^{-1},$$

$$z'=-1\cdot y^{-2}y'=\frac{y'}{y^2},\quad -z'+2z=e^x,\quad z'-2z=e^x;$$

$$z'-2z=0,\quad \frac{dz}{dx}=2z,\quad \frac{dz}{z}=2dx,\quad \ln|z|=2x+\ln|C_1|,\quad C_1\neq 0,$$

$$z = C^{2x} = 0, \quad C \in R; \quad z = C(x)e^{2x}, \quad z' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x},$$

$$C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x} - 2C(x)e^{2x} = e^{x}, \quad C'(x) = -e^{-x},$$

$$C(x) = e^{-x} + C_2, \quad z = \left(C_2 + e^{-x}\right)e^{2x}, \quad \frac{1}{y} = \left(C_2 + e^{-x}\right)e^{2x},$$

$$y = \frac{1}{\left(C_2 + e^{-x}\right)e^{2x}}, \quad y = 0.$$

Охирги $y = 0$ ечимни тенгламанинг ҳар иккала қисмини y^2 га бўлинганда йўқотилган, шуни қўшиб қўйдик.

3. $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$ **– Риккати тенгламаси.**

Умумий ҳолда бу тенглама квадратураларда интегралланмайди, аммо агар унинг бирорта хусусий ечими $y_1(x)$ маълум бўлса, $y = y_1 + z(x)$ алмаштириш ёрдамида уни Бернулли тенгламасига келтириш мумкин. Ҳақиқатан ҳам $y = y_1 + z(x)$ ни тенгламага қўйиб

$$y_1' + z' + p(x)(y_1 + z) + q(x)(y_1 + z)^2 = f(x)$$

тенгликни оламиз. $y_1(x)$ Риккати тенгламасининг ечими эканлигидан $y_1' + p(x)y_1 + q(x)y_1^2 = f(x)$ айний тенглик ўринли эканлигини эътиборга олсак, Бернулли тенгламасини оламиз:

$$z' + \left[p(x) + 2q(x)y_1\right]z = -q(x)z^2.$$

Мисол. $3y' + y^2 + \dfrac{2}{x^2} = 0$ тенгламани ечинг.

Ечими. $y_1 = \dfrac{1}{x}$ бу тенгламанинг ечими эканлигига ишонч ҳосил қилиш қийин эмас. $y_1 = \dfrac{1}{x} + z$ деб,

$$y_1' = \frac{1}{x^2} + z' \text{ ва } 3\left(-\frac{1}{x^2} + z'\right) + \left(\frac{1}{x^2} + z\right)^2 + \frac{2}{x^2} = 0 \text{ ёки } 3z' + 2\frac{z}{x} = -z^2$$

Бернулли тенгламасини оламиз.

$$3\frac{z'}{z^2} + \frac{2}{x}\frac{1}{z} = -1, \quad z \neq 0, \quad u = \frac{1}{z}, \quad u' = -\frac{z'}{z^2}, \quad -3u' + \frac{2}{x}u = -1,$$

$$3u' - \frac{2}{x}u = 1, \quad 3\frac{du}{u} = \frac{2}{x}dx, \quad 3\ln|u| = 2\ln|x| + \ln|C_1|, \quad C_1 \neq 0,$$

$$u^3 = Cx^2; \quad C \in R, \quad u = C(x)x^{2/3}, \quad u' = C'(x)x^{2/3} + C(x)\frac{2}{3}x^{-1/3},$$

$$3C'(x)x^{2/3}+2C(x)x^{-1/3}-\frac{2}{x}C(x)x^{2/3}=1,\quad C'(x)=\frac{1}{3}x^{-2/3},$$

$$C(x)=x^{1/3}+C_2;\quad u=x^{2/3}\left(x^{1/3}+C_2\right),\quad \frac{1}{2}=x+C_2x^{2/3}0,$$

$$\frac{1}{y-1/x}=x+C_2x^{2/3},\quad y-\frac{1}{x}=\frac{1}{x+C_2x^{2/3}},$$

$$y=\frac{1}{x}+\frac{1}{x+C_2x^{2/3}},\quad y=\frac{1}{x}.$$

4. Тўлиқ дифференциал тенглама.

Агар

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{5}$$

тенгламанинг чап томони бирорта $F(x,y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали, яъни

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=dF(x,y)$$

бўлса, (5) тенглама ***тўлиқ дифференциал тенглама*** дейилади. У ҳолда (5) тенгламанинг умумий ечимини $F(x,y)=C$ кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда C – ихтиёий ўзгармас. Шу ердан кўриниб турибдики, (5) тенгламани ечиш $F(x,y)$ функцияни топа билиш эквивалент экан. Қачон (5) тенглама тўлиқ дифференциал $dF(x,y)=0$ тенглама бўлади ва $F(x,y)$ қандай қилиб топилади, деган саволга Эйлер номи билан юритилувчи қуйидаги теорема жавоб беради.

Теорема. $M(x,y)$, $N(x,y)$ функциялар xOy текисликнинг D соҳасида аниқланган ва узлуксиз бўлиб, узлуксиз $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ ва $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. У ҳолда (5) тенгламанинг чап томони бирор $F(x,y)$ функциянинг тўлиқ дифференциали бўлиш учун D соҳанинг барча нуқталари

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial N(x,y)}{\partial x} \tag{6}$$

тенглик ўринли бўлиши зарур ва етарлидир.

Биз бу теореманинг исботига тўхталмаймиз. $F(x,y)$ функциянинг қандай топилишини мисолларда тушунтирамиз.

Мисол.

а) $(x+y)dx+(x-y)dy=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. (6) тенгликни текшириб кўрамиз:

$$M(x,y)=x+y, \quad N(x,y)=x-y, \quad \frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=1, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=1.$$

Демак, $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ шарт бажарилади, яъни берилган тенглама тўлиқ дифференциал тенглама экан. Энди $F(x,y)$ функцияни топишга ҳаракат қилайлик. Тушунарлики,

$$dF(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=(x+y)dx+(x-y)dy$$

тенглик ўринли. Бундан эса қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\frac{\partial F}{\partial x}=x+y, \quad \frac{\partial F}{\partial y}=x-y. \tag{7}$$

Бу тенгламаларнинг биринчиси x бўйича интеграллаб,

$$F(x,y)=\int(x+y)dx+\varphi(y)=\frac{x^2}{2}+xy+\varphi(y) \tag{8}$$

тенгликни оламиз ва ўз навбатида бундан y бўйича дифференциаллаб $\frac{\partial F}{\partial y}=x+\varphi'(y)$ га эга бўламиз. Иккинчи тенгликдан маълумки, $\frac{\partial F}{\partial y}=x-y$, шунинг учун $x+\varphi'(y)=x-y$. Бу ердан $\varphi'(y)=-y$ ва $\varphi(y)=-\frac{y^2}{2}+C$. $\varphi(y)$ ни (8) ифода ўрнига қўйиб,

$$F(x,y)=\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}+C$$

ни оламиз. Демак, тенгламанинг ечими $\frac{x^2}{2}+xy-\frac{y^2}{2}=C_1$ кўринишда бўлади.

б) $(1+y^2\sin 2x)dx2y\cos^2 xdy=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. (6) тенгликни текшириб кўрамиз:

$$M(x,y)=1+y^2\sin 2x, \quad N(x,y)=-2y\cos^2 x,$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y\sin 2x, \quad \frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=2y\sin 2x.$$

Демак, $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial M}{\partial x}$ шарт бажарилади, яъни берилган тенглама тўлиқ дифференциал тенглама экан. $F(x,y)$ни топишга ҳаракат қилайлик. Юқорида кўрганимиздек,

$$dF(x,y)=\frac{\partial F}{\partial x}dx+\frac{\partial F}{\partial y}dy=\left(1+y^2\sin 2x\right)dx-2y\cos^2 xdy$$

тенглик ўринли бўлгани учун

$$\frac{\partial F}{\partial x}=1+y^2\sin 2x;\qquad \frac{\partial F}{\partial y}=-2y\cos^2 x.$$

Бу тенгламаларни иккинчисини y бўйича интеграллаб,

$$F(x,y)=-\int 2y\cos^2 xdy=-y^2\cos^2 x+\varphi(x)$$

тенгликни оламиз (эътибор беринг, $\varphi(x)$ – бу ерда аниқмас интеграл ҳосил бўладиган ихтиёрий ўзгармас C ўрнида келаяпти, x нинг функцияси бўлиб қолди, чунки интеграл остида икки ўзгарувчили функция) ва ўз навбатида бундан $\dfrac{\partial F}{\partial x}=y^2\sin 2x+\varphi'(x)$ ни оламиз. Маълумки, биринчи тенгликка асосан $\dfrac{\partial F}{\partial y}=1+y^2\sin 2x$, шунинг учун $y^2\sin 2x+\varphi'(x)=1+y^2\sin 2x,$ бу ердан $\varphi'(x)=1$ ва $\varphi(x)=x+C.$ $\varphi(x)$ ни ўрнига қўйиб, $F(x,y)=-y^2\cos^2 x+x+C$ ни оламиз. Демак, тенгламанинг ечими $y^2\cos^2 x-x=C$ кўринишда бўлади.

5. Интегралловчи кўпайтирувчи.

(5) тенгламанинг чап томонини бирор функциянинг тўлиқ дифференциали бўлмаса ҳам баъзан шундай $\mu(x,y)\neq 0$ функцияни қийинчиликсиз кўрсатиш мумкин бўладики, (5) тенгламанинг ҳар иккала томонини унга кўпайтирганимизда янги тенгламанинг чап томонини тўлиқ дифференциал бўлиб қолади:

$$dF=\mu Ndx+\mu Ndy. \tag{9}$$

Бундай $\mu(x,y)$ функция ***интегралловчи кўпайтирувчи*** дейилади. Шуни ҳам эслатиб ўтиш керакки, интегралловчи $\mu(x,y)$ кўпайтувчига кўпайтирилганда уни нолга айлантирувчи ортиқча хусусий ечимлар пайдо бўлиши мумкин. Уларни (5) тенгламага қўйиб кўриб, уни қаноатлантирмаса, чиқариб юборишга тўғри келади.

Мисол. $ydy-(xdy+ydx)\sqrt{1+y^2}=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. Кўриш мумкинки, тенгламани $\mu = 1\big/\sqrt{1+y^2}$ га кўпайтирилса, чап томонида тўлиқ дифференциал ҳосил бўлади. Ҳақиқатан ҳам $\mu = 1\big/\sqrt{1+y^2}$ га кўпайтириб,

$$ydy\big/\sqrt{1+y^2} - \left(xdy - ydx\right) = 0$$

тенгликни оламиз, буни интеграллаб $\sqrt{1+y^2} - xy = 0$ ечимини топамиз.

6. Албатта, аксарият кўп ҳолларда интегралловчи кўпайтувчи юқоридаги мисолдагидек осон топилавермайди. Умумий ҳолда интегралловчи кўпайтувчини топиш учун

$$\frac{\partial \mu M}{\partial y} = \frac{\partial \mu N}{\partial x} \tag{10}$$

хусусий ҳосилали дифференциал тенгламанинг камида битта нолдан фарқли хусусий ечимини топиш керак. Агар биз (10) тенгламани ёйиб, қулай ҳолга келтирсак,

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} M + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial x} N + \frac{\partial N}{\partial x} \mu,$$

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial y} M - \frac{1}{\mu}\frac{\partial M}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \mu\left(x, y\right) \neq 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y} M - \frac{\partial \ln|\mu|}{\partial x} N = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \mu\left(x, y\right) \neq 0$$

тенгламани оламиз. Умумий ҳолда (11) хусусий ҳосилали дифференциал тенгламани ечиш берилган дифференциал тенгламани ечишга қараганда қийинроқ бўлади. Шунга қарамасдан, баъзи ҳолларда (11) тенгламани хусусий ечимини топиб олишга қийинчиликсиз эришиш мумкин.

Ундан ташқари, агар (11) тенгламада $\mu = \mu\left(x, y\right)$ функцияни фақат битта аргументининг функцияси деб қаралса, (масалан,

$$\mu = \mu\left(x+y\right),\ \mu = \mu\left(x^2+y^2\right),\ \mu = \mu\left(\frac{x}{y}\right),\ \mu = \mu\left(x\right),\ \mu = \mu\left(y\right)$$

ва ҳоказо) уни қийинчиликсиз интеграллаш мумкин бўлади ва изланаётган кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлиши учун шарт олинади. Шундай қилиб, маълум кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчини топиш мумкин бўлган тенгламалар синфи ажратилади.

Биз ҳозир (5) тенглама учун фақат y га боғлиқ бўлган $\mu=\mu(y)$ интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлишини таъминлайдиган шарт келтириб чиқарамиз. Шу ҳол учун (11) тенгламани ёзайлик

$$\frac{\partial \ln|\mu|}{\partial y}M=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y},\quad \mu(y)\neq 0,$$

бундан

$$\left[\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right]/M,\quad M(x,y)\neq 0.$$

y нинг узлуксиз функция деб қараб, қуйидагини оламиз:

$$\begin{gathered}\ln|\mu|=\int\frac{\partial N/\partial x-\partial M/\partial y}{M}dy+\ln|C_1|,\quad C_1\neq 0,\\ \mu(y)=Ce^{\int\frac{\partial N/\partial x-\partial M/\partial y}{M}dy},\quad C\in R.\end{gathered}\tag{12}$$

Демак, агар $\dfrac{\partial N/\partial x-\partial M/\partial y}{M}$ фақат y нинг функцияси бўлса, (5) тенглама учун фақат y га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи мавжуд экан ва y (12) кўринишда бўлар экан.

Худи шунингдек, агар $\dfrac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N}$ фақат x нинг функцияси бўлса, (5) тенглама учун фақат x га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи мавжуд ва y

$$\mu(y)=Ce^{\int\frac{\partial M/\partial y-\partial N/\partial x}{N}dx}\tag{13}$$

кўринишда бўлади.

Юқоридагидек мулоҳаза билан (5) тенглама учун

$$\mu=\mu(x\pm y),\ \mu=\mu\left(x^2\pm y^2\right),\ \mu=\mu(xy),\ \mu=\mu\left(\frac{x}{y}\right)$$

кўринишдаги интегралловчи кўпайтирувчилар мавжудлигини таъминлайдиган шартлар олиш мумкин.

Мисол. $(x-xy)dx+\left(y-x^2\right)dy=0$ тенгламанинг $\mu=\mu\left(x^2+y^2\right)$ кўринишдаги интегралловчи кўпайтирувчиси борми?

Ечими. $x^2+y^2=z$ деб белгилайлик. У ҳолда (11) тенглама $\mu=\mu\left(x^2+y^2\right)=\mu(z)$ бўлганда

$$2\left(My-Nx\right)\frac{d\ln|\mu|}{dz}=\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}$$

кўринишда бўлади. Бу тенгламадан

$$\ln|\mu|=\frac{1}{2}\int\frac{\partial N/\partial x-\partial M/\partial y}{My-Nx}dz+\ln|C_1|,\quad C_1\neq 0$$

ёки

$$\mu=Ce^{\frac{1}{2}\int\frac{\partial N/\partial x-\partial M/\partial y}{My-Nx}dz},\quad C\in R. \tag{14}$$

Демак, $\mu=\mu\left(x^2+y^2\right)$ кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлиши учун $\dfrac{\partial N/\partial x-\partial M/\partial y}{My-Nx}$ каср фақат x^2+y^2 нинг функцияси бўлиши керак экан. Шундай қилиб, бизнинг мисолимизда

$$\frac{\partial N/\partial x-\partial M/\partial y}{My-Nx}=-\frac{3}{x^2+y^2}$$

бўлгани учун $\mu=\mu\left(x^2+y^2\right)$ кўринишдаги интегралловчи кўпайтувчи мавжуд.

$$\mu=e^{-\frac{3}{2}\int\frac{dz}{z}}=z^{-3/2}=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}.$$

Берилган тенгламани $\mu=\dfrac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}$ га кўпайтириб, уни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$\frac{xdx+ydy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}+\frac{x\left(xdy-ydx\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=0.$$

Бу тўлиқ дифференциал тенгламани интеграллаб ечимини оламиз:

$$\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=\frac{-x^3d\left(y/x\right)}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}},\quad x\neq 0;$$

$$\int\frac{d\left(x^2+y^2\right)}{2\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}=-\int\frac{d\left(y/x\right)}{\left(1+y^2/x^2\right)^{3/2}}=\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}=\frac{y/x}{\left(1+y^2/x^2\right)^{1/2}}+C_1;$$

$$\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}=\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{1/2}}+C_1;\qquad y-1=C_1\left(x^2+y^2\right)^{1/2};$$

$$x^2+y^2=C\left(y-1\right)^2,\qquad 1/C_1^2=C.$$

Тенгламани ечинг

63. $y' + y = e^{-x}$

64. $y' + 3y/x = x$

65. $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$

66. $y' - y\,tg\,x = 2\sin x$

67. $x' - x = \sin t$

68. $dx + (x - y)dy = 0$

69. $x^2 y' + 2xy = \ln x$

70. $2xy' - y + x = 0$

71. $y'\sin x - y = 1 - \cos x$

72. $y'\left(1 + x^2\right) - xy = \sqrt{1 + x^2}$

73. $y' - \dfrac{xy}{1 - x^2} = \dfrac{1}{1 - x^2}$

74. $\left(y + xy^2\right)dx - dy = 0$

75. $y' + 2y = y^2 e^x$

76. $y' = y^4 \cos x + y\,tgx$

77. $xy' + y = y^2 \ln x$

78. $y' + 2xy = 2x^3 y^3$

79. $x' = xy + x^2 y^3$

80. $\left(2x^2 y \ln y - x\right)y' = y$

81. $y' - \dfrac{3}{2x}y = \dfrac{3}{2}x\sqrt[3]{y}$

82. $\dfrac{dx}{dy} - \dfrac{1}{\sqrt{y} - y}x = -\dfrac{1}{\sqrt{y} - y}x^2$

83. $\int\limits_0^x xy\,dx = x^2 + y$

84. $y = \int\limits_0^x y\,dt + x + 1$

85. $x\int\limits_0^x (x - t)\,y(t)\,dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)\,dt$

86. $\int\limits_0^x (x - t)y(t)\,dt = 2x + \int\limits_0^x y(t)\,dt$

Коши масаласининг ечимини топинг

87. $y' + \dfrac{y}{x} = \dfrac{x + 1}{x}e^x, \quad y(1) = e$

88. $y' = \dfrac{1}{x\cos y + \sin 2y}, \quad x(0) = -1$

89. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{2\ln x}{x}, \quad y(1) = 1$

90. $\left(2xy + \sqrt{y}\right)dy + 2y^2 dx = 0, \quad y(-1/2) = 1$

91. $y' = \dfrac{y}{x} - \dfrac{12}{x^3}, \quad y(1) = 4$

92. $dx + \left(2x + \sin 2y - 2\cos^2 y\right)dy = 0, \quad y(-1) = 0$

93. $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1 + x^2, \quad y(1) = 3$

94. $(2y - x\,tg\,y - y^2 tg\,y)dy = dx, \quad y(0) = \pi$

95. $(1-x^2)y' + xy = 1, \quad y(0) = 1$

96. $ydx + (2x - 2\sin^2 y - y\sin 2y)dy = 0, \quad y(3/2) = \pi/4$

97. $2xy' - 3y = -(5x^2+3)y^3, \quad y(1) = 1/\sqrt{2}$

98. $y' - y\,tg\,x = 2/3 \cdot y^4 \sin x, \quad y(0) = 1$

99. $2y' - 3y\cos x = -e^{2x}(2+2\cos x)y^{-1}, \quad y(0) = 1$

100. $2y'\ln x + y/x = y^2 \cos x, \quad y(1) = 1$

101. $y' + \frac{3x^2 y}{x^3+1} = y^2(x^3+1)\sin x, \quad y(0) = 1$

Риккати тенгламасини ечинг

102. $y' - y^2 + (x^2+1)y - 2x = 0, \quad y_1 = x^2 + 1$

103. $y' + xy^2 - x^3 y - 2x = 0, \quad y_1 = x^2$

104. $(x^2-1)y' + y^2 - 2xy + 1 = 0, \quad y_1 = x$

105. $y' - 2xy + y^2 = 5 - x^2, \quad y_1 = x + 2$

106. $y' + y^2 = x^2 + 2x$

Тўлиқ дифференциал тенгламани ечинг

107. $3x^2 e^y dx + (x^3 e^y - 1)dy = 0$

108. $\left(3x^2 + \frac{2}{y}\cos\frac{2x}{y}\right)dx - \frac{2x}{y^2}\cos\frac{2x}{y}dy = 0$

109. $(3x^2 + 4y^2)dx + (8xy + e^y)dy = 0$

110. $(2x - 1 - y/x^2)dx - (2y - 1/x)dy = 0$

111. $(y^2 + y\sec^2 x)dx + (2xy + tgx)dy = 0$

Тенгламани интегралловчи кўпайтувчини топиш усулидан фойдаланиб ечинг

112. $\left(2xy^2 - y\right)dx + \left(y^2 + x + y\right)dy = 0$

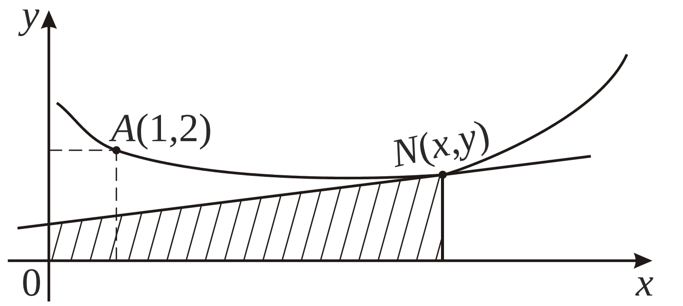
113. $\left(xy^2 - y^3\right)dx + \left(1 - xy^2\right)dy = 0$

114. $y'\cos x = y\sin x + \cos^2 x$

115. $\left(y^2 - 6x\right)y' + 2y = 0$

116. $x^2dx - \left(2xy + 3\right)dy = 0$

117. Берилган $A(1;2)$ нуқтадан ўтувчи шундай эгри чизиқнинг тенгламасини тузингки, PN ординатали $N(x;y)$ нуқтасидан ўтказилган уринма OY ўқнинг T нуқтаси билан кесишгунча давом еттирилганда хосил бўладиган $OTNP$ трапециянинг юзи ўзгармас бўлиб, 1 га тенг бўлсин (9-расмга қаранг).



9-расм.

118. Ихтиёрий уринмасининг ордината ўқидан ажратган кесамаси, уриниш нуқтаси абсциссасининг квадратига тенг бўлган $(1;-1)$ нуқтадан ўтувчи чизиқнинг тенгламасини ёзинг.

119. $dx/dy + a\left(t\right)x = f\left(x\right)$ тенгламада $a\left(t\right) \geq c > 0,\ t \to +\infty$ да $f\left(t\right) \to 0$ бўлсин. Бу тенгламанинг ҳар бир ечими $t \to +\infty$ да нолга интилиши исботланган.

120. Агар $f_1\left(x,y\right),\ f_2\left(x,y\right),\ \varphi\left(x,y\right)$ бир жинсли функциялар бўлиб ва $f_1,\ f_2$ лар бир хил тартибли бўлса,

$$f_1\left(x,y\right)dx + f_2\left(x,y\right)dy + \varphi\left(x,y\right)\left(xdy - ydx\right) = 0$$

тенгламани $z = y/x$ алмаштириш ёрдамида Бернулли тенгламага келтириш мумкинлигини исботланг.

121. Идишда 100 л аралашма бўлиб, унда 10 кг туз бор. Идишга ҳар минутда 5 л сув қуйилади ва олдиндан тоза сув билан тўлдириб қўйилган 100 л идишга аралашма худди шу тарзда оқиб ўтади. Аралашманинг ортиқчаси иккинчи идишдан оқиб чиқиб кетади. Қачон иккинчи идишдаги тузнинг миқдори энг кўп бўлади? У нимага тенг?

122. Сиғими C га тенг бўлган конденсатор кучланиши E ва қаршилиги R бўлган занжирга уланган. Конденсаторнинг улангандан кейинги t моментдаги заряди аниқлансин.

4-§. 2-ЛАБОРОТОРИЯ ИШИ

Синов учун савол ва топшириқлар

1. Қандай тенгламани чизиқли тенглама дейилади? Коши масаласининг қўйилишини ифодаланг.

2. Чизиқли тенглама эркли ўзгарувчини ихтиёрий $x=\varphi(t)$, номаълум функцияни ихтиёрий чизиқли $y=\alpha(x)z+\beta(x)$, $(\alpha(x)\neq 0)$ алмаштириш натижасида тенгламанинг чизиқлилигича қолишини исботланг.

3. Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг ихтийрий ечими формуласини келтириб чиқаринг.

4. Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг битта $y_1(x)$ хусусий ечими ёки иккита $y_1(x)$ ва $y_2(x)$ хусусий ечимлари маълум бўлганда унинг умумий ечимларини топинг.

5. Бернулли тенгламаси қандай ечилади?

6. Риккати тенгламаси қандай кўринишга эга? Агар Риккати тенгламасининг битта хусусий ечими маълум бўлса, унинг бошқа ечимлари қандай топилади?

7. Қандай шартлар бажарилганда $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ тенглама тўлиқ дифференциал тенглама бўлади? Бу тенглама қандай ечилади?

8. Интегралловчи кўпайтувчилар усулининг ғояси нимадан иборат? Қандай шартлар бажарилганда:

***а*)** берилган $\omega(x,y)$ функцияга;

б) фақат x га;

в) фақат y га боғлиқ бўлган интегралловчи кўпайтувчи мавжуд бўлади?

9. $x^2y'=x^2y^2+xy+1,\ \ y_1=1/x$ Риккати тенгламасини ечинг.

10. $\left(x^2+y^2+1\right)dx-2xydy=0$ тенгламанинг интегралловчи кўпайтувчисини топинг.

1. Тенгламани ечинг

1.1. $xy'-2y=x^3e^x$

1.2. $y'+y\,tgx=\sec x$

1.3. $xy'+y-e^x=0$

1.4. $y'-y\,ctgx=2x\sin x$

1.5. $y'+y\cos x=1/2\sin 2x$

1.6. $y'+y\,tgx=\cos^2 x$

1.7. $y'-y/(x+2)=x^2+2x$

1.8. $y'-y/(x+1)=e^x(x+1)$

1.9. $y'=y/x+x\sin x$

1.10. $y'+y/x=\sin x$

1.11. $y'+\dfrac{2x}{1+x^2}y=\dfrac{2x^2}{1+x^2}$

1.12. $y'-\dfrac{2x-5}{x^2}y=5$

1.13. $y'+y/x=e^x(x+1)/x$

1.14. $y'=y/x-2\ln x/x$

1.15. $y'=y/x-12/x^3$

1.16. $y'-\dfrac{2xy}{1+x^2}=1+x^2$

1.17. $\left(1-x^2\right)y'+xy=1$

1.18. $y'+\dfrac{xy}{2\left(1+x^2\right)}=\dfrac{x}{2}$

1.19. $y'-2/(x+1)\,y=e^x(x+1)^2$

1.20. $y'+2xy=xe^{-x^2}\sin x$

2. Коши масаласининг ечинг

2.1. $dx=(\sin y+3\cos y+3x)dy,\quad y\left(e^{\pi/2}\right)=\pi/2$

2.2. $e^{y^2}(dx-2xydy)=ydy,\quad y(0)=0$

2.3. $\left(x\cos^2 y-y^2\right)y'=y\cos y,\quad y(\pi)=\pi/4$

2.4. $2\left(y^3-y+xy\right)dy=dx,\quad y(-2)=0$

2.5. $y^3(y-1)dx+3xy^2(y-1)dy=(y+2)dy,\quad y(1/4)=2$

2.6. $2y\sqrt{y}dx-\left(6x\sqrt{y}+7\right)dy=0,\quad y(4)=1$

2.7. $\left(2\ln y-\ln^2 y\right)dy=ydx-xdy,\quad y(4)=e^2$

2.8. $y'=y/(2y\ln y+y-x),\quad x(1)=1/2$

2.9. $y^2\left(y^2+4\right)dx+2xy\left(y^2+4\right)dy=2dy,\quad y(\pi/8)=2$

2.10. $2y^2dx+\left(x+e^{1/y}\right)dy=0,\quad y(1)=1$

2.11. $\left(x+\ln^2 y-\ln y\right)y'=y/2,\quad y(2)=1$

2.12. $2\left(\cos^2 y\cos 2y-x\right)y'=\sin 2y,\quad y(3/2)=5\pi/4$

2.13. $y'=1/(x\cos y+\sin 2y),\quad x(0)=-1$

2.14. $\left(2xy+\sqrt{y}\right)dy+2y^2dx=0,\quad y(-1/2)=1$

2.15. $dx+\left(2x+\sin 2y-2\cos^2 y\right)dy=0,\quad y(-1)=0$

2.16. $\left(2y-x\,tg\,y-y^2tg\,y\right)dy=0,\quad y(0)=\pi$

2.17. $ydx+\left(2x-2\sin^2 y-y\sin 2y\right)dy=0,\quad y(3/2)=\pi/4$

2.18. $\sin 2y\,dx=\left(\sin^2 2y-2\sin^2 y+2\right)dy,\quad y(-1/2)=\pi/4$

2.19. $ch\,y\,dx=(1+x\,sh\,y)dy,\quad y(1)=\ln 2$

2.20. $2\left(x+y^4\right)y'=y,\quad y(-2)=-1$

3. Бернулли тенгламасининг берилган шартни қаноатлантирувчи ечимини топинг

3.1. $y+xy=(1+x)e^{-x}y^2,\quad y(0)=1$

3.2. $xy'+y=2y^2\ln x,\quad y(1)=1/2$

3.3. $y'+4x^3y=4\left(x^3+1\right)e^{-4x}y^2,\quad y(0)=1$

3.4. $xy'=-y^2(\ln x+2)\ln x,\quad y(1)=1$

3.5. $2(y'+xy)=(1+x)e^{-x}y^2,\quad y(0)=2$

3.6. $3(xy'+y)=y^2\ln x,\quad y(1)=3$

3.7. $2y'+y\cos x=y^{-1}\cos x(1+\sin x),\quad y(0)=1$

3.8. $y'+4x^3y=4y^2e^{4x}\left(1-x^3\right),\quad y(0)=-1$

3.9. $3y'+2xy=2xy^{-2}e^{-2x^2},\quad y(0)=-1$

3.10. $2y'+3y\cos x=e^{2x}(2+3\cos x)y^{-1},\quad y(0)=1$

3.11. $2y'+3y\cos x=(8+12\cos x)y^{-1}e^{2x},\quad y(0)=2$

3.12. $xy'+y=y^2\ln x,\quad y(1)=1$

3.13. $2\left(xy'+y\right)=y^2\ln x,\quad y\left(1\right)=2$

3.14. $y'+2y\,cth\,x=y^2ch\,x,\quad y\left(1\right)=1/sh\,1$

3.15. $2\left(y'+xy\right)=\left(x-1\right)e^x y^2,\quad y\left(0\right)=2$

3.16. $4y'+x^3y=\left(x^3+8\right)e^{-2x}y^2,\quad y\left(0\right)=1$

3.17. $y'+y=e^{x/2}\sqrt{y},\quad y\left(0\right)=9/4$

3.18. $4xy'+3y=e^{-x}x^4y^5,\quad y\left(0\right)=1$

3.19. $y'-y\,tg\,x+y^2\cos^2 x=0,\quad y\left(0\right)=1$

3.20. $y'-y\,tg\,x+y^2\sin^2 x=0,\quad y\left(0\right)=1$

4. Риккати тенгламасини ечинг

4.1. $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x},\quad y_1=e^x$

4.2. $y'+y^2-2y\sin x+\sin^2 x-\cos x=0,\quad y_1=\sin x$

4.3. $xy'-y^2+\left(2x+1\right)y=x^2+2x,\quad y_1=x$

4.4. $x^2y'=x^2y^2+xy-1,\quad y_1=-1/x$

4.5. $y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x,\quad y_1=e^x$

4.6. $y'+y^2=2x^{-2}$

4.7. $4y'+y^2-4x^{-2}=0$

4.8. $2y'+\left(xy-2\right)^2=0$

4.9. $y'=y^2-xy-x$

4.10. $y'+y^2=-1/4x^2$

4.11. $y'=y^2+1/x^2+y/x$

4.12. $y'-y^2+y\sin x-\cos x=0,\quad y_1=\sin x$

4.13. $y'+2y^2=6/x^2$

4.14. $y'+ay\left(y-x\right)=1,\quad y_1=x$

4.15. $x^2\left(y'+y^2\right)+4xy+2=0,\quad y_1=-2/x$

4.16. $y'+y^2\sin x=2\sin x/\cos^2 x,\quad y_1=1/\cos x$

4.17. $x\left(2x-1\right)y'+y^2-\left(4x+1\right)y+4x=0,\quad y_1=1$

4.18. $y'=1/3\,y^2+2/3x^2$

4.19. $y'+y^2+y/x-4/x^2=0$

4.20. $xy' - 3y + y^2 = 4x^2 - 4x$

5. Тўлиқ дифференциал тенгламани ечинг

5.1. $\left(3x^2y + 2y + 3\right)dx + \left(x^3 + 2x + 3y^2\right)dy = 0$

5.2. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}\right)dx + \left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{x}{y^2}\right)dy = 0$

5.3. $\left(\sin 2x - 2\cos(x+y)\right)dx - 2\cos(x+y)dy = 0$

5.4. $\left(xy^2 + x/y^2\right)dx + \left(x^2y - x^2/y^3\right)dy = 0$

5.5. $\left(1/x^2 + 3y^2/x^4\right)dx - 2y/x^3\,dy = 0$

5.6. $y/x^2\cos(y/x)dx - \left(1/x\cos(y/x) + 2y\right)dy = 0$

5.7. $\left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} + y\right)dx + \left(x + \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)dy = 0$

5.8. $\dfrac{1+xy}{x^2y}dx + \dfrac{1-xy}{y^2x}dy = 0$

5.9. $\left(xe^x + y/x^2\right)dx - 1/x\,dy = 0$

5.10. $\left(10xy - 1/\sin y\right)dx + \left(5x^2 + x\cos y/\sin^2 y - y^2\sin y^3\right)dy = 0$

5.11. $\left(\dfrac{y}{x^2+y^2} + e^x\right)dx - \dfrac{xdy}{x^2+y^2} = 0$

5.12. $e^y dx + \left(\cos y + xe^y\right)dy = 0$

5.13. $\left(y^3 + \cos x\right)dx + \left(3xy^2 + e^y\right)dy = 0$

5.14. $xe^{y^2}dx + \left(x^2ye^{y^2} + tg^2 y\right)dy = 0$

5.15. $\left(\cos\left(x+y^2\right) + \sin x\right)dx + 2y\cos\left(x+y^2\right)dy = 0$

5.16. $\left(\sin y + y\sin x + 1/x\right)dx + \left(x\cos y + \cos x + 1/y\right)dy = 0$

5.17. $\left(1 + 1/y\,e^{x/y}\right)dx + \left(1 - x/y^2\,e^{x/y}\right)dy = 0$

5.18. $\dfrac{(x-y)dx + (x+y)dy}{x^2+y^2} = 0$

5.19. $xdx + ydy + \frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} = 0$

5.20. $2x\cos^2 y\,dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0$

6. Тенгламани интеграллочви кўпайтувчи усулидан фойдаланиб ечинг

6.1. $ydx - xdy + \ln x\,dx = 0$

6.2. $\left(x^2 \cos x - y\right)dx + xdy = 0$

6.3. $ydx - \left(x + y^2\right)dy = 0$

6.4. $y\sqrt{1 - y^2}dx + \left(x\sqrt{1 - y^2} + y\right)dy = 0$

6.5. $\left(y^2 - 2x - 2\right)dx + 2ydy = 0$

6.6. $y^2dx + \left(xy - 1\right)dy = 0$

6.7. $2y + xy^3dx + \left(x + x^2y^2\right)dy = 0$

6.8. $\left(1 + x^2y\right)dx + \left(x + x^2y^2\right)dy = 0$

6.9. $\left(x^2 + y\right)dx - xdy = 0$

6.10. $\left(x^2 + y^2\right)\left(xdy - ydx\right) = \left(a + x\right)x^4dx$

6.11. $\left(xy^2 + y\right)dx - xdy = 0$

6.12. $\left(2xy^2 - y\right)dx + \left(y^2 + x + y\right)dy = 0$

6.13. $\left(1 - x^2y\right)dx + x^2\left(y - x\right)dy = 0$

6.14. $\left(x^2 + y^2 + 2x\right)dx + 2ydy = 0$

6.15. $\left(x\cos y - y\sin y\right)dy + \left(x\sin y + y\cos y\right)dx = 0$

6.16. $\left(x/y + 1\right)dx + \left(x/y - 1\right)dy = 0$

6.17. $y/x\,dx + \left(y^3 \ln x\right)dy = 0$

6.18. $\left(\ln y + 2x - 1\right)y' = 2y$

6.19. $\left(x^2 + y^2 + x\right)dx + ydy = 0$

6.20. $dy/dx = 2xy - x^3 + x$

7. Тенгламани ечинг

7.1. $x^2y^3+y+\left(x^3y^2-x\right)y'=0$

7.2. $\left(y+x^2\right)dy+\left(x-xy\right)dx=0$

7.3. $\left(2y+\dfrac{1}{\left(x+y\right)^2}\right)dx+\left(3y+x+\dfrac{1}{\left(x+y\right)^2}\right)dy=0$

7.4. $\left(2x^3+3x^2y+y^2-y^3\right)dx+\left(2y^3+3y^2x+x^2-x^3\right)dy=0$

7.5. $\left(x^2+y^2+1\right)dx-2xydy=0$

7.6. $x\left(4+\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)dx-y\left(4-\dfrac{1}{x^2+y^2}\right)dy=0$

7.7. $\omega\left(x^2+y^2\right)xdx+\omega_1\left(x^2+y^2\right)ydy=0$

7.8. $xdx+ydy+\left(x^2+y^2\right)x^2dx=0$

7.9. $y'=\dfrac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}$

7.10. $\left(y^2+x^2+x\right)y'-y=0$

7.11. $xdy+ydx-xy^2\ln xdx=0$

7.12. $\left(2x^3y^3-x\right)y'-2x^3y^3-y=0$

7.13. $\left(2xy^3-x^4\right)y'+y^4+2yx^3=0$

7.14. $\left(x^2+y^2+x\right)y'+y=0$

7.15. $x\left(xy-3\right)y'+xy^2-y=0$

7.16. $x^3y'-y^2-x^2y=0$

7.17. $\left(x^2+x^2y+2xy-y^2-y^3\right)dx+\left(y^2+y^2x+2xy-x^2-x^3\right)dy=0$

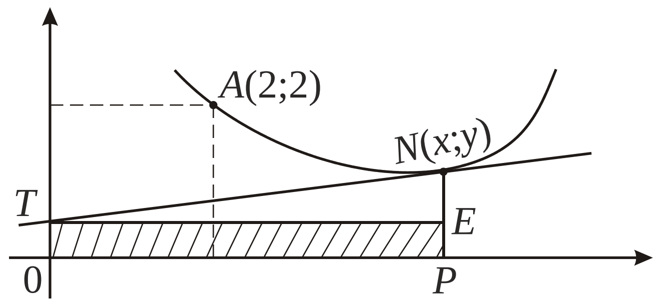
7.18. $\left(2x^3y^2-y\right)dx-\left(2y^3x^2-x\right)dy=0$

7.19. $xy^2dx+\left(x^2y-x\right)dy=0$

7.20. $x^2y^3+y+\left(x^3y^2-x\right)y'=0$

8. Масалани ечинг

8.1. Берилган $A(2:2)$ нуқтадан ўтувчи шундай эгри чизиқнинг тенгламасини тузингки, унинг PN ординатали ихтиёрий $N(x,y)$ нуқтасидан ўтказилган уринма OY ўқининг T нуқтаси билан кесишгунча давом эттирилганда ҳосил бўладиган $OPET$ тўғри тўртбурчакнинг юзи ўзгармас бўлиб, 1 га тенг бўлсин (10-расмга қаранг).

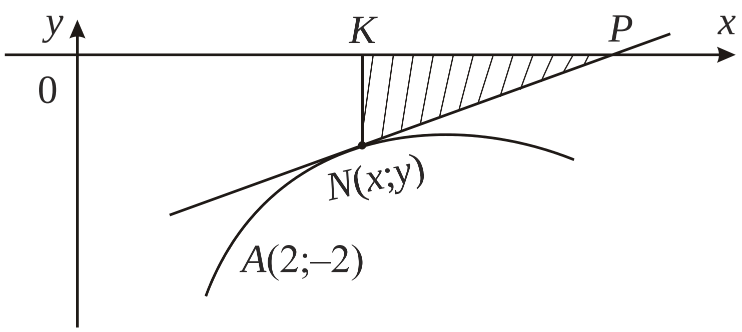


10-расм

8.2. Уринмаси, абсцисса ўқи ва координата бошидан уриниш нуқтасигача бўлган кесма билан чегараланган учбурчак юзи ўзгармас a га тенг бўладиган эгри чизиқни топинг.

8.3. $y^2 = Ce^x + x + 1$ чизиқлар оиласига ортогонал траекторияларни тогинг.

8.4. Ихтиёрий $N(x,y)$ нуқтадан ўтказилган NP уринма, OX ўқи ва $N(x,y)$ нуқтанинг ординатаси ҳосил қилган учбурчакнинг юзи 1 га тенг бўлган ва $A(1,–2)$ нуқтадан ўтувчи эгри чизиқнинг тенгламасини топинг (*11-расмга қаранг*).



11-расм

8.5. $2y^2 = Ce^x + 2x + 1$ чизиқлар оиласига ортогонал траекторияларни топинг.

8.6. Координаталар бошидан ўтувчи шундай эгри чизиқ тенгламасини тузингки, унинг исталган нуҳқасидан ўтказилган нормалининг шу нуқтадан OX ўқигача бўлган кесмасининг ўртаси $y^2 = x$ параболада ётсин.

8.7. Координата ўқлари, уринма ва уриниш нуқтасининг ординатаси билан чегараланган трапеция юзи ўзгармас $3a^2$ га тенг бўладиган эгри чизиқни тогинг.

8.8. $y' \sin x = 2(y + \cos x)$ тенгламанинг $x \to \pi/2$ да чегараланган бўладаган ечимини тогинг.

8.9. $xy' + ay = 1/(1 + x^2)$ тенгламада $a = const > 0$ бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими $x \to 0$ да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг $x \to 0$ даги лимитини топинг.

8.10. $xy' + ay = x^2/(1 + x^2)$ тенгламада $a = const > 0$ бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими $x \to 0$ да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг $x \to 0$ даги лимитини топинг.

8.11. $xy' + ay = \sin x/x$ тенгламада $a = const > 0$ бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими $x \to 0$ да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг $x \to 0$ даги лимитини топинг.

8.12. $xy' + ay = 1/(1 + \cos^2 x)$ тенгламада $a = const > 0$ бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими $x \to 0$ да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг $x \to 0$ даги лимитини топинг.

8.13. $xy' + ay = tg\, x/x$ тенгламада $a = const > 0$ бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими $x \to 0$ да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг $x \to 0$ даги лимитини топинг.

8.14. $xy' + ay = f(x)$ тенгламада $a = const > 0,$ $x \to 0$ да $f(x) \to b$ бўлсин. Бу тенгламанинг фақат битта ечими $x \to 0$ да чегараланган бўлишини кўрсатинг ва унинг $x \to 0$ даги лимитини топинг.

8.15. $xy' + ay = 4/(1 + x^2)$ тенгламада $a = const > 0$ бўлсин. Бу тенгламанинг ҳамма ечимлари $x \to 0$ да бир хил чекли лимитга эга бўлишини кўрсатинг ва бу лимитни топинг.

8.16. $xy' + ay = 1/(1 + \sin^2 x)$ тенгламада $a = const > 0$ бўлсин. Бу тенгламанинг ҳамма ечимлари $x \to 0$ да бир хил чекли лимитга эга бўлишини кўрсатинг ва бу лимитни топинг.

8.17. $xy' + ay = f(x)$ тенгламада $a = const > 0,$ $x \to 0$ да $f(x) \to b$ бўлсин. Бу тенгламанинг ҳамма ечимлари $x \to 0$ да бир хил чекли лимитга эга бўлишини кўрсатинг ва бу лимитни топинг.

8.18. $dx/dt + x = f(t)$ тенгламада $|f(t)| < M,$ $-\infty < t < \infty$ бўлса, унинг $-\infty < t < \infty$ да чегараланган битта ечимга эгалигини кўрсатинг ва бу ечимни топинг. Шунаигдек, $f(t)$ функция даврий бўлганда мос ечимнинг даврий эканлигини кўрсатинг.

8.19. $xy' - (2x^2 - 1)y = x^2$ тенгламанинг фақат битта ечими $x \to 0$ да чекли лимитга интилишини кўрсатинг. Бу ечимни интеграл орқали ифодаланг ва унинг $x \to \infty$ даги лимитини топинг.

8.20. $y' = 2y\cos^2 x - \sin x$ тенгламанинг даврий ечимини топинг.

5-§. ҲОСИЛАГА НИСБАТАН ЕЧИЛМАГАН ТЕНГЛАМАЛАР. ИЗОКЛИНАЛАР ВА КЕТМА-КЕТ ЯҚИНЛАШИШ МЕТОДЛАРИ

1. Ҳосилага нисбатан ечилмаган биринчи тартибли тенгламанинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

Бу тенгламани қуйидаги усуллар билан ечиш мумкин.

I. Агар (1) тенгламани y' га нисбатан ечишга имконият бўлса, $y' = f_i(x, y),\ i = 1, 2, \ldots$ кўринишдаги бир нечта тенгламани оламиз. Бу тенгламаларнинг ҳар бирини ечиб (1) тенгламанинг ечимларини топамиз.

Мисол. $y'^2 - 2xy' = 8x^2$ тенгламани ечинг.

Ечими. Бу тенгламани y' га нисбатан ечиш мумкин.

$$y' = \frac{2x + \sqrt{4x^2 + 32x^2}}{2} = \frac{2x + 6x}{2},$$

бундан $y' = 4x$ ва $y' = -2x$ тенгламаларни оламиз. Ҳосил бўлган тенгламаларни ечайлик: $y = 2x^2 + C,$ $y = -x^2 + C.$ Иккаласи биргаликда берилган тенгламанинг ечимини беради.

2. (1) тенгламани параметрик кўринишга ўтказамиз:

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \phi(u, v), \quad y' = \chi(u, v).$$

$dy = y'dx$ боғланишни эътиборга олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$\frac{\partial\phi}{\partial u}du+\frac{\partial\phi}{\partial v}dv=\chi(u,v)\left[\frac{\partial\varphi}{\partial u}du+\frac{\partial\varphi}{\partial v}dv\right],$$

бу тенгламани dv/du га нисбатан ечиб оламиз:

$$\frac{dv}{du}=\frac{\chi(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial u}-\frac{\partial\phi}{\partial u}}{\frac{\partial\phi}{\partial u}-\chi(u,v)\frac{\partial\varphi}{\partial v}}. \qquad (2)$$

Натижада, биз ҳосилага нисбатан ечилган тенгламага эга бўлдик, шу илан тенглама аввал кўрилган тенгламаларнинг бирига келди. Лекин (2) тенглама кўпинча квадратураларда интеграλланмайди.

Қуйидаги хусусий ҳолларни алоҳида кўриб чиқайлик.

3. (1) тенглама

$$F(y')=0 \qquad (3)$$

кўринишда бўлиб, $F(P)=0$ тенгламанинг камида битта $p = k_i$ ҳақиқий ечими мавжуд бўлсин.

(3) тенглама x ва y га боғлиқ бўлмагани учун k_i ўзгармас. $y'=k_i$ тенгламани интеграллаб, $y=k_i x+C$ ни, бундан эса $k_i=\frac{y-C}{x}$ оламиз. $k_i\leftrightarrow F(p)=0$ тенгламанинг ечими бўлгани учун $F\left(\frac{y-C}{x}\right)=0$ берилган тенгламанинг интеграли бўлади.

Мисол. $y'^3-y'^2+y'-1=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. $y'^2(y'-1)+(y'-1)=0,\ (y'-1)(y'^2+1)=0$ бўлгани учун $p=1$ $F(p)=0$ нинг ечими бўлади. Бундан $p=1$ тенгламани оламиз ва буни ечиб $y=x+C$ га эга бўламиз. Демак,

$$\left(\frac{y-C}{x}\right)^3-\left(\frac{y-C}{x}\right)^2+\left(\frac{y-C}{x}\right)-1=0$$

берилган тенгламанинг интеграли бўлади.

4. (1) тенглама

$$F(x,y')=0 \qquad (4)$$

кўринишда бўлсин. Агар бу тенгламани y' га нисбатан ечиб олиш қийин бўлса, t параметр киритиш ва (4) тенгламани иккита тенгламага алмаштириш маъқул: $x=\varphi(t)$ ва $y'=\varphi(t)$. $dy=y'dx$ бўлгани учун бизнинг ҳолимизда $dy=\phi(t)\varphi'(t)dt$ бу ердан $y=\int\phi(t)\varphi'(t)dt+C$ ва демак, ечим параметрик кўринишда қуйидагича бўлади:

$$x=\varphi(t),$$

$$y=\int\phi(t)\varphi'(t)dt+C.$$

Агар (4) тенгламани x га нисбатан ечиш мумкин бўлса, $x=\varphi(y')$, t параметр сифатида доим y' ни олган маъқул: $y'=t$. У ҳолда

$$x=\varphi(t),\ \ dy=y'dx=t\varphi'(t)dt,\ \ y=\int t\varphi'(t)dt+C$$

бўлиб, ечим

$$x=\varphi(t),\qquad y=\int t\varphi'(t)dt+C$$

кўринишда бўлади.

Мисоллар. ***а)*** $x=y'^3+y'$ тенгламани ечинг.

Ечими. $y'=t$ параметрни киритайлик, у ҳолда

$$x=t^3+t,\ \ dy=y'dx=t\left(3t^2+1\right)dt,\ \ y=\frac{3}{4}t^4+\frac{t^2}{2}+C.$$

Демак, $x=t^3+t.$

$$y=\frac{3}{4}t^4+\frac{t^2}{2}+C$$

тенгламанинг параметрик кўринишдаги интеграл чизиқлари.

б) $x=y'\sqrt{y'^2+1}$ тенгламани ечинг.

Ечими. $y'=t$ параметр киритамиз. У ҳолда

$$x=t\sqrt{t^2+1},\ \ dy=y'dx=t\sqrt{t^2+1}+t^2\Big/\sqrt{t^2+1}\,dt.$$

Бундан эса иккинчи тенгликни интеграллаб,

$$x=t\sqrt{t^2+1},$$

$$y=1\Big/3\cdot\left(2t^2-1\right)\sqrt{t^2+1}+C$$

берилган тенгламанинг интеграл чизиқларини параметрик кўринишини оламиз.

в) $y\Big/\sqrt{1+y'^2}=1$ тенгламани ечинг.

Ечими. $y'=sh\,t$ параметрни киритамиз. У ҳолда

$$y=ch\,t,\ \ dx=\frac{dy}{y'}=\frac{sh\,t\,dt}{sh\,t}=dt,\ \ x=t+C.$$

$y=ch\,t$ ва $x=t+C$ дан t ни йўқотсак, $y=ch(x-C)$ ечимни оламиз.

5. Агар (1) тенгламани y га нисбатан ечиш қулай бўлса, параметр сифатида x ва y' ларни олган маъқул. Ҳақиқатан ҳам (1) тенгламанинг кўриниши

$$y = f\left(x, y'\right) \tag{5}$$

бўлсин. У ҳолда x ва y лар сифатида x ва y' ларни олиб, қуйидагига эга бўламиз:

$$y = f\left(x, p\right), \quad dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial p}dp$$

ёки

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx},$$

$$p = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx}. \tag{6}$$

(6) ни интеграллаб, $\Phi\left(x, p, C\right) = 0,$ ни оламиз.

$$\Phi\left(x, p, C\right) = 0,$$

$$y = f\left(x, p\right)$$

биргаликда параметрик кўринишдаги интеграл чизиқлар оиласини беради.

6. Агар (1) тенглама x га нисбатан осон ечилса, яъни $x = f\left(y, y'\right)$ бўлса, параметр сифатида y ва $y' = p$ ларни олган маъқул. $dy = y'dx$ эканлигини эътиборга олсак,

$$dy = p\left[\frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial p}dp\right]$$

ёки

$$\frac{1}{p} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dy} \tag{7}$$

тенгликни оламиз. (7) ни интеграллаб, $\Phi\left(x, p, C\right) = 0$ ни оламиз. $\Phi\left(x, p, C\right) = 0$ ва $x = f\left(y, p\right)$ биргаликда берилган тенгламанинг интеграл чизиқлари оиласини беради.

7. $y = x\varphi\left(y'\right) + \phi\left(y'\right)$ – Лагранж тенгламаси. Бу тенгламани x бўйича дифференциаллаб, $y' = p$ десак,

$$p = \varphi\left(p\right) + x\varphi'\left(p\right)\frac{dp}{dx} + \phi'\left(p\right)\frac{dp}{dx} \tag{8}$$

ёки

$$\left[p-\varphi(p)\right]\frac{dp}{dx}=x\varphi'(p)+\phi'(p). \tag{9}$$

Бу чизиқли дифференциал тенглама ва қийинчиликсиз интгралланади (3-§, 1 п. га қаранг). (9) нинг интеграли $\Phi(x,p,C)=0$ ва $y=x\varphi(p)+\phi(p)$ биргаликда Лагранж тенгламасини беради.

$$\begin{aligned}&\Phi(x,p,C)=0,\\&y=x\varphi(p)+\phi(p).\end{aligned} \tag{10}$$

Фақат биз (8) дан (9) га ўтаётганда тенгликни dp/dx га бўлиш чоғида $p=p_i$ ўзгармас ечимларни (агар улар мавжуд бўлса) йўқотаяпмиз, $dp/dx\equiv 0.$ p ни ўзгармас десак, y (8) ни қаноатлантириши учун албат-та $p-\varphi(p)=0$ тенгламани қаноатлантириши керак, чунки $dp/dx\equiv 0.$ Демак, агар $p-\varphi(p)=0$ тенгламанинг ҳақиқий $p=p_i$ ечимлари мавжуд бўлса, (10) га унинг тўлиқ бўлиши учун $y=x\varphi(p_i)+\phi(p_i)$ ни қўшиб қўйиш керак. Шундай қилиб, умуман интеграл чизиқлар

$$\begin{aligned}&\Phi(x,p,C)=0,\\&y=x\varphi(p)+\phi(p)\end{aligned} \tag{11}$$

ёки

$$y=x\varphi(p_1)+\phi(p_1)$$

дан иборат бўлади.

Мисол. $y=2xy'-4y'^3$ тенгламани ечинг.

Ечими. $y'=p,\ y=2xp-4p^3$ деб, охирги тенгликни дифференциаллаcак,

$$p=2p+2x\frac{dp}{dx}-12p^2\frac{dp}{dx}$$

ифодани оламиз ва $\dfrac{dp}{dx}$ га бўлиб, чизиқли тенгламага эга бўламиз:

$$p\frac{dp}{dx}+2x=12p^2.$$

Бу тенгламани интеграллаб, $x=3p^2+C/p^2$ ни оламиз. Демак, интеграл чизиқлар синфи

$$x=3p^2+C/p^2,$$

$$y=2xp-4p^3 \quad \text{¸êè} \quad y=2p^3+2C/p.$$

$\dfrac{dp}{dx}$ га бўлганимизда $p-\varphi(p)=0$ тенгламанинг илдизлари бўлган p_i лар учун $p=p_i$ ечим йўқотилади. Демак,

$$x=3p^2+C/p^2\,,\;\; y=2p^3+2C/p,\;\; y=0$$

Лагранж тенгламасининг ечимини беради.

8. $y=xy'+\phi(y')$ – Клеро тенгламаси. $y'=p$ деб олсак, $y=xp+\phi(p)$ ни оламиз. Дифференциаллаб,

$$p=p+x\frac{dp}{dx}+\phi'(p)\frac{dp}{dx}$$

ёки

$$\left(x+\phi'(p)\right)\frac{dp}{dx}=0$$

тенгликни оламиз. Бундан $\dfrac{dp}{dx}=0$ ёки $x+\phi'(p)=0$ келиб чиқади.

Биринчи ҳолда $p=C$ бўлиб, $y=xp+\phi(p)$ дан

$$y=Cx+\phi(C) \tag{12}$$

интеграл чизиқлар оиласини оламиз.

Иккинчи ҳолда ечим

$$y=xp+\phi(p) \;\; \text{âà} \;\; x+\phi(p)=0 \tag{13}$$

тенгламалар билан аниқланади.

Қийинчиликсиз шунга ишонч ҳосил қилиш мумкинки, (13) тенгликлар билан аниқланадиган интеграл чизиқ (12) интеграл чизиқлар оиласининг ўрамаси бўлади.

Ҳақиқатдан ҳам, қандайдир $\Phi(x,p,C)=0$ чизиқлар оиласининг ўрамаси

$$\Phi(x,p,C)=0, \quad \partial\Phi/\partial C=0 \tag{14}$$

тенгламалар билан аниқланади. Шунинг учун (12) чизиқлар оиласининг ўрамаси

$$y=xC+\phi(C), \quad x+\phi'(C)=0$$

тенгламалар билан аниқланади, булар (12) дан фақат параметри билан фарқ қилади, холос.

Мисол. $y=xy'-y'^2$ тенгламани ечинг .

Ечими. $y'=p$ деб олсак, $(x-2p)\dfrac{dp}{dx}=0$ ни оламиз. Бундан эса $p=C,\; y=xp-p^2$ ёки $x-2p=0,\; y=xp-p^2$ ифодаларни оламиз.

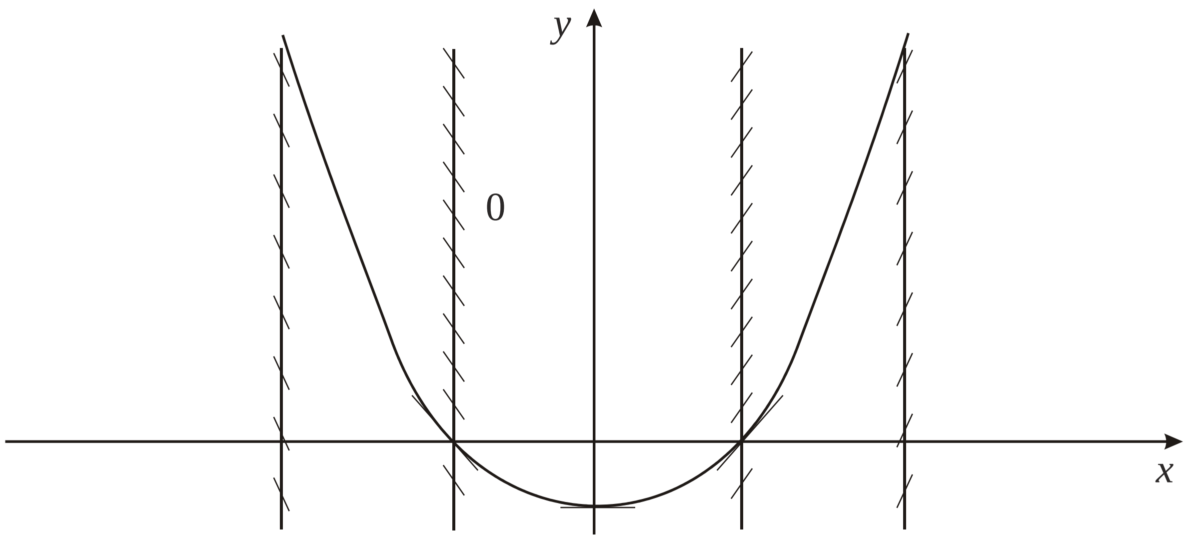
Демак, $y = xC - C^2$ ва $y = x^2/4$ лар тенгламанинг ечимлари бўлади.

II. Изоклиналар. $y' = f(x, y)$ тенгламанинг (x, y) нуқтадан ўтган ечими шу нуқтада $f(x, y)$ га тенг бўлган y' ҳосилага эга бўлади, яъни ечим OX ўқи билан $\alpha = arctg\ f(x, y)$ бурчак ташкил қилувчи тўғри чизиққа уриниб ўтиши керак. Агар тўғри чизиқ OX ўқи билан α бурчак ташкил қилса, α ***тўғри чизиқнинг оғмалиги*** дейилади. $y' = f(x, y)$ тенглама ечимларига уринмаларнинг оғмалиги бир хил бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни ***изоклиналар*** дейилади. Бундан келиб чиқадики, изоклиналар тенгламаси $f(x, y) = \hat{e}$, бу ерда $к$ – ўзгармас кўринишда бўлади.

$y' = f(x, y)$ тенгламанинг тақрибий ечимини қуриш учун етарли сондаги изоклиналар чизиб олиб, кейин булар ёрдамида ечимни ўтказиш керак, улар $f(x, y) = \hat{e}_1$, $f(x, y) = \hat{e}_2$, … изоклиналар билан кесишиш нуқтасида бурчак коэффициентлари $\hat{e}_1$, $\hat{e}_2$, … бўлган уринмаларга эга бўлади.

Мисоллар. *а*) Изоклиналар ёрдамида $y' = x/2$ дифференциал тенгламанинг интеграл чизиқларини қуринг.

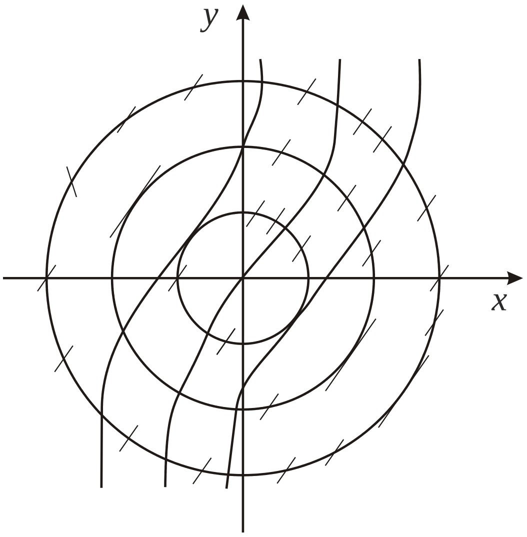
Ечими. Берилган тенгламанинг изоклиналар тенгламаси $x/2 = k$ ёки $x = 2$ кўринишда бўлиб, OY ўққа параллел бўлган тўғри чизиқлардан иборат (12-расмга қаранг).



12-расм

$k=0$ деб $x=0$ изоклинани ҳосил қиламиз, унинг барча нуқталарида майдон йўналиши OX ўққа параллел. $k=1$ да $x=2$ изоклинани оламиз, унинг барча нуқталарида майдон OX ўқ билан 45° ли бурчак ташкил этади; $k=-1$ деб, $x=-2$ изоклинани оламиз, унинг барча нуқталарида майдон йўналиш OX ўқ билан –45° ли бурчак ташкил этишини кўрамиз ва ҳ.к. Агар бирорта нуқта, масалан, M(–1,2) нуқтани олсак, у ҳолда бу нуқта орқали ўтувчи ечимни тақрибан ясаш мумкин, бунинг учун эгри чизиққа ҳар бир нуқтада ўтказилган уринма майдонининг бу нуқтадаги йўналиши бир хилда бўлишидан фойдаланиш керак. Чизмадан кўриниб турибдики, интеграл эгри чизиқлар параболани эслатади. Ҳақиқатан ҳам $y'=x/2$ тенгламанинг умумий ечими $y=x^2/4+C$ параболалар оиласидан иборат, $y(-1)=2$ бошланғич шарт эса бу параболалардан бирини аниқлайди.

б) $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{x^2+y^2}$ дифференциал тенгламанинг интеграл чизиқларини изоклиналар ёрдамида қуринг.



13-расм

Ечими. Бу тенглама учун $\dfrac{dy}{dx}=k,\ \sqrt{x^2+y^2}=k$ ёки $x^2+y^2=k^2$ айланалар изоклиналар бўлади. Уларнинг марказлари координата боши бўлиб, изланаётган интеграл чизиқнинг уринмаси бурчак коэффициенти айланалар радиусига тенг. Энди k га маълум қийматлар бериб йўналишлар майдонини чизамиз (13-расмга қаранг) ва изланаётган интеграл чизиқни тахминан ўтказишимиз мумкин.

III. Мавжудлик ва ягоналик теоремаси.

$$y'=f(x,y),\quad y(x_0)=y_0. \tag{15}$$

Коши масаласи берилган бўлсин. f ва f_y функциялар ёпиқ $R(|x-x_0|\le a,\ |y-y_0|\le b)$ соҳада аниқланган ва узлуксиз бўлсин. У ҳолда $x_0-d\le x\le x_0+d$ оралиқда (15) масаланинг ягона ечими мавжуд. Бу ерда $d=\min\left\{a;\dfrac{b}{m}\right\}$ деб олиш мумкин, a ва b лар юқорида берилган катталиклар, m эса $|f| \le m$ шартни қаноатлантирувчи ихтиёрий сон.

$$y(x_0) = y_0, \quad y_k(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_{k-1}(S))dS \qquad (16)$$

формула билан аниқланган кетма-кет яқинлашиш берилган оралиқда (15) масаланинг ечимига текис яқинлашади.

Мисол. $y' = x - y^2$, $y(0) = 0$ масала учун y_0, y_1, y_2, y_3 кетма-кет яқинлашишлар топилсин.

Ечими. (16) формулага асосан: $y(0) = 0 = y_0$;

$$y_1 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_0(S))dS = \int_{x_0}^{x} (S - O^2)dS = \frac{x^2}{2};$$

$$y_2 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_1(S))dS = \int_{x_0}^{x} \left(S - \frac{S^2}{4}\right)dS = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20};$$

$$y_3 = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(S, y_2(S))dS = \int_{x_0}^{x} \left(S - \frac{S^2}{4} + \frac{S^7}{20} - \frac{S^{10}}{400}\right)dS = \frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} - \frac{x^{11}}{4400}.$$

Тенгламанинг ҳамма ечимларини топинг ва агар мавжуд бўлса, махсус ечимларини ажратинг.

123. $y'^2 - x^2 = 0$

124. $y'^2 - y^2 = 0$

125. $y'^2 - x^2 + x^3 = 0$

126. $1/(y'^2 + 1) = y^2$

127. $y'^2 - (x + y)y' + xy = 0$

128. $y'^2 = y$

129. $y'^2 - y'y + e^x = 0$

130. $y'^3 + y^2 = yy'(y' + 1)$

131. $y'^2 - y^2(e^x - 1) = 2yy'$

132. $(xy' - y)^2 = 2xy(1 + y'^2)$

133. $yy' + y'^2 = x^2 + xy$

134. $x^2y'^2 + 3xyy' + 2y^2 = 0$

135. $y'^3 - yy'^2 - x^2y' + x^2y = 0$

136. $y'^2 + 2yy' ctg\, x - y^2 = 0$

137. $y'^2 + y(y - x)y' - xy^3 = 0$

138. $\sin(y' + 1)^2 + ctg\, y' = 0$

139. $sh\, y'^3 + \ln y' + y' = 0$

140. $\log_3(y'^2 + 1) + (y' + 1)\sin y' = 0$

141. $\cos(y' + 1) + y'^2 - 2y' + 1 = 0$

142. $\cos(y' + 1)^3 + \ln(y' + 2) + y' = 0$

143. $x = e^{y'} - y'^2$

144. $x(1 - y') = y'^2$

145. $x/y' = 1 + y'^2$

146. $x/(1 + y'^3) = y' + 2$

147. $y'(x + 1) = \lg y'$

148. $y' = y/(1 - y' \sin y')$

149. $y(2-y')=y'-1$

150. $y=y'\cos y'+\sin y'-1/y'^2$

151. $y=y'(\ln y'-1)/2-1/2y'^2$

152. $y=y'\sin y'+\cos y'+y'^3$

Лагранж ва Клеро тенгламаларининг умумий ва махсус ечимларини топинг.

153. $y=2xy'+\cos y'$

154. $y=2xy'+tg\, y'$

155. $y=2xy'+(y'+1)^2$

156. $y=3/2\,xy'-e^{y'}$

157. $y=2xy'+x+1/(y'+1)^2$

158. $y=xy'+y'-y'^2$

159. $(x+1)y'^2-(y+x)y'+y=0$

160. $(3x+1)y'^2-3(y+2)y'+9=0$

161. $(3x+5)y'^2-(3y+x)y'+y=0$

162. $axy'^2+(bx-ay+c)y'-by=0$

163. $x^2y'^2-(2xy+a)y'+y^2=0$

164. $yy'=2xy'^2+1$

Изоклиналар методи билан берилган дифференциал тенгламанинг $M(x_0;y_0)$ нуқтадан ўтувчи интеграл эгри чизиғини қуринг.

165. $x^2-y^2+2yy'=0,\quad M(-2;1)$

166. $y'=x^2-y,\quad M(2;3/2)$

167. $y'=y-x,\quad M(2;1)$

168. $yy'=-x,\quad M(2;3)$

169. $y'=y-x,\quad M(4;2)$

170. $y'=(y-3x)/(x+3y),\quad M(1;3)$

Ечимнинг мавжудлигини ва ягоналигини аниқлаган ҳолда тенгламани ечинг ва берилган $M(x_0;y_0)$ нуқтадан ўтувчи интеграл эгри чизиқни ажратинг.

171. $y'=-2e^{-x^2},\quad M(0;1)$

172. $y'=1/\sin x,\quad M(\pi/2;0)$

173. $y'=-1/x^2,\quad M(1;1),\quad M(-1;-1),\quad M(0;1)$

174. $y'=1/2\sqrt{x},\quad M(0;0)$

175. $y'=x/\sqrt{1-x^2},\quad M(0;-1),\quad M(0;1),\quad M(1;0)$

6-§. 3-ЛАБОРАТОРИЯ ИШИ

Синов учун савол ва топшириқлар

1. Ҳосилага нисбатан ечиладиган $F(x,y,y')=0$ кўринишдаги тенгламани қандай интеграллаш мумкин?

2. Параметр киритиш методини тушунтириб беринг.

3. Номаълум функция y га ёки эркли ўзгарувчи x га нисбатан ечиладиган $F\left(x, y, y'\right)=0$ кўринишдаги тенгламани қандай интеграллаш мумкин?

4. $F\left(x, y, y'\right)=0$ кўринишдаги тенгламанинг қандай ечими махсус ечим дейилади ва махсус ечимни қандай топиш мумкин?

5. Клеро тенгламаси қандай кўринишда бўлади ва уни қандай ечиш мумкин?

6. Дифференциал тенглама ечимининг мавжудлиги ва ягоналиги ҳақидаги теоремани айтиб беринг.

7. Дифференциал тенглама ечимининг берилган кесмадаги кетма-кет яқинлашиш формуласини ёзинг.

8. $y^2-2xyy'+\left(1+x^2\right)y'^2=1$ тенгламани ечинг.

9. $y'^2-2xy'\sqrt{y}+4y\sqrt{y}=0$ тенгламанинг махсус ечимини топинг.

10. $y'^2-x^2+x^3=0$ тенгламани ечинг.

1. Ҳосилага нисбатан ечиладиган тенгламани интегралланг.

1.1. $yy'+y'^2=x^2+xy$

1.2. $xy'=\sqrt{1+y'^2}$

1.3. $x^2y'^2+3xyy'+2y^2=0$

1.4. $xy'^2+2yy'-x=0$

1.5. $x^3+y'^2=x^2$

1.6. $\left(xy'-y\right)^2=2xy\left(1+y'^2\right)$

1.7. $x^2y'^2-2xyy'=x^2y^2-x^4$

1.8. $\left(xy'-y\right)\left(xy'-2y\right)+x^2=0$

1.9. $y'^2y^2-2xyy'+2y^2-x^2=0$

1.10. $y'^2-2yy'=y^2\left(e^{2x}-1\right)$

1.11. $y'^2-2xyy'-8x^2=0$

1.12. $x^2y'^2-3xyy'+2y^2=0$

1.13. $y'^2-\left(2x+y\right)y'+x^2+xy=0$

1.14. $yy'^2-\left(xy+1\right)y'+x=0$

1.15. $y'^3-2xy'^2-4yy'+8xy=0$

1.16. $y'^2=4\left|y\right|$

1.17. $y'^2=1/\left(4\left|x\right|\right)$

1.18. $y^2\left(1+y'^2\right)=a^2$

1.19. $y'^3-y/\left(4x\right)=0$

1.20. $y'^3-xy'^2-4yy'+4xy=0$

2. Тенгламанинг ҳамма ечимларини топинг.

2.1. $y'^3-3y'+1=0$

2.2. $y'^3+y'^2-y'-1=0$

2.3. $y'=e^{y'}\sin y'$

2.4. $\cos y'+\sin y'+e^{y'}=0$

2.5. $e^{y'+1}+\sin\left(y'+2\right)=0$

2.6. $tg\, y'+e^{y'+1}=0$

2.7. $sh\, y'+ch\, y'+y'=0$

2.8. $y'^2=e^{y'}\cos y'$

2.9. $y' = e^{y'} tg\, y'$ **2.10.** $y'^3 = y' ch\, y'^2$

2.11. $y'^4 + y'^3 - 2y'^2 - 2y' = 0$ **2.12.** $e^{y'+1} + y' = 1$

2.13. $\sin\left(y'+1\right) + \cos\left(y'+1\right) + y' = 0$ **2.14.** $y'^3 + 3y'^2 + 2y' - 1 = 0$

2.15. $\left(\dfrac{y'+1}{2}\right)^2 - 3\left(\dfrac{y'+1}{2}\right) + 2 = 0$ **2.16.** $\left(\dfrac{\sqrt{y'+1}}{\sin y'}\right)^3 + \sin y' = 0$

2.17. $\sin^4\left(y'^2+1\right) + y'^4 \cos y' = 0$ **2.18.** $e^{y'+2} + 2\sin y' + 1 = 0$

2.19. $sh\left(y'^2+1\right) + \cos y' = 0$ **2.20.** $e^{y'+1} + 2tg\, y' = 0$

3. Эркли ўзгарувчи x га нисбатан ечиладиган тенгламани интегралланг.

3.1. $x = \sin y' + \ln y'$ **3.2.** $y'^2 - 2xy' - 1 = 0$

3.3. $xy'^3 = 1 + y'$ **3.4.** $x\left(1+y'^2\right)^{3/2} = a$

3.5. $\arcsin\left(x/y'\right) = y'$ **3.6.** $x = 2\left(\ln y' - y'\right)$

3.7. $x = y'\left(1+y'\right)$ **3.8.** $x = e^{2y'}\left(2y'^2 - 2y' + 1\right)$

3.9. $x = \ln y' + \cos y'$ **3.10.** $x = 2y'^2 - 2y' + 2$

3.11. $x = y' + \sin y'$ **3.12.** $x = e^{y'/2} + \sin y'$

3.13. $x = e^{y'^2} + \cos y'$ **3.14.** $x = e^{y'} + \cos y'$

3.15. $xy'^2 = 3y' + 1$ **3.16.** $x = y' \ln y' + \sin y'$

3.17. $x = y' \cos y' + \ln y'$ **3.18.** $y'^2 x = e^{1/y'}$

3.19. $xy' = 5y' + 6$ **3.20.** $x = e^{y'} - 2y' + \cos y'$

4. Номаълум функция y га нисбатан ечиладиган тенгламани интегралланг.

4.1. $y = y' \ln y'$ **4.2.** $y = y'^2 + 2y'^3$

4.3. $y = y'^2 e^{y'}$ **4.4.** $y = y'^2 + 2\ln y'$

4.5. $y\Big/\sqrt{1+y'^2} = a$ **4.6.** $y' = arctg\left(y/y'^2\right)$

4.7. $y\left(1+1/y'^2\right)^{3/2}$ **4.8.** $y = e^{y'}\left(y'-1\right)$

4.9. $y\left(1+y'^2\right)^{1/2} = y'$ **4.10.** $y = y'^4 - y'^3 - 2$

4.11. $y = y'\left(1 + y'\cos y'\right)$ **4.12.** $y = \arcsin y' + \ln\left(1+y'^2\right)$

4.13. $y' = e^{y'/y}$ **4.14.** $y = y'/2 + \ln y'$

4.15. $y = y' + \sin y' + \cos y'$

4.16. $y = y'\sqrt{1+y'^2}$

4.17. $3y'^4 = y' + y$

4.18. $y = y'\sqrt{1-y'^2}$

4.19. $y' = y\left(1+y'\right)$

4.20. $y = \arccos y' + \ln\left(1+y'^2\right)$

5. Лагранж тенгламасини ечинг.

5.1. $y = 1/2 \cdot x\left(y' + 4/y'\right)$

5.2. $y = y' + \sqrt{1-y'^2}$

5.3. $y = \left(1+y'\right)x + y'^2$

5.4. $y = -1/2 \cdot y'\left(2x + y'\right)$

5.5. $y = \left(1+y'^2\right)/\left(2y'\right) \cdot x$

5.6. $y = 2xy' + 1/y'^2$

5.7. $xy'^2 + y'^3$

5.8. $y = \left(xy' + y'\ln y'\right)/2$

5.9. $y = xy'^2 + y'^2$

5.10. $y = 2xy' - y'^2$

5.11. $yy' = 2xy'^2 + 1$

5.12. $2y\left(y' + 2\right) = xy'^2$

5.13. $2y\left(y' + 1\right) = xy'^2$

5.14. $2yy' = x\left(y'^2 + 4\right)$

5.15. $y = -xy' + y'^2$

5.16. $y = 2xy' + \ln y'$

5.17. $y = 2xy' + \sin y'$

5.18. $y = 3xy'/2 + e^{y'}$

5.19. $xy'^2 + \left(y - 3x\right)y' + y = 0$

5.20. $xy'^2 + 2yy' + a = 0, \quad a \neq 0$

6. Клеро тенгламасининг умумий ва махсус ечимларини топинг.

6.1. $y = xy' + y'^2$

6.2. $y = xy' + \sqrt{1+y'^2}$

6.3. $y = xy' + 1/y'$

6.4. $y = xy' - 1/y'$

6.5. $y = xy' + y' + \sqrt{y'}$

6.6. $y = xy' - e^{y'}$

6.7. $y = xy' + \cos y'$

6.8. $y = xy' + y' - y'^2$

6.9. $y = xy' - a\sqrt{1+y'^2}$

6.10. $y = xy' + \sqrt{b^2 + a^2y'^2}$

6.11. $y = x\left(1/x + y'\right) + y'$

6.12. $y = xy' + \sqrt{1-y'^2}$

6.13. $xy'^2 - yy' - y' + 1 = 0$

6.14. $y'^2 - \left(x+1\right)y' + y = 0$

6.15. $\sqrt{y'^2 - 1} + xy' - y = 0$

6.16. $y'^2 + \left(x+1\right)y' - y = 0$

6.17. $y'^2 + \left(x+2\right)y' - y + 1 = 0$

6.18. $y'^2 + \left(ax+b\right)y' - ay + c = 0$

6.19. $2y'^2 + \left(x-1\right)y' - y = 0$

6.20. $xy'^2 - yy' + a = 0$

7. Изоклиналар методи билан берилган дифференциал тенгламанинг M нуқтадан ўтувчи интеграл эгри чизиғини қуринг.

7.1. $y' = y - x^2, \quad M(1;\ 2)$

7.2. $yy' = 2x, \quad M(0;\ 5)$

7.3. $y' = 2 + y^2, \quad M(1;\ 2)$

7.4. $y' = 2x/(3y), \quad M(1;1)$

7.5. $y' = (y-1)x, \quad M(1;\ 3/2)$

7.6. $yy' + x = 0, \quad M(-2;\ -3)$

7.7. $y' = 3 + y^2, \quad M(1;\ 2)$

7.8. $xy' = 2y, \quad M(2;\ 3)$

7.9. $y' = y/(x^2+2), \quad M(2;\ 2)$

7.10. $x^2 - y^2 + 2xyy' = 0, \quad M(2;1)$

7.11. $y' = y - x, \quad M(9/2;1)$

7.12. $y' = x^2 - y, \quad M(1;1/2)$

7.13. $y' = xy, \quad M(0;\ -1)$

7.14. $y' = xy, \quad M(0;1)$

7.15. $y' = -x/2, \quad M(4;\ 2)$

7.16. $2(y + y') = x + 3, \quad M(1;1/2)$

7.17. $y' = x + 2y, \quad M(3;\ 0)$

7.18. $xy' = 2y, \quad M(1;\ 3)$

7.19. $3yy' = x, \quad M(-3;\ -2)$

7.20. $y' = x - y^2, \quad M(-3;\ 4)$

8. Бошланғич шартлар берилган дифференциал тенглама учун y_0, y_1, y_2 кетма-кет яқинлашишларни топинг.

8.1. $y' = y - x^2, \quad y(0) = 0$

8.2. $y' = y^2 + 3x^2 - 1, \quad y(1) = 1$

8.3. $y' = y + e^{y-1}, \quad y(0) = 1$

8.3. $y' = 1 + x\sin y, \quad y(\pi) = 2\pi$

8.5. $y' = x + y^2, \quad y(0) = 0$

Тенгламанинг берилган бошланғич шартни қаноатлантирувчи ечими мавжуд бўладиган бирорта кесмани кўрсатинг.

8.6. $y' = x + y^3, \quad y(0) = 0$

8.7. $y' = 2y^2 - x, \quad y(1) = 1$

8.8. $dx/dt = t + e^x, \quad x(1) = 0$

8.9. $y' = \ln(xy), \quad y(1) = 1$

8.10. $y' = \ln x + \ln y, \quad y(2) = 1$

Ечимнинг ягоналигини таъминлайдиган бирорта етарли шартдан фойдаланиб, (x, y) текисликдан шундай соҳани ажратингки, унинг ҳар бир нуқтасидан берилган тенгламанинг ягона ечими ўтсин.

8.11. $y' = 2xy + y^2$

8.12. $y' = 2 + \sqrt[3]{y - 2x}$

8.13. $(x+2)y' = \sqrt{y} - x$

8.14. $(y - x)y' = y\ln x$

8.15. $y' = 1 + tg\, x$

8.16. $xy' = y + \sqrt{y^2 - x^2}$

8.17. $y' = \sin y - \cos x$

8.18. $y' = \sqrt[3]{3x - y} - 1$

8.19. $y' = \sqrt{x^2 - y} - x$

8.20. $y' = (x+1)/(x-y)$

7-§. ТАРТИБИНИ ПАСАЙТИРИШ МУМКИН БЎЛГАН ТЕНГЛАМАЛАР

1. Агар тенгламада номаълум функция, унинг $(k-1)$ – тартиблигича ҳосилалари иштирок этмаса, бошқача қилиб айтганда, тенглама

$$F\left(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right)=0 \qquad (1)$$

кўринишда бўлса, бундай тенгламанинг тартиби $y^{(k)}=z(x)$ алмаштириш ёрдамида пасайтирилади.

Мисол. $\dfrac{d^7y}{dx^7}-\dfrac{1}{x}\dfrac{d^6y}{dx^6}=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. $\dfrac{d^6y}{dx^6}=z(x)$, $\dfrac{dz}{dx}-\dfrac{1}{x}z=0$ тенгламани оламиз. Ўзгарувчиларини ажратиб, интеграллаб $\ln|z|=\ln|x|+\ln C_1$ ёки $z=C_1x$, $\dfrac{d^6y}{dx^6}=C_1x$ ни ҳосил қиламиз. Бундан эса кетма-кет интеграллаб,

$$y=C_1x^7+C_2x^5+C_3x^4+C_4x^3+C_5x^2+C_6x+C_7$$

ечимни оламиз.

2. Агар тенгламада эркли ўзгарувчи *x* иштирок этмаса, бошқача қилиб айтганда, тенглама

$$F\left(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right)=0 \qquad (2)$$

кўринишда бўлса, унинг тартибини янги эркли ўзгарувчи сифатида *y* ни, номаълум функция сифатида эса $y'=p(y)$ ни олиб пасайтириш мумкин.

Мисол. $y'^2+2yy''=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. $y'=p(y)$ деб $y''=p'(y)\cdot y'=p'\cdot p$ га эга бўламиз ва бундан $p^2+2ypp'=0$ тенгламани оламиз.

$$p(p+2yp')=0,\ \ p=0,\ \ y=C,\ \ p+2yp'=0.$$

Охириги тенгламани ўзгарувчиларини ажратиб ечамиз:

$$\ln p=-1/2\cdot\ln|y|+\ln C_1,\ \ p=C_1\big/\sqrt{y},\ \ y'=C_1\big/\sqrt{y},\ \ \sqrt{y}dy=C_1dx.$$

Бундан эса ўз навбатида интеграллаб,

$$2/3\cdot y\sqrt{y}=C_1x+C_2$$

ни оламиз. Демак, ечим $2/3\cdot y\sqrt{y}=C_1x+C_2$ ва $y=C$ лар экан.

3. Агар тенглама *у* унинг хоссаларига нисбатан бир жинсли бўлса, бошқача қилиб айтганда, $y, y', \ldots, y^{(n)}$ ларни бир пайтда $ky, ky', \ldots, ky^{(n)}$ ларга алмаштирилганда тенглама ўзгармаса унинг тартибини $y' = y \cdot z(x)$ алмаштириш ёрдамида пасайтириш мумкин, бу ерда $z(x)$ – янги номаълум функция.

Мисол. $xyy'' = xy'^2 = yy'$ тенгламани тартибини пасайтириб ечинг.

Ечими. y ни ky, y' ни ky', y'' ни ky'' билан алмаштирсак,

$$xk^2yy'' - xk^2y'^2 = k^2yy' \text{ ёки } xyy'' - xy'^2 = yy'$$

тенгламанинг ўзини оламиз. Демак, тенглама бир жинсли экан. Энди $y' = yz$ алмаштиришни бажариб, $y'' = y'z + yz' = yz^2 + yz'$ эканлигидан фойдалансак,

$$xy\left(yz^2 + yz'\right) - xy^2z^2 = y^2z, \quad xy^2z' - y^2z = 0, \quad y^2\left(xz' - z\right) = 0$$

тенгламани оламиз. Бундан

$$y = 0, \ \ xz' - z = 0, \ \ dz/z = dx/x, \ \ \ln|z| = \ln|x| + \ln|C_1|, \ \ z = C_1x,$$

$$y'/y = C_1x, \ \ dy/y = C_1xdx, \ \ \ln|y| - C_1x^2 + \ln|C_2|, \ \ y = C_2e^{C_1x}.$$

Демак, жавоб $y = C_2e^{C_1x}$.

Агар тенглама x ва y га нисбатан умумлашган бир жинсли бошқача қилиб айтганда, бирор m учун x ни kx га, y ни k^my га, y' ни $k^{m-1}y'$ га, y'' ни $k^{m-2}y''$ га ва ҳоказо алмаштирилганда тенглама ўзгармаса, унинг тартибини пасайтириш мумкин.

Тенгламанинг шу маънода бир жинсли бўлиши ёки бўлмаслигини билиш ва m ни топиш учун юқоридаги алмаштиришни бажариб, тенгламадаги ҳар бир ҳадда иштирок этган k нинг даражаларини тенглаштириб чиқиш керак.

Агар m учун ҳосил бўлган тенгламалар системаси биргаликда бўлса, m ни топиб, $x = e^t$, $y = ze^{mt}$, $z = z(t)$ алмаштиришни бажариш керак.

Бу алмаштиришдан кейин янги эркли ўзгарувчи t иштирок этмаган тенгламани оламиз. Бундай тенгламанинг тартибини 2-§ да кўрсатилган усулда пасайтирилади. $x = e^t$, $y = ze^{mt}$ алмаштиришда ҳосилалар қуйидагича ҳисобланади.

$$y' = \frac{dy}{dt}e^t = \left(\frac{dz}{dt}e^{mt} + mze^{mt}\right)e^{-t} = \left(z' + mz\right)e^{(m-1)t},$$

$$y'' = \frac{dy'}{dt}e^t = \left(z'' + (2m-1)z' + m(m-1)z\right)e^{(m-1)t}, \qquad (3)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y(n) = g\left(z, z', \ldots, z^{(n)}\right)e^{(m-1)t}.$$

Мисол. $x^4y'' + \left(xy' - y\right)^3 = 0$ тенгламани ечинг.

Ечими. x ни kx, y ни $k^m y$, y' ни $k^{m-1}y'$, y'' ни $k^{m-2}y''$ га алмаштирайлик:

$$k^4x^4k^{m-2}y'' + \left(kxk^{m-1}y' - k^m y\right)^3 = 0$$

$$m + 2 = 3m = m = 1.$$

Бундан тушунарлики, тенглама умумлашган маънода бир жинсли. Тенгламани ечиш учун $x = e^t$, $y = ze^t$ алмаштиришни бажарамиз. У ҳолда $y' = z' + z$, $y'' = \left(z'' + z'\right)e^{-t}$. Бундан

$$e^{4t}\left(z'' + z'\right)e^{-t} + \left[e^t\left(z' + z\right) - ze^t\right] = 0, \quad z'' + z' + z'^3 = 0.$$

Ҳосил қилинган тенглама t га боғлиқ эмас. $z' = p(z)$, $z'' = pp'$, $pp' + p + p^3 = 0$, бундан эса $dp/dz = -1 - p^2$ ёки $p = 0$ ни оламиз. Иккинчи $p = 0$ дан $z' = 0$, $z = C$, $y = Cx$ келиб чиқади. Биринчи тенгламадан эса $dp\big/\left(1 + p^2\right) = -dz$, $arctg\ p = C_1 - z$, $p = tg\left(C_1 - z\right)$ келиб чиқади. Шунинг учун

$$z' = tg\left(C_1 - z\right),\ ctg\left(C_1 - z\right)dz = dx,$$

$$\int ctg\left(C_1 - z\right)dz = z - \ln\left|C_2\right|,\ \ln\left|\sin\left(C_1 - z\right)\right| = -x + \ln\left|C_2\right|,$$

$$\sin\left|C_1 - z\right| = C_2e^{-x},\ z = C_1 + \arcsin C_2e^{-x}.$$

$y = zx, e^{-t} = 1/x$ алмаштиришни ҳисобга олиб, $y = x\left(C_1 + \arcsin\left(C_2/x\right)\right)$ ни оламиз.

5. Агар тенгламанинг ҳар иккала томони қандайдир функциянинг тўлиқ дифференциалига келтириш мумкин бўлса, унинг тартибини пасайтириш мумкин.

Мисол. $xy'' - y' - x^2yy' = 0$, $\quad y(1) = 0$, $\quad y'(1) = 2$ Коши масаласининг ечимини топинг.

Ечими тенгламанинг ҳар иккала томонини $x^2 \neq 0$ га бўлсак, тўлиқ дифференциал ҳолга келади:

$$\frac{xy''-y'}{x^2}-yy'=0, \quad \left(\frac{y'}{x}\right)'-\left(\frac{1}{2}y^2\right)'=0, \quad \left(\frac{y'}{x}-\frac{1}{2}y^2\right)'=0,$$

бундан $\frac{y'}{x}-\frac{1}{2}y^2=C_1$. C_1 ни $y'(\mathrm{I})=2, y(\mathrm{I})=0$ шартдан фойдаланиб топамиз: $C_1=2/1-1/2\cdot 0=2$. У ҳолда

$$\frac{y'}{x}-\frac{1}{2}y^2+2, \quad \frac{dy}{y^2+4}=\frac{1}{2}xdx, \quad arctg\frac{y}{2}=\frac{1}{2}x^2+C_2.$$

$$C_2=arctg(0/2)-1/2=-1/2.$$

Демак, Коши масаласининг ечими $y=2tg\frac{x^2-1}{2}$ кўринишда бўлар экан.

Тенгламани ечинг.

176. $y''+y'+2=0$

177. $3y''=\left(1+y'^2\right)^{3/2}$

178. $4y'+y''^2=4xy''$

179. $y'\left(1+y'^2\right)=ay''$

180. $y'''\left(1+y'^2\right)-3y'y''^2=0$

181. $yy''=y'+y'^2$

182. $yy''=1+y'^2$

183. $2yy''=1+y'^2$

184. $y^3y''=-1, y(1)=1, y'(1)=0$

185. $yy''-y'^2=y^2y'$

186. $nyy''-(n-1)y'^2=0$

187. $ayy''+by'^2-\frac{yy'}{\sqrt{x^2+C^2}}=0$

188. $xyy''+xy'^2-yy'=0$

189. $xyy''-4xy'^2+4yy'=0$

190. $2xyy''-xy'^2+yy'=0$

191. $y''+\frac{2x}{x^2+1}y'=2x$

192. $x^5y'''+x^4y''=1$

193. $xy'''+y''+1/x=0$

194. $x^3y'''+x^2y''=\sqrt{x}$

195. $x^4y''+3xy^2y'-y^3=0$

196. $x^4y''+x^2y'^2+y^2=0$

197. $x^4y''+x^2y'^2-2xyy'=0$

198. $x^3y''+2xyy'+y^2=0$

199. $x^4y''+x^3y'^2+3x^2yy'^2=0$

200. $x^4y''+3xy^2y'-y^3=0$

Коши масаласини ечинг.

201. $y^3 y'' = y^4 - 16, \quad y(0) = 2\sqrt{2}, \quad y'(0) = \sqrt{2}$

202. $y'y''' - 3y''^2 = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1, \quad y''(0) = 0$

203. $y''' = yy'' + y'^2, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1/2, \quad y''(0) = 0$

204. $2y'^2 = (y-1)y'', \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$

205. $y''' = 3yy', \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = 3/2$

8-§. 4-ЛАБАРАТОРИЯ ИШИ

Синов учун савол ва топшириқлар

1. $F\left(x, y(k), y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ кўринишдаги тенгламанинг тартиби қандай пасайтирилади?

2. Қандай алмаштириш ёрдамида $F\left(y, y^1, \ldots, y^{(n)}\right) = 0$ кўринишдаги тенгламанинг тартибини пасайтириш мумкин?

3. Номаълум функция ва унинг ҳосилаларига нисбатан жинсли бўлган тенгламанинг тартиби қандай пасайтирилади?

4. Иккала томони x нисбатан тўла хосиладан иборат тенгламанинг тартибини пасайтириш мумкинми

5. Қандай тенгламага x ва y га нисбатан умумлашган бир жинсли тенглама дейилади ва унинг тартиби қандай пасайтирилади?

6. n-тартибли оддий дифференциал тенглама учун Коши масаласининг қўйилишини ва уни ечиш усулини ифодаланг.

7. $y'' + \sin y = 0$ тенгламанинг $x \to \infty$ да $y \to \pi$ бўладиган ечими бор эканлигини исботланг.

8. $y^2 y''' = y'^3$ тенгламанинг тартибини пасайтириб, биринчи тартибли тенгламага келтиринг.

1. Тенгламани ечинг.

1.1. $\left(1 + x^2\right)y'' + y'^2 + 1 = 0$

1.2. $xy'' = y' \ln\left(y'/x\right)$

1.3. $xy'' - y' = 0$

1.4. $y'\left(1 + y'^2\right) = ay''$

1.5. $2y'\left(y''+2\right)=xy''^2$

1.6. $y''^2-2y'y'''+1=0$

1.7. $xy''=y'+x\sin\left(y'/x\right)$

1.8. $y''^2=y'^2+1$

1.9. $y''\left(2y'+x\right)=1$

1.10. $\left(1-x^2\right)y''+xy'=2$

1.11. $y''^2+y'=xy''$

1.12. $y'''y'^2=y''^3$

1.13. $y''\left(2+x\right)^5=1,\quad y\left(-1\right)=1/12,\quad y'\left(-1\right)=-1/4$

1.14. $xy''=\left(1+2x^2\right)y'$

1.15. $xy''=y'+x^2$

1.16. $x\ln y''=y'$

1.17. $2y''=y'/x+x^2/y'$

1.18. $y'''=\sqrt{1-y''^2}$

1.19. $xy'''-y''=0$

1.20. $y''=\sqrt{1-y'^2}$

2. Тенгламани ечинг.

2.1. $y''+y'^2=2e^{-y}$

2.2. $y''=e^y$

2.3. $y^4-y^3y''=1$

2.4. $yy''-2yy'\ln y=y'^2$

2.5. $yy''+y=y'^2$

2.6. $yy''^2=1$

2.7. $y''=ae^y$

2.8. $3y''=y^{-5/3}$

2.9. $2\left(2a-y\right)y''=1+y'^2$

2.10. $1+y'^2=2yy''$

2.11. $y'^2=\left(2y-2y'\right)y''$

2.12. $2y'^2=\left(y-1\right)y''$

2.13. $yy''=y'^2$

2.14. $2yy''+y'^2+y'^4=0$

2.15. $2yy''-3y'^2=4y^2$

2.16. $2yy''+y'^2=0$

2.17. $yy''+y'^2=0$

2.18. $yy''=y'+y'^2$

2.19. $yy''=1+y'^2$

2.20. $2yy''=1+y'^2$

3. Тенгламани ечинг.

3.1. $x^2yy''-2x^2y'^2+xyy'+y^2=0$

3.2. $x^2\left(yy''-y'^2\right)+xyy'=y\sqrt{x^2y'^2+y^2}$

3.3. $xyy''+xy'^2-yy'=0$

3.4. $xyy''-xy'^2-yy''=0$

3.5. $xy'\left(yy''-y'^2\right)-yy'^2=x^4y^3$

3.6. $yy''+y'^2+ayy'+by^2=0$

3.7. $yy''-3y'^2+3yy'-y^2=0$

3.8. $yy''-y'=\dfrac{yy'}{\sqrt{1+x^2}}$

3.9. $x^2yy''=\left(y-xy'\right)^2$

3.10. $xyy''-xy'^2-yy'=0$

3.11. $2yy''-3y'^2=2y^2$

3.12. $3y'^2=4yy''+y^2$

3.13. $y'^2+yy''=yy'$

3.14. $\left(y+y'\right)y''+y'^2=0$

3.15. $y'y''-x^2yy'-xy^2=0$

3.16. $\left(xy'-y\right)y''+4y'^2=0$

3.17. $yy''-y'^2-y^2\ln x=0$

3.18. $xyy''+xy'^2=2yy'$

3.19. $2yy''-3y'^2=4y^2$

3.20. $3yy''-5y'^2=0$

4. Тенгламани ечинг.

4.1. $yy'''+3y'y''=0$

4.2. $yy''=y'\left(y'+1\right)$

4.3. $yy''+y'^2=1$

4.4. $xy''=2yy'-y'$

4.5. $y'y'''=2y''^2$

4.6. $5y'''^2-3y''y^{\mathrm{IV}}=0$

4.7. $y''=xy'+y+1$

4.8. $xy''-y'=x^2yy'$

4.9. $y''=\left(1+y'^2\right)^{3/2}$

4.10. $\left(1+y'^2\right)y'''=3y'y''^2$

4.11. $y''-y'/x+y/x^2=1$

4.12. $y''+y'\cos x-y\sin x=0$

4.13. $y'y'''-3y''^2=0$

4.14. $y'''x\ln x=y''$

4.15. $y'''ctg\ 2x+2y''=0$

4.16. $\left(1+\sin x\right)y'''=\cos y''$

4.17. $y^{\mathrm{IV}}thx=y'''$

4.18. $y'''tg\ x=y''+1$

4.19. $\left(1+x^2\right)y''+2xy'=x^3$

4.20. $\left(x+1\right)y'''+y''=x+1$

5. Умумлашган бир жинсли тенгламани тартибини пасайтириб биринчи тартибли тенгламага келтиринг.

5.1. $4x^2y^3y''=x^2-y^4$

5.2. $x^3y''=\left(y-xy'\right)\left(y-xy'-x\right)$

5.3. $\dfrac{y^2}{x^2}+y'^2=3xy''+\dfrac{2yy'}{x}$

5.4. $y''=\left(2xy-\dfrac{5}{x}\right)y'+4y^2-\dfrac{4y}{x}$

5.5. $x^2\left(2yy''-y'^2\right)=1-2xyy'$

5.6. $yy'-xyy''-xy'^2=x^3$

5.7. $x^2\left(yy''-y'^2\right)+xyy'=\left(2xy'-3y\right)\sqrt{x^3}$

5.8. $x^4\left(y'^2-2yy''\right)=4x^3yy'+1$

5.9. $x^4y''+\left(xy'-y\right)^3=0$

5.10. $xyy''+yy'-x^2y'^3=0$

5.11. $x^2y''-3xy'+4y+x^2=0$

5.12. $x^4y''-x^3y'^3+3x^2yy'^2=0$

5.13. $3xy^2+2x^3y'=2x^2y+y^3$

5.14. $x^2y''=\left(y-xy'\right)^2$

5.15. $nx^3y'' = (y - xy')^2$

5.16. $y^2\left(x^2y'' - xy' + y\right) = x^3$

5.17. $x^2y^2y'' - 3xy^2y' + 4y^3 + x^6 = 0$

5.18. $x^3y'' + 2xyy' - x^2y'^2 - y^2 = 0$

5.19. $x^4y^3 + x^2y'^2 + x^2yy'' = 0$

5.20. $x^3y'' + (xy' - y)^2 = 0$

6. Коши масаласининг ечимини топинг.

6.1. $yy'' = 2y'^2,\ y(2) = 2,\ y'(2) = 0{,}5$

6.2. $2y''' - 3y'^2 = 0,\ y(0) = -3,\ y'(0) = 1,\ y''(0) = -1$

6.3. $x^2y'' - 3xy' = 6y^2/x^2 - 4y,\ y(1) = 1,\ y'(1) = 4$

6.4. $y''' = 3yy',\ y(0) = -2,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 4{,}5$

6.5. $y''\cos y + y'^2\sin y = y,\ y(-1) = \pi/6,\ y'(-1) = 2$

6.6. $y''y^3 + 64 = 0,\ y(0) = 4,\ y'(0) = 2$

6.7. $y'' + 2\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

6.8. $y'' = 32\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 4$

6.9. $y''y^3 + 49 = 0,\ y(3) = -7,\ y'(3) = -1$

6.10. $4y^3y'' = 16y^4 - 1,\ y(0) = \sqrt{2}/2,\ y'(0) = \sqrt{2}/2$

6.11. $y'' + 8\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 2$

6.12. $y'' = 18\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 3$

6.13. $4y^3y'' = y^4 - 16,\ y(0) = 2\sqrt{2},\ y'(0) = 1/\sqrt{2}$

6.14. $y'' + 18\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$

6.15. $y'' = 8\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 3$

6.16. $y'' + 32\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 4$

6.17. $y'' = 50\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 5$

6.18. $y^3y'' = 4\left(y^4 - 1\right),\ y(0) = \sqrt{2},\ y'(0) = \sqrt{2}$

6.19. $y'' + 50\sin y\cos^3 y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 5$

6.20. $y'' = 2\sin^3 y\cos y,\ y(1) = \pi/2,\ y'(1) = 1$

9-§. ЎЗГАРМАС ВА ЎЗГАРУВЧИ КОЭФФИЦИЕНТЛИ ЧИЗИҚЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли
$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y^{(1)}+a_ny=0 \qquad (1)$$
кўринишдаги тенгламани ечиш учун унинг характеристик тенгламасини
$$a_0\lambda^{(n)}+a_1\lambda^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (1)$$
тузиб олиш ва унинг $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ илдизларини топиш керак. (1) тенгламанинг умумий ечими, (2) тенгламанинг оддий λ_i илдизига мос келувчи $C_1e^{\lambda_i x}$ ва k_j каррали λ_j илдизига мос келувчи
$$\left(C_{m+1}+C_{m+2}x+C_{m+2}x^2+\ldots+C_{m+k_j}x^{k_j-1}\right)e^{\lambda_j x}$$
ҳадлар йиғиндисидан иборат бўлади, бу ерда барча C лар ихтиёрий ўзгармаслардир.

(1) тенгламанинг коэффициентлари ва λ характеристик илдизлари ҳақиқий ҳам, комплекс ҳам бўлавериши мумкин.

Мисол. $y^{(5)}-12y^{(4)}+56y'''-126y''+135y'-54y=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. Характеристи тенгламаси
$$\lambda^5-12\lambda^4+56\lambda^3-126\lambda^2+135\lambda-54\lambda=0$$
ёки
$$(\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3)^3=0$$
кўринишда бўлади. Бу тенгламанинг оддий $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$ илдизларга $C_1e^x,\ C_2e^{2x}$ ҳадлар, 3 каррали $\lambda=3$ илдизга эса $\left(C_3+C_4x+C_5x^2\right)e^{3x}$ ҳад мос келади. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими бу ҳадларнинг йиғиндисидан иборат:
$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left(C_3+C_4x+C_5x^2\right)e^{3x}.$$

Агар (1) тенгламанинг барча коэффициентлари ҳақиқий бўлса, унинг ечими λ_1 характеристик илдизлардан бирортаси комплекс бўлганда ҳам ҳақиқий кўринишда ёзиш мумкин. (1) тенгламанинг умумий ечими (2) тенгламанинг $\lambda=\alpha+\beta 1$ ўзаро қўшма комплекс илдизларига мос келувчи
$$C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x+C_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x$$
кўринишдаги ва k каррали $\lambda=\alpha+\beta 1$ комплекс илдизларга мос келувчи

$$P_{k-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_{k-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x \tag{5}$$

кўринишдаги қўшилувчиларнинг йиғиндисидан иборат бўлади. Бу ерда C_1 ихтиёрий ўзгармаслар, $P_{k-1}(x)$ ва $Q_{k-1}(x)$ лар (3) ифодадагига ўхшаш $k-1$ тартибли кўбҳадлар бўлиб, уларнинг коэффициентлари ихтийрий ўзгармаслардир.

Мисол. $y''-2y'+2y=0$ тенгламани ечинг.

Ечими. Характеристик тенгламаси $\lambda^2-2\lambda+2=0$ бўлиб, $\lambda=1\pm 1$ оддий илдизларга эга, шунинг учун ечимнинг кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y=C_1e^x\cos x+C_2e^x\sin x.$$

2. Чизиқли бир жинсли бўлмаган, ўзгармас коэффициентли дифференциал тенгламанинг ўнг томони $b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$ функцияларнинг йиғиндиси ва кўпайтмасидан иборат бўлса, унинг хусусий ечимини номаълум коэффициентлар методи билан қидириш мумкин.

Агар тенгламанинг ўнг томони $P_m(x)e^{\gamma x}$ кўринишда бўлса, (бу ерда $P_m(x)=b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m$) хусусий ечим

$$y_1=x^3Q_m(x)e^{\gamma x}$$

кўринишда бўлади. Бунда $Q_m(x)$ – коэффициентлар ҳозирча номаълум бўлган m тартибли кўпҳад, S эса қуйидагича аниқланади: агар γ (2) тенгламанинг илдизи бўлмаса, $S=0$, агар γ тенгламанинг p каррали илдизи бўлса $S=P$.

$Q_m(x)$ кўпҳаднинг коэффициентларини топиш учун (6) ечимни берилган дифференциал тенгламага қўйиб, тенгликнинг ўнг ва чап томонидаги ўхшаш ҳадларнинг коэффициентларини тенглаш керак.

Агар ўнг томонида *sin* ва *cos* лар иштирок этиб қолса, бизга маълумки, улар Эйлар формуласи ёрдамида кўрсаткичли функциялар орқали ифодалаш мумкин:

$$\cos\beta x=\frac{e^{1\beta x}+e^{-1\beta x}}{2},\quad \sin\beta x=\frac{e^{1\beta x}-e^{-1\beta x}}{21} \tag{7}$$

У ҳолда масала ҳозир кўрилган ҳолга келади.

Агар тенглама чап томонининг коэффициентлари ҳақиқий бўлса, (7) комплекс функцияларсиз масалани ҳал қилиш мумкин.

Ўнг томони

$$e^{\alpha x}\left(P_k(x)\cos\beta x+Q_i(x)\sin\beta x\right) \tag{8}$$

кўринишда бўлган тенгламаларда хусусий ечимни

$$y_1 = x^s e^{\alpha x}\left(R_m\left(x\right)\cos\beta x + T_m\left(x\right)\sin\beta x\right) \tag{9}$$

кўринишда қидириш мумкин. Бу ерда, агар $\alpha + \beta 1$ (2) характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, $S = 0,$ акс ҳолда S $\alpha + \beta 1$ илдизнинг карралиги, $R_m\left(x\right)$ ва $T_m\left(x\right)$ – m-тартибли кўпҳадлар, $m = \max\left\{k, 1\right\},$ $R_m\left(x\right)$ ва $T_m\left(x\right)$ кўпҳадларнинг коэффициентларини топиб олиш учун (9) хусусий ечими берилган тенгламага қўйиб, тенгликнинг ўнг ва чап томонидаги ўхшаш ҳадларнинг коэффициентларини тенглаштириш керак.

Шуни ҳам таъкидлаб ўтиш керакки, бир жинсли бўлмаган чизиқли тенгламанинг умумий ечими, шу тенгламанинг битта хусусий ечими билан унга мос келган бир жинсли тенгламалари йиғиндисига тенг. Ундан ташқари, агар тенгламанинг ўнг томони бир нечта функциялар йиғиндисидан иборат бўлса, унинг хусусий ечими шу тенглама чап томонидаги қўшилувчиларнинг ҳар бирига тенглаштириб олинган тенгламалар хусусий ечимлари йиғиндисидан иборат деб қараш мумкин.

Мисоллар. *а*) $y'' + y = 4xe^x$ тенгламани ечинг.

Ечими. **I.** $y'' + y = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Характеристик тенгламаси $\lambda^2 + 1 = 0,$ бундан $\lambda_{1,2} = \pm 1.$ Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $y = C_1\sin x + C_2\cos x$ кўринишда бўлади.

II. Берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$y = x^s Q_m\left(x\right)e^{\gamma x}$$

кўринишда қидирамиз. Бизнинг мисолимизда $S = 0,$ чунки $\gamma = 1$ характеристик тенгламанинг илдизи эмас, $Q_m\left(x\right) = b_0 + b_1 x,$ чунки $P_m\left(x\right) = 4x,$ яъни $m = 1,$ шунинг учун хусусий ечими

$$y_1 = \left(b_0 + b_1 x\right)e^x$$

кўринишда қидирамиз. Буни берилган тенгламага қўйиб,

$$y_1' = \left(b_0 + b_1 + b_1 x\right)e^x;\quad y_1' = \left(b_0 + 2b_1 + b_1 x\right)e^x;$$

$$\left(b_0 + b_1 x\right)e^x + \left(b_0 + 2b_1 + b_1 x\right)e^x = 4xe^x;$$

$$2b_0 + 2b_1 + 2b_1 x = 4x;\quad 2b_0 + 2b_1 = 0;$$

$$2b_1 = 4;\quad b_0 = -2;\quad b_1 = 2$$

ларни оламиз. Демак, хусусий ечим $y_1 = \left(2x - 2\right)e^x$ кўринишда экан.

Берилган тенгламанинг умумий ечими, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими (I) билан берилган тенгламанинг хусусий ечими (II) нинг йиғиндисига тенг:

$$y = C_1 \sin x + C_2 \cos x + \left(2x - 2\right)e^x.$$

б) $y'' + 2y' - 3y = x^2 e^x$ тенгламани ечинг.

Ечими. **I.** $y'' + 2y' - 3y = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Характеристик тенгламаси $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$ кўринишда бўлади, бундан $\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -3$ эканлигини топамиз, демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-3x}$$

кўринишда бўлади.

II. Берилган тенгламанинг хусусий ечимини олдинги мисолдагидек (6) кўринишда қидирамиз. Бизнинг мисолимизда $S = 1,$ чунки $\gamma = 1$ характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи,

$$Q_m\left(x\right) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2,$$

чунки $P_m\left(x\right) = x^2$, яъни $m = 2,$ шунинг учун хусусий ечим

$$y_1 = x\left(b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right)e^x$$

кўринишда қидирилади. Буни берилган тенгламага қўйиб,

$$y_1' = \left[b_0 + \left(b_0 + 2b_1\right)x + \left(3b_2 + b_1\right)x^2 + b_2 x^3\right]e^x,$$

$$y_2'' = \left[2 + \left(b_0 + b_1\right) + \left(b_0 + 4b_1 + 6b_2\right)x + \left(6b_2 + b_1\right)x^2 + b_2 x^3\right]e^x,$$

$$\left[2 + \left(b_0 + b_1\right) + \left(b_0 + 4b_1 + 6b_2\right)x + \left(6b_2 + b_1\right)x^2 + b_2 x^3\right]e^x +$$

$$+2\left[b_0 + \left(b_0 + 2b_1\right)x + \left(3b_2 + b_1\right)x^2 + b_2 x^3\right]e^x -$$

$$-3x\left[b_0 + b_1 x + b_2 x^3\right]e^x = x^2 e^x,$$

$$4b_0 + 2b_1 = 0, \quad 8b_1 + 6b_2 = 0, \quad 12b_2 = 1,$$

$$b_2 = 1/12, \quad b_1 = -1/16, \quad b_0 = 1/32$$

ларни оламиз . Демак, хусусий ечим

$$y_1 = x\left(1/32 - 1/16 \cdot x + 1/12 \cdot x^2\right)e^x$$

кўринишда экан.

Юқоридагидек, берилган тенгламанинг умумий ечими бир жинсли тенгламанинг умумий ечими (I) билан бир жинсли бўлмаган (берилган) тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисига тенг

$$y_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-3x} + x\left(1/32 - 1/16 \cdot x + 1/12 \cdot x^2\right)e^x.$$

в) $y''-3y'+2y=xe^{x}\cos x$ тенгламани ечинг.

Ечими. ***I.*** $y''-3y'+2y=0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топамиз. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

бўлиб, унинг илдизлари, $\lambda_1=1,\ \lambda_2=2$ бўлади. Бундан эса бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1e^{x}+C_2e^{2x}$$

кўринишда эканлиги келиб чиқади.

II. Энди берилган тенгламанинг хусусий ечимини (9) кўриниш-да, яъни

$$y=x^{s}e^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right)$$

ҳолда қидирамиз, чунки тенгламанинг ўнг томони (8) кўринишда, Бизнинг мисолда $\alpha=1,\ \beta=1,\ \alpha\pm\beta l=1+l,\ S=0,$ чунки $\alpha+\beta l=1+l,$ $S=0,$ характеристик тенгламанинг ечими эмас.

$R_m(x)=a_0+a_1x,\ T_m(x)=b_0+b_1x,$ чунки $P(x)=x$ ва $Q(x)=0,$ бўлиб, $k=1$ ва $l=0,$ шунинг учун $m=1.$ Шундай қилиб, хусусий ечимни

$$y_1=e^{x}\left((a_0+a_1x)\cos x+(b_0+b_1x)\sin x\right)$$

кўринишда қидиришимиз керак экан. Буни тенгламага қўйиб,

$$y_1'=\left[(b_1-a_0-a_1x)\sin x+(a_1+b_0+b_1x)\cos x+(a_0+a_1x)\cos x+\right.$$

$$\left.+(b_0+b_1x)\sin x\right]e^{x}=\left[\left(a_0+b_0+a_1+(a_1+b_1)x\right)\cos x+\right.$$

$$\left.\left(b_0-a_0+b_1+(b_1-a_1)x\right)\sin x\right]e^{x},$$

$$y_1''=\left\{\left[a_1+b_1+b_0-a_0+b_1+(b_1-a_1)x\right]\cos x+\right.$$

$$+\left[b_1-a_1+a_0+b_0+a_1+(a_1+b_1)x\right]\sin x+$$

$$+\left[a_0+b_0+a_1+(a_1+b_1)x\right]\cos x+$$

$$\left.+\left[b_0-a_0+b_1+(b_1-a_1)x\right]\sin x\right\}e^{x}=$$

$$\left\{\left[2(a_1+b_1+b_0)+2b_1x\right]\cos x\left[2(b_0+b_1)+2b_1x\right]\sin x\right\}e^{x},$$

$$2\left[(a_1+b_1+b_0)+b_1x\right]\cos x+2\left[(b_0+b_1)+b_1x\right]\sin x-$$

$$-3\left\{\left[(a_0+b_0+a_1)+(a_1+b_1)x\right]\cos x+\right.$$

$$+\left[\left(b_0-a_0+b_1\right)+\left(b_1-a_1\right)x\right]\sin x\Big\}+$$

$$+2\left[\left(a_0+a_1x\right)\cos x+\left(b_0+b_1x\right)\sin x\right]=x\cos x,$$

$$2b_1-a_1-a_0-b_0=0,\quad -a_1-b_1=1,\quad 3a_0+b_0-b_1=0,$$

$$b_1+3a_1=0,\quad a_0=1,\quad a_1=1/2,\quad b_0=-4\frac{1}{2},\quad b_1=-1\frac{1}{2}$$

ларни оламиз. Бундан эса берилган тенгламанинг хусусий ечими

$$y_1=e^x\left(\left(1+1/2\cdot x\right)\cos x-\left(4\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}x\right)\sin x\right)$$

кўринишда эканлиги келиб чиқади.

Демак, берилган тенгламаларнинг умумий ечими бир жинсли тенгламанинг умумий ечими (1) билан берилган тенгламанинг хусусий ечими йиғиндисига тенг:

$$y=C_1e^x+C_2e^{2x}+\left[\left(1+1/2\cdot x\right)\cos x-\left(4\frac{1}{2}+1\frac{1}{2}x\right)\sin x\right]e^x.$$

г) $y''-5y'-3x^2+\sin 5x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечими. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топиб оламиз: $y''-5y'=0$. Бу тенгламанинг характеристик тенгламаси $\lambda^2-5\lambda=0$ кўринишда бўлади, бундан $\lambda_1=0,\ \lambda_2=5$ ларни оламиз. Бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$y=C_1e^{0x}+C_2e^{5x}=y=C_1+C_2e^{5x}$$

кўринишда бўлади.

Юқорида эслатилган қоидага кўра, бу тенгламанинг ўнг томони иккита ҳар хил функцияларнинг йиғиндиси бўлган учун тенгламанинг чап томони, унинг ўнг томонидаги қўшилувчиларнинг ҳар бирига тенглаштириб, хусусий ечимлар топамиз ва берилган тенгламанинг хусусий ечими сифатида уларнинг йиғиндисини оламиз.

II. $y''-5y'=3x^2$ тенгламанинг хусусий ечимини (6) кўринишда яъни $y_1=x^sQ_m\left(x\right)e^{\gamma x}$ ҳолда қидирамиз. Бизнинг мисолда $\gamma=0$ ва демак, $S=0$ чунки $\gamma=0$ характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи, $Q_m\left(x\right)=a_0+a_1x+a_2x^2$, чунки $P_m\left(x\right)=3x^2$, шундай қилиб хусусий ечимни

$$y_1=x\left(a_0+a_1x+a_2x^2\right)=a_0x+a_1x^2+a_2x^3$$

кўришда қидириш керак экан. Буни тенгламага қўйиб

$$y_1'=a_0+2a_1x+3a_2x^2,\quad y_1''=2a_1+6a_2x,$$

$$2a_1 + 6a_2x - 5\left(a_0 + 2a_1x + 3a_2x^2\right) = 3x^2, \quad 2a_1 - 5a_0 = 0,$$

$$6a_2 - 10a_1 = 0, \quad -15a_2 = 3, \quad a_1 = -3/25, \quad a_0 = -6/125$$

ларни оламиз. Демак, бу тенгламанинг хусусий ечими

$$y_1 = -6/125 \cdot x - 3/25 \cdot x^2 - 1/5x^3$$

кўринишда экан.

III. $y'' - 5y' = \sin 5x$ тенгламанинг хусусий ечими (9) кўринишда, яъни $y_2 = x^s e^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x + T_m(x)\sin\beta x\right)$ ҳолда қидирамиз. Бизнинг мисолимизда $S = 0,$ чунки $\alpha = 0,$ $\beta = 5,$ $\alpha + \beta l = 5l$ ҳарактеристик тенгламанинг илдизи эмас, $R_m(x) = a_0,$ $T_m(x) = b_0,$ чунки

$$P(x) = 0, \ Q(x) = 1, \ k = 0, \ l = 0$$

бўлиб, шундай қилиб, хусусий ечимни

$$y_2 = a_0\cos 5x + b_0\sin 5x$$

кўринишда қидириш керак экан. Буни тенгламага қўйиб,

$$y_2' = 5b_0\cos 5x - 5a_0\sin 5x, \quad y_2'' = -25b_0\sin 5x - 25a_0\cos 5x,$$

$$-25b_0\sin 5x - 25a_0\cos 5x - 25b_0\cos 5x + 25a_0\sin 5x = \sin 5x,$$

$$25a_0 - 25b_0 = 1, \quad 25a_0 + 25b_0 = 0, \quad a_0 = 1/50, \quad b_0 = -1/50$$

ларни оламиз. Бундан эса ўз навбатида хусусий ечимнинг

$$y_2 = 1/50\cos 5x - 1/50\sin 5x$$

эканлиги келиб чиқади.

Юқорида айтилганига кўра, берилган тенгламанинг умумий ечимини топилган ечимларнинг йиғиндисидан иборат:

$$y = C_1 + C_2e^{5x} - \left(6x/125 + 3x^2/25 + x^3/5\right) + 1/50\cos 5x - 1/50\sin 5x.$$

3. Ўзгармасни вариациялаш усули. Чизиқли бир жинсли бўлмаган

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x) \tag{10}$$

тенгламанинг ечишнинг умумий усулларидан бири ўзгармасни вариациялаш усулидир.

Фараз қилайлик, бир жинсли чизиқли

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = 0$$

тенгламанинг умумий ечими топилган ва у $y = C_1y_1 + C_2y_2 + \ldots + C_ny_n$ кўринишда бўлсин. Бу ерда C_1 лар ихтиёрий ўзгармаслар, $y_1(x)$ лар эса бир жинсли тенгламанинг фундаментал ечимлар системаси у ҳолда (10) тенгламанинг ечими,

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + \ldots + C_n(x)y_n$$

кўринишда қидирилади. Бу ерда $C_i(x)$ номаълум функцияларни топиб олиш учун

$$
\begin{aligned}
C_1'y_1 + C_2'y_2 + \ldots + C_n'y_n &= 0,\\
C_1'y_1' + C_2'y_2' + \ldots + C_n'y_n' &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\
C_1'y_1^{(n-2)} + C_2'y_2^{(n-2)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-2)} &= 0,\\
C_1'y_1^{(n-1)} + C_2'y_2^{(n-1)} + \ldots + C_n'y_n^{(n-1)} &= f(x)
\end{aligned}
\tag{12}
$$

тенгламани системасини оламиз. Бу системанинг $C_1',\ C_2',\ \ldots,\ C_n'$ ечимларини топиб, уларни интеграллаб $C_1(x),\ C_2(x),\ \ldots,\ C_n(x)$ функцияларини оламиз. Буларни (11) га қўйиб, бир жинсли бўлмаган тенгламанинг умумий ечимини оламиз. (12) системанинг ечимга эга эканлиги $y_1(x),\ y_2(x),\ \ldots,\ y_n(x)$ функцияларнинг фундаментал ечимлар системаси эканлигидан келиб чиқади.

Мисол. $y'' + y = 1/\sin x$ тенгламани ўзгармасни вариациялаш усули билан ечинг.

Ечими. $y'' + y = 0$ бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топиб олайлик. Характеристик тенгламаси $\lambda^2 + 1 = 0$ бўлиб, $\lambda = \pm 1$ бўлади. Шунинг учун, бир жинсли тенгламанинг ечими

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

кўринишда эканлиги келиб чиқади.

Энди берилган тенгламанинг ечимини

$$y = C_1\cos x + C_2\sin x$$

кўринишда излаймиз, буни тенгламага қўйиб (12) системани оламиз

$$
\begin{aligned}
C_1'\cos x + C_2'\sin x &= 0,\\
-C_1'\sin x + C_2'\cos x &= 1/\sin x.
\end{aligned}
$$

Бу системани ечиб, $C_2' = ctg\, x,\ C_1' - 1$ ифодаларни, буларни интеграллаб эса $C_1(x) = -x + \bar{C}_1,\ C_2(x) = \ln\sin x + \bar{C}_2$ ларни оламиз. Буларни олиб бориб ўрнига қўйиб

$$y = \bar{C}_1\cos x + \bar{C}_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln|\sin x|$$

берилган тенгламани умумий ечимини оламиз.

4. Ушбу

$$a_0x^ny^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots + a_ny = f(x)$$

ёки

$$a_0\left(ax+b\right)^n y^{(n)}+a_1\left(ax+b\right)^{n-1} y^{(n-1)}+\ldots+a_n y=f\left(x\right) \qquad (14)$$

кўринишдаги тенгламалар Эйлер тенгламаси дейилади. (13) тенглама $x=\pm e^t$ алмаштириш билан, (14) тенглама эса $ax+b=\pm e^t$ алмаштириш билан чизиқли ўзгармас коэффициентли тенгламаларга келтириш мумкин. Бундай тенгламаларни ечиш эса аввалига пунктларда муфассал ўрганилди.

Мисол. $x^2y''-xy'+y=8x^3$ Эйлер тенгламасини ечинг.

Ечими. $x=e^t$ алмаштириш бажарамиз. Тушунарлики, $t=\ln x$, бундан

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=y_t'\frac{1}{x}=y_t'e^{-t},$$

$$y''=\frac{d}{dx}\left(y_t'e^{-t}\right)=e^{-t}\frac{d}{dx}\left(y_t'\right)+y_t'\frac{d}{dx}\left(e^{-t}\right)=$$

$$=e^{-t}\frac{d}{dx}\left(y_t'\right)\frac{dt}{dx}+y_t'\frac{d}{dt}\left(e^{-t}\right)\frac{dt}{dx}=e^{-2t}y_{tt}''-e^{-2t}y_{tt}'=e^{-2t}\left(y_{tt}''-y_t'\right).$$

Энди тенгламага қўйиб

$$e^{2t}\cdot e^{-2t}\left(y_{tt}''-y_t'\right)-e^te^{-t}y'+y=8e^{3t}$$

ифодани оламиз, бундан эса

$$y_{tt}''-2y_t'+y=8e^{3t} \qquad (15)$$

ўзгармас коэффициентли тенгламани оламиз.

Аввало бир жинсли $y_{tt}''-2y_t'+y=0$ тенгламанинг умумий ечимини топиб оламиз. Характеристик тенгламаси $\lambda^2-2\lambda+1=0$ кўринишда бўлгани учун $\lambda=1$ унинг икки каррали илдизи.

Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими $y=C_1e^t+C_2te^t$ кўриншда экан.

(15) тенгламанинг хусусий ечимини $y_1=a_0e^{3t}$ кўринишда қидирамиз (2-пунктга қаранг). У ҳолда

$$y_1'=3a_0e^{3t},\ y_1''=9a_0e^{3t},\ 9a_0e^{3t}-6a_0e^{3t}+a_0e^{3t}=8e^{3t},\ 4a_0=8,\ a_0=2$$

келиб чиқади. Бундан эса хусусий ечим $y_1=2e^{3t}$ кўринишда эканлиги келиб чиқади. Энди (15) тенгламанинг умумий ечимини ёза оламиз:

$$y=C_1e^t+C_2te^t+2e^{3t}.$$

Бундан эса $t=\ln x$ эканлигини ҳисобга олиб, берилган тенгламанинг умумий ечимини оламиз.

$$y=C_1x+C_2x\ln x+2x^3.$$

5. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли дифференциал тенгламалар. Агар n-тартибли чизиқли бир жинсли дифференциал тенгламанинг y_1 хусусий ечими маълум бўлса, унинг тартибини чизиқлилигини сақлаган ҳолда пасайтириш мумкин. Бунинг учун аввало $y = y_1 z$ ва кейин $z' = u$ алмаштиришларни бажариш зарур.

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ тенгламанинг ҳусусий ечими маълум бўлса, юқорида айтилган усул билан бу тенгламанинг тартибини пасайтириш мумкин. Лекин мана шу хусусий ҳолда Остоградский-Лиувилл формуласидан фойдаланган маъқулроқ:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int P(x)dx} \cdot P(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}, \tag{16}$$

бу ерда y_1 ва y_2 лар берилган тенгламанинг ихтиёрий чизиқли эркли ечимлари.

Мисол. $x^2(x+1)y'' - 2y = 0,\ y_1 = 1 + 1/x$ бўлса тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечими. Остоградский-Лиувилл формуласига кўра қуйидагини оламиз:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = C_1 e^{-\int \frac{0}{x(x+1)}dx} \cdot y_1 y_2' - y_1' y_2 = C_1. \tag{17}$$

$y_1 = 1 + 1/x$ бўлгани учун y_2 га нисбатан чизиқли дифференциал тенгламани оламиз, уни қуйидагича усул билан осонроқ ечиш мумкин:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1 y_2' - y_1' y_2}{y_1^2} = \frac{C_1}{y_1^2}.$$

$y_1 = 1 + 1/x$ ни охирги тенгликка қўйиб интеграллаймиз ва

$$\frac{y_2}{1+1/x} = \int \frac{C_1 dx}{(1+1/x)^2} + C_2 = \overline{C}_1 \left[x/2 - \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} \right] + C_2.$$

$$y_2 = (1+1/x)\left[\overline{C}_1 \left(x/2 - \ln|x+1| - \frac{1}{2(x+1)} \right) + C_2 \right] =$$

$$= C_2(1+1/x) + \overline{C}_1 \left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{x+1}{x} \ln|x+1| \right)$$

тенгликларга эга бўламиз. Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$y = C_2\left(1 + 1/x\right) + \bar{C}_1\left(\frac{x+1}{2} - \frac{1}{2x} + \frac{x+1}{x}\ln\left|x+1\right|\right)$$

кўринишда бўлар экан.

6. Тушунарлики, олдинги пунктда берилиши талаб қилинган хусусий ечим доим ҳам маълум бўлавермайди, ундан ташқари хусусий ечимни топишнинг ҳатто иккинчи тартибли чизиқли тенгламалар учун ҳам умумий усули йўқ. Баъзи ҳолларда танлаб олиш йўли билан хусусий ечимни топишга эришиш мумкин. Бунда албатта берилган тенгламанинг ўнг томонидаги ифодага эътибор бериш керак, масалан, тенгламанинг ўнг томони полином бўлса, хусусий ечимни полином кўринишда, $1/x$ нинг функцияси кўринишида бўлса, хусусий ечимни a/x ёки унинг функцияси кўринишида, агар $e^{\alpha x}$ нинг функцияси кўринишида бўлса, $ae^{\alpha x}$ ёки унинг функцияси кўринишида қидирган маъқул ва ҳ.к.

Мисоллар. *а*) $\left(2x+1\right)y'' + 4xy' - 4 = 0$ тенгламанинг $y_1 = ae^{\alpha x}$ кўринишдаги ечими мавжуд бўлса, уни топинг.

Ечими. $y_1 = e^{\alpha x}$ ни тенгламага қўямиз:

$$\left(2x+1\right)a^2e^{\alpha x} + 4x\cdot ae^{\alpha x} - 4e^{\alpha x} = 0;$$

$$\left(2x+1\right)a^2 + 4xa - 4 = 0;$$

$$\left(2a^2 + 4a\right)x + \left(a^2 - 4\right) = 0;$$

$$2a^2 + 4a = 0,\quad a^2 - 4 = 0,\quad a = -2$$

келиб чиқади. Демак, берилган тенгламанинг $y_1 = e^{-2x}$ хусусий ечими бўлар экан.

***б*)** Худди шу юқоридаги тенгламанинг $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ кўринишдаги ечими мавжуд бўлса, уни топинг.

Ечими. $y_1 = x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots$ ни тенгламага қўйиб, аввало кўпҳаднинг тартибини топиб оламиз, бунинг учун ҳосил бўлган тенгликдаги x нинг энг катта даражаси олдидага коэффициентини нолга тенглаймиз:

$$\left(2x+1\right)\left(n\left(n-1\right)x^{n-2} + \ldots\right) + 4x\left(nx^{n-1} + \ldots\right) - 4\left(x^n + \ldots\right) = 0,$$

$$\left(4n-4\right)x^n = 0,\quad 4n - 4 = 0,$$

бундан эса $n = 1$ эканлиги келиб чиқади. Демак, кўпҳаднинг тартиби фақат 1 бўлиши мумкин, яъни хусусий ечимни $y_1 = x + a$ кўринишда қидириш керак. Тенгламага қўямиз:

$$\left(2x+1\right)\cdot 0+4x\cdot 1-4\left(x+a\right)=0$$

бундан эса $a=0$ ни оламиз. Демак, хусусий ечим $y_1=x$ кўринишда экан.

Тенгламанинг умумий ечимини топинг.

206. $y''+4y'+3y=0$

207. $y'''-2y''+9y'-18y=0$

208. $y''-2y'+10y=0$

209. $y^{\text{IV}}+2y''-8y'+5y=0$

210. $y'''-8y=0$

211. $y^{\text{IV}}-2y'''-2y'-y=0$

212. $y^{\text{IV}}+4y=0$

213. $y^{\text{IV}}-4y'''+8y''-16y'+16y=0$

214. $y^{\text{IV}}-y=0$

215. $y^{\text{IV}}+2y'''+3y''+2y'+y=0$

216. $y''+2y'-3y=e^{2x}$

217. $y''-3y'+2y=xe^{x}$

218. $y''-9y'=e^{3x}\cos x$

219. $y''+4y'+4y=xe^{2x}$

220. $y''+64y=16\sin 8x-16\cos 8x-64e^{8x}$

221. $y'''-49y'=14e^{7x}-49\left(\cos 7x+\sin 7x\right)$

222. $y''+81y=9\sin 9x+3\cos 9x+162e^{9x}$

223. $y'''-64y'=128\cos 8x-64e^{8x}$

224. $y'''-8y'=162e^{9x}+81\sin 9x$

Тенгламани ўзгармасларни вариациялаш методи билан ечинг.

225. $xy''+\left(2x-1\right)y'=-4x^2$

226. $y''+y'tg\,x=\cos x\,ctg\,x$

227. $y''+y=1/\cos x$

228. $y''+4y=2ctg\,x$

229. $y''+y=2/\sin^2 x$

230. $y''+y=x\sin x$

Эйлер тенгламасини ечинг.

231. $x^2y''-2y=\cos\ln x$

232. $\left(x+1\right)^2y'''-12y'=0$

233. $x^2y''-xy'+x^4/\left(1+x^2\right)=0$

234. $x^2y''-xy'+y=8x^3$

235. $x^2y''-xy'-y=x^4$

Ҳар хил усулларни қўллаб, тенгламани ечинг.

236. $y''-3y'+2y=\left(3+e^{-x}\right)^{-1},\quad y\left(0\right)=1+8\ln 2,\quad y'\left(0\right)=14\ln 2$

237. $y''+y/4=1/4\cdot ctg\left(x/2\right),\quad y\left(\pi\right)=2,\quad y'\left(\pi\right)=1/2$

238. $y''-3y'+2y=e^{x}/\left(1+e^{x}\right),\quad y\left(0\right)=0,\quad y'\left(0\right)=0$

239. $y''+y'=e^{x}/\left(2+e^{x}\right),\quad y\left(0\right)=\ln 27,\quad y'\left(0\right)=1-\ln 9$

240. $y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x} \Big/ \left(1 + e^{-3x}\right), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

Функцияларни чизиқли боғлиқ ёки эркли эканлигини текширинг.

241. $e^x,\ e^{2x},\ e^{3x}$

242. $x,\ e^x,\ xe^x$

243. $ch\,x,\ sh\,x,\ 2e^x - 1,\ 3e^x + 5$

244. $x^2 - x + 3,\ 2x^2 + x,\ 2x - 4$

245. $x^2 + 2x,\ 3x^2 - 1,\ x + 4$

Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топинг.

246. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 0$

247. $x(2x+4)y'' + 2(x+1)y' - 2y = 0$

248. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = 0, \quad y_1 = e^x$

249. $y'' + 4xy' + \left(4x^2 + 2\right)y = 0, \quad y_1 = e^{ax^2}$

250. $y'' - y'\,tg\,x + 2y = 0, \quad y_1 = \sin x$

Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламани ечинг.

251. $x^2 y'' \ln x - xy' + y = x^2 \ln x$

252. $x^2 y'' \ln x - xy' + y = x \ln x$

253. $xy'' - (2x+1)y' + 2y = 2xe^{2x}$

254. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = 10x$

255. $x(x+4)y'' - (2x+4)y' + 2y = x^2 + 1$

Ушбу тенгламаларнинг $-\infty < x < +\infty$ даги чегараланган ечимини топинг ва унинг даврий ечими эканлигини кўрсатинг.

256. $y'' + 3y' + 2y = \sin x$

257. $y'' + 3y' + 2y = \cos x$

258. $y'' + 5y' + 6y = \sin x$

259. $y'' + 5y' + 6y = \cos x$

260. $y'' + 7y' + 10y = \sin 2x$

261. Ер шарининг марказидан ингичка қувур ўтказилган бўлсин. Унга ташланган тош ер марказига орадаги масофага пропорционал бўлган куч билан тортилади. Тош қанча вақтда қувурни босиб ўтади?

262. Ҳавонинг қаршилиги жисм тезлигининг квадратига пропорционал ва тезлик лимитини 75 м/сек деб олиб, бошланғич тезлиги нолга тенг бўлган эркин тушувчи жисм ҳаракат қонунини топинг.

263. Жисм бир минутда 90 марта тебранади ва 15 секунд давомида тебраниш амплитудаси икки марта камаяди. Тебранма ҳаракатнинг дифференциал тенгламасини тузинг.

264. Қайиққа $\upsilon = 6$м/сек бошланғич тезлик берилган. Ҳаракат бошлангандан 60 секунд ўтгач, бу тезлик икки марта камаяда. Агар сувнинг қаршилик кучи қайиқ тезлигига тўғри пропорционал бўлса, унинг ҳаракат қонунини топинг.

265. Массаси m бўлган моддий нуқта координата бошидан туртилиб, масофага тўғри пропорционал бўлган $F\left(F = 8mx\right)$ куч таъсирида ҳаракат қилмоқда. Нуқтага муҳитнинг $R = 2m\upsilon$ қаршилик кучи таъсир қилаётган бўлсин. Агар $t = 0$ координата бошидан моддий нуқтагача бўлган масофа 3 га тенг ва тезлик ноль бўлса, нуқтанинг ҳаракат қонунини топинг.

10-§. 5-ЛАБАРАТОРИЯ ИШИ

Синов учун савол ва топшириқлар

1. n-тартибли ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламанинг умумий кўринишини ёзинг ва уни ечиш усулини келтиринг.

2. Унинг хусусий ечимини топиш мумкин бўлиши учун ўнг томони қандай кўринишга эга бўлиши керак?

3. Чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг битта хусусий ечими ва бир жинсли тенгламанинг умумий ечими маълум бўлганда унинг умумий ечимини қандай топилади.

4. n-тартибли тенгламалар учун ўзгармас вариациялаш методини мисолларда тушунтиринг.

5. Эйлер тенгламасининг умумий кўринишини ёзинг. Қандай алмаштириш ёрдамида у ўзгармас коэффициентли чизиқли тенгламага келтирилади?

6. Функцияларнинг чизиқли боғлиқлиги ва чизиқли эрклилиги таърифини келтиринг ва мисолларда кўрсатинг.

7. Эйлер тенгламасини ечинг: $4x^3y''' + 3xy' - 3y = 0$

8. $y'' - 2\left(1 + tg^2 x\right)y = 0,\ y_1 = tg\,x$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

1. Тенгламани ечинг.

1.1. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 2,\ y''(0) = 3$

1.2. $y''' + 6y'' + 11y' + 6y = 0$

1.3. $y'' - 2y' - 2y = 0$

1.4. $y^{\text{VI}} + 2y^{\text{V}} + y^{\text{IV}} = 0$

1.5. $y''' - 8y' + 5y = 0$

1.6. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$

1.7. $y''' + 2y'' - y' - 2y = 0$

1.8. $y''' - 2y'' + 2y' = 0$

1.9. $y^{\text{IV}} - y = 0$

1.10. $y''' - 3y'' - 2y' = 0$

1.11. $2y''' - 3y'' + y' = 0$

1.12. $y^{\text{V}} - 10y''' + 9y' = 0$

1.13. $y''' + 8y = 0$

1.14. $y^{\text{IV}} + y = 0$

1.15. $y^{\text{IV}} + 10y'' + 9y = 0$

1.16. $y^{\text{IV}} + 8y'' + 16y = 0$

1.17. $y^{\text{V}} + 8y''' + 16y' = 0$

1.18. $y^{\text{IV}} + 4y''' + 10y'' + 12y' + 5y = 0$

1.19. $y^{\text{IV}} + 2y''' + 2y'' - 5y = 0$

1.20. $y^{\text{V}} + 4y^{\text{IV}} + 5y''' - 6y' - 4y = 0$

2. Тенгламанинг умумий ечимини топинг.

2.1. $y'' - 2y' = 2ch2x$

2.2. $y'' + y' = 2\sin x - 6\cos x + 2e^{x}$

2.3. $y''' - y' = 2e^{x} + \cos x$

2.4. $y'' - 3y' = 2ch3x$

2.5. $y'' - 4y' = 16ch4x$

2.6. $y'' + 2y' = 2sh2x$

2.7. $y'' + 3y' = 2sh3x$

2.8. $y'' + y' = 2shx$

2.9. $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}$

2.10. $y''' - y' = 10\sin x + 6\cos x + 4e^{x}$

2.11. $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}$

2.12. $y'' - 4y = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x$

2.13. $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}$

2.14. $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x$

2.15. $y'' + 25y' = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}$

2.16. $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\sin 4x - 64\cos 4x$

2.17. $y'' + 36y = 24\sin 6x - 12\cos 6x + 36e^{6x}$

2.18. $y''' - 25y' = 25(\cos 5x + \sin 5x) - 50e^{5x}$

2.19. $y'' + 49y = 14\sin 7x + 7\cos 7x - 98e^{7x}$

2.20. $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\sin 6x + \cos 6x)$

3. Тенгламани ўзгармасларни вариациялаш методи билан ечинг.

3.1. $y'' + 4y = \dfrac{1}{\cos 2x}$

3.2. $y'' + y = tg\ x$

3.3. $y'' - y = \dfrac{1}{x}$

3.4. $y''' + y' = \dfrac{\sin x}{\cos^2 x}$

3.5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{x^2 + 2x + 2}{x^3}$

3.6. $y'' - y' = \dfrac{2 - x}{x^3} e^x$

3.7. $y'' - y = 4\sqrt{x} + \dfrac{1}{x\sqrt{x}}$

3.8. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin 2x\sqrt{\cos 2x}}$

3.9. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$

3.10. $y'' - y = \dfrac{1}{e^x + 1}$

3.11. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos^3 x}$

3.12. $y'' + y = \dfrac{1}{\sqrt{\sin^5 x \cos x}}$

3.13. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x^2 + 1}$

3.14. $y'' + 2y' + 2y = \dfrac{1}{e^x \sin x}$

3.15. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin^3 x}$

3.16. $y'' - y = e^{2x} \cos e^x$

3.17. $y''' + y'' = \dfrac{x - 1}{x^2}$

3.18. $xy'' - \left(1 + 2x^2\right) y' = 4x^3 e^{x^2}$

3.19. $y'' - 2y' tg\ x = 1$

3.20. $\left(x \ln x\right) y'' - y' = \ln^2 x$

4. Эйлер тенгламасини ечинг.

4.1. $x^2 y'' + xy' + y = x\left(6 - \ln x\right)$

4.2. $x^2 y'' - 2y = \sin \ln x$

4.3. $x^2 y'' - xy' - 3y = -\dfrac{16 \ln x}{x}$

4.4. $x^2 y'' - xy' + y = 6x \ln x$

4.5. $x^2 y'' - xy' = -x + \dfrac{3}{x}$

4.6. $x^2 y'' - 6y = 5x^3 + 8x^2$

4.7. $x^2 y'' + xy' + y = 2\sin\left(\ln x\right)$

4.8. $x^2 y'' + xy' + 4y = 10x$

4.9. $x^2 y'' + 2xy' + 2y = x^2 - 2x + 2$

4.10. $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 2\ln^2 x + 12$

4.11. $\left(x+1\right)^3 y'' - 3\left(x+1\right)^2 y' + \left(x+1\right) y = 6\ln\left(x+1\right)$

4.12. $\left(x-2\right)^2 y'' - 3\left(x-2\right)^2 y' + 4y = x$

4.13. $\left(2x+1\right)^2 y'' - 4\left(2x+1\right) y' + 8y = -8x - 4$

4.14. $(x-2)^2 y''-3(x-2)^2 y'+3y=x+1$

4.15. $(2x+3)^3 y'''+3(2x+3)y'-6y=0$

4.16. $(2x+1)^2 y''+2(2x+1)y''+y'=0$

4.17. $(2x+1)^2 y''-2(2x+1)y'+4y=0$

4.18. $(x+2)^2 y''+3(x+2)y'-3y=0$

4.19. $(x+1)^2 y''-2(x+1)y'+2y=0$

4.20. $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$

5. Ҳар хил усуллар қўллаб, тенгламани ечинг.

5.1. $y''+2y'+y=\cos 1x$

5.2. $y''+2iy=8e^x\sin x$

5.3. $y''-8y'=\cos 2x$

5.4. $y''+2y'+y=xe^x+\dfrac{1}{xe^x}$

5.5. $x^2y''-2y'=\dfrac{x^2}{x+1}$

5.6. $y''-2y'+y=xe^x\sin^2 ix$

5.7. $y''+2iy'-y=8\cos x$

5.8. $y''-\dfrac{2y}{x^2}=2\ln(-x)$

5.9. $y''+2y'+5y=e^{-x}\left(\cos^2 x+tg\ x\right)$

5.10. $x^2y''-xy'+y=\dfrac{\ln x}{x}+\dfrac{x}{\ln x}$

5.11. $y''+y'=4x\cos x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1$

5.12. $y''-4y'+5y=2x^2e^x,\quad y(0)=2,\quad y'(0)=3$

5.13. $y''-6y'+9y=16e^{-x}+9x-6,\quad y(0)=y'(0)=1$

5.14. $y''-y'=-5e^{-x}(\sin x+\cos x),\quad y(0)=-4,\quad y'(0)=5$

5.15. $y''-2y'+2y=4e^x\cos x,\quad y(\pi)=\pi e^{\pi},\quad y'(\pi)=e^{\pi}$

5.16. $y'''-y'=-2x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=1,\quad y''=(0)=2$

5.17. $y^{\prime\mathrm{v}}-y=8e^x,\quad y(0)=1,\quad y'(0)=0,\quad y''(0)=1,\quad y'''(0)=0$

5.18. $y'''-y=2x,\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y''(0)=2$

5.19. $y^{\prime\mathrm{v}}-y=8e^x,\quad y(0)=0,\quad y'(0)=2,\quad y''(0)=4,\quad y'''(0)=6$

5.20. $y''-3y'=\dfrac{9e^{-3x}}{3+e^{-x}},\quad y(0)=4\ln 4,\quad y'(0)=9\ln 4-3$

6. Функцияларни чизиқли боғлиқ ёки эркли эканлигини текширинг.

6.1. $e^x,\ xe^x,\ x^2e^x$

6.2. $\sin x,\ \cos x,\ \cos 2x$

6.3. $1,\ \sin x,\ \cos 2x$

6.4. $5,\ \cos^2 x,\ \sin^2 x$

6.5. $\cos x,\ \cos(x+1),\ \cos(x-2)$

6.6. $1,\ \sin 2x,\ (\cos x-\sin x)^2$

6.7. $x,\ a^{\log_a x}\ \ (x>0)$

6.8. $\log_a x,\ \log_a x^2\ \ (x>0)$

6.9. $1,\ arc\sin x,\ arc\cos 2x$

6.10. $5,\ arctg\, x,\ arcctg\, x$

6.11. $2\pi,\ arctg\dfrac{x}{2\pi},\ arcctg\dfrac{x}{2\pi}$

6.12. $x,\ |x|,\ 2x+\sqrt{2x^2}$

6.13. $arctg\, x,\ arcctg\, x,\ 1$

6.14. $\sqrt{x},\ \sqrt{x+1},\ \sqrt{x+2}$

6.15. $\sin x,\ \sin(x+2),\ \cos(x-5)$

6.16. $2^x,\ 3^x,\ 6^x$

6.17. $\sin x,\ \cos x,\ \sin 2x$

6.18. $\ln x^2,\ \ln 3x,\ 7$

6.19. $1,\ \sin^2 x,\ \cos 2x$

6.20. $sh\, x,\ ch\, x,\ 2+e^x$

7. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли бир жинсли тенгламанинг умумий ечимини топинг.

7.1. $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0,\quad y_1=\dfrac{\sin x}{x}$

7.2. $(\sin x-\cos x)y''-2\sin xy'+(\cos x+\sin x)y=0,\quad y_1=e^x$

7.3. $(\cos x+\sin x)y''-2\cos xy'+(\cos x-\sin x)y=0,\quad y_1=\cos x$

7.4. $(1-x^2)y''-xy'+1/4\,y=0,\quad y_1=\sqrt{1+x}$

7.5. $(x^2-3x)y''+(6-x^2)y'+(3x-6)y=0$

7.6. $x^2(2\ln x-1)y''-x(2\ln x-1)y'+4y=0$

7.7. $y''+2xy'-2y=0$

7.8. $(x-1)y''-(x+1)y'+2y=0$

7.9. $(x^2-1)y''=6y$

7.10. $x^2y''+4xy'+2y=0$

7.11. $(x^2+1)y''-2y=0$

7.12. $xy''+(x+1)y'-2(x-1)y=0$

7.13. $(x^2-1)y''+(x-3)y'-y=0$

7.14. $x^2y''\ln x - xy' + y = 0$

7.15. $\left(3x^3 - x\right)y'' - 2y' - 6xy = 0$

7.16. $x\left(x+2\right)y'' - 2\left(x+1\right)y' + 2y = 0$

7.17. $y'' + xy' - y = 0$

7.18. $y'' + 2xy' - 2y = 0$

7.19. $2x\left(x+2\right)y'' + \left(2-x\right)y' + y = 0$

7.20. $x\left(x^2+6\right)y'' - 4\left(x^2+3\right)y' + 6xy = 0$

8. Ўзгарувчи коэффициентли чизиқли бир жинсли, бўлмаган тенгламанинг ечинг.

8.1. $\left(x+1\right)xy'' + \left(x+2\right)y' - y = x + 1/x$

8.2. $\left(2x+1\right)y'' + \left(2x-1\right)y' - 2y = x^2 + x$

8.3. $x^2y'' - xy' - 3y = 5x^4, \quad y_1 = 1/x$

8.4. $\left(x-1\right)y'' - xy' + y = \left(x-1\right)^2 e^x, \quad y_1 = e^x$

8.5. $y'' + y' + e^{-2x}y = e^{-3x}, \quad y_1 = \cos\left(e^{-x}\right)$

8.6. $\left(x^4 - x^3\right)y'' + \left(2x^3 - 2x^2 - x\right)y' - y = \left(x-1\right)^2 / x, \quad y_1 = 1/x$

8.7. $y'' - y' - e^{2x}y = xe^{2x} - 1, \quad y_1 = \sin\left(e^{-x}\right)$

8.8. $x\left(x-1\right)y'' - \left(2x-1\right)y' + 2y = x^2\left(2x-3\right), \quad y_1 = x^2$

8.9. $\left(1+x^2\right)y'' + 2xy' = 6x^2 + 2, \quad y_1 = x^2$

8.10. $\left(1+x^2\right)y'' - 2xy' + 2y = x$

8.11. $\left(x^2+1\right)y'' - 2xy' + 2y = x^2$

8.12. $\left(x+1\right)y'' + 4xy' - 4y = 1 + 2x$

8.13. $\left(x+1\right)y'' + 4xy' - 4y = \left(1+2x\right)^2$

8.14. $\left(x+1\right)y'' + 4xy' - 4y = \left(1+2x\right)e^{-2x}$

8.15. $\left(x+1\right)y'' + 4xy' - 4y = \left(1+2x\right)^2 e^{-2x}$

8.16. $xy'' - \left(2x+1\right)y' + \left(x+1\right)y = xe^x$

8.17. $xy'' - \left(2x+1\right)y' + \left(x+1\right)y = xe^x$

8.18. $xy'' - \left(2x+1\right)y' + \left(x+1\right)y = x^2e^x$

8.19. $xy'' - (2x+1)y' + (x+1)y = (x^2+1)e^x$

8.20. $x^2 y'' \ln x - xy' + y = \ln x$

9. Масалаларни ечинг.

9.1. a ва b сонларнинг қандай қийматларида $y'' + ay' + by = 0$ тенгламанинг барча ечимлари $-\infty < x < +\infty$ да чегараланган бўлади?

9.2. a ва b сонларнинг қандай қийматларида $y'' + ay' + by = 0$ тенгламанинг барча ечимлари $x \to +\infty$ да нолга интилади?

9.3. a ва b сонларнинг қандай қийматларида $y'' + ay' + by = 0$ тенгламанинг бирорта $y(x) \neq 0$ бўлган ечими $x \to +\infty$ да нолга интилади?

9.4. a ва b сонларнинг қандай қийматларида $y'' + ay' + by = 0$ тенгламанинг $y(x) = 0$ ечимидан бошқа ҳар бир ечими x нинг бирор қийматидан бошлаб абсолют қиймати монотон ўсувчи бўлади?

9.5. a ва b сонларнинг қандай қийматларда $y'' + ay' + by = 0$ тенгламанинг ҳар бир ечими чексиз кўп нуқталарда нолга интилади?

9.6. $y'' + y' - 2y = 0$ тенгламанинг $x \to +\infty$ да нолга интилувчи $y(x) \neq 0$ бўлган бирорта ечими мавжуд бўлишини исботланг.

9.7. k ва ω сонлар қандай бўлганда $y'' + k^2 y = \sin \omega t$ тенглама камида битта даврий ечимга эга бўлади?

9.8. $\ddot{x} + \dot{x} + 2x = \sin t$ тенгламани даврий ечимини топинг?

9.9. $\ddot{x} + \dot{x} + 3x = \sin 2t$ тенгламани даврий ечимини топинг?

9.10. $\ddot{x} + \dot{x} + 4x = e^{\omega}$ тенгламани даврий ечимини топинг?

9.11. $y'' + 3y' + 2,5y = 0$ тенгламани барча ечимлари $x \to +\infty$ да $y = 0(e^{-x})$ муносабатларини қаноатлантиришни исботланг?

9.12. $y'' + 4y' + 5y = 0$ тенгламани барча ечимлари $x \to +\infty$ да $y = 0(e^{-x})$ муносабатларини қаноатлантиришни исботланг?

9.13. $y'' + 4y' + 3,5y = 0$ тенгламани барча ечимлари $x \to +\infty$ да $y = 0(e^{-x})$ муносабатларини қаноатлантиришни исботланг?

9.14. $y'' + 2,5y' + 1,6y = 0$ тенгламани барча ечимлари $x \to +\infty$ да $y = 0(e^{-x})$ муносабатларини қаноатлантиришни исботланг?

9.15. $y'' + 2y' + y = 0$ тенгламанинг $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $x \to +\infty$ да нолга интилишини исботланг.

9.16. $y'' + 3y' + \frac{9}{4}y = 0$ тенгламанинг $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ бошланғич шартларни ечими $x \to +\infty$ да нолга интилишини исботланг.

9.17 $y'' + 5y' + \frac{25}{4}y = 0$ тенгламанинг $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $x \to +\infty$ да нолга интилишини исботланг.

9.18. $y'' + 7y' + \frac{49}{4}y = 0$ тенгламанинг $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $x \to +\infty$ да нолга интилишини исботланг.

9.19. $y'' + 4y' + 4y = 0$ тенгламанинг $y(0) = 1,\ y'(0) = 0$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи ечими $x \to +\infty$ да нолга интилишини исботланг.

9.20. a ва b сонлар қандай қийматларда $y'' + ay' + by = 0$ тенгламанинг бирорта $y(x) \neq 0$ бўлган ечими $x \to -\infty$ да нолга интилади?

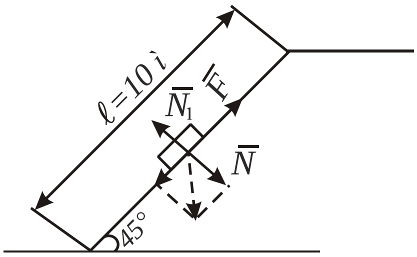
10. Масалани ечинг.

10.1. Массаси 2 грамм бўлган моддий нуқта секундига a динага ўсадиган F куч таъсирида тўғри чизиқли ҳаракат қилмоқда. Бошланғич пайтда нуқта координата бошида жойлашган бўлиб, тезлиги $\upsilon_0 = 10$ см/сек эди. Кучнинг бошланғич қиймати $F = 4$ дина ва координата бошида 450 см узоқликда тезлик $\upsilon = 105$ см/сек эканлигини билган ҳолда a катталикнинг қийматини топинг.

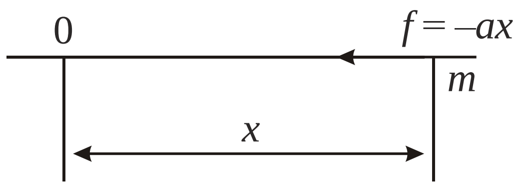
10.2. Массаси m бўлган моддий нуқта координата бошидан туртилиб, масофага пропорцилнал бўлган $F\,(F = 4mx)$ куч таъсирида ҳаракат қилмоқда. Нуқтага муҳитнинг $R = 3m\upsilon$ қаршилик кучи таъсир қилаётган бўлсин. Агар $t = 0$ координата бошдан моддий нуқтагача бўлган масофа 1 га тенг ва тезлик ноль бўлса, нуқтанинг ҳаракат қонунини топинг.

10.3. Массаси m бўлган моддий нуқта муҳитда тезликнинг биринчи даражасини тўғри пропорционал бўлган қаршилик таъсирида тушмоқда. Агар $\upsilon = 1$ м/сек бўлганда қаршилик кучи оғирлик кучининг $1/3$ қисмига тенг ва бошланғич тезлик $\upsilon = 0$ бўлса, моддий нуқта тезлигининг энг катта қийматини топинг.

10.4. Узунлиги $l = 10$ м бўлган қия текисликдан T жисм сирпаниб тушмоқда (14-расмга қаранг). Қиялик бурчаги $\alpha = 45°$, жисмнинг текислик сиртидаги ишқаланиш коэффициенти $k = 0,5$ бўлсин. Агар жисм боланғич пайтда қия тексликнинг юқори чўққисида тинч ҳолатда турган бўлса, унинг ҳаракат қонунини ва қия текисликни тўла сирпаниб ўтиш вақтини топинг.



14-расм

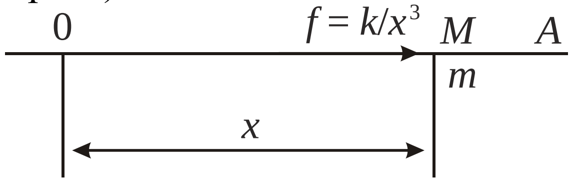


15-расм

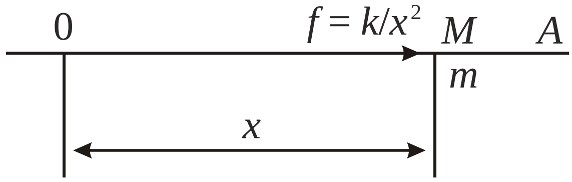
10.5. Узунлиги l бўлган математик маятникнинг кичик четланишдаги ҳаракат қонунини топинг ва тебраниш даври T ни аниқланг.

10.7. Катталиги заррачанинг тортилиш маркази 0 дан узоқлашиши x га тўғри пропорционал ва тортилиш маркази 0 га қараб йўналган куч таъсирида m массали заррачанинг ҳаракат қонунини топинг (15-расмга қаранг).

10.8. Катталиги ҳаракатдаги нуқтадан қўзғалмас O нуқтагача бўлган $x = OM$ масофанинг учинчи даражасига тескари пропорционал ва O га тескари йўналган куч таъсиридаги m массали моддий нуқтанинг OA тўғри чизиқдаги ҳаракат қонунини топинг (16-расмга қаранг).



16-расм

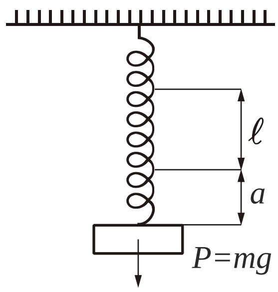


17-расм

10.9. Оғирлиги ҳисобга олинмайдиган вертикал пуржинага уни l қийматга чўзувчи P юк осилган (17-расмга қаранг). Юкни яна пастга қараб a масофага тортиб қўйиб юборилгач, у эркин тебрана бошлайди. Атрофидаги қаршилик кучларини ҳисобга олмай шу ҳаракат қонунини топинг.

10.10. Пуржинага маҳкамланган m массали юкни мувозанат ҳолатдан x масофага чўзиб қўйиб юборилганда, унга катталиги kx ва йўналиши мувозанат ҳолати томон йўналган куч таъсир қилади. Агар ҳаракат қаршиликсиз бўлса, эркин тебраниш даврини топинг.

10.11. Пуржинанинг бир учи қўзғалмас нуқтага маҳкамланган, иккинчи учига эса m массали юк бириктирилган. Юк υ тезлик билан ҳаракат қилса, унга таъсир этадиган куч $h\upsilon$ га тенг. Бошланғич пайтда мувозанатдаги юкка υ_0 тезлик берилди. Агар пуржинага маҳкамланган m массали юкни мувозанат ҳолатидан x масофага чўзиб қўйиб юборилганда, унга катталиги kx ва йўналиши мувозанат ҳолати томон йўналган куч таъсир қилса, $h^2 < 4km$ ва $h^2 > 4km$ бўлганда юк ҳаракатини текширинг.



18-расм

10.12. Катталиги ҳаракатдаги нуқтадан қўзғалмас O нуқтагача бўлган $x = OM$ масофанинг иккинчи даражасига тескари пропорционал ва O га тескари йўналган куч таъсирида m массали моддий нуқтанинг OA тўғри чизиқдаги ҳаракат қонунини топинг (18-расмга қаранг).

10.13. Массаси m бўлган моддий нуқта муҳитда тезликнинг биринчи даражасига тўғри пропорционал бўлган қаршилик таъсирида тушмоқда. Агар $\upsilon = 0{,}5$ м/сек бўлганда қаршилик кучи оғирлик кучининг $1/2$ қисмига тенг ва бошланғич тезлик $\upsilon_0 = 0$ бўлса, моддий нуқта тезлигининг энг катта қийматини топинг.

10.14. Массаси m бўлган моддий нуқта муҳитда тезликнинг биринчи даражаси тўғри пропорционал (пропорционаллик k) бўлган муҳитда ҳаракат қиляпти. Агар нуқтанинг бошланғич тезлиги υ_0 бўлиб, унга қаршилик кучидан бошқа куч таъсир қилмаётган бўлса, тўхтагунча қанча масофани босиб ўтади?

10.15. Массаси m узунлиги $2i$ бўлган бир жинсли оғир занжир текис горизонтал столда ярим осилган ҳолда турибди. Унинг столдан сирпаниб тушишидаги ҳаракат қонунини ва сирпаниб тушиш вақтини топинг.

10.16. Массаси m бўлган моддий нуқта уни тортаётган $\dfrac{mk^2}{r^2}$ куч таъсирида марказга қараб тўғри ҳаракат қилаяпти, бу ерда r нуқтадан марказгача масофа. Агар ҳаракат $r=a$ мувозанат ҳолатдан бошланган бўлса, унинг марказигача келиш вақтини топинг.

10.17. Оғир юк қиялик бурчаги α, ишқаланиш коэффициенти μ бўлган қия текисликдан сирпаниб тушмоқда. Агар бошланғич тезлик нолга тенг бўлса, унинг ҳаракат қонунини топинг.

10.18. Моддий нуқта *A* нуқтага қараб шундай ҳаракат қилмоқдаки, унинг *A* нуқтадан *r* масофадаги тезланиши $kr^{-5/3}$ га тенг. Бошланғич $t=0$ пайтда нуқта *A* дан *i* масофада мувозанат ҳолатда турган бўлса, у қачон *A* га етиб келади?

10.19. Оғирлиги 300 кг бўлган маторли қайиқ 16 м/сек бошланғич тезлик билан ҳаракат қилмоқда. Сувнинг қаршилиги қайиқнинг тезлигига пропорционал ва тезлик 1 м/сек бўлганда 10 кг га тенг. Қайиқ тезлиги 8 м/сек бўлганда қанча масофани босиб ўтади ва бу масофани қанча вақтда ўтади?

10.20. Силлиқ михга занжир шундай ташлаб қўйилганки, унинг бир томони 8 м ли қисим, иккинчи томонида 10 м ли қисми осилиб турибди. Занжирнинг михда сирпангандаги тезланиши осилиб турган бўлаклар орасидаги айирмага пропорционал. Қанча вақтда занжир сирпаниб тушади?

11-§. ЧИЗИҚЛИ ЎЗГАРМАС КОЭФФИЦИЕНТЛИ ТЕНГЛАМАЛАР СИСТЕМАСИ

1. Номаълум йўқотиш усули. Бу усул умуман олганда системани тартиби юқорироқ бўлган бир номаълумли тенгламага келтиради. Системани бу усул билан ечиш фақат содда системалар учунгина ярайди, холос.

Мисол. $\begin{cases}\dot{x}=x+y\\ \dot{y}=3y-2x\end{cases}$ системани ечинг

Ечими. Биринчи тенгликдан $y=\dot{x}-x$ ни олиб, иккинчи тенгламага қўямиз ва

$$\dot{y}=\ddot{x}-\dot{x};\quad \ddot{x}-\dot{x}=3\left(\dot{x}-x\right)-2x;\quad \ddot{x}-4\dot{x}+5x=0$$

бир номаълумли иккинчи тартибли чизиқли тенгламани оламиз. Характеристик тенгламаси $\lambda^2-4\lambda-5=0$ бўлиб, $\lambda_{1,2}=2\pm 1$ бўлади. Аввалги 9-§, 1-пунктдан маълумки, бу тенгламанинг ечими

$$x=e^{2t}\left(C_1\cos t+C_2\sin t\right)$$

кўринишда бўлади. Бундан фойдаланиб, биринчи тенгликдан у ни топиб олиш мумкин:

$$y = \dot{x} - x = \left(-C_1 \sin t + C_2 \cos t + 2C_1 \cos t + 2C_2 \sin t\right)e^{2t} -$$

$$-\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right)e^{2t} = \left[\left(C_1 + C_2\right)\cos t - \left(C_1 - C_2\right)\sin t\right]e^{2t}.$$

Шундай қилиб, тенгламанинг ечими

$$x = e^{2t}\left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right),$$

$$y = e^{2t}\left[\left(C_1 + C_2\right)\cos t - \left(C_1 - C_2\right)\sin t\right]$$

бўлади.

2. Бизга

$$\begin{aligned} &\dot{x} = a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &\dot{x}_n = a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nn}x_n \end{aligned} \tag{1}$$

кўринишдаги, ёки вектор формада

$$\dot{X} = AX, \tag{2}$$

тенгламалар системаси берилган бўлсин. Бу ерда $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ – вектор, $A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots a_{1n} \\ a_{n1} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ – матрица. Бу системани ечиш учун унинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix} = 0. \tag{3}$$

λ_i, $i = 1, \ldots, m$ – (3) тенгламанинг k_i каррали илдизлари бўлсин $\left(k_1 + \ldots + k_m = n\right)$. Ҳар бир λ_i га

$$x^i\left(t\right) = Q^i\left(t\right)e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \ldots, m \tag{4}$$

функцияни мос қўямиз. Бу ерда $Q^i\left(t\right)$ вектор функция бўлиб, ҳар бир компоненти тартиби $k_i - 1$ дан катта бўлмаган номаълум коэффициентли кўпҳаддан иборат. (1) системага λ_i га мос келган ечимини (4) кўринишда қидирамиз. Уни (1) системага қўйиб, $e^{\lambda_i t}$ ларга қисқартирилгандан кейин номаълум коэффициентларни топиш учун nk_i га тенгламадан иборат чизиқли оддий алгебраик системани оламиз. Бу системани ечиб, (4) нинг коэффициентларини аниқлаб оламиз. Умумий ечим эса

$$x = \sum_{i=1}^{m} C_1 x^i \left(t\right) \tag{5}$$

кўринишда бўлади. Бу баён қилинган метод ***Эйлер методи*** деб ҳам юритилади.

Мисол. Қуйидаги системани ечинг.

$$\dot{x} = 2x + y + z,$$
$$\dot{y} = -2x - z,$$
$$\dot{z} = 2x + y + 2z.$$

Ечими. Коэффициентлардан тузилган матрица

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

кўринишда бўлиб, унинг хос сонлари, яъни характеристик тенгламанинг илдизлари $\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \lambda_3 = 1.$ Эйлер методи билан системани ечамиз.

$\lambda_1 = 2$ оддий хос сонга мос келган (4) кўринишдаги функция (ечим) қуйидагича бўлади:

$$x = S_1 e^{2t}, \quad y = S_2 e^{2t}, \quad z = S_3 e^{2t}.$$

Буни берилган системага қўйиб,

$$2S_1 = 2S_1 + S_2 + S_3,$$
$$2S_2 = -2S_1 - S_3,$$
$$2S_3 = 2S_1 + S_2 + 2S_3,$$

системани оламиз ва бундан $S_2 = -2S_1,\ S_3 = 2S_1,\ S_1$ – ихтиётий сон эканлигини топамиз.

$\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ икки каррали хос сонга мос келган (4) кўринишдаги ечим қуйидагича бўлади:

$$x = \left(a_1 + a_2 t\right) e^t,$$
$$y = \left(b_1 + b_2 t\right) e^t,$$
$$z = \left(c_1 + c_2 t\right) e^t.$$

Буни тенгламага қўйиб e^t га қисқартириб,

$$a_1 + a_2 = 2a_1 + b_1 + c_1 \quad \text{(I)} \qquad a_2 = 2a_2 + b_2 + c_2 \quad \text{(II)}$$

$$b_1 + b_2 = -2a_1 - c_1 \quad \text{(III)} \qquad b_2 = -2a_1 - c_2 \quad \text{(IV)}$$

$$c_1 + c_2 = 2a_1 + b_1 + 2c_1 \quad \text{(V)} \qquad c_2 = 2a_2 + b_2 + 2c_2 \quad \text{(VI)}$$

системани оламиз. Иккинчи ва тўртинчи тенгламалардан $a_2 = 0$, $b_2 + c_2 = 0$ биринчи ва учинчидан эса $a_1 + b_2 = 0$ ва бешинчисидан $c_1 = b_2 - b_1$ ифодаларга эга бўламиз. Шундай қилиб, $\lambda_2 = \lambda_3 = 1$ илдизига мос келган

$$x = -b_2 e^t,$$
$$y = \left(b_1 + b_2 t\right) e^t,$$
$$z = \left(b_2 - b_1 - b_2 t\right) e^t$$

ечимларни оламиз.

Топилган ечимларнинг йиғиндисини олсак, системанинг умумий ечими

$$x = C_1 e^{2t} - C_2 e^t,$$
$$y = -2C_1 e^{2t} + \left(C_3 + C_2 t\right) e^t,$$
$$z = 2C_1 e^{2t} + \left(C_2 - C_3 - C_2 t\right) e^t$$

кўринишда бўлади, бу ерда C_1, C_2, C_3 ихтиёрий ўзгармаслар.

3. Агар λ характеристик тенгламанинг комплекс илдизи бўлса, юқорида берилган Эйлер методи орқали топилган ечим ҳам комплекс функциялар орқали ифодаланади. Агар (1) тенгламанинг коэффициентлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлса, ечимни ҳам ҳақиқий функциялар орқали ифодалаш мумкин. Бунинг учун $\lambda = \alpha + \beta i$ комплекс илдизга мос келган комплекс ечимнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмлари чизиқли эркли ечимлар бўлишидан фойдаланиш керак.

Мисол. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 5x + 2y \end{cases}$ системани ечинг.

Ечими. $\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$, $\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0$ характеристик тенгламани тузиб, $\lambda_{1,2} = 3 \pm 21$ илдизларни оламиз. $\lambda_1 = 3 + 21$ илдизга мос келган хос векторни топайлик:

$$\left(1 - 21\right) a - b = 0, \quad 5a - \left(1 + 21\right) b = 0.$$

$a = 1$, $b = 1 - 21$ деб олиб, қуйидаги хусусий ечимни топамиз:

$$x = e^{(3+21)t}, \quad y = \left(1 - 21\right) e^{(3+21)t}.$$

Берилган системанинг коэффициентлари ҳақиқий бўлгани учун $\lambda_2 = 3 - 21$ илдизга мос келган ечимни қидириб ўтиришнинг хожати йўқ, чунки у топилган ечим билан ўзаро қўшма комплекс функция бўлади. Иккита ҳақиқий ечим сифатида топилган комплекс ечимнинг ҳақиқий ва мавҳум қисмларини олиш керак.

$e^{(3+21)t} = e^{3t}\left(\cos 2t + i\sin 2t\right)$ бўлгани учун

$$x_1 = \operatorname{Re} e^{(3+21)t} = e^{3t}\cos 2t,$$

$$y_1 = \operatorname{Re} e\left(1-21\right)e^{(3+21)t} = e^{3t}\left(\cos 2t + 2\sin 2t\right),$$

$$x_2 = \operatorname{Im} e^{(3+21)t} = e^{3t}\sin 2t,$$

$$y_2 = \operatorname{Im}\left(1-21\right)e^{(3+21)t} = e^{3t}\left(\sin 2t - 2\cos 2t\right)$$

ифодаларни оламиз. Булардан эса берилган системанинг умумий ечимини ҳосил қиламиз:

$$x = C_1x_1 + C_2x_2 = C_1e^{3t}\cos 2t + C_2e^{3t}\sin 2t,$$

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 = C_1e^{3t}\left(\cos 2t + 2\sin 2t\right) + C_2e^{3t}\left(\sin 2t - 2\cos 2t\right).$$

4. Ушбу

$$\begin{aligned} &a_{10}x^{(n)} + a_{11}x^{(n-1)} + \ldots + a_{1n}x + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \ldots + b_{1n}y = 0, \\ &a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \ldots + a_{2n}x + b_{20}y^{(n)} + b_{21}y^{(n-1)} + \ldots + b_{2n}y = 0 \end{aligned} \qquad (6)$$

кўринишдаги нормал ҳолга келтирилмаган тенгламани ечиш учун характеристик тенгламани тузиб, уни ечиш керак:

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n + a_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0. \qquad (7)$$

Бу тенгламанинг илдизлари топилгандан кейин, берилган тенгламани ечимини худди 2-пунктдагидек қидирилаверади.

Мисол. $\begin{cases} \dot{x} + x + \dot{y} = 0 \\ \ddot{x} - x + \ddot{y} + y = 0 \end{cases}$ системани ечинг.

Ечими. Характеристик тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{vmatrix} \lambda + 1 & \lambda \\ \lambda^2 - 1 & \lambda^2 + 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0.$$

Бундан икки каррали $\lambda = -1$ илдизни ҳосил қиламиз.

Энди берилган тенгламанинг ечимини 2-пунктдагидек

$$x = \left(a + bt\right)e^{-t}$$

$$y = \left(c + dt\right)e^{-t}$$

кўринишда қидирамиз. Буни системанинг биринчи тенгламасига қўйиб

$$\left(b-a-bt\right)e^{-t}+\left(a+bt\right)e^{-t}+\left(d-c-dt\right)e^{-t}=0$$

ифодани, ундан эса $d=0,\ b=c$ ни оламиз. Системанинг иккинчи тенгламасидан ҳам худди шундай муносабатларни оламиз, буни ҳисоблаб кўришни ўқувчиларнинг ўзига қолдирамиз.

Шундай қилиб, умумий ечим

$$x=\left(C_1t+C_2\right)e^{-t},$$

$$y=C_1e^{-t}$$

кўринишда бўлар экан, бу ерда C_1 ва C_2 ихтиёрий ўзгармаслар.

5. $\dot{x}_i=a_{i1}x_1+\ldots+a_{in}x_n+f_i\left(t\right),\quad i=1,\ldots,n$ (8)

чизиқли бир жинсли бўлмаган тенгламанинг хусусий ечимини ҳам $f_i\left(t\right)$ функциялар $b_0+b_1t++b_mt^m,\ e^{\alpha t},\ \cos\beta t,\ \sin\beta t$ кўринишдаги функцияларнинг йиғиндиси, кўпайтмаси ва уларнинг йиғиндисидан иборат бўлса, номаълум коэффициентлар усули билан қидириш мумкин. Албатта, бу ерда ҳам (айрим ўзгаришлар билан) худди ўзгармас коэффициентли тенгламалардагидек иш қилинади. Агар $f_i\left(t\right)=P_m\left(t\right)e^{\gamma t}$ бўлиб, $P_{m_i}\left(t\right)$ – m_i тартибли кўпҳад бўлса, (8) тенгламанинг хусусий ечими $t^sQ_m\left(t\right)e^{\gamma t}$ кўринщда эмас,

$$x_i=Q^i_{m+s}\left(t\right)e^{\gamma t},\quad i=1,\ldots,n$$

кўринишда қидирилади, бу ерда $Q^i_{m+s}\left(t\right)-m+s$ тартибли, номаълум коэффициентли кўпҳад; $m=\max m_i$; агар γ характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса $s=0,$ агар γ характеристик тенгламанинг илдизи бўлмаса, s сифатида бу илдизнинг карралигини олиш керак. (9) даги номаълум коэффициентлар (9) ифодани (8) тенгламага қўйиб, ўхшаш ҳадлар коэффициентларини тенглаштириш ёрдамида топилади.

$f_i\left(t\right)$ функция $e^{\alpha t}\cos\beta t$ ва $e^{\alpha t}\sin\beta t$ функцияларни ўз ичига олган бўлиб, $\gamma=\alpha+i\beta$ характеристик тенгламанинг илдизи бўлганда ҳам (9) ифодадаги кўпҳаднинг тартиби юқоридагига ўхшаш аниқланади.

Мисол. $\begin{cases}\dot{x}=y+\sin t\\ \dot{y}=-x\end{cases}$ ситемани ечинг.

Ечими. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$ бир жинсли системанинг умумий ечимини топиб оламиз. Бу тенгламанинг характеристик тенгламасини тузамиз:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Унинг илдизлари $\lambda_1 = i$ ва $\lambda_2 = -i$. Демак, бир жинсли тенгламанинг умумий ечими

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t,$$

$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

кўринишда бўлар экан.

Бизнинг мисолимизда $\alpha = 0,\ \beta = 1,\ \gamma = \alpha + i\beta = i$ характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи бўлгани учун, берилган тенгламанинг хусусий ечимини

$$x = (a_1 + a_2 t)\sin t + (a_3 + a_4 t)\cos t,$$

$$y = (b_1 + b_2 t)\sin t + (b_3 + b_4 t)\cos t$$

кўринишда қидирамиз. Буни тенгламалар системасига қўйиб a_i ва b_i ларни топиш учун тенгламаларга эга бўламиз:

$$a_1 + a_4 = b_3,\ \ a_2 - a_3 = b_1 + 1,\ \ b_2 + a_4 = 0,\ \ a_2 - b_4 = 0,\ \ b_1 + b_4 + a_3 = 0.$$

Бу тенгламалардан

$$a_1 = a_3 = a_4 + b_2 = b_3 = 0,\ \ b_1 = -1/2,\ \ a_2 = b_4 = 1/2$$

ифодаларни оламиз, шундай қилиб, хусусий ечим

$$x = t/2 \cdot \sin t,$$

$$y = -1/2 \cdot \sin t + t/2 \cdot \cos t$$

кўринишда, берилган тенгламалар системасининг умумий ечими эса

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t + t/2 \cdot \sin t,$$

$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t - 1/2 \cdot \sin t + t/2 \cdot \cos t$$

бўлар экан.

6. Агар бир жинсли тенгламалар системанинг умумий ечими маълум бўлса,

$$\dot{x}_i = a_{i1}(t)x_1 + \ldots + a_{i1}(t)x_n + f_i(t), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (10)$$

тенгламалар системасининг умумий ечимини ўзгармасни вариациялаб ҳам топиш мумкин. Бунинг учун бир жинсли тенгламалар системасининг умумий ечимидаги C_i ўзгармасларни $C_i(t)$ функцияларга алмаштириш ва ҳосил бўлган ифодани (10) тенгламалар системасига қўйиб, ҳосил бўлган тенгламалар системасидан $C_i(t)$ ларни топиш керак.

Мисол. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 1/\cos t \end{cases}$ системани ечинг.

Ечими. Бу системани ўзгармасни вариациялаш усули билан ечамиз. Бу системага мос бўлган бир жинсли тенгламалар системасининг кўриниши

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x \end{cases}$$

бўлиб, бунинг умумий ечимини 5-пунктда топган эдик. У

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$$y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$$

кўринишда C_1, C_2 ўзгармасларни вариациялаймиз, яъни $C_1(t)$ ва $C_2(t)$ билан алмаштирамиз, сўнгра берилган тенгламага қўямиз:

$$x = C_1(t)\cos t + C_2(t)\sin t$$

$$y = -C_1(t)\sin t + C_2(t)\cos t$$

$C_1'(t),\ C_2'(t)$ ларга нисбатан қуйидаги система ҳосил бўлади:

$$C_1'(t)\cos t + C_2'(t)\sin t = 0,$$

$$-C_1'(t)\sin t + C_2'(t)\cos t = 1/\cos t.$$

Бу ерда $C_1'(t) = -\sin t/\cos t,\ C_2'(t) = 1$ топилади. Демак,

$$C_1(t) = \ln|\cos t| + \bar{C}_1,\ C_2(t) = t + \bar{C}_2$$

буни ўрнига қўйиб

$$x = \bar{C}_1 \cos t + \bar{C}_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t \sin t,$$

$$y = -\bar{C}_1 \sin t + \bar{C}_2 \cos t - \sin t \ln|\cos t| + t \cos t$$

умумий ечимни оламиз.

Тенгламалар системасини йўқотиш усули билан ечинг.

266. $\begin{cases} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = 2y - x \end{cases}$

267. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 4y - x \end{cases}$

268. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - 3x \\ \dot{y} = y - 2x \end{cases}$

269. $\begin{cases} \dot{x} - 5x - 3y = 0 \\ \dot{y} + 3x + y = 0 \end{cases}$

270. $\begin{cases} \dot{x} = -y \\ \dot{y} = 2x + 2y \end{cases}$

271. $\begin{cases} \dot{x} + x = y + e^t \\ \dot{y} + y = x + e^t \end{cases}$

Тенгламалар системасини ечинг.

272. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = z + x \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$

273. $\begin{cases} \dot{x} = x + x - y \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2x - y \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -1)$

274. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$

$(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1)$

275. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2z - y \\ \dot{y} = x + 2z \\ \dot{z} = y - 2x - z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = \pm 1)$

276. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = x + y + z \\ \dot{z} = 4x - y + 4z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 5)$

277. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 3)$

Бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасини ечинг.

278. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + 4y + e^t \\ \dot{y} = 4x + 5y + 1 \end{cases}$

279. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y + \cos t \\ \dot{y} = -x - 2y + \sin t \end{cases}$

280. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y - 5t + 1 \\ \dot{y} = x + 2y + t - 1 \end{cases}$

281. $\begin{cases} \dot{x} = -5x + 2y + 40 \\ \dot{y} = x - 6y + 9e^{-t} \end{cases}$

282. $\begin{cases} \dot{x} = y - \cos t \\ \dot{y} = -x + \sin t \end{cases}$

283. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t \end{cases}$

Нормал ҳолга келтирилмаган тенгламалар системасини ечинг.

284. $\begin{cases} \dot{x}+\dot{y}=2y \\ 3\dot{x}+\dot{y}=x+9y \end{cases}$

285. $\begin{cases} \ddot{x}=x-4y \\ \ddot{y}=-x+y \end{cases}$

286. $\begin{cases} \ddot{x}-3\ddot{y}-x=0 \\ \dot{x}+3\dot{y}-2y=0 \end{cases}$

287. $\begin{cases} \ddot{x}+4\dot{x}-2x-2\dot{y}-y=0 \\ \ddot{x}-4\dot{x}-\ddot{y}+2\dot{y}+2y=0 \end{cases}$

288. $\begin{cases} \dot{x}-\dot{y}-2x+2y=0 \\ \ddot{x}+2\dot{y}+x=0 \end{cases}$

289. $\begin{cases} 2\dot{x}-5\dot{y}=4y-x \\ 3\dot{x}-4\dot{y}=2x-y \end{cases}$

Системани ўзгармасни вариациялаш усули билан ечинг.

290. $\begin{cases} \dot{x}+2y=3t \\ \dot{y}-2x=4 \end{cases}$

291. $\begin{cases} \dot{x}+y-2x=0 \\ \dot{y}+x-2y=-e^{t}\sin t \end{cases}$

292. $\begin{cases} \dot{x}=3x+y+e^{t} \\ \dot{y}=x+3y-e^{t} \end{cases}$

293. $\begin{cases} \dot{x}=y \\ \dot{y}=-x+4/\cos t \end{cases}$

294. $\begin{cases} \dot{x}=2x+4y+\cos t \\ \dot{y}=-x-2y+\sin t \end{cases}$

295. $\begin{cases} \dot{x}=3x-2y \\ \dot{y}=2x-y+15e^{t}\sqrt{t} \end{cases}$

Вектор формада берилган $\dot{X}=Ax$ кўринишдаги системани ечинг.

296. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

297. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

298. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

299. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

300. $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

301. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

12-§. 6-ЛАБАРАТОРИЯ ИШИ

Синов учун савол ва топшириқлар

1. Дифференциал тенгламаларнинг нормал системаси (ДТНС) қандай кўринишга эга? Қандай системаларга чизиқли, бир жинсли ва бир жинсли бўлмаган системалар дейилади?

2. ДТНС учун Коши масаласи қандай қўйилади?

3. ДТНС умумий ечими, хусусий ечими, умумий интеграли тушунчаларини изоҳланг.

4. Номаълумларни йўқотиш усулининг ғояси нимадан иборат?

5. Нима учун чизиқли система махсус ечимга эга бўлмайди?

6. Ечимларнинг фундаментал системаси деб нимага айтилади? Воронский детерминанти деб-чи?

7. Чизиқли бир жинсли бўлмаган системанинг битта хусусий ечими ва унга мос бир жинсли системанинг умумий ечими маълум бўлганда унинг умумий ечими қандай топилади?

8. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли система ечимларининг фундаментал системасини тузишда Эйлер методи нимадан иборат?

9. Ўзгармас коэффициентли чизиқли бир жинсли системаларни ечишда матрицалар методи нимадан иборат?

10. Ўзгармас вариациялаш методи нимадан иборат?

11. Нормал кўринишга келтирилмаган чизиқли системанинг умумий кўринишини ёзинг ва уни ечиш усулини кўрсатинг.

1. Тенгламалар системасини ечинг.

1.1. $$\begin{cases} \dot{x} = 4x - y \\ \dot{y} = 3x + y - z \\ \dot{z} = x + z \end{cases}$$
$$\left(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = 2\right)$$

1.2. $$\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 2x - y - 2z \\ \dot{z} = 2z - x + y \end{cases}$$
$$\left(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 1\right)$$

1.3. $$\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 2y + 4z \\ \dot{z} = x - z \end{cases}$$
$$\left(\lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = 3\right)$$

1.4. $$\begin{cases} \dot{x} = y - 2z - x \\ \dot{y} = 4x + y \\ \dot{z} = 2x + y - z \end{cases}$$
$$\left(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1\right)$$

1.5. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + z \\ \dot{y} = x + y - z \\ \dot{z} = 2z - y \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_2 = 1,\ \lambda_3 = 2)$

1.6. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y - z \\ \dot{y} = 3x - 4y - 3z \\ \dot{z} = 2x - 4y \end{cases}$

$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 2,\ \lambda_3 = -5)$

1.7. $\begin{cases} \dot{x} = y - 2x - 2z \\ \dot{y} = x - 2y + 2z \\ \dot{z} = 3x - 3y + 5z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -1,\ \lambda_3 = -1)$

1.8. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y - 3z \\ \dot{y} = -6x + 2y + 6z \\ \dot{z} = 6x - 2y - 6z \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - y + z \\ \dot{y} = x + 2y - z \\ \dot{z} = x - y + 2z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 3)$

1.10. $\begin{cases} \dot{x} = 10x - 3y - 9z \\ \dot{y} = -18x + 7y + 18z \\ \dot{z} = 18x - 6y - 17z \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = x + 3y - z \\ \dot{z} = 2x + 3z + x \end{cases}$

$(\lambda_1 = 2,\ \lambda_{2,3} = 3 \pm 1)$

1.12. $\begin{cases} \dot{x} = x - z \\ \dot{y} = -6x + 2y + 6z \\ \dot{z} = 4x - y - 4z \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$

$(\lambda_1 = 1,\ \lambda_{2,3} = 1 \pm 21)$

1.14. $\begin{cases} \dot{x} = -y + z \\ \dot{y} = z \\ \dot{z} = -x + z \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} \dot{x} = y + z \\ \dot{y} = x + z \\ \dot{z} = x + y \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - y - 4z \\ \dot{y} = -12x + 5y + 12z \\ \dot{z} = 10x - 3y + 9z \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - y + z \\ \dot{y} = -x + 5y - z \\ \dot{z} = x - y + 3z \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 12y - 4z \\ \dot{y} = -x - 3y + z \\ \dot{z} = -x - 12y + 6z \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 12x - 4y - 12z \\ \dot{z} = -4x + y + 5z \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} \dot{x} = 21x - 8y - 19z \\ \dot{y} = 18x - 7y - 15z \\ \dot{z} = 16x - 6y - 15z \end{cases}$

2. Бир жинсли бўлмаган тенгламалар системасини ечинг.

2.1. $\begin{cases} \dot{x} = y + 2e^t \\ \dot{y} = x + t^2 \end{cases}$

2.2. $\begin{cases} \dot{x} = 3x + 2y + 4e^{5t} \\ \dot{y} = x + 2y \end{cases}$

2.3. $\begin{cases} \dot{x} = y - 5\cos t \\ \dot{y} = 2x + y \end{cases}$

2.4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4 + 4e^{2t} \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$

2.5. $\begin{cases} \dot{x} = 4x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = y - x \end{cases}$

2.6. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x + 1 \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{cases}$

2.7. $\begin{cases} \dot{x} = 5x - 3y + 2e^{3t} \\ \dot{y} = x + y - 5e^{-t} \end{cases}$

2.8. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + e^t \\ \dot{y} = 12x + 2t \end{cases}$

2.9. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y \\ \dot{y} = x - 5\sin t \end{cases}$

2.10. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 4y \\ \dot{y} = x - 3y + 3e^t \end{cases}$

2.11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = y - 2x + 18t \end{cases}$

2.12. $\begin{cases} \dot{x} = x + 2y + 16te^t \\ \dot{y} = 2x - 2y \end{cases}$

2.13. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 4y - 8 \\ \dot{y} = 3x + 6y \end{cases}$

2.14. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$

2.15. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$

2.16. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2e^t \end{cases}$

2.17. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$

2.18. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^t \end{cases}$

2.19. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$

2.20. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^t \sin t \end{cases}$

3. Нормал кўринишга келтирилган тенгламалар системасини ечинг.

3.1. $\begin{cases} \ddot{x} = 2x - 3y \\ \ddot{y} = x - 2y \end{cases}$

3.2. $\begin{cases} \ddot{x} = 3x + 4y \\ \ddot{y} = -x - y \end{cases}$

3.3. $\begin{cases} \ddot{x} = 2y \\ \ddot{y} = -2x \end{cases}$

3.4. $\begin{cases} \ddot{x} = \dot{y} \\ \ddot{y} = \dot{x} \end{cases}$

3.5. $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{y} + x = 0 \\ \ddot{y} + x = 0 \end{cases}$

3.6. $\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} \\ \ddot{y} = -2x \end{cases}$

3.7. $\begin{cases} \ddot{x} = y \\ \ddot{y} = -x \end{cases}$

3.8. $\begin{cases} \ddot{x} - y = 0 \\ \ddot{y} - x = 0 \end{cases}$

3.9. $\begin{cases} \ddot{x} + x + y = 0 \\ \ddot{y} - 4x - 3y = 0 \end{cases}$

3.10. $\begin{cases} \ddot{x} = -2y \\ \ddot{y} = 2x \end{cases}$

3.11. $\begin{cases} \ddot{x} = 2x + 3y \\ \ddot{y} = 4x - 2y \end{cases}$

3.12. $\begin{cases} \ddot{x} + \ddot{y} - y = 0 \\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0 \end{cases}$

3.13. $\begin{cases} \ddot{x} = 2\dot{y} - 2x \\ \ddot{y} = 8y - 3\dot{x} \end{cases}$

3.14. $\begin{cases} \ddot{x} = 5x + 4y \\ \ddot{y} = 4x + 5y \end{cases}$

3.15. $\begin{cases} \ddot{x} = -2x - 4y \\ \ddot{y} = x + 3y \end{cases}$

3.16. $\begin{cases} \ddot{x} - x + 2\ddot{y} - 2y = 0 \\ \dot{x} - x + \dot{y} + y = 0 \end{cases}$

3.17. $\begin{cases} \ddot{x} - 2\ddot{y} + \dot{y} + x - 3y = 0 \\ 4\ddot{y} - 2\ddot{y} - \dot{x} - 2x + 5y = 0 \end{cases}$

3.18. $\begin{cases} \ddot{x} + \dot{x} + \dot{y} - 2y = 0 \\ \dot{x} - \dot{y} + x = 0 \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} 2\ddot{x} + 2\dot{x} + x + 3\ddot{y} + \dot{y} + y = 0 \\ \ddot{x} + 4\dot{x} - x + 3\ddot{y} + 2\dot{y} - y = 0 \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} \ddot{x} + 5\dot{x} + 2\dot{y} + y = 0 \\ 3\ddot{x} + 5\dot{x} + \dot{y} + 3y = 0 \end{cases}$

4. Берилган системани ўзгармасни вариациялаш усули билан ечинг.

4.1. $\begin{cases} \dot{x} = y + tg^2 t + 1 \\ \dot{y} = -x + tgt \end{cases}$

4.2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 4y - 3x + e^t \big/ \left(e^{2t} + 1\right) \end{cases}$

4.3. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + 1 \big/ \left(e^t - 1\right) \\ \dot{y} = 6x + 3y - 3 \big/ \left(e^t - 1\right) \end{cases}$

4.4. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + \sec t \\ \dot{y} = 2x - y \end{cases}$

4.5. $\begin{cases} \dot{x} = 3x - 2y \\ \dot{y} = 2x - y + e^t\sqrt{t} \end{cases}$

4.6. $\begin{cases} \dot{x} + 2x - y = -e^{2t} \\ \dot{y} + 3y - 2x = 6e^{2t} \end{cases}$

4.7. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - \cos t \\ \dot{y} == -y - 2x + \cos t + \sin t \end{cases}$

4.8. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -x + 7/\cos t \end{cases}$

4.9. $\begin{cases} \dot{x} = x + y - t^2 + t - 2 \\ \dot{y} = -2x + 4y + 2t^2 - 4t - 7 \end{cases}$

4.10. $\begin{cases} \dot{x} = -x - 2y + e^{-t} \\ \dot{y} = 3x + 4y + e^{-t} \end{cases}$

4.11. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y + 2e^t \\ \dot{y} = -3x - 2y + 4e^t \end{cases}$

4.12. $\begin{cases} \dot{x} = -2x + y - e^{2t} \\ \dot{y} = -3x + 2y + 6e^{2t} \end{cases}$

4.13. $\begin{cases} \dot{x} = x + y + \cos t \\ \dot{y} = -2x - y + \sin t - \cos t \end{cases}$

4.14. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 4\cos 2t \\ \dot{y} = 3x - 2y + 8\cos 2t + 5\sin 2t \end{cases}$

4.15. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + \cos t \\ \dot{y} = -y - 2x + \sin t \end{cases}$

4.16. $\begin{cases} \dot{x} = y + 1 \\ \dot{y} = -x + 10/\sin t \end{cases}$

4.17. $\begin{cases} \dot{x} + y = \cos t \\ \dot{y} + x = \sin t \end{cases}$

4.18. $\begin{cases} \dot{x} + 5x + y = 7e^t - 27 \\ \dot{y} - 2x + 3y = -3e^t + 2 \end{cases}$

4.19. $\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = x + e^t + e^{-t} \end{cases}$

4.20. $\begin{cases} \dot{x} + 5x + y = e^t \\ \dot{y} + 3y - x = e^{2t} \end{cases}$

5. Вектор формада берилган $\dot{X} = Ax$ кўринишдаги системани ечинг.

5.1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$

5.2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.3. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

5.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix}$

5.5. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 4 & -2 \\ 1 & 5 & -3 \end{pmatrix}$

5.6. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$

5.7. $A=\begin{pmatrix} -3 & 2 & 2 \\ -3 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5.8. $A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

5.9. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

5.10. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

5.11. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5.12. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

5.13. $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

5.14. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

5.15. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

5.16. $A=\begin{pmatrix} 5 & -1 & -4 \\ -12 & 5 & 12 \\ 10 & -3 & 19 \end{pmatrix}$

5.17. $A=\begin{pmatrix} 10 & -3 & -9 \\ -18 & 7 & 18 \\ 18 & -6 & -17 \end{pmatrix}$

5.18. $A=\begin{pmatrix} 3 & 12 & -4 \\ -1 & -3 & 1 \\ -1 & -12 & 6 \end{pmatrix}$

5.19. $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

5.20. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

13-§. ТУРҒУНЛИК НАЗАРИЯСИ ВА БИРИНЧИ ТАРТИБЛИ ХУСУСИЙ ҲОСИЛАЛИ ТЕНГЛАМАЛАР

1. Қуйдаги дифференциал тенгламалар системаси берилган бўлсин:

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\left(t, x_1, x_2, \ldots, x_n\right), \quad i = 1, \ldots, n \tag{1}$$

ёки вектор формада

$$\frac{dx}{dt} = f\left(t, x\right), \quad x = \left(x_1, x_2, \ldots, x_n\right). \tag{2}$$

Фараз қилайлик, f_i ва $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ функциялар барча i ва k ларда $t_0 \le t < +\infty$ да узулуксиз бўлсин.

Агар $x = \varphi(t)$ (2) тенгламанинг ечими берилган бўлиб, ихтиёрий $\varepsilon > 0$ учун $\delta > 0$ кўрсатиш мумкин бўлсаки, барча

$$\left|x(t_0) - \varphi(t_0)\right| < \delta, \tag{3}$$

бошланғич шартни қаноатлантирувчи (2) тенгламанинг $x(t)$ ечимлари учун ихтиёрий $t_0 \le t$ да

$$\left|x(t) - \varphi(t)\right| < \varepsilon \tag{4}$$

шарт бажарилса, берилган $x = \varphi(t)$ ечим Ляпунов маъносида ***турғун*** дейилади.

Агар қандайдир $\varepsilon > 0$ учун шундай $\delta > 0$ топилмаса, $\varphi(t)$ ечим ***турғун эмас*** дйилади.

Агар (2) системанинг $\varphi(t)$ ечими Ляпунов маъносида турғун бўлиб, етарлича яқин бошланғич шартларда (2) системанинг ечимлари $t \to +\infty$ да $\varphi(t)$ га чексиз яқинлашса, бошқача қилиб айтганда, етарлича кичик $\delta > 0$ учун (3) шартда $\lim\limits_{t \to +\infty}\left(x(t) - \varphi(t)\right) = 0$ келиб чиқса, $\varphi(t)$ ечим ***асимптотик турғун*** дейилади.

Юқоридаги (2) тенгламанинг $x = \varphi(t)$ ечимининг турғунлигини текшириш масаласи, (2) тенгламада $y = x - \varphi(t)$ алмаштириш бажарилганда ҳосил бўлган тенгламанинг $y(t) \equiv 0$ ечимини турғунликка текширишга келтирилади.

2. Биринчи яқинлашиш бўйича турғунликка текшириш. $x_i(t) \equiv 0 \quad \left(i = 1, \ldots, n\right)$ (1) тенгламанинг ечими бўлсин. Шу ечимни турғунликка текшириш учун $x_1 = x_2 = \ldots = x_4 = 0$ нуқта атрофида f_i функцияларнинг чизиқли қисмини ажратиб олинади, (масалан, f_i ларни Телор формуласи ёрдамида ёйиш билан). Ҳосил бўлган системанинг нол ечимини турғунлигини қуйидаги теорема орқали текшириш мумкин.

Ляпунов теоремаси. Қуйидаги система берилган бўлсин:

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + \phi(t, x_1, \ldots, x_n), \quad i = 1, \ldots, n \qquad (5)$$

бу ерда a_{ik} – ўзгармаслар ϕ_i – шундай функцияларки,

$$|x| < \varepsilon_0, \quad |x| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}$$

шарт бажарилганда

$$|\phi_i| \le \gamma(x)|x|, \quad i = 1, \ldots, n, \quad \gamma(x) \to 0, \quad |x| \to 0$$

ўринли бўлади.

Агар (5) тенгламада

$$\begin{vmatrix} a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

матрицанинг ҳамма хос сонлари манфий ҳақиқий қисмга эга бўлса, унинг нол ечими асимптотик турғун бўлади; бирорта хос соннинг ҳақиқий қисми мусбат бўлса, нол ечим турғун бўлмайди.

Мисоллар. *а*)

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y + 2x^4 - y^6 \\ \dot{y} = x - 3y + 11y^4 \end{cases},$$

системанинг $x = 0,\ y = 0$ ечимни турғунликка текширинг.

Ечими. Юқоридаги теоремани қўллаб ечамиз. Биринчи яқинлашиш бўйича қуйидаги системанинг $x = 0,\ y = 0$ ечимини турғунликка текширамиз:

$$\begin{cases} \dot{x} = -x + y \\ \dot{y} = x - 3y. \end{cases}$$

Тушунарлики, характеристик тенгламаси

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 1 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

кўринишда бўлиб, $\lambda_{1,2} = -2 \pm \sqrt{2}$.

Демак, Ляпунов теоремасига кўра $x=0,\ y=0$ тривиал ечим асимптотик турғун.

***б*)**

$$\dot{x}=\sqrt{4+4y}-2e^{x+y},$$
$$\dot{y}=\sin ax+\ln\left(1-4y\right),\quad a=const,$$

системанинг $x=0,\ y=0$ тривиал ечимини турғунликка текширинг.

Ечими. Тейлор формуласи ёрдамида ўнг томондаги функцияларнинг чизиқли қисмини ажратиб оламиз.

$$\dot{x}=-2x-y+\phi_1\left(x,y\right),$$
$$\dot{y}=ax-4y+\phi_2\left(x,y\right),$$

бу ерда ϕ_1 ва ϕ_2 функциялар $C\left(x^2+y^2\right)$ га тенг, яъни чексиз кичик. Коэффициентдан тузилган матрицанинг хос сонларини аниқласак,

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & 1\\ a & -4-\lambda\end{vmatrix}=0,\quad \lambda^2+6\lambda+8+a=0,\quad \lambda_{1,2}=-3\pm\sqrt{1-a}$$

бўлади.

Агар $a>1$ бўлса, илдизлар комплекс сонлар $\operatorname{Re}\lambda_{1,2}=-3<0,$ агар $-8<a\le 1$ бўлса, илдизлар ҳақиқий ва манфий, демак, бу ҳолларда $x=0,\ y=0$ ечим асимптотик турғун бўлади.

Агар $a<-8$ бўлса, битта илдиз мусбат бўлади ва демак, $x=0,$ $y=0$ ечим асмптотик турғун эмас.

Агар $a=-8$ бўлса, $\lambda_1=0,\ \lambda_2=-6$ тенг бўлади ва турғунлик масаласини юқорида айтилган теорема орқали ҳал қилиб бўлмайди.

3. Ляпунов функцияси ёрдамида турғунликка текшириш.

Ляпунов теоремаси. Бирор $\varepsilon_0>0$ сон учун $t_0\le t<+\infty,$ $|x|<\varepsilon_0$ шартни қаноатлантирувчи $\left(t,x\right)$ ларда (2) системанинг ўнг томони аниқланган узулуксиз бўлиб, $f\left(t,0\right)\equiv 0$ бўлсин. Ундан ташқари шу x ларда аниқланган, фақат координата бошида нолга тенг ва узлуксиз дифференциалланувчи $V\left(x\right)\ge 0$ Ляпунов функцияси мавжуд бўлиб, у

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}f_j\le 0 \qquad (7)$$

шартни қаноатлантирсин. У ҳолда $x\left(t\right)\equiv 0$ ечим турғун бўлади.

Агар $0<|x|<\varepsilon_0$ учун

$$\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_j}f_j \le -w(x) < 0, \qquad (8)$$

(бу ерда $w(0)=0$, $x\neq 0$ да $w(x)>0$ бўлган қандайдир узлуксиз функция) шарт ҳам бажарилса, нол ечим асимптотик турғун бўлади.

(1) системанинг ечими маълум бўлмаса, Ляпунов функцияси қуришнинг умумий усули йўқ, лекин баъзи ҳолларда бу функцияни квадратик форма шаклида, яъни $V=\sum_{i,j} b_{i,j}x_i x_j$ кўринишига келтириб олиш мумкин бўлади.

Мисоллар. *а*)

$$\dot{x} = -(x-2y)\left(1-x^2-3y^2\right),$$
$$\dot{y} = -(y+x)\left(1-x^2-3y^2\right),$$

системанинг тривиал ечимини турғунликка текширинг.

Ечими. Ляпунов функцияси $V(x)$ сифатида $V(x,y)=x^2+2y^2$ ни оламиз. Биринчидан, $V(0,0)=0$, $V(x,y)\ge 0$, иккинчидан, етарлича кичик *x*, *y* лар учун

$$\sum_{j=1}^{2}\frac{\partial V}{\partial x_j}f_j = \frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x(2y-x)\left(1-x^2-3y^2\right)-$$
$$-4y(x+y)\left(1-x^2-3y^2\right) = -2\left(1-x^2-3y^2\right)\left(x^2+2y^2\right)\le 0.$$

Демак, юқорида баён этилган Ляпунов теоремасининг барча шартлари бажарилади, $x\equiv 0$, $y\equiv 0$ ечим – турғун ечим экан.

***б*)**

$$\dot{x} = -5y-2x^3$$
$$\dot{y} = 5x-3y^3$$

системанинг тривиал ечимини турғунликка текширинг.

Ечими. $V(x,y)=x^2+y^2$ функция Ляпунов теоремасининг иккинчи қисмини (асимптотик турғунликни таъминлайдиган шартни) қаноатлантиради. Ҳақиқатдан ҳам,

1) $V(0,0)=0$, $V(x,y)>0$;

2) $\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt} = 2x\left(-5y-2x^3\right)+2y\left(5x-2y^3\right) = -4\left(4x^4+6y^4\right)\le 0.$

Демак, $\left.\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}\right|_{\substack{x=0\\ y=0}} = 0$ âà $\frac{\partial V}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial V}{\partial y}\frac{dy}{dt}<0,\ x\neq 0,\ y\neq 0.$

Шундай қилиб, $x \equiv 0,\ y \equiv 0$ асимптотик турғун экан.

4. $$a_0\lambda^n + a_n\lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_0, \quad a_0 > 0 \tag{9}$$
ҳақиқий коэффициентли кўпҳаднинг барча илдизлари ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун шартлар.

(9) кўпҳад барча илдизларининг ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун $a_i > 0,\ i = 0,1,\ldots,n$ бўлиши зарурдир. $n \le 2$ бўлганда бу шарт етарлидир.

Раус-Гурвиц шарти. (9) кўпҳад барча илдизларининг ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун ушбу ***Гурвиц матрицаси*** деб аталувчи матрицанинг

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \ldots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix}$$

асосий диагонал минорлари мусбат бўлиши зарур ва етарлидир. Бу матрицанинг асосий диагоналида $a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n$ лар турибди. Ҳар бир сатрда элементларнинг индекси олдинги элемент индексидан 1 бирликка кичик. a_1 элемент $i > n$ ёки $i > 0$ ларда нолга алмаштирилади. Гурвиц матрицасининг асосий диагонал минорлари:

$$\Delta_1 = a_1, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix}, \quad \ldots. \tag{11}$$

Шу ҳам эслатиб қўйиш керакки, $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \ldots,\ \Delta_n > 0$ шартлардаги охирги ифода учун $\Delta_n = \Delta_{n-1}a_n$ тенглик ўринли бўлгани учун $\Delta_n > 0$ шартни $a_n > 0$ шарт билан алмаштириш мумкин.

Мисол. $y^{\mathrm{v}} + y'^{\mathrm{v}} + 7y''' + 4y'' + 10y' + 3y = 0$ тенгламанинг тривиал ечимини турғунликка текширинг.

Ечими. Характеристик тенгламасини тузамиз:

$$f(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^4 + 7\lambda^3 + 4\lambda^2 + 10\lambda + 3 = 0.$$

Бу ерда $a_0 = 1,\ a_1 = 1,\ a_2 = 7,\ a_3 = 4,\ a_4 = 10,\ a_5 = 3.$

Гурвиц матрицасининг диагонал минорларини ёзамиз:

$$\Delta_1 = 1 > 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 7 \end{vmatrix} = 3 > 0, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 4 \end{vmatrix} = 5 > 0,$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 \\ 3 & 10 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 3 & 10 \end{vmatrix} = 10\Delta_3 - 3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & 7 & 1 \\ 3 & 10 & 7 \end{vmatrix} = 50 - 3(49 + 3 - 10 - 28) = 8 > 0,$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 7 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 10 & 4 & 7 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 10 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\Delta_4 = 3 \cdot 8 = 24 > 0.$$

Шундай қилиб, $\Delta_1 > 0,\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \Delta_4 > 0,\ \Delta_5 > 0$ ва демак, $y \equiv 0$ тривиал ечим асимптотик турғун ечим экан.

в) Льенар-Шипар шарти. (9) кўпҳад барча илдизларининг ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун $a_i > 0,\ i = 1,\ldots,n$ ва юқорида аниқланган $\Delta_i,\ i = 1,\ldots,n$ лар учун $\Delta_{n-1} > 0,\ \Delta_{n-3} > 0,\ \Delta_{n-5} > 0,\ \ldots$ шартлар бажарилиши зарур ва етарлидир.

Мисол. $y^{\prime\mathrm{v}} + 2y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$ тенгламанинг $y \equiv 0$ тривиал ечимини турғунликка текширинг.

Ечими. Льенар-Шипар шартини ёзамиз, бунинг учун аввал характеристик тенгламани ёзайлик:

$$\lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = 0;$$

$$a_0 = 1 > 0,\ a_1 = 2 > 0,\ a_2 = 3 > 0,\ a_3 = 3 > 0,\ a_0 = 1 > 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 6 \cdot 3 - 4 \cdot 1 - 9 = 5 > 0,\ \Delta_1 = 2 > 0.$$

Бу ердан $y \equiv 0$ тривиал ечим асимптотик турғун эканлиги келиб чиқади.

г) **Михайлов критерийси.** (9) кўпҳад барча илдизларининг ҳақиқий қисми манфий бўлиши учун комплекс текисликда $f(i\omega)$ нуқта (бу ерда $f(\lambda)$ (9) кўпҳад) ω 0 дан $+\infty$ гача ўзгарганда координата бошидан ўтмасдан мусбат йўналишда $n\pi/2$ бурчакка бурилиш зарур ва етарлидир.

Бу критерийни қуйидагича ҳам таърифлаш мумкин эди: $a_n a_{n-1} > 0$ бўлиб,

$$p(\xi) = a_n - a_{n-2}\xi + a_{n-4}\xi^2 - \ldots$$

$$q(\eta) = a_{n-1} - a_{n-3}\eta + a_{n-5}\eta^2 - \ldots$$

кўпҳадларнинг барча илдизлари мусбат, ҳар хил ва ξ_1 дан бошлаб алмашиб келиши, яъни $0 < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots$ бўлиши зарур ва етарли. Шу ерда $f(i\omega) = p(\omega^2) + i\omega q(\omega^2)$ эканлигини ўқувчиларга эслатиб қўйишни лозим топдик.

Мисол. $y^{\prime\text{v}} + 2y''' + 3y'' + 2y' + y = 0$ тенгламанинг $y \equiv 0$ тривиал ечимини турғунликка текширинг.

Ечими. Характеристик тенгламасини тузамиз:

$$f(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 1.$$

Бу ерда

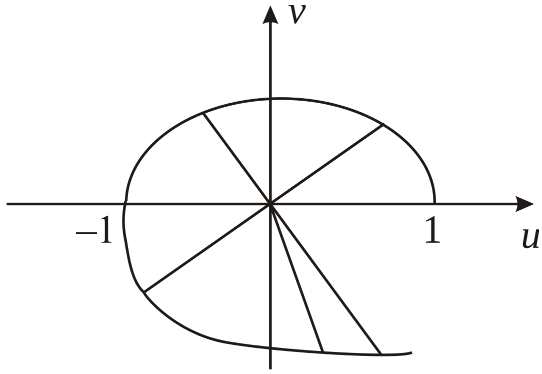
$$f(i\omega) = \omega^4 - 2i\omega^3 - 3\omega^3 + 2i\omega + 1,$$

$$u(\omega) = \omega^4 - 3\omega^3 + 1,$$

$$v(\omega) = -2i\omega^3 + 2\omega = 2\omega(1-\omega^2) = 2\omega(1-\omega)(1+\omega).$$

ω ни 0 дан $+\infty$ гача ўзгартирамиз ва (u, v) текисликда ҳосил бўлган $u = u(\omega)$, $v = v(\omega)$ чизиқни ўрганайлик (19-расмга қаранг).

ω	0	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	1	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
u	1	0	–1	0
v	0	$3-\sqrt{5}$	0	$-(3-\sqrt{5})$



19-расм.

$\lim\limits_{\omega+\infty}\dfrac{v}{u}=0,$ бурилиш бурчаги $\varphi=4\dfrac{\pi}{4}=(n-2m)\dfrac{\pi}{2}.$

Бу ерда $n-2m=4;\ n=4,$ демак, $m=0.$ Шундай қилиб, характеристик тенгламанинг ҳамма илдизлари чап ярим текисликда жойлашади, яъни $y\equiv 0$ тривиал ечим Михайлов критерийсига асосан асимптотик турғун бўлади.

Махсус нуқталар. Бизга

$$\frac{dx}{dt}=P(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,y) \tag{12}$$

тенгламалар системаси ёки

$$\frac{dx}{dt}=\frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{13}$$

тенглама берилган бўлиб, $P(x,y)$ ва $Q(x,y)$ функциялар узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда $P(x,y)=0,\ Q(x,y)=0$ шартларни қаноатлантирувчи (x_0,y_0) нуқталар (12) тенгламалар системасининг ёки (13) тенгламанинг ***махсус нуқталари*** дейилади.

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\quad \frac{dy}{dt}=cx+yd \tag{14}$$

тенгламалар системаси ёки

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+yd}{ax+by}\qquad \left(\frac{dx}{dy}=\frac{ax+by}{cx+yd}\right) \tag{15}$$

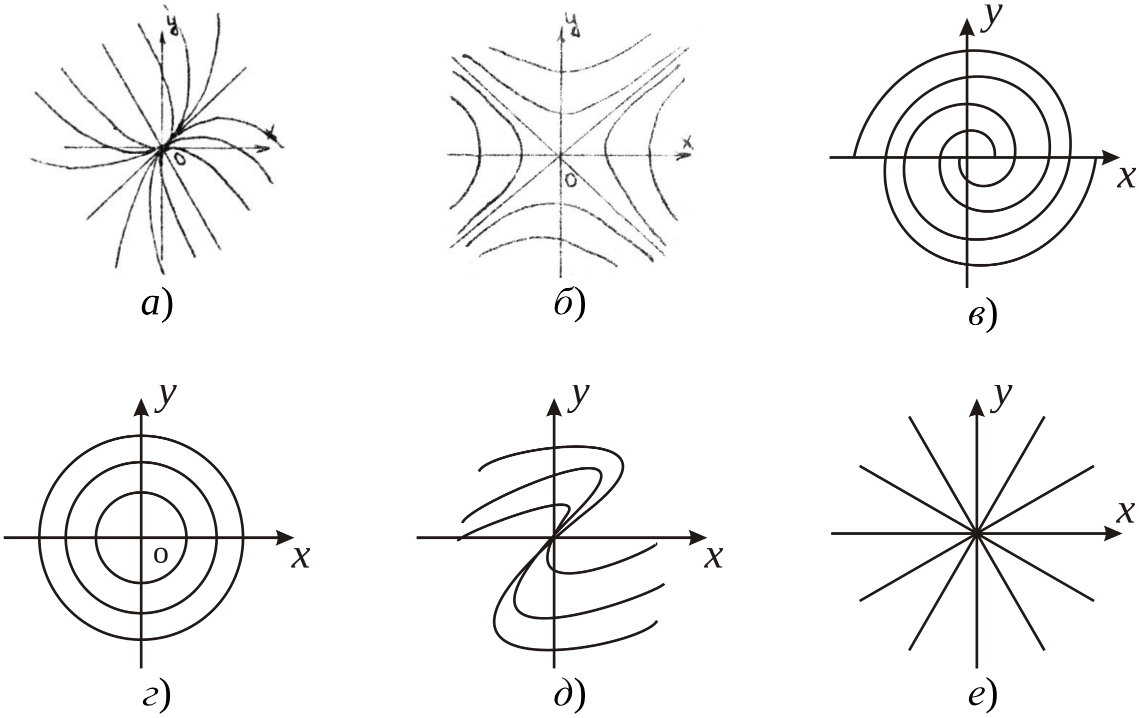
тенгламанинг махсус нуқталарини синфларга ажратиш учун

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix}=0$$

характеристик тенгламанинг илдизларини топиб олиш керак. Агар илдизлар ҳар хил ҳақиқий бўлиб, ишораси ҳар хил бўлса, махсус нуқта – ***турғун*** (20-*а* расм), ишораси ҳар хил бўлса, махсус нуқта – ***эгар*** (20-*б* расм), агар илдизлари фақат мавҳум бўлса, махсус нуқта – ***марказ*** (20-*г* расм), агар илдизлари бир хил ва нолдан фарқли (яъни $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$) бўлса, махсус нуқта – ***айниган тугун*** (20-*д* расм) ёки ($dy/dx=y/x$ бўлганда) ***дикритик тугун*** (*е*-расм) дейилади.

Мисол. $\dot{x}=2x,\ \ \dot{y}=x+y$ системанинг махсус нуқтасини топиб, типини аниқланг.

Ечими. $2x=0,\ \ x+y=0$ системадан махсус нуқта $x=0,\ \ y=0$ эканлиги келиб чиқади. Энди характеристик тенгламани тузиб, илдизини аниқлаймиз.



20-расм.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (2-\lambda)(1-\lambda)=0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2. \qquad (16)$$

Илдизлар ҳар хил ҳақиқий ва ишораси бир хил, демак, $x=0$, $y=0$ махсус нуқта тугун бўлади.

6. $$a_1(x_1,\dots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_1}+\dots+a_n(x_1,\dots,x_n,z)\frac{\partial z}{\partial x_n}=b(x_1,\dots,x_n,z) \qquad (17)$$

хусусий ҳосилали тенгламанинг умумий ечимини топиш учун қуйидаги оддий дифференциал тенгламалар системасининг (яъни (7) тенгламани характеристик тенгламанинг)

$$\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_2}{a_2}=\dots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{dz}{b} \qquad (18)$$

n та эркли биринчи интегралини топиш керак:

$$\begin{gathered} \varphi_1(x_1,\dots,x_n,z)=C_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_n(x_1,\dots,x_n,z)=C_n. \end{gathered} \qquad (19)$$

У ҳолда (17) тенгламанинг умумий ечими ошкормас кўринишда қуйидагича ёзилади:

$$F(\varphi_1,\varphi_2,\dots,\varphi_n)=0. \qquad (20)$$

Бу ерда F – ихтиёрий дифференциалланувчи функция. Хусусан $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ лардан фақат биттаси z га боғлиқ бўлса, (20) тенгламани ўшанисига нисбатан ечиб олиш мумкин.

7. $$a_1\left(x, y, z\right)\frac{\partial z}{\partial x} + a_2\left(x, y, z\right)\frac{\partial z}{\partial y} = b\left(x, y, z\right) \tag{21}$$

дифференциал тенгламани қаноатлантирувчи ва

$$x = u\left(t\right), \quad y = v\left(t\right), \quad z = w\left(t\right)$$

чизиқдан ўтувчи $z = z\left(x, y\right)$ сиртни топиш учун (21) тенгламанинг характеристик тенгламалар системасини тузиш:

$$\frac{dx}{a_1} = \frac{dy}{a_2} = \frac{dz}{b} \tag{23}$$

ва унинг иккита эркли биринчи интегралини

$$\varphi_1\left(x, y, z\right) = C_1, \quad \varphi_2\left(x, y, z\right) = C_2$$

топиш керак. Бу биринчи интеграллардаги x, y, z ларни қўйиб,

$$\varphi_1\left(t\right) = C_1, \quad \varphi_2\left(t\right) = C_2 \tag{25}$$

тенгламаларни оламиз. Бу тенгламалардан t параметрни йўқотиб, $F\left(C_1, C_2\right) = 0$ ифодани оламиз. C_1 ва C_2 ларнинг ўрнига (24) тенгликларнинг чап қисмларини қўйиб, қидирилаётган сиртнинг тенгламасини оламиз.

Мисоллар. *а*) $y\frac{\partial z}{\partial x} - x\frac{\partial z}{\partial y} = 0$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечими. Характеристикалар тенгламасини тузиб, биринчи интегралларни топамиз:

$$\frac{dx}{y} = -\frac{dy}{x}, \quad d\left(x^2 + y^2\right) = 0, \quad x^2 + y^2 = C, \quad u = x^2 + y^2.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими $z = F\left(x^2 + y^2\right)$ кўринишда бўлади.

***б*)** $\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ Хопф тенгламасининг умумий ечимини топинг.

Ечими. Характеристик система

$$dt = \frac{dx}{u} = -\frac{dy}{0}$$

кўринишда бўлиб, биринчи интеграллари $v_1 = u,\ v_2 = x - tu$ бўлади.

Демак, берилган тенгламанинг ихтиёрий ечими

$$F\left(u, x-tu\right)=0$$

кўринишда бўлади.

в) $\left(x-a\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(y-b\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-c$ тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечими. Характеристиклар системасидан

$$\frac{dx}{dt}=x-a,\quad \frac{dy}{dt}=y-b,\quad \frac{dz}{dt}=z-c$$

қуйидагиларни топамиз:

$x=C_1e^t+a,\quad y=C_2e^t+b,\quad z=C_3e^t+c,\quad C_1,\quad C_2,\quad C_3$ лар ихтиёрий ўзгармаслар.

Биринчи интеграллари:

$$u_1=\frac{y-b}{x-a},\quad u_2=\frac{z-c}{x-a}$$

кўринишда бўлиб, берилган тенгламанинг ихтиёрий ечими

$$F\left(\frac{y-b}{x-a},\frac{z-c}{x-a}\right)=0$$

ифода билан берилади.

г) $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=-xy$ тенгламанинг умумий ечимини ва $y=x^2$, $z=x^3$ чизиқдан ўтувчи ечимини топинг.

Ечими. Характеристик тенгламасини тузиб, биринчи интегралларни топамиз:

$$\frac{dz}{dx}=\frac{du}{yz}=\frac{dz}{-xy};$$

$$\frac{x}{y}=C_1,\quad z^2+xy=C_2.$$

Демак, берилган тенгламанинг умумий ечими

$$F\left(\frac{x}{y},z^2+xy\right)=0,$$

F – ихтиёрий функция кўринишида бўлади. Бизда z биринчи интегралларнинг фақат биттаси иштирок этаётгани учун умумий ечимни ошкор кўринишда ёзиш олиш мумкин:

$$z^2+xy=f\left(\frac{x}{y}\right);z=\pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right)-xy},$$

бу ерда f – ихтиёрий функция.

Энди берилган чизиқдан ўтувчи ечимни топиб олиш учун чизиқнинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиб оламиз:

$$x = x, \quad y = x^2, \quad z = x^3.$$

Буни биринчи ифодасига қўйиб x ни йўқотиб қуйидагиларга эга бўламиз:

$$\frac{1}{x} = C_1; \quad x^6 + x^3 = C_2; \quad \frac{1}{C_1^6} + \frac{1}{C_1^3} = C_2.$$

C_1 ва C_2 ларнинг ўрнига интегралларига ифодаларни қўйиб, изланган ечимни оламиз:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^6 + \left(\frac{x}{y}\right)^3 = z^2 + xy.$$

Ляпуновнинг биринчи яқинлашиш бўйича турғунлик ҳақидаги теоремасидан фойдаланиб, нол ечимни турғунликка текширинг.

302. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4}\left(e^x - 1\right) - 9y + x^4 \\ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y + y^4 \end{cases}$

303. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{4}\left(e^x - 1\right) - 9y \\ \dot{y} = \frac{1}{5}x - \sin y \end{cases}$

304. $\begin{cases} \dot{x} = 5x + y\cos y - \dfrac{x^3}{3} \\ \dot{y} = 3x + 2y + \dfrac{x^4}{12} - y^3 e^y \end{cases}$

305. $\begin{cases} \dot{x} = 7x + 2\sin y \\ \dot{y} = e^x - 3y - 1 \end{cases}$

306. $\begin{cases} \dot{x} = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}\sin^2 y \\ \dot{y} = y + 2x \end{cases}$

307. $\begin{cases} \dot{x} = ax - 2y + x \\ \dot{y} = x + y + xy^2 \end{cases}$

Раус-Гурвиц шартларидан ёки Михайлов критерийсидан фойдаланиб, нол ечимни турғунликка текширинг.

308. $y^{IV} + 7y''' + 19y'' + 23y' + 10y = 0$

309. $y^{IV} + 5y''' + 18y'' + 34y' + 20y = 0$

310. $y''' - 3y'' + 12y' + 10y = 0$

311. $y^{IV} + 7y''' + 17y'' + 17y' + 6y = 0$

312. $y^{IV} - 2y''' + y'' + 2y' - 2y = 0$

Берилган тенглама ёки системанинг махсус нуқталарни топинг ва текширинг.

313. $y' = \dfrac{2y-3x}{x-2y}$

314. $\begin{cases} \dot{x} = \ln\dfrac{y^3 - y + 1}{3} \\ \dot{y} = x^2 - y^2 \end{cases}$

315. $\begin{cases} \dot{x} = \ln\left(1 - y - y^2\right) \\ \dot{y} = 3 - \sqrt{x^2 + 8y} \end{cases}$

316. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{\left(x-y\right)^2 + 3} - 2 \\ \dot{y} = e^{y^2 - x} - e \end{cases}$

317. $y' = \dfrac{x^2 + y^2 - 2}{x - y}$

318. $y' = \dfrac{y - \sqrt{1 + 2x^2}}{x + y + 1}$

Тенгламанинг умумий ечимини топинг.

319. $2\dfrac{\partial z}{\partial x} + 5\dfrac{\partial z}{\partial y} = 7$

320. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = xy + z$

321. $y^3\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy^2\dfrac{\partial z}{\partial y} = axz$

322. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2xy\sqrt{a^2 + x^2}$

323. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x} + xy\dfrac{\partial z}{\partial y} = xz$

324. $\left(x^2 + y^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x} = y^2 + z^2$

Берилган чизиқдан ўтувчи ва берилган тенгламани қаноатлантирувчи сиртни топинг.

325. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = x - y, \quad x = 2, \quad z = y^2 + 4$

326. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} + x\dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + y^2, \quad x = 3, \quad z = 1 + 2y + 3y^2$

327. $y\dfrac{\partial z}{\partial x} - x\dfrac{\partial z}{\partial y} = y^2 - x^2, \quad y = 5, \quad z = x^2 - 25$

328. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=x-y, \quad x=4, \quad z=y^2+16$

329. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2, \quad x=15, \quad z=1+2y+3y^2$

330. $xy\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=x+y, \quad x=3, \quad z=y+1$

14-§. 7-ЛАБАРАТОРИЯ ИШИ

Синов учун савол ва топшириқлар

1. Дифференциал тенгламалар системаси ечимининг Ляпунов маъносида турғунлиги таърифини келтиринг.
2. Дифференциал тенгламалар системаси ечимининг Ляпунов маъносида асимптотик турғунлиги таърифини келтиринг.
3. Ляпунов турғунлик ҳақидаги теоремасини келтиринг.
4. Раус-Гувриц шарти ва Михайлов критерийсини келтиринг.
5. Ушбу $a_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+a_2\frac{\partial z}{\partial x_2}+\ldots+a_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=0$ кўринишдаги биринчи тартибли хусусий ҳосилали тенглама қандай ечилади? Шу тенглама учун қўйилган Коши масаласи қандай ечилади?

1. Ляпунов биринчи яқинлашиш бўйича турғунлик ҳақидаги теоремасидан нол ечимни турғунликка текширинг.

1.1. $\begin{cases}\dot{x}=2xy-x+y\\ \dot{y}=5x^4+y^3+2x-3y\end{cases}$

1.2. $\begin{cases}\dot{x}=x^2+y^2-2x\\ \dot{y}=3x^2-x+2y\end{cases}$

1.3. $\begin{cases}\dot{x}=e^{x+2y}-\cos 3x\\ \dot{y}=\sqrt{4+8x}-2e^y\end{cases}$

1.4. $\begin{cases}\dot{x}=\ln\left(4y+e^{-3x}\right)\\ \dot{y}=2y-1+\sqrt[3]{1-6x}\end{cases}$

1.5. $\begin{cases}\dot{x}=\ln\left(3e^y-2\cos x\right)\\ \dot{y}=2e^x-\sqrt[3]{8+12y}\end{cases}$

1.6. $\begin{cases}\dot{x}=tg\left(y-x\right)\\ \dot{y}=2^y-2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\end{cases}$

1.7. $\begin{cases} \dot{x} = tg\left(z-y\right)-2x \\ \dot{y} = \sqrt{9+12x}-3e^{y} \\ \dot{z} = -3y \end{cases}$

1.8. $\begin{cases} \dot{x} = e^{x}-e^{-3z} \\ \dot{y} = 4z-3\sin\left(x+y\right) \\ \dot{z} = \ln\left(1+z-3x\right) \end{cases}$

1.9. $\begin{cases} \dot{x} = x+2y-\sin y^{2} \\ \dot{y} = -x-3y+x\left(e^{x^{2}/2}-1\right) \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} \dot{x} = -x+3y+x^{2}\sin y \\ \dot{y} = -x-4y+1-\cos y^{2} \end{cases}$

1.11. $\begin{cases} \dot{x} = -2x+8\sin^{2} y \\ \dot{y} = x-3y+4x^{3} \end{cases}$

1.12. $\begin{cases} \dot{x} = 3x-22\sin y+x^{2}-y \\ \dot{y} = \sin x-5y+e^{x^{2}}-1 \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} \dot{x} = -10x+4e^{y}-4\cos y^{2} \\ \dot{y} = 2e^{x}-2-y+x^{4} \end{cases}$

1.14. $\begin{cases} \dot{x} = 7x+2\sin y-y^{4} \\ \dot{y} = e^{x}-3y-1+\dfrac{5}{2}y^{2} \end{cases}$

1.15. $\begin{cases} \dot{x} = -\dfrac{3}{2}x+\dfrac{1}{2}\sin 2y-x^{3}y \\ \dot{y} = -y-2x+x^{4}-y^{7} \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} \dot{x} = -2x-x^{5} \\ \dot{y} = 2x-y^{5} \end{cases}$

1.17. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{5}{2}xe^{x}-3y+\sin x^{2} \\ \dot{y} = 2x+ye^{-y^{2}/2}-y^{4}\cos x \end{cases}$

1.18. $\begin{cases} \dot{x} = 5x+y\cos y \\ \dot{y} = 3x+2y-y^{3}e^{y} \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{4}{3}\sin x-7y\left(1-y\right)^{1/3}+x^{3} \\ \dot{y} = 2/3\cdot x-3y\cos y-11y^{5} \end{cases}$

1.20. $\begin{cases} \dot{x} = 4y-x^{3} \\ \dot{y} = -3x-y^{3} \end{cases}$

2. Раус-Гурвиц шартларидан ёки Михайлов критерийсидан фойдаланиб нол ечимни турғунликка текширинг.

2.1. $y'''+y''+y'+2y=0$

2.2. $y'''+2y''+y'+3y=0$

2.3. $y^{\prime\mathrm{V}}+2y'''+4y''+3y'+2y=0$

2.4. $y^{\prime\mathrm{V}}+2y'''+3y''+7y'+2y=0$

2.5. $y^{\prime\mathrm{V}}+2y'''+6y''+5y'+6y=0$

2.6. $y^{\prime\mathrm{V}}+8y'''+14y''+36y'+45y=0$

2.7. $y^{\prime\mathrm{V}}+13y'''+16y''+55y'+76y=0$

2.8. $y^{\prime\mathrm{V}}+3y'''+26y''+74y'+85y=0$

2.9. $y^{V}+3{,}1y'''+5{,}2y''+9{,}8y'+5{,}8y=0$

2.10. $y^{V}+2y^{IV}+4y'''+6y''+5y'+4y=0$

2.11. $y^{V}+2y^{IV}+5y'''+6y''+5y'+2y=0$

2.12. $y^{V}+4y^{IV}+6y'''+7y''+4y'+4y=0$

2.13. $y^{V}+4y^{IV}+9y'''+16y''+19y'+13y=0$

2.14. $y^{V}+4y^{IV}+16y'''+25y''+13y'+9y=0$

2.15. $y^{V}+3y^{IV}+10y'''+22y''+23y'+12y=0$

2.16. $y^{V}+5y^{IV}+15y'''+48y''+44y'+74y=0$

2.17. $y^{V}+2y^{IV}+14y'''+36y''+23y'+68y=0$

2.18. $y^{V}+7y^{IV}+33y'''+88y''+122y'+60y=0$

2.19. $y^{V}+3y^{IV}+5y'''+15y''+4y'+12y=0$

2.20. $y^{IV}+11y'''+41y''+61y'+30y=0$

3. Берилган тенглама ёки системанинг махсус нуқталарини топинг ва текширинг.

3.1. $\begin{cases}\dot{x}=3x\\ \dot{y}=2x+y\end{cases}$ **3.2.** $\begin{cases}\dot{x}=2x-y\\ \dot{y}=x\end{cases}$ **3.3** $\begin{cases}\dot{x}=x+3y\\ \dot{y}=-6x-5y\end{cases}$

3.4. $\begin{cases}\dot{x}=x\\ \dot{y}=2x-y\end{cases}$ **3.5.** $\begin{cases}\dot{x}=-2x-5y\\ \dot{y}=2x+2y\end{cases}$ **3.6.** $\begin{cases}\dot{x}=3x+y\\ \dot{y}=y-x\end{cases}$

3.7. $\begin{cases}\dot{x}=3x-2y\\ \dot{y}=4y-6x\end{cases}$ **3.8.** $\begin{cases}\dot{x}=y-2x\\ \dot{y}=2y-4x\end{cases}$ **3.9.** $y'=\dfrac{2x-x}{3x+6}$

3.10. $y'=\dfrac{2x+y}{x-2y-5}$ **3.11.** $y'=\dfrac{4y^2-x^2}{2xy-4y-8}$ **3.12.** $y'=\dfrac{2y}{x^2-y^2-1}$

3.13. $y'=\dfrac{4x-y}{3x-2y}$ **3.14.** $y'=\dfrac{4x-2y}{x+y}$ **3.15.** $y'=\dfrac{-2x+y}{2y-3x}$

3.16. $\begin{cases}\dot{x}=x^2-y\\ \dot{y}=\ln\left(1-x^2+x^3\right)-\ln 3\end{cases}$ **3.17.** $\begin{cases}\dot{x}=\ln\left(2-y^2\right)\\ \dot{y}=e^x-e^y\end{cases}$

3.18. $\begin{cases} \dot{x} = (2x - y)(x - 2) \\ \dot{y} = xy - 2 \end{cases}$

3.19. $\begin{cases} \dot{x} = \sqrt{x^2 - y^2 + 2} - 2 \\ \dot{y} = arctg\left(x^2 + xy\right) \end{cases}$

3.20. $\begin{cases} \dot{x} = x^2 - y \\ \dot{y} = x^2 - (y - 2)^2 \end{cases}$

4. Тенгламанинг умумий ечимини топинг.

4.1. $2x\frac{\partial z}{\partial x} + (y - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x^2$

4.2. $xy\frac{\partial z}{\partial x} - x^2\frac{\partial z}{\partial y} = yz$

4.3. $x\frac{\partial z}{\partial x} + 2y\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 y + z$

4.4. $\left(x^2 + y^2\right)\frac{\partial z}{\partial x} + 2xy\frac{\partial z}{\partial y} + z^2 = 0$

4.5. $2y^4\frac{\partial z}{\partial x} - xy\frac{\partial z}{\partial y} = x\sqrt{z^2 - 1}$

4.6. $x^2 z\frac{\partial z}{\partial x} + y^2 z\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$

4.7. $yz\frac{\partial z}{\partial x} - xz\frac{\partial z}{\partial y} = e^z$

4.8. $(z - y)\frac{\partial z}{\partial x} + xy\frac{\partial z}{\partial y} = xy$

4.9. $xy\frac{\partial z}{\partial x} + (x - 2z)\frac{\partial z}{\partial y} = yz$

4.10. $y\frac{\partial z}{\partial x} + z\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{x}$

4.11. $\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial x} + tgz\frac{\partial z}{\partial y} = \cos^2 z$

4.12. $(x + z)\frac{\partial z}{\partial x} + (y + z)\frac{\partial z}{\partial y} = x + y$

4.13. $(xz + y)\frac{\partial z}{\partial x} + (x + xz)\frac{\partial z}{\partial y} = 1 - z^2$

4.14. $(y + z)\frac{\partial u}{\partial x} + (z + x)\frac{\partial u}{\partial y} + (x + y)\frac{\partial u}{\partial z} = u$

4.15. $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} + (z + u)\frac{\partial u}{\partial z} = xy$

4.16. $(u-x)\dfrac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\dfrac{\partial u}{\partial y}-z\dfrac{\partial u}{\partial z}=x+y$

4.17. $\cos y\dfrac{\partial z}{\partial x}+\cos x\dfrac{\partial z}{\partial y}=\cos x\cos y$

4.18. $xz\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}=x$

4.19. $xy\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=-x\left(1+x^2\right)$

4.20. $x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=-y^2$

5. Берилган чизиқдан ўтувчи ва берилган тенгламани қаноатлантирувчи сиртни топинг.

5.1. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=x, \quad x=0, \quad z=y^2$

5.2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-2y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2, \quad y=1, \quad z=x^2$

5.3. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-xy, \quad x=2, \quad z=y^2+1$

5.4. $tgx\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z, \quad y=x, \quad z=x^3$

5.5. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z^2\left(x-3y\right), \quad x=1, \quad yz+1=0$

5.6. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2, \quad y=-2, \quad z=x-x^2$

5.7. $yz\dfrac{\partial z}{\partial x}+xz\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy, \quad x=a, \quad y^2+z^2=a^2$

5.8. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}-xy\dfrac{\partial z}{\partial y}=2xz, \quad x+y=2, \quad yz=1$

5.9. $z\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(z^2-x^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}+x=0, \quad y=x^2, \quad z=2x$

5.10. $\left(y-z\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(z-x\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y, \quad z=y=-x$

5.11. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(xz+y\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=z, \quad x+y=2z, \quad xz=1$

5.12. $y^2\dfrac{\partial z}{\partial x}+yz\dfrac{\partial z}{\partial y}+z^2=0, \quad x-y=0, \quad x-yz=1$

5.13. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=y, \quad y=2z, \quad x+2y=z$

5.14. $\left(y+2z^2\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}-2x^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2, \quad x=z, \quad y=x^2$

5.15. $\left(x-z\right)\dfrac{\partial z}{\partial x}+\left(y-z\right)\dfrac{\partial z}{\partial y}=2z, \quad x-y=2, \quad z+2x=1$

5.16. $xy^3\dfrac{\partial z}{\partial x}+x^2z^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^3z, \quad x=-z^3, \quad y=z^2$

5.17. $\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=4, \quad y^2=z, \quad x=0$

5.18. $x\dfrac{\partial z}{\partial x}-y\dfrac{\partial z}{\partial y}=x-y, \quad x=1, \quad z=y^2+1$

5.19. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}+x\dfrac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2, \quad x=1, \quad z=1+2y+3y^2$

5.20. $y\dfrac{\partial z}{\partial x}-x\dfrac{\partial z}{\partial y}=y^2-x^2, \quad y=1, \quad z=x^2-1$

МАСАЛАЛАРНИ ЕЧИШДА ЗАРУР БЎЛАДИГАН ФОРМУЛАЛАР

I. Тригонометрик функциялар иштирокидаги формулалар.

1. $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$

2. $tg\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

3. $ctg\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

4. $1+tg^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

5. $1+ctg^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

6. $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

7. $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

8. $tg2\alpha=\dfrac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

9. $\sin\alpha\sin\beta=1/2\left[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right]$

10. $\cos\alpha\cos\beta=1/2\left[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right]$

11. $\sin\alpha\cos\beta=1/2\left[\sin(\alpha-\beta)+\sin(\alpha+\beta)\right]$

II. Тригонометрик ва гиперболик фунцияларни кўрсаткичли функция орқали ифодалаш

1. $\cos x=1/2\cdot\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]$

2. $\sin x=1/(2i)\cdot\left[e^{ix}+e^{-ix}\right]$

3. $chx=1/2\cdot\left[e^{x}+e^{-x}\right]$

4. $\sin x=1/2\cdot\left[e^{x}+e^{-x}\right]$

III. Комплекс сонниng тригонометрик формаси ва Муавр формуласи

1. $z=x+iy,\quad i^2=-1$

2. $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),\quad r=|z|=\sqrt{x^2+y^2},\quad \varphi=\arg z,$

$\arg z=\arg z+2k\pi,\quad (k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \ldots),\ -\pi<\arg z<\pi,$

$$\arg z=\begin{cases} arctg\dfrac{x}{y}, & x>0, \\ \pi+arctg\dfrac{x}{y}, & x<0, \quad y\ge 0, \\ -\pi+arctg\dfrac{x}{y}, & x<0, \quad y<0, \\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0, \quad y>0, \\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0, \quad y<0. \end{cases}$$

3. $z^n=r^n\left(\cos n\varphi+i\sin n\varphi\right);$

4. $\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{n}\left(\cos\dfrac{\varphi+2m\pi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi+2m\pi}{n}\right), \quad m=0,1,2,\ldots,n-1, \quad \varphi=\arg z.$

IV. Ҳосила топишнинг асосий қоидалари

1. $c'=c, \; c=const$

2. $\left(cu\right)'=cu'$

3. $\left(u+v-w\right)'=u'+v'-w'$

4. $\left(uv\right)'=u'v+v'u$

5. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}, \quad v\ne 0$

6. $\left(u^n\right)'=nu^{n-1}u'$

V. Ҳосилалар жадвали

1. $\left(x^n\right)'=nx^{n-1}$, ($n$ – ўзгармас сон)

2. $\left(\sin x\right)'=\cos x$

3. $\left(\cos x\right)'=\sin x$

4. $\left(tg\,x\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$

5. $\left(ctg\,x\right)'=\dfrac{1}{\sin^2 x}$

6. $\left(\arcsin x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

7. $\left(\arccos x\right)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

8. $\left(artg\,x\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

9. $\left(arcctg\,x\right)' = \dfrac{1}{1-x^2}$

10. $\left(a^x\right)' = a^x \ln a, \quad a>0, \quad a\neq 1, \quad \left(e^x\right)' = e^x$

11. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}, \quad a>0, \quad a\neq 1, \quad \left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$

12. $\left(sh\,x\right)' = ch\,x$

13. $\left(ch\,x\right)' = sh\,x$

14. $\left(th\,x\right)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$

15. $\left(cth\,x\right)' = \dfrac{1}{sh^2 x}$

VI. Интеграллар жадвали

1. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad \left(n\neq -1\right)$

2. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C, \quad \left(x\neq 0\right)$

3. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} arctg\,x + C, \\ -arcctg\,x + C \end{cases}$

4. $\int \dfrac{dx}{1-x^2} = \dfrac{1}{2}\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + C$

5. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C, \\ -\arccos x + C \end{cases}$

6. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm 1}} = \ln\left|\left(x + \sqrt{x^2 \pm 1}\right)\right| + C$

7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C, \quad \left(a>0, \quad a\neq 1\right), \quad \int e^x dx = e^x + C$

8. $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

9. $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$

11. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$

12. $\int sh\,x\,dx = ch\,x + C$

13. $\int ch\,x\,dx = sh\,x + C$

14. $\int \dfrac{dx}{sh^2 x} = -cth\,x + C$

15. $\int \dfrac{dx}{ch^2 x} = th\,x + C$

16. $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{2}arctg\,\dfrac{x}{a} + C, \quad \left(a\neq 0\right)$

17. $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{a+x}{a-x} \right| + C, \quad (a \neq 0)$

18. $\int \frac{xdx}{a^2 \pm x^2} = \pm \frac{1}{2} \ln \left| a^2 \pm x^2 \right| + C$

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (a > 0)$

20. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

21. $\int \frac{xdx}{\sqrt{a^2 \pm x^2}} = \pm \sqrt{a^2 \pm x^2} + C$

22. $\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 + x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$

23. $\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C$

24. $\int\limits_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b ,$

$F(x)$ – функция, $f(x)$ – функциянинг бошланғичи

25. $\int\limits_a^b f(x) g'(x) dx = f(x) g(x) \Big|_a^b - \int\limits_a^b f'(x) g(x) dx.$

АДАБИЁТЛАР

1. Гутер Р.С., Яппольский А.Р. Дифференциал тенгламалар. -Т.: Ўқитувчи, 1978 й. 324 б.
2. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И. Сборник задач по обыкновенным дифференциальным уравнениям. -М.: Высшая школа, 1978 г. 319 с.
3. Маматов М.Ш., Назаров Б.Н., Иноятов А.А., Югай Л.П. Дифференциал тенгламалардан лаборатория иши. Биринчи тартибли дифференциал тенгламалар. -Т.: ТошДУ, 1980 й., 36 б.
4. Маматов М.Ш., Назаров Б.Н., Иноятов А.А., Югай Л.П. Дифференциал тенгламалардан лаборатория иши. Юқори тартибли дифференциал тенгламалар. -Т.: Университет, 1992 й., 36 б.
5. Понтрягин Л.С. Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Наука, 1974 г., 331 с.
6. Филлипов А.Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. -М.: Наука, 1985 г., 128 с.
7. Пономарев К.К. Составление и решение дифференциальных уравнений инженерно-технических задач. -М.: Высшая школа, 1988 г., 64 с.
8. Салохиддинов М.С., Насритдинов Г.Н. Оддий дифференциал тенгламалар. -Т.: Ўқитувчи, 1982 й., 448 б.
9. Степанов В.В. Курс дифференциальных уравнений. -М.: Гиз. физ.-мат. литературы. 1953 г.
10. Теоретическая механика. -М.: Высшая школа, 1988 г., 64 с.
11. Югай Л.П., Маматов М.Ш., Назаров Б.Н. Лабораторные занятия по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Уравнения первого порядка. -Т.: ТашГУ, 1990 г., 36 с.
12. Югай Л.П., Маматов М.Ш., Назаров Б.Н. Лабораторные занятия по обыкновенным дифференциальным уравнениям. Уравнения высокого порядка. -Т.: ТашГУ, 1990 г., 40 с.