O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

Matematik analiz kafedrasi

“ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR”

fanidan

O’QUV–USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi:	**100 000 - Gumanitar**
Ta’lim sohasi:	**130 000 – Matematika**
Ta’lim yo’nalishi:	**5130100 - Matematika**

Namangan-2021

O‘quv uslubiy majmua 2016 yil O‘zR OO‘MTV tomonidan № BD 5130100-3.04. raqami bilan 2016 yil 20 avgustagi 5- sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan fan dasturi asosida ishlab chiqilgan.

Tuzuvchilar: **N.Xatamov** – fizika-matematika fanlari Nomzodi

A.Mashrabboyev – fizika-matematika fanlari nomzodi

Taqrizchilar: **B.Samatov**– fizika-matematika fanlari doktori, dotsent.

Yu.Toshmirzayev – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

O‘quv uslubiy majmua Namangan davlat universiteti Kengashininig 2021 yil "…" avgustdagi "..." - son yig‘ilishida ko‘rib chiqilgan va foydalanishga tavsiya etilgan.

MUNDARIJA

MA'RUZA №1

MAVZU: Differensial tenglama haqida tushuncha. Mashqlar

Reja:

1. Differensial tenglama xaqida tushuncha.
2. Differensial tenglamaga olib kelinadigan ba'zi masalalar.
3. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari.

Tayanch so'z va iboralar: *differensial tenglamalar, differensial tenglamaga olib kelinadigan ba'zi masalalar, oddiy differensial tenglama, xususiy xosilali differensial tenglama, differensial tenglama tartibi, differensial tenglama yechimi yoki integrali, integral egri chiziq.*

1.Tabiatda uchraydigan turli jarayonlar (avtomobil harakati, tayyorani uchishi, fizik, ximik va biologik jarayonlar va h.k.) o'z harakat qonuniga ega. Ba'zi jarayonlar bir xil qonun bo'yicha sodir bo'lishi mumkin, bu hol esa ularni ishni o'rganishni osonlashtiradi. Ammo jarayonlarni tafsiflaydigan qonunlarni to'g'ridan-to'g'ri topish har doim ham mumkin bo'lavermaydi. Bu harakat qonunlarini tavsiflovchi no'malum funksiyalar va hosilalarini o'zaro bog'lovchi munosabatlar differensial tenglamalar deyiladi. Jumladan

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

birinchi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

$F(x, y, y') = 0$ birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilmagan oddiy differensial tenglama deyiladi.

$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ - n-chi tartibli yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama deyiladi.

$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ - n-chi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

Agar $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ yoki $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ funksiyalar $x, y, y', ..., y^{(n)}$ argumentlariga nisbatan chiziqli bo'lsa tegishli differensial tenglama chiziqli deyiladi.

2. Differensial tenglamaga olib keladigan ba'zi masalalar.

1-masala. Massasi m bo'lgan jism $v(0) = v_0$ boshlang'ich tezlik bilan biror balandlikdan tashlab yuborilgan. Jism tezligining o'zgarish qonunini toping.

Nyutonning 2-qonuniga ko'ra

$$m\frac{dv}{dt} = F \ .$$

Bu yerda F -jismga ta'sir etayotgan kuchlar yig'indisi.

Jismga faqat 2 ta kuch ta'sir etishi mumkin deb faraz qiliylik.

1) havoning qarshiligi: $F_1 = -kv, \ k > 0$

2) yerning tortish kuchi: $F_2 = mg$

Shunday qilib, matematik nuqtai-nazardan

a) $F = F_2$;

b) $F = F_1$;

c) $F = F_1 + F_2$ teng bo'lishi mumkin.

a) $F = F_2 \Rightarrow m\dfrac{dv}{dt} = mg \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = g \Rightarrow \int dv = \int gdt \Rightarrow v_1(t) = gt + C$,

$$v(0) = v_0 \Rightarrow v_1(0) = C = v_0, \ C = const \ .$$

$$v_1(t) = gt + v_0$$

b) $F = F_1 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int dt \Rightarrow \ln|v| = -\frac{k}{m} + \ln C \Rightarrow v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$,

$$v(0) = v_0 \Rightarrow v(0) = C = v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

c) $F = F_1 + F_2 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Rightarrow \int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int dt \Rightarrow -\frac{m}{k}\int \frac{d(g - \frac{k}{m}v)}{g - \frac{k}{m}v} = t + \ln C \Rightarrow$

$$-\frac{m}{k}\ln\left|g - \frac{k}{m}v\right| = t + \ln C \Rightarrow g - \frac{k}{m}v = Ce^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow$$

$$-\frac{k}{m}v = Ce^{-\frac{k}{m}t} - g \Rightarrow v_2(t) = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k},\ v(0) = v_0,\ C_1 = -\frac{m}{k}C.$$

$$v_2(0) = C_1 + \frac{mg}{k} = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0 - \frac{mg}{k} \Rightarrow v_2(t) = (v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

Endi differensial tenglamalar fanining asosiy tushuncha va ta’riflarini keltiramiz.

3. Ta’rif. *Erkli o‘zgaruvchi va noma'lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallarini bog‘lovchi munosabat differensial tenglama deyiladi.*

Agar differensial tenglamadagi no'malum funksiya faqat bitta erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama *oddiy differensial tenglama* deyiladi.

Agar differensial tenglamadagi no'malum funksiya ikki yoki undan ortiq erkli o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama *xususiy xosilali differensial tenglama* deyiladi.

Ta’rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibi *tenglamaning tartibi* deyiladi.

Misollar.

1) $y'' - y'\cos x - x^2 y = 0$ ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama.

2) $x(1-y^2)dx + y(1+x^2)dy = 0$ birinchi tartibli oddiy differensial tenglama.

3) $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$ birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama bo‘ladi $(z = z(x, y))$.

Ta’rif. Differensial tenglamaning *yechimi* yoki *integrali* deb tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Ta’rif. Differensial tenglama yechimining grafigi *integral egri* chiziq deyiladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Differentsial tenglamalarga keltiriladigan ba`zi (fizika, matematika, biologiya, iqtisodiyotga oid) masalalar.

2. Bir jinsli va umumlashgan bir jinsli differensial tenglamalar.

Glossariy

Differensial tenglama - Matematika, fizika va texnikaning ko‘pchilik masalalarini yechishda ko‘pincha izlanayotgan va berilgan o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi funksional bog‘lanishni birdaniga topish qiyin bo‘ladi, lekin erkli o‘zgaruvchi izlanayotgan funksiya va uning xosilalarini bog‘lovchi tenglama tuzishga muvaffaq bo‘linadi. Bunday tenglamalar differensional tenglamalar deyiladi.

Differensial tenglama tartibi - Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibi tenglamaning tartibi deyiladi.

Birinchi tartibli differensianal tenglamalar - erkli o‘zgaruvchi, izlanayotgan funksiya va uning birinchi tartibli funksiyasini o‘zaro bog‘laydi. Shuning uchun uni $F(x, y, y') = 0$ ko‘rinishda yoziladi.

Differensial tenglamaning yechimi - differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan xar qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensianal tenglamalarni yechish – tenglamani ayniyatga aylantiradigan barcha funsiyalarni topish demakdir.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y - xy' = a(1 + x^2 y')$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglamalar deb nimaga aytiladi?
2. Quyidagi $y^{(n)} = f(x_1 y_1 y^1, .y^{(n-1)})$ tenglama qanday tenglama turiga kiradi?
3. Oddiy differensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
4. Xususiy xosilali differensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
5. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb nimaga aytiladi?

Amaliy mashg’ulot-1

1. Quyidagi keltirilgan masalalarni yechish uchun grafik chizib, qidirilayotgan funksiyani $y = y(x)$ deb belgilab, agar grafik dekart koordinatalarida chizilgan bo‘lsa, masala keltirilgan miqdorlarni x, y, y' deb belgilab, ular orasida bog‘lanish hosil qilish kerak. U holda masalada keltirilgan fikr diffrensial tenglamaga keltiriladi, undan qidirilayotgan funksiya $y = y(x)$ ni topish mumkin.

2. Fizik masalada birinchi bo‘lib, aniqlash kerakki, qaysi o‘zgaruvchini erkli (x) va qaysi o‘zgaruvchini qidirilayotgan funksiya (u) deb olish kerak. So‘ng erkli o‘zgaruvchi x Δx ortirma olsa, qidirilayotgan funksiya u qancha orttirma oladi:

$$y(x+\Delta x)-y(x).$$

Bu ifodani Δx ga bo‘lib va $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tib, differensial hosil qilamiz. Ko‘pgina masalalarda shunday qo‘shimcha shartlar borki, ular orqali differensial tenglama yechimidagi o‘zgarmaslarning qiymatlarini aniqlash mumkin. Ba'zan differensial tenglama hosilasini fizik ma'nosi orqali juda oson tuzilishi ham mumkin: axir t-vaqt, $\frac{dy}{dt}-y$ miqdorning vaqt bo‘yicha o‘zgarish tezligi.

Ba'zi masalalarda, differensial tenglama tuzish uchun fizik qonunlardan foydalanish mumkin. Odatda ular masalalar oldida keltiriladi, yoki juda keng tarqalgan, hammaga tanish bo‘ladi.

Masalan, Nyutonning ikkinchi qonuni, harakat miqdorining o‘zgarishi qonuni va hakazo.

Misol 1. 10 litr suv solingan idishga 2 litr minut tezlikda aralashma kelib tushadi, aralashmaning har bir litrida 0,3 kg tuz bor. Idishga tushayotgan aralashma suv bilan aralashadi va yangi aralashma shunday tezlik bilan idishdan chiqib ketadi. Idishda 5 minutdan keyin qancha tuz bo‘ladi?

yechish: t-vaqt bo‘lsin, u(t) t- vaqt ichida idishdagi tuz miqdori bo‘lsin. (tajriba boshidan beri) vaqt t dan $t+\Delta t$ ga o‘zgarganda idishdagi tuz o‘zgarishi $y(t+\Delta t)-y(t)$ ni topaylik. 1-minutda idishga 2 litr aralashma qo‘shiladi. Bu $2\Delta t$ hajmda $0,3\cdot 2\cdot \Delta t=0,6\Delta t$ tuz bor. Ikkinchi tomondan Δt vaqtdan so‘ng idishdan $2\Delta t$ aralashma chiqib ketadi. t vaqtda (10 litr) suvda $y(t)$ kg tuz bo‘lsin. $2\Delta t$ litrli chiqib ketayotgan aralashmada $0,2\cdot \Delta t\cdot y(t)$ tuz bo‘lishi mumkin, agar bu Δt vaqt ichida idishdagi tuz miqdori o‘zgarmas. Lekin bu t vaqt ichidagi tuz miqdori $\Delta t \to 0$ da cheksiz kichik (chik) miqdorga o‘zgaradi. Shuning uchun chiqib ketayotgan $2\Delta t$ litr suyuqlikda

$$0,2t\cdot(y(t)+2) \text{ kg}$$

tuz bo‘ladi, $\alpha \to 0$, agar $\Delta t \to 0$ bo‘lsa. Shunday qilib, $(t,t+\Delta t)$ vaqt ichida idishga kirib kelayotgan suyuqlik ichida $0,6\Delta t$ tuz chiqib ketayotgan suyuqlik ichida

$0,2\cdot \Delta t(y(t)+\alpha)$ kg tuz mavjud.

Bu vaqt ichida tuz miqdorini o‘zgarishi.

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=0,6-0,2(y(t)+\alpha), \quad \Delta t \to 0.$$

$$y'(t)=0,6=0,2y(t).$$

Chunki $\alpha \to 0, \quad \Delta t \to 0$.

Bu tenglamani yechib; $y(t)=3-ce^{-0,2t}$ funksiyani olamiz. $t=0$ tuz yo‘q edi, shuning uchun $y(0)=3-ce^{-0,2\cdot 0}=3-c=0; \quad c=3$ ya'ni, $y=3-3e^{-0,2t}$. $t=5$ minutda idishda $y(5)=3-e^{-0,2\cdot 3}=3-3e^{-1}\approx 1,9$ kg tuz qoladi.

Misol-2: O‘q $v_0=400$ m/sek tezlik bilan harakatlanib, $h=20$ sm qalinlikdagi devorni teshib, undan $v_1=100$ m/sek tezlik bilan uchib chiqadi. Devorning qarshilik kuchi o‘qning harakat tezligi kvadratiga proporsional deb olib, o‘qning devor ichida harakatlanish vaqti T ni toping:

yechish: Nyutonning ikkinchi qonuniga binoan o‘q harakatning differensial tenglamasi

$$m\frac{dv}{dt}=-kv^2 \qquad (1)$$

ko‘rinishga ega (manfiy ishora devorning qarshilik kuchi o‘qning tezligiga qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lgani uchun olindi).

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. O‘zgaruvchilarni ajratib va $\frac{k}{m}$ ni k_1 orqali belgilab,

$$\frac{dv}{v^2} = k_1 dt$$

ni hosil qilamiz, bu yerdan

$$-\frac{1}{v} = -k_1 t - C \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{v} = k_1 t + C.$$

t = 0 da v=v_o boshlang‘ich shartdan S = 1 /v_0 ni aniqlaymiz; shuning uchun

$$\frac{1}{v} = k_1 t + \frac{1}{v_0} \qquad (2)$$

Agar bu munosabatda $v = v_1$ deb olsak, $t = T$ bo‘ladi va binobarin, izlanayotgan T vaqt $\frac{1}{v_1} = k_1 T + \frac{1}{v_0}$, tenglamadan topiladi, bu yerda

$$T = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) \qquad (3)$$

T uchun topilgan ifodada noma'lum k_1 kattalik ishtirok etyapti. Uni aniqlash uchun (2) umumiy yechimini quyidagicha qayta yozib olamiz:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + k_1 v_0 t},$$

bu yerda v tezlik $\frac{dx}{dt}$ bilan almashtirilgan. Bu tenglamadan integrallab topamiz:

$$x = \frac{1}{k_1}\ln(1 + k_1\ v_0 t) + c_1.$$

$t = 0$ da $x = 0$ (o‘q devorga kiradi) va shuning uchun $C_1 = 0,\ t = T$ va $X = h$ (o‘q devordan chiqyapti) shuning uchun $h = \frac{1}{k_1}\ln(1 + k_1 v_0 T)$. (3) tenglamadan

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + k_1 v_0 T},$$

bu yerdan $1 + k_1 v_0 T = \frac{v_0}{v_1}$. Shuning uchun h ning ifodasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$h = \frac{1}{k_1}\ln\frac{v_0}{v_1} \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{k_1} = \frac{h}{\ln\frac{v_0}{v_1}}.$$

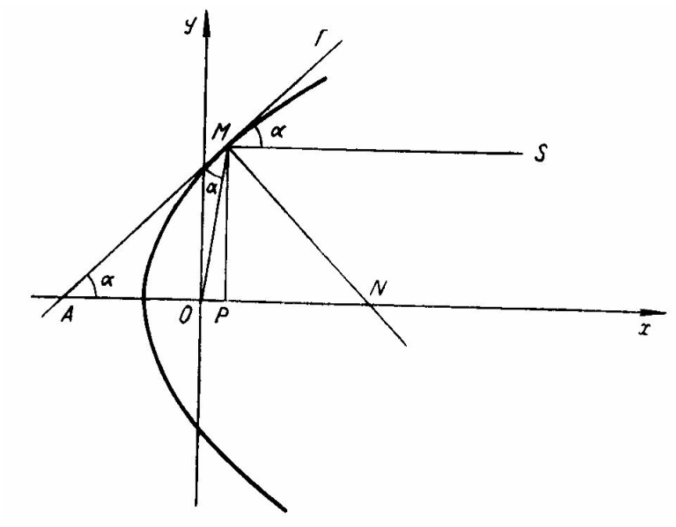
$\frac{1}{k_1}$ ning topilgan qiymatini (3) ifodaga qo‘yib, izlanayotgan T vaqtni topish uchun formula hosil qilamiz.

$$T = \frac{h}{\ln\frac{v_0}{v_1}}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) \qquad (4)$$

Sonli hisoblashlarni bajarib

$\left(v_0 = 400\frac{м}{сек},\ v_1 = 100\frac{м}{сек}, h = 20\,\text{см деб олиб}\right) T = 0,00108$ sek in topamiz.

Misol-3: Aylanish o‘qining O nuqtasiga joylashtirilgan yorug‘lik manbaidan chiqadigan hamma nurlar reflektor ko‘zgusidan bu o‘qqa parallel bo‘lib qaytishi uchun reflektor ko‘zgusini qaysi aylanish sirti bo‘yicha silliqlash kerak.



yechilishi: Izlanayotgan aylanish sirtining meridian kesimini olamiz. Koordinatalar markazini 0 nuqtada tanlaymiz, *OX* o‘qni esa aylanish o‘qi bo‘yicha yo‘naltiramiz. Agar *OX* o‘q bilan egri chiziqning $M(x,y)$ nuqta siga o‘tkazilgan AT urinma orasidagi burchakni α orqali belgilasak, u holda masala shartiga ko‘ra: $<SMT=\alpha$. Ikkinchi tomonidan, burchaklar tushish burchagi (<OMN) va qaytish burchagi (<NMS) ni $\pi/2$ ga to‘ldiruvchi burchaklar bo‘lgani sababli $<OMA=<SMT$ va bundan $<OMA=\alpha$. Shunday qilib, OAM uchburchak teng yonli va OA=OM. Chizmadan: $OA = AP - OP = y/y' - x, \quad OM = \sqrt{x^2+y^2}$, natija ushbu differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2+y^2} \qquad (1)$$

yoki differensiallarda yozsak,

$$ydx - (x + \sqrt{x^2+y^2})dy = 0.$$

Bu *x* va *u* ga nisbatan bir jinsli tenglama. $x = yz$ va mos ravishda $dx = zdy + ydz$ o‘rniga qo‘yish yordamida bu tenglamani o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiramiz:

$y(zdy + ydz) = y(z + \sqrt{z^2+1})dy$ yoki $ydz = \sqrt{z^2+1}dy$, bu yerdan

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2+1}} = \frac{dy}{y}$$ yoki $\ln(z + \sqrt{z^2+1}) = \ln y - \ln c.$

ya'ni

$$z+\sqrt{z^2+1}=\frac{y}{c}.$$

irratsionallikni yo‘qotib, bu tenglamani soddalashtiramiz:

yechilishi: Izlanayotgan aylanish sirtining meridian kesimini olamiz, *OX*.

$$\left(\frac{y}{c}-z\right)^2=\sqrt{z^2+1} \quad \text{yoki} \quad \frac{y^2}{c^2}-\frac{2yz}{c}=1.$$

Eski *x* o‘zgaruvchiga qaytib, quyidagi umumiy integralni hosil qilamiz:

$$y^2=2c\left(x+\frac{c}{2}\right). \qquad (2)$$

Bu simmetriya o‘qi *OX* o‘q bilan ustma-ust tushadigan, parametri p=c bo‘lgan va uchi koordinatalar boshidan chap tomonda $\frac{c}{2}$ masofada yotadigan parabolalar oilasidir. Demak, aylanish sirtlari aylanish paraboloidlari bo‘lib, ularning

$$y^2+z^2=2c\left(x+\frac{c}{2}\right)$$

tenglamalari ma'lum qoida bo‘yicha u^2 ni y^2+z^2 orqali almashtirish bo‘yicha hosil bo‘ladi.

Agar ko‘zguning diametri d va chuqurligi h berilgan bo‘lsa, parabola tenglamasidan $x+\frac{c}{2}=h,\ y=\frac{d}{2}$ deb, *S* ning qiymatini aniqlash mumkin: $c=\frac{d^2}{8h}$, u holda parabola tenglamasi $y^2=\frac{d^2}{4h}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right)$ (xususiy integral), aylanish paraboloidining tenglamasi esa

$$y^2+z^2=\frac{d^2}{h^2}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right) \qquad (3)$$ bo‘ladi.

1. $y'=(x+y)^2$ j: $arctg(x+y)=x+c.$
2. $y'=(8x+2y+1)^2.$ j: $8x+2y+1=2tg(2x+c).$
3. $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$ j: $x+2y+3\cdot\ln/2x+3y-7/=c.$
4. $(2x-y)dx+(4x-2y+3)dy=0.$ j: $5x+10y+c=3\ln|10x-5y+6|.$
5. $y'=10^{x+y}$ j: $10^x+10^{-y}=c.$
6. $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$ j: $\ln\left|tg\frac{y}{4}\right|=c-2\sin\frac{x}{2}.$
7. $z'=\cos(z-t).$ j: $ctg\frac{z-t}{2}=t+c, \quad z-t=2nk, \quad k\in Z$
8. $x'-x=2t-3.$ j: $2t+x-1=ce^t.$
9. $(t+2x)x'=1.$ j: $t+2x+2=ce^x$
10. $S'=\sqrt{4t+2s-1}$ j: $\sqrt{4t+2s-1}-2\ln\left(\sqrt{4t+2s-1}+2\right)=t+c.$

TEST

Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?	* Erkli o‘zgaruvchi va no’malum funksiya va uning hosilalari yoki differensiallarini	Erkli o‘zgaruvchi va no’malum funksiya bog‘lovchi munosabatlar	Noma’lum funksiyani bog‘lovchi munosabat	Erkli o‘zgaruvchi va no’malum funksiya hosilalari yoki differensiallarini

	bog‘lovchi munosabatlar differensial tenglama deyiladi.	differensial tenglama deyiladi.	differensial tenglama deyiladi.	bog‘lovchi munosabatlar differensial tenglama deyiladi.
Oddiy differensial tenglama deb nimaga aytiladi?	* Agar no’malum funksiya bitta erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.	Agar no’malum funksiya ikkita erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.	Agar no’malum funksiya uchta erkli erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.	Agar no’malum funksiya beshta erkli erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.
Differensial tenglama erkli o‘zgaruvchiga nechta erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, xususiy hosila differensial tenglama deyiladi?	*2 yoki undan ortiq	3 yoki undan ortiq	1 yoki undan ortiq	4 yoki undan ortiq
Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibi nima deb ataladi?	* Differensial tenglama tartibi	Differensial tenglama o‘lchami	Differensial tenglama o‘lchovi	Differensial tenglama yechimi
Differensial tenglamaning yechimi eki integrali deb tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan nimaga aytiladi?	* Har qanday differensiallanuvchi funksiyaga aytiladi.	Har qanday uzilishga ega bo‘lgan funksiyaga aytiladi.	Har qanday funksionalga aytiladi.	Har qanday uzluksiz funksiyaga aytiladi.
quyidagi tenglama nechanchi tartibli differensial tenglama $y''-y'\cos x - x^2 y = 0$	*2-tartibli	1-tartibli	3-tartibli	4-tartibli
quyidagi differensial tenglamaning tartibini aniqlang: $x(1-y^2)dx - y(1-x^2)dy = 0$	*1-tartibli	3-tartibli	5-tartibli	0-tartibli
quyidagi differensial tenglamada erkli o‘zgaruvchi nechta: $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$	*2 ta	5 ta	3 ta	1 ta
Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamani umumiy ko‘rinishini aniqlang.	* $F(x,y,y')=0$	$F(x,y,c,)=0$	$\Phi(y,y')=0$	$y'=f(x,y)$
Birinchi tartibli differensial tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasini aniqlang:	* $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\big\|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ x\big\|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y'\big\|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y''\big\|_{x=x_0} = y_0' \end{cases}$

MA'RUZA №2

MAVZU: O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.

Reja:

1. Birinchi tartibli differensial tenglama.
2. O‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama.
3. O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama.

Tayanch so’z va iboralar: *birinchi tartibli differensial tenglama, o‘zgaruvchilari ajraladigan differensialtenglamalar, o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama, o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama, birinchi tartibli differensial tenglama xususiy yechimi, birinchi tartibli differensial tenglama umumiy yechimi.*

1. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

bu yerda x-erkli o‘zgaruvchi, y-no'malum funksiya va $y' = \frac{dy}{dx}$-noma’lum funksiya hosilasi.

Agar (1) ni y' ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, u holda

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

bo‘ladi.

(2) dan differensial ishtirok etgan ko‘rinishga o‘tish oson, ya'ni

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3}$$

ko‘rinishga.

Haqiqatan, agar $y' = \frac{dy}{dx}$ desak, $f(x, y)dx - dy = 0$, bu yerdan $M(x, y) = f(x, y)$, $N(x, y) = -1$va aksincha (3) dan (2) ga o‘tish oson.

Differensial tenglamani umuman aytganda, bitta funksiya emas, balki funksiyalarning butun bir to‘plami qanoatlantirishi mumkin. Ulardan birini ajratib ko‘rsatish kerak, yani $x = x_0$ bo‘lganda $y = y_0$ ko‘rinishdagi shart berilishi kerak. Bu shart boshlang‘ich shart deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$y\big|_{x=x_0} = y_0 \tag{4}$$

Ushbu,

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (2) \\ y\big|_{x=x_0} = y_0 & (4) \end{cases}$$

(2) , (4) masala *Koshi masalasi* yoki *boshlang‘ch masala* deyiladi.

Teorema.(Koshi yoki yechimning $\exists$ va ! haqidagi teorema). Agar (x_0, y_0) nuqtani o‘z ichiga olgan $D \subset R^2$ sohada $f(x, y)$ funksiya uzluksiz va uzluksiz $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda (2) differensial tenglamaning (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ yechimi $\exists$ va ! bo‘ladi.

Ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning *umumiy yechimi* deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, C)$, $C = const$ funksiyaga aytiladi:

1) u ixtiyoriy o‘zgarmas C ning mumkin bo‘lgan har qanday qiymatida differensial tenglamani qanoatlantirsa;

2) boshlang‘ich $y\big|_{x=x_0} = y_0$ shart qanday bo‘lganda ham undan o‘zgarmas C ning shunday C_0

qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x, C_0)$ funksiya berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantirsa, ya'ni $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Ta'rif. Differensial tenglamaning umumiy yechimidan o‘zgarmasning mumkin bo‘lgan qiymatlarida hosil qilinadigan yechim *xususiy yechim* deyiladi.

2. Differensial tenglamaning eng sodda turi *o‘zgaruvchilari ajralgan* tenglamadir. Uning umumiy ko‘rinishi:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (5)$$

Bu tenglamaning muhimligi shundaki dx oldidagi funksiya faqat x ga bog‘liq, dy oldidagi funksiya faqat y ga bog‘liq. Bu tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uni hadlab integrallash orqali hosil qilinadi:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \quad C = const.$$

Bu yerda o‘zgarmas C ni berilgan tenglama uchun qulay bo‘lgan istalgan ko‘rinishda olish mumkin.

1-misol.

$$xdx + ydy = 0, \; M(x) = x, \; N(y) = y$$

$$\int xdx + \int ydy = C,$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C = C_1^{\,2},$$

$$x^2 + y^2 = C_1^{\,2}$$

Bu markazi koordinatalar boshida bo‘lgan, radiusi C_1 bo‘lgan kontsentrik aylanalar oilasidan iborat.

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (6)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglama *o‘zgaruvchilari ajraladigan* tenglama deyiladi.

(6) da $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ ifodaga bo‘lib, uni o‘zgaruvchilari ajralgan (5) tenglamaga keltirish mumkin:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

buni esa integrallab umumiy yechim topiladi.

Ushbu

$$y' = f_1(x)f_2(y)$$

ko‘rinishdagi tenglama ham o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. $y' = \dfrac{dy}{dx}$ desak, u holda

$$dy = f_1(x)f_2(y) \Big| : f_2(y) \neq 0,$$

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx,$$

integrallasak

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$$

bo‘ladi.

2-misol. Quyidagi differensial tenglamani umumiy yechimini toping.

$$x(1+y^3)dx - y^2(1+x^2)dy = 0.$$

Yechish.

$$x(1+y^3)dx - y^2(1+x^2)dy = 0 \Big| : (1+x^2)(1+y^3) \neq 0$$

$$\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{y^2}{1+y^3}dy=0$$

integrallaymiz.

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx-\int\frac{y^2}{1+y^3}dy=\frac{1}{6}\ln C$$

bu yerda o‘zgarmas C -ni yechim ko‘rinishi oson bo‘lishi uchun $\frac{1}{6}\ln C$ deb oldik. Natijada

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|-\frac{1}{3}\ln\left|1+y^3\right|=\frac{1}{6}\ln C$$

hosil bo‘ladi. Bundan

$$(1+x^2)^3=C(1+y^3)^2 \qquad (7)$$

ega bo‘lamiz.

$$(1+x^2)(1+y^3)\neq 0$$

shartdan

$$y=-1$$

bo‘lishi mumkin. Bu $y=-1$ chiziq yechim bo‘lib, (7) yechimlar oilasida yotmaydi. Shuning uchun berilgan tenglamani umumiy yechimi

$$(1+x^2)^3=C(1+y^3)^2,\ \ y=-1$$

bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglamalar. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim.

2. Chiziqli differensial tenglamalar. yechimning xossalari.

Glossariy

Xosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglama - $y'=f(x,y)$ ko’rinishdagi tenglama.

Koshi masalasi – $y'=f(x,y)$ tenglamaning $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi.

Yechimning mavjudlik va yagonaligi xaqidagi teorema – Agar (x_0,y_0) nuqtani o‘z ichiga olgan $D\subset R^2$ soxada $f(x,y)$ funksiya uzluksiz va uzluksiz $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy xosilaga ega bo‘lsa, u xolda (2) differensial tenglamaning (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ yechimi Z va ! bo‘ladi.

Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi - Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = f(x,c), c = const$ funksiyaga aytiladi:

a) y ixtiyoriy o‘zgarmas C ning xar qanday qiymatida differensial tenglamani qanoatlantiradi.

b) boshlang‘ich $y\big|_{x=x_0} = y_0$ 0 shart xar qanday bo‘lganda xam o‘zgarmas C ning shunday C_c qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x, c_0)$ funksiya berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiradi, ya'ni $y_0 = \varphi(x_0, c_0)$.

Xususiy yechim - Differensial tenglamaning umumiy yechimidan o‘zgarmasning mumkin bo‘lgan qiymatlarida xosil qilinadigan yechimlar xususiy yechimlar deyiladi.

O‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama – $M(x)dx + N(y)\cdot dy = 0$ ko’rinishdagi tenglama.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
2. Koshi masalasi deb nimaga aytiladi?
3. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb qaysi shartni qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi?
4. Differensial tenglamaning eng sodda turi qanday ko‘rinishida bo‘ladi?
5. Qanday ko‘rinishdagi differensial tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama deyiladi?

Amaliy mashg’ulot-2

O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar quyidagicha yozilishi mumkin:

$$y' = f(x)\cdot g(y) \qquad (1)$$

yoki quyidagi ko‘rinishda

$$M(x)\cdot N(y)dx + p(x)Q(y)dy = 0. \qquad (2)$$

Bunday tenglamalarni yechish uchun tenglamaning ikkala tomonini shunday ifodaga ko‘paytirish kerakki, tenglamaning bir tomonida faqat *x*, ikkinchi tomonida faqat *u* o‘zgaruvchi qolsin. So‘ngra ikkala tomonini integrallash kerak. Bo‘lishda extiyot bo‘lish kerak, chunki ifodani nolga aylantiruvchi qiymatlarida yechim yo‘qolib qolishi mumkin.

Misol 1. Quyidagi tenglamani yeching.

$$x^2y^2y' + 1 = y. \qquad (3)$$

Tenglamani (2) ko‘rinishga keliramiz.

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \qquad x^2y^2dy = (y-1)dx.$$

Ikkala tomonini $x^2(y-1)$ ga bo‘lamiz:

$$\frac{y^2}{y-1}dy = \frac{dx}{x^2}$$

O‘zgaruvchilari ajratildi. Tenglamani ikkala tomonini integrallaymiz:

$$\int \frac{y^2}{y-1}dy = \int \frac{dx}{x^2}; \qquad \frac{y^2}{2} + y + \ln|y-1| = -\frac{1}{x} + c.$$

$x^2(y-1)$ ga bo‘lishda $x=0$ va $y-1=0$ ya'ni $y=1$ yechimlar yo‘qolishi mumkin.

Ravshanki, $y=1$ funksiya (3) ning yechimi, $x=0$ yechim emas.

2. $y' = f(ax+by)$ ko‘rinishdagi tenglamalar o‘zgaruvchilari ajraladigan ko‘rinishga $z = ax+by$ yoki $z = ax+by+c,\ c-$ ixtiyoriy o‘zgarmas, almashtirish yordamida keltirish mumkin.

Misol-2. $(xy+y)dx + (xy+x)dy = 0$ differensial tenglamani umumiy yechimini toping.

yechish: $x \neq 0,\ y \neq 0$ deb faraz qilib, berilgan tenglamaning ikkala qismini *xu* ga bo‘lamiz. Natijada o‘zgaruvchilari ajralgan quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + \left(1+\frac{1}{y}\right)dy = 0.$$

uning integralini topamiz:

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx + \int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy = \ln|c|.$$

$$x + \ln|x| + \ln|y| = \ln|c|.$$

$$\ln|xy| + \ln e^{x+y} = \ln|c|, \qquad xye^{x+y} = c.$$

Oxirgi tenglik berilgan differensial tenglamaning umumiy integralidir. Uni topishda $x \neq 0,\ y \neq 0,$ deb qabul qilgan Edik. Ammo $x=0$ va $y=0$ ham berilgan tenglamaning yechimi bo‘lishini osongina tekshirish mumkin. Ikkinchi tomondan, ularni umumiy integralida $c=0$ deb topish ham mumkin.

Demak, $x=0,\ y=0$ berilgan tenglamaning xususiy yechimi.

Misol 3: $x(y^3+1)dx - y^2(1+x^2)dy = 0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

yechish: Tenglamani $(1+x^2)(1+y^3) \neq 0$ ga bo‘lib, o‘zgaruvchilarini ajratamiz:

$$\frac{xdx}{1+x^2} - \frac{y^2}{1+y^3} = 0.$$

Integrallab, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2| - \frac{1}{3}\ln|1+y^3| = \frac{1}{6}\ln c.$$

Bu yerda kelgusi o‘zgartirishlarni osonlashtirish uchun ixtiyoriy o‘zgarmas sifatida $\frac{1}{6}\ln C$ olindi. Yuqoridagi ifodani potensirlab, umumiy yechimni hosil qilamiz: $\frac{(1+x^2)^3}{(1+y^3)^2} = C.$

Misol 4: Ushbu $\sqrt{1-y^2}dx + \sqrt{1-x^2}dy = 0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Tenglamaning ikkala tomonini $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ ko‘paytmaga bo‘lib, o‘zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = 0$$

tenglamani hosil qilamiz, bu yerdan umumiy integralni topamiz: $\arcsin x + \arcsin y = \arcsin c$. Agar bu tenglikda sinuslarga o‘tadigan bo‘lsak, umumiy integralning algebraik shaklini hosil qilamiz:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C.$$

$\sqrt{1-y^2}$ ga bo‘lishda $y=\pm1$ yechimni yo‘qotishimiz mumkinligini qayd qilamiz. Bevosita tekshirish $y=\pm1$ ni haqiqatan ham yechimlar ekanligini ko‘rsatadi.

$y/_{x=0}=0$ boshlang‘ich shart S ni topishga imkon beradi $(C=0)$ va $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=0$ xususiy integralga olib keladi.

1. $tgx\cdot\sin^2 ydx+\cos^2 x\ ctgy\,dy=0.$ j/b: $ctg^2 y=tg^2 x+c$.
2. $xy'-y=y^2$ j/b: $x\sqrt{1+y^2}=cy;\quad y=0.$
3. $xyy'=1-x^2$ j/b: $x^2+y^2=\ln cx^2$.
4. $y-xy'=a(1+x^2y')$ j/b: $y=\dfrac{a+cx}{ax+1}$
5. $3e^x tgydx+(1-e^x)\sec^2 y\,dy=0$ j/b: $tgy=c(1-e^x)^3;\quad x=0$.
6. $y'tgx=y$ j/b: $y=c\sin x$.
7. $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$ j/b: $\dfrac{1}{2-y}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}=c.$
8. $\sec^2 x\cdot\sec ydx=-ctgx\cdot\sin ydy.$ j/b: $tg^2x+\sin^2 y=c$.
9. $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$ j/b: $x-y+\ln|xy|=c.$
10. $yy'+x=1.$ j/b: $(x-1)^2+y^2=c^2.$
11. $\sin\alpha\cdot\sin\beta d\alpha=\cos\alpha\cdot\sin\beta d\beta$. j/b: $\cos\beta=c\cos\alpha$.
12. $1+(1+y')e^y=0$. j/b: $(e^y+1)e^x=c.$
13. $3e^x\sin ydx=(e^x-1)\sec ydy.$ j/b: $tgy=c(e^x-1)^3.$
14. $x^2(2yy'-1)=1.$ j/b: $x(y^2+c)=x^2-1$
15. $y^2+x^2y'=0;\quad y(-1)=1$ j/b: $x+y=0$
16. $2(1+e^x)yy'=e^x;\quad y(0)=0$. j/b: $2e^{y^2}=e^x+1$.
17. $(1+x^2)y^3dx-(y^2-1)x^3dy=0;\ \ y(1)=-1$ j/b: $x^{-2}+y^{-2}=2\left(\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|+1\right)$.
18. $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0;\ \ y(0)=1;$ j/b: $1+y^2=\dfrac{2}{1-x^2}$
19. $y'\sin x=y\ln y;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$ j/b: $y=1$
20. $y'=(2y+1)ctgx;\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}:$ j/b: $y2\sin^2 x-\dfrac{1}{2}.$

TEST

Birinchi tartibli differensial tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasini aniqlang:	* $\begin{cases} y'=f(x,y)\\ y\big\|_{x=x_0}=y_0\end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y)\\ x\big\|_{x=x_0}=y_0\end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y)\\ y'\big\|_{x=x_0}=y_0\end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y)\\ y''\big\|_{x=x_0}=y_0'\end{cases}$

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy yechimi ko‘rinishini aniqlang:	* $\Phi(x,y,c)=0$	$F(x,y,y')=0$	$y'=f(y,c)$	$y'=f(x,c)$
O‘zgaruvchilarga ajralgan oddiy differensial tenglamani aniqlang.	* $M_1(x)dx+N_1(x)dy=0$	$M_1(x)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$	$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$	$M_1(x,y)dx+N_1(x)dy=$
O‘zgaruvchilarga ajraladigan oddiy differensial tenglamani aniqlang.	* $M_1(x)N_1(y)dx+$ $+M_2(x)N_2(y)dy=0$	$M(x,y)dx+$ $+N(x,y)dy=0$	$M_1(y)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$	$M_1(x)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$
Quyidagi differensial tenglama umumiy yechimini toping: $x(1+y^3)dx-y^2(1+x^2)dy=0$	* $(1+x^2)^3=e^c(1+y^3)^2$	$(1+x^3)^3=\ln c(1+y^2)^2$	$(1+x^2)^3=(1+y^3)^2$	$(1+x^2)^3=c(1+y^3)^2$
Birinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglamani ko‘rinishini toping.	* $y'+P(x)y=Q(x)$	$y'=f(x,y)$	$y'+P(x)z=Q(x)$	$M(x,y)dx+N(x,y)dy=$
Quyidagi funksiyani bir jinslilik o‘lchovini aniqlang: $f(x)=\sqrt{x^2+y^2}$	*1-o‘lchovli	2-o‘lchovli	3-o‘lchovli	4-o‘lchovli
Quyidagi funksiyaning bir jinslilik o‘lchovini aniqlang: $f(x,y)=\dfrac{x-xy}{x+y^2}$	* o‘lchovi yo‘q	2-o‘lchovli	1-o‘lchovli	0-o‘lchovli
$f(x,y)$ 0 o‘lchovli 1 jinsli funksiyani ko‘rinishini aniqlang:	* $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$f(x,y)=\varphi(x+y)$	$f(x,y)=\varphi(xy)$	$f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{1}{xy}\right)$
Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamani yechishda qanday almashtirish bajariladi?	* $z=\dfrac{y}{x}$	$z=xy$	$z=x-y$	$z=x+y$

MA'RUZA №3

Mavzu: Bir jinsli diferensial tenglamalar va ularga keltiriladigan tenglamalar.

Reja

1. Bir jinsli funksiya. Misollar.
2. Bir jinsli diferensial tenglama. Misollar.
3. Bir jinsli diferensial tenglamaga keltiriladigan tenglamalar. Misollar.

Tayanch so'z va iboralar: *n-o'lchovli bir jinsli funksiya, bir jinsli differensial tenglama, bir jinsli differensial tenglamaga olib kelinadigan tenglamalar,* $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ *ko'rinishdagi tenglama, umumlashgan bir jinsli tenglama.*

x va y ga nisbatan bir jinsli tenglama o'zgaruvchilarini almashtirish yordamida osongina o'zgaruvchilarga ajraladigan tenglamalarga keltirish mumkin. Bir jinsli tenglamaga ta'rif berishdan oldin bir jinsli funksiyaga ta'rif beraylik.

Ta'rif. Agar $f(x,y)$ funksiyada x va y o'zgaruvchilarni mos ravishda tx va ty ga almashtirganda (t - $\forall$ parametr) t^n ga ko'paytirilganda yana o'sha funksiya hosil bo'lsa, ya'ni

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

shart bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya n *o'lchovli bir jinsli funksiya* deyiladi. (n-funksiya bir jinsliligining o'lchovi deyiladi).

Bir nechta misollar ko'raylik.

1-misol.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiyadir, chunki,

$$f(tx,ty) = \sqrt{(tx)^2+(ty)^2} = t\sqrt{x^2+y^2} = t^1 f(x,y).$$

2-misol.

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

0 o'lchovli bir jinsli funksiya bo'ladi, chunki

$$f(tx,ty) = \frac{tx-ty}{tx+ty} = \frac{t(x-y)}{t(x+y)} = \frac{x-y}{x+y} = t^0 f(x,y),$$

ya'ni

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y).$$

Tasdiq.

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y)$$

shartga bo'ysinadigan 0 o'lchovli bir jinsli funksiyani

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ko'rinishida yozilishi mumkin.

Isbot. Haqikatdan ham, t parametrni tanlab olish mumkin bo'lgani uchun $t = \frac{1}{x}$ deb olamiz.

U holda

$$f(x,y) = f(tx,ty) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

2-misoldagi $f(x,y)$ funksiyani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x,y)=\frac{x(1-\frac{y}{x})}{x(1+\frac{y}{x})}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}=\varphi(\frac{y}{x})$$

Biz quyidagi 0 o‘lchavli bir jinsli funksiya bilan ish ko‘ramiz.

Ta'rif. Agar 1-chi tartibli $y'=f(x,y)$ differensial tenglamaning o‘ng tomoni x va y ga nisbatan 0 o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘lsa, u holda bunday tenglama *bir jinsli tenglama* deyiladi.

Shunday qilib bir jinsli tenglamani

$$y'=\varphi(\frac{y}{x}) \tag{1}$$

ko‘rinishda yozish mumkin ekan.

Bir jinsli (1) tenglamani $\frac{y}{x}=u(x)$ o‘rniga qo‘yish yordamida o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirish mumkin, u holda $y=u\cdot x$, bu yerda u-yangi izlanayotgan funksiya. Keyingi tenglikni differensiallab, $y'=u'x+u$ ni hosil qilamiz. y va y' qiymatlarini (1) ga qo‘yamiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$u'x+u=\varphi(u)$$

$$u'x=\varphi(u)-u$$

o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Bundan

$$du\cdot x=(\varphi(u)-u)dx\,\big|\,x(\varphi(u)-u)\neq 0$$

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

hosil qilamiz.

Buni integrallaymiz:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+\ln C$$

$$\ln C|x|=\int\frac{du}{\varphi(u)-u}\Rightarrow Cx=e^{\int\frac{du}{\varphi(u)-u}}$$

Integrallashdan so‘ng u o‘rniga $\frac{y}{x}$ nisbatni qo‘yib, (1) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz.

Ushbu

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2}$$

tenglamada $M(x,y)$, $N(x,y)$ lar bir xil o‘lchavli bir jinsli funksiyalar bo‘lgandagina (2) tenglama bir jinsli tenglama bo‘ladi.

Bu 2 ta bir xil o‘lchovli bir jinsli funksiya nisbati 0 ulchovli bir jinsli funksiya bo‘lishidan kelib chiqadi.

(2) ko‘rinishdagi tenglamani yechish uchun uni dastlab (1) ko‘rinishga keltirish kerak:

$$y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

nisbat 0 o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘ladi.

Masalan,

$$(y^2-3x^2)dy+2yxdx=0$$

tenglama bir jinslidir, chunki y^2-3x^2 va $2yx$ funksiyalar ikki o‘lchovli bir jinsli funksiyalardir. Tenglamani yechishdan oldin uni hosilaga nisbatan yechilgan shakliga keltirish kerak:

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi tenglama bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Buning uchun x va y-larni o‘rniga yangi u va v o‘zgaruvchilarni quyidagicha kiritamiz:

$$x = u + \alpha, \ \ y = v + \beta \qquad (4)$$

Bunda α va β - larni shunday tanlaymizki, tenglama bir jinsli tenglamaga aylansin. Bunday almashtirishda $dx = du, \ dy = dv$ bo‘ladi. Bularni (3) ga qo‘yib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{(au + bv) + (a\alpha + b\beta + c)}{(a_1u + b_1v) + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}\right)$$

Quyidagi tengliklar bajarilsa, (5) tenglama bir jinsli bo‘ladi:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases} \qquad (6)$$

Bu sistemani α va β ga nisbatan yechib, α va β ni (4) ning o‘rniga qo‘yib, (3) tenglamani bir jinsli qiladigan qiymatlarini aniqlaymiz.

Agar $\begin{vmatrix} ab \\ a_1b_1 \end{vmatrix} = 0$ bo‘lsa, u holda (6) sistema yechimga ega bo‘lmaydi. Bunday holda (3) tenglama o‘zgaruvchilarini ajraladigan tenglamaga

$$z = ax + by$$

o‘rniga qo‘yish orqali keltiriladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Integral chiziq. Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.
2. O‘zgarmasni variatsiyalash usuli.

Glossariy

Bir jinsli funksiya – Agar $f(x,y)$ funksiyada x va y o‘zgaruvchilarni mos ravishda tx va ty ga almashtirganda (t - $\forall$ parametr) t^n ga ko‘paytirilganda yana o‘sha funksiya hosil bo‘lsa, ya'ni

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

shart bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya n o‘lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.

Bir jinsli tenglama – Agar 1-chi tartibli $y' = f(x,y)$ differensial tenglamaning o‘ng tomoni x va y ga nisbatan 0 o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘lsa, u holda bunday tenglama bir jinsli tenglama deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $2x^2y' = x^2 + y^2$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. n o‘lchovli bir jinsli funksiya deb nimaga aytiladi va u qanday shartni bajaradi?
2. Bir jinsli tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
3. Bir jinsli tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. $(y^2 3x^2)dy + 2yxdx = 0$ tenglamani bir jinsli ekanini isbotlang?
5. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya qanday funksiya turiga kiradi?

Amaliy mashg’ulot-3

Bir jinsli tenglamalar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ yoki } M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ko‘rinishda yozilishi mumkin. Bu yerda *M*,*N* lar bir xil darajali bir xil jinsli funksiyalar yani

$$M(kx,ky) = k^n M(x,y)$$
$$N(kx,ky) = k^n N(x,y), \quad \forall k \in R.$$

Bir jinsli tenglamani yechish uchun tenglamada $y = tx$ yoki $\frac{y}{x} = t$ almashtirish bajarish kerak. Natijada tenglama o‘zgaruvchilari ajralgan ko‘rinishga keladi.

Misol 1. $xdy = (x+y)dx$ tenglama yechilsin. Bu tenglama bir jinsli differensiya tenglama chunki $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$.

$y = tx$ desak, $dy = tdx + xdt$. Bu ifodani tenglamaga qo‘yamiz:

$$x(tdx + xdt) = (x + xt)dx \Rightarrow xdt = dx \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow t = \ln|x| + c.$$

Eski o‘zgaruvchilarga qaytamiz.

$$y = x(\ln|x| + c)$$

Undan tashqari $x = 0$ yechim bo‘lish davrida yo‘qotilgan edi.

Misol-2. $2x^2y' = x^2 + y^2$ differensial tenglamaning umumiy va boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

yechish. $2x^2$ va $x^2 + y^2$ funksiyalar ikki o‘lchovli bir jinsli bo‘lgani uchun berilgan tenglama bir jinsli bo‘ladi.

$$y = xu,$$
$$y' = xu' + u$$

almashtirish bajaramiz.

$$2x^2(u+xu')=x^2+(xu)^2,$$

$$2x^2(u+xu')=x^2(1+u^2), x\neq 0$$

deb tenglamani ikkala qismini x^2 ga bo‘lamiz. So‘ngra o‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$2u+2x\frac{du}{dx}=1+u^2$$

$$2xdu=(1-2u+u^2)dx.$$

$$\frac{du}{(u-1)^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx}{2x}\Rightarrow\int\frac{d(u-1)}{(u-1)^2}=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln|c|-$$

$$-\frac{1}{u-1}=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln c,\quad 1=(1-u)\ln\left(c\sqrt{|x|}\right).$$

Oxirgi ifodani u ning o‘rniga $\frac{y}{x}$ qiymatini qo‘yamiz:

$$1=\left(1-\frac{y}{x}\right)\ln\left(c\sqrt{|x|}\right),\qquad x=(x-y)\ln\left(c\sqrt{|x|}\right).$$

Uni *u* ga nisbatan yechib, berilgan defferensial tenglamani umumiy yechimini topamiz:

$$y=x-\frac{x}{\ln\left(c\sqrt{|x|}\right)}.$$

$y(1)=0$ boshlang‘ich shartdan foydalanib, o‘zgarmas *s* ning qiymatini aniqlaymiz:

$$0=1-\frac{1}{\ln c},\qquad \ln c=1,\qquad c=e$$

Demak, berilgan tenglamaning xususiy yechimi quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y=x-\frac{x}{1+\ln\sqrt{|x|}}.$$

2. Bir jinsli tenglamaga

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$$

tenglama koordinata boshini

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ ax+by+c=0\end{cases}$$

chiziqlarning kesishish nuqtasiga ko‘chirilgandan so‘ng keltiriladi. Agar to‘g‘ri chiziqlar kesishmasa $a_1x+b_1y=k(ax+by)$ va tenglama $y'=F(ax+by)$ ko‘rinishga keltiriladi va bu tenglama $z=ax+by$ yoki $z=ax+by+c$ almashtirish bilan o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

3. Ba'zi tenglamalar $y=z^m$ almashtirish yordamida bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Odatda m soni oldindan noma'lum. Uni topish uchun $y=z^m$ almashtirishni tenglamaga qo‘yiladi va bir jinslilik sharti talab qilinadi. Agar shunday m ni topish mumkin bo‘lsa tenglama bir jinsli tenglamaga keltiriladi, aks holda yo‘q.

Misol-3: $2x^4yy'+y^4=4x^6$ tenglamani almashtirish yordamida bir jinsli ko‘rinishga keltiring.

yechish: $y=z^m$ deb quyidagiga kelamiz:

$$2mx^4 \cdot z^{2m-1} \cdot z^1 + z^{4m} = 4x^6.$$

Bu tenglama bir jinsli bo‘ladi, agar barcha xadlarining darajalari teng bo‘lsa: $4+(2m-1)=4m=6$ bu yerdan $m=3/2$. Shunday qilib tenglamani bir jinsli ko‘rinishga $y=z^{3/2}$ almashtirish bajarib keltirish mumkin.

Misol-4: Ushbu $y'=\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$ yoki $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2};$ bir jinsli tenglamani umumiy yechimini toping.

yechish: O‘ng tomoni nol o‘lchovli bir jinsli funksiyadan iborat.

$\dfrac{y}{x}=u$ almashtirish bajaramiz, u holda $y=ux \Rightarrow y'=u'x+u$. u va y' ning qiymatini tenglamaga qo‘yamiz:

$$u'x+\cancel{u}=\cancel{u}+\sqrt{1+u^2} \Rightarrow u'x=\sqrt{1-u^2}$$

Quyidagi o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz:

$x\dfrac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}$ yoki $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\dfrac{dx}{x}$.

integrallab topamiz:

$$\arcsin u = \ln x + \ln c.$$

Bu yerdan $U=\sin(\ln cx).$ Endi $\dfrac{y}{x}=u$ debo‘rniga qo‘ysak, $\dfrac{y}{x}=\sin(\ln cx)$ ni hosil qilamiz. Bu yerdan *u* ni *x* orqali ifodalash oson: $y=x\sin(\ln cx)$.

Umumiy yechimni topdik.

Amaliy mashg‘ulot № 3

1. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$. j: $y^2=x^2-cx.$
2. $y-xy'=y\ln\dfrac{x}{y}.$ j: $y=xe^{cx}$
3. $xdy-ydx=ydy; \quad y(1)=1$. j: $x=-y(1+\ln|y|)$.
4. $y-xy'=x+yy'$. j: $arctg\dfrac{y}{x}+\ln c\sqrt{x^2+y^2}=0.$
5. $ydy+(x-2y)dx=0.$ j: $x=(y-x)\ln c(y-x)$.
6. $y=x\left(y'-\sqrt[x]{e^y}\right)$. j: $e^{-\frac{y}{x}}+\ln cx=0$.
7. $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0; \quad y(1)=-2$. j: $3y^3=8\left(x^2-y^2\right)$.
8. $y-xy'=x\sec\dfrac{y}{x}; \quad y(1)=\pi.$ j: $\sin\dfrac{y}{x}+\ln|x|=0$.
9. $(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy$ j: $(x+y)^2=cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$;
10. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)}:$ j: $cx=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

11. $(xy'-y)arctg\frac{y}{x}=x;\quad y/_{x=1}=0$. j: $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}}$;

12. $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0;\quad y(0)=1$. j: $y^3=y^2-x^2$.

13. $y'=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2};\quad y(1)=-1$. j: $y=-x$.

14. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0;\quad y(0)=\sqrt{5}$. j: $y^2=5\pm2\sqrt{5}x.$

15. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$. j: $\sin\frac{y}{x}+\ln|x|=c.$

16. $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0.$ j: $(x+y)^2(2x+y)^3=c$.

17. $x^3y'=y(y^2+x^2)$. j: $x=xe^{\frac{x^2}{2y^2}}$

18. $\frac{xy'-y}{x}=tg\frac{y}{x}$ j: $\sin\frac{y}{x}=cx$

19. $\frac{ds}{dt}=\frac{s}{t}-\frac{t}{s}$ j: $s^2=2t^2\ln\frac{c}{t}$.

20. $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right);\quad y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}$. j: $y=xe^{-\frac{x}{2}}$.

TEST

quyidagi differensial tenglamada erkli o‘zgaruvchi nechta: $x\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}$	*2 ta	5 ta	3 ta	1 ta
Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamani umumiy ko‘rinishini aniqlang.	* $F(x,y,y')=0$	$F(x,y,c,)=0$	$\Phi(y,y')=0$	$y'=f(x,y)$
Birinchi tartibli differensial tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasini aniqlang:	* $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ x\|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y'\|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y''\|_{x=x_0}=y_0' \end{cases}$
Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy yechimi ko‘rinishini aniqlang:	* $\Phi(x,y,c)=0$	$F(x,y,y')=0$	$y'=f(y,c)$	$y'=f(x,c)$
O‘zgaruvchilarga ajralgan oddiy differensial tenglamani aniqlang.	* $M_1(x)dx+N_1(x)dy=0$	$M_1(x)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$	$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$	$M_1(x,y)dx+N_1(x)dy=$
O‘zgaruvchilarga ajraladigan oddiy differensial tenglamani aniqlang.	* $M_1(x)N_1(y)dx+$ $+M_2(x)N_2(y)dy=0$	$M(x,y)dx+$ $+N(x,y)dy=0$	$M_1(y)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$	$M_1(x)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$
Quyidagi differensial tenglama umumiy yechimini toping: $x(1+y^3)dx-y^2(1+x^2)dy=0$	* $(1+x^2)^3=e^c(1+y^3)^2$	$(1+x^3)^3=\ln c(1+y^2)^2$	$(1+x^2)^3=(1+y^3)^2$	$(1+x^2)^3=c(1+y^3)^2$
Birinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglamani ko‘rinishini toping.	* $y'+P(x)y=Q(x)$	$y'=f(x,y)$	$y'+P(x)z=Q(x)$	$M(x,y)dx+N(x,y)dy=$

Quyidagi funksiyani bir jinslilik o‘lchovini aniqlang: $f(x)=\sqrt{x^2+y^2}$	*1-o‘lchovli	2-o‘lchovli	3-o‘lchovli	4-o‘lchovli
Quyidagi funksiyaning bir jinslilik o‘lchovini aniqlang: $f(x,y)=\dfrac{x-xy}{x+y^2}$	* o‘lchovi yo‘q	2-o‘lchovli	1-o‘lchovli	0-o‘lchovli

MA'RUZA №4
Mavzu: Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar. Bernulli, Rikkati, tenglamalari.
Reja

1. Chiziqli tenglama va uni yechishning o‘rniga qo‘yish usuli.
2. Ixtiyoriy o‘zgarmasini variatsiyalash usuli.
3. Bernulli tenglamasi.
4. Rikkati tenglamasi.

Tayanch so’z va iboralar: *birinchi tartibli chiziqli tenglama, o‘rniga qo‘yish usuli, ixtiyoriy O‘zgarmasni varitsialash usuli, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi.*

1. Ta'rif. Noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli (birinchi darajali) bo‘lgan tenglamalar *birinchi tartibli chiziqli* tenglamalar deyiladi.

Birinchi tartibli chiziqli tenglamalarning umumiy ko‘rinishi quydagicha bo‘ladi:

$$y'+P(x)y=Q(x), \qquad (1)$$

bu yerda $P(x), Q(x)$ lar x ning ma'lum uzluksiz funksiyalari (yoki o‘zgamasidir).

Agar (1) tenglamanig o‘ng tamoni $Q(x)=0$ bo‘lsa, (1) tenglama chiziqli *bir jinsli* (boshqacha ma'noda), aks holda, ya'ni $Q(x)\neq 0$ bo‘lsa chiziqli *bir jinsli bo‘lmagan* tenglama deyiladi.

Aytaylik, (1) tenglama bir jinsli bo‘lmasin, ya'ni $Q(x)\neq 0$ teng bo‘lsin. Bu tenglamani integrallash (yoki yechimini topish)ning ikki usulini keltiramiz. Birinchisi **a) o‘rniga qo‘yish usuli** va ikkinchisi **b) o‘zgarmasni variatsiyalash usuli**.

Bir jinsli chiziqli tenglama bo‘lgan holni alohida qarab chiqish shart emas, chunki $Q(x)=0$ bo‘lganda (1) tenglama ayni vaqtda o‘zgaruvchilarni ajratiladigan tenglama bo‘ladi.

a) o‘rniga qo‘yish usuli. (1) tenglamada $y=u\cdot v$ deb o‘zgaruvchini almashtiramiz. Bu bilan y o‘rniga izlanyotgan yangi o‘zgaruvchi, masalan, u ni kiritgan bo‘lamiz, shu sababli ikkinchi o‘zgaruvchi v ni yordamchi o‘zgaruvchi deb qarab uni o‘z hoxishimizga ko‘ra tanlashimiz mumkin. Kelgusida shunday qilinadi ham, ya'ni (1) da $y=u\cdot v$ almashtirish bajaramiz. y va y' ning u va v orqali ifodalarini (1) ga quyamiz:

$$y'=u'v+uv'$$

$$u'v+uv'+P(x)uv=Q(x)$$

$$u'v+u(v'+P(x)v)=Q(x) \qquad (2)$$

Yordamchi funksiya v ni tanlash mumkinligidan foydalanib, uni o‘rta qavs ichidagi ifoda 0 ga aylanadigan qilib olamiz, ya'ni

$$v'+P(x)v=0 \qquad (3)$$

talab qilamiz. Bu o‘zgaruvchilarga ajratiladigan tenglama. (3) dan

$$v' + P(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -P(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow$$

$$v = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$

v-ni bu ifodasini (2) tenglamaga qo‘ysak, u uchun o‘zgaruvchilari aratiladigan tenglamani hosil qilamiz, ya'ni (3) o‘rinli bo‘lsa (2) quyidagicha bo‘ladi.

$$u'v = Q(x)$$

(4) dan esa

$$Ce^{-\int P(x)dx}u' = Q(x)$$

$$Cu' = Q(x)e^{\int P(x)dx} \quad , \tag{5}$$

$$Cdu = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$u = \frac{1}{C}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right]. \tag{6}$$

$y = u \cdot v$ bo‘lgani uchun (4) va (6) dan (1) tenglamaning umumiy yechimi uzil-kesil quyidagicha ko‘rinishida bo‘ladi:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right]. \tag{7}$$

(3) tenglamaning integrallashdan hosil bo‘lgan C o‘zgarmas u ni v ga kupaytirganda qisqarib ketgani uchun (4) yechimda oldindan $C = 1$ deb olish va (3) chi tenglamaning umumiy yechimi o‘rniga

$$v = e^{-\int P(x)dx}$$

xususiy yechimni olish mumkin edi, amalda shunday qilinadi. O‘rniga quyish usuli bitta (1) tenglamani o‘zgaruvchilarga ajraladigan ikkita (3) va (5) tenglamalarning yechimlarini izlashga olib keladi.

1-misol. $y' - ay = e^{bx}$ tenglamani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yeching.

b) O‘zgarmasini variatsiyalash usuli. Bu usulda bir jinsli bo‘lmagan (1) tenglamani ($Q(x) \neq 0$) yechimini izlash o‘rniga dastlab unga mos bir jinsli

$$y' + P(x)y = 0 \tag{8}$$

tenglamani yechamiz, bu tenglama o‘zgaruvchilari ajladigan tenglamadir. Uning umumiy yechimi:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx} \quad . \tag{9}$$

Bu yerda C o‘zgarmasni $C = C(x)$ funksiya deb qaraydigan bo‘lsak, u holda $C(x)$ formulani shunday tanlab olish mumkin ekanki, (9) funksiya bir jinsli bo‘lmagan (1) tenglamaning yechimi bo‘lar ekan.

$C(x)$ funksiyani topishi uchun $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz, y va y' ning ifodalarni (1) tenglamalarga qo‘yamiz, ya'ni

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

bo‘lgani uchun (1) tenglama ushbu tenglamaga o‘tadi:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \tag{10}$$

Biz yana o‘zgaruvchilari ajraladigan va noma'lum funksiya $C(x)$ bo‘lgan tenglamani hal qilishga keldik. (10) dan

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
$$dC(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$
$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$
kelib chiqadi. Bu (10) ni umumiy yechimi bo‘ladi. $C(x)$ ning tanlangan ifodasini (9) tenglikka qo‘yib bir jinsli bo‘lmagan (1) tenglamaning izlanayotgan yechimini yana (7) ko‘rinishda hosil qilamiz:
$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right]. \qquad (7)$$
Oldingi (7) bilan bir xil bo‘lar ekan.

Bu usulning nomi C o‘zgarmasni x ning funksiyasi deb qarab, uni variatsiyalaganimizdan (o‘zgartirganimizdan) kelib chiqqan.

Bu usul o‘rniga quyish usuli kabi (1) tenglamani o‘zgaruvchilarga ajratiladigan ikkita (8) va (10) tenglamaga keltirildi.

2-misol. $\frac{dy}{dx} - yctgx = a\sin x$ tenglamani o‘zgarmasni variatsiyalash usuli bo‘yicha yeching.

3. Bernulli tenglamasi.

Bernulli tenglamasining umumiy ko‘rinishi:
$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,\ n \in R, \qquad (11)$$
bu yerda $n = const$. $n = 0$ da Bernulli tenglamasi chiziqli tenglamaga aylanadi, $n = 1$ da o‘zgaruvchilarga ajraladigan tenglama bo‘ladi, chunki uni
$$y' + \left[P(x) - Q(x)\right]y = 0$$
ko‘rinishga keltirish mumkin. Shuning uchun $n \neq 0,\ n \neq 1$ deb faraz qilamiz.

Bernulli tenglamasini tegishli o‘rniga qo‘yish orqali chiziqli ko‘rinishga keltirish mumkin. Buning uchun tenglamaning ikkala qismini $y^n \neq 0$ ga bo‘lamiz:
$$\frac{1}{y^n}y' + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x).$$
$\frac{1}{y^{n-1}} = z$ deylik, u holda
$$z' = -(n-1)y^{-n}y' = (1-n)\frac{1}{y^n}y'$$
va Bernulli tenglamasi ushbu ko‘rinishga keladi:
$$\frac{1}{y^n}y' = \frac{z'}{1-n}$$
$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x).$$
$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$
Bu z ga nisbatan birinchi tartibli chiziqli tenglama, bu tenglamani yechishni bilamiz. Misol ko‘riladi.

4.Rikkati tenglamasi.

Ba'zi tenglamalar o‘zgaruvchini almashtirish yordamida Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Masalan, Rikkati tenglamasi uning bitta xususiy yechimi ma'lum bo‘lganda Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Ushbu
$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \qquad (12)$$
ko‘rinishdaga tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi.

$y = y_1(x)$ funksiya (12) tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsin. Agar $y = y_1(x) + z$ almashtirishni bajarsak

$$y' = y_1'(x) + z' \Rightarrow y_1'(x) + z' + p(x)(y_1(x) + z) + q(x)(y_1(x) + z)^2 = f(x)$$

kelib chiqadi.

$$y_1'(x) + p(x)y_1(x) + q(x)y_1^2(x) = f(x)$$

ekaniligini e'tiborga olsak, ushbu

$$z' + \left[p(x) + 2q(x)y_1(x) \right] z + q(x)z^2 = 0$$

Bernulli tenglamasi hosil qilamiz.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. O‘zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar.
2. Bernulli va Rikkati tenglamalari.

Glossariy

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama – Noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli (birinchi darajali) bo‘lgan tenglamalar birinchi tartibli chiziqli tenglamalar deyiladi.

Chiziqli bir jinsli differensial tenglama – $y' + P(x)y = Q(x)$ tenglamada $Q(x) = 0$ bo’lgan hol.

Bernulli tenglamasi – $y' + P(x)y = Q(x)y^n, n \in R$ ko’rinishdagi tenglama.

Rikkati tenglamasi – $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$ ko’rinishdagi tenglama.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $\dfrac{x^2dy}{dx} - 2xy = 3$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar deb (nima) qanday tenglamaga aytiladi?
2. Bernulli tenglamasining umumiy ko‘rinishi qanday?
3. Ba'zi tenglamalar o‘zgaruvchilarga almashtirish yordamida qanday tenglamaga keltiriladi?
4. Qanday ko‘rinishdagi tenglama Rikatti tenglamasi deyiladi?
5. Rikatti tenglamasi orqali Bernulli tenglamasini keltirib chiqaring?

Amaliy mashg'ulot-4

1. $y'+a(x)y=b(x)$ (1) tenglama chiziqli tenglama deyiladi. Uni yechish uchun avval bir jinsli $y'+a(x)y=0$ (2) tenglamani yechish kerak. Uni o'zgaruvchilarini ajratib yechish mumkin.

$$\frac{dy}{y}=-a(x)dx$$

Umumiy yechimdan o'zgarmas *s* ni $c=c(x)$ funksiya deb va topilgan yechim $y=y(x)$ ni (1) ga qo'yib s(*x*) topiladi.

2. Ba'zi tenglamalarda *x* o'zgaruvchini funksiya, *u* o'zgaruvchini argument deb olinsa, chiziqliga aylanadi.

Masalan: $y=(2x+y^3)y'$, $y=y(x)$ tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$ydx=(2x+y^3)dy \Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=y^2$$

va tenglama (1) ga o'xshab yechiladi.

Bayon qilingan bu usul ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash (yoki Langranj) usuli deyiladi. O'rniga qo'yish usulini kiritish mumkin.

3. Bernulli tenglamasi

$$y'+a(x)y=b(x)y^n \qquad (3)$$

ikkla tomonini y^n ga bo'linib, $\frac{1}{y^{n-1}}=z$ almashtirish bajarib, chiziqli tenglamaga keltiramiz.

4. Rikkatti tenglamasi:

$$y'+a(x)y+b(x)y^2=c(x) \qquad (4)$$

umumiy holda kvadraturalarda yechilmaydi. Lekin uning biror $y_1(x)$ xususiy yechimi topilsa tenglama $y=y_1(x)+z$ almashtirish yordamida Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Ba'zan (4) tenglamaning xususiy yechimi o'ng tomon s(*x*) ko'rinishga qarab topilishi mumkin.

Masalan: $y'+y^2=x^2-2x$ tenglamada $y=ax+b$ almashtirish bajarsak, chap va o'ng tomonda bir xil hadlar paydo bo'ladi. Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib xususiy yechimni topamiz, lekin buni har qachon ham qilib bo'lmaydi.

Masalan: $y'+2y=\frac{6}{x^2}$ tenglamada yuqoridagi fikrlashlar xususiy yechimni $y=\frac{a}{x}$ ko'rinishda olishga undaydi. Uni tenglamaga qo'yib, a noma'lumni topamiz.

$$y'=-\frac{a}{x^2} \Rightarrow -\frac{a^2}{x^2}+\frac{2a}{x}=\frac{6}{x^2} \Rightarrow -a+2ax=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ax-(a-6)x^0=0 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a+6=0.$$

bunday *a* yo'q.

Misol-1: $(x^2-x)y'+y=x^2(2x-1)$ tenglamaning umumiy yechimini va $y(-2)=2$ boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

yechish: Berilgan tenglamaning ikkala qismini $x^2-x\neq 0$ ga bo'lib, uni (1) ko'rinishdagi tenglamaga keltiramiz:

$$y'+\frac{y}{x^2-x}=\frac{x^2(2x-1)}{x^2-x}$$

Bunda $a(x)=\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{1}{x(x-\alpha)};\ b(x)=\dfrac{x^2(2x-\alpha)}{x(x-1)}=\dfrac{x(2x-1)}{x-1}$

Quyidagi $y=e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+c\right)$ formulaga asosan berilgan tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}dx+c\right).$$

Bu yechimdagi integrallarni topamiz:

a) $\displaystyle\int\frac{dx}{x(x-1)}\left|\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)},\ A=-1,\ B=1\right|=$
$\displaystyle=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\ln|x-1|=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|;$

v) $\displaystyle\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\ln\frac{x-1}{x}}dx=\int\frac{x(2x-1)}{x-1}\cdot\left|\frac{x-1}{x}\right|dx=\Big|$
$=\pm\int(2x-1)dx=\pm(x^2-x);$

bunda musbat va manfiy ishoralar $\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=\pm\dfrac{x-1}{x}$ tenglamadan hosil bo‘ladi. Topilgan (*a*) va (*v*) integrallarni umumiy yechimga qo‘yamiz:

$$y=e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}(\pm(x^2-x)+c)=\left|\frac{x}{x-1}\right|\cdot(\pm x^2-x)+c)=$$

$$=\pm\frac{x}{x-1}\cdot(\pm x(x-1)+c)=x^2+\frac{cx}{x-1},$$

Undan $y(-2)=2$ shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni ajratib olamiz:

$$2=4-\frac{2c}{-2-1}\Rightarrow c=-3\Rightarrow y=x^2-\frac{3x}{x-1}.$$

Misol-2: $\dfrac{x^2dy}{dx}-2xy=3$ differensial tenglamani umumiy yechimini toping.

yechish: Bu tenglamaning barcha hadlarini x^2 ga bo‘lib, qayta yozamiz:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x^2}y=\frac{3}{x^2}.$$

Demak, berilgan misolda $a(x)=-\dfrac{2}{x},\ b(x)=\dfrac{3}{x^2}$ bo‘lib berilgan tenglama

$\dfrac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)$ tipdagi birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama ekan. Berilgan tenglamada $y=u\cdot v$ deb olamiz, u holda

$\dfrac{dy}{dx}=v\dfrac{du}{dx}=u\dfrac{dv}{dx}$ almashtirishdan so‘ng quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x^2\left(v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\right)-2xuv=3$$

$$x^2v\frac{du}{dx}+x^2u\frac{dv}{dx}-2xuv=3$$

yoki $x^2v\dfrac{du}{dx}+u\,x\,/\,x\dfrac{dv}{dx}-2v\,/=3$ (*)

Bu yerda v ni shunday tanlaymizki, $x\dfrac{dv}{dx}-2v=0$ bo‘lsin. Xuddi shuningdek $xv\left[x\dfrac{du}{dx}-2u\right]+x^2u\dfrac{dv}{dx}=0$ tenglamada u ni $x\dfrac{du}{dx}-2u=0$ bo‘lsin deb tanlash mumkin.

$x\dfrac{dv}{dx}-2v=0$ tenglamada o‘zgaruvchilarni ajratib, v ni topamiz:

$\dfrac{dv}{v}-2\dfrac{dx}{x}=0$ bundan $\ln v-2\ln x=\ln c$ yoki $v=cx^2$. Yuqoridagi aytib o‘tilgani c = 1 bo‘lganidagi $v=x^2$ xususiy yechim bilan cheklanish mumkin. v ning ifodasini almashtirilgan (*) tenglamaga qo‘yib u ni topamiz:

$$x^2\frac{du}{dx}=3 \quad \text{yoki} \quad du=\frac{3dx}{x^4}$$

bundan $u=-\dfrac{1}{x^3}+c.\quad y=u\cdot v$ formulaga u va v uchun topilgan ifodalarni qo‘yib, berilgan chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$y=cx^2-\frac{1}{x}.$$

Misol-4: Ushbu $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{3}{x}y=-x^3y^2$ Bernulli tenglamasini umumiy integralini topaylik.

Tenglamani ikkala qismini u^2 ga bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz: $\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{3}{x}\dfrac{1}{y}=-x^3$.

$\dfrac{1}{y}=z$ deb olamiz; u holda $-\dfrac{1}{y^2}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dz}{dx}$ va tenglama ushbu ko‘rinishga keladi:

$$\frac{dz}{dx}+\frac{3}{x}z=x^3.$$

Bu chiziqli tenglama variatsiyalash usuli bilan integrallaymiz. Bir jinsli $\dfrac{dz}{dx}+\dfrac{3}{x}z=0$ tenglamaning umumiy yechimi: $z=\dfrac{c}{x^3}$. Bu yerda $c=c(x)$ deb quyidagini hisoblaymiz: $\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{dc(x)}{dx}\cdot\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3c(x)}{x^4}$ va chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaga qo‘yamiz:

$\dfrac{dc(x)}{dx}\cdot\dfrac{1}{x^3}-\dfrac{3c(x)}{x^4}+\dfrac{3}{4}\dfrac{c(x)}{x^3}=x^3$ yoki $dc(x)=x^5dx,$ bu yerdan $C(x)=\dfrac{x^7}{7}+C_1$, binobarin bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi $z=\dfrac{x^4}{7}+\dfrac{c_1}{x^3}$ bo‘ladi z ni $\dfrac{1}{y}$ bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

1. $\dfrac{1}{y}=\dfrac{x^4}{7}+\dfrac{c_1}{x^3}$ yoki $y\left(\dfrac{x^7}{7}+C_1\right)=x^3$. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{y}{x}=x$ j: $y=cx+x^2$

2. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{2y}{x}=x^3$ j: $y=\dfrac{1}{6}x^4+\dfrac{c}{x^2}$.

3. $(1+y^r)dx=(\sqrt{1+y^2}\sin y-xy)dy$ j: $x\sqrt{1+y^2}+\cos y=c$

4. $y^2dx-(2xy+3)dy=0$ j: $x=cy^2-\dfrac{1}{y}$

5. $xy'+y-e^x=0;\quad y(a)=b$ j: $y=\dfrac{e^x}{x}+\dfrac{ab-e^a}{x}$

6. $y'-\dfrac{y}{1-x^2}-1-x=0;\quad y(0)=0$ j: $y=\dfrac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+arc\sin x)\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$

7. $y'-ytgx=\dfrac{1}{\cos x};\quad y(0)=0$ j: $y=\dfrac{x}{\cos x}$

8. $y'-\dfrac{3y}{x}=x$ j: $y=cx^3-x^2$

9. $y'+\dfrac{2y}{x}=\dfrac{e^{-x^2}}{x}$ j: $y=\dfrac{c-e^{-x^2}}{2x^2}$

10. $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$ j: $y=\dfrac{c-\cos 2x}{2\cos x}$

11. $(a^2+x^2)y'+xy=1$ j: $y=\dfrac{\ln c(x+\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}}$

12. $y'-ytgx=ctgx$ j: $y=1+\dfrac{\ln ctg\frac{x}{2}}{\cos x}$

13. $y'+ay=e^{mx}$ j: 1) $m\neq -a\quad y=ce^{-ax}+\dfrac{e^{mx}}{m+a}$; 2) $m=-a\quad y=(c+x)e^{mx}$

14. $2ydx+(y^2-6x)dy=0$ j: $y^2-2x=cy^3$

15. $y'=\dfrac{1}{2x-y^2}$ j: $x=ce^{2y}+\dfrac{1}{2}y^2+\dfrac{1}{2}y+\dfrac{1}{4}$

16. $y'=\dfrac{y}{2y\ln y+y-x}$ j: $x=y\ln y+\dfrac{c}{y}$

17. $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$ j: $y=e^x\left(\ln|x|+\dfrac{x^2}{2}\right)+ce^x$

18. $y'+y\Phi'(x)-\Phi(x)\Phi'(x)=0,\ \Phi(x)-$ berilgan funksiya.
j: $y=ce^{\Phi(x)}+\Phi(x)-1$

19. $y'-ytgx=\sec x;\quad y(0)=0$ j: $y=\dfrac{x}{\cos x}$

20. $xy'+y-e^x=0;\quad y(a)=b$ j: $y=\dfrac{e^x+ab-e^a}{x}$

21. $xy'-\dfrac{y}{x+1}=x;\quad y(1)=0$ j: $y=\dfrac{x}{x+1}(x-1+\ln|x|)$

22. $t(1+t^2)dx=(x+xt^2-t^2)dt;\quad x(1)=\dfrac{\pi}{4}$ j: $x=-tarctgt$.

TEST

Quyidagi funksiyaning bir jinslilik o‘lchovini aniqlang: $f(x,y)=\dfrac{x-xy}{x+y^2}$	* o‘lchovi yo‘q	2-o‘lchovli	1-o‘lchovli	0-o‘lchovli
$f(x,y)$ 0 o‘lchovli 1 jinsli funksiyani ko‘rinishini aniqlang:	* $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$f(x,y)=\varphi(x+y)$	$f(x,y)=\varphi(xy)$	$f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{1}{xy}\right)$
Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamani yechishda qanday almashtirish bajariladi?	* $z=\dfrac{y}{x}$	$z=xy$	$z=x-y$	$z=x+y$
$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ tenglamada $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$ bo‘lsa, qanday almashtirish bajariladi.	* $x=\alpha+u,\ y=\beta+v$	$x=\dfrac{\alpha}{u},\ y=\dfrac{\beta}{v}$	$x=\alpha u,\ y=\beta v$	$x=zy$
$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ tenglamada $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$ bo‘lsa, qanday almashtirish bajariladi.	* $z=ax+by$	$z=ax$	$z=by$	$z=ax+c$
Birinchi tartibli chiziqli tenglamani yechish usuli nomini aniqlang.	* Ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usuli	Aniqmas koeffitsientlar usuli	Ketma-ket yaqinlashish usuli	Ketma-ket yo‘qotish usuli
O‘rniga qo‘yish usulida qanday almashtirish bajariladi?	* $y=uv$	$y=u^2v$	$y=uv^2$	$y=u+v$
Umumlashgan bir jinsli tenglamada qanday almashtirish bajarilishini aniqlang.	* $y=z^{\alpha}$	$y=z+x$	$y=\dfrac{u}{v}$	$y=uv$
Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: $y'=\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$	* $y=x\sin(\ln cx)$	$y=x\ln(\sin cx)$	$y=x\ln(\cos cx)$	$y=xtg(\ln cx)$
Tenglamaning umumiy yechimini aniqlang: $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$	* $y=\dfrac{1}{x}(c-\cos x)$	$y=\dfrac{1}{x}(c-\sin x)$	$y=\dfrac{1}{x}(c-\cos\sin x)$	$y=\dfrac{1}{x}(c-\arccos x)$

MA'RUZA 5

5. Mavzu: To‘liq differensialli tenglama. Integrallovchi ko‘paytuvchi.

Reja:

1. To‘liq differensialli tenglama .
2. Funksiya to‘liq differensialli bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti.
3. Integrallovchi ko‘paytuvchi.

Tayanch so’z va iborlar: *to‘liq differensial tenglama, tenglama to‘liq bыlishining zaruriy va yetarli sharti, integrallovchi ko‘paytuvchi.*

1. Agar

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

tenglamaning chap tomoni birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali, ya'ni

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y)$$

bo‘lsa, (1) tenglama *to‘liq differensialli tenglama* deyiladi. Bu holda uni quyidagicha yozish mumkin:

$$dU(x,y) = 0$$

Buni integrallash bilan quyidagi umumiy integralni (yechimni) hosil qilamiz:

$$U(x,y) = C$$

Quyidagi savolning yuzaga kelishi tabiiy: qanday shartlarda (1) tenglama to‘liq differensialli $dU(x,y) = 0$ tenglama bo‘ladi va $U(x,y)$ funksiya qanday topiladi? Quyidagi teorema bu savolga javob beradi.

2. **Teorema.** *Ushbu*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

differensial ifoda (bu yerda $M(x,y)$ va $N(x,y)$ funksiyalar xOy tekislikning D sohasida aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, uzluksiz

$\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ va $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega) birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensialli bo‘lishi uchun D sohaning barcha nuqtalarida

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3}$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Dastlab bu shartning zarurligini isbot qilamiz. Buning uchun shunday $U(x,y)$ funksiya mavjudki, uning uchun $dU = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ bo‘ladi deb faraz qilamiz va (3) tenglikni isbot qilamiz. $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensialli

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

ifoda bo‘ladi. U (2) ga teng bo‘lgani sababli istalgan dx va dy uchun o‘rinli bo‘lgan

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

ayniyatga ega bo‘lamiz. dx va dy oldidagi ko‘paytuvchilarni taqqoslab topamiz:

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

1-tenglikning ikala tomonini u bo‘yicha, 2-tenglikni x bo‘yicha differensiallaymiz, natijada:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}, \quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$$

$U\in C^2(D)$ bo‘lgani uchun $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ bo‘ladi.

Teorema shartiga ko‘ra aralash hosilalar teng bo‘ladi, ya'ni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$$

Bularni chap tomoni $\frac{\partial M}{\partial y}, \frac{\partial N}{\partial x}$ mavjud bo‘lgani uchun (xususiy hosilalar uzluksizligidan)

bu hosilalar mavjudki, ya'ni $U\in C^2(D)$ bo‘ladi, $\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ aralash hosila teng bo‘ladi.

Bundan $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ kelib chiqadi.

Endi yetarliligini isbtlaymiz. Buning uchun (3) shart bajarilgan deb, faraz qilamiz. (2) ifoda birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensialli bo‘lishini, ya'ni

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y), \ \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y) \tag{4}$$

tenglik o‘rinli ekanligini isbot qilamiz.

Bu bilan masala xususiy hosilalai ikkita differensial tenglamadan iborat (4) sistemani qanoatlantiruvchi $U(x,y)$ funksiyani topishga keltiriladi:

(4) tenglamalarning birinchisini olamiz:

$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$ buni $[x_0,x]$oraliq bo‘yicha integrallab quyidagi yechimni topamiz:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y) \tag{5}$$

bu yerda x_0 D sohaning birorta $P_0(x_0,y_0)$ nuqtasining absissasi $\varphi(y)$ esa uning $\forall C$ o‘zgarmasning o‘rnini bosuvchi birorta funksiya, chunki x bo‘yicha differensiallasak, yana oldingi tenglama hosil bo‘ladi ($\varphi'_x(y)=0$). $\varphi(y)$ni shunday aniqlaymizki, (4) tenglamalarning ikkinchisi ham qanoatlantirilsin. (5) ni ikkala qismini y bo‘yicha differensiallaymiz, u holda

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi'(y)$$

biroq $\frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y)$ bo‘lgani uchun va aniq integralni parametr bo‘yicha differensiallash teoremasiga ko‘ra

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx$$

,

bo‘lgani uchun

$$N(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)$$

Shartga ((3) shart) $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ ga ko‘ra

$$\varphi'(y)=N(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx\ .$$

Keyingi integral

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx=N(x,y)\Big|_{x_0}^{x}=N(x,y)-N(x_0y)$$

ga teng, shu sababli

$$\varphi'(y)=N(x,y)-N(x,y)+N(x_0,\ y)\Rightarrow\varphi'(y)=N(x_0,y)$$

ni $[y_0,y]$ gacha integrallaymiz (y bo‘yicha) bu yerdan

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C$$

bu yerda y_0 D sohadagi $P_0(x_0,y_0)$ nuqtaning ordinatasi , C -o‘zgarmas.

$\varphi(y)$ ni topilgan qiymatini (5) tenglikka qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dx+\varphi(y) \tag{6}$$

Shunday qilib $U(x,y)$ funksiyaning mavjud ekanligini isbotlanibgina qolmasdan, hatto bu funksiyani topish uchun formula ham keltirib chiqarildi.

Aslini olganda tegishli masalalar yechganda tayyor (6) formuladan foydalanmasdan, umumiy holdagi kabi yo‘l tutish mumkin (yoki aniq integrallarni aniqmass integrallar bilan almashtirish kerak)

Misol ko‘riladi.

1-misol. $(7x+3y)dx+(3x-5y)dy=0$

3. Agar $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ shart bajarilmagan bo‘lsa, u holda (1) tenglama to‘liq differensialli tenglama bo‘lmaydi. Biroq bu tenlamani μ(x,y) funksiyaga ko‘paytirish bilan uni to‘liq differensialli tenglamaga keltirish mumkin. Bunday funksiya berilgan differensial tenglama uchun **integrallovchi ko‘paytuvchi** deyiladi. Har qanday differensial tenglama uchun integrallovchi ko‘paytuvchi mavjud, Biroq uni topish oson emas. (1) tenglamaning integrallovchi ko‘paytuvchisini qanday izlanishini ko‘rsatamiz.

Ushbu

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

tenglama to‘liq diffrensialli tenglama bo‘lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

yoki

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial x} + \mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{7}$$

shart bajarilishi kerak.

(7) tenglik birinchi tenglamaning integrallovchi ko‘paytuvchilarining differensial tenglamasidir, chunki uning har bir yechimi (1) tenglamaning ikkala tomoniga ko‘paytirilgandan so‘ng uni to‘liq differensiallardagi tenglamaga keltiriladi. $\mu(x,y)$ ni topish uchun xususiy hosilali (7) differensial tenglamani integrallash kerak. Umumiy holda bu masalani yechish qiyin. Agar μ faqat birgina x yoki y o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, masala ancha soddalashadi. Biz shu ikki holni qaraymiz.

1-hol. $\mu = \mu(x)$ bo‘lsin. U holda (7) tenglama ushbu ko‘rinishini egallaydi.

$$N\frac{d\mu(x)}{dx} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

yoki

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

bu yerdan

$$\ln\mu(x) = \int\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx + C,$$

ya'ni

$$\mu(x) = e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx} \tag{8}$$

($\forall C$ o‘zgarmas nolga teng deb olingan, chunki qandaydir bitta integrallovchi ko‘paytuvchiga ega bo‘lsak, kifoya).

Bu holda $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ifoda y - ga bog‘liq bo‘lmasligi ravshan.

2-hol. $\mu = \mu(y)$ bo‘lsin. U holda (7) tenglama ushbu ko‘rinishda bo‘ladi: $\frac{d\mu}{dx} = 0$

$$M\frac{d\mu(y)}{dy} = -\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

yoki

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)}=-\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}dy$$

bu yerdan

$$\mu(y)=e^{-\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dy} \qquad (9)$$

bu yerda $C=0$ deb olingan.

Bu holda $\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ ifoda x-ga bog‘liq emas.

(1) tenglamani to‘liq diferensialli tenglama ko‘rinishiga keltirish uchun qaralayotgan xususiy hollarda odatda quyidagicha yo‘l tutiladi. $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ ifoda tuziladi va uning N ga nisbati olinadi. Agar bu ifoda y ga bog‘liq bo‘lmasa, integrallovchi ko‘paytuvchini topish uchun (8) formuladan foydalanish kerak; aks holda $\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$ ifodaning M ga nisbati olinadi, agar bu nisbat x ga bog‘liq bo‘lmasa, u holda x ga bog‘liq bo‘lmagan μ ko‘paytuvchi mavjud va uni (9) formula bo‘yicha topish mumkin.

$\mu=\mu(\omega(x,y))$ **-ko‘rinishidagi integrallovchi ko‘paytuvchi.** $\omega(x,y)$- berilgan funksiya

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (7)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x},\quad \frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y},$$

$$N\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\cdot\frac{\partial\omega}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial\omega}\cdot\left(N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}\right)=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{\mu}\cdot\frac{\partial\mu}{\partial\omega}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial x}}\partial\omega$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\dfrac{\partial\omega}{\partial x}-M\dfrac{\partial\omega}{\partial x}}=\psi(\omega)$$

$$\mu(\omega)=e^{\int\psi(\omega)d\omega}=f(\omega)=f(\omega(x,y))$$

bog‘liq bo‘lsa $\Rightarrow$ (1) tenglama uchun $\mu=\mu(\omega(x,y))$ integrallovchi ko‘paytuvchi

1) $\omega(x,y)=x,\ \omega(x,y)=y\Rightarrow\mu(x),\ \mu(y)$ mavjud.

2) $\omega(x,y)=x\pm y$ (10) da $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=1,\ \dfrac{\partial\omega}{\partial y}=\pm1$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{N\pm M}=\omega(x\pm y)$$

bo‘lsa, u holda $\mu=\mu(x\pm y)$ mavjud.

3) $\omega(x,y)=x^2\pm y^2$ (10) da

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=2x,\qquad\frac{\partial\omega}{\partial y}=\pm2y$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{2(xN\pm yM)}=\omega(x^2\pm y^2)$$

bo‘lsa, u holda $\mu=\mu(x^2\pm y^2)$ mavjud.

4) $\omega(x,y)=x\cdot y$ (10) da $\dfrac{\partial\omega}{\partial x}=y,\ \dfrac{\partial\omega}{\partial y}=x$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=\omega(xy)$$

bo‘lsa, u holda $\mu=\mu(x\cdot y)$ mavjud.

5) $\omega(x,y)=\dfrac{y}{x}$ (10) da

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\qquad\frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\dfrac{\partial M}{\partial y}-\dfrac{\partial N}{\partial x}}{-\dfrac{y}{x^2}N-\dfrac{1}{x}M}=\omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

bo‘lsa, u holda $\mu=\mu(\frac{y}{x})$ mavjud.

$\mu(x,y)=\mu_1(x)\mu_2(y)$ **ko‘rinishida integrallovchi** ko‘paytuvchi qidiramiz:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{7}$$

$\mu(x,y)=\mu_1(x)\mu_2(y)$ ni (7) ga qo‘yamiz.

$$N\mu_2(y)\frac{\partial\mu_1(x)}{\partial x}-M\mu_1(x)\frac{\partial\mu_2(y)}{\partial y}=\mu_1(x)\mu_2(y)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Big|:\mu_1(x)\mu_2(y)\neq 0$$

$$N\frac{1}{\mu_1(x)}\cdot\frac{\partial\mu_1(x)}{\partial x}-M\frac{1}{\mu_2(y)}\cdot\frac{\partial\mu_2(y)}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\psi_1(x)-M\psi_2(y),$$

bu yerda

$$\psi_1(x)=\frac{1}{\mu_1(x)}\frac{\partial\mu_1(x)}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial\mu_1(x)}{\mu_1(x)}=\psi_1(x)dx,$$

$$\mu_1(x)=e^{\int\psi_1(x)dx},$$

$$\frac{\partial\mu_2(y)}{\mu_2(y)}=\psi_2(y)dy\ \Rightarrow\psi_2(y)=\frac{1}{\mu_2(y)}\frac{\partial\mu_2(y)}{\partial y},$$

$$\mu_2(y)=e^{\int\psi_2(y)dy}.$$

Misol.

$$(y^4-4xy)dx+(2xy^3-3x^2)dy=0\quad (x>0,y>0)\ (1/4y^3<x<2/3y^3)$$

tenglama umumiy yechimini toping. Bu tenglama to‘liq differensialli bo‘lmaydi.

$$M=y^4-4xy,\ N=xy^3-3x^2$$

va

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y^3-4x,\ \ \frac{\partial N}{\partial x}=2y^3-6x\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

Berilgan tenglama $\mu(x,y)=\mu_1(x)\mu_2(y)$ ko‘rinishidagi integrallovchi ko‘paytuvchiga ega, chunki

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4y^3-4x-(2y^3-6x)=(2xy^3-3x^2)\frac{2}{x}-(y^4-4xy)\cdot\frac{2}{y}=N\frac{2}{x}-M\frac{2}{y}$$

Bundan

$$\psi_1(x)=\frac{2}{x},\quad \psi_2(y)=\frac{2}{y},\quad \mu_1(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2,\quad \mu_2(y)=e^{\int\frac{2}{y}dy}=y^2.$$

Demak, $\mu(x,y)=x^2y^2$. U holda

$$x^2y^2(y^4-4xy)dx+x^2y^2(2xy^3-3x^2)dy=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x^2y^6-4x^3y^3)dx+(2x^3y^5-3x^4y^2)dy=0$$

Oxirgi tenglama uchun esa

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6x^2y^5-12x^3y^2=\frac{\partial N}{\partial x}=6x^2y^5-12x^3y^2\Rightarrow$$

Bundan tenglama to‘liq diffenrensialliligi kelib chiqadi. Bu esa tenglama to‘liq yechildi degani.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. O‘zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli tenglamalar.
2. To‘la differensial tenglamalar.

Glossariy

To‘liq differensial tenglama – Agar $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ tenglamaning chap tomoni birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali, ya'ni $M(x,y)dx+N(x,y)dy=dU(x,y)$ bo‘lsa, (1) tenglama to‘liq differensialli tenglama deyiladi.

To’la differensial tenglama bo’lish zarur va yetarli sharti - Ushbu $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ differensial ifoda (bu yerda $M(x,y)$ va $N(x,y)$ funksiyalar xOy tekislikning D sohasida aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, uzluksiz $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ va $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega) birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensialli bo‘lishi uchun D sohaning barcha nuqtalarida $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Integrallovchi ko'paytuvchi – Agar $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ shart bajarilmagan bo'lsa, u holda (1) tenglama to'liq differensialli tenglamaga aylantirish uchun tenglamani ko'paytirish lozim bo'lgan μ(x,y) funksiya.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Qanday tenglama to'liq differensialli tenglama deyiladi?
2. Qanday shart bajarilmasa N(x,y)dx+N(x,y)dy=0 tenglama to'liq differensialli tenglama deyiladi?
3. Berilgan differensial uchun integrallovchi ko'paytuvchi deb nimaga aytiladi?
4. N(x,y)dx+N(x,y)dy=0 tenglama to'liq differensialli tenglama bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
5. $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0 \qquad (x>0, y>0) \quad (1/4y^3 < 2/3y^3)$ tenglama to'liq differensial tenglama emasligini isbotlang?

Amaliy mashg'ulot-5

1. $y' + y = x\sqrt{y}$ j: $y = \left(x - 2 + ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$ j: $y(x^2 + cx)1$
3. $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$ j: $y^2 = x\ln\frac{c}{x}$
4. $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$ j: $x^2 = \frac{1}{y + cy^2}$
5. $3xdy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)dx$ j: $y^3(3 + ce^{\cos x}) = x$
6. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$ j: $x>0\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln\frac{c}{x}; \quad x<0\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln cx$
7. $y' + xy = xy^3$ j: $y^2 = \frac{1}{1 + ce^{x^2}}$
8. $3y^2y^1 + y^3 = x + 1; \quad y(1) = -1$ j: $y^3 = x + ce^{-x}; \quad y^3 = x - 2e^{1-x}$
9. $(1 - x^2)y' - xy = xy^2; \quad y(0) = 0,5$ j: $y = \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2} - 1}$
10. $y' + 2xy = 2x^3y^3$ j: $\frac{1}{y^2} = ce^{2x^2} = x^2 + \frac{1}{2}$
11. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$ j: $y = \frac{1}{(1+x)[c + \ln|1+x|]}$

12. $y^{n-1}(ay'+y)=x$ j: $ny^n=ce^{\frac{-nx}{a}}+nx-a$

13. $xdx=\left(\frac{x^2}{y}-y^3\right)dy$ j: $x^2=y^2(c-y^2)$

14. $xy'+y=y^2\ln x$ j: $y(1+\ln x+cx)=1$

15. $y'-ytgx+y^2\cos x=0$ j: $y(x+c)=\sec x$

16. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ j: $y=\left(\frac{c+\ln(\cos x)}{x}+tgx\right)^2$

17. $xy'-4y-x^2\sqrt{y}=0$ j: $y=\frac{x^4}{4}\ln^2|cx|$

18. $ydy-\frac{ay^2}{x^2}dx=\frac{bdx}{x^2}$ j: $y^2=ce^{\frac{-2a}{x}}-\frac{b}{a}$

19. $y'=\frac{y\varphi'(x)-y^2}{\varphi(x)},\ \varphi(x)-$ berilgan funksiya.

j: $y=\frac{\varphi(x)}{x+c}$

20. $(2x^2y\ln y-x)y'=y$ j: $xy(c-\ln^2 y)=1$

TEST

O‘rniga qo‘yish usulida qanday almashtirish bajariladi?	* $y=uv$	$y=u^2v$	$y=uv^2$	$y=u+v$
Umumlashgan bir jinsli tenglamada qanday almashtirish bajarilishini aniqlang.	* $y=z^\alpha$	$y=z+x$	$y=\frac{u}{v}$	$y=uv$
Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: $y'=\frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$	* $y=x\sin(\ln cx)$	$y=x\ln(\sin cx)$	$y=x\ln(\cos cx)$	$y=xtg(\ln cx)$
Tenglamaning umumiy yechimini aniqlang: $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$	* $y=\frac{1}{x}(c-\cos x)$	$y=\frac{1}{x}(c-\sin x)$	$y=\frac{1}{x}(c-\cos\sin x)$	$y=\frac{1}{x}(c-\arccos x)$
Quyidagi tenglamalarni qaysi biri Bernulli tenglamasi hisoblanadi:	* $y'+P(x)y=Q(x)y^\alpha$	$y'+P(x)y+Q(x)y^2=F(x)$	$y'+Q(x)y^2=F(x)$	$y'+Q(x)y^2=F(x)y^\alpha$
Bernulli tenglamasi qanday tenglamaga keltiriladi?	* Chiziqli	Bir jinsli	Eyler	Rikkati
Rikkati tenglamasini aniqlang.	* $y'+P(x)y+Q(x)y^2=F(x)$	$y'+Q(x)y^4=F(x)$	$x^2y'+P(x)y^{\frac{1}{2}}=0$	$y'+P(x)y^3=Q(x)$
Rikkati tenglamasi avval qanday tenlamaga keltiriladi?	* Bernulli	Lagranj	O‘zgaruvchilarga ajralgan	Klero
Rikkati tenglamasining yechishda qanday almashtirish bajariladi.	* $y=y_1(x)+z$	$y=uv$	$y=\frac{u}{v}$	$y=y_1(x)z$

Differensial tenglama to‘liq bo‘lishining zaruriy va yetarli shartini aniqlang: $\left(M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0\right)$	* $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$	$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}$

MA'RUZA №6 (№7)
Mavzu: Koshi masalasi yechimi mavjudligi va yagonaligi .

Reja

1. Koshi masalasi haqida tushuncha.
2. Mavjudlik va yagonalik teoramalari. Koshi, Pikar-Lindelef, Peano teoremasi.
3. Ekvivalentlik lemmasi. Gronuoll lemmasi.

Tayanch so'z va iboralar: *birinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasi, Koshi teoremasi, Pikar – Lindelef teoremasi, Pikar teoremasi, ekvivalentlik lemmasi, Gronuoll lemmasi.*

Koshi masalasining qo'yilishi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad (1)$$

tenglama berilgan bo'lib, unda $f(x,y)$ funksiya R^2 tekislikning D sohasida aniqlangan, uzluksiz va I interval Ox o'qidagi interval bo'lsin, x_0 ni o'z ichiga oladigan I intervalni va shu I intervalda aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi hamda ushbu

$$\begin{cases} 1^0. (x, \varphi(x)) \in D \ (x \in I) \\ 2^0. \varphi'(x) = f(x, \varphi(x)) \ (x \in I) \\ 1^0. \varphi(x_0) = y_0, \ (x_0, y_0) \in D \end{cases} \qquad (2)$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ funksiyani topish talab etiladi. Bu masala qisqacha

$$\begin{cases} y' = f(x,y) \ \ (1) \\ y(x_0) = y_0 \quad (2) \end{cases}$$

kabi yoziladi va (1) tenglama uchun Koshi masalasi (yoki boshlang'ich masala) deyiladi. Yuqoridagi 1^0, 2^0 va 3^0 shartlarni qanoatlantiradigan funksiya I intervalda Koshi masalasining *yechimi* deyiladi.

Har bir (1) ko'rinishdagi differensial tenglama uchun Koshi masalasi (1) va (2) ning yechimi bormi? Agar bunday yechim bor bulsa yagonami?- degan savollarga javob berish kerak bo'ladi. Bu savollarga javob beradigan teoremalar *mavjudlik va yagonalik teoremalari* deb yuritiladi. Quyida ulardan asosiylarni keltiramiz va Koshi-Pikar teoremasini isboti bilan beramiz.

1-TEOREMA(Koshi teoremasi). *Agar* $f(x,y)$ *funksiya* D *sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, uning* y *bo'yicha xususiy hosilasi* $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, *biror* $G(G \subset D)$ *sohada* *aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda:*

1⁰. (1) tenglamaning x_0 *–ni o'z ichiga oladigan biror intervalda aniqlangan va har bir berilgan* $(x_0, y_0) \in G$ *nuqta uchun* $y(x_0) = y_0$ *boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.*

2⁰ . Agar (1) tenglamaning ikkita $y = \varphi(x)$ *va* $y = \psi(x)$ *yechimlari* x_0 *da ustma-ust tushsa, ya'ni* $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$*, bo'lsa, u holda bu* $y = \varphi(x)$ *va* $y = \psi(x)$ *yechimlar aniqlanish sohalarining umumiy qismida ustma-ust tushadi.*

TA'RIF. Agar $f(x, y)$ funksiya D sohada aniqlagana bo'lib, shu funksiya uchun shunday $L \geq 0$ son mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $(x, y_1) \in D, (x, y_2) \in D$ nuqtalar uchun ushbu

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq L |y_2 - y_1| \qquad (L)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x, y)$ funksiya D sohada y argumenti bo'yicha *Lipshits shartini qanoatlantiradi* deyiladi, L esa *Lipshits o'zgarmasi* deyiladi.

2-TEOREMA (Koshi-Pikar-Lindelef teoremasi). *Agar*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

tenglamada $f(x, y)$ *funksiya:*

1⁰) $D = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a,\ y_0 - a \leq y \leq y_0 + a\}$ *tugri to'rtburchakda uzluksiz (demak, unda chegaralangan, ya'ni* $\exists M > 0 \left| f(x, y) \right| \leq M$ *) bo'lsa,*

2⁰) y *argumenti bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda (1) tenglamani (2) boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan va* $|x - x_0| \leq h,\ h = \min(a, \frac{b}{M})$ *intervalda aniqlangan yagona yechimga ega bo'ladi.*

3-TEOREMA(Peano teoremasi). *Agar* $f(x, y)$ *funksiya* D *sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda* D *sohaning berilgan* $(x_0, y_0) \in D$ *nuqtasi uchun (1) tenglamaning ikkinchi shartini qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud bo'ladi.*

Pikar teoremasini isbotiga o'tishdan avval zarur ikki tasdiqni keltiramiz:

1-Ekvivalentlik lemmasi. *Agar* $y = \varphi(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtani o'z ichiga olgan biror* I *intervalda aniqlangan bo'lib, (1) va (2) Koshi masalasining yechimi bo'lsa, u holda* $y = \varphi(x)$ *funksiya* I *intervalda*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau)) d\tau \qquad (3)$$

integral tenglamaning yechimi bo'ladi, va aksincha, agar $y=\varphi(x)$ *funksiya* I *intervalda uzluksiz bo'lib, (3) tenglamaning yechim bo'lsa, u holda* $y=\varphi(x)$ *funksiya (1) va (2) Koshi masalasining ham yechimi bo'ladi.*

Isbot. $y=\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'lgani uchun uni ayniyatga aylantiradi, ya'ni:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x)).$$

Bu ayniyatni x_0 dan x gacha $(x_0\in I,\, x\in I)$ integrallaymiz. ($\varphi(x_0)=y_0$ ekanini hisobga olib):

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

Bundan $y=\varphi(x)$ funksiya (3) integral tenglamaning yechimi ekani kelib chiqadi. Endi $y=\varphi(x)$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo'lsin. Undan $\varphi(x_0)=y_0$ ekani va

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}(y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau)=\ 0+\frac{d}{dx}(\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau)=f(x,\varphi(x))$$

dan $y=\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi ekanligi kelib chiqadi. Lemma isbot bo'ldi.

2-Gronoull lemmasi. *Agar* $u(x)$ *funksiya* $[x_0,x_0+h]$ *intervalda* $u(x)\ge 0$, *uzluksiz bo'lib, shu intervalda ushbu*

$$u(x)\le A+B\int_{x_0}^{x} u(\tau)d\tau,\ \ A\ge 0, B\ge 0 \qquad (4)$$

integral tengsizlikni qanoatlantirsa, shu $u(x)$ *funksiya uchun quyidagi*

$$u(x)\le Ae^{B(x-x_0)},\ x\in[x_0,x_0+h] \qquad (5)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Ushbu

$$u(x)=e^{B(x-x_0)}v(x)$$

belgilashni kiritamiz. Lemma shartiga ko'ra $u(x)\ge 0$, bo'lgani uchun $v(x)\ge 0$ va $v(x)$ ham $[x_0,x_0+h]$ intervalda uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun $v(x)$ funksiya o'sha yopiq intervalning biror x_1, $x_1\in[x_0,x_0+h]$ nuqtasida maksimumga erishadi. (4) munosabatga $u(x)$ funksiya uchun ifodani qo'yib, $x=x_1$ deymiz:

$$e^{B(x_1-x_0)}v(x_1)=u(x)\le A+B\int_{x_0}^{x_1}e^{B(\tau-x_0)}v(\tau)d\tau\le$$

$$\le A+Bv(x_1)\int_{x_0}^{x_1}e^{B(\tau-x_0)}d\tau=A+Bv(x_1)\left.\frac{e^{B(\tau-x_0)}}{B}\right|_{x_0}^{x_1}=$$

$$=A+v(x_1)e^{B(x_1-x_0)}+v(x_1)$$

Bundan $v(x_1)\le A$ kelib chiqadi. Demak,

$$u(x)=v(x)e^{B(x-x_0)}\le v(x_1)e^{B(x-x_0)}\le Ae^{B(x-x_0)}$$

ya'ni $u(x)\le Ae^{B(x-x_0)}$. Lemma isbot bo‘ldi.

Gronoull lemmasidan natija sifatida $A=0$ bo‘lganda (5) ga ko‘ra $u(x)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_0+h]$ kelib chiqadi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Chiziqli differensial tenglamalar. Yechimning xossalari.
2. Integrallovchi ko‘paytuvchi va uning mavjudligi haqida teorema.

Glossariy

Koshi masalasi – $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ tenglama berilgan bo‘lib, unda $f(x,y)$ funksiya R^2 tekislikning D sohasida aniqlangan, uzluksiz va I interval x o‘qidagi interval bo‘lsin, x_0 ni o‘z ichiga oladigan I intervalni va shu I intervalda aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi hamda ushbu

$$\begin{cases}1^0.\ (x,\varphi(x))\in D\ (x\in I)\\ 2^0.\varphi'(x)=f(x,\varphi(x))(x\in I)\\ 3^0.\varphi(x_0)=y_0,\ (x_0,y_0)\in D\end{cases}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y=\varphi(x)$ funksiyani topish talab etiladi. Bu masala qisqacha

$$\begin{cases}y'=f(x,y) & (1)\\ y(x_0)=y_0 & (2)\end{cases}$$

kabi yoziladi va (1) tenglama uchun Koshi masalasi (yoki boshlang‘ich masala) deyiladi.

***Koshi teoremasi* -** Agar $f(x,y)$ funksiya D soxada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, uning y bo‘yicha xususiy xosilasi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, biror $G(G\in D)$ soxada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u xolda :

1^0. (1) tenglamaning x_0–ni o‘z ichiga oladigan biror intervalda aniqlangan va xar bir berilgan $(x_0, y_0) \in G$ nuqta uchun $y(x_0) = y_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.

2^0 . Agar (1) tenglamaning ikkita $y = \varphi(x)$ va $y = \psi(x)$ yechimlari x_0 da ustma-ust tushsa, ya'ni $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$, bo‘lsa, u xolda bu $y = \varphi(x)$ $y = \psi(x)$ yechimlar aniqlanish soxalarining umumiy qismida ustma-ust tushadi.

Lipshits sharti - Agar $f(x, y)$ funksiya D soxada aniqlagana bo‘lib, shu funksiya uchun shunday $L \geq 0$ son mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $(x, y_2) \in D$ $(x, y_2) \in D$ nuqtalar uchun ushbu

$$\left| f(x, y_1) - f(x, y_2) \right| \leq L |y_2 - y_1| \qquad (L)$$

tengsizlik bajarilsa, u xolda $f(x, y)$ funksiya D soxada u bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi, L esa Lipshits o‘zgarmasi deyiladi.

Koshi-Pikar-Lindelef teoremasi - Agar

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

tenglamada $f(x, y)$ funksiya:

1^0) $D = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \ y_0 - b \leq y \leq y_0 + b \}$

tugri to‘rtburchakda uzluksiz(demak, unda chegaralangan, ya'ni $\exists M > 0 \ |f(x, y)| \leq M)$ bo‘lsa,

2^0) y bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda (1) tenglama (2) boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan va $|x - x_0| \leq h, \ h - \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$ intervalda aniqlangan yagona yechimga ega bo‘ladi.

Peano teoremasi - Agar $f(x, y)$ funksiya D sohada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u xolda D sohaning berilgan $(x_0, y_0) \in D$ nuqtasi uchun (1) tenglamaning ikkinchi shartini qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud bo‘ladi.

Gronoull lemmasi. Agar $u(x)$ funksiya $[x_0, x_0 + h]$ intervalda $u(x) \geq 0$, uzluksiz bo‘lib, shu intervalda ushbu

$$u(x) \leq A + B\int_{x_0}^{x} u(\tau)d\tau, A \geq 0, B \geq 0$$

integral tengsizlikni qanoatlantirsa, shu $u(x)$ funksiya uchun quyidagi

$$u(x) \leq Ae^{B(x - x_0)}, x \in [x_0, x_0 + h]$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching:

$(1 - x^2)y' - xy = xy^2; \quad y(0) = 0,5$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Koshi masalasi qanday qo‘yiladi?
2. Koshi masalasi deb nimaga aytiladi?
3. Lipishu o‘zgarmasi deb nimaga aytiladi?
4. Ekvivalentlik lemmasini isbotlang?
5. Gronoull lemmosini isbotlang?

Amaliy mashg’ulot-6

1. $xdx=(x^2-2y+1)dy$ j: $x^2=ce^{2y}+2y$
2. $(x+1)(yy'-1)=y^2$ j: $y^2=c(x+1)^2-2(x+1)$
3. $x(e^y-y^1)=2$ j: $e^{-y}=ex^2+x$
4. $(x^2-1)y'\sin y+2x\cos y=2x-2x^3$ j: $\cos y=(x^2-1)\ln c(x^2-1)$
5. $y(x)=\int_0^x y(t)dt-x+1$ j: $y=2e^x-1$
6. $\int_0^x (x-t)y(t)dt=2x+\int_0^x y(t)dt$ j: $y=-2e^x$
7. $x^2y^1+xy+x^2y^2=4;\quad y=\frac{2}{x}-$ xususiy yechim.

j: $y=\frac{2}{x}+\frac{4}{cx^5-x}$

8. $3y^1+y^2+\frac{2}{x^2}=0;\quad y=\frac{1}{x}-x\cdot e.$ j: $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{cx^{2/3}+x}$
9. $xy^1-(2x+1)y+y^2=-x^3;\quad y=x-$ xususiy yechim.

j: $y=x+\frac{x}{x+c}$

10. $y^1-2xy+y^2=5-x^2;\quad y=x+2-$ xususiy yechim j: $y=x+2+\frac{4}{ce^{4x}-1}$.
11. $y^1+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x;\quad y=e^x-$ xususiy yechim j: $y=e^x-\frac{1}{x+c}$

TEST

$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ tenglamada $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$ bo‘lsa, qanday almashtirish bajariladi.	* $z=ax+by$	$z=ax$	$z=by$	$z=ax+c$
Birinchi tartibli chiziqli tenglamani yechish usuli nomini aniqlang.	* Ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usuli	Aniqmas koeffitsientlar usuli	Ketma-ket yaqinlashish usuli	Ketma-ket yo‘qotish usuli
O‘rniga qo‘yish usulida qanday almashtirish bajariladi?	* $y=uv$	$y=u^2v$	$y=uv^2$	$y=u+v$

Umumlashgan bir jinsli tenglamada qanday almashtirish bajarilishini aniqlang.	* $y = z^{\alpha}$	$y = z + x$	$y = \frac{u}{v}$	$y = uv$
Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$	* $y = x\sin(\ln cx)$	$y = x\ln(\sin cx)$	$y = x\ln(\cos cx)$	$y = xtg(\ln cx)$
Tenglamaning umumiy yechimini aniqlang: $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$	* $y = \frac{1}{x}(c - \cos x)$	$y = \frac{1}{x}(c - \sin x)$	$y = \frac{1}{x}(c - \cos\sin x)$	$y = \frac{1}{x}(c - \arccos x)$
Quyidagi tenglamalarni qaysi biri Bernulli tenglamasi hisoblanadi:	* $y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$	$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = F(x)$	$y' + Q(x)y^2 = F(x)$	$y' + Q(x)y^2 = F(x)y^{\alpha}$
Bernulli tenglamasi qanday tenglamaga keltiriladi?	* Chiziqli	Bir jinsli	Eyler	Rikkati
Rikkati tenglamasini aniqlang.	* $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = F(x)$	$y' + Q(x)y^4 = F(x)$	$x^2 y' + P(x)y^{\frac{1}{2}} = 0$	$y' + P(x)y^3 = Q(x)$
Rikkati tenglamasi avval qanday tenlamaga keltiriladi?	* Bernulli	Lagranj	O‘zgaruvchilarga ajralgan	Klero

MA'RUZA № 8.

Mavzu: Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalar. Parametr kiritish usuli.

Reja:

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli tenglama.
2. n-chi darajali birinchi tartibli tenglama.
3. y - ga nisbatan yechilgan va x qatnashmagan tenglama.
4. x - ga nisbatan yechilgan va y qatnashmagan tenglama.
5. y yoki x ga nisbatan yechilmagan tenglama.
6. Parametr kiritish usuli.

Tayanch so’z va iboralar: *hosilaga nisbatan yechilmagan 1-chi tartibli tenglama, n-darajali birinchi tartibli tenglama, y-ga nisbatan yechilgan va x qatnashmagan tenglama, x-ga nisbatan yechilgan va uqatnashmagan tenglama, u yoki x-ga nisbatan yechilmagan tenglama, parametr kiritish usuli.*

1. Shu paytga qadar hosilaga nisbatan yechilgan, ya'ni

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamalarni tekshirish bilan cheklanib keldik. Biroq, oldingi ma'ruzalarda aytib o‘tilganidek, birinchi tartibli tenglama umuman aytganda,

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

ko‘rinishga ega bo‘lishi mumkin, shu bilan birga (2) ko‘rinishdagi tenglamadan (1) ko‘rinishdagi tenglamaga har doim ham o‘tish mumkin bo‘lavermaydi. Bunday holda (2) tenglama hosilaga *nisbatan yechilmagan differensial tenglama* deyiladi. (2) differensial tenglamani integrallash masalasini *parametr kiritish usuli* bilan hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani integrallash masalasiga keltirish mumkin.

(2) tenglamaning ayrim xususiy hollarini qarab chiqamiz va ularni integrallash yo‘llarini ko‘rsatamiz.

2. **n-darajali birinchi tartibli tenglama.** n-darajali birinchi tartibli tenglamaning chap tomoni y' ga nisbatan butun ratsional funksiyadan iborat, ya'ni quyidagi ko‘rinishga ega:

$$(y')^n + p_1(y')^{n-1} + p_2(y')^{n-2} + ... + p_{n-1}y' + p_n y = 0,$$

bu yerda n butun son, $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ lar x va y ning funksiyalari.

Bu tenglamani y' ga nisbatan yecha olamiz deb faraz qilaylik. Bunda y' uchun, umuman aytganda n ta har xil ifoda hosil bo‘ladi:

$$y' = f_1(x,y),\ y' = f_2(x,y), \dots,\ y' = f_n(x,y)\ . \tag{3}$$

Bu holda (2) tenglamani integrallash birinchi tartibli n ta (1) tenglamani integrallashga keltirildi. Ularning umumiy integrallari(yechimlsri) mos ravishda quyidagilar bo‘lsin:

$$\Phi_1(x,y,C_1) = 0,\ \Phi_2(x,y,C_2) = 0, \dots, \Phi_n(x,y,C_n) = 0 \tag{4}$$

(4) integrallarning chap tomonlarni o‘zaro ko‘paytirib, nolga tenglaymiz:

$$\Phi_1(x,y,C_1) \cdot \Phi_2(x,y,C_2) \cdot \ldots \cdot \Phi_n(x,y,C_n) = 0\ . \tag{5}$$

Agar (5) tenglamani y ga nisbatan yechadigan bo‘lsak, (2) tenglamaning yechimini hosil qilamiz. Haqiqatan ham, (5) tenglamaning har qanday yechimi (4) tenglamalarning birini, binobarin, (1) tenglamalarning birontasini va shunday qilib, (2) tenglama (1) tenglamalarga yoyilgani uchun uni ham qanoatlantiradi. Umumiylikka ziyon keltirmasdan, (5) dagi barcha $C_1, C_2, \dots, C_n$ o‘zgarmaslarni bitta C bilan almashtirish va tenglamani

$$\Phi_1(x,y,C) \cdot \Phi_2(x,y,C) \cdot \ldots \cdot \Phi_n(x,y,C) = 0 \tag{6}$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu (2) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun (6) tenglamaning n ta tenglamaga ajralishini ko‘rish mumkin:

$$\Phi_1(x,y,C) = 0,\ \Phi_2(x,y,C) = 0, \dots, \Phi_n(x,y,C) = 0 \tag{7}$$

Bu yerda C - istalgan qiymatlarni qabul qiluvchi ixtiyoriy o‘zgarmas, shu sababli (4) tenglamadan hosil qilinadigan barcha yechimlar (7) tenglamadan hosil qilinadigan yechimlar orasida bo‘ladi.

Misol. Ushbu $(y')^2 - \dfrac{xy}{a^2} = 0$ tenglamaning umumiy integralini topamiz. Tenglamaning chap tomonini ko‘paytuvchilarga ajratib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\left(y' - \frac{\sqrt{xy}}{a}\right)\left(y' + \frac{\sqrt{xy}}{a}\right) = 0\,,$$

bu yerdan $y' - \dfrac{\sqrt{xy}}{a} = 0$ va $y' + \dfrac{\sqrt{xy}}{a} = 0$. Bu ikkala tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Uning umumiy integrallari:

$$\sqrt{y} - \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0, \qquad \sqrt{y} + \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0\,.$$

Shuning uchun berilgan tenglamaning umumiy integrali ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$(\sqrt{y} - C)^2 - \frac{x^3}{9a^2} = 0,$$

3. y **ga nisbatan yechilgan va** x **qatnashmagan tenglama.** y ga nisbatan yechilgan va x qatnashmagan tenglama

$$y = \varphi(y') \qquad (8)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu holda parametr kiritish usulini qo‘llash maqsadga muvofiqdir. U qaralayotgan o‘zgaruvchilarni parametr orqali ifodalash va yechimni parametrik shaklda izlashdan iborat.

$y' = p$ deylik. U holda berilgan tenglama

$$y = \varphi(p) \qquad (9)$$

kurinishda yoziladi. Agar x ni p va C orqali ifodalovchi yana bitta tenglama topish mumkin bo‘lsa, u holda bu ikkita tenglamadan iborat to‘plam (8) tenglamaning parametrik shakldagi umumiy yechimi bo‘ladi. Ulardan p ni yo‘qotib, x, y va C orasidagi munosabatni, yana odatdagi shakldagi umumiy integralni hosil qilish mumkin.

Ikkinchi tenglamani quyidagicha topamiz. $y' = p$ tenglikni $dx = \frac{dy}{p}$ ko‘rinishda qayta yozib olamiz, bu yerdan $x = \int \frac{dy}{p} + C$. Bu yerdagi integralni bo‘laklab integrallaymiz:

$$\int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2} + C = \frac{y}{p} + \int \frac{\varphi(p)dp}{p^2} + C .$$

Demak,

$$x = \frac{y}{p} + \int \frac{\varphi(p)dp}{p^2} + C \qquad (10)$$

(10) va (9) tenglamalar sistemasi (8) tenglamaning parametrik shakldagi umumiy yechimi bo‘ladi. Agar iloji bo‘lsa, bu tenglamalardan p ni yo‘qotib, $\Phi(x, y, C) = 0$ shakldagi umumiy integralni hosil qilamiz.

4. *x* ga nisbatan yechilgan va *y* qatnashmagan tenglama. x ga nisbatan yechilgan va y qatnashmagan tenglama

$$x = \varphi(y') \qquad (11)$$

ko‘rinishga ega.

Yuqoridagidek ish ko‘ramiz. $y' = p$ deymiz. Tenglama quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$x = \varphi(p) \qquad (12)$$

$y' = p$ tenglikni bunday yozib olamiz: $dy = pdx$. Bu yerdan

$$y = \int pdx = px - \int xdp + C$$

yoki

$$y = p\varphi(p) - \int \varphi(p)dp + C \qquad (13)$$

(12) va (13) tenglamalar sistemasi (11) tenglamaning parametrik shakldagi umumiy

yechimidir. Ulardan p parametrni yo‘qotib, $\Phi(x, y, C) = 0$ umumiy integralni hosil qilamiz.

Shuni qayd etish lozimki, (9), (10),(12) va (13) tengliklardagi p o‘zgaruvchi ixtiyoriy parametr rolini o‘ynaydi va istalgan boshqa harf bilan almashtirilishi mumkin.

5. **x yoki y qatnashmagan, biroq y yoki x ga nisbatan yechilgan bo‘lishi shart bo‘lmagan tenglama.** x yoki y qatnashmagan, biroq y yoki x ga nisbatan yechilgan bo‘lishi shart bo‘lmagan tenglama ushbu ko‘rinishga ega:

$$F(y, y') = 0 \tag{14}$$

yoki

$$F(x, y') = 0$$

Shu bilan birga tenglamadan y ni (birinchi tenglamada) yoki x ni (ikkinchi tenglamada), shuningdek, $p = y'$ ni t parametr orqali ifodalash mumkin deb faraz qilamiz. Yuqoridagi 3 va 4 hollardagi kabi bu yerda ham tenglamaning umumiy yechimi parametrik shaklda hosil bo‘ladi.

Masalan, $F(y, p) = 0$ tenglama bo‘lgan holni ko‘raylik.

$y = \varphi(t)$ deb, tenglamadan $p = \psi(t)$ ni yoki aksincha, $p = \psi(t)$ deb tenglamadan $y = \varphi(t)$ ni topdik deb faraz qilaylik. U holda, bir tomondan $dy = pdx = \psi(t)dx$, ikkinchi tomondan $dy = \varphi'(t)dt$. Bu dy uchun ikkala ifodani taqqoslab, $\psi'(t)dx = \varphi'(t)dt$ ni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt \quad \text{va} \quad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C \ .$$

Umumiy yechim parametrik shaklda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C \\ y = \varphi(t) \end{cases} \tag{15}$$

Misol. $y = a\sqrt{1 + y'^2}$ tenglamaning umumiy yechimini topaylik. $p = y' = sht$ deymiz, u holda $y = a\sqrt{1 + sh^2 t} = acht$.

Ushbu $\dfrac{dy}{dx} = p$ tenglikdan $dx = \dfrac{dy}{p}$ ni topamiz. $dy = a\,sht\,dt$ bo‘lgani uchun $dx = adt$ va $x = at - C$. Umumiy yechim parametrik shaklda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x = at - C \\ y = a\,sht \end{cases}$$

t parametrni yo‘qotamiz. Buning uchun birinchi tenglamadan t ni topib, 2-chi tenglamaga qo‘yamiz. Natijada $t = \dfrac{x + C}{a}$ va umumiy yechim

$$y = a\,ch\frac{x+C}{a}$$

bo‘ladi.

6. Parametr kiritish usuli.

$$F(x, y, y') = 0 \qquad (1)$$

tenglama ushbu $x = \psi(u,v),\ y = \chi(u,v),\ y' = \omega(u,v),\ (u, v -$ parametrlar) parametrik ko‘rinishda yozilgan bo‘lsin, u holda

$$F(\psi(u,v), \chi(u,v), \omega(u,v)) = 0$$

tenglamaga egamiz. Agar ψ, χ, ω funksiyalar biror ochiq T to‘plamda aniqlangan va differensiallanuvchi bo‘lsa, unda

$$dx = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial\chi}{\partial u}du + \frac{\partial\chi}{\partial v}dv$$

bo‘ladi. Endi

$$\frac{dy}{dx} = \omega(u,v)$$

bo‘lgani uchun

$$\frac{\partial\chi}{\partial u}du + \frac{\partial\chi}{\partial v}dv = \omega(u,v)\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right]$$

tenglama u va v parametrlar orasidagi differensial bog‘lanishni ifodalaydi. Bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial u} - \omega\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)du = \left(\omega\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}\right)dv$$

Agar $\frac{\partial\chi}{\partial u} - \omega\frac{\partial\psi}{\partial u} \neq 0$ bo‘lsa, u ni no'malum funksiya, v ni esa erkli o‘zgaruvchi deb, ushbu

$$\frac{du}{dv} = \frac{\omega\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}}{\frac{\partial\chi}{\partial u} - \omega\frac{\partial\psi}{\partial u}} \qquad (2)$$

hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglamaga kelamiz. Shunga o‘xshash, agar $\omega\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v} \neq 0$ bo‘lsa, u holda ushbu

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{\partial\chi}{\partial u} - \omega\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\omega\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}} \qquad (3)$$

differensial tenglamaga kelamiz.

Agar (2) yoki (3) differensial tenglama kvadraturalarda integrallansa, u holda berilgan (1) tenglama ham integrallanadi. Haqiqatan ham, agar (2) tenglamaning umumiy yechimi $u = u(v, C)$ bo‘lsa,

$$\begin{cases} u = u(v, C) \\ x = \psi(u(v, C), v) \\ y = \chi(u(v, C), v) \end{cases}$$

(bu yerda, v-parametr, C- o‘zgarmas) (1) tenglama umumiy yechimining parametrik ko‘rinishi bo‘ladi.

(3) uchun umumiy yechim

$$\begin{cases} v = v(u, C) \\ x = \psi(u, v(u, C)) \\ y = \chi(u, v(u, C)) \end{cases}$$

ko‘rinishda (bu yerda, u-parametr, C- o‘zgarmas) bo‘ladi.

Masalan, $F(x, y, y') = 0$ tenglama $y = f(x, y')$ ko‘rinishda yozilish mumkin bo‘lganda $u = x, v = y'$. $x = f(y, y')$ ko‘rinishda yozilganda esa $u = y, v = y'$ deyilishi lozim. Birinchi holda

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x, v) \\ y' = v \end{cases}$$

va

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\frac{\partial f}{\partial v}}{v - \frac{\partial f}{\partial x}}$$

differensial tenglamaga ega bo‘ladi.

Ikkinchi holda

$$\begin{cases} x = f(y, v) \\ y = y \\ y' = v \end{cases}$$

va

$$\frac{dy}{dv} = \frac{v\frac{\partial f}{\partial v}}{1 - v\frac{\partial f}{\partial y}}$$

differensial tenglamaga ega bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. O‘zgarmasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamalari.
2. Parametr kiritish yo‘li bilan tenglamalarni integrallash.

Glossariy

y ***ga nisbatan yechilgan va*** x ***qatnashmagan tenglama*** **-** $y=\varphi(y')$ ko‘rinishda bo‘lgan tenglama.

x **ga nisbatan yechilgan va** y **qatnashmagan tenglama -** $x=\varphi(y')$ ko‘rinishga ega tenglama.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $(x+y^2)dx-2xydy=0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. n chi darajali birinchi tartibli tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. u-ga nisbatan yechilmagan va x qatnashmagan tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. x-ga nisbatan yechilgan va u qatnashmagan tenglama qanday lo‘rinishda bo‘ladi?
5. $F(x,y,y^1)=0$ tenglamani paralitrik ko‘rinishda qanday yoziladi.

Amaliy mashg’ulot-7
To‘liq differensialli tenglamalar.
Integrallovchi ko‘paytma.

Ushbu tenglamani qaraylik:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

Agar (1) tenglamaning chap tomoni biror F(x,y) funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lsa (1) tenglama to‘liq differensialli tenglama deyiladi. Bunday holda (1) tenglamani yechish uchun $dF=F_x^{'}dx+F_y^{'}dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ekanligidan $F(x,y)=c$ yechimni olamiz, bu yerda s-ixtiyoriy konstanta. Buning uchun $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ bo‘lishi kerak.

Misol-1: Berilgan $(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

shartni tekshiramiz:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2.$$

Demak, berilgan tenglama to‘liq differensialli tenglama. Shuning uchun

$$F_x^{'}=2x+3x^2y,\quad F_y^{'}=x^3-3y^2$$

Bu yerdan $F=\int F_x^{'}dx=\int(2x+3x^2y)dx+\varphi(y)=x^2+x^3y+\varphi(y).$ $\varphi(y)$ funksiyani topish uchun $F=x^2+x^3y+\varphi(y)$ ifodani $F_y^{'}=x^3-2y^2$ ga qo‘yamiz:

$$x^3+\varphi'(y)=x^3-3y^2,\quad \varphi'(y)=-3y^2.$$

Demak $\varphi(y)=-y^3+c$

$$F=x^2+x^3y-y^3=c.$$

deyish mumkin.

Misol-2: Ushbu $(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0.$ differensial tenglamani yeching.

Bu tenglamada $M(x,y)=(2xy+3y^2),\quad N(x,y)=x^2+6xy-3y^2$ bo‘lib,

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+6xy-3y^2)=2x+6y$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy+3y^2)=2x+6y$$

.

bo‘ladi.

Demak, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Bu esa berilgan tanglamaning chap tomonidagi ifoda biror funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lishini bildiradi:

$$du(x,y)=(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy.$$

Ravshanki,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2xy+3y^2,$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=x^2+6xy-3y^2. \qquad (**)$$

Endi $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2xy+3y^2.$

tenglikning har ikki tomonini x bo‘yicha integrallab topamiz:

$$u(x,y)=\int(2xy+3y^2)dx=2y\frac{x^2}{2}+3y^2x+c(y)=x^2y+3xy^2+c(y).$$

Bu tenglikdagi $S(u)$ ni topish uchun

$$u(x,y)=x^2y+3xy^2+c(y). \qquad (***)$$

ni u bo‘yicha differensiyalaymiz:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+3xy^2+c(y))=x^2+6xy+c'(y).$$

Demak (**) munosabatga ko‘ra

$$x^2 = 6xy + c'(y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

ya'ni $c'(y) = -3y^2$ bo‘ladi.

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Uni yechamiz:

$$c'(y) = -3y^2 \Rightarrow \frac{dc(y)}{dy} = -3y^2 \Rightarrow dc(y) = -3y^2 dy$$

$$\Rightarrow c(y) = -y^3 + C_1.$$

Bunda S$_1$-ixtiyoriy o‘zgarmas son. Topilgan *s*(*u*) ni (**) tenglikdagi s(u) ni o‘rniga qo‘ysak, unda $u(x,y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + c_1$.
ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, berilgan tenglamaning yechimi

$$u(x,y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + c_1 = c_1$$

ya'ni $x^2y + 3xy^2 - y^3 = c^*$ bo‘ladi.

Bunda S*-o‘zgarmas son.

2. (1) tenglama to‘liq differensialli bo‘lmasa quyidagicha ish yuritiladi. (1) tenglama biri $m(x,y) \neq 0$ funksiyaga ko‘paytiriladi:

$$m(x,y)\cdot M(x,y)dx + m(x,y)\cdot N(x,y)dy = 0 \qquad (4)$$

shundan so‘ng bu tenglama to‘liq differensiyalli tenglamaga aylansa, uni yuqoidagi usul bilan yechish mumkin. Bu holda $m(x,y)$ funksiya integrallovchi ko‘paytma deyiladi.

Agar *M*,*N*-differensiallanuvchi, bir paytda 0 ga aylanmasa integrallovchi ko‘paytma mavjud. Lekin, umumiy holda $m(x,y)$ ni topish uchun biror bir qoida yo‘q. Ba'zi tenglamalarni yechishda integrallovchi ko‘paytma topish uchun mavjud ushbu formulalardan foydalanish mumkin:

$$d(x,y)ydx + xdy,\ \ d(y^2) = 2ydy$$

$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2},\ \ d\ln(y) = \frac{dy}{y}$ va hakazo.

Misol-3. Tenglama yechilsin:

$$ydx - (4x^2y + x)dy = 0 \qquad (5)$$

Avvalo, to‘liq differensialni tashkil etuvchi ko‘paytmalarni ajratamiz.

$ydx - xdy = -x^2 d\left(\frac{y}{x}\right)$ bo‘lganligidan (5) tenglamani $-x^2$ ga bo‘lamiz va hosil qilamiz:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 4ydy = 0 \Rightarrow d\left(\frac{y}{dx} + d(2y^2) = 0\right)$$

Bu yerdan

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = c.$$

Bo‘lishda $x = 0$ yechim yo‘qotilgan edi.

Izoh: (5) tenglamani $-x^2$ ga bo‘lgandan keyin to‘liq differensialli tenglama olganimiz uchun integrallovchi ko‘paytma $-\frac{1}{x^2}$ ga teng.

Misol-4: Ushbu $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ tenglamani yeching. Bu tenglamada

$$M(x,y) = x + y^2,\ \ N(x,y) = -2xy$$

bo‘lib, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y, \quad \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-2y$

bo‘ladi: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Berilgan tenglama to‘la differensial tenglama emas. Integrallovchi ko‘paytmani topamiz.

Avvalo $\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=\frac{2y-(-2y)}{-2xy}=-\frac{2}{x}.$$

Unda $\dfrac{d\ln\mu(x)}{dx}=-\dfrac{2}{x}$ bo‘lib, $\ln\mu(x)=-2\ln|x|$, $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$ bo‘ladi. Berilgan tenglamani $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ga ko‘paytirsak, u to‘la differensial tenglamaga aylanadii:

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-\frac{2xy}{x^2}dy=0$$

Bu tenglamaning chap tomonidagi ifoda uchun

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-\frac{2xy}{x^2}dy=\frac{1}{x}dx-\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=$$

$$=d\ln|x|-d\,\frac{y^2}{x}=d\left(\ln|x|-\frac{y^2}{x}\right)$$

bo‘ladi. Unda tenglama ushbu $d\left(\ln|x|-\dfrac{y^2}{x}\right)=0$ ko‘rinishga keladi. Bu tenglamaning yechimi

$$\ln|x|-\frac{y^2}{x}=\ln c,$$

ya'ni $x=c\cdot e^{\frac{y^2}{x}}$ bo‘ladi.

3. Ba'zan (1) tenglamada biror $\varphi(x,y)$ funksiyaning to‘liq kvadrati ajratilsa, u holda (1) tenglamada (x,u) o‘zgaruvchilardan (x,z) ni (y,z) o‘zgaruvchiga o‘tilsa tenglama soddalashadi, bu yerda $z=\varphi(x,y)$.

Misol-5: $ydx-(x^3y+x)dx=0$ tenglama yechilsin. Yuqoridagi misoldek to‘liq differensialga ajratamiz:

$$d\left(\frac{y}{x}\right)+xydy=0$$

$z=y/x$ desak,

$$dz+\frac{y^2}{z}dz=0\Rightarrow z+y^2\ln z=e\Rightarrow\frac{y}{x}+y^2\ln\left(\frac{y}{x}\right)=e.$$

yechimga kelamiz.

Misol-6: $(xy+y^4)dx+(x^2-xy^3)dy=0$.

tenglama yechilsin. Hadlarni shunday ixchamlaymizki, to‘liq differensial ajralsin:

$$x(ydx+xdy)+y^3(ydx-xdy)=0,$$

$$xd(xy)+y^3d\left(\frac{x}{y}\right)=0.$$

x ga bo‘lib, $xy=u,\ \frac{x}{y}=v$ deb almashtirish bajaramiz:

$$du+\frac{u^2}{v^2}dv=0\Rightarrow\frac{du}{u^2}+\frac{dv}{v^2}=0\Rightarrow u^{-1}+v^{-1}=C.$$

1. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$ j: $\frac{x^2}{2}+xy+y^2=C$
2. $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$ j: $\frac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C$
3. $(x^3-3xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)dy=0$ j: $\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2y^2+2x+\frac{y^3}{3}=C$
4. $xdx+ydy=\frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ j: $x^2+y^2-2arctg\frac{y}{x}=C$
5. $\frac{2xdx}{y^3}+\frac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ j: $x^2-y^2=Cy^3$
6. $(x+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\frac{x}{y}\right)dy=0;\quad y(0)=2$ j: $\frac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2$
7. $\left(4-\frac{y^2}{x^2}\right)dx+\frac{2y}{x}dy=0$ j: $4x^2+y^2=cx$
8. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$ j: $x^3e^y-y=c$
9. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$ j: $y+xe^{-y}=c$
10. $2x\cos^2ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$ j: $x^2\cos^2y+y^2=c$

TEST

Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: $y'=\frac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$	* $y=x\sin(\ln cx)$	$y=x\ln(\sin cx)$	$y=x\ln(\cos cx)$	$y=xtg(\ln cx)$
Tenglamaning umumiy yechimini aniqlang: $y'+\frac{1}{x}y=\frac{\sin x}{x}$	* $y=\frac{1}{x}(c-\cos x)$	$y=\frac{1}{x}(c-\sin x)$	$y=\frac{1}{x}(c-\cos\sin x)$	$y=\frac{1}{x}(c-\arccos x)$
Quyidagi tenglamalarni qaysi biri Bernulli tenglamasi hisoblanadi:	* $y'+P(x)y=Q(x)y^\alpha$	$y'+P(x)y+Q(x)y^2=F(x)$	$y'+Q(x)y^2=F(x)$	$y'+Q(x)y^2=F(x)y^\alpha$
Bernulli tenglamasi qanday tenglamaga keltiriladi?	* Chiziqli	Bir jinsli	Eyler	Rikkati
Rikkati tenglamasini aniqlang.	* $y'+P(x)y+Q(x)y^2=F(x)$	$y'+Q(x)y^4=F(x)$	$x^2y'+P(x)y^{\frac{1}{2}}=0$	$y'+P(x)y^3=Q(x)$
Rikkati tenglamasi avval qanday tenlamaga keltiriladi?	* Bernulli	Lagranj	O‘zgaruvchilarga ajralgan	Klero

Rikkati tenglamasining yechishda qanday almashtirish bajariladi.	* $y = y_1(x) + z$	$y = uv$	$y = \frac{u}{v}$	$y = y_1(x)z$
Differensial tenglama to‘liq bo‘lishining zaruriy va yetarli shartini aniqlang: $\left(M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0\right)$	* $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$	$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}$
Quyidagi Koshi masalasini yeching: $\begin{cases} 2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0 \\ y\|_{x=0} = 0 \end{cases}$	* $x^2 \cos^2 y + y^2 = 0$	$x^2 tg^2 y + y^2 = 0$	$y^2 \cos^2 y + x^2 = 0$	$x^2 \sin^2 y + y^2 = 0$
Quyidagi tenglama uchun integralovchi ko‘paytuvchi qanday bo‘ladi: $\left(x^2 - y\right)dx + \left(x^2 y^2 + x\right)dy = 0$	* $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mu(x) = x^2$	$\mu(x) = \frac{1}{x^3}$	$\mu(x) = x^3$

MA'RUZA № 9

Mavzu: Maxsus nuqta va maxsus yechim.

Reja:

1. Maxsus nuqta.
2. Maxsus nuqta turlari.
3. Maxsus yechim.
4. O‘ramalar.

Tayanch so’z va iboralar: *maxsus nuqta, tugun maxsus nuqta, dikritik tugun maxsus nuqta, egar maxsus nuqta, fokus maxsus nuqta, markaz maxsus nuqta, maxsus yechim, o’rama chiziq.*

TA’RIF. *Differensial tenglama yechimining mavjudligi yoki yagonaligi buziladigan nuqtasi bu tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.*

Boshqacha qilib aytganda, Koshi teoremasi shartlari buziladigan nuqtalar *maxsus nuqtalar* deyiladi. Maxsus nuqtalar orqali yo birorta ham integral egri chiziq o‘tmaydi, yo bir necha chiziq o‘tadi.

Koshi teoremasini shartlari faqat yetarli bo‘lib, zaruriy emasligini qayd qilib o‘taylik. Shuning uchun $f(x,y)$ funksiyaning uzilish nuqtalari orasidan va $\frac{\partial f}{\partial y}$ hosila mavjud bo‘lmagan nuqtalar orasidan izlash kerak, biroq bu nuqtalarning hammasi ham maxsus nuqtalar bo‘lishi shart emas.

Integral egri chiziqlar maxsus nuqta atrofida o‘zini har xil tutishi mumkin. Maxsus nuqtalarning mumkin bo‘lgan ayrim turlari bilan misollar orqali tanishamiz. Bir jinsli

$$y' = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}$$

differensial tenglamani qarash bilan chegaralanamiz. Bu tenglamaning ko‘rinib turgan maxsus nuqtasi $(0,0)$ bo‘lib, unda o‘ng tomon aniqlanmagan. Koeffitsientlar orasida turli munosabatlar maxsus nuqta (koordinata boshi) atrofida integral egri chiziqlar joylashishining u yoki bu tipiga olib keladi.

1-misol. Ushbu

$$y' = \frac{2y}{x} \tag{1}$$

tenglamani tekshiramiz. O‘zgaruvchilarni ajratib va integrallab umumiy yechimni topamiz:

$$y = Cx^2 \tag{2}$$

Shunday qilib, umumiy yechim uchi koordinatalar boshida bo‘lib absissalar o‘qiga urinadigan parabolalar oilasidan iborat ekan. Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar joylashishning umumiy ko‘rinishi 1-rasmda tasvirlangan. Integral egri chiziqlari ana shunday joylashgan differensial tenglamaning maxsus nuqtasi *tugun* deyiladi.

2-misol. Ushbu tenglama berilgan:

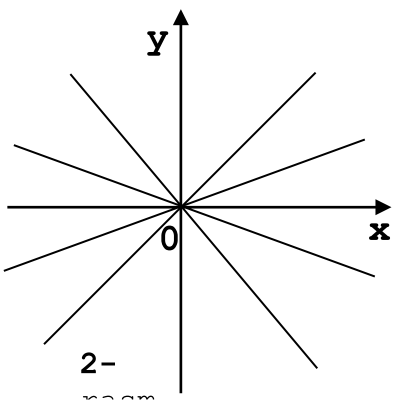
$$y' = \frac{y}{x} \tag{3}$$

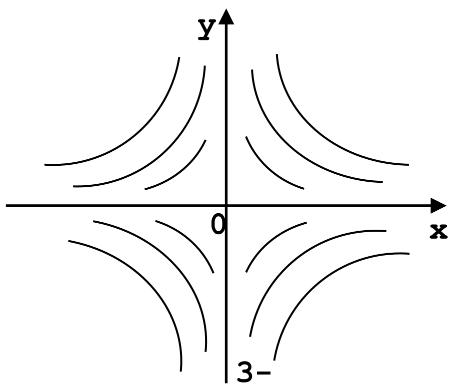
Uning umumiy yechimi $y = Cx$, ya'ni koordinatalar boshidan o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar (ordinata o‘qi ham, chunki yechimni $x = Cy$ ko‘rinishda yozish mumkin edi) oilasidan iborat. Bunday nuqta ham *tugun* (*dikritik tugun*) deyiladi. Ushbu hol oldingi holdan har bir integral egri chiziq maxsus nuqtada o‘zgaruvchi yo‘nalishiga egaligi bilan farq qiladi. (2-rasm).

3-misol. Ushbu

$$y' = -\frac{y}{x} \tag{4}$$

tenglama uchun umumiy integral $xy = C$ dan, ya'ni asimptotalari koordinata o‘qlaridan iborat bo‘lgan giperbolalar oilasidan iborat. Xususiy holda, $C = 0$ da $x = 0$ va $y = 0$ (koordinata o‘qlari)ni hosil qilamiz. Bu integral egri chiziqlar koordinatalar boshidan o‘tadi, qolgan hamma chiziqlar esa maxsus nuqta orqali o‘tmaydi. Bu turdagi maxsus nuqta *egar* deyiladi.





4-misol. Ushbu tenglamani qaraymiz:

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \tag{5}$$

$y = ux$ o‘rniga qo‘yish (5) ni

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

ko‘rinishga keltiriladi, bu yerdan o‘zgaruvchilarni ajratib va integrallab topamiz:

$$\ln C + arctgu - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x$$

yoki

$$x\sqrt{1+u^2} = Ce^{arctgu}.$$

Eski o‘zgaruvchilarga qaytsak,

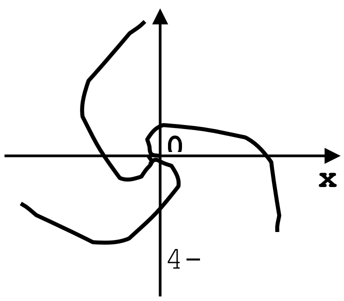
$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{arctg\frac{y}{x}}. \qquad (6)$$

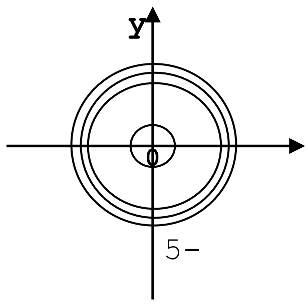
Qutb koordinata ($x=\rho\cos\varphi,\ y=\rho\sin\varphi$) larga o‘tib, (6) tenglamani $\rho = Ce^{\varphi}$ ko‘rinishga keltiramiz. Bu koordinatalar boshi atrofida cheksiz sondagi ($\varphi\to-\infty$ da) o‘ramalar hosil qiluvchi *logarifmik spirallar* oilasidir. Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar oilasining ko‘rinishi 4-rasmda keltirilgan. Bunday maxsus nuqta *fokus* deb nomlanadi.

5-misol. Ushbu tenglamani qaraylik:

$$y' = -\frac{x}{y}. \qquad (7)$$

Bu tenglamani integrallash $x^2+y^2 = C = C_1^2$ ni, ya'ni markazi koordinatalar boshida bo‘lgan radiusi C_1ga teng *aylanalar* oilasini beradi. Maxsus nuqta orqali bitta ham integral egri chiziq o‘tmaydi(5- rasm). Bunday maxsus nuqta *markaz* deyiladi.





2. **TA’RIF**. *Differensial tenglamada uning umumiy yechimidan ixtiyoriy o‘zgarmasning xech bir qiymatida hosil qilinishi mumkin bo‘lmagan yechimi maxsus yechim deyiladi.*

Maxsus yechimning grafigi umumiy yechimga kirgan integral egri chiziqlarning *o‘ramasi* deb ataluvchi chiziqdan iboratdir. Bu chiziq o‘zining har bir nuqtasida oilaning u yoki bu integral egri chizig‘iga urinadi shu bilan birga o‘ramaning turli nuqtalarida oilaning turli integral egri chiziqlari urinadi(6-rasm).

Demak, o‘ramaning (maxsus yechimning) har bir nuqtasi orqali eng kamida 2 tadan integral egri chizig‘i o‘tadi, ya'ni uning har bir nuqtasida yechimning yagonaligi buziladi.

Bunday nuqtalarni biz maxsus nuqtalar deb atadik. Shunday qilib, maxsus yechim maxsus nuqtalardan iboratdir.

Agar $F(x, y, y') = 0$ tenglamaning umumiy integrali $\Phi(x, y, C) = 0$ bo‘lsa, o‘ramani topish uchun quyidagi tenglamalar sistemasi xizmat qiladi:

$$\begin{cases} \Phi(x, y, C) = 0 \\ \Phi'_C(x, y, C) = 0 \end{cases}. \tag{8}$$

Bu yerda C ni yo‘qotib, $y = \varphi(x)$ funksiya hosil qilamiz. Agar bu funksiya differensial tenglamani qanoatlantirsa va $\Phi(x, y, C) = 0$ oilaga tegishli bo‘lmasa, u holda u tenglamaning maxsus yechimii bo‘lib, uning grafigi $\Phi(x, y, C) = 0$ oilaning o‘ramasidan iborat bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. To‘la differensial tenglamalar. Integrallovchi ko‘paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar.
2. Lagranj va Klero tenglamalari.

Glossariy

Maxsus nuqta - Differensial tenglama yechimining mavjudligi yoki yagonaligi buziladigan nuqtasi bu tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.

Tugun maxsus nuqta - Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar joylashishning umumiy ko‘rinishi 1-rasmda tasvirlangan. Integral egri chiziqlari ana shunday joylashgan differensial tenglamaning maxsus nuqtasi *tugun* deyiladi.

Egar maxsus nuqta - Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar joylashishning umumiy ko‘rinishi 3-rasmda tasvirlangan. Integral egri chiziqlari ana shunday joylashgan differensial tenglamaning maxsus nuqtasi *egar* deyiladi.

Fokus maxsus nuqta - Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar oilasining ko‘rinishi 4-rasmda keltirilgan maxsus nuqta *fokus* deb nomlangan.

Markaz maxsus nuqta – shbu tenglamani qaraylik:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Bu tenglamani integrallash $x^2 + y^2 = C = C_1^2$ ni , ya'ni markazi koordinatalar boshida bo‘lgan radiusi C_1 ga teng aylanalar oilasini beradi. Maxsus nuqta orqali bitta xam integral egri chiziq o‘tmaydi(5- rasm). Bunday maxsus nuqta *markaz* deyiladi.

Maxsus yechim - Differensial tenglamada uning umumiy yechimidan ixtiyoriy o‘zgarmasning xech bir qiymatida hosil qilinishi mumkin bo‘lmagan yechimi *maxsus yechim* deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglamasining maxsus nuqtalari deb nimaga aytiladi?
2. Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar joylashishining umumiy ko‘rinishini tasvirlang?
3. Differensial tenglamaning maxsus yechimi deb nimaga aytiladi?
4. Maxsus nuqta yechimi deb nimaga aytiladi?
5. Maxsus yechimning grafigi qanday chiziqdan iborat?

Amaliy mashg’ulot-8

1. $(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0$ j: $x^3+2xy-3y=C$
2. $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$ j: $x^3y-2x^2y^2+3y^4=C$
3. $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2ydy=0$ j: $\frac{x^2\cos 2y}{2}+x=C$
4. $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0$ j: $x^4-x^2y^2+y^4=c$
5. $\frac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\frac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$ j: $x+arctg\frac{y}{x}=c$
6. $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$ j: $xe^y-y^2=c$
7. $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$ j: $x^y=C$
8. $\frac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{ydx-xdy}{x^2}$ j: $\sqrt{x^2+y^2}+\frac{y}{x}=C$
9. $\frac{y+\sin x\cdot\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\frac{x}{\cos^2(xy)}dy+\sin ydy=0$ j: $tg(xy)-\cos x-\cos y=c$
10. $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy=0$ j: $\frac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\frac{1}{2}y^2=C$

TEST

Quyidagi Koshi masalasini yeching: $\begin{cases}2x\cos^2 ydx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0\\ y\mid_{x=0}=0\end{cases}$	* $x^2\cos^2 y+y^2=0$	$x^2tg^2y+y^2=0$	$y^2\cos^2 y+x^2=0$	$x^2\sin^2 y+y^2=0$
Quyidagi tenglama uchun integralovchi ko‘paytuvchi qanday bo‘ladi:	* $\mu(x)=\frac{1}{x^2}$	$\mu(x)=x^2$	$\mu(x)=\frac{1}{x^3}$	$\mu(x)=x^3$

$(x^2 - y)dx + (x^2y^2 + x)dy = 0$				
Koshi masalasini yechimining mavjudlik shartini aniqlang: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\mid_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$	* $f(x,y)-$ uzluksiz	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-$ mavjud va uzluksiz	$f(x,y)-$ 2-tartibli hosilasi mavjud	$\frac{\partial f}{\partial y}-$ mavjud va uzluksiz
Koshi masalasini yechimining yagonalik shartini aniqlang: $\begin{cases} y' = f(x,y) \\ y\mid_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$	* $\frac{\partial f}{\partial y}-$ mavjud va uzluksiz	$f(x,y)-$ 2-tartibli hosilasi mavjud	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-$ mavjud va uzluksiz	$f(x,y)-$ uzluksiz
$y' = \frac{y}{x}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	* dikritik tugun	Egar	Tugun	Fokus
$y' = \frac{2y}{x}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	*Tugun	Fokus	dikritik nuqta	Markaz
$y' = -\frac{y}{x}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	* Egar	Fokus	Markaz	Tugun
$y' = \frac{x+y}{x-y}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	* Fokus	Egar	Dikritik tugun	Markaz
$y' = -\frac{x}{y}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	* Markaz	Fokus	Dikritik tugun	Egar
Differensial tenglamada uning umumiy yechimidan ixtiyoriy o‘zgarmasning hech bir qiymatida hosil qilish mumkin bo‘lmagan yechim nima deb ataladi.	* maxsus yechim	xususiy yechim	umumiy yechim	maxsus nuqta

MA'RUZA № 10
Mavzu: Lagranj va Klero tenglamalari
Reja:

1. Klero tenglamasi
2. Klero tenglamasining umumiy yechimi
3. Lanranj tenglamasi
4. Lagranj tenglamasining umumiy yechimini parametrik ko‘rinishi.

Klero tenglamasi . Quyidagi

$$y = xy' + \psi(y') \tag{1}$$

tenglama *Klero tenglamasi* deyiladi, bunda $\psi(y')$ $y'-$ning funksiyasi. Tenglamani yechish uchun $y' = p(x)$ belgilash kiritamiz. U holda (1) tenglama

$$y = xp + \psi(p) \tag{2}$$

ko‘rinishga keladi.

Bu tenglamani, $y' = \dfrac{dp}{dx}$ ekanini hisobga olib, differensiallaymiz:

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}, \quad y' = p,$$

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

bundan

$$x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} = 0,$$

yoki

$$\frac{dp}{dx}(x + \psi'(p)) = 0.$$

Bu tenglama

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{3}$$

yoki

$$x + \psi'(p) = 0 \tag{4}$$

bo‘lgan holda ayniyatga aylanadi. Har ikki holni qaraymiz.

A) (3) tenglamani tegrallaymiz:

$$\int dp = 0 \Rightarrow p = C.$$

Endi quyidagi

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p) \\ p = C \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan p parametrni yo‘qotsak, berilgan (1) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$y = Cx + \psi(C) \tag{5}$$

Geometrik nuqtai-nazardan bu yechim tugri chiziqlar oilasini tasvirlaydi.

Hosil qilingan (5) yechimni tenglama bilan solishtirib, Klero tenglamasining umumiy yechimi undagi y' hosilasini ixtiyoriy o‘zgarmas C ga almashtirish orqali hosil qilinishini ko‘ramiz.

B) (4) tenglamada p ni x ning funksiyasi sifatida topamiz. Quyidagini

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p) \\ p = p_0(x) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan p parametrni yo‘qotib

$$y = xp_0(x) + \psi(p_0(x)) \tag{6}$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya (1) tenglamaning yechimidir. Haqiqatdan ham, bunga ishonch hosil qilish uchun (6) dan y' ni topamiz:

$$y' = p_0(x) + x\frac{dp_0(x)}{dx} + \psi'(p_0(x))\frac{dp_0(x)}{dx},$$

yoki

$$y' = p_0(x) + (x + \psi'(p_0(x)))\frac{dp_0(x)}{dx}.$$

(5) ga ko‘ra oxirgi ifoda quyidagi ko‘rinshga keladi, ya'ni $x + \psi'(p) = 0$ dan

$$y' = p_0(x). \tag{7}$$

Endi y va y' ning (6) va (7) formuladagi qiymatlarini (1) tenglamaga qo‘ysak,

$$xp_0(x) + \psi(p_0(x)) \equiv xp_0(x) + \psi(p_0(x))$$

ayniyat hosil bo‘ladi. Demak, (6) haqiqatdan ham berilgan tenglamalarning yechimi ekan. Bu yechimni (5) umumiy yechimdan C ning birorta ham qiymatida hosil qilib bo‘lmaydi. Ma'lumki, bunday yechimlar maxsus yechimlar deyiladi. Ko‘rayapmizki, bunday yechimni

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p) \\ x + \psi'(p) = 0 \end{cases}$$

sistemadan yoki quyidagi

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C) \\ x + \psi'(C) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan C ni yo‘qotib hosil qilish mumkin. Ma'lumki bu yechim $y = Cx + \psi(C)$ umumiy yechimning o‘ramasini aniqlaydi. Demak, Klero tenglamasining maxsus yechimi $y = Cx + \psi(C)$ to‘g‘ri chiziqlar oilasining o‘ramasini aniqlaydi.

Shunday qilib, Klero tenglamasini yechish uchun avvalo berilgan tenglamada y' ni C ga almashtirib, uning umumiy yechimini topish kerak:

$$y = Cx + \psi(C).$$

Shundan so‘ng quyidagi

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C) \\ x + \psi'(C) = 0 \end{cases}$$

sistemadan C ni yo‘qotib, maxsus yechimni (uning grafigi integral egri chiziqlar oilasining o‘ramasi bo‘ladi) topish kerak.

Misol. $y = xy' + (y' - y'^2)$ tenglamani yeching.

Yechish. $y = xC + (C - C^2)$ umumiy yechim bo‘ladi. Bu tenglikning ikki tomonidan C bo‘yicha hosila olib, hosil bo‘lgan sistemani birgalikda yechamiz:

$$y'_C = 0 = x + (1 - 2C) \Rightarrow C = \frac{x+1}{2}.$$

Buni umumiy yechimga qo‘yib berilgan tenglamani maxsus yechimni hosil qilamiz:

$$y = \frac{(x+1)^2}{4}$$

Lagranj tenglamasi. Ushbu

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \tag{8}$$
tenglama Lagranj tenglamasi deyiladi, bunda $\varphi(y'), \psi(y')$ lar y' ni ma'lum funksiyalari.

Bunday tenglamani ham p parametr kiritish usuli bilan yechiladi. $y' = p(x)$ deb belgilaymiz. U holda (8) tenglama ushbu ko‘rinishga keladi:
$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \tag{9}$$
Buni x bo‘yicha differensiallab,
$$p = y' = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$
yoki
$$p - \varphi(p) = (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx} \tag{10}$$
tenglamani hosil qilamiz. $p - \varphi(p) \neq 0$ yoki $p - \varphi(p) = 0$ hollarni qaraymiz.

a) $p - \varphi(p) \neq 0$ bo‘lsin. (10) ni $\frac{dx}{dp}$ ga nisbatan yechib, quyidagi ko‘rinishda yozamiz:
$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$
Hosil qilingan tenglama x va $\frac{dx}{dp}$ ga nisbatan chiziqlidir va demak
$$x = \Phi(p, C) \tag{11}$$
umumiy yechimga ega bo‘lamiz. (11) ni (9) ga qo‘yib, uni p va C orqali ifodalaymiz:
$$y = \Phi(p, C)\varphi(p) + \psi(p) = f(p, C) \tag{12}$$
(11) va (12) bizga Langranj tenglamasining umumiy yechimini parametrik ko‘rinishni beradi:
$$\begin{cases} x = \Phi(p, C) \\ y = f(p, C) \end{cases}$$
Bu sistemada p parametrni yo‘qotib, Langranj tenglamasining umumiy yechimini quyidagi ko‘rinishda hosil qilamiz:
$$F(x, y, C) = 0.$$
Tenglamaning umumiy yechimidan hosil bo‘lmaydigan maxsus yechimi bo‘lishi mumkin. Bu quyidagicha bo‘ladi:

b) $p - \varphi(p) = 0$ bo‘lsin, ya'ni biror $p = p_0$ da $\varphi(p_0) = p_0$ bo‘lsin. Ushbu
$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p) \\ p = p_0 \end{cases}$$
sistemadan p ni yo‘qotib,
$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$$
yechimni hosil qilamiz. Bu esa Langranj tenglamasining maxsus yechimidir.

Misol. $y = x + y'^3$ tenglamani yeching.

Tenlamaning umumiy yechimi
$$\begin{cases} x = 3(\ln(p-1) + \dfrac{(p+1)^2}{2}) + C \\ y = 3(\ln(p-1) + \dfrac{(p+1)^2}{2}) + C + p^3 \end{cases}$$

va maxsus yechimi $y = x + 1$ bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. $y' = f(x, y)$ tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning isboti.
2. O‘ng tamoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemasini yechish.

Glossariy

Klero tenglamasi **-** Quyidagi $y = xy' + \psi(y')$ tenglama Klero tenglamasi deyiladi**.**

Klero tenglamasining umumiy yechimi **-** $y = xy' + \psi(y')$ ko’rinishdagi Klero tenglamasining umumiy yechimi $y = Cx + \psi(C)$ dan iborat.

Lagranj tenglamasi - Ushbu $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ tenglama Lagranj tenglamasi deyiladi

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Klero tenglamasi deb nimaga aytiladi va u qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Klero tenglamasini maxsus yechimi $y = cx + \gamma(c)$ to‘g‘ri chiziqlar oilasining o‘ramasini qanday aniqlaydi?
3. Logranj tenglamasi deb nimaga aytilidi va u qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Logranj tenglamasining umumiy yechimi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Logranj tenglamasining maxsus yechimi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Amaliy mashg’ulot-9

1. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ j: $\ln|x| - \dfrac{y^2}{x} = c$
2. $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ j: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} = c$
3. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$ j: $\dfrac{1}{y}\ln x + \dfrac{1}{2}y^2 = c$

4. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$ j: $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^{x} = c$

5. $(x^2 - y)dx + xdy = 0$ j: $M = \frac{1}{x^2}; \quad x + \frac{y}{x} = C$

6. $2xtgydy + (x^2 - 2\sin y)dy = 0$ j: $\ln\mu = \ln\cos y; \quad x^2\sin y + \frac{1}{2}\cos 2y = C$

7. $(e^{2x} - y^2)dx + ydy = 0$ j: $\mu = e^{-2x}; \quad y^2 = (c - 2x)e^{2x}$

8. $(1 + 3x^2\sin y)dx - xctgydy = 0$ j: $\mu = \frac{1}{\sin y}; \quad \frac{x}{\sin y} + x^3 = C$

9. $y^2dx + (yx - 1)dy = 0$ j: $\mu = \frac{1}{y}; \; xy - \ln y = 0$

10. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ j: $\mu = \frac{1}{x^4}; \quad y^2 = cx^3 + x^2$

TEST

Differensial tenglamada uning umumiy yechimidan ixtiyoriy o‘zgarmasning hech bir qiymatida hosil qilish mumkin bo‘lmagan yechim nima deb ataladi.	* maxsus yechim	xususiy yechim	umumiy yechim	maxsus nuqta
Maxsus yechimni topish formulasini toping.	* $\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\ \Phi_c(x,y,c)=0\end{cases}$	$\begin{cases}\Phi(x,y,y',c)=0\\ \Phi_c(x,y,y',c)=0\end{cases}$	$\begin{cases}\Phi(x,y)=0\\ \Phi_c(x,y)=0\end{cases}$	$\begin{cases}\Phi(x,y',c)=0\\ \Phi_c(x,y',c)=0\end{cases}$
Klero tenglamasini aniqlang.	* $y = xy' + \psi(y')$	$y = xy^2 + \psi(y')$	$y = x + \psi(y')$	$y = x(y')^{-1} + \psi(y')$
Klero tenglamasini umumiy yechimi ko‘rinishini aniqlang.	* $y = cx + \psi(c)$	$y = x + \psi(c)$	$y = x(c)^{-1} + \psi(c)$	$y = c^2x + \psi(c)$
Klero tenglamasini maxsus yechimini aniqlang.	* $y = xp_0(x) + \psi(p_0(x))$	$x = y\varphi(y') + \psi(y')$	$x' = y\varphi(y) + \psi(y)$	$y = x'\varphi(y) + \psi(y')$
Lagranj tenglamasining ko‘rinishini aniqlang.	* $x = y\varphi(y') + \psi(y')$	$y = x\varphi(y') + \psi(y')$	$x' = y\varphi(y) + \psi(y)$	$y = y'\varphi(x) + \psi(x)$
Lagranj tenglamasining maxsus yechimi ko‘rinishini aniqlang.	* $y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$	$y' = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$	$y = y'\varphi(p_0) + \psi(p_0)$	$x = y'\varphi(p_0) + \psi(p_0)$
Quyidagi tenglamaning maxsus yechimini toping: $y = x + y'^3$	* $y = x + 1$	$y = x + 3$	$y = x + 2$	$y = x + 4$
Birinchi tartibli chiziqli tenglamada $Q(x)$ qanday bo‘lsa, chiziqli bir jinsli tenglama deyiladi?	* $Q(x) = 0$	$Q(x) \neq 0$	$Q(x) = 1$	$Q(x) = x$
Ushbu $y = Cx^3$ chiziqlar oilasi qaysi diffirensial tenglamaning yechimi?	*$xy' = 3y$	$y = e^{xy^{1/y}}$	$y' = 3y^{2/3}$	$y = xy'$

MA'RUZA № 11

Mavzu: Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Mavjudlik va yagonalik teoramelari.

Reja:

1. $n-$tartibli differensial tenglama.
2. Yechim, umumiy yechim, xususiy yechim tushunchalari.
3. Koshi masalasini qo‘yilishi.
4. Koshi, Pikar-Lindelyof va Peano teoremalari.

Ushbu

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0 \tag{1}$$

ko‘rinishdagi tenglama $n-$tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $F(x, y, y', ..., y^{(n)})$ funksiya $(n+2)$ o‘lchovli R^{n+2} fazoning D_{n+2} sohasida aniqlangan. Ko‘p hollarda (1) tenglama ushbu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \tag{2}$$

ko‘rinishga keltiriladi. Bu tenglama yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan yoki kanonik ko‘rinishdagi $n-$tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. (2) tenglamada $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiya $(n+1)$ o‘lchovli R^{n+1} fazoning D_{n+1} sohasida aniqlangan.

Agar (1) va (2) da $n=1$ bo‘lsa, 1-tartibli oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu holni biz ko‘rganmiz. Endi $n \geq 2$ bo‘lsin.

1-Ta'rif. (2) tenglama berilgan bo‘lib, $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiya R^{n+1} fazoning D_{n+1} sohasida aniqlangan bo‘lsin. Agar I intervalda aniqlangan biror $y = \varphi(x)$ funksiya uchun quyidagi uchta

$$\left.\begin{array}{l} 1^0.\ \varphi(x) \in C^n(I) \\ 2^0.\ (x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)) \in D_{n+1},\ x \in I \\ 3^0.\ \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), ..., \varphi^{(n-1)}(x)),\ x \in I \end{array}\right\} \tag{3}$$

shart bajarilsa, u holda $y = \varphi(x)$ funksiya I intervalda (2) differensial *tenglamaning yechimi* deyiladi.

(2) tenglama yechimining grafigi, ya'ni $y = \varphi(x)$ funksiyaning grafigi uning *integral chizig‘i* deyiladi.

Eslatib o‘tamizki, 1- tartibli differensial tenglamalardagi kabi yuqori tartibli differensial tenglamalarda ham yechim ba'zida oshkor $y = \varphi(x)$ ko‘rinishda yozilsa, ba'zida oshkormas $\Phi(x, y) = 0$ funksiya ko‘rinishida yozilishi mumkin. Yechimni ba'zan parametrik ko‘rinishda $x = x(t),\ y = y(t)\ t \in I$ (t - parametr) izlash ham qulay bo‘ladi.

2-Ta'rif. (2) differensial tenglama va $x, C_1, C_2, ..., C_n$ o‘zgaruvchilarning biror o‘zgarish sohasida aniqlangan xamda x bo‘yicha n marta uzluksiz differensiallanuvchi

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$$

(4)

funksiya berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ nuqta uchun ushbu

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ \text{......... ....} \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases} \tag{5}$$

munosabatlar $C_1, C_2, ..., C_n$ larning

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ C_2 = \psi_2(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ .... \\ C_n = \psi_n(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \end{cases} \tag{6}$$

qiymatlarini bir qiymatli aniqlasa va bu qiymatlarni ushbu

$$y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, ..., C_n) \tag{7}$$

tenglikka qo‘yish natijasida (2) tenglama hosil bo‘lsa, (ya'ni tenglamani qanoatlartirsa), u holda (4) funksiya (2) tenglamaning D_{n+1} sohasida aniqlangan *umumiy yechimi* deyiladi.

Shunday qilib, (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi n ta ixtiyoriy o‘zgarmasni o‘z ichiga oladi.

(2) differensial tenglamaning barcha yechimlarini topish asosiy masaladir. Umumiy yechim formulasi (4) ni olaylik. Unda $C_1, C_2, ..., C_n$ larga ma'lum qiymatlar bersak, tegishli yechim hosil bo‘ladi. Umuman aytganda, (2) tenglamaning (4) formula o‘z ichiga olmagan yechimlari ham bo‘lishi mumkin.

(2) differensial tenglamaning umumiy yechimi formulasi (4) dan $C_1, C_2, ..., C_n$ larga qiymatlar berib, hosil qilinadigan har bir yechimi (2) tenglamaning *xususiy yechimi* deyiladi.

Xususiy yechimni izlash Koshi masalasining yechimini izlashga keladi. Agar (2) tenglama, $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ nuqta va ushbu

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{8}$$

munosabatlar berilgan bo‘lsa, (2) differensial tenglamaning (8) tengliklarini qanoatlantiradigan yechimini izlash (2) tenglama uchun *Koshi masalasi* deyiladi. Unda (8) tengliklar boshlang‘ich shartlar, $x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}$ qiymatlar esa *boshlang‘ich qiymatlar* deyiladi. $n = 2$ bulganda Koshi masalasi aniq geometrik ma'noga ega. Masalan, $y'' = f(x, y, y')$ tenglama uchun $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0$ shartni qanoatlantiruvchi integral chiziq tegishli sohaning (x_0, y_0) nuqtasidan berilgan y'_0 burchak koeffitsientli urinma bilan o‘tishi lozim.

Agar (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi (4) ma'lum bo‘lsa, tegishli Koshi masalasini yechish uchun ushbu

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y'_0, \\ .... \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{9}$$

tenglamalar sistemasini $C_1, C_2, ..., C_n$ larga nisbatan yechish kerak bo‘ladi. Bu sistema yagona yechimga ega bo‘lishi, bittadan ortiq yechimga ega bo‘lishi yoki umuman yechimga ega emasligi mumkin. (9) sistema yagona yechimga ega bo‘lganda (2), (8) Koshi masalasi yagona yechimga ega deyiladi. Aks holda tegishli Koshi masalasida yagonalik buzilgan bo‘ladi.

Agar (2) differensial tenglamaning xususiy yechimi $\Phi(x, y) = 0$ ko‘rinishda berilsa, bu munosabat berilgan differensial tenglamaning *integrali* deyiladi. Agar umumiy yechim $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ ko‘rinishda yozilgan bo‘lsa, bu munosabat (2) tenglamaning *umumiy integrali* deyiladi.

(2) differensial tenglamaning barcha (xususiy va maxsus) yechimlarini topish differensial tenglamani integrallash jarayoni bo‘ladi. Tenglamani integrallash jarayoni noaniq integrallarin hisoblashga kelganda differensial tenglama *kvadraturalarda integrallanadi* deyiladi.

Endi (2) differensial tenglama uchun yechimning mavjudlik va yagonalik teoremalarini keltiramiz.

1-Teorema (Koshi teoremasi). *Agar (2) differensial tenglamada ushbu*

$$f(x,y,y',...,y^{(n-1)}), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{0n-1}}$$

funksiyalar $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ *sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda:*

1⁰. (2) differensial tenglamaning biror I *integralda aniqlangan,*

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y'_0, ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},\ ((x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1})$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.

2⁰. Agar $y = \varphi(x), x \in I_1$ *va* $y = \psi(x), x \in I_2$ *funksiyalarning har biri (2) differensial tenglamaning yechimi bo'lib, berilgan* x_0 *uchun*

$$\varphi(x_0) = \psi(x_0),\ \varphi'(x_0) = \psi'(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = \psi^{(n-1)}(x_0)$$

bo'lsa, $y = \varphi(x)$ *va* $y = \psi(x)$ *yechimlar aniqlanish sohalarining umumiy qismida ustma-ust tushadi. Boshqacha aytganda, agar* $x_0 \in I_1 \cap I_2$ *nuqtada* $\varphi^{(i)}(x_0) = \psi^{(i)}(x_0),\ i = 0,1,...,n-1$ *bo'lsa, u holda* $I_1 \cap I_2$ *intervalda* $\varphi(x) \equiv \psi(x)$ *bo'ladi.*

3-Ta'rif. Agar $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ funksiya $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ sohada aniqlangan bo'lib, bu funksiya uchun shunday $L \geq 0$ son mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $(x_1, y_1, y'_1, ..., y_1^{(n-1)}) \in D_{n+1}$, $(x_2, y_2, y'_2, ..., y_2^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ nuqtalar uchun ushbu

$$\left| f(x_1, y_1, y'_1, ..., y_1^{(n-1)}) - f(x_2, y_2, y'_2, ..., y_2^{(n-1)}) \right| \leq L \sum_{i=0}^{n-1} \left| y_1^{(i)} - y_2^{(i)} \right|,\ L \geq 0 \qquad \text{(L)}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ funksiya D_{n+1} sohada $y, y', ..., y^{(n-1)}$ lar bo'yicha *Lipshits shartini qanoatlantiradi* deyiladi, L esa *Lipshits o'zgarmasi* deyiladi.

2-Teorema (Pikar-Lindelyof teoremasi). *Agar* $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ *funksiya* $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ *sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu* D_{n+1} *sohada* $y, y', ..., y^{(n-1)}$ *lar bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda har bir* $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ *nuqta uchun shunday o'zgarmas* $h > 0$ *son topilsaki , natijada (2) tenglamaning (8) boshlang'ich shartlarini qanoatlantiradigan va* $I = \{x : |x - x_0| \leq h\}$ *oraliqda aniqlangan yagona yechimi mavjud bo'ladi.*

3-Teorema (Peano teoremasi). *Agar* $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ *funksiya* D_{n+1} *sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lib,* $(x_0, y_0, y'_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ *bo'lsa, u holda (2) differensial tenglamaning (8) boshlang'ich shartlarini qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud.*

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенные дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamalar va ularni integrallash

usullari.
2. Eksponensial matritsani hisoblash.

Glossariy

Umumiy yechim - (2) differensial tenglama va $x, C_1, C_2, ...C_n$ o‘zgaruvchilarning biror o‘zgarish soxasida aniqlangan xamda x bo‘yicha n marta uzluksiz differensiallanuvchi

$$y=\varphi(x, C_1, C_2, ...C_n)$$

funksiya berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $(x, y.y', ..., y^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ nuqta uchun ushbu

$$\begin{cases} y=\varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y'=\varphi'(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y^{(n-1)}=\varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}$$

munosabatlar $C_1, C_2, ...C_n$ larning

$$\begin{cases} C_1=\psi_1(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\ C_2=\psi_2(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \\ C_n=\psi_n(x, y, y', \dots y^{(n-1)}) \end{cases}$$

qiymatlarini bir qiymatli aniqlasa va bu qiymatlarni ushbu

$$y^{(n)}=\varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, ...C_n)$$

tenglikka qo‘yish natijasida (2) tenglama xosil bo‘lsa, (ya'ni tenglamani qanoatlartirsa), u xolda (4) funksiya (2) tenglamaning D_{n+1} soxasida aniqlangan umumiy yechimi deyiladi.

Koshi teoremasi - Agar (2) differensial tenglamada ushbu

$$f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}},$$

funksiya lar $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ soxada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u xolda:

1^0. (2) differensial tenglama ning biror I integralda aniqlangan,

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}, (x_0, y_0, y'_0, \dots y_0^{(n-1)} \in D_{n+1})$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.

2^0. Agar $y=\varphi(x), x \in I_1$ va $y=\psi(x),\ x \in I_2$ funksiya larning xar biri (2) differensial tenglamaning yechimi bo‘lib, berilgan x_0 uchun $\varphi(x_0)=\psi(x_0),\ \varphi'(x_0)=\psi'(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0)=x^{(n-1)}(x_0),$ bo‘lsa, $y=\varphi(x)$ va $y=\psi(x)$ yechimldar aniqlanganqlanish soxalarining umumiy qismida ustma-ust tushadi.

Boshqacha aytganda, agar $x_0 \in I_1 \cap I_2$ nuqtada $\varphi^{(i)}(x_0)=\psi^{(i)}(x_0),\ i=0.1, ...n-1$ bo‘lsa, u xolda $I_1 \cap I_2$ intervalda $\varphi(x)=\psi(x)$ bo‘ladi.

Peano teoremasi - Agar $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiya D_{n+1} soxada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, $(x_0, y_0.y'_0, \dots y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ bo‘lsa, u xolda (2) differensial tenglamaning (8) boshlang‘ich shartlarini qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y'^2 - y' \cdot x - y + \dfrac{x^2}{2} = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);

- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Qanday ko‘rinishdagi tenglama p-tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi?
2. Differensial tenglamasining yechimideb nimaga aytiladi?
3. $y^{(n)} = f\left(x_1 y_1 y^1,..., y^{(n-1)}\right)$ tenglamaning xususiy yechimi deb nimaga aytiladi?
4. $y^{(n)} = f(x_1 y_1 y_1,..., y^{(n-1)})$ tenglama uchun.Koish masalasi deb nimaga aytiladi?
5. Koish masalasini yagona yechimga ega bo‘lishini isbotlang?

Amaliy mashg’ulot-10

1. $(\sin x + e^y)dx + \cos x dy = 0$ j: $\mu = e^{-y};\quad e^{-y}\cos x = c + x$
2. $(x\sin y + y)dx + (x^2\cos y + x\ln x)dy = 0$ j: $\ln\mu = -\ln x;\quad \mu = \frac{1}{x};\quad x\sin y + \ln x = c$
3. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$ j: $(x^2 + y^2)e^x = c$
4. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$ j: $\mu = \frac{1}{x^2};\quad x - \frac{y}{x} = c$
5. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y^1 = 0$ j: $x^2y^2 + 2\ln\frac{x}{y} = c$
6. $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$ j: $x^2 - y^2 - 1 = cx$
7. $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0$ j: $x^2 + y^2 = C(y-1)^2$
8. $\left[2y + \frac{1}{(xtg)^2}\right]dx + \left[3y + x + \frac{1}{(xtg)^2}\right]dy = 0$ j: $y^3 + x^2y + 2xy^2 + \ln(x+y) = c$

TEST

Birinchi tartibli chiziqli tenglamada $Q(x)$ qanday bo‘lsa, chiziqli bir jinsli tenglama deyiladi?	$*\ Q(x) = 0$	$Q(x) \neq 0$	$Q(x) = 1$	$Q(x) = x$
Ushbu $y = Cx^3$ chiziqlar oilasi qaysi diffirensial tenglamaning yechimi?	$*xy' = 3y$	$y = e^{xy^{1/y}}$	$y' = 3y^{2/3}$	$y = xy'$
$y' = ax^{\alpha} + by^{\beta}$ tenglama α va β ning qanday qiymatlarida $y = z^m$ almashtirish yordamida bir jinsli tenglamaga keltiriladi.	$*\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = 1$	$\alpha + \beta = 1$	$-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 1$	$\alpha - \beta = 1$
$y' + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x$ Rikkati tenglamasini bitta xususiy yechimini toping.	$*\ y_1 = e^x$	$y_1 = e^{-x}$	$y_1 = e^{2x}$	$y = x + 1$
Agar y_1 va y_2 – birinchi tartibli chiziqli tenglamaning ikkita turli yechimlari bo‘lsa, tenglamaning umumiy yechimi y_1 va y_2 yordamida qanday	$*\ y = y_1 + c(y_2 - y_1)$	$y = y_1 \cdot y_2$	$y = \frac{y_1}{y_2}$	Yozib bo‘lmaydi

yoziladi?				
Quyidagi funksiyalardan qaysi $y^2dx-(xy+x^3)dy=0$ tenglama uchun integrallovchi ko‘paytuvchi bo‘ladi?	$*\ \frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{y^2}$
Quyidagi funksiyalardan qaysi $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$ tenglama uchun integrallovchi ko‘paytuvchi bo‘ladi?	$*\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{y^2}$
$e^{-x}\frac{1}{y}$ funksiya quyidagi tenglamalardan qaysi biri uchun integrallovchi ko‘paytuvchi bo‘ladi?	$*y^2dx+\left(e^x-y\right)dy=0$	$e^{-x}xydx-(x^2+y^2)dy=0$	$e^{-x}dx-$ $-(2y+xe^{-x})dy=0$	Hamma javoblar noto‘g‘ri
Agar $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ tenglamada $M(x,y)$ va $N(x,y)$ m-tartibli bir jinsli funksiyalar bo‘lsa, u holda integrallovchi ko‘paytuvchi qanaqa ko‘rinishda bo‘ladi?	$*\ m(x,y)=[xM+yN]^{-1}$	$m(x,y)=xM+yN$	$m(x,y)=\frac{x+y}{M+N}$	$m(x,y)=[xN+yM]^{-1}$
Shunday egri chiziqlarni topingki, uning har bir nuqtasiga o‘tkazilgan urinma koordinata o‘qlari bilan birgalikda yuzasi $2a^2$ ga teng bo‘lgan uchburchak hosil qilsin.	$*\ xy=\pm a^2$	$y=\frac{1}{a^2}$	$xy=\pm 2a^2$	$y=a^4$

MA'RUZA № 12

Mavzu: n-tartibli differensial tenglamalar.Tartibi kamayadigan differensial tenglamalar

Reja:

1. $n-$tartibli differensial tenglamalarning kvadraturada integrallanuvchi ba'zi turlari.
2. Tartibi kamayadigan differensial tenglamalar.

Tayanch so’z va iboralar: $y^n=f(x)$ *ko’rinishidagi tenglama,* $F(x,y^{(n)})=0$ *ko’rinishidagi tenglama,* $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ *ko’rinishidagi tenglama,* $F(y^{(n-2)},y^{(n)})=0$ *ko’rinishidagi tenglama,* $F(y^{(n)})=(y^{(n)})^k+a_1(y^{(n)})^{k-1}+...+a_{k-1}(y^{(n)})+a_k=0$ *ko’rinishidagi tenglama*

1. $y^n=f(x)$ **ko‘rinishdagi tenglama.** Mavjudlik va yagonalik teoremasining

shartlarini bajarilishi uchun $f(x)$ funksiya biror I intervalda uzluksiz bo‘lishi yetarli. Shunday deb faraz qilaylik. Bu holda differensial tenglamani n marta ketma-ket integrallab , umumiy yechimni topish mumkin:

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}...\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx...dx+\frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+...+C_{n-1}(x-x_0)+C_n\,. \qquad (1)$$

(1) formula $y^{(n)}=f(x)$ tenglamaning barcha yechimlarini o‘z ichiga oladi va umumiy yechim bo‘ladi. Maxsus yechimlar yo‘q.

2. $F(x,y^{(n)})=0$ **ko‘rinishdagi tenglama.** Agar bu tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa (ya'ni $y^{(n)}=f_k(x),\ k=1,2,....$), u holda bu tenglamalarning integrallab, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$F(x,y^{(n)})=0$ tenglama $y^{(n)}$ ga nisbatan yechilmasin deylik. x va $y^{(n)}$ lar parametrik ko‘rinishda yozilishi mumkin deb faraz qilamiz, ya'ni $x=\psi(t),\ y^{(n)}=\chi(t)$. U holda $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$ ga ko‘ra $dy^{(n-1)}=\chi(t)\psi'(t)dt$. Bundan

$$y^{(n-1)}=\chi_1(t,C_1),\ y^{(n-2)}=\chi_2(t,C_1,C_2),...,y=\chi_n(t,C_1,C_2,...,C_n)\,.$$

Shunday qilib umumiy yechim $x=\psi(t),\ y=\chi_n(t,C_1,C_2,...,C_n)$ bo‘ladi.

3. $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ **ko‘rinishdagi tenglama.** a) Tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsin: $y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$. Agar $z=y^{(n-1)}$ desak, $z'=f(z)$ ga kelamiz. Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglama. Uning umumiy yechimi

$$x=C_1+\int\frac{dz}{f(z)}$$

bo‘ladi. Bu tenglik z ga nisbatan yechilishi mumkin bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Agar uni z ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, (ya'ni $z=\psi_1(x_1,C_1)$), u holda $y^{(n-1)}=\psi_1(x_1,C_1)$ dan $y=\psi_n(t,C_1,C_2,...,C_n)$ umumiy yechim kelib chiqadi. Mabodo yuqoridagi tenglik z ga nisbatan yechilmasa, yana parametr kiritish usulidan foydalaniladi.

b) Tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan yechish mumkin emas, ammo $y^{(n)}=\chi(t),\ y^{(n-1)}=\psi(t)$ parametrik ifoda ma'lum deylik. U holda $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$ dan $dx=\dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}=\dfrac{\psi'(t)}{\chi(t)}$ va $x=\displaystyle\int\frac{\psi'(t)dt}{x(t)}+C_1$ kelib chiqadi. Endi $dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx$ dan

$$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}dx+C_2=\int\psi(t)\cdot\frac{\psi'(t)}{\chi(t)}dt+C_2$$

ni hosil qilamiz. Shunga o‘xshash muloxazalar yuritib,

$$dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx,\ldots,dy=y'dx$$

tengliklarni integrallaymiz va $y=\int y'dx+C_n$ dan y uchun parametrik ifodani topamiz. Ma'lumki, x ning parametrik ifodasida bitta (C_1) ixtiyoriy o‘zgarmas, $y^{(n-2)}$ da ham bitta (C_2), $y^{(n-3)}$ da 2ta (C_2 va C_3),…, $y^{(n-(n-1))}$ da $n-2$ ta, y da esa $n-1$ ta ixtiyoriy o‘zgarmas qatnashadi. U holda x va y larning parametrik ifodalarida n ta ixtiyoriy o‘zgarmas qatnashadi. Demak,

$$x=\int\frac{\psi'(t)dt}{x(t)}+C_1,\ y=\int y'dx+C_n(=\chi_n(t,C_2,C_3,...,C_n))$$

umumiy yechim bo‘ladi.

4. $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ **ko‘rinishdagi tenglama.** Ushbu $z = y^{(n-2)}$ almashtirish berilgan tenglamani $F(z, z'') = 0$ ko‘rinshga olib keladi.

a) Oxirgi tenglamani z'' ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsin deylik: $z'' = f(z)$. Bu tenglama 1) bandda ko‘rilgan usul bilan integrallanadi, yani

$$2z'z'' = 2f(z)z' \Rightarrow d(z')^2 = 2f(z)dz \Rightarrow z'^2 = 2\int f(z)dz + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1} \Rightarrow dx = \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} \Rightarrow x + C_2 = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}}.$$

Oxirgi tenglikdan $z -$ni topib bo‘lsa, u holda $z = y^{(n-2)}$ almashtirishdan tenglamani umumiy yechimini topish mumkin. Agar $z -$ga nisbatan yechilmasa yana parametr kiritib umumiy yechim topiladi.

b) Berilgan tenglama $y^{(n)}$ ga nisbatan yechilmasin, ammo $y^{(n-2)} = \psi(t)$, $y^{(n)} = \chi(t)$ parametrik ifoda ma'lum deylik. Ma'lumki, $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$. Bu tengliklardan

$$\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}}$$

yoki

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)} = \chi(t)\psi'(t)dt$$

munosabat kelib chiqadi. Bundan

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \chi(t)\psi'(t)dt + C_2}\ .$$

Keyingi mulohazalar 2 banddagi kabi bo‘ladi. x uchun topiladigan ifodada ikki ixtiyoriy o‘zgarmas (C_1 va C_2) qatnashadi. Oxirgi tenglamani ketma-ket integrallab borsak, yana $C_3, C_4, ..., C_n -$ixtiyoriy o‘zgarmaslar ishtirok etadi. U holda umumiy yechimni bunday yozish mumkin:

$$x = \int \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}} + C_1 = \int \frac{\psi'(t)}{\pm\sqrt{2\int \chi(t)\psi'(t)dt + C_2}} + C_1\ ,$$

$$y = \Phi(t, C_2, C_3, ..., C_n)\ .$$

5. $F(y^{(n)}) = (y^{(n)})^k + a_1(y^{(n)})^{k-1} + ... + a_{k-1}(y^{(n)}) + a_k = 0$, $a_i = const, i = 1,2,...,k$ **ko‘rinishdagi tenglama.** Bu differensial tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan $k -$tartibli algebraik tenglama deb qaraymiz. Uning haqiqiy ildizlari $p_1, p_2, ..., p_s$, $s \le k$ bo‘lsin. U holda $y^{(n)} = p_j$, $j = 1,2,...,s$ differensial tenglamani n marta integrallasak,

$$y = p_j \frac{x^n}{n!} + C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-2}\frac{x^2}{2!} + C_{n-1}x + C_n$$

kelib chiqadi. Undan:

$$p_j = \frac{n!}{x^n}\left(y - C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - ... - C_{n-2}\frac{x^2}{2!} - C_{n-1}x - C_n \right).$$

Shu topilgan $p_j -$ni berilgan tenglamada $y^{(n)}$ o‘rniga qo‘ysak, uning umumiy yechimi

$$F\left(\frac{n!}{x^n}\left(y - C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - ... - C_{n-2}\frac{x^2}{2!} - C_{n-1}x - C_n \right)\right) = 0$$

hosil bo‘ladi.

Agar

$$(y^{(n)})^k + a_1(x,y,y',...,y^{(n-1)})(y^{(n)})^{k-1} + ... + a_{k-1}(x,y,y',...,y^{(n-1)})(y^{(n)}) +$$
$$+ a_k(x,y,y',...,y^{(n-1)}) = 0, \quad a_j \in C(D_{n+1})$$

differensial tenglama ko‘rilsa, u holda uni $y^{(n)}$ ga ko‘ra $k-$tartibli algebraik tenglama deb qarash mumkin. Agar haqiqiy ildizlarni topish mumkin bo‘lsa, u holda ushbu yuqori hosilaga nisbatan yechilgan

$$y^{(n)} = p_j(x,y,y',...,y^{(n-1)}), \ \ j = 1,2,...,s, \ s \le k$$

tenglamalarga ega bo‘lamiz.

2. a) $n-$tartibli differensial tenglamada noma'lum funksiya y va uning ketma-ket kelgan xosilalari $y, y',..., y^{(k-1)}$ qatnashmasin deylik. U holda differensial tenglama

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)},..., y^{(n)}) = 0, \ k = \overline{1,n} \tag{1}$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu holda $y^{(k)} = p(x)$ deyilsa, $F(x, p(x), p'(x),..., p^{(n-k)}(x)) = 0$ $(n-k)-$tartibli differensial tenglama hosil bo‘ladi, ya’ni tenglama tartibi k birlikka pasayadi. Agar uni integralldash mumkin desak, $\Phi(x, p(x), C_1, C_2,..., C_{n-k}) = 0$ ni hosil qilamiz. Endi $p(x) = y^{(k)}$ bo‘lgani uchun $\Phi(x, y^{(k)}, C_1, C_2,..., C_{n-k}) = 0$ ni hosil qilamiz. Bu $k-$tartibli differensial tenglamani integrallasak umumiy yechimga ega bo‘lamiz.

b) Agar $n-$tartibli differensial tenglamada erkli o‘zgaruvchi oshkor holda qatnashmasa, ya'ni tenglama

$$F(y, y',..., y^{(n)}) = 0 \tag{2}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, y ni yangi erkli o‘zgaruvchi, $y' = p(y)$ ni yangi noma'lum funksiya deb, ushbu almashtirishni bajaramiz (x→y, y→p):

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\cdot\frac{dp}{dy} = p\cdot p' \Rightarrow$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}(p\frac{dp}{dy})\frac{dy}{dx} = p[p\frac{d^2p}{dy^2} + (\frac{dp}{dy})^2] = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p(\frac{dp}{dy})^2 = p^2p'' + pp'^2,...$$

Bu hisoblashlar yordamida $\frac{d^ky}{dx^k}$ miqdor $p, \frac{dp}{dy},..., \frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$ miqdorlar orqali ifodalanishini matematik induksiya usuli bilan ko‘rsatish mumkin. Shu almashtirishni bajarsak, $(n-1)-$tartibli

$$F_1(y, p, \frac{dp}{dy},..., \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}) = 0$$

differensial tenglamaga kelamiz. Demak, ko‘rilayotgan holda differensial tenglamaning tartibini bittaga kamaytirish mumkin. Agar hosil bo‘lgan tenglamaning umumiy yechimi

$$\Phi(y, p, C_1,..., C_{n-1}) = 0$$

yoki

$$\Phi(y, \frac{dy}{dx}, C_1,..., C_{n-1}) = 0$$

bo‘lsa, shu munosabat berilgan $F(y, y',..., y^{(n)}) = 0$ tenglamaning oraliq integrali bo‘ladi. Endi berilgan differensial tenglamaning umumiy integralini topish uchun uning oraliq integralini 1-tartibli differensial tenglama sifatida integrallash kifoya.

c)Agar (2) $F(y, y',..., y^{(n)}) = 0$ differensial tenglamada $F(y, y',..., y^{(n)})$ biror $\Phi(y, y',..., y^{(n-1)})$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lsa, ya'ni

$$F(y, y',..., y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(y, y',..., y^{(n-1)})$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda (2) tenglamaning bitta birinchi integrali $\Phi(y, y',..., y^{(n-1)}) = C_1$ ko‘rinishda yoziladi. Bu esa o‘zgaruvchi navbatida berilgan differensial tenglamaga qaraganda tartibi bitta kam $(n-1)-$tartibli differensial tenglamadir.

s)Agar $F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$ tenglama $y, y',..., y^{(n)}$ argumentlariga nisbatan bir jinsli, ya’ni

$$F(x, ty, ty',..., ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y',..., y^{(n)})$$

bo‘lsa, u holda $y = e^{\int zdx}$, $z = z(x)$ yoki $y' = yz$ almashtirish bajarib tenglamani tartibini bir birlikka pasaytirish mumkin.

Misol. $x^2 yy'' = (y - xy')^2$ tenglamani yeching.

d) Agar $F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$ tenglama umumiy holda bir jinsli bo‘lsa, ya’ni

$$x \to kx$$
$$y \to k^m y$$
$$y' \to k^{m-1} y'$$
$$y'' \to k^{m-2} y''$$
$$.........\ ....$$
$$y^{(n)} \to k^{m-n} y^{(n)}$$

almashtirish natijasida, tenglamani bir jinsli qiladigan $m-$ni tanlash mumkin bo‘lsa, u holda $x = e^t$, $y = u(t)e^{mt}$ almashtirish bajarib, tenglamani tartibini pasaytirish mumkin. Hosil bo‘lgan tenglama u va $t-$ga bog‘liq bo‘lib, t oshkor qatnashmaydi. Bu biz ko‘rgan b) holga to‘g‘ri keladi.

Misol. $x^3 y'' = (y - xy')^2$ tenglamani yeching.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Mavjudlik va yagonalik teoremasi.
2. Matritsali differensial tenglamalarni integrallash.

Glossariy

$y^{(n)} = f(x)$ ***ko’rinishidagi tenglama yechimi*** -

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \int_{x_0}^{x} ...\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx..dx + \frac{c_1}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + + \frac{c_2}{(n-2)!}(x - x_0)^{n-2} + ... + c_{n-1}(x - x_0) + c_n$$

integraldan iborat.

Lipshits sharti - Agar $f(x, y, y',..., y^{(n-1)})$ funksiya $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ soxada aniqlangan bo‘lib, bu funksiya uchun shunday $L \geq 0$ son mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy

$(x,y_1,y_1',...,y^{(n-1)})\in D_{n+1},(x,y_2,y_2',..y_2^{(n-1)})\in D_{n+1},$
nuqtalar uchun ushbu

$$\left|f(x,y_1,y_1',....,y_1^{(n-1)})-f(x,y_2,y_2',....,y_2^{(n-1)})\right|\le L\sum_{i=0}^{n-1}\left|y_1^{(i)}-y_2^{(i)}\right|,L\ge 0$$

tengsizlik bajarilsa, u xolda, $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ funksiya D_{n+1} soxada $y,y',...,y^{(n-1)}$ lar bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi, L esa Lipshits o‘zgarmasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y=x+y'-\ln y'$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. p-tartibli differensial tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. $F(x_1y^{(n)})=o$ tenglamani umumiy yechimi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. p- tartibli differensial tenglamada no'malum funksiya u va uning ketma-ket kelgan xosilalari $y^1,y^{11},...,y^{(x-1)}$ qatnashmasi, u xolda differensial tenglama qanday ko‘rinishda yoziladi?
4. Qanday munosabat berilgan $F(y_1y^1,...,y^{(n)})=o$ tenglamaning oraliq integrali bo‘ladi.
5. Tartibi kamayadigan differensial tenglama deb nimaga aytiladi?

Amaliy mashg’ulot-11

Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalar.

1. $F(x,y,y')=0$ tenglama quyidagicha yechilishi mumkin.

a) Tenglama y' ga nisbatan yechib olish, ya'ni y' ni *x,u* orqali ifodalash. Bir necha $y'=f(x,y)$ ko‘rinishdagi tenglamalar paydo bo‘lishi mumkin. Ularni har birini yechish kerak.

b) Parametr kiritish usuli.

$F(x,y,y')=0$ tenglamani *u* ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsin, ya'ni tenglamani $y=f(x,y')$ ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsin.

U holda

$$P=\frac{dy}{dx}=y' \qquad (1)$$

deb $y=f(x,p)$ (2)

tenglikni olamiz. (2) tenglikni ikkala tomonidan to‘liq differensial olamiz va *dy* ni *pdx* bilan almashtirib quyidagini olamiz:

$$M(x,p)dx+N(x,p)dp=0.$$

Agar bu tenglama yechimini $x=\varphi(p)$ ko‘rinishda topish mumkin bo‘lsa $F(x,y,y')=0$ tenglama yechimining parametrik ko‘rinishda topamiz:

$$x=\varphi(p),\ y=(\varphi(p),p).$$

$x=f(y,y')$ tenglama ham shu ko‘rinishda yechiladi.

Misol-1. $y=x+y'-\ln y'$ tenglama yechilsin. $p=y'$ parametrik kiritsak

$$y = x + p - \ln p \qquad (3)$$

tenglikni olamiz. (3) ning ikala tomonidan to‘liq differensial hisoblaymiz va $dy = pdx$ deymiz:

$$dy = dx + dp - \frac{dp}{p}, \quad pdx = dx + dp - \frac{dp}{p},$$

$$(p-1)dx = \frac{p-1}{p} dp.$$

a) $p \neq 1$ bo‘lsa, $dx = \frac{dp}{p} \Rightarrow x = \ln p + C$.

Buni (3) ga qo‘yib olamiz:

$$x = \ln p + c, \quad y = p + c \qquad (5)$$

r ni yo‘qotsak $p = e^{x-c}$,

$$y = e^{x-c} + c. \qquad (6)$$

b) $p = 1$ bo‘lsa (3)-tenglik asosida

$y = x + 1$ (7) ni olamiz.

Misol-2: Ushbu

$$y'^2 - y' \cdot x - y + \frac{x^2}{2} = 0$$

differensial tenglamani yeching.

Bu tenglamada $\Phi(x, y, y') = y'^2 - y \cdot x - y + \frac{x^2}{2}$ bo‘lib, u tenglama *u* ga nisbatan yechiladi:

$$y = y^{12} - y \cdot x + \frac{x^2}{2}.$$

Keyingi tenglamada $y' = p$ deb, uning har ikki tomonini differensiallaymiz:

$$y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$$

$$dy = d\left(p^2 - px + \frac{x^2}{2}\right) = 2pdp - pdx + xdx = (2p - x)dp - (p - x)dx.$$

Endi $dy = y' \cdot dx = p \cdot dx$ bo‘lishini e'tiborga olib topamiz:

$$pdx = (2p - x)dp - (p - x)dx \Rightarrow p = (2p - x)\frac{dp}{dx} - p + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2p - x) \cdot \frac{dp}{dx} = 2p - x \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 1 \qquad (2p - x \neq 0)$$

Ravshanki, $\frac{dp}{dx} = 1$ tenglamaning yechimi $p = x + c$ bo‘ladi.

Yuqoridagi $y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$ hamda $p = x + c$ tengliklardan *r* ni yo‘qotib topamiz:

$$y = (x + c)^2 - (x + c)x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

2. $F(x, y, y') = 0$ tenglamaning $y = \varphi(x)$ yechimi maxsus deyiladi, agar uning har bir nuqtasidan boshqa yechim o‘tadi va uning urinmasi $y = \varphi(x)$ urinmasi bilan bir xil va bu

nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida *u* bilan ustma-ust tushmaydi.

Agar $F(x,y,y'),\ F_y,\ F_{y'}$ hosilalar uzluksiz bo‘lsa $F(x,y,y')=0$ (8) tenglamaning maxsus yechimi

$$F_{y'}=c \qquad \left(F_{y'}=\frac{\partial F}{\partial y}\right) \tag{9}$$

Tenglamani qanoatlantiradi. Shuning uchun maxsus yechimni topish uchun (8), (9) tenglamalardan y' ni yo‘qotish kerak:

$$F(x,y,y')=0, \qquad \frac{\partial F}{dy'}(x,y,y')=0.$$

Hosil bo‘lgan $\varphi(x,y)=0$ tenglama egri chiziqning diskriminantasi deyiladi. Diskriminanta chiziqning har bir shoxi $F(x,y,y')=0$ tenglamani yechimi bo‘ladimi degan savolga javob berish kerak, ya'ni uni har bir nuqtasida boshqa yechimlar urinib o‘tadimi deb tekshirish kerak.

Misol-3: $y=x+y'-\ln y'$ (10)

tenglama maxsus yechimlari topilsin.

Bu tenglikni y' bo‘yicha differensiallaymiz:

$$0=1-\frac{1}{y'}.$$

(10) va (11) tenglamadan y' ni yo‘qotamiz.

(11) tenglamadan $y'=1$. Uni (10) tenglamaga qo‘ysak, diskriminanta chiziq tenglamasini olamiz:

$$y=x+1 \tag{12}$$

Tekshirib ko‘ramiz: bu chiziq maxsusmi? Buning uchun avvalo, *u* (10) tenglamaning yechimini tekshiramiz: $x+1=x+1$ (ayniyat). Demak, (12), (10) tenglamaning yechimi. Endi uning maxsuslikka tekshiramiz, ya'ni unga boshqa yechimlar har bir nuqtada urinib o‘tadimi degan savolni ravshanlashtiramiz. $y=y_1(x),\ \ y=y_2(x)$ yechimlarning $x=x_0$ nuqtada urinish shartlarini topamiz:

$$y_1(x_0)=y_2(x_0),\ \ y'_1(x_0)=y'_2(x_0) \tag{13}$$

(6), (12) yechimlar uchun bu shartlar ushbu ko‘rinishlarni oladi:

$$e^{x_0-c}+c=x_0+1, \qquad e^{x_0-c}=1.$$

Ikkinchi tenglikdan $c=x_0$ munosabatni topamiz. Uni birinchi tenglikka qo‘ysak $1+x_0=1+x_0$ munosabatni olamiz. Bu tenglik barcha x_0 lar uchun o‘rinli. Shuning uchun har bir x_0 da (12) yechim (6) oilaning har bir egri chizig‘i bilan urinadi, bu chiziq uchun $c=x_0$ o‘rinli.

Shunday qilib, har bir nuqtada (12) yechim birorta ham nuqtada ustma-ust tushmaydigan (6) yechim bilan urinadi va (12) yechim maxsus.

Agar yechimlar oilasi parametrik ko‘rinishda yozilgan bo‘lsa, urinish shartlari shu kabi tekshiriladi. Bunda $y'=p$ ekanligini nazarda tutish kerak.

3. Agar chiziqlar oilasi $\Phi(x,y,c)=0$ $F(x,y,y')=0$ ning yechimi bo‘lib, $y=\varphi(x)$ urinishdagi bog‘lamga ega bo‘lsa, u tenglamaning maxsus yechimi bo‘ladi. Agar $\phi(x,y,c)$ funksiya 1-hosilalarga ega bo‘lsa, bog‘lamni topish uchun *S* ni

$$\phi(x,y,c)=0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial c}(x,y,c)=0.$$

Tenglamalardan yo‘qotish kerak va bu chiziq bog‘lam bo‘lmasligini tekshirish kerak ya'ni uni har bir nuqtada oila a'zolari urinib o‘tishini aniqlash kerak. Bu tekshirishni 2-punkt oxiridagi keltirilgan (13) shartlar asosida olib borish kerak.

1. $(y^1)^2 - \frac{2y}{x} y' + 1 = 0$ j: $(x^2c^2 + 1 - 2cy)(x^2 + c^2 - 2cy) = 0; \quad x^2 - y^2 = 0$
2. $4(y^1)^2 - 9x = 0$ j: $(y + c)^2 = x^3$
3. $y(y^1)^2 - (xy + 1)y + x = 0$ j: $\left(\frac{x^2}{2} - y + c\right)\left(x - \frac{y^2}{2} + c\right) = 0$
4. $y(y^1)^2 - 2xy^1 + y = 0$ j: $y^2 + c^2 = 2cx; \quad x^2 - y^2 = 0$
5. $(y')^2 + y^2 = 1; \quad y(0) = \frac{1}{2}$ j: $y = \frac{1}{2}\cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$
6. $x = \sin y' + \ln y'$ j: $\begin{cases} x = \sin p + \ln p \\ y = p\sin p + \cos p + p + c \end{cases}$
7. $y = (y^1)^2 e^{y'}$ j: $\begin{cases} x = e^p + pe^p + c \\ y = p^2 e^p \end{cases}$
8. $y = (y^1)^2 + 2\ln y'$ j: $\begin{cases} x = 2p - \frac{2}{p} + c \\ y = p^2 + 2\ln p \end{cases}$
9. $4y = x^2 + (y^1)^2$ j: $4y = x^2 + p^2; \quad \ln|p - x| = C + \frac{x}{p - x}$

$e^x = \frac{y^2 + (y^1)^2}{2y'}$ j: $\ln\sqrt{p^2 + y^2} + arctg\frac{p}{y} = c, \quad x = \ln\frac{y^2 + p^2}{2p} \quad y = e^x$

TEST

Agar $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tenglamada $M(x,y)$ va $N(x,y)$ m-tartibli bir jinsli funksiyalar bo‘lsa, u holda integrallovchi ko‘paytuvchi qanaqa ko‘rinishda bo‘ladi?	$* m(x,y) = [xM + yN]^{-1}$	$m(x,y) = xM + yN$	$m(x,y) = \frac{x+y}{M+N}$	$m(x,y) = [xN + yM]^{-1}$
Shunday egri chiziqlarni topingki, uning har bir nuqtasiga o‘tkazilgan urinma koordinata o‘qlari bilan birgalikda yuzasi $2a^2$ ga teng bo‘lgan uchburchak hosil qilsin.	$* xy = \pm a^2$	$y = \frac{1}{a^2}$	$xy = \pm 2a^2$	$y = a^4$
Differensial tenglamalar tuzish yo‘li bilan $y = cx^2$ chiziqlar oilasiga ortogonal chiziqlar oilasini toping.	$* 2y^2 + x^2 = c$	$y = cx^{-2}$	$y = -cx^2$	$y^2 + 2x = c$
Quyidagi tenglamalardan qaysi biri bir jinsli tenglama emas?	$* (x^2 + y)dx - xdy = 0$	$xy' Cos\frac{y}{x} = yCos\frac{y}{x} - x$	$(2x^3 - xy^2)dx + ... + (2y^3 - x^2y)dy = 0$	$y' = \frac{y^3}{2(xy^2 - x^3)}$

$y' + P(x)y = Q(x)$ tenglamani integrallovchi ko‘paytuvchi qanaqa ko‘rinishda bo‘ladi?	* $e^{\int p(x)dx}$	$e^{-\int p(x)dx}$	$\int p(x)dx$	$e^{\int p^2(x)dx}$
Agar chiziqli differensial tenglama Klero tenglamasi bo‘lsa, uning integral chiziqlari oilasi nimadan iborat bo‘ladi?	* To‘g‘ri chiziqlar dastasi	Giperbolalar	Aylanalar	Parabolalar
Berilgan tenglamaning tipini aniqlang: $y\sin x + y'\cos x = 1$	**Chiziqli*	*Bernulli*	*o‘zgaruvchilari ajraladigan*	*Rikkati*
$y' = \frac{3y - x^2}{x}$ tenglamani yechimini aniqlang.	* $y = cx^3 + x^2$	$y = cx + x^2$	$y = cxe^x$	$y = cx^2 + 2x^3$
$(2xy + 3x^2)dx + x^2dy = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	* $x^2y + x^3 = c$	$x^2y + y^3 = c$	$x^3y - x = c$	$\frac{x}{y} + x^3 = c$
Qanday almashtirish yordamida $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirish mumkin?	* $y = zx^{-1}$	$y = zx$	$z = y^2$	$z = \sqrt{y}$

MA'RUZA № 13
Mavzu: $n-$tartibli chiziqli tenglamalar.
Chiziqli bir jinsli teglamalar xossalari.

Reja

1. $n-$tartibli chiziqli tenglamalar.
2. $n-$tartibli chiziqli differensial operator.
3. Chiziqli bir jinsli teglama yechimlari xossalari.

Tayanch so’z va iboralar: *n-tartibli chizikli tenglama, n-tartibli chizikli differensial operator, n-tartibli chizikli bir jinsli tenglama yechimlarining xossalari*

1. $n-$tartibli differensial tenglamalarning muhim xususiy holi $n-$tartibli chiziqli differensial tenglamalar bo‘lib, ular

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x) \tag{1}$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu yerda $p_1(x),..., p_{n-1}(x), p_n(x), q(x)-$funksiyalar biror I intervalda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, $q(x)-$funksiya (1) tenglamaning *o‘ng tomoni* yoki *ozod hadi*, $p_1(x),..., p_{n-1}(x), p_n(x)-$ funksiyalar esa uning *koeffisiyentlari* deb yuritiladi.

Agar (1) tenglamada $q(x)-$funksiya I intervalda aynan 0 gat eng bo‘lmasa, u holda (1) tenglama *chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglama* deyiladi. Agar $q(x) \equiv 0,\ x \in I$ bo‘lsa, mos differensial tenglama

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{2}$$

bo‘lib, *chiziqli bir jinsli tenglama* deyiladi.

Endi (1) differensial tenglama uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi bilan shig‘ullanamiz. (1) tenglamani yoqori hosilasiga nisbatan yechish mumkin:

$$y^{(n)} = q(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y \,. \qquad (3)$$

Umumiy belgilashga ko‘ra [$y^{(n)} = f(x, y, y',..., y^{(n-1)})$]

$$f(x, y, y',..., y^{(n-1)}) = q(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - ... - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y \,. \qquad (4)$$

Bu funksiya $D_{n+1} = \{(x, y, y',...y^{(n-1)}) : x \in I, -\infty < y^{(i)} < +\infty, \ i = 0,1,2,..., n-1\}$ sohada aniqlangan. Agar $p_1(x),..., p_{n-1}(x), p_n(x), q(x) -$ funksiyalar $[x_1, x_2] = I$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda (4) funksiya tegishli D_{n+1} sohada $x, y, y',..., y^{(n-1)}$ bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham, f funksiya $x, y, y',..., y^{(n-1)}$ bo‘yicha $-\infty < y^{(i)} < +\infty$, $(i = 0,1,2,..., n-1)$ intervalda uzluksiz va uzluksiz hosalalarga ega, chunki $\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} = -p_{n-1}(x)$ va $p_{n-i}(x)$ $[x_1, x_2]-$da uzluksiz. Agar $\max\limits_{x\in[x_1,x_2]} \left| \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} \right| = L_i, \ L_i \ge 0, \ i = 0,1,2,..., n-1$, $\max(L_0, L_1,..., L_n) = L \ge 0$ dasak, f funksiya Lipshits shartini qanoatlantiradi. Bundan $x_0 \in [x_1, x_2]$ uchun (1) tenglama $y(x_0) = y_0, \ y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}, \ i = \overline{1, n-1}$ shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimga egaligi kelib chiqadi.

2. Endi (2) differensial tenglamani alohida o‘rganaylik. Noma’lum funksiya $y(x)$ ga nisbatan (2) tenglamaning chap tomonida ko‘rsatilgan amallar (differensiallash, $p_i(x)$ funksiyalarga ko‘paytirish va qo‘shish) qo‘llanish natijasida *$n-$tartibli chiziqli differensial operator* deb yuritiladi va $L[y]$ deb belgilanadi, ya’ni:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \qquad (5)$$

Bu operatitor yordamida (1) va (2) tenglamalar

$$L[y] = q(x) \qquad (1')$$

$$L[y] = 0 \qquad (2')$$

ko‘rinishda yoziladi.

Kiritilgan $L[y]$ operatorning muhim ikki xossasi bor:

1^0. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2], \ y_1 \in C^n, \ y_2 \in C^n$;

2^0. $L[Cy] = CL[y], \ y \in C^n, \ C = const$;

Bu xossalar aslida haqiqiy o‘zgaruvchining kompleks funksiyalari uchun ham o‘rinli, C ham kompleks bo‘lishi mumkin. Birinchi xossani isbot etish uchun (5) ifodadagi y va uning hosilalarini qo‘yamiz:

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= (y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1) + (y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + ... + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2) =$$
$$= L[y_1] + L[y_2].$$

Bu xossadan ushbu

$$L[\sum_{i=1}^{k} y_i] = \sum_{i=1}^{k} L[y_i], \ y_i \in C^n, \ i = \overline{1, k}$$

formulaning to‘g‘riligi kelib chiqadi.

Ikkinchi xossa ham birinchi kabi isbot etiladi. Yuqoridagi ikki xossadan ushbu natija kelib chiqadi:

$$L[\sum_{i=1}^{k} C_i y_i] = \sum_{i=1}^{k} C_i L[y_i], \qquad (6)$$

bu yerda $C_1, C_2,..., C_k -$ ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar. $L[y]$ operatorning yuqorida keltirilgan xossalariga asoslanib muhim teoremalarni isbotlash mumkin.

1-teorema. Agar $y = y_1(x), \ y = y_2(x)$ funksiyalar I intervalda (2’) tenglamaning yechimlari bo‘lsa, u holda $y = y_1(x) + y_2(x)$ funksiya ham I intervalda (2’) ning yechimi bo‘ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko‘ra $L[y_1] = 0,\ L[y_2] = 0$. Bundan 1^0-chi xossaga ko‘ra $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0$. Teorema isbot bo‘ldi.

2-teorema. Agar $y_1(x)$ funksiya I intervalda (2’) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda $C_1 y_1(x)$ ($C -$ixtiyoriy o‘zgarmas) funksiya ham I intervalda (2’) ning yechimi bo‘ladi.

Isbot. Shartiga ko‘ra $L[y_1] = 0,\ L[y_2] = 0$. 2^0-chi xossaga ko‘ra $L[Cy_1] = CL[y_1] = 0$ kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

1-natija. Agar $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ funksiyalar I intervalda (2’) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda shu intervalda $\sum_{i=1}^{k} C_i y_i$ funksiya ham (2’) ning yechimi bo‘ladi.

Isboti 1 va 2-teoremalardan kelib chiqadi.

3-teorema. Agar koeffitsiyentlari $p_i(x),\ x \in I\ (i = 1,2,...,n)$ haqiqiy bo‘lgan (2’) tenglama $y(x) = u(x) + iv(x)$ kompleks yechimga ega bo‘lsa, u holda $u(x)$ va $v(x),\ x \in I$ har biri (2’) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Isbot. $L[u(x) + iv(x)] \equiv 0$ dan $L[u(x)] + iL[v(x)] \equiv 0$ ga ega bo‘lamiz. Bu ayniyat bajarilishi uchun $L[u(x)] \equiv 0,\ L[v(x)] \equiv 0$ bo‘lishi zarur va yetarli. Teorema isbot bo‘ldi.

Agar 1-natijada $k = n$ bo‘lsa, u holda n ta ixtiyoriy o‘zgarmasni o‘z ichiga olgan

$$y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + ... + C_n y_n(x) \tag{7}$$

funksiya ham (2’) tenglamaning yechimi bo‘ladi. (2’) tenglama $n-$tartibli bo‘lganidan uning umumiy yechimi formulasi $n-$ta ixtiyoriy o‘zgarmasni o‘z ichiga olishi lozimligini biz bilamiz. Unday bo‘lsa, (7) formula bilan berilgan funksiya (2’) tenglama uchun umumiy yechim bo‘la oladimi. Bu savolga javob $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ yechimlar orasidagi munosabatga bo‘g‘liq. Buni keyingi mavzuda ko‘ramiz.

MA'RUZA № 14

Mavzu: Funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi. Fundamental yechimlar. Vronskiy determinanti. Xossalari.

Reja:

1.Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli funksiyalar.
2. Funksiyalarning chiziqli bog‘liqligiga misollar.
3. Vronskiy determinanti.

Tayanch so’z va iboralar: *n-tartibli chizikli tenglama, n-tartibli chizikli differensial operator, n-tartibli chizikli bir jinsli tenglama yechimlarining xossalari, chiziqli boglik va chizikli erkli funksiyalar, Vronskiy determinanti va xossalari.*

Biror I intervalda aniqlangan $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar berilgan bo‘lsin.

1- **Ta’rif**. Agar bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ o‘zgarmas sonlar mavjud bo‘lsaki, I intervalda ushbu

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0 \tag{1}$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar I intervalda *chiziqli bog‘liq* deyiladi.

Agar yuqorida aytilgan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sonlar mavjud bo‘lmasa, ya'ni (1) ayniyat o‘zgarmaslarning faqat nolga teng qiymatlaridagina, ya’ni $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar I intervalda *chiziqli erkli* deyiladi.

Natija. *Agar* I *intervalda* $\varphi_i(x) \equiv 0,\ 1 \le i \le k$ *bo'lsa, u holda* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ *funksiyalar* I *intervalda chiziqli bog'liq bo'ladi.*

Haqiqatan, $C_i \ne 0,\ C_1 = C_2 = ... = C_{i-1} = C_{i+1} = ... = C_k = 0$ deb tanlasak, $\sum_{i=1}^{k} C_j^2 \ne 0$ va $C_i\varphi_i(x) \equiv 0$ bo'ladi.

Agar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m$ ba'zi kompleks sonlar, $f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)$ lar x ga nisbatan ko'phadlar bo'lsa, ushbu

$$F(x) = f_1(x)e^{\lambda_1 x} + f_2(x)e^{\lambda_2 x} + ... + f_m(x)e^{\lambda_m x}$$

ko'rinishda yoziladigan har bir $F(x)$ funksiya *kvaziko'phad* deyiladi.

1-lemma. *Ushbu* $F(x) = f_1(x)e^{\lambda_1 x} + f_2(x)e^{\lambda_2 x} + ... + f_m(x)e^{\lambda_m x}$ *kvaziko'phad berilgan va* $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m$ *lar o'zaro turli sonlar bo'lsin. Agar shu kvaziko'phad biror* I *intervalda aynan nolga teng bo'lsa, u holda hamma* $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ *ko'phadlar nolga teng bo'ladi.*

Isbot. Isbotni m soni bo'yicha induksiya bilan isbotlaymiz. m sonni kvaziko'phadning tartibi deb ataymiz. $m = 1$ bo'lganda 1-lemma to'g'ri, chunki bu holda $F(x) = f_1(x)e^{\lambda_1 x}$ va $f_1(x)e^{\lambda_1 x} \equiv 0,\ x \in I$ ayniyatdan $f_1(x) \equiv 0$ kelib chiqadi. Endi $m-1$ dan $m\ (m \ge 2)$ ga induktiv o'tishni bajaramiz. Agar $F(x)$ ko'phad I intervalda aynan nolga teng bo'lsa, u holda bu natija ushbu

$$G(x) = p^{l+1}(F(x)e^{-\lambda_m x})$$

kvaziko'phad uchun ham o'rinli (bu yerda $p-$differensiallash operatori, l esa $f_m(x)$ ko'phadning darajasi). Bevosita hisoblash yordamida

$$G(x) = g_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)} + g_2(x)e^{(\lambda_2 - \lambda_m)} + ... + g_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)}$$

ni ko'rsatish mumkin, bunda

$$g_i(x) = (p + \lambda_i - \lambda_m)^{l+1} f_i(x),\ i = 1,2,..., m-1$$

$G(x)$ kvaziko'phadning tartibi $m-1$ ga teng. Shu $G(x)$ kvaziko'phad I intervalda aynan nolga teng bo'lgani uchun induksiya faraziga ko'ra barcha $g_1(x), g_2(x), ..., g_{m-1}(x)$ ko'phadlar I da aynan nolga teng. Faraz etaylik, $f_1(x), f_2(x), ..., f_{m-1}(x)$ ko'phadlardan birontasi masalan, $f_1(x)$ nolga teng bo'lmasin, ya'ni $f_1(x) \ne 0, x \in I$. Shu $f_1(x)$ ko'phadning darajasi k bo'lsin, ya'ni $f_1(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_k$, bunda $a_0 \ne 0$. Bevosita tekshirish mumkinki:

$$g_1(x) = (p + \lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} f_i(x) = (\lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} a_0 x^k + ...$$

Endi $g_1(x) \equiv 0,\ x \in I$ ayniyatga ko'ra $(\lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} a_0 = 0$ tenglikka ega bo'lamiz. Ammo $\lambda_1 \ne \lambda_m$ ga ko'ra bundan $a_0 = 0$ kelib chiqadi. Bu ziddiyat $f_1(x), f_2(x), ..., f_{m-1}(x)$ ko'phadlar I da aynan nolga tengligini isbotlaydi. Demak, $F(x) = f_m(x)e^{\lambda_m x}$ ga egamiz. Bundan $F(x) \equiv 0$ bo'lishi uchun $f_m(x)$ ko'phadning barcha koeffitsientlari nolga tengligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $F(x) \equiv 0,\ x \in I$ ayniyat o'rinli bo'lsa, $f_m(x) \equiv 0,\ x \in I$ ayniyatlar ham o'rinli bo'lish isbot etildi. 1-lemma isbotlandi.

Misollar. 1. Ushbu $1, x, x^2, ..., x^k$ funksiyalar $(-\infty, +\infty)$ intervalda aniqlangan bo'lib, ular shu intervalda chiziqli erkli. Bu tasdiq ixtiyoriy, chekli intervalda ham o'rinli.

Agar teskarisini faraz etsak, bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ lar (ya'ni $\sum_{i=1}^{k} \alpha_j^2 \ne 0$) uchun ko'rilayotigan chekli yoki cheksiz intervaldan olingan x ning barcha qiymatlarida

$$\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + ... + \alpha_k x^k \equiv 0$$

ayniyat o‘rinli bo‘lishi kerak. Ammo algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra bu tenglik x dan ko‘p bo‘lsa $k-$ta qiymatidagina o‘rinli. Bu ziddiyat yuqoridagi fikrni isbotlaydi .

2. Ushbu

$$e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ ...,\ e^{k_sx},\ k_i \neq k_j, i \neq j$$

funksiyalar istalgan I intervalda chiziqli erkli. Buni isbot etish uchun shu funksiyalar I intervalda chiziqli bog‘liq bo‘lsin deylik, ya'ni bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ sonlar mavjudki, I intervalda

$$F(x) = \alpha_1 e^{k_1x} + \alpha_2 e^{k_2x} + ... + \alpha_s e^{k_sx} \equiv 0$$

ayniyat o‘rinli. Bu ayniyatning chap tomonida turgan funksiya kvaziko‘phad bo‘lib, unda $f_1(x) = \alpha_1, ..., f_s(x) = \alpha_s$. 1-lemmaga ko‘ra $F(x) \equiv 0$ ayniyat bajarilgan bo‘lsa, undan $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0$ kelib chiqadi. Bu esa $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ larning tanplanishiga zid. Demak, berilgan funksiyalar I intervaloda chiziqli erkli

3. Ixtiyoriy I intervalda ushbu $1, \cos x, \cos^2 \frac{x}{2}$ funksiyalar chiziqli bog‘liqdir. Haqiqatan,

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \cos x + \alpha_3 \cdot \cos^2 \frac{x}{2} \equiv 0$$

ifodada $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -2$ deyilsa, trigonometriyadagi $1 + \cos x \equiv 2\cos^2 \frac{x}{2}$ (bunda $x-$ixtiyoriy) ayniyat hosil bo‘ladi.

Yuqorida funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi va erkinligi tekshirildi. Tekshirish ta’rif bo‘yicha olib borildi. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar I intervalda aniqlangan va uzluksiz bo‘lishidan tashqari yana ba'zi shartlarni qanoatlantirsa, tekshirish soddalashadi. Shu maqsadda $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar I intervalda $(k-1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo‘lsin deylik, ya'ni $\varphi_i(x) \in C^{k-1}(I),\ i = \overline{1,k}$. Ushbu

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ... & \varphi_k \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ... & \varphi_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(k-1)} & \varphi_2^{(k-1)} & ... & \varphi_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \tag{2}$$

determinant *Vronskiy determinanti* yoki *Vronskian* deyiladi.

1-**Teorema**. *Agar* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ *funksiyalar* I *intervalda chiziqli bog‘liq bo‘lib,* $(k-1)$ *taribgacha uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsa, u holda* I *intervalda bu funksiyalardan tuzilgan Vronskiy determinanti aynan nolga teng bo‘ladi.*

Isbot. Teoremaning shartiga ko‘ra $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, $\sum_{i=1}^{k} \alpha_j^2 \neq 0$ lar uchun I intervalda

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0$$

ayniyat o‘rinli. Uni $(k-1)$ marta differensiallab,

$$\alpha_1\varphi_1'(x) + \alpha_2\varphi_2'(x) + ... + \alpha_k\varphi_k'(x) \equiv 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_1\varphi_1^{(k-1)}(x) + \alpha_2\varphi_2^{(k-1)}(x) + ... + \alpha_k\varphi_k^{(k-1)}(x) \equiv 0$$

ayniyat hosil qilamiz. Bu ayniyatlarni $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ $-$larga nisbatan tenglamalarning bir jinsli sistemasi deb qarash mumkin. Ammo $\sum_{i=1}^{k} \alpha_j^2 \neq 0$ bo‘lgani uchun bu sistema trivialmas (trivial bo‘lmagan (noldan farqli)) yechimga ega. Algebradagi ma'lum teoremadan sistemaning determinanti (ya'ni Vronskiy determinanti) aynan nolga teng bo‘lishi kelib chiqadi.

Isbot etilgan teorema funksiyalarning chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun faqat zaruriy shartni beradi. Boshqacha aytganda agar biror I intervalda $(k-1)$ marta uzluksiz differensiallanuvchi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalardan tuzilgan Vronskiy determinanti aynan nolga teng bo‘lsa, bundan u funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi, umuman aytganda kelib chiqmaydi. Masalan, quyidagi ikki funksiyani olaylik.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -(x-2)^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0 \quad , & 2 \le x \le 4 \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0 \quad , & 0 \le x \le 2 \\ (x-2)^2, & 2 \le x \le 4 \end{cases}.$$

Bu funksiyalar $0 \le x \le 4$ oraliqda $W[\varphi_1, \varphi_2] \equiv 0$. Ammo $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funksiyalar shu oraliqda chiziqli erkli. Haqiqatan ham, $0 \le x \le 2$ da

$$W = \begin{vmatrix} -(x-2)^2 & 0 \\ -2(x-2) & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$2 \le x \le 4$ da

$$W = \begin{vmatrix} 0 & (x-2)^2 \\ 0 & 2(x-2) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Bulardan $0 \le x \le 4$ da $W(x) \equiv 0$. Ammo, $0 \le x \le 2$ da $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) \equiv 0$ ayniyatdan $\alpha_1 = 0$, $2 \le x \le 4$ da shu ayniyatdan $\alpha_2 = 0$ kelib chiqadi. U holda $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funksiyalar shu oraliqda chiziqli erkli.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенные дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi.
2. Avtonom sistemalarning xolatlar tekisligi.

Glossariy

Chiziqli bog’liq funksiyalar - Agar bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ o‘zgarmas sonlar mavjud bo‘lsaki, I intervalda ushbu

$$\alpha_1\varphi_1(x) Q \alpha_2\varphi_2(x) Q \ldots Q\, \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0 \qquad (1)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u xolda $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ $\varphi_k(x)$, funksiyalar I intervalda chiziqli bog‘liq deyiladi.

Chiziqli erkli funksiyalar - Agar yuqorida aytilgan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ sonlar mavjud bo‘lmasa, ya'ni (1) ayniyat o‘zgarmaslarning faqat nolga teng qiymatlaridagina o‘rinli bo‘lsa, u xolda $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ $\varphi_k(x)$, funksiyalar I intervalda chiziqli erkli deyiladi.

Vronskiy determinanti - Ushbu

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2, .. \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_1, \varphi_2, .. \varphi_k \\ \varphi_1^1, \varphi_2^2, .. \varphi_k^1 \\ - - - - - - - \\ \varphi_1^{(k-1)}, \varphi_2^{(k-1)} .. \varphi_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

determinant Vronskiy determinanti yoki Vronskian deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y(y^1)^2-2xy^1+y=0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. $\mathfrak{I}$ intervalda chiziqli bog‘liq funksiyalar deb nimaga aytiladi?
2. $\mathfrak{I}$ intervalda chiziqli erknli funksiyalar deb nimaga aytiladi?
3. Kvazi ko‘pxadini ta'riflang?
4. Kanday ko‘rinishdagi determenant Vranskiy deteminanti yoki Vronslan detsiladi?
5. Tenglamalarning bir jinsli sistemasi deb qanday ko‘rinishdagi sistemaga aytiladi?

Amaliy mashg’ulot-12

1. $y=(y^1)^2+2\ln y'$ j: $\begin{cases} x=2p-\dfrac{2}{p}+c \\ y=p^2+2\ln p \end{cases}$
2. $4y=x^2+(y^1)^2$ j: $4y=x^2+p^2;\quad \ln|p-x|=C+\dfrac{x}{p-x}$
3. $e^x=\dfrac{y^2+(y^1)^2}{2y'}$ j: $\ln\sqrt{p^2+y^2}+arctg\dfrac{p}{y}=c,\quad x=\ln\dfrac{y^2+p^2}{2p}\quad y=e^x$
4. $y(y^1)^2+y^1(x-y)-x=0$ j: $y=x+c$ va $x^2+y^2=c^2$
5. $x(y^1)^2+2xy^1-y=0$ j: $x\left(\sqrt{1+\dfrac{y}{x}}\pm 1\right)^2=c$ yoki $(y-c)^2=4cx$
6. $y=1+(y^1)^2$ j: $y=1+\dfrac{(x-c)^2}{4};\quad y=1$
7. $x=2y^1-\dfrac{1}{(y^1)^2}$ j: $x=2p-\dfrac{1}{p^2};\quad y=p^2-\dfrac{2}{p}+c$

TEST

Agar chiziqli differensial tenglama Klero tenglamasi bo‘lsa, uning integral chiziqlari oilasi nimadan iborat bo‘ladi?	* To‘g‘ri chiziqlar dastasi	Giperbolalar	Aylanalar	Parabolalar
Berilgan tenglamaning tipini aniqlang: $y\sin x+y'\cos x=1$	**Chiziqli*	*Bernulli*	*o‘zgaruvchilari ajraladigan*	*Rikkati*
$y'=\dfrac{3y-x^2}{x}$ tenglamani yechimini aniqlang.	* $y=cx^3+x^2$	$y=cx+x^2$	$y=cxe^x$	$y=cx^2+2x^3$
$\left(2xy+3x^2\right)dx+x^2dy=0$ tenglamaning umumiy	* $x^2y+x^3=c$	$x^2y+y^3=c$	$x^3y-x=c$	$\dfrac{x}{y}+x^3=c$

yechimini toping				
Qanday almashtirish yordamida $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirish mumkin?	* $y = zx^{-1}$	$y = zx$	$z = y^2$	$z = \sqrt{y}$
Quyidagi tenglama qaysi tipga tegishli $\left(x\cos y - y^2\right)dy + \left(\sin y + x\right)dx = 0$	* to‘la differensial	Bernulli	x ga nisbatan chiziqli	hosilaga nisbatan yechilmagan
Boshlang‘ich shartli masala nechta yechimga ega $y' = xy - y^3,\ y(0) = 0$	*1	2	yechimga ega emas	3
Tenglamaning tipini aniqlang $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$	*Bir jinsli	Bernulli	Chiziqli	to‘la differensial
Ushbu $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ tenglamaning yechimini toping.	* $x = cy^3 + y^2$	$y = 3x^3 + cx^2$	$y = cx^3 + x^2$	$y = cx + x^2$
Ushbu $y = cx^2$ chiziqlar sinfning differensial tenglamasini toping	* $xy' = 2y$	$y' = y^{\frac{2}{x}}$	$y'x = 3y$	$y'x^2 = y^2$

MA'RUZA № 15

Mavzu: Funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi. Vronskiy determinanti. Xossalari. Fundamental yechimlar. (davomi)

Reja

1.Funksiyalar chiziqli bog‘liqligini Vronskiy determinanti yordamida tekshirish.
2. $n-$tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi haqida teorema.
3. Fundamental yechimlar sistemasi.

Tayanch so’z va iboralar: *fundamental yechimlar sistemasi, funksiyalar chiziqli bog‘liqligini Vronskiy determinanti yordamida tekshirish, n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi haqidagi teorema.*

2- **TEOREMA**. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \tag{1}$$

yoki

$$L[y] = 0 \tag{1’}$$

tenglamaning I intervalda aniqlangan va tegishli boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan yechimlari bo‘lib, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti biror $x = x_0, x_0 \in I$ nuqtada nolga teng bo‘lsa, u holda I intervalda $W[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n] \equiv 0$ va $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Oldingi mavzuda isbot etilgan 1-teorema chiziqli bog‘liqlikning zaruriy shartini, bu 2-teorema yetarli shartni beradi.

Isbot. Ushbu tenglamalarni ko‘ramiz:

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(x_0)+\alpha_2\varphi_2(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n(x_0)=0 \\ \alpha_1\varphi_1'(x_0)+\alpha_2\varphi_2'(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n'(x_0)=0 \\ .... \\ \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+\alpha_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases} . \qquad (2)$$

Bu sistemada $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ larni noma'lum deb qaraymiz. (2) sistemaning determinanti $W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),...,\varphi_n(x_0)]=W(x_0)=0$ bo‘lgani uchun shu sistemaning nolga teng bo‘lmagan (trivialmas) yechimlari ham bor. Ulardan birortasi $\alpha_1^0,\alpha_2^0,...,\alpha_n^0$ bo‘lsin. Endi ushbu

$$\varphi(x)=\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x) \qquad (3)$$

funksiyani ko‘raylik. Bu funksiya 13-ma'ruzadagi natijaga ko‘ra I intervalda aniqlangan bo‘lib, (1’) tenglamaning yechimidan iborat. $\varphi(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich shartlar quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} \varphi(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0\varphi_i(x_0), \\ \varphi^{(j)}(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0\varphi_i^{(j)}(x_0), \quad j=1,2,...,n-1. \end{cases} \qquad (4)$$

(2) munosabatlarga ko‘ra, ravshanki $\varphi(x_0)=0,\ \varphi'(x_0)=0,\ ...,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=0$. Teoremani isbot etish uchun $\varphi(x)\equiv 0,\ x\in I$ ekanini ko‘rsatish lozim. Ammo Pikar teoremasiga ko‘ra faqat $\varphi(x)\equiv 0,\ x\in I$ yechimgina $\varphi(x_0)=0,\ \varphi'(x_0)=0,\ ...,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=0$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi. Demak, $\varphi(x)\equiv 0,\ x\in I$. Bundan $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^0)^2\neq 0$ tengsizlikka ko‘ra $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ funksiyalarning I intervalda chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi. Endi, agar $\varphi(x)$ funksiyadan $(n-1)-$tartibgacha hosilalar olsak, n ta ayniyatga ega bo‘lamiz. Uning determinanti $W[\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n]\equiv 0,\ x\in I$ bo‘ladi.

3-**TEOREMA**. (1’) tenglamaning I intervalda aniqlangan $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ yechimlari chiziqli erkli bo‘lishi uchun bu yechimlardan tuzilgan Vronskiy determinanti I intervalning biror x_0 nuqtasida noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarli. Shu bilan birga agar $W(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, u holda $W(x)\neq 0,\ x\in I$; agar $W(x_0)=0$ bo‘lsa, u holda $W(x)=0,\ x\in I$ bo‘ladi.

Isbot. Yetarliligi. $W(x_0)\neq 0$ deylik. $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ yechimlarning chiziqli erkli ekanini ko‘rsatamiz. Bu yechimlar chiziqli bog‘liq bo‘lsin, ya'ni $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^0)^2\neq 0$ lar uchun I intervalda

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0$$

ayniyat o‘rinli. Undan $(n-1)$ tartibgacha hosilalar olib, $x=x_0$ deymiz:

$$\begin{cases} \alpha_1\varphi_1(x_0)+\alpha_2\varphi_2(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n(x_0)=0 \\ \alpha_1\varphi_1'(x_0)+\alpha_2\varphi_2'(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n'(x_0)=0 \\ .... \\ \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+\alpha_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0 \end{cases}$$

bundan $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^0)^2\neq 0$ bo‘lgani uchun $W(x_0)=0$ ekani kelib chiqadi. Bu esa $W(x_0)\neq 0$ ga zid.

Demak, $W(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ yechimlar chiziqli erkli. Ammo

$W(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, $W(x)\neq 0,\ x\in I$ bo‘lishi ham kelib chiqadi. Haqiqatan, agar $W(x_1)=0,\ x_1\neq x_0$ bo‘lsa, bundan I da $W(x)=0$ masalan, $x=x_0$ da ham $W(x_0)=0$ ekani chiqadi, bu esa $W(x_0)\neq 0$ ga zid.

Zarurligi. $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ funksiyalar I intervalda (1’) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo‘lsin. U holda $W(x_0)\neq 0$ bo‘ladi. Aks holda $W(x_0)=0$ dan $W(x)=0,\ x\in I$ va demak, $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ yechimlarning chiziqli bog‘liqligi kelib chiqar edi. Teorema to‘la isbot bo‘ldi.

Ushbu $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ funksiyalar I intervalda (1’) tenglamaning ($x_0\in I$)

$$\begin{aligned}&\varphi_1(x_0)=1,\ \varphi_2(x_0)=0,\ ...,\ \varphi_n(x_0)=0\\ &\varphi_1'(x_0)=0,\ \varphi_2'(x_0)=1,\ ...,\ \varphi_n'(x_0)=0\\ &.........\ ....\ ....\ ....\ ....\ ....\ .\\ &\varphi_1^{(n-1)}(x_0)=0,\ \varphi_2^{(n-1)}(x_0)=0,\ ...,\ \varphi_n^{(n-1)}(x_0)=1\end{aligned}$$

boshlang‘ich shartini qanoatlantiruvchi yechimlari bo‘lsin. Endi (1’) tenglamani

$$y^{(n)}=-p_1(x)y^{(n-1)}-p_2(x)y^{(n-2)}-...-p_{n-1}(x)y'-p_n(x)y$$

ko‘rinishda yozsak, bu tenglamaning o‘ng tomoni $y,y',y'',...,y^{(n-1)}$ larga nisbatan ixtiyoriy sohada Lipshit shartini qanoatlantiradi. Ko‘rinadiki, $D_{n+2}\subset R^{n+2}$ sohada Pikar teoremasining yuqoridagi shartlarini har birini qanoatlantiradigan yagona yechimi mavjud. Shuning uchun

$$W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),...,\varphi_n(x_0)]=\begin{vmatrix}1 & 0 & ... & 0\\ 0 & 1 & ... & 0\\ .... & & & ....\\ 0 & 0 & ... & 1\end{vmatrix}=1\neq 0$$

tengsizlikka ko‘ra $n-$tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning $n$ta chiziqli erkli yechimlari mavjud. Endi umumiy yechim haqidagi teoremani keltiramiz.

4-**TEOREMA**. Agar $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ funksiyalar (1’) differensial tenglamaning I intervalda aniqlanmagan chiziqli erkli yechimlari bo‘lsa, u holda umumiy yechim ushbu

$$y=C_1\varphi_1(x)+C_2\varphi_2(x)+...+C_n\varphi_n(x)\qquad(5)$$

($C_1,C_2,...,C_n-$ ixtiyoriy o‘zgarmaslar) formula bilan yoziladi.

Isbot. $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ funksiyalar I intervalda chiziqli erkli bo‘lgani uchun $W[y_1,y_2,...,y_n]\neq 0,\ x\in I$. Masalan, $x_0\in I$ nuqtada ham $W(x_0)\neq 0$. Endi $y=\varphi(x),\ x\in I$ funksiya (1’) tenglamaning ixtiyoriy boshlang‘ich shartni, ya'ni

$$\varphi(x_0)=y_0,\varphi'(x_0)=y_0',...,\varphi^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

munosabatlarni qanoatlantiradigan yechimi bo‘lsin. Bunda ikki holni qarash lozim bo‘ladi. Avvalo I intervalda $\varphi(x)\equiv 0$ bo‘lishi mumkun. Bu yechim (5) folmuladan ($C_1=C_2=...=C_n=0$ bo‘lganda) hosil bo‘ladi. Endi $\varphi(x)\neq 0,\ x\in I$ bo‘lsin, (5) ga ko‘ra

$$\begin{cases}y_0=\alpha_1\varphi_1(x_0)+\alpha_2\varphi_2(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n(x_0)\\ y_0'=\alpha_1\varphi_1'(x_0)+\alpha_2\varphi_2'(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n'(x_0)\\ ....\ ....\ ....\ ....\ ....\ ....\ ...\\ y_0^{(n-1)}=\alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+\alpha_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)\end{cases}.\qquad(6)$$

Ko‘rilayotgan holda (6) sistema $C_1,C_2,...,C_n-$larga nisbatan asosiy determinanti $W(x_0)\neq 0$ bo‘lgan bir jinsli bo‘lmagan sistemadir. Bu sistema yagona $C_1^0,C_2^0,...,C_n^0$ yechimga ega. Demak, $\varphi(x)=C_1^0\varphi_1(x)+C_2^0\varphi_2(x)+...+C_n^0\varphi_n(x)$. Olingan $\varphi(x)$ yechim ixtiyoriy boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan sodda (trivialmas) yechim bo‘lgani uchun (5) formula umumiy yechim formulasidir. Teorema isbot bo‘ldi.

Biz yuqorida n ta chiziqli erkli yechimlar ((1’) tenglama uchun) mavjudligini ko‘rsatdik. Bundan (1’) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari maksimal soni n dan kam emasligi kelib chiqadi. Ammo n-tartibli chiziqli bir jinsli (1’) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari soni n dan ortiq bo‘lmaydi. Haqiqatan, isbot etish uchun (1’) tenglamani ixtiyoriy ($n+1$) ta yechimi chiziqli bog‘liq ekanini isbot etish yetarli. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x),\ x \in I$ funksiyalar (1’) tenglamalarning yechimlari bo‘lsin. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x),\ x \in I$ funksiyalar chiziqli erkli bo‘lsa, u holda yuqorida isbotlangan 4-teoremaga ko‘ra shunday $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$ o‘zgarmas sonlar topiladiki, ushbu

$$\varphi_{n+1}(x_0) \equiv C_1^0\varphi_1(x_0) + C_2^0\varphi_2(x_0) + ... + C_n^0\varphi_n(x_0),\ \ x \in I$$

ayniyatga ega bo‘lamiz. Bundan $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_{n+1}(x)$ yechimlarning I intervalda chiziqli bog‘liq ekani kelib chiqadi. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar I da chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0,\ x \in I,\ \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^0)^2 \neq 0$$

ayniyat o‘rinli. Demak,

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) + 0 \cdot \varphi_{n+1}(x) \equiv 0,\ x \in I$$

ayniyat ham o‘rinli. Bundan yana $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_{n+1}(x)$ yechimlarning I intervalda chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi.

1-**TA’RIF**. $n-$tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning chiziqli erkli yechimlari $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x),\ x \in I$ *yechimlarning fundamental sistemasi* deyiladi.

Bu ta’rifga va 4-teoremaga ko‘ra bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish uchun fundamental sistemaga tegishli hamma yechimlarni ixtiyoriy o‘zgarmaslarga ko‘paytirib qo‘shish kerak.

5-**TEOREMA**. Agar biror I intervalda aniqlangan $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar chiziqli erkli bo‘lib, n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiyalar yagona $n-$tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama yechimlarini fundamental sistemasi bo‘ladi.

Isbot. Berilgan fundamental sistemaga ushbu ikkita chiziqli bir jinsli differensial tenglama mos kelsin deylik:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0, \tag{7}$$

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + ... + q_n(x)y = 0\ , \tag{8}$$

bu yerda $p_i(x) \in C(I),\ q_i(x) \in C(I),\ i = 1,2,...,n$. Endi $p_i(x) \equiv q_i(x),\ \ i = 1,2,...,n,\ x \in I$ ekanini isbotlaymiz. Buning uchun (7) dan (8) ni hadma-had ayiramiz:

$$[p_1(x) - q_1(x)]y^{(n-1)} + ... + [p_n(x) - q_n(x)]y = 0 \tag{9}$$

Bu differensial tenglama ham (7), (8) tenglamalar kabi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ yechimlarga ega. (9) tenglamada biror j $(1 \le j \le n)$ uchun $p_j(x) - q_j(x) \neq 0,\ x \in I$ bo‘lsin. U holda $p_j(x) - q_j(x) \neq 0$ bo‘lganda (9) tenglama $(n-1)-$tartibli bo‘ladi va u n ta chiziqli, erkli $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ yechimlarga ega bo‘lishi kerak. Bu ziddiyatdir. Shunday kilib, $p_j(x) \equiv q_j(x),\ \ x \in I$.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.

2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.

3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Parametr kiritish yo'li bilan tenglamalarni integrallash.
2. Chegaraviy masalalar uchun Grin funksiyasini qurish.

Glossariy

Chiziqli bir jinsli differensianal tenglamalar **–** yuqoridagi (1) da $Q(x) \equiv 0$ bo'lsa.

Yechimlar fundamental sistemasi - n- tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning chiziqli erkli yechimlari $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,.., $\varphi_n(x)$, x € I yechimlarning fundamental sistemasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y=(y^1)^2+2\ln y'$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. funksiyalar chizikli bog'liqligini. Vronskiy determinanti yordamida tekishring?
2. p- tartibli chiziqli bir chiziqli differensialtenglamani umumiy yechimi xaqida teremani aniqlang?
3. Fundamentalechimlar sistemasi deb nimaga aytiladi?
4. Fundamental yechimlar sitemasi o'rnli bo'ladigan teoremanini isbotlang?

Amaliy mashg'ulot-13

1. $y^1(2y-y^1)=y^2\sin 2x$ j: $\ln cy = x \pm \sin x;\quad y=0$

$$arctg\,4+\frac{1}{2}\ln\left((4-1)/(u+1)\right)=\pm x+c$$

2. $y^{1^4}+y^2=y^4$ j: $4=\sqrt[4]{1-(1/y^2)};\quad y=0;\quad y=\pm 1$
3. $x(y-xy^1)^2=xy^{12}-2yy^1$ j: $x^2+(cy+1)^2=1;\quad y=0$
4. $y(xy^1-y)^2=y-2xy^1$ j: $(cx+1)^2=1-y^2;\quad y=\pm 1$
5. $yy^1(yy^1-2x)=x^2-2y^2$ j: $2(x-c)^2+2y^2=c^2;\quad y=\pm x$
6. $y^{12}+4xy^1-y^2-2x^2y=x^4-4x^2$ j: $y=ce^{\pm x}-x^2$
7. $y(y-2xy^1)^2=2y^1$ j: $y^2=c^2x-c;\quad 4xy^2=-1$

TEST

Boshlang'ich shartli masala nechta yechimga ega $y'=xy-y^3,\ y(0)=0$	*1	2	yechimga ega emas	3
Tenglamaning tipini aniqlang	*Bir jinsli	Bernulli	Chiziqli	to'la differensial

$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$				
Ushbu $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$ tenglamaning yechimini toping.	* $x = cy^3 + y^2$	$y = 3x^3 + cx^2$	$y = cx^3 + x^2$	$y = cx + x^2$
Ushbu $y = cx^2$ chiziqlar sinfning differensial tenglamasini toping	* $xy' = 2y$	$y' = y^{\frac{2}{x}}$	$y' x = 3y$	$y'x^2 = y^2$
$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} ... y^{(n)}) = 0$ tenglamaning tartibini pasaytirish uchun qanday almashtirish bajariladi?	* $y^{(k)} = z$	$y^{(k-1)} = z$	$y' = z$	$y^{(n)} = z$
$F(y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$ .. tenglamaning tartibini pasaytirish qanday almashtirish bajariladi?	$(n \geq 2)$ * $y' = p(y)$	$y^{(n+1)} = z$	$y^{(n)} = z$	$y'p = z$
$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0$ tenglamada qaysi almashtirish bajarilsa, y va uning xosilalariga nisbatan bir jinsli deyiladi.	* Agar y ning o‘rniga ky, y' ning o‘rniga ky', va x .k $y^{(n)}$ ning o‘rniga $ky^{(n)}$ qo‘yilganda tenglama o‘zgarmasa.	Agar y va uning bir necha tartibli xosilalari qatnashmasa	Agar x argument qatnashmasa	Agar x ning o‘rniga kx, y ning o‘rniga ky', va x .k $y^{(n)}$ ning o‘rniga $ky^{(n)}$ qo‘yilganda tenglama o‘zgarmasa.
$a_0 x^n y^{(n)} + a_i x^{n-1} y^{y-1} + ...$ $.. + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ (bu yerda a_i – o‘zgarmas son) Eyler tenglamasining harakteristik tenglamasini yozing.	* $a_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)....(\lambda-n+1)+$ $+a_1\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)....(\lambda-n+2)+$ $+....a_{n-1}\lambda+a_a=0$	$a_0\lambda^{n-1} + a_1\lambda^{n-2} + ...$ $.. + a_{n-1} = 0$	$a_0\lambda^n + a_i\lambda^{n-1} + ... + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$	$a_0\lambda(\lambda-1) + a_1(\lambda-1)(\lambda$ $+ ... + a_{n-1}(\lambda - n) + a_n =$
$a_0(x)y'' + a_1(x)y' +$ $+ a_2(x)y = f(x)$ $x_0 \leq x \leq x_1$ tenglama uchun umumiy chegaraviy masalani yozing.	* $\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0,$ $\gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0$	$J'(x_0) = Y_0$	$y(x_1) = y_1$	$y(x_0) = y$

MA'RUZA №16
Mavzu: Ostrogradskiy-Liuvill formulasi.
Reja:
1.Ostrogradskiy-Liuvill formulasini keltirib chiqarish.
2. Ostrogradskiy-Liuvill formulasini qo‘llanishi.
3. Misolllar.

Tayanch so’z va iboralar: *Ostrogradskiy – Liuvill formulasi, Ostrogradskiy – Liuvill formulasini qo‘llanilishi.*

Fundamental sistema mos chiziqli bir jinsli differensial tenglamani to‘la aniqlagani uchun bu differensial tenglamani topish masalasini qo‘yish mumkin.

Endi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar I intervalda aniqlangan bo‘lib, yechimlarning fundamental sistemasini tashkil etsin deylik. Ixtiyoriy $\varphi(x),\ x \in I$ yechim shu funksiyalar bilan chiziqli bog‘liq bo‘lgani uchun $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), \varphi(x)$ funksiyalardan tuzilgan vronskian aynan nolga teng bo‘ladi ($y_i = \varphi_i(x),\ y = \varphi(x)$):

$$W[y_1, y_2, ..., y_n, y] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n & y \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' & y' \\ .... & .... & .... & ..... & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \quad (1)$$

Aslida biz izlangan differensial tenglamani yozdik. Bu tenglama chiziqli bir jinsli ekaniga ishonish uchun (1) dagi determinantni oxirgi ustun elementlari bo‘yicha yoyamiz:

$$W[y_1, y_2, ..., y_n]y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ .... & .... & .... & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & ... & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + ... + (-1)^n \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & ... & y_n'' \\ .... & .... & .... & \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & ... & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y = 0 \quad (2)$$

Ravshanki, chiziqli erkli yechimlar uchun $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$. Shuning uchun (2) tenglamaning hamma hadlarini $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$ ga bo‘lamiz. Natijada

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \quad (3)$$

ko‘rinishdagi tenglama hosil bo‘ladi. Masalan, (3) dagi $p_1(x)$ uchun ushbu

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & ... & y_n \\ y_1' & y_2' & ... & y_n' \\ .... & .... & .... & \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & ... & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & ... & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, ..., y_n]}$$

munosabat chiqadi. Bundan vronskian uchun muhim formula chiqarish mumkin. Uning uchun avval

$$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

ayniyat o‘rinli ekaniga ishonch hosil qilamiz. Yo‘l elementlari bo‘yicha determinant hosilasini olamiz:

$$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}+$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Ravshanki, vronskianning hosilasi n ta $n-$tartibli determinantlar yig‘indisidan iborat bo‘lib, oxirgisidan avvalgi $(n-1)$ tasining har biri 2 ta bir xil yo‘l elementlariga ega. Shuning uchun ular nolga teng bo‘lib, faqat oxirgi determinant qoladi. Bu esa izlangan determinantdir. Shunday qilib ushbu

$$p_1(x)=-\frac{W'(x)}{W(x)}$$

formula hosil bo‘ladi. Uni birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama kabi integrallaymiz:

$$W(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p_1(\xi)d\xi},\ x_0\in I,\ x\in I.$$

Bundan $x=x_0$ da $C=W(x_0)$. Demak,

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(\xi)d\xi} \tag{4}$$

formulaga egamiz. Bu formula *Ostrogradskiy-Liuvill nomi* bilan ataladi. Ostrogradskiy-Liuvill formulasidan avavldan ma'lum natija (ya'ni $W(x_0)=0$, bo‘lganda $W(x)=0,\ x\in I$, $W(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, $W(x)\neq 0,\ x\in I$ ekani kelib chiqadi.

Yana bu formuladan ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarni ularning bitta xususiy yechimi ma'lum bo‘lganda integrallash uchun foydalaniladi. Haqiqatan,

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$$

tenglamaning xususiy yechimi $y=\psi(x),\ x\in I$, bo‘lsin. (4) formulaga ko‘ra

$$\begin{vmatrix} \psi(x) & y \\ \psi'(x) & y' \end{vmatrix}=C_1e^{-\int p_1(x)dx}$$

yoki

$$\psi(x)y'-y\psi'(x)=C_1e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Bu birinchi tartibli differensial tenglama bo‘lib, unign chap tomoni $\mu = \dfrac{1}{\psi^2(x)}$ ga ko‘paytirilishi natijasida to‘liq differensialga keladi, ya'ni

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\psi(x)}\right) = \frac{C_1}{\psi^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Bundan

$$\frac{y}{\psi(x)} = \int \frac{C_1}{\psi^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_2,$$

$$y = C_1\psi(x)\int \frac{1}{\psi^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_2\psi(x)$$

kelib chiqadi.

Misollar. 1. Fundamental sistemasi $\varphi_1(x) = \cos\omega x,\ \varphi_2(x) = \sin\omega x$ bo‘lgan differensial tenglama tuzilsin.

(2) formulaga ko‘ra

$$\begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x & y \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x & y' \\ -\omega^2\cos\omega x & -\omega^2\sin\omega x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$\begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega^2\cos\omega x & -\omega^2\sin\omega x \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \\ -\omega^2\cos\omega x & -\omega^2\sin\omega x \end{vmatrix} y = 0$$

Bundan:

$$\omega y'' + \omega^3 y = 0$$

yoki

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

2. Yechimlarning fundamental sistemasi $\varphi_1(x) = 1,\ \varphi_2(x) = \cos x$ bo‘lgan tenlamani tuzing.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & y \\ 0 & -\sin x & y' \\ 0 & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$y'' - ctgx\, y' = 0$$

bo‘ladi.

3. $y'' + \dfrac{2}{x} y' + y$ tenglamaning bitta yechimi $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ bo‘lsa, uning umumiy yechimini toping.

Yuqoridagi formulaga ko‘ra

$$y = \frac{\sin x}{x}\left(C_2 + C_1\int \frac{x^2 e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{\sin^2 x} dx\right) = \frac{\sin x}{x}(C_2 - C_1 ctgx),$$

ya'ni

$$y = \frac{\sin x}{x}(C_2 - C_1 ctgx).$$

4. Yechimlarining fundamental sistemasi $x,\ x^2$ bo‘lgan tenglamani tuzing. Izlanayotgan tenglama

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$x^2 y'' - 2xy + 2y = 0$$

bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Lagranj va Klero tenglamalari.
2. Shturm-Liuvill masalasi. Xos sonlari va xos funksiyalar.

Glossariy

Ostrogradskiy-Liuvill formulasi - $W(x)Ce^{-\int_{x_0}^{x} P_1(\xi)d\xi}$ $, x_0 \in I, x \in I$ formula Ostrogradskiy-Liuvill nomi bilan ataladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y(y-2xy^1)^3 = y^{1^2}$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1.Determinantlardan hosila olish qoidasi qanday bo‘ladi?
2. Ostrogradskiy-Liuvill formulasini keltirib chiqaring?
3. Ostrogradskiy-Liuvill formulasidan kelib chiqadigan zaruriy va yetarli shart nimadan iborat7
4. Ostrogradskiy-Liuvill formulasi qo‘llanishga doir misollar keltiring?

Amaliy mashg’ulot-13

1. $5y + (y^1)^2 = x(x + y^1)$ j: $x = -\dfrac{p}{2} + c,\ 5y = c^2 - \dfrac{5p^2}{4};\ \ x^2 = 4y$

2. $x^2 y^{1^2} = xyy^1 + 1$ j: $\pm xp\sqrt{2\ln cp} = 1;\ \ y = \mp\left(\sqrt{2\ln cp} - \dfrac{1}{\sqrt{2\ln cp}}\right)$

3. $y^{1^3} + y^2 = xyy^1$ j: $pxy = y^2 + p^3,\ y^2(2p + c) = p^4;\ y = 0$

4. $2xy^1 - y = y^1 \ln yy^1$ j: $y^2 = 2c_x - c\ln c;\quad 2x = 1 + 2\ln|y|$

5. $y^1 = e^{xy'/y}$ j: $C_x = \ln c_y;\quad y = ex$

6. $y = xy^1 - x^2 y^{1^3}$ j: $xp^2 = c\sqrt{|p|-1};\quad y = xp - x^2p^3;\ y = 0$

7. $y = 2xy^1 + y^2 y^{1^3}$ j: $2p^2x = c - c^2p^2,\quad py = c;\ 32x^3 = -27y^4$

8. $y(y - 2xy^1)^3 = y^{1^2}$ j: $y^2 = 2c^3x + c^2;\ 27x^2y^2 = 1$

TEST

$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ $x_0 \le x \le x_1$ tenglama uchun umumiy chegaraviy masalani yozing.	* $\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0,$ $\gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0$	$J'(x_0) = Y_0$	$y(x_1) = y_1$	$y(x_0) = y$
$a_0(x)y^n + a_1(x)y' + a_2(x)y = f(x)$ tenglama uchun umumiy chegaraviy masalaning Grin funksiyasi ko‘rinishini yozing (y_1(x) va y_2(x) – tenglamani yechimlari)	* $G(x,s) = \begin{cases} a(s)y_1(x), & x_0 \le x \le \\ b(s)y_2(x), & s \le x \le x_1 \end{cases}$	$G(x,s) = \begin{cases} a(s) + y_1(x), & x_0 \le x \le s \\ b(s)y_2(x), & s \le x \le x_1 \end{cases}$	$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{a(s)}{y_1(x)}, & x_0 \le x \le \\ \dfrac{b(s)}{y_2(x)}, & s \le x \le x_1 \end{cases}$	$G(x,s) = \begin{cases} a(s)y_1(x), & x_0 \le x \le \\ b(s)y_2(x), & s \le x \le \end{cases}$
$y'' = f(x),\quad y(0) = 0,$ $y(1) = 0$ chegarviy masalaning Grin funksiyasini ko‘rosating.	$*\,G(x,s) = \begin{cases} (s-1)x \\ s(x-1) \end{cases}$ $0 \le x \le s$ $s \le x \le 1$	$G(x,s) = \begin{cases} s^2x \\ s(x+1) \end{cases}$, $0 \le x \le s$ $s \le x \le 1$	$G(x,s) = \begin{cases} (s^2-1)x \\ s(x^2-1) \end{cases}$, $0 \le x \le s$ $s \le x \le 1$	$G(x,s) = \begin{cases} (s+1)x \\ s(x+1) \end{cases}$, $0 \le x \le s$ $s \le x \le 1$
$G(x,s) = \begin{cases} SinsCosx \\ SinxCoss \end{cases}$ $0 \le x \le s$ $s \le x \le \pi$ ko‘rinishdagi Grin funksiyasi qaysi chegaraviy masalaga tegishli?	$*\,y'' + y = f(x),$ $y'(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0$	$y'' + f(x),$ $y(0) = 0,\ \ y(1) = 0$	$y'' - y = f(x),$ $y'(0) = 0,$ $y(1) = 0$	$y'' + y = f(x),$ $y'(0) = y(\pi),$ $y(1) = 0$
$y'' = \lambda y, y(0) = 0, y(l) = 0$ masalaning hos qiymati va hos funksiyalarini toping.	* $\lambda_k = -\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)^2,$ $y_k(x) = Sin\dfrac{\pi k}{e}x$ $k = 1,2,3$	$\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{2}\right)^2,$ $y_k(x) = Cos\dfrac{\pi k}{e}x$	$\lambda_k = \left(\dfrac{2\pi}{3}k\right)^2,$ $y_k(x) = Sin\dfrac{\pi k}{e}x$	$\lambda_k = -\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)^2,$ $y_k = Cos\dfrac{\pi k}{e}x$
Agar o‘zgarmas koeffitsentli yuqori tartibli chiziqli tenglamaning o‘ng tomoni $P_m(x)e^{\gamma x}, (P_m(x) - ko'pxad)$ ko‘rinishida bo‘lsa, bitta hususiy yechim qaysi ko‘rinishda bo‘ladi? (Hamma javoblarda s – karralilikni bildiradi)	* $y_1 = x^sQ_m(x)e^{\gamma x}$	$y_1 = x^{s-1}Q_m(x)e^{\gamma x}$	$y_1 = x^{s+1}Q_m(x)e^{\gamma x}$	$y_1 = Q_{m+s}(x)e^{\gamma x}$
$a_0x^nay^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + ...$	$*\,x = e^t$	$x = e^{-t}$	$x = \ln\|t\|$	$x = \ln\|t\| + e^t$

$\ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = f(x)$ ko‘rinishidagi Eyler tenglamasini o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamaga keltirish uchun qanday almashtirish bajariladi? (x>0 deb faraz qiling).				
$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ tenglamani yechishda ushbu Ostrogradskiy –Liuvill formulasi qo‘llaniladi: $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}$ bu formuladagi r(x) deb nimaga teng?	$* \ p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$	$p(x) = a_0(x)$
Quyidagi funksiyalardan qaysi biri chiziqli bog‘liq?	$* \ 6x+9, \ 8x+12$	$x+2, x-2$	$Sinx, \ Cosx$	$x^2 + 2x,$ $3x^2 - 1, x+4$

MA'RUZA №17

Mavzu: O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglamalar

Reja

1. Xarakteristik ko‘phad.
2. Xarakteristik tenglama .
3. Xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari har xar xil va haqiqiy.

Tayanch so’z va iboralar: *n-chi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglama, xarakteristik ko‘pxad, xarakteristik tenglama, xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari xar xil xaqiqiy bo‘lgan xol.*

O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$u^{(n)}Qp_1y^{(b-1)}Qp_2y^{(n-2)}Q\dots Qp_n$-y□□$Qp_nyq0$ (1)

bu yerda $r_1,r_2,\dots,r_n$ koeffitsientlar yuqoridagi ko‘rilgan umumiy holdan farqli o‘laroq o‘zgarmasdir. Bu holda xususiy yechimlarning fundamental sistemasini izlash n-chi darajasi bitta algebraik tenglamani yechishga keltiriladi.
Xususiy yechimlarni dastlab uqe^{rx} ko‘rinishida izlaymiz:
Endi u□□qre^{rx} , u□□□□qr^2e^{rx} ,.,$u^{(n)}q$ uqr^re^{rx} bo‘lgani sababli (1) tenglamaning chap tomoni uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$L\left[e^{zx}\right]=r^ne^{zx}+p_1r^{n-1}e^{zx}+...+p_{n-1}e^{rp}+p_ne^{zx}=e^{zx}(r^n+p_1r^{n-1}+...+p_{n-1}z+p_n)$$

Shunday qilib, (1) tenglamada uqu^{rx} o‘rniga qo‘yish uni

$e^{rx}f(r)q0$ (2)

ko‘rinishga keltiriladi, bu yerda $f(r)qr^nQp_1r^{n-1}Q\dots Qp_{n-1}rQp_n$-ni berilgan differensial xarakteristik ko‘phadi deyiladi.
(2) ifodadagi e^{rx} ko‘paytuvchi X ning hech qanday qiymatida 0ga aylanmaydi. Shuning uchun r son

f(r)q0 (3)

tenglamaning ildizi bo‘lgan holda va faqat shundagina yqe^{rx} funksiya o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli (1) differensial tenglamani qanoatlantiradi.
(3)algebraik tenglama berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi. U (1)differensial tenglamadan izlanayotgan funksiyaning hosilalarini r noma'lumning mos darajalari bilan almashtirishdan hosil bo‘ladi, bunda funksiyaning o‘zi nolinchi tartibli hosila sifatida r ning nolinchi darajasi, ya'ni 1 bilan almashtiriladi. (3) xarakteristik tenglamaning yechimi (1) differensial tenglamaning birorta xususiy yechimlari sistemasini beradi. Bunda (3) xarakteristik tenglamaning ildizlari har xil bo‘lishi mumkin. Shuning uchun shar qaysi holni alohida-alohida qaraymiz.
Xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy va har xil, ya'ni xarakteristik tenglama karrali ildizlarga ham, kompleks ildizlarga ham ega emas.
Algebraning asosiy teoremasidan ma'lumki algebraik tenglama uning darajasi qancha bo‘lsa, shuncha ildizga ega bbo‘lgani uchun xarakteristik tenglamaning roppa–rosa n ta har xil $r_1,r_2,\dots,r_n$ ildizi bo‘ladi.bu ildizlarning har biriga differensial tenglamaning xususiy yechimi mos keladi. Demak, n ta xususiy yechimini topamiz:

$$y=e^{zx},...,y_n=e^{zx} \qquad (4)$$

Endi $Y_1,..,Y_n$ funksiyalar sistemasi fundamental, ya'ni, $y_1,y_2,\dots,y_n$ funksiyalar chiziqli erkli ekanligini ko‘rsatsak yetarli bo‘ladi. Buning uchun bu funksiyalar sistemasining Vroskiy determinantini tuzish lozim. Biz nq3 bilan chegaralanamiz. Ixtiyoriy n uchun xuddi shunday ko‘rsatiladi.
nq3 vroskian ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$W[y_1,y_2,y_3]=\begin{vmatrix} e^{r_1x}e^{r_2x}e^{r_3x} \\ r_1e^{r_1x}r_2e^{r_2x}r_3e^{r_3x} \\ r_1^2e^{r_1x}r_2^2e^{r_{21}x}r_3^2e^{r_3x} \end{vmatrix}=e^{(r_1+r_2+r_3)x}\begin{vmatrix} 111 \\ r_1r_2r_3 \\ r_1^2r_2^2r_3^2 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Bu yerda determinantning har qaysi ustunidan e^{rx} ko‘rinishdagi ko‘paytuvchi qavs tashqarisiga chiqarilgan. So‘nggi determinantni uchburchak qoidasidan foydalanib hisoblaymiz.
Determinantning uchunchi ustunini 1-chi va 2-chi ustunlaridan ayiramiz. U holda

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\ r_1&r_2&r_3\\ r_1^2&r_2^2&r_3^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\ r_1-r_3&r_2-r_3&r_3\\ r_1^2-r_3^2&r_2^2-r_3^2&r_3^2\end{vmatrix}$$ q$(r_1-r_3)(r_2-r_3)$ $\begin{vmatrix}1&1\\ r_1+r_3;&r_2+r_3\end{vmatrix}$ q$(r_1-r_3)(r_1-r_3)[r_2$Q$r_3-r_1-r_3]$q q-$(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_2-r_3)$

bu yerda 1-chi ustundan r_1-r_3 umumiy ko‘paytuvchi 2-ustundan r_2-r_3 umumiy ko‘paytuvchi tashqariga chiqarilgan va 3-chi tartibli determinant 1-chi satri bo‘yicha yoyish orqali 2-chi tartibli determinantga keltirilgan. Shunday qilib, 3ta funksiyadan iborat sistema uchun

$$W[y_1,y_2,y_3]\text{q}e^{(r_1\text{Q}r_2\text{Q}r_3)x}\ (-1)^3(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_2-r_3)$$

Umumiy holda ham xuddi shunga o‘xshash ushbu formula o‘rinli bo‘lishni ko‘rsatish mumkin:

$$W[y_1,y_2,\dots\dots,y_n]\text{q}\begin{vmatrix}1&1&\dots\dots&1\\ r_1&r_2&\dots\dots&r_n\\ r_1^{n-1}&r_2^{n-1}&\dots\dots&r_n^{n-1}\end{vmatrix}\cdot e^{(r_1+\dots+r_n)x}$$

bu yerda $\begin{vmatrix}1&1&\dots\dots&1\\ r_1&r_2&\dots\dots&r_n\\ r_1^{n-1}&r_2^{n-1}&\dots\dots&r_n^{n-1}\end{vmatrix}$ q$(-1)^n(r_1-r_2)(r_1-r_3)\dots(r_1-r_n)(r_2-r_3)\dots(r_{n-1}-r_n)\neq 0$ Vandermand determinanti deyiladi. Bundan

$$W[y_1,y_2,\dots\dots,y_n]\text{q}e^{(r_1\text{Q}\dots\text{Q}r_n)x}(-1)^n(r_1-r_2)(r_1-r_3)\dots(r_1-r_n)(r_2-r_3)\dots(r_{n-1}-r_n)\neq 0$$

Xarakteristik tenglamaning barcha $r_1,r_2,\dots,r_n$ ildizlari shartga ko‘ra turlacha, e^{rx} funksiya esa hech qanday x larda nolga aylanmaganlagi uchun

$$W[y_1,y_2,\dots\dots,y_n]\neq 0$$

Bu bilan xarakteristik tenglamaning barcha $r_1,r_2,\dots,r_n$ ildizlari haqiqiy va har xil bo‘lsa, xususiy yechimlar sistemasi (4) fundamental bo‘lishni isbatladik. Demak, bu sistema funksiyalarining

$$Y_2C_1e^{r_1x}+\dots+C_ne^{r_nx} \tag{7}$$

chiziqli kombinatsiyasi differensial tenglamaning umumiy yechimini beradi.

Misollar.

1. y□□□□□□-5y□□□□Q6y□□q0 tenglama uchun r^3-5r^2Q6rq0 xarakteristik tenglama z_2q0, r_2q2, r_3q3 ildizlarga ega. Fundamental yechimlar sistemasi y_1q1, y_2qe^{2x}, y_3qe^{3x} . Differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y=c+c_2e^{2x}+c_3e^{3x}$$

2. y□□^{v}-5y□□□□Q4yq0 tenglama uchun xarakteristik tenglama r^4-5r^2Q4q0, uning ildizlari $r_{1,2}$q±1, $r_{3,4}$±2. Differensial tenglamaning umumiy yechimi yqC_1e^xQC_2e^{-x}QC_3e^{2x}QC_3e^{-2x}

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние диффернциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. $n-$ tartibli differensial tenglamalar.

2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.

Glossariy

O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglama - O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglama quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$u^{(n)}Qp_1y^{(b-1)}Qp_2y^{(n-2)}Q\ldots Qp_n\text{-}y\square\square Qp_nyq0 \qquad (1)$$

bu yerda $r_1,r_2,\ldots,r_n$ koeffitsientlar.

Harakteristik ko’phad - (1) tenglamada uqu^{rx} o‘rniga qo‘yish uni

$$e^{rx}f(r)q0 \qquad (2)$$

ko‘rinishga keltiriladi, bu yerda $f(r)qr^nQp_1r^{n-1}Q\ldots..Qp_{n-1}rQp_n$-ni berilgan differensial xarakteristik ko‘phadi deyiladi.

Harakteristik tenglama -

$$f(r)q0 \qquad (3)$$

tenglama berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y^{(IV)}-13y''+36y=0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. O‘zgarmas koeffitsentli chiziqli bir jinsli tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Xarakteristikko‘p xad deb nimaga aytiladi?
3. Differensial tenglamaning xarakteristik tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Xarakteristik tenglamaning barcha ildizlpri xar xil va xaqiqiy bo‘lishini ko‘rsating.
5. Ixtiyoriy $n=3$ uchun Vranskiy determinanti qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Amaliy mashg’ulot-14

1. $y=xy^1+y^{1^2}$ j: $y=C_x+C^2;\quad y=-\dfrac{x^2}{4}$
2. $y=xy^1+y^1$ j: $y=C_x+C;$ maxsus yechim yo‘q.
3. $y=xyh1+\sqrt{1+(y^1)^2}$ j: $y=cx+\sqrt{1+c^2};\ x^2+y^2=1$
4. $y=xy^1+\dfrac{1}{y'}$ j: $y=cx+\dfrac{1}{c};\quad y^2=4x$
5. $y=xy^1-y^2$ j: $y=cx-c^2;\ y=\dfrac{x^2}{4}$
6. $y=xy^1-a\sqrt{1+(y^1)^2}$ j: $y=cx-a\sqrt{1+c^2};\ x^2+y^2=a^2$
7. $y=xy^1+\dfrac{1}{2(y^1)^2}$ j: $y=cx+\dfrac{1}{2c^2};\quad y=1,5\,x^{\frac{2}{3}}$

TEST

$a_0x^nay^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\ldots$ $\ldots+a_{n-1}xy^{/}+a_ny=f(x)$ ko‘rinishidagi Eyler tenglamasini o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamaga keltirish uchun	* $x=e^t$	$x=e^{-t}$	$x=\ln\|t\|$	$x=\ln\|t\|+e^t$

qanday almashtirish bajariladi? (x>0 deb faraz qiling).				
$a_0(x)y^{//}+a_1(x)y^{/}+a_2(x)y=0$ tenglamani yechishda ushbu Ostrogradskiy –Liuvill formulasi qo‘llaniladi: $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=Ce^{-\int p(x)dx}$ bu formuladagi r(x) deb nimaga teng?	* $p(x)=\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x)=-\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x)=-\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$	$p(x)=a_0(x)$
Quyidagi funksiyalardan qaysi biri chiziqli bog‘liq?	* $6x+9,\ 8x+12$	$x+2, x-2$	$Sinx,\ Cosx$	$x^2+2x,$ $3x^2-1, x+4$
$(2x+1)y^{//}+4xy^{/}-4y=0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.	* e^{-2x}	e^{-2x^2}	e^{x}	x^3
Ushbu $(x-a)^2+by^2=1$ chiziqlar oilasi qaysi diffirensial tenglamaning yechimi?	*$\left(yy''+y'^2\right)^2=-y^3y''$	$2yy''+y'^2=\sqrt{yy''}$	$yy''+y'^2=0$	Hech birining yechimi emas
$y=a(x)z$ almashtrish yordamida $x^2y''-2xy'+\left(x^2+2\right)y=0$ tenglamada birinchi tartibli yoqotib soddalashtring.	*$z''+z=0$	$z''-z=0$	$z''+4z=0$	$z^{//}-4z=0$
Yechimni $y_1=ax+b$ ko‘rinishda izlab, $x^2y''\ln x-xy'+y=0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.	* $y_1=x$	$y_1=2x+1$	$y_1=2x-1$	$y_1=x+2$
a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=1$, $y(0)=0,\ y(1)=0$ masala yechimga ega emas?	* $a=(2\pi-1)\pi^2$	$a=(2\pi-1)\ \pi$	$a=(2\pi-1)^2\pi$	$a=0$
a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=f(x)$ $y(0)=0,\ y(1)=0$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasi mavjud bo‘ladi?	* $a\neq k^2\pi^2$	$a=k\pi$	$a=k^2\pi^2$	$a\neq k\pi$
$y''+4y'+3y=0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	* $y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$	$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$	$y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$	$y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$

MA'RUZA №18
Mavzu: O‘zgarmas koeffitsientlar chiziqli bir jinsli tenglamalar.
Reja

1. Xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari har xil kompleks ildizlarga ega.
2. Xarakteristik tenglamaning ildizlari karrali.
3. Misollar.

Tayanch so’z va iboralar: *xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari xar xil kompleks ildizlarga ega bo‘lgan xol, xarakteristik tenglama.* $\alpha > 1$ *karrali* $r = 0$ *ildizga ega bo‘lgan xol, xarakteristik tenglamaning* $\alpha > 1$ *karrali* $r \neq 0$ *ildizga ega bo‘lgan xol, xarakteristik tenglamaning karrali kompleks ildizga ega bo‘lgan xol.*

f(r)q0 xarakteristik tenglamaning ildizlari har xil kompleks ildizlarga ega bo‘lsin.
Umumiy yechim uchun

$$y = c_1 e^{r_1 x} + ... + c_n e^{r_n x} \tag{1}$$

ifodaga olib kelgan mulohazalar bu yerda ham o‘z kuchini saqlaydi. Biroq (1) ifodada noqulay chunki $e^{(aQbi)x}$ ko‘rinishdagi kompleks funksiyalarga ega, biz esa haqiqiy funksiyalar bilan cheklangan edik. Shuning uchun (1) ifodani xarakteristik tenglama kompleks ildizlarga ega bo‘lgan holda ham faqat haqiqiy funksiyalarga ega bo‘ladigan qilib o‘zgartirishni maqsad qilib qo‘yamiz.

Aytaylik, rqaQbi xarakteristik tenglamaning kompleks ildizlaridan biri bo‘lsin. f(r) ko‘phad faqat haqiqiy koeffitsientlarga ega bo‘lgani uchun, algebradan ma'lumki $\bar{r}$ qa-bi qo‘shma kompleks son ham xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘ladi, ya'ni

f(r)q0q>f($\bar{r}$)q0q>f($\bar{r}$)qf($\bar{r}$)q0q>r-ildiz.

a±bi qo‘shma kompleks sonlar juftiga 2 ta xususiy yechim

y_kq$e^{(aQbi)x}$ va y_sq$e^{(a-bi)x}$

mos keladi. Bu 2 ta yechim o‘rniga ularning ba'zi kombinatsiyalarini ko‘ramiz, bular ham L[y]q0 (2) tenglamani yechimlari o‘ladi. Chunonchi, $\bar{y}_k$q(y_kQy_s)/2 va $\bar{y}_s$q(y_k-y_s)/2i funksiyalarni ko‘raylik. Bu ham (2)ni yechimlari.

Eylerning quyidagi formulalaridan

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \quad (l^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x)$$

foydalanib, $\bar{y}_k$ va $\bar{y}_s$ ni quyidagicha o‘zgartiramiz:

$$\bar{y}_k = \frac{y_k + y_s}{2} = \frac{e^{(a+bi)x} + e^{(a-bi)x}}{2} = \frac{e^{ax}(e^{ibx} + e^{-ibx})}{2} e^{ax} \cos bx$$

$$\bar{y}_s = \frac{y_k - y_s}{2v} = e^{(a+bi)x} - e^{(a-bi)x} = e^{ax} \sin bx$$

Shunday qilib, xarakteristik tenglamaning qo‘shma kompleks ildizlari jufti $r_{k,s}$qa±bi ga differensial tenglamaning xususiy yechimlari jufti y_kqe^{ax}cos bx, y_sqe^{ax}sinbx ni mos keltirish mumkin. Umuman yechimni yana xususiy yechimlarni ixtiyoriy koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi kabi hosil qilish mumkin, biroq bu yechim endi (1) ko‘rinishga ega bo‘lmaydi.

Xarakteristik tenglamaning har bir r haqiqy ildiziga e^{rx} ko‘rinishdagi xususiy yechim, xarakteristik tenglamaning qo‘shma kompleks ildizlari jufti a±bi ga e^{ax}cos bx, e^{ax} sin bx ko‘rinishdagi xususiy yechimlar jufti mos keltiriladi.

Misol. 1. y^{11}-2y^1Q5yq0 differensial tenglamaga mos xarakteristik tenglama r^2-2rQ5q0. Uning ildizlari $r_{1,2}$q1±2i. U holda differensial tenglamaning umumiy yechimi yqc_1e^xcos2xQc_2e^xsin2x, bo‘ladi.

2. y^{111}-8yq0. r^3-8q0 xarakteristik tenglama. Uning ildizlari r_1q2, $r_{2,3}$q-±i $\sqrt{3}$.

U holda umumiy yechim yqc_1e^{2x}Qc_2e^{-x}cos $\sqrt{3}x$ Qc_3e^{-x}sin $\sqrt{3}x$

Xarakteristik tenglama ildizlari orasida karrali ildizlar ham bor bo‘lsin. Bu holda (1) ifoda umumiy yechim uchun o‘z kuchini yaqotadi, chunki chiziqli erkli yechimlar soni h dan kichik bo‘ladi. Haqiqatdan, agar r xarakteristik tenglamaning α karrali ildizi bo‘lsa,u holda unga α ta emas, balki 1ta ye^{rx} yechim mos keladi va fundamental sistemani hostl qilish uchun (α-1)ta yechim yetishmaydi. Bunday holda yetishmayotgan xususiy yechimlarni qanday topishni

aniqlaymiz.
1)Dastlab, xarakteristik tenglama α>1 karrali (rq0) yechimga ega bo‘lgan holni tekshiramiz. Xarakteristik tenglama bu holda

f(r)q(r-0)$^{\alpha}$ φ(r)qr$^{\alpha}$φ(r), φ(r)-(n-α)-chi tartibli ko‘phad, ya'ni

φ(r)qr$^{n-\alpha}$Qp, r$^{n-\alpha-1}$Q……Qp$_{n-\alpha}$ bo‘lgani uchun

r$^{\alpha}$φ(r)qr$^{\alpha}$(r$^{n-\alpha}$Qp$_1$ r$^{n-\alpha-1}$Q…Qp$_{n-\alpha}$)q0

r^{n}Qp$_1$r^{n-1}Q..Qp$_{n-\alpha}$r$^{\alpha}$q0, p$_{n-\alpha}$≠0

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Yuqoridagiga ko‘ra tenglama r ning kichik darajalarini o‘z ichiga olmaydi. Bu holda (2) differensial tenglama ushbu ko‘rinishda hosil bo‘ladi:
(*) y$^{(n)}$Qp$_1$y$^{(n-1)}$Q….Qp$_{n-\alpha}$y$^{(\alpha)}$q0, ya'ni yuqoridagiga ko‘ra bu yerda α dan past tartibli hosilalar qatnashmaydi.
Bunday tenglamani (α-1)dan yuqori tartibli barcha hosilalari aynan 0ga teng balgan darajasi α dan yuqori bo‘lmagan istalgan ko‘phad qanoatlantiradi, ya'ni yqf(x)qa$_1$x$^{\alpha-1}$Q….Qa$_{\alpha-1}$xQQ$_{\alpha}$ (α-1) tartibli ko‘phad (*)ni qanoatlantiradi.
Bunday ko‘phadlar cheksiz ko‘p, biroq ularning orasidan o‘zaro chiziqli erkli bo‘lgan α tasini tanlab olish mumkin. Buning uchun

y$_1$q1, y$_2$qx, y$_3$qx^2,……,y$_{\alpha}$qx$^{\alpha-1}$

deb olish yetarli.
Bu funksiyalar sistemasi chiziqli erkli. Ikkinchi tomondan, darajasi
(α-1)dan yuqori bo‘lmagan har qanday ko‘phad bu sistema funksiyalarining chiziqli kombinatsiyasi sifatida hosil qilinish mumkin.
Shunday qilib, α karrali rq0 ildiz uchun differensial tenglamaning α ta chiziqli erkli yechimlari topiladi, ya'ni y$_1$q1, y$_2$qx, y$_3$qx^2,……, y$_{\alpha}$qx$^{\alpha-1}$,
Endi (3) f(x)q0 xarakteristik tenglamaning α karrali bo‘lgan ildizi r$_1$≠0 sondan iborat bo‘lsine (2) tenglamada yqz l^{r_1x} deb, o‘zgaruvchini almashtiramiz. U holda y□□qz□□l^{r_1x}Qr$_1$zl^{r_1x}
y□□□□qz□□□□l^{r_1x}Q2r$_1$z□□l^{r_1x}Qr$_1$^{r}zl^{r_1x}
y□□□□□□qz□□□□□□l^{r_1x}Q3r$_1$z□□□□l^{r_1x}Q3r$_1$^{r}z□□l^{r_1x}Q r$_1^3$zl^{r_1x}
Bu ifodalarni (2) tenglamaga qo‘yib noma'lum funksiyasi z bo‘lgan differensial tenglamani hosil qilamiz. U n-chi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglama bo‘ldi, chunki uning barcha hadlari l^{r_1x} ko‘paytuvchiga ega bo‘lib, uni qisqartirish mumkin. Bu tenglamani z$^{(n)}$Qq$_1$z$^{(n-1)}$Q….Qq$_{n-1}$z□□Qq$_n$q0 (4)
ko‘rinishda yozamiz. Xarakteristik tenglamasi ya'ni zql^{kx} (4) almashtirish bajarishdan hosil bo‘lgan tenglama:

k^{n}Qq$_1$k^{n-1}Q…..Qq$_{n-1}$kQq$_n$q0 (5)

bo‘lsin. Agar k son (5) xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lsa, u holda zql^{kx} (4)differensial tenglamani qanoatlantiradi. Biroq u holda

$$y = ze^{r_1x} = e^{kx}e^{r_1x} = e^{(k+r_1)x} \qquad (6)$$

(2) differensial tenglamani qanoatlantiradi va rqkQr$_1$ son (3)xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘ladi. Aksincha (4) tenglamada $z = ye^{-r_1x}$ almashtirish bajarib (1) tenglamani hosil qilish mumkin. Shuning uchun (3) xarakteristik tenglamaning har bir r ildiziga (5) xarakteristik tenglamaning kqr-r$_1$ ildazaga mos keladi. Shunday qilib,(3)va (5)xarakteristik tenglamalarning ildizlari orasida $r = k + r_1$ tenglik mavjud shu bilan birga (3) tenglamaning har xil ildizlariga (5)tenglamaning har xil ildizlari mos keladi va aksincha.
(3)xarakteristik tenglama α karrali rqr$_1$ ildizlarga ega bo‘lgani uchun (5)xarakteristik tenglama α karrali kq0 ildizga ega bo‘lishi kerak. Haqiqatdan ham (3) tenglamaning rqr$_1$ ildiziga (5) tenglamaning kq0 ildizi va (5) tenglamaning har xil ildizlariga (3)tenglamaning har xil ildizlari mos kelgani uchun kq0 ildizning karraligi rqr$_1$ ildizning karraligiga teng bo‘lishi kerak. Biroq bunday holda yuqorida isbot qilinganiga ko‘ra (4) differensial tenglama o‘zaro chiziqli erkli bo‘lgan ushbu α ta yechimga ega bo‘ladi:z$_1$q1, z$_2$qx, z$_3$qx^2,…..,z$_{\alpha}$qx$^{\alpha-1}$
bular (2)differensial tenglamaning ushbu ko‘rinishdagi α ta yechimini beradi: yqz

$$y_1 = e^{r_1 x}, ..., y_\alpha = x^{\alpha-1}e^{r_1 x}$$

Shunday qilib, (3) xarakteristik tenglamaning α karrali r_1 ildiziga differensial tenglamaning rosa α ta har xil yechimi mos keladi. Yana xususiy yechimlar sistemasi hosil bo‘lib, unda n ta funksiya bo‘ladi. Hosil qilingan xususiy yechimlar chiziqli erkli bo‘ladi.

Avvalgi mulohazalarimizda karrali r_1 ildiz haqiqiy son deb faraz qilinmagan edi. Shuning uchun barcha mulohazalar karrali ildizlar kompleks bo‘lgan xal uchun ham o‘z kuchida qoladi. Masalan,a±bi kompleks ildizlar jufti 2 karrali bo‘lsa, unga quyidagi ko‘rinishdagi 4 ta xususiy yechim mos keladi:

e^{ax}cos bx, e^{ax}sin bx, xe^{ax}cos bx, xe^{ax}sin bx.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.

2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.

3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958

4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.

5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Kanonik ko‘rinishdagi $n-$ tartibli differensial tenglamalar yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema.

2. Yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

Glossariy

Chiziqli bir jinsli differensianal tenglamalar **–** yuqoridagi (1) da $Q(x) \equiv 0$ bo‘lsa.

Harakteristik ko’phad - (1) tenglamada uqu^{rx} o‘rniga qo‘yish uni

e^{rx}f(r)q0

ko‘rinishga keltiriladi, bu yerda f(r)qr^{n}Qp$_1$r^{n-1}Q…..Qp$_{n-1}$rQp$_n$-ni berilgan differensial xarakteristik ko‘phadi deyiladi.

Harakteristik tenglama -

f(r)q0

tenglama berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. $F(r) = o$ xarakteristik tenglamaning ildizlari xar xil kompleks ildizlariga ega bo‘lsa, u xolda umumiy yechim qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

2. Xarakteristik tenglamaning kopleks ildizlari qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

3. (Qo‘shma) Xarkteristik tenglamaning qo‘shma kompleks ildizlari jufti $r_{k,s} = a \pm вi$ ga differensial tenglamaning xususiy yechimlari jufti qanday ko‘rinishni mos keltirish mumkin?

4. p- tartibli o‘zgarmas koeffitsentli chiziqli tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Xarakteristik tenglamani ildizi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Amaliy mashg’ulot-15

1. $y = xy^1 + y^1 + y^{1^2}$ j: $y = c(x+1) + c^2;\ \ y = -\dfrac{(x+1)^2}{4}$

2. $y = (1+y^1)x + y^{1^2}$ j: $\begin{cases} x = ce^{-p} - 2p + 2 \\ y = c(1+p)e^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}$

3. $y = -\dfrac{1}{2}y^1(2x + y^1)$ j: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(cp^{-\frac{1}{2}} - p \\ y = \dfrac{1}{6}(2cp^{\frac{1}{2}} + p^2) \end{cases}$

4. $y = xy^{1^2} + y^{1^2}$ j: $y = \left(c + \sqrt{x+1}\right);\quad y = 0$

5. $y = 2xy^1 + \dfrac{1}{y^{1^2}}$ j: $x = ct^2 - 2t^3;\ \ y = 2ct - 3t^2,\ \ t = \dfrac{1}{p}$

6. $2y = \dfrac{xy^{1^2}}{y^1 + 2}$ j: $cy = (x-c)^2;\ \ y = 0$ ва $y = -4x$

7. $y = y^1 x + a\sqrt[3]{1 - y^{13}}$ j: $y = cx + a\sqrt[3]{1 - c^3};\ \ \sqrt{y^3} - \sqrt{x^3} = \sqrt{a^3}$

8. $x = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{y^1}} - \dfrac{1}{y^1}\right)$ j: $(c - x)y = c^2;\ \ y = 4x$

TEST

$a_0x^nay^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \ldots$ $\ldots + a_{n-1}xy^/ + a_ny = f(x)$ ko‘rinishidagi Eyler tenglamasini o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamaga keltirish uchun qanday almashtirish bajariladi? (x>0 deb faraz qiling).	$* \ x = e^t$	$x = e^{-t}$	$x = \ln\lvert t\rvert$	$x = \ln\lvert t\rvert + e^t$
$a_0(x)y^{//} + a_1(x)y^/ + a_2(x)y = 0$ tenglamani yechishda ushbu Ostrogradskiy –Liuvill formulasi qo‘llaniladi: $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}$ bu formuladagi r(x) deb nimaga teng?	$* \ p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$	$p(x) = a_0(x)$
Quyidagi funksiyalardan qaysi biri chiziqli bog‘liq?	$* \ 6x + 9,\ \ 8x + 12$	$x + 2, x - 2$	$Sinx,\ \ Cosx$	$x^2 + 2x,$ $3x^2 - 1, x + 4$
$(2x+1)y^{//} + 4xy^/ - 4y = 0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.	$* \ e^{-2x}$	e^{-2x^2}	e^x	x^3

Ushbu $(x-a)^2+by^2=1$ chiziqlar oilasi qaysi diffirensial tenglamaning yechimi?	$*\left(yy''+y'^2\right)^2=-y^3y''$	$2yy''+y'^2=\sqrt{yy''}$	$yy''+y'^2=0$	Hech birining yechimi emas
$y=a(x)z$ almashtrish yordamida $x^2y''-2xy'+\left(x^2+2\right)y=0$ tenglamada birinchi tartibli yoqotib soddalashtring.	$*z''+z=0$	$z''-z=0$	$z''+4z=0$	$z''-4z=0$
Yechimni $y_1=ax+b$ ko‘rinishda izlab, $x^2y''\ln x-xy'+y=0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.	$*\ y_1=x$	$y_1=2x+1$	$y_1=2x-1$	$y_1=x+2$
a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=1$, $y(0)=0,\ y(1)=0$ masala yechimga ega emas?	$*\ a=(2\pi-1)\pi^2$	$a=(2\pi-1)\ \pi$	$a=(2\pi-1)^2\pi$	$a=0$
a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=f(x)$ $y(0)=0,\ y(1)=0$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasi mavjud bo‘ladi?	$*\ a\neq k^2\pi^2$	$a=k\pi$	$a=k^2\pi^2$	$a\neq k\pi$
$y''+4y'+3y=0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*\ y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$	$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$	$y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$	$y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$