МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

ЦЕНТР СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО, ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

Э. М. Сайдаматов, А. К. Аманов, А. С. Юнусов, С. С. Ходжабагян

АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть II

Учебное пособие для учащихся академических лицеев с углубленным изучением математики

Издание четвертое

«ILM ZIYO»
ТАШКЕНТ–2016

УДК 007 (075)
ББК 22.14я722+22.161я722
А45

Данное издание — победитель Республиканского конкурса в 2008 году «Лучший учебник года»

Рецензенты: доктор физико-математических наук, профессор НУУз имени М. Улугбека *О. Р. Халмухамедов*;

кандидат физико-математических наук, заведующий кафедрой математики академического лицея при ТАСИ *М. Маматкулов*;

преподаватель математики Ташкентского профессионального колледжа железнодорожного транспорта *С. Х. Носиров*.

Под общей редакцией Э.М. Сайдаматова

Учебное пособие «Алгебра и основы математического анализа», часть II является продолжением части I одноименного учебного пособия, изданного в 2005 году. Книга написана в соответствии с учебной программой, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан и Центром среднего специального, профессионального образования.

Часть II состоит из следующих разделов: тригонометрические функции, нестандартные функции, числовые последовательности и их предел, предел функции и непрерывность, производная функции и ее применения, интеграл, дифференциальные уравнения, элементы комбинаторики, элементы теории вероятностей и математической статистики, элементы линейной алгебры.

Данное учебное пособие предназначено для организации учебного процесса в академических лицеях с углубленным изучением математики. Оно будет полезным также для учащихся профессиональных колледжей и при самостоятельной подготовке для поступления в высшие учебные заведения Республики Узбекистан.

ISBN 978-9943-16-298-3

ОТ АВТОРОВ

Учебное пособие «Алгебра и основы математического анализа», часть II является продолжением части I одноименного пособия, изданного в 2005 году. Настоящая книга написана в соответствии с учебной программой, утвержденной Министерством высшего и среднего специального образования Республики Узбекистан и Центром среднего специального, профессионального образования, и предназначена для организации учебного процесса в академических лицеях с углубленным изучением математики.

Книга создана на основе опыта преподавания математики в академических лицеях при Ташкентском архитектурно-строительном институте (ТАСИ), Ташкентском институте инженеров транспорта (ТашИИТ), и Ташкентском университете информационных технологий (ТУИТ).

Часть II состоит из 10 глав (главы IX—XVIII):

Глава IX. *Тригонометрические функции.*

Глава X. *Нестандартные функции.*

Глава XI. *Числовые последовательности и их предел.*

Глава XII. *Предел функции и непрерывность.*

Глава XIII. *Производная функции и ее применения.*

Глава XIV. *Интеграл.*

Глава XV. *Дифференциальные уравнения.*

Глава XVI. *Элементы комбинаторики.*

Глава XVII. *Элементы теории вероятностей и математической статистики.*

Глава XVIII. *Элементы линейной алгебры.*

Глава IX написана *С.С. Ходжабагяном* (ТУИТ), главы X, XVI и XVII — *А.К. Амановым* (ТАСИ), главы XI, XII и XVIII — *А.С. Юнусовым* (ТГПУ имени Низами) и главы XIII—XV — *Э.М. Сайдаматовым* (НУУз имени М. Улугбека).

Авторы выражают искреннюю признательность за ценные замечания и советы профессору НУУз имени М. Улугбека, доктору физико-математических наук *О.Р. Халмухамедову*, заведующему кафедрой математики академического лицея при ТАСИ, кандидату физико-математических наук *М. Маматкулову* и преподавателю математики Ташкентского профессионального колледжа железнодорожного транспорта *С.Х. Носирову*.

Авторы также будут признательны всем читателям, приславшим свои замечания.

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

N — множество натуральных чисел
Z — множество целых чисел
Q — множество рациональных чисел
R — множество действительных чисел
$\varnothing$ — пустое множество
$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A
$a \notin A$ — элемент a не принадлежит множеству A
$\cup$ — знак объединения
$\cap$ — знак пересечения
$A \Rightarrow B$ — из A следует B
$A \Leftrightarrow B$ — A равносильно B
$A \subset B$ — множество A является подмножеством множества B
$A \equiv B$ — A тождественно равно B
$A \neq B$ — A не равно B
$[a;\ b]$ — замкнутый промежуток (отрезок) с началом a и концом b
$(a;\ b)$ — открытый промежуток (интервал) с началом a и концом b
$[a;\ +\infty)$ — бесконечный промежуток с началом a
$(-\infty;\ b]$ — бесконечный промежуток с концом b
$|a|$ — абсолютная величина числа a
$[a]$ — целая часть числа a
$\{a\}$ — дробная часть числа a
$e = 2{,}87...$
$\pi = 3{,}1415...$
sin — функция синус
cos — функция косинус
tg — функция тангенс
ctg — функция котангенс
$\arcsin a$ — арксинус числа a
$\arccos a$ — арккосинус числа a
$\operatorname{arctg} a$ — арктангенс числа a
$\operatorname{arcctg} a$ — арккотангенс числа a
$D(f)$ — область определения функции f
$E(f)$ — область значений функции f
$(a - \delta;\ a + \delta)$ — окрестность точки a радиуса δ, δ — окрестность точки a
$x \to a$ — x стремится к a
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$ — предел функции f при $x \to a$
Δx — приращение аргумента x
Δf — приращение функции f
df — дифференциал функции f
$f'(x_0)$ — производная функции f в точке x_0
$x_{\max}$, $x_{\min}$ — точки максимума и минимума функции (точки экстремума)
$f_{\max}, f_{\min}$ — максимум и минимум функции f (экстремумы функции f)
$\int f(x)dx$ — неопределенный интеграл от функции f
$\int\limits_a^b f(x)dx$ — определенный интеграл от функции f на отрезке $[a;\ b]$
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$
$\bar{A}_m^k$ — число размещений с повторениями из m элементов по k
A_m^k — число размещений без повторений из m элементов по k
P_m — число перестановок без повторений из m элементов
C_m^k — число сочетаний без повторений из m элементов по k
$P(A)$ — вероятность события A
$\dim V$ — размерность линейного пространства V

ГЛАВА IX

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Градусная и радианная мера угла

1. Угол в тригонометрии. Рассмотрим луч, который выходит из точки O и занимает исходное положение OA. Сделав некоторый поворот от исходного положения (против или по часовой стрелке), он займет положение OB (рис. 1). Новое положение вместе с исходным образует угол AOB, у которого сторона OA называется *начальной*, а OB — *конечной сторонами*. Угол называется *положительным*, если он образован поворотом луча против часовой стрелки, и *отрицательным*, если поворот луча произведен по часовой стрелке.

При вращении луча от начальной стороны OA до конечной OB угол AOB может быть получен множеством различных поворотов. Следовательно, чтобы задать угол AOB, недостаточно знать его начальную и конечную стороны, а нужно указать еще поворот, который переводит луч из начального положения OA в конечное OB. Этими данными и определяется угол в тригонометрии.

2. Единичная окружность. Для удобства в тригонометрии используется так называемый тригонометрический круг — окружность произвольного или единичного радиуса. Возьмем окружность единичного радиуса (рис. 2) и примем за начало отсчета на этой окружности точку A — правый конец горизонтального диаметра. В качестве положительного направления

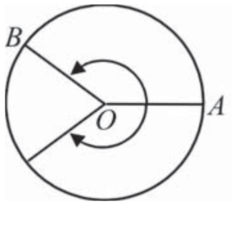


Рис. 1

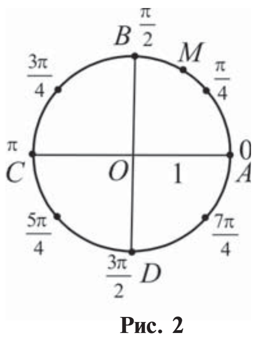


Рис. 2

движения по окружности примем движение против часовой стрелки, а в качестве отрицательного направления — движение по часовой стрелке.

Каждой точке M окружности соответствует бесконечное множество дуг, начинающихся в точке A и заканчивающихся в точке M. Одной из них является кратчайшая дуга, соединяющая эти две точки, а все остальные получаются из кратчайшей дуги прибавлением или вычитанием целого числа полных оборотов.

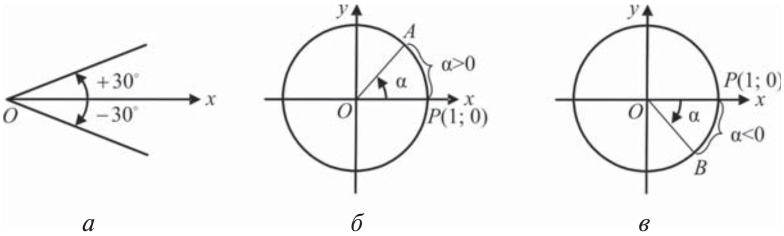
Так как длина окружности единичного радиуса равна 2π, то величины всех дуг, заканчивающихся в данной точке M окружности, отличаются друг от друга на целое кратное 2π. Общий вид этих величин таков: $x + 2\pi k$, где $k \in Z$, а x — величина кратчайшей дуги, соединяющей точки A и M.

Окружность единичного радиуса с выбранным началом отсчета и направлением обхода называют *числовой окружностью*. Вертикальные и горизонтальные диаметры разбивают числовую окружность на четыре дуги AB, BC, CD и DA, которые называются соответственно I, II, III и IV четвертями окружности. На рис. 2 отмечены точки на числовой окружности, соответствующие числам вида: $\frac{k\pi}{2}$ и $\frac{k\pi}{4}$.

3. Измерение углов. Как и в геометрии, углы в тригонометрии измеряются в градусах и радианах. Напомним, что *радианом* называется дуга окружности, длина которой равна радиусу этой окружности. Однако, если величина *геометрического угла* есть положительное число, принимающее значения от 0° до 360° (градусов) или от 0 до 2π (радиан), то величина *тригонометрического угла* может принимать произвольное действительное значение.

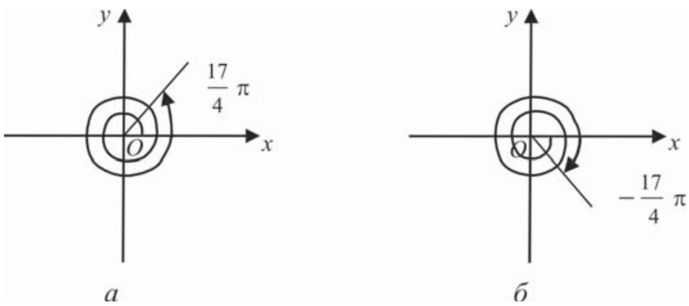
В градусной системе измерения угловых величин единицами измерения служат градус, минута, секунда. Между этими единицами существует связь: $1^\circ = 60'$, $1' = 60''$. В градусной системе единиц измеряются и углы поворота. Как было отмечено в пункте 1, величину угла поворота против движения часовой стрелки принято считать положительной, а по движению часовой стрелки отрицательной величиной (рис. 3, *а*).

Пусть точка, двигаясь по единичной окружности от точки P против часовой стрелки до точки A, прошла путь длиной α (рис. 3, *б*). В этом случае говорят, что точка A получена из точки P поворотом вокруг начала координат на угол в α радиан. Если движение совершается по часовой стрелке, то точка пройдет путь равный $|\alpha|$ и точка P окажется в положении точки B (рис. 3, *в*).



а *б* *в*

Рис. 3



а *б*

Рис. 4

Отметим, что при повороте точки P на угол 2π, т.е. на 360°, точка возвращается в первоначальное положение. При повороте этой точки на -2π, т.е. на -360°, она также возвращается в первоначальное положение.

Рассмотрим поворот точки на угол больший 2π, и на угол, меньший -2π. Например, при повороте на угол $\frac{17}{4}\pi = 2\cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}$ точка совершает два полных оборота против часовой стрелки и проходит еще путь $\frac{\pi}{4}$ (рис. 4, *а*). При повороте на угол $-\frac{17}{4}\pi$ точка совершает два полных оборота по часовой стрелке и еще проходит путь $\frac{\pi}{4}$ в том же направлении (рис. 4, *б*).

Вообще, если угол $\alpha = \alpha_0 + 2\pi k$, где k — целое число, то при повороте на угол α получается та же самая точка, что и при повороте на угол α_0.

Пример 1. Найти координаты точки, полученной поворотом точки $P(1; 0)$ на угол: 1) 5π; 2) $-\frac{9}{2}\pi$.

Р е ш е н и е . 1) Так как $5\pi = \pi + 2\pi \cdot 2$, то при повороте на угол 5π получается та же самая точка, что и при повороте на угол π, т.е. получается точка $(-1; 0)$.

2) Так как $-\frac{9}{2}\pi = -\frac{\pi}{2} - 2\pi \cdot 2$, то при повороте на угол $-\frac{9}{2}\pi$ получается та же самая точка, что и при повороте на угол $-\frac{\pi}{2}$, т.е. получается точка $(0; -1)$.

Говорят, что *угол* α *оканчивается* в той четверти, в которой лежит соответствующий ему подвижный радиус. Если α — острый угол, т.е. $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, то говорят также, что этот угол принадлежит I четверти. Углы, конечная сторона которых лежит на горизонтальном или вертикальном диаметре (границы четвертей), не относят ни к одной из четвертей. Таким образом, углы, изменяющиеся в интервалах $\left(2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, оканчиваются в первой четверти. Углы, изменяющиеся в интервалах $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\right)$, оканчиваются во второй четверти. Углы, изменяющиеся в интервалах $\left(\pi + 2\pi k; \frac{3}{2}\pi + 2\pi k\right)$, оканчиваются в третьей четверти. И, наконец, углы, изменяющиеся в интервалах $\left(\frac{3}{2}\pi + 2\pi k; 2\pi + 2\pi k\right)$, оканчиваются в четвертой четверти.

П р и м е р 2 . В какой четверти оканчиваются углы, если:

а) $\alpha = \frac{3}{4}\pi$; б) $\alpha = 2{,}3\pi$; в) $\alpha = -0{,}6\pi$.

Р е ш е н и е . а) Так как $\frac{\pi}{2} < \frac{3}{4}\pi < \pi$, то данный угол оканчивается во второй четверти;

б) угол $\alpha = 2{,}3\pi$ заключен между 2π и $\frac{\pi}{2} + 2\pi$, поэтому этот угол оканчивается в первой четверти;

в) угол $\alpha = -0{,}6\pi$ заключен между $-\frac{\pi}{2}$ и $-\pi$, поэтому данный угол оканчивается в третьей четверти.

4. Зависимость между градусным измерением и радианом. Рассмотрим числовую ось с началом в точке P и окружность с центром O и радиусом 1 (рис. 5).

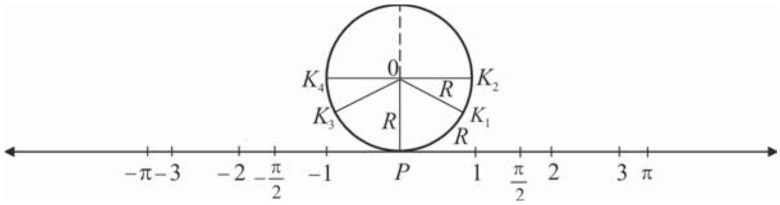


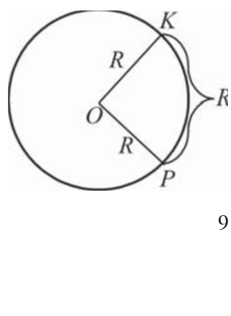
Рис. 5

Отметим на числовой прямой несколько точек: ±1, $\pm\frac{\pi}{2}$, ±2, ±3, $\pm\pi$ (где π — иррациональное число, приближенное значение которого равно 3,14). Закрепим окружность в точке P, и будем наматывать числовую прямую на окружность следующим образом: положительную часть прямой против часовой стрелки, а отрицательную часть — по часовой стрелке. При этом точки числовой прямой 1, $\frac{\pi}{2}$, -1, $-\frac{\pi}{2}$ перейдут соответственно в точки K_1, K_2, K_3, K_4, такие, что длина дуги PK_1 равна 1, длина дуги PK_2 равна $\frac{\pi}{2}$ и т.д.

Таким образом, каждой точке прямой ставится в соответствие некоторая точка окружности. Точке с координатой 1 ставится в соответствие точка K_1 на окружности, поэтому угол POK_1 считают единичным и мерой этого угла измеряют другие углы. Например, угол POK_2 следует считать равным $\frac{\pi}{2}$, угол POK_3 равным -1, угол POK_4 равным $-\frac{\pi}{2}$.

Говорят, что эти *углы измеряются в радианной мере*, а угол POK_1 называют углом в 1 радиан (1 рад). Напомним, что длина дуги PK_1 равна радиусу.

Рассмотрим теперь окружность произвольного радиуса R и отметим на ней дугу PK, длина которой равна R. В этом случае угол POK (центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу) также называют углом в 1 радиан.



Так как полуокружность длиной πR стягивает центральный угол в 180°, то дуга длиной R стягивает угол, равный $\left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ \approx 57,3^\circ$. Следовательно,

$$1 \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^\circ.$$

Отсюда, если угол содержит α радиан, то его градусная мера равна

$$\alpha \text{ рад} = \left(\frac{180}{\pi} \cdot \alpha\right)^{\circ}. \qquad (1)$$

П р и м е р 3. Найти градусную меру угла, равного

а) $\frac{\pi}{4}$ рад; б) $\frac{\pi}{2}$ рад; в) $\frac{3\pi}{4}$ рад; г) $\frac{3}{2}\pi$ рад.

Р е ш е н и е. По формуле (1) имеем

а) $\frac{\pi}{4}$ рад $= \left(\frac{180}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4}\right)^{\circ} = 45^{\circ}$; б) $\frac{\pi}{2}$ рад $= 90^{\circ}$;

в) $\frac{3\pi}{4}$ рад $= 135^{\circ}$; г) $\frac{3}{2}\pi$ рад $= 270^{\circ}$.

Так как угол в 180° равен π рад, то

$$1^{\circ} = \frac{\pi}{180} \text{ рад}.$$

Отсюда, если угол содержит α градусов, то его радианная мера равна

$$\alpha^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot \alpha \text{ рад}. \qquad (2)$$

П р и м е р 4. Найти радианную меру угла, равного:

а) 15°; б) 30°; в) 60°; г) 225°.

Р е ш е н и е. Применяя формулу (2), имеем

а) $15^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 15$ рад $= \frac{\pi}{12}$ рад;

б) $30^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 30$ рад $= \frac{\pi}{6}$ рад;

в) $60^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 60$ рад $= \frac{\pi}{3}$ рад;

г) $225^{\circ} = \frac{\pi}{180} \cdot 225$ рад $= \frac{5\pi}{4}$ рад.

Объединяя результаты примеров 3 и 4 в таблицу углов в градусной и радианной мере, получаем:

Градусы	0°	15°	30°	45°	60°	90°	135°	180°	225°	270°
Радианы	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3}{4}\pi$	π	$\frac{5}{4}\pi$	$\frac{3}{2}\pi$

Далее, так как угол в 1 радиан стягивает дугу, длина которой равна радиусу R, то угол в α радиан стягивает дугу длиной

$$l = \alpha R.$$

В заключение выведем формулу площади кругового сектора радиуса R, образованного углом в α рад. Так как площадь полукруга, т.е. $\frac{\pi R^2}{2}$, равна площади сектора, соответствующего π рад, то площадь сектора, соответствующего углу в 1 рад, будет равна $\frac{\pi R^2}{2} : \pi = \frac{R^2}{2}$. Следовательно, площадь сектора, соответствующего углу в α рад, равна

$$S = \frac{R^2}{2} \cdot \alpha.$$

Вопросы и задания

1. В каких единицах измеряются углы в геометрии, в тригонометрии?
2. В чем состоит особенность измерения углов в тригонометрии?
3. Что означает понятие «тригонометрический круг»?
4. Какую связь можно установить между точками числовой оси и окружности радиуса 1?
5. Чему равен угол в 1 рад в градусах?

Упражнения

1. Найти градусную меру угла, выраженного в радианах:

а) $\frac{\pi}{5}$; б) $\frac{\pi}{9}$; в) $\frac{3\pi}{4}$; г) $-\frac{5\pi}{6}$; д) 0,25; е) 5.

2. Выразить в радианах угол, градусная мера которого равна:

а) 72°; б) 135°; в) 240°; г) 30°; д) −120°; е) −225°.

3. Построить образы точки $P_0(1; 0)$ при повороте вокруг начала координат на углы:

а) $-\frac{\pi}{4}$; б) $-\frac{\pi}{2}$; в) $-\frac{3\pi}{4}$; г) $-\pi$;

д) $-\frac{5\pi}{4}$; е) $-\frac{7\pi}{4}$; ж) $-\frac{3\pi}{2}$; з) -2π.

4. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

а) $2\frac{3}{4}\pi$; б) $-\frac{\pi}{6}$; в) $2{,}2\pi$; г) $-\frac{11\pi}{3}$; д) $700°$; е) $460°$.

5. Записать все углы, на которые нужно повернуть точку $P(1;\ 0)$, чтобы получить точку:

а) $(0;\ -1)$; б) $(0;\ 1)$; в) $(1;\ 0)$; г) $(-1;\ 0)$.

6. Определить четверть, в которой расположена точка, полученная поворотом точки $P(1;\ 0)$ на угол:

а) 1,5; б) 1,75; в) 3,47; г) 5,75.

7. Найти длину дуги окружности радиуса 80 см, если дуга содержит $\frac{\pi}{10}$ радиан.

8. Найти длину дуги, содержащей 120°, если ее стягивает хорда длиной 10 см.

9. Найти площадь кругового сектора, радиус которого равен 18 см, а величина дуги в радианах равна $\frac{\pi}{6}$.

---

10. Радиус кругового сектора равен 12 см, а его дуга содержит 50°. Вычислить площадь сектора.

11. Поворот вокруг центра 0 единичной окружности отображает точку $P(1;\ 0)$ в точку $P_1(0;\ -1)$. Найти множество углов вращения, сводящихся к данному повороту.

12. Колесо машины за 2 с делает 6 оборотов. Выразить в градусах и радианах величину угла, на который повернется колесо за 1 с; за 10 с.

13. Окружность радиуса 12 см разогнута в дугу радиуса 30 см. Найти градусную величину этой дуги.

14. Длина дуги кругового сектора равна 120 см. Найти площадь сектора, если величина его дуги в радианах равна $\frac{2\pi}{5}$.

15. Площадь кругового сектора равна 300 см², а величина его дуги в радианах равна 1,5. Найти радиус сектора.

16. Применяя правила преобразования градусной величины в радианную и обратно, заполнить таблицу:

Градусная величина	10°	20°	35°			
Радианная величина				$\frac{\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{8}$

§ 2. Тригонометрические функции произвольного аргумента

1. Определение и свойства тригонометрических функций. В курсе геометрии были определены понятия синуса, косинуса и тангенса угла α при $0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$. Определим теперь эти понятия на случай произвольного α. Кроме того, введем еще понятие котангенса угла α, который обозначается $\mathrm{ctg}\alpha$.

Рассмотрим окружность радиуса R с центром в начале координат. Пусть при повороте около точки O на угол α начальный радиус OA переходит в радиус OB (рис. 6).

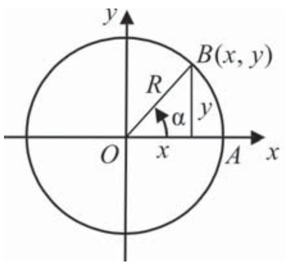


Рис. 6

Определение 1. *Синусом угла* α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, соответствующего α, к длине радиуса, т.е. по определению

$$\sin\alpha = \frac{y}{R}. \qquad (1)$$

Определение 2. *Косинусом угла* α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, соответствующего α, к длине радиуса, т.е. по определению

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}. \qquad (2)$$

Определение 3. *Тангенсом угла* α называется отношение ординаты конца подвижного радиуса, соответствующего α, к его абсциссе, т.е. по определению

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}. \qquad (3)$$

Определение 4. *Котангенсом угла* α называется отношение абсциссы конца подвижного радиуса, соответствующего α, к его ординате, т.е. по определению

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{x}{y}. \qquad (4)$$

Иногда, кроме этих четырех величин, рассматриваются еще две: секанс и косеканс.

Секансом угла α называется величина, обратная косинусу α, т.е.

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}.$$

Косекансом угла α называется величина, обратная синусу α, т.е.

$$\operatorname{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}.$$

П р и м е р 1. Найти значения sinα, cosα, tgα и ctgα при $\alpha = 0$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим единичную окружность (рис. 7). Если $\alpha = 0$, то ордината точки A равна нулю и по формуле (1) имеем $\sin 0 = \frac{0}{1} = 0$. Абсцисса точки A равна 1 и на основании формулы (2) $\cos 0 = \frac{1}{1} = 1$.

Аналогично находим, что $\operatorname{tg} 0 = \frac{0}{1} = 0$, ctg0 не существует.

П р и м е р 2. Известно, что $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Найти значения cosα, tgα и ctgα.

Р е ш е н и е. Воспользуемся единичной окружностью (рис. 8). Рассмотрим прямоугольный треугольник OBA_α. Тогда sinα и cosα есть соответственно ордината и абсцисса точки $A_\alpha : |OA_\alpha| = 1$, $|OB| = \frac{1}{2}$. Воспользовавшись теоремой Пифагора, находим

$$|\cos\alpha| = |A_\alpha B| = \sqrt{|A_\alpha O|^2 - |OB|^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

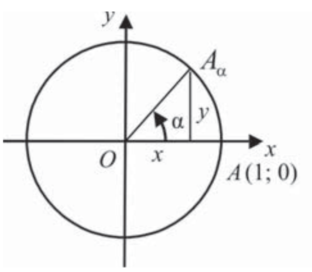


Рис. 7

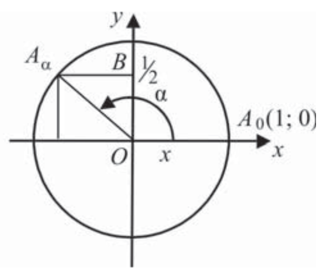


Рис. 8

Так как $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3},\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{-\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\sqrt{3}.$$

Приведем таблицу часто встречающихся значений синуса, косинуса, тангенса и котангенса.

α	0	$\frac{\pi}{6}$ 30°	$\frac{\pi}{4}$ 45°	$\frac{\pi}{3}$ 60°	$\frac{\pi}{2}$ 90°	$\frac{2\pi}{3}$ 120°	$\frac{3\pi}{4}$ 135°	$\frac{5\pi}{6}$ 150°	π 180°	$\frac{7\pi}{6}$ 210°	$\frac{5\pi}{4}$ 225°	$\frac{4\pi}{3}$ 240°	$\frac{3\pi}{2}$ 270°	$\frac{5\pi}{3}$ 300°	$\frac{7\pi}{4}$ 315°	$\frac{11\pi}{6}$ 330°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	–	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\operatorname{ctg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$

П р и м е р 3. Вычислить $\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} + 3\cos\frac{\pi}{3} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$.

Р е ш е н и е. Используя таблицу, получаем

$$\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{3} + 3\cos\frac{\pi}{3} - 2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = \sqrt{3}\,\frac{\sqrt{3}}{2} + 3\cdot\frac{1}{2} - 2\cdot 1 = 1.$$

Положение точки на координатной окружности можно задавать ее декартовыми координатами. Снова выберем систему декартовых координат на плоскости так, чтобы начало системы координат находилось в центре O единичной окружности. Декартовы координаты точки $B(x, y)$ единичной окружности будем называть косинусом и синусом числа α (рис. 6). Тем самым каждому действительному числу α будут поставлены в соответствие два числа: $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, т. е. определены две числовые функции числового аргумента.

Определение 5. Функция $\cos\alpha$ (*косинус*) ставит в соответствие каждому числу α абсциссу точки $B(x, y)$ единичной окружности, а функция $\sin\alpha$ (*синус*) ставит в соответствие числу α ординату той же точки.

Определение 6. Частное от деления функции $\sin\alpha$ на функцию $\cos\alpha$ называют функцией $\mathrm{tg}\,\alpha$ (*тангенс*), а частное от деления функции $\cos\alpha$ на функцию $\sin\alpha$ называют функцией $\mathrm{ctg}\,\alpha$ (*котангенс*).

а) Из определения тригонометрических функций ясно, что $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ определены для любого α, причем множеством значений функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ является отрезок $[-1;\ 1]$.

Функция $\mathrm{tg}\,\alpha$ определена для всех $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi\ (k = 0; \pm 1; ...)$, функция $\mathrm{ctg}\,\alpha$ определена для всех $\alpha \neq k\pi$. Множеством значений функций $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ является множество всех действительных чисел.

б) Знаки функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ совпадают со знаками ординаты и абсциссы конца соответствующего радиуса. Знаки функций $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ положительны в тех четвертях, где совпадают знаки координат x и y. Следовательно, $\sin\alpha > 0$, если α оканчивается в I и II четвертях; $\cos\alpha > 0$, если α оканчивается в I и IV четвертях, $\mathrm{tg}\,\alpha > 0$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha > 0$, если α оканчивается в I и III четвертях (рис. 9).

Пример 4. Определить знаки синуса и косинуса углов:

а) $\frac{3\pi}{5}$; б) $730°$; в) $-\frac{4\pi}{7}$.

Решение. а) Точка, соответствующая углу $\frac{3\pi}{5}$, расположена во второй четверти. Поэтому

$$\sin\frac{3\pi}{5} > 0,\ \cos\frac{3\pi}{5} < 0.$$

б) Так как $730° = 2\cdot360° + 10°$, то угол в $730°$ оканчивается в первой четверти. Поэтому

$$\sin730° > 0,\ \cos730° > 0.$$

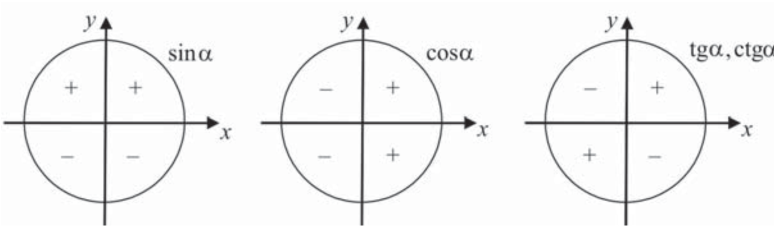


Рис. 9

в) Так как $-\pi < -\frac{4\pi}{7} < -\frac{\pi}{2}$, то данный угол оканчивается в третьей четверти. Поэтому

$$\sin\left(-\frac{4\pi}{7}\right) < 0, \qquad \cos\left(-\frac{4\pi}{7}\right) < 0.$$

Пример 5. Определить знак тангенса углов:

а) 170°; б) 3,5.

Решение. а) Так как 90° < 170° < 180°, то tg170° < 0;

б) Так как $\pi < 3{,}5 < \frac{3\pi}{2}$, то tg3,5 > 0.

2. Четность и нечетность тригонометрических функций. В главе VII, § 3, часть I были даны определения четных и нечетных функций. Если у тригонометрической функции два аргумента α и $-\alpha$ отличаются только знаком, то соответствующие им подвижные радиусы OB_1 и OB_2 симметричны относительно оси абсцисс. Значит $X_{B_1} = X_{B_2}$, $Y_{B_1} = -Y_{B_2}$ и поэтому

$$\sin(-\alpha) = \frac{Y_{B_2}}{R} = -\frac{Y_{B_1}}{R} = -\sin\alpha, \ \cos(-\alpha) = \frac{X_{B_2}}{R} = \frac{X_{B_1}}{R} = \cos\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = \frac{Y_{B_2}}{X_{B_2}} = \frac{-Y_{B_1}}{X_{B_1}} = -\operatorname{tg}\alpha, \ \left(\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right),$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = \frac{X_{B_2}}{Y_{B_2}} = \frac{X_{B_1}}{-Y_{B_1}} = -\operatorname{ctg}\alpha, \ (\alpha \neq \pi k).$$

Согласно определению, отсюда вытекает, что функция cosα – четная, а функции sinα, tgα и ctgα – нечетные.

Пример 6. Доказать, что функция $f(x) = \sin 2x + \operatorname{tg}\frac{x}{3}$ является нечетной.

Решение. Область определения функции симметрична относительно начала координат. Подставим вместо аргумента x значение $-x$. Тогда $f(-x) = \sin(-2x) + \operatorname{tg}\left(-\frac{x}{3}\right)$. Так как функции $\sin x$ и $\operatorname{tg} x$ нечетные, то

$$f(-x) = -\sin(2x) - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{3}\right) = -\left(\sin 2x + \operatorname{tg}\frac{x}{3}\right) = -f(x).$$

Следовательно, заданная функция $f(x)$ является нечетной.

П р и м е р 7. Доказать, что функция $f(x)=\frac{x^2}{\cos x}$ является четной.

Р е ш е н и е. Область определения функции симметрична относительно начала координат.

Кроме того, $f(-x)=\frac{(-x)^2}{\cos(-x)}=\frac{x^2}{\cos x}=f(x)$. Поэтому заданная функция является четной.

П р и м е р 8. Упростить выражение $\frac{(\cos(-\alpha)-\sin(-\alpha))^2}{1-2\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся равенствами $\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$, $\cos(-\alpha) = \cos\alpha$. Тогда получим

$$\frac{(\cos(-\alpha)-\sin(-\alpha))^2}{1-2\sin(-\alpha)\cos(-\alpha)}=\frac{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{1+2\sin\alpha\cos\alpha}=1.$$

3. Периодичность. Значения тригонометрических функций определяются положением подвижного радиуса, которое не меняется, если его повернуть на полный угол по часовой или против часовой стрелки. Это означает, что при прибавлении к аргументу α числа $\pm 2\pi$ значения синуса и косинуса не изменяются, т.е.

$$\sin(\alpha \pm 2\pi) = \sin\alpha,\ \cos(\alpha \pm 2\pi) = \cos\alpha \text{ при любом } \alpha.$$

Для тангенса и котангенса имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{tg}\alpha \text{ при } \alpha \neq \frac{\pi}{2}+\pi n,\ \operatorname{ctg}(\alpha \pm \pi) = \operatorname{ctg}\alpha \text{ при } \alpha \neq \pi n.$$

Действительно, точки $B_1(x_1,\ y_1)$ и $B_2(x_2,\ y_2)$ на окружности (рис. 10), соответствующие аргументам α и $\alpha+\pi$ (или α и $\alpha-\pi$), симметричны относительно начала координат. Значит, $x_1=-x_2$, $y_1=-y_2$. Тогда имеем $\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_1}{y_1}$ и $\frac{y_2}{x_2}=\frac{y_1}{x_1}$, т.е. $\operatorname{tg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}(\alpha\pm\pi)=\operatorname{ctg}\alpha$. Таким образом, функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ являются периодическими.

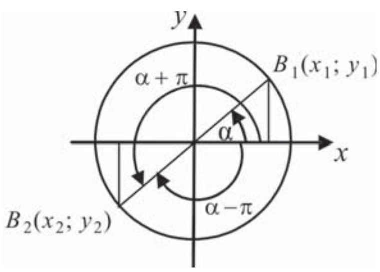


Рис. 10

Покажем, что основной период функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ равен 2π, а функций $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ — равен π.

Так как $\sin\alpha = 1$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $\cos\alpha = 1$ при $\alpha = 2\pi k$, $\mathrm{tg}\,\alpha = 0$ при $\alpha = \pi k$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha = 0$ при $\alpha = \frac{\pi}{2} + \pi k$, то отсюда заключаем, что:

1) наименьший положительный поворот, через который повторятся значения синуса и косинуса, равен 2π. Это означает, что основной период синуса и косинуса равен 2π;

2) наименьший положительный поворот, через который повторится нулевое значение тангенса и котангенса, равен π. Следовательно, число π является основным периодом для этих функций.

Покажем, что если $f(x)$ — периодическая функция с периодом T, то при любом целом k имеет место равенство $f(x+kT) = f(x)$. Действительно, так как $f(x+T) = f(x) = f(x-T)$, то

$$f(x+2T) = f(x+T+T) = f(x+T) = f(x),$$
$$f(x+3T) = f(x+2T+T) = f(x+2T) = f(x)$$

и т.д., т.е. при любом целом k выполняется равенство $f(x+kT) = f(x)$.

Таким образом, мы доказали, что если T есть период некоторой функции $f(x)$, то kT при любом целом k также является периодом.

Рассмотрим функцию $y = \cos kx$, $k > 0$. Имеем $\cos k\left(x + \frac{2\pi}{k}\right) = \cos(kx + 2\pi) = \cos kx$. Отсюда получаем, что $T = \frac{2\pi}{k}$ — основной период функции $y = \cos kx$. Аналогично показывается, что функция $y = \sin kx$ имеет основной период, равный $\frac{2\pi}{k}$, а функции $y = \mathrm{tg}\,kx$ и $y = \mathrm{ctg}\,kx$ имеют основные периоды, равные $\frac{\pi}{k}$.

Докажем еще, что сумма и произведение двух периодических функций, периоды которых соизмеримы, также являются периодической функцией.

Действительно, пусть функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определены на некотором общем множестве и их периоды T_1 и T_2 соизмеримы. Пусть $\frac{T_1}{T_2} = \frac{m}{n}$, где m и n — взаимно простые числа и

$T = nT_1 = mT_2$. Тогда число T будет периодом суммы $\varphi(x) + \psi(x)$ и произведения $\varphi(x) \cdot \psi(x)$, поскольку

$$\varphi(x + T) + \psi(x + T) = \varphi(x + nT_1) + \psi(x + mT_2) = \varphi(x) + \psi(x),$$
$$\varphi(x + T) \cdot \psi(x + T) = \varphi(x + nT_1) \cdot \psi(x + mT_2) = \varphi(x) \cdot \psi(x).$$

П р и м е р 8. Найти наименьший положительный (основной) период функций:

а) $y = \cos 5x$; б) $y = \sin 8x$.

Р е ш е н и е. а) Пусть m — период функции $\cos 5x$, тогда $\cos 5(x+m) = \cos 5x$ для любого $x \in R$. Если взять $x = 0$, то имеем $\cos 5m = \cos 0 = 1$ и на промежутке $[0; 2\pi]$ получим $5m = 2\pi$ $(m \neq 0)$. Откуда $m = \frac{2\pi}{5}$. Следовательно, $m = \frac{2\pi}{5}$ — наименьший положительный или основной период функции $y = \cos 5x$.

б) Используя полученные выше формулы, для функции $y = \sin 8x$ имеем основной период, равный $\frac{2\pi}{8}$, т.е. $\frac{\pi}{4}$.

П р и м е р 9. Найти основной период функций:

а) $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{3}\sin 3x$; б) $f(x) = \sin^2 x$.

Р е ш е н и е: а) Основной период функции $\sin x$ равен 2π, основной период функции $\sin 2x$ равен $\frac{2\pi}{2} = \pi$. Основной период функции $\sin 3x$ равен $\frac{2\pi}{3}$. Поэтому основным периодом заданной функции будет наименьшее общее кратное чисел 2π, π и $\frac{2\pi}{3}$, т.е. число 2π.

б) Так как $\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$, а $\cos 2x$ имеет основным периодом число π, то заданная функция $\sin^2 x$ также имеет основной период, равный π.

Вопросы и задания

1. Дать определения синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла α.

2. Для каких значений α имеет смысл каждое из выражений: $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$?

3. Какие знаки имеют синус, косинус, тангенс и котангенс в каждой из координатных четвертей?

4. Дать определения тригонометрических функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

5. Какие из тригонометрических функций являются четными, какие – нечетными?

6. Назвать основной период функций $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$.

Упражнения

1. Вычислить:

а) $\sin\frac{2\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6}$; ж) $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)$;

б) $\cos\frac{3\pi}{4}$; д) $\cos(-90°)$; з) $\sin(-135°)$;

в) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4}$; е) $\sin(-270°)$; и) $\cos\left(-\frac{5\pi}{4}\right)$.

2. Вычислить:

а) $2\cos\frac{\pi}{3}+\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}$; в) $\operatorname{tg}2\pi+2\sin\frac{\pi}{6}$;

б) $\cos\frac{3\pi}{2}+\sin\frac{\pi}{2}$; г) $\cos\pi-2\sin\frac{\pi}{4}$.

3. Найти значение выражения:

а) $3\sin\pi-4\cos\frac{\pi}{2}+2\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{2}$;

б) $2\cos\frac{\pi}{3}-3\sin 0°+\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}+\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{4}$;

в) $2\sin60° - 3\operatorname{tg}30° + \operatorname{ctg}(-270°) - \operatorname{tg}180°$;

г) $2\operatorname{tg}(-45°) + 2\sin45° - 3\operatorname{tg}0 - 2\operatorname{ctg}45°$.

4. Найти значение выражения:

а) $2\cos\alpha+\sqrt{2}\sin\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{4}$; г) $3\cos3\alpha + \operatorname{tg}\alpha$ при $\alpha = 60°$;

б) $\sin2\alpha - \cos3\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$; д) $4\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{ctg}4\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{8}$;

в) $\sqrt{3}\cos\alpha+2\sin\alpha$ при $\alpha = 30°$;

5. Определить четверть, в которой оканчивается угол α, если:

а) $\alpha=\frac{\pi}{3}$; в) $\alpha = 230°$; д) $\alpha = 840°$.

б) $\alpha=\frac{3\pi}{4}$; г) $\alpha = -200°$;

6. Определить знаки чисел $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, если:

а) $\alpha = \frac{5\pi}{4}$; в) $\alpha = -\frac{3\pi}{8}$; д) $\alpha = 750°$.

б) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$; г) $\alpha = -\frac{4\pi}{3}$; е) $\alpha = 520°$.

7. Определить знаки чисел $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если:

а) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$; в) $\alpha = -\frac{2\pi}{5}$; д) $\alpha = 185°$;

б) $\alpha = \frac{11\pi}{5}$; г) $\alpha = -\frac{5\pi}{4}$; е) $\alpha = 285°$.

8. Определить знаки чисел $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если:

а) $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$; в) $\frac{7\pi}{4} < \alpha < 2\pi$;

б) $\frac{3\pi}{2} < \alpha < \frac{7\pi}{4}$; г) $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$.

9. Пусть α — острый угол. Определить знак числа:

а) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$; в) $\mathrm{tg}(\pi + \alpha)$; д) $\cos(\alpha - \pi)$.

б) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$; г) $\mathrm{ctg}(\alpha - \pi)$;

10. Какие из указанных ниже функций являются четными, а какие — нечетными?

а) $y = \sin^2 x$; в) $y = \sqrt{\sin x}$; д) $y = \mathrm{tg}\,x$.

б) $y = \cos x + 2$; г) $y = \frac{\cos 2x}{\sin x}$;

11. Найти наименьший положительный период функций:

а) $y = 2 + 3\cos(6x + 7)$; г) $y = \cos^2 x + 1$;

б) $y = 2\sin(3x + 2) - 1$; д) $y = \cos\left(5x - \frac{5}{2}\right)$.

в) $y = 2\,\mathrm{tg}\frac{x}{2} - 3\,\mathrm{ctg}\frac{x}{3}$;

---

12. Проверить четность или нечетность функций:

а) $f(x) = \sin x + \mathrm{tg}\,x$; г) $f(x) = x^3\sin x$;

б) $f(x) = \sin 2x \cdot \mathrm{tg}\,x$; д) $f(x) = x^2 + \sin x$.

в) $f(x) = \frac{x^2}{\cos 2x}$;

13. Найти основной период функций:

а) $y = \sin 6x$; в) $y = \operatorname{tg}\left(x + \frac{1}{4}\right)$;

б) $y = \cos 3x$; г) $y = \operatorname{ctg}(3x + 5)$.

14. Найти основной период функций:

а) $f(x) = \sin 3x + \cos 5x$; г) $f(x) = 3 + \sin^2 x$;

б) $f(x) = \cos 12x + \operatorname{tg} 4x$; д) $f(x) = \sin^2 x - \cos^2 x$.

15. Определить знак числа:

а) $\sin\frac{3\pi}{5} \cdot \sin\frac{\pi}{4}$; в) $\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3}}{\cos^3\frac{\pi}{4}}$;

б) $\cos\frac{4\pi}{5} \cdot \cos\frac{\pi}{3}$; г) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{3\pi}{4}$.

16. Вычислить:

а) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{3}$; в) $\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} \cdot \sin\frac{\pi}{3} \cdot \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{3}$;

б) $\cos^2\frac{\pi}{6} - \cos^2\frac{\pi}{4}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} \cdot \cos^2\frac{\pi}{6} \cdot \sin\frac{\pi}{6}$.

17. Найти значение выражения:

а) $3\sin\frac{\pi}{2} + 2\cos 0 - 3\sin^3\frac{\pi}{2} + \cos\pi$;

б) $3 - \sin^2\frac{\pi}{3} + 2\cos^2\frac{\pi}{2} - 5\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4}$;

в) $6\sin^2\frac{\pi}{2} - 4\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{4} - 4\cos^2\frac{\pi}{6} + 3\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{2}$.

§ 3. Графики тригонометрических функций

Дальнейшие свойства тригонометрических функций можно получить при анализе их графиков.

1. $y = \sin x$. Возьмем окружность единичного радиуса с центром в точке $(-1; 0)$ и разделим на m равных частей верхнюю полуокружность (рис. 11). Точки деления обозначим через $A_0, A_1, \ldots, A_m$. На оси абсцисс отрезок $[0; \pi]$ тоже разделим на m равных частей. Точки деления обозначим через $x_0 = 0$, $x_1, x_2, \ldots, x_m = \pi$. Проведя из точек деления $x_0, x_1, \ldots, x_m$ верти-

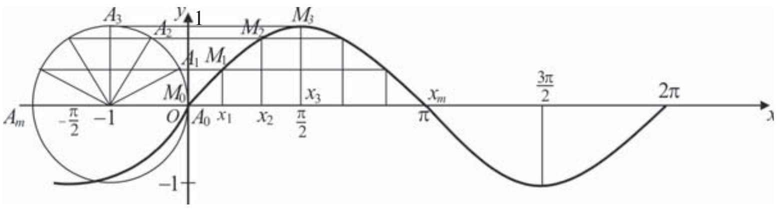


Рис. 11

кали, а из точек A_0, A_1, ..., A_m горизонтали, мы получим ряд точек M_0, M_1, ..., M_m, лежащих на искомом графике. Соединив эти точки плавной кривой, получим график синуса на отрезке $[0; \pi]$. Используя свойство нечетности и периодичности синуса, построим его график сначала на отрезке $[-\pi; 0]$, а затем на всей числовой оси. Полученная кривая называется *синусоидой*.

Из графика видно, что функция $y = \sin x$:

1) монотонно возрастает, принимая значения от -1 до 1 на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{\pi}{2}+2\pi k\right]$ и монотонно убывает, принимая значения от 1 до -1 на промежутках $\left[\frac{\pi}{2}+2\pi k; \frac{3}{2}\pi+2\pi k\right]$;

2) принимает наибольшее значение, равное 1, при $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$, и наименьшее значение, равное -1, при $x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$;

3) обращается в нуль при $x=\pi k,\ k\in Z$.

2. $y = \cos x$. Так как $\cos x=\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$ (будет показано ниже), то график функции $y = \cos x$ получается из графика $y = \sin x$ сдвигом последнего на $\frac{\pi}{2}$ единиц влево вдоль оси *OX*. Полученная кривая называется *косинусоидой*. Она симметрична относительно оси *OУ* (рис. 12). Из графика видно, что функция $y = \cos x$:

1) монотонно возрастает, принимая значения от -1 до 1 на промежутках $[\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k]$, $k\in Z$ и монотонно убывает, принимая значения от 1 до -1 на промежутках $[2\pi k, \pi + 2\pi k]$, $k\in Z$;

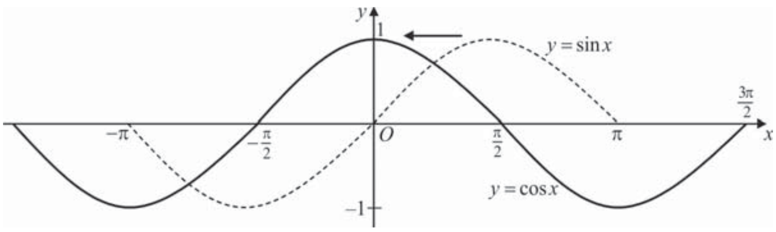


Рис. 12

2) принимает наибольшее значение, равное 1 при $x = 2\pi k$, $k \in Z$ и наименьшее значение, равное -1, при $x = \pi + 2\pi k$, $k \in Z$;

3) обращается в нуль при $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.

3. $y = \text{tg}x$. Построим единичную окружность с центром в точке $(-1; 0)$ (рис. 13). Разделим дугу первой четверти на m равных частей точками $A_0 = 0$, A_1, ..., $A_m = \frac{\pi}{2}$. Проведем радиусы OA_1, OA_2, ..., OA_m и продолжим их до пересечения с осью ординат соответственно в точках C_1, C_2, ..., C_{m-1}. Разделим отрезок $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$ оси абсцисс на m равных частей точками

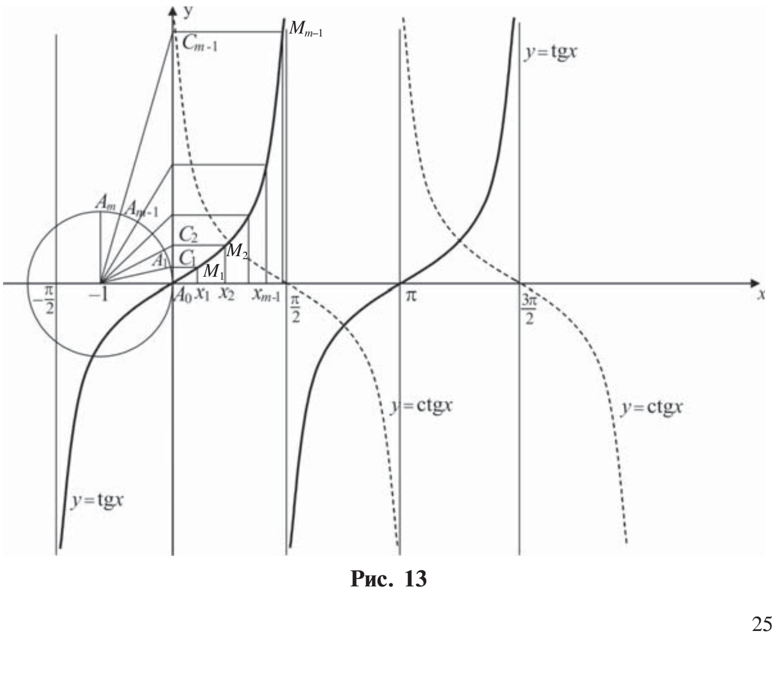


Рис. 13

$x_0 = 0,\ x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_m = \frac{\pi}{2}$. Проведя вертикали из точек x_1, x_2, ..., x_{m-1} и спроектировав на них точки C_1, C_2, ..., C_{m-1} соответственно, находим точки M_1, M_2, ..., M_{m-1}, лежащие на графике $y = \text{tg}x$. Соединив точки плавной кривой, получаем график функции $y = \text{tg}x$ на промежутке $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$. Используя нечетность и периодичность тангенса, строим его график вначале на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$, а затем на всей числовой оси.

График функции $y = \text{tg}x$ называется *тангенсоидой*. Тангенсоида состоит из бесконечного числа отдельных одинаковых ветвей, на которые она распадается при прохождении аргумента x через точки $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$. Поэтому достаточно рассмотреть одну из таких ветвей на $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. На этом интервале $y = \text{tg}x$ возрастает, принимая как отрицательные, так и положительные значения. Областью значений функции является множество $(-\infty; +\infty)$. Прямые $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$ являются вертикальными асимптотами тангенсоиды.

4. $y = \text{ctg}x$. Так как $\text{ctg}x = -\text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$, то согласно правилу построения графиков, график котангенса можно получить из графика тангенса путем сдвига тангенсоиды $y = \text{tg}x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц вправо вдоль оси OX, а затем полученный график функции $y = \text{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ следует отобразить симметрично относительно оси абсцисс (рис. 13).

График функции $y = \text{ctg}x$ называется *котангенсоидой*. Он состоит из бесконечного числа одинаковых ветвей, соответствующих интервалам $(\pi k,\ \pi(k + 1))$, $k \in Z$. На каждом из этих интервалов $y = \text{ctg}x$ монотонно убывает. Прямые вида $x = \pi k$, $k \in Z$ являются вертикальными асимптотами.

5. График гармонического колебания. *Гармоническое колебание* описывается функцией $y = A\sin(\omega x + \alpha)$. Величина A называется *амплитудой колебания*, она характеризует размах колебания. Величина ω называется *частотой колебания*. Чем больше ω, тем большее число колебаний совершается за единицу времени. Число α называется *начальной фазой* колебания (подробнее о гармонических колебаниях см. в главе XV).

Например, если груз, висящий на пружине, вывести из положения равновесия, то он начнет совершать колебания, закон движения которой выражается формулой $y = A\sin(\omega x + \alpha)$, где y — отклонение груза от положения равновесия, а x — время отклонения. Тот же закон встречается и в теории электрического тока.

Представив функцию в виде $y = A\sin\omega\left(x + \frac{\alpha}{\omega}\right)$, видим, что ее график получается из графика $y = \sin x$ путем следующих последовательных преобразований:

1) сжатием вдоль оси OX с коэффициентом ω графика $y = \sin x$, получаем график функции $y = \sin\omega x$;

2) сдвигом кривой $y = \sin\omega x$ вдоль оси OX на отрезок $\left|\frac{\alpha}{\omega}\right|$ (вправо, если $\frac{\alpha}{\omega} < 0$ и влево, если $\frac{\alpha}{\omega} > 0$) получаем график функции $y = \sin\omega\left(x + \frac{\alpha}{\omega}\right)$;

3) растягивая кривую $y = \sin\omega\left(x + \frac{\alpha}{\omega}\right)$ вдоль оси OY с коэффициентом A, получаем график функции $y = A\sin\omega\left(x + \frac{\alpha}{\omega}\right)$, или $y = A\sin(\omega x + \alpha)$.

Так как функция $y = A\sin(\omega x + \alpha)$ — периодическая с периодом $\frac{2\pi}{\omega}$, то достаточно построить ее график сначала на отрезке $\left[-\frac{\pi}{\omega} - \alpha; \frac{\pi}{\omega} - \alpha\right]$, а затем продолжить периодически на всю числовую прямую.

Итак, график функции $y = A\sin(\omega x + \alpha)$ есть синусоида с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Пример. Построить график функции $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$.

Решение. Запишем функцию в виде $y = 2\sin\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Построение графика осуществим в следующем порядке:

1) произведем сдвиг графика $y = \sin x$ на $\frac{\pi}{2}$ единиц вдоль оси OX вправо и построим график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$;

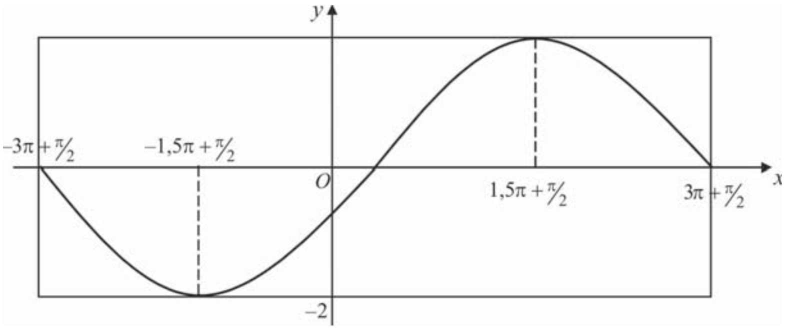


Рис. 14

2) выполним сжатие последнего графика вдоль оси OY с коэффициентом $\frac{1}{3}$;

3) произведем растяжение графика $y = \sin\frac{1}{3}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ от оси OX с коэффициентом 2.

В итоге получим график функции $y = 2\sin\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right)$ (рис. 14).

Искомый график есть гармоника с амплитудой $A = 2$, периодом $T = 6\pi$ и начальной фазой $\alpha = -\frac{\pi}{6}$. График (основная волна) расположен в прямоугольнике со сторонами $y = \pm 2$, $x = \pm 3\pi + \frac{\pi}{2}$.

Вопросы и задания

1. Как называется график функции $y = \sin x$?
2. Перечислить свойства функции $y = \sin x$.
3. Как строится график функции $y = \sin x$?
4. Как строится график функции $y = \cos x$?
5. Перечислить свойства функции $y = \cos x$.
6. Как строится график функции $y = \operatorname{tg} x$?
7. Как называются графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$?
8. Какое движение описывается формулой $y = A\sin(\omega x + \alpha)$?

Упражнения

1. Построить график функций:

а) $y = \sin 3x$; д) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$; и) $y = \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$;

б) $y = \cos 2x$; е) $y = -\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; к) $y = \cos\left|2x - \frac{\pi}{6}\right|$.

в) $y = 2 + \cos x$; ж) $y = |\sin x|$;

г) $y = -2 + \sin x$; з) $y = \sin|2x|$;

2. Пользуясь графиками функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$, найти решение уравнений:

а) $\sin x = 1$; в) $\sin x = -1$; д) $\sin x = 1/2$;
б) $\cos x = 1$; г) $\cos x = -1$; е) $\cos x = 1/2$.

3. Построить график функций:

а) $y = \operatorname{tg} 2x$; г) $y = |\operatorname{tg} x|$; ж) $y = \operatorname{ctg}|x|$.

б) $y = \operatorname{ctg}\frac{x}{2}$; д) $y = \operatorname{tg}|x|$;

в) $y = 1 + \operatorname{tg} x$; е) $y = |\operatorname{ctg} x|$.

4. Построить график функций:

а) $y = 2\sin\frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$; б) $y = 1,5\cos 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$.

---

5. Построить график функций:

а) $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$; в) $y = \left|\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\right|$;

б) $y = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $y = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right|$.

6. Найти область определения, область значений, промежутки возрастания и убывания функций и построить график:

а) $y = \cos 2x + 2$; г) $y = |\cos x + 2,5|$;

б) $y = 3\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$; д) $y = 2\operatorname{tg} 2x$;

в) $y = 2\cos(\pi - 2x)$; е) $y = 2\operatorname{tg}\left|x - \frac{\pi}{3}\right|$.

7. Найти амплитуду, период, начальную фазу и построить график гармонического колебания:

а) $y = 2\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$; в) $y = 2{,}5\sin\left(0{,}5x - \frac{\pi}{3}\right)$;

б) $y = 0{,}5\sin 2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$; г) $y = 2\sin(3x - 2)$.

§ 4. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента

1. В § 2 были определены зависимости

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ \text{где } n \in Z, \qquad (1)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha \neq \pi n,\ \text{где } n \in Z. \qquad (2)$$

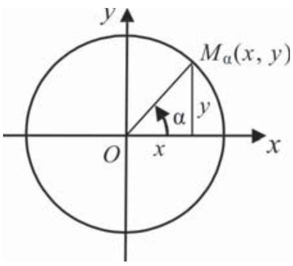


Рис. 15.

Рассмотрим единичную окружность (рис. 15) и некоторую ее точку $M_\alpha(x, y)$, соответствующую углу α. Координаты любой точки $M(x, y)$ единичной окружности связаны соотношением $x^2 + y^2 = 1$. По определению $x = \cos\alpha$; $y = \sin\alpha$. Поэтому

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \qquad (3)$$

где α — произвольный угол. Равенство (3) называют *основным тригонометрическим тождеством*. Установим еще несколько важных тождеств.

Используя равенства (1) и (2), получаем

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 1,\ \ \alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ \text{где } n \in Z, \qquad (4)$$

т.е. получаем зависимость между тангенсом и котангенсом.

Из (4) можно найти значение $\operatorname{tg}\alpha$ по заданному значению $\operatorname{ctg}\alpha$ и обратно:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha};\ \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha},\ \ \alpha \neq \frac{\pi n}{2},\ \text{где } n \in Z. \qquad (5)$$

Разделим тождество (3) почленно на $\cos^2\alpha$, что возможно при всех значениях α, не обращающих $\cos\alpha$ в нуль, т.е. при

$\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in Z$. Тогда

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \text{ или}$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z. \qquad (6)$$

Разделим теперь тождество (3) на $\sin^2\alpha$, что возможно при всех значениях α, не обращающих $\sin\alpha$ в нуль, т.е. при $\alpha \neq \pi n$, где $n \in Z$. Получим

$$\frac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} \text{ или}$$

$$1 + \mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha},\ \alpha \neq \pi n, \text{ где } n \in Z. \qquad (7)$$

Пример 1. Вычислить $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha = 5$.

Решение. По формуле (5) находим

$$\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = \frac{1}{5}.$$

Пример 2. Вычислить $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -0{,}6$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Решение. Используя формулу (3), находим, что $\sin\alpha = -\sqrt{1-\cos^2\alpha} = -\sqrt{1-0{,}36} = -0{,}8$, так как $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$ и $\sin\alpha < 0$. Следовательно,

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-0{,}8}{-0{,}6} = \frac{4}{3}.$$

Пример 3. Вычислить $\mathrm{ctg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{4}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Решение. Из формулы (7) находим, что

$$\mathrm{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{1}{\frac{16}{25}} - 1 = \frac{9}{16}.$$

Так как во II четверти котангенс угла является отрицательным числом, то

$$\mathrm{ctg}\alpha = -\frac{3}{4}.$$

П р и м е р 4. Вычислить $\cos\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Р е ш е н и е. Из формулы (6) находим

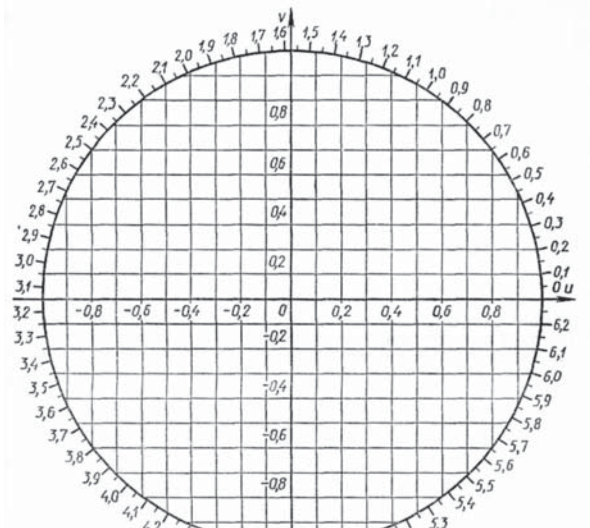
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{1+3} = \frac{1}{4}.$$

Так как $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$, то $\cos\alpha < 0$, и поэтому

$$\cos\alpha = -0{,}5.$$

2. Таблицы значений тригонометрических функций. Приближенные значения функций $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ можно найти при помощи окружности. На приведенном ниже рисунке изображена окружность в масштабе 1 ед. = 5 см. На окружности изображены точки, соответствующие числам от 0 до 2π, через каждые 0,1 радиана. С помощью такой окружности можно находить значения $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ с точностью до 0,02–0,03.

Более точными являются «Четырехзначные математические таблицы» В.М. Брадиса, которые позволяют находить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если задано значение аргумента α в градусах от 0° до 90°. Таблица XII (В.М. Брадис) позволяет находить значения этих функций при значении аргумента в радианах от 0 до π. Рассмотрим следующие примеры.



П р и м е р 5. Найти $\sin 65°20'$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся таблицей VIII (В.М. Брадис). В левой колонке находим число градусов (65°), в верхней строке ближайшее к 20′, число 18′, на пересечении строки, содержащей 65°, и колонки, содержащей 18′, находим: $\sin 65°18' \approx 0{,}9085$. Необходимо теперь учесть поправку на 2′, которая содержится в трех последних колонках. Так как на промежутке от 0° до 90° с возрастанием аргумента возрастает значение синуса, то найденную поправку 0,0002 прибавляем к значению $\sin 65°18'$ и получаем: $\sin 65°20' \approx 0{,}9087$.

П р и м е р 6. Найти $\cos 34°13'$.

Р е ш е н и е. Пользуемся той же таблицей VIII, только число градусов берем с правой колонки (четвертая колонка справа), а число минут — из нижней строки. В нижней строке находим ближайшее к 13′ — число 12′ и получаем $\cos 34°12' \approx 0{,}8271$. В этой же строке находим поправку на 1, и так как косинус на промежутке от 0 до 90° убывает, то найденную поправку 2 десятитысячным вычитаем от значения $\cos 34°12'$. В итоге получаем $\cos 34°12' \approx 0{,}8269$.

По таблице IX находят значения тангенса и котангенса при градусной величине аргумента. По таблице X находят тангенсы углов, близких к 90°, и котангенсы малых углов.

По таблице XII находят значения тригонометрических функций числового аргумента.

П р и м е р 7. Найти $\cos 1{,}47$.

Р е ш е н и е. По таблице XII в колонке (значение аргумента) находим 1,47. На пересечении строки, содержащей это значение аргумента, и колонки $\cos x$ находим ответ: $\cos 1{,}47 \approx 0{,}1006$.

3. Выражение значений тригонометрических функций через значения одной из них. Рассмотрим основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Из этого равенства можно выразить $\sin\alpha$ через $\cos\alpha$ и обратно:

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}. \tag{8}$$

Если задано, например, значение $\sin\alpha$, то $\cos\alpha$ находится из формул (8), а значения $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$ находятся из формул:

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{9}$$

П р и м е р 8. Найти значения тригонометрических функций угла α, если известно, что $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ и $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Из формул (8) получаем, что

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-\frac{9}{25}} = \frac{4}{5}.$$

Здесь значение $\cos\alpha$ является положительным числом, поскольку угол α находится в первой четверти.

Значения $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ находим по формулам (9):

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\sqrt{1-\sin^2\alpha}} = \frac{\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = \frac{3}{4}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{4}{3}.$$

Если задано значение $\operatorname{tg}\alpha$, то значения остальных тригонометрических функций находятся следующим образом:

$$\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 \Rightarrow \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha} \Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

Откуда получаем

$$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}. \tag{10}$$

Аналогично, имеют место формулы

$$\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}; \quad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}.$$

Если задано значение $\operatorname{ctg}\alpha$, то значения остальных тригонометрических функций находятся из формул:

$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}; \quad \cos\alpha = \pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}. \tag{11}$$

П р и м е р 9. Определить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{4}{3}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Р е ш е н и е. Имеем $\cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{16}{9}}} = \pm\frac{3}{5}$. Так как данный угол оканчивается во II четверти, то $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$. Аналогично получаем

$$\sin\alpha = -\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}} = -\frac{-\frac{4}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{4}{5}, \quad \mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha} = -\frac{3}{4},$$

так как угол оканчивается во II четверти.

П р и м е р 10. Определить значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $\mathrm{tg}\alpha$, если $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{15}{8}$ и $\pi < \alpha < \frac{3}{2}\pi$.

Р е ш е н и е. Из формул (11) получаем

$$\sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\frac{225}{64}}} = \pm\frac{8}{17}.$$

Поскольку угол α оканчивается в III четверти, то $\sin\alpha = -\frac{8}{17}$. Аналогично, имеем

$$\cos\alpha = -\frac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}} = -\frac{\frac{15}{8}}{\frac{17}{8}} = -\frac{15}{17}, \quad \mathrm{tg}\alpha = \frac{1}{\mathrm{ctg}\alpha} = \frac{8}{15}.$$

4. Применение основных тригонометрических формул к преобразованию выражений. Рассмотрим примеры преобразований тригонометрических выражений.

П р и м е р 11. Упростить выражение $\mathrm{tg}^2\alpha(\sin^2\alpha - 1)$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулами $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ и $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Тогда получим

$$\mathrm{tg}^2\alpha(\sin^2\alpha - 1) = \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}(-\cos^2\alpha) = -\sin^2\alpha.$$

П р и м е р 12. Упростить выражение: $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Решение. Имеем

$$\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}+\frac{1+\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+(1+\sin\alpha)^2}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha+1+2\sin\alpha+\sin^2\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}=$$

$$=\frac{2+2\sin\alpha}{(1+\sin\alpha)\cos\alpha}=\frac{2}{\cos\alpha}.$$

Пример 13. Упростить выражение $\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}$.

Решение. $\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\sin\alpha\cos\alpha$.

Вопросы и задания

1. Перечислить тригонометрические тождества.
2. Объяснить, как пользоваться четырехзначными таблицами В.М. Брадиса.
3. Как выражается тангенс угла через его синус, косинус?
4. Как выражается котангенс угла через его синус, косинус?
5. Как определяется знак значения выражаемой тригонометрической функции?

Упражнения

1. Найти значения тригонометрических функций угла α, если:

а) $\sin\alpha=\frac{4}{5}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$;

б) $\cos\alpha=\frac{8}{17}$ и α − угол I четверти;

в) $\mathrm{tg}\alpha=-\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

г) $\mathrm{ctg}\alpha=-2,5$ и α − угол IV четверти.

2. Вычислить значения тригонометрических функций угла β, если:

а) $\sin\beta=\frac{40}{41}$ и $\frac{\pi}{2}<\beta<\pi$;

в) $\cos\beta=\frac{4}{5}$ и $\frac{3}{2}\pi<\beta<2\pi$;

б) $\mathrm{tg}\beta=1$ и $\pi<\beta<\frac{3}{2}\pi$;

г) $\mathrm{ctg}\beta=3$ и $0<\beta<\frac{\pi}{2}$.

3. Могут ли одновременно выполняться равенства:

а) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ и $\cos\alpha = \frac{1}{2}$; в) $\sin\alpha = -\frac{4}{5}$ и $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$;

б) $\sin\alpha = 0$ и $\cos\alpha = -1$; г) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$ и $\cos\alpha = \frac{1}{3}$?

4. Упростить выражение:

а) $1-\frac{1}{\sin^2\alpha}$; б) $1-\frac{\sin\alpha\cos\alpha}{\mathrm{tg}\alpha}$; в) $\frac{\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha-\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$.

5. Преобразовать выражение:

а) $\frac{\cos^2\alpha-1}{\sin^2\alpha-1}+\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha$; в) $\mathrm{ctg}^2\beta(\cos^2\beta-1)$;

б) $\frac{1}{1+\sin\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha-1}$; г) $\sin^2\alpha-(\mathrm{tg}^2\alpha+1)\cos^2\alpha$.

6. Упростить выражение:

а) $\frac{\sin x}{1-\cos x}+\frac{\sin x}{1+\cos x}$; в) $\frac{\mathrm{ctg}^2\varphi-1}{\mathrm{ctg}^2\varphi+1}+\sin^2\varphi$;

б) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\mathrm{ctg}\alpha$; г) $\frac{\cos^3\alpha+\sin^3\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}+\cos\alpha\sin\alpha$.

---

7. Найти значение:

а) $\mathrm{tg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

б) $\sin\alpha$, если $\mathrm{ctg}\alpha = \frac{1}{3}$, $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$.

8. Найти значение тригонометрических функций угла α, если:

а) $\cos\alpha = \frac{8}{17}$; б) $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\mathrm{tg}\alpha = -\frac{15}{17}$.

9. Упростить выражение и найти его числовое значение:

а) $\frac{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2}{\cos^2\alpha}-(1+\mathrm{tg}^2\alpha)$ при $\alpha = \frac{\pi}{6}$;

б) $(1+\mathrm{ctg}^2\alpha)-\frac{(\cos\alpha-\sin\alpha)^2}{\sin^2\alpha}$ при $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

10. Упростить выражение:

а) $\frac{\sin^3(-\alpha)+\cos^3(-\alpha)}{1+\sin\alpha\cos(-\alpha)}$; б) $\frac{1-(\cos(-\alpha)-\sin(-\alpha))^2}{-\sin(-\alpha)}$.

11. Упростить выражение:

а) $\frac{1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}+2\sin\alpha\cos\alpha$;

б) $\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos\alpha+\sin(-\alpha)}+\mathrm{tg}(-\alpha)\cos(-\alpha)$.

§ 5. Формулы сложения

1. Формулы, выражающие тригонометрические функции суммы и разности двух углов через тригонометрические функции этих углов, называются *формулами сложения*.

Докажем, что для любых значений α и β справедливо равенство

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta. \qquad (1)$$

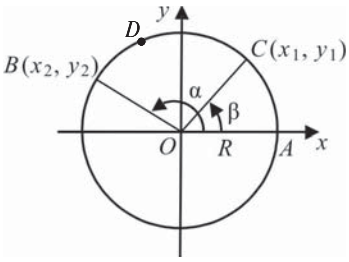


Рис. 16

Действительно, рассмотрим углы α и β как углы в тригонометрическом круге радиуса R (рис.16). Повернем радиус OA, равный R, около точки O на угол α, а затем на угол β. Получим соответственно радиусы OB и OC, где $C = C(x_1;\ y_1)$, $B = B(x_2;\ y_2)$. Тогда имеем

$$x_1 = R\cdot\cos\beta,\ y_1 = R\cdot\sin\beta,$$
$$x_2 = R\cdot\cos\alpha,\ y_2 = R\cdot\sin\alpha.$$

Согласно формуле расстояния между двумя точками имеем:

$$|BC|^2 = (x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2 =$$
$$= R^2(\cos\alpha-\cos\beta)^2+R^2(\sin\alpha-\sin\beta)^2. \qquad (2)$$

Отсюда

$$|BC|^2 = R^2[\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+\cos^2\beta+\sin^2\beta-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)] =$$
$$= R^2[2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)].$$

Возьмем теперь на окружности точку $D(R\cos\gamma,\ R\sin\gamma)$, соответствующую углу $\gamma=\alpha-\beta$. Тогда $|AD|^2 = (R - R\cos\gamma)^2 + (0 - R\sin\gamma)^2 = R^2[2-2\cos\gamma]$. Так как $|AD| = |BC|$, то справедливо равенство

$$2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta) = 2-2\cos\gamma.$$

Заменяя γ на $\alpha - \beta$, получаем равенство

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha \cos\beta + \sin\alpha \sin\beta,$$

справедливое для любых значений α и β.

Так как $\alpha + \beta = \alpha - (-\beta)$, то из формулы (1) вытекает, что

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos[\alpha - (-\beta)] = \cos\alpha \cos(-\beta) + \sin\alpha \sin(-\beta).$$

Отсюда в силу свойств четности косинуса и нечетности синуса получаем равенство

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta, \qquad (3)$$

также справедливое для любых значений α и β.

Пример 1. Вычислить $\cos 105°$.

Решение. По формуле (3) находим

$$\cos 105° = \cos(60° + 45°) = \cos 60° \cos 45° - \sin 60° \sin 45° =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}.$$

Пример 2. Вычислить $\cos 15°$.

Решение. Используя формулу (1), получаем

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \sin 45° \sin 30° =$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

Пример 3. Доказать справедливость формул:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha. \qquad (4)$$

Подставив в формулу (1) $\alpha = \frac{\pi}{2}$, имеем равенство

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) = \cos\frac{\pi}{2}\cos\beta + \sin\frac{\pi}{2}\sin\beta = \sin\beta.$$

Отсюда, заменяя β на α, получаем первую из формул (4), т.е. равенство $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$.

Полагая теперь $\frac{\pi}{2} - \beta = \alpha$ в первой из формул (4), имеем $\cos\beta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$. Заменив β на α, получим $\cos\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Далее, используя формулы (1) – (4), выведем формулу для синуса суммы углов. Имеем

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\alpha+\beta)\right]=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\beta)\right]=$$

$$=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\cos\beta+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\beta=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

Таким образом, для любых значений α и β имеет место формула

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \tag{5}$$

Так как $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$, то из (5) получаем равенство

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta, \tag{6}$$

также справедливое для всех значений α и β.

Пример 4. Вычислить $\sin 75°$.

Решение. По формуле (5) находим

$$\sin 75°=\sin(45°+30°)=\sin 45°\cos 30°+\cos 45°\sin 30°=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\cdot$$

Пример 5. Вычислить $\sin 150°$.

Решение.

$$\sin 150°=\sin(180°-30°)=\sin 180°\cos 30°-\cos 180°\sin 30°=$$

$$=0+1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot$$

Далее, пусть $\alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$. Согласно формуле (1) из § 4 и формулам (1) и (5) из § 5 имеем

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}+\dfrac{\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta}{\cos\alpha\cos\beta}-\dfrac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}=$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

при условии, что $\cos\alpha\cos\beta\neq 0$, т. е. $\alpha\neq\pi/2+\pi k$, $\beta\neq\pi/2+\pi k$, $k\in Z$.

Таким образом, при указанных значениях α и β справедлива формула

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}. \qquad (7)$$

Замечая, что $\alpha-\beta=\alpha+(-\beta)$ и $\operatorname{tg}(-\beta)=-\operatorname{tg}\beta$ из формулы (7) получаем, что

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},\ \ \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z. \qquad (8)$$

Аналогично, для любых значений α и β, удовлетворяющих условиям:

$$\alpha\pm\beta\neq\pi k,\quad \alpha\neq\pi k,\quad \beta\neq\pi k$$

имеет место формула

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg}\beta}. \qquad (9)$$

Доказательство этой формулы предоставляем читателю.

Пример 6. Найти значение: а) $\operatorname{tg}225°$; б) $\operatorname{ctg}75°$.

Решение. а) Из формулы (7) находим

$$\operatorname{tg}225°=\operatorname{tg}(180°+45°)=\frac{\operatorname{tg}180°+\operatorname{tg}45°}{1-\operatorname{tg}180°\ \operatorname{tg}45°}=1;$$

б) по формуле (9) получаем

$$\operatorname{ctg}75°=\operatorname{ctg}(45°+30°)=\frac{\operatorname{ctg}45°\operatorname{ctg}30°-1}{\operatorname{ctg}45°+\operatorname{ctg}30°}=2-\sqrt{3}.$$

2. Формулы приведения. *Формулами приведения* называются формулы, связывающие тригонометрические функции углов $\frac{\pi}{2}\pm\alpha$, $\pi\pm\alpha$, $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$, $2\pi\pm\alpha$ через функции угла α.

Выведем сначала формулы приведения для синуса и косинуса. Для этого воспользуемся формулами (1), (3), (5) и (6). При любом значении α имеем:

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\sin\alpha,$$

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\cos\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\sin\frac{\pi}{2}\sin\alpha=-\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha+\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha\ ,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\frac{\pi}{2}\cos\alpha-\cos\frac{\pi}{2}\sin\alpha=\cos\alpha\ .$$

Формулы приведения для синуса и косинуса углов $\pi\pm\alpha$ выглядят так:

$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha,\ \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha,\ \sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha.$$

Формулы приведения для синуса и косинуса углов $\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$ имеют вид:

$$\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\sin\alpha,\quad \cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=\sin\alpha,$$

$$\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)=-\cos\alpha,\quad \sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha\ .$$

Наконец, формулы приведения для синуса и косинуса углов $2\pi\pm\alpha$ вытекают из того, что при изменении угла на целое число оборотов значения синуса и косинуса не изменяются:

$$\sin(2\pi+\alpha)=\sin\alpha,\ \ \cos(2\pi+\alpha)=\cos\alpha.$$

Справедливы также формулы

$$\sin(2\pi-\alpha)=-\sin\alpha,\ \ \cos(2\pi-\alpha)=\cos\alpha.$$

Формулы приведения для тангенса и котангенса можно получить с помощью формул приведения для синуса и косинуса. Например,

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}=\frac{\cos\alpha}{-\sin\alpha}=-\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\frac{\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi+\alpha)}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

Проанализировав полученные выше формулы приведения, можно проследить некоторые закономерности. Эти закономерности позволяют сформулировать правило, с помощью которого можно записать любую из формул приведения. Это правило включает 3 пункта:

а) необходимо определить четверть, в которой оканчивается заданный угол;

б) определить знак значений данной тригонометрической функции в этой четверти;

в) если угол α откладывается от горизонтального диаметра $(\pi \pm \alpha)$, то наименование приводимой функции, т. е. функции аргумента $(\pi \pm \alpha)$ не меняется. Если α откладывается от вертикального диаметра $\left(\frac{\pi}{2} \pm \alpha, \frac{3\pi}{2} \pm \alpha\right)$, то наименование приводимой функции заменяется на сходное (синус на косинус, тангенс на котангенс и обратно).

Пример 7. Выразить $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right)$ через тригонометрическую функцию острого угла α.

Решение. а) согласно пунктам правила находим четверть, в которой оканчивается угол $\frac{3\pi}{2} - \alpha$. Это третья четверть;

б) в третьей четверти значения косинуса угла являются отрицательными;

в) так как угол α откладывается от вертикальной оси, то название исходной функции меняется на синус. Таким образом, $\cos\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) = -\sin\alpha$.

Пример 8. Выразить $\operatorname{tg}(\pi - \alpha)$ через тригонометрическую функцию острого угла α.

Решение. Если считать, что α — угол I четверти, то $\pi - \alpha$ будет углом, оканчивающимся во II четверти. Во II четверти значения тангенса угла являются отрицательными, и поэтому название исходной функции «тангенс» сохраняется (α откладывается от горизонтального диаметра). Таким образом, имеет место равенство $\operatorname{tg}(\pi - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$.

С помощью формул приведения нахождение значений тригонометрических функций любого угла можно свести к нахождению значений тригонометрических функций угла от 0 до $\frac{\pi}{2}$.

П р и м е р 9. Найти значение $\cos\frac{8\pi}{3}$.

Р е ш е н и е.

$$\cos\frac{8\pi}{3}=\cos\left(2\pi+\frac{2\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}.$$

П р и м е р 10. Найти значение $\sin(-405°)$.

Р е ш е н и е.

$$\sin(-405°)=-\sin 405°=-\sin(360°+45°)=-\sin 45°=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3. Формулы двойного и половинного аргументов. Воспользуемся следующими формулами сложения:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Заменяя в этих формулах β на α, имеем тождества

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cdot\cos\alpha, \tag{10}$$
$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha. \tag{11}$$

Используя формулы (10), (11), можно получить следующие тождества:

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\ \left(2\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k\right),\ \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}\ \left(2\alpha\neq\pi k\right). \tag{12}$$

Тождества (10)—(12) называются *формулами двойного аргумента.*

Сделаем теперь замену $\alpha=\beta/2$. Тогда формулы (10)—(12) примут вид:

$$\sin\beta=2\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\beta}{2}, \tag{10′}$$

$$\cos\beta=\cos^2\frac{\beta}{2}-\sin^2\frac{\beta}{2}, \tag{11′}$$

$$\operatorname{tg}\beta=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\beta}{2}},\ \operatorname{ctg}\beta=\frac{\operatorname{ctg}^2\frac{\beta}{2}-1}{2\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}}. \tag{12′}$$

Полученные тождества называют *формулами половинного аргумента.*

П р и м е р 11. Вычислить $\cos2\alpha$, если $\cos\alpha = 0{,}4$.

Р е ш е н и е. Используя формулу (11) и основное тригонометрическое тождество, получаем

$$\cos2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = \\ = 2\cos^2\alpha - 1 = 2(0{,}4)^2 - 1 = -0{,}68.$$

П р и м е р 12. Вычислить $\sin2\alpha$, если $\sin\alpha = -0{,}8$, где $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. По формуле (10) находим

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2(-0{,}8)(-\sqrt{1-\sin^2\alpha}) = -1{,}6(-0{,}6) = 0{,}96.$$

Знак перед корнем отрицательный, так как заданный угол оканчивается в третьей четверти.

П р и м е р 13. Вычислить $\mathrm{tg}2\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha = 1/3$.

Р е ш е н и е. Полагая в формуле (12) $\mathrm{tg}\alpha = 1/3$, получаем

$$\mathrm{tg}2\alpha = \frac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{3}{4}.$$

Выведем теперь формулы для $\sin3\alpha$, $\cos3\alpha$, $\mathrm{tg}3\alpha$ и $\mathrm{ctg}3\alpha$. Имеем

$$\sin3\alpha = \sin(2\alpha + \alpha) = \sin2\alpha\cos\alpha + \cos2\alpha\sin\alpha.$$

Отсюда, используя формулы (10) и (11), получим

$$\sin3\alpha = 2\sin\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha\sin\alpha - \sin^3\alpha = \\ = 3\sin\alpha\cos^2\alpha - \sin^3\alpha = 3\sin\alpha(1 - \sin^2\alpha) - \sin^3\alpha = \\ = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha.$$

Таким образом, имеет место формула

$$\sin3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha. \tag{13}$$

Аналогично получим, что

$$\cos3\alpha = \cos^3\alpha - 3\sin^2\alpha\cos\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha. \tag{14}$$

Из тождеств (13) и (14) получаем, что

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{\sin3\alpha}{\cos3\alpha} = \frac{3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha}{4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha} = \frac{3\mathrm{tg}a - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha} \quad \left(3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right).$$

Таким образом, справедлива формула

$$\mathrm{tg}3\alpha = \frac{3\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}^3\alpha}{1-3\mathrm{tg}^2\alpha} \quad \left(3\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k;\ \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\right). \tag{15}$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathrm{ctg}3\alpha = \frac{\mathrm{ctg}^3\alpha - 3\mathrm{ctg}\alpha}{3\mathrm{ctg}^2\alpha - 1} \quad (3\alpha \neq \pi k;\ \alpha \neq \pi k). \tag{16}$$

Далее рассмотрим известную формулу Муавра

$$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha.$$

Раскрывая левую часть равенства по формуле бинома Ньютона, имеем

$$\cos n\alpha + i\sin n\alpha = \cos^n\alpha + iC_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha -$$
$$- iC_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + \ldots + i^n\sin^n\alpha.$$

Отсюда приравнивая действительные и мнимые части двух равных комплексных выражений, получаем две формулы:

$$\left.\begin{aligned}\cos n\alpha &= \cos^n\alpha - C_n^2\cos^{n-2}\alpha\sin^2\alpha + C_n^4\cos^{n-4}\alpha\sin^4\alpha + \ldots\\ \sin n\alpha &= C_n^1\cos^{n-1}\alpha\sin\alpha - C_n^3\cos^{n-3}\alpha\sin^3\alpha + C_n^5\cos^{n-5}\alpha\sin^5\alpha + \ldots\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Многоточия в формулах (17) означают, что слагаемые в них пишутся до тех пор, пока в коэффициентах C_n^k верхний индекс k не станет больше n.

В заключение, используя (11), выведем еще две важные формулы для $\cos 2\alpha$. Имеем

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha - (1 - \cos^2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1,$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Таким образом,

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1, \quad \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha.$$

Вопросы и задания

1. Написать формулы сложения для косинусов, синусов и тангенсов.

2. Какие формулы называются формулами приведения?

3. Сформулировать правило, которым пользуются при выводе формул приведения.

4. Написать формулы двойного и половинного аргумента.

5. Написать формулы для $\cos n\alpha$ и $\sin n\alpha$.

Упражнения

1. Вычислить:

а) $\sin 105^\circ$; б) $\cos 105^\circ$; в) $\sin 15^\circ$; г) $\cos 75^\circ$.

2. Найти значение выражения:

а) $\cos 109^\circ \cos 19^\circ + \sin 109^\circ \sin 19^\circ$;

б) $\cos 46^\circ \cos 14^\circ - \sin 46^\circ \sin 14^\circ$;

в) $\sin 61^\circ \cos 29^\circ + \cos 61^\circ \sin 29^\circ$;

г) $\sin 53^\circ \cos 23^\circ - \cos 53^\circ \sin 23^\circ$.

3. Вычислить:

а) $\mathrm{tg}\,135^\circ$; б) $\mathrm{tg}\,75^\circ$; в) $\mathrm{ctg}\,225^\circ$; г) $\mathrm{ctg}\,120^\circ$.

4. Вычислить:

а) $\dfrac{\mathrm{tg}\,41^\circ+\mathrm{tg}\,19^\circ}{1-\mathrm{tg}\,41^\circ\,\mathrm{tg}\,19^\circ}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}\frac{9\pi}{16}-\mathrm{tg}\frac{5\pi}{16}}{1+\mathrm{tg}\frac{9\pi}{16}\mathrm{tg}\frac{5\pi}{16}}$.

5. Упростить выражение:

а) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\beta\right)$.

6. Упростить выражение:

а) $\dfrac{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\sin\beta}{\cos(\alpha+\beta)+\sin\alpha\sin\beta}$; б) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\cos\alpha\sin\beta}{2\cos\alpha\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)}$.

7. Упростить выражение:

а) $\dfrac{3}{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha}$; б) $(1-\mathrm{ctg}^2\alpha)\sin^2\alpha$; в) $\dfrac{\left(\mathrm{tg}\,\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}\right)(\cos\alpha-\mathrm{ctg}\,\alpha)}{(\cos\alpha+\mathrm{ctg}\,\alpha)\left(\mathrm{tg}\,\alpha-\frac{1}{\cos\alpha}\right)}$.

8. Найти значение выражения:

а) $\cos 810^\circ + \sin 1500^\circ - \mathrm{tg}\,1125^\circ$;

б) $\mathrm{tg}\,1620^\circ - \sin 405^\circ + \cos 945^\circ$;

в) $\sin(-5\pi)+2\cos\frac{32\pi}{3}-\mathrm{tg}\frac{11\pi}{4}$;

г) $\cos(-7\pi)+2\sin\left(-\frac{37\pi}{6}\right)-\mathrm{ctg}\left(-\frac{9\pi}{4}\right)$.

9. Упростить выражение:

а) $\sin^2(\pi - \alpha) + \cos^2(\alpha + \pi)$;

б) $\cos(\pi + \alpha)\cos(2\pi - \alpha) - \sin(\alpha + \pi)\sin(\alpha - 2\pi)$.

10. Вычислить:

а) $\sin 1080^\circ + \cos 6870^\circ$; в) $\dfrac{\sin 390^\circ - \cos(-900^\circ)}{\mathrm{tg}585^\circ - \mathrm{ctg}510^\circ}$;

б) $\cos 330^\circ - \dfrac{1}{2}\mathrm{tg}240^\circ$; г) $\dfrac{\sin(-4{,}5\pi) + \mathrm{tg}(-6\pi)}{\cos(-5\pi) + \mathrm{ctg}(-12{,}25\pi)}$.

11. Упростить выражение:

а) $\dfrac{\cos(\pi+\alpha)+\sin(2\pi-\alpha)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}$; в) $\dfrac{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}{\mathrm{tg}(\pi-\alpha)} \cdot \dfrac{\mathrm{tg}(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$;

б) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos(\pi+\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)}$; г) $\dfrac{\cos^2(\pi+\alpha)+\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)} \cdot \mathrm{tg}(\pi-\alpha)$.

12. Упростить выражение:

а) $\cos\dfrac{\alpha}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2}$; г) $\dfrac{\cos 2\alpha - 1}{2\sin\alpha}$; е) $\dfrac{\cos^2\alpha}{(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1}$;

б) $\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\sin\alpha$; д) $\dfrac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}$; ж) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$.

в) $\cos 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha$;

13. Вычислить $\sin 2\alpha$, если:

а) $\sin\alpha + \cos\alpha = \dfrac{2}{5}$; б) $\sin\alpha - \cos\alpha = -\dfrac{1}{4}$.

14. Вычислить:

а) $2\sin^2 15^\circ - 1$; б) $2\cos^2\dfrac{\pi}{8} - 1$; в) $\dfrac{\cos 72^\circ + \sin^2 36^\circ}{\cos^2 36^\circ}$.

15. Упростить выражение:

а) $\dfrac{\sin 2\alpha - 2\sin\alpha}{\cos\alpha - 1}$; в) $\sin 2\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha - 1$; д) $\dfrac{2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1}{\sin 2\alpha}$;

б) $\dfrac{\cos 2\alpha - \cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; г) $\dfrac{1-\cos 2\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}$; е) $\dfrac{6\mathrm{tg}15^\circ}{1-\mathrm{tg}^2 15^\circ}$;

ж) $\dfrac{1-\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha+\sin 2\alpha}$; з) $\dfrac{2\sin\alpha+\sin 2\alpha}{2\sin\alpha-\sin 2\alpha}$.

16. Найти значение выражения:

а) $\dfrac{\sin\frac{3\pi}{2}+\cos(-\pi)+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{2\sin\frac{\pi}{6}-\cos\frac{3\pi}{2}}$; в) $\dfrac{\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\frac{3\pi}{2}}$;

б) $\dfrac{2\sin\frac{5\pi}{2}+\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{5\operatorname{tg}\pi-6\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}$; г) $\dfrac{\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)-1}{\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)}$.

17. Упростить выражение:

а) $\dfrac{\sin(\alpha-\beta)\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha+\sin\beta}$; б) $\dfrac{\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha-\sin\beta}$;

в) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}$;

г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$.

18. Упростить:

а) $\left(\dfrac{2}{1+\operatorname{tg}\alpha}+\operatorname{tg}2\alpha\right)\left(\cos^2\alpha-\dfrac{1}{2}\right)$; в) $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{4\cos\alpha}$;

б) $(\operatorname{tg}2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha)(\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha)$; г) $\dfrac{\cos 2\alpha+\sin 2\alpha\cdot\cos 2\alpha}{2\sin^2\alpha-1}$.

§ 6. Преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и суммы тригонометрических функций в произведение

1. Преобразуем вначале произведение тригонометрических функций. Складывая и вычитая почленно равенства (1) и (3) из § 5, получаем тождества:

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)],\qquad(1)$$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \qquad (2)$$

справедливые для любых значений α и β.

Аналогично, складывая почленно равенства (5) и (6) из § 5, получаем тождество

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)], \qquad (3)$$

также справедливое для любых значений α и β.

Преобразуем теперь сумму и разность тригонометрических функций в произведение функций. Чтобы представить в виде произведения сумму $\sin\alpha + \sin\beta$, положим $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$ и воспользуемся формулами синуса суммы и синуса разности углов. Тогда имеем

$$\sin\alpha + \sin\beta = \sin(x + y) + \sin(x - y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y +$$
$$+ \sin x\cos y - \cos x\sin y = 2\sin x\cos y.$$

Из равенств $\alpha = x + y$, $\beta = x - y$ находим, что $x = \frac{\alpha+\beta}{2}$ и $y = \frac{\alpha-\beta}{2}$. Поэтому

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (4)$$

Полученная формула носит название *формулы суммы синусов* двух углов.

Аналогично выводятся *формулы разности синусов*, *суммы и разности косинусов двух углов*:

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \qquad (5)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \qquad (6)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad (7)$$

Далее имеем $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta} = \frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta} = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$. Поэтому

$$\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \quad \text{где} \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k. \qquad (8)$$

Аналогично выводятся формулы:

$$\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}, \text{ где } \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k \text{ и } \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, \qquad (9)$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}, \text{ где } \alpha \neq \pi k \text{ и } \beta \neq \pi k. \qquad (10)$$

П р и м е р 1. Найти значения произведений тригонометрических функций углов 75° и 45°.

Р е ш е н и е.

$$1)\ \cos 75^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{2}(\cos 120^\circ + \cos 30^\circ) = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{4};$$

$$2)\ \sin 75^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}(\cos 30^\circ - \cos 120^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4};$$

$$3)\ \sin 75^\circ \cos 45^\circ = \frac{1}{2}(\sin 120^\circ + \sin 30^\circ) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}+1}{4};$$

$$4)\ \operatorname{tg} 75^\circ \operatorname{tg} 45^\circ = \frac{\sin 75^\circ \sin 45^\circ}{\cos 45^\circ \cos 75^\circ} = \frac{\sqrt{3}+1}{4} \cdot \frac{4}{\sqrt{3}-1} = \frac{3+1+2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}.$$

П р и м е р 2. Вычислить значение $\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ$.

Р е ш е н и е. Умножим и разделим данное произведение на $\sin 20^\circ$. Тогда имеем

$$\frac{\cos 80^\circ \cos 40^\circ \cos 20^\circ \sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\cos 80^\circ \cos 40^\circ \sin 40^\circ}{\sin 20^\circ} =$$
$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{\cos 80^\circ \sin 80^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 160^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8} \cdot \frac{\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{1}{8}.$$

П р и м е р 3. Преобразовать сумму $\sin 94^\circ + \sin 26^\circ$ в произведение.

Р е ш е н и е. Воспользуемся формулой (4). Имеем

$$\sin 94^\circ + \sin 26^\circ = 2\sin\frac{94^\circ+26^\circ}{2}\cos\frac{94^\circ-26^\circ}{2} = 2\sin 60^\circ \cos 34^\circ = \sqrt{3}\cos 34^\circ.$$

П р и м е р 4. Представить в виде произведения выражение $\cos 46^\circ - \cos 74^\circ$.

Решение.

$$\cos 46^\circ - \cos 74^\circ = 2\sin\frac{46^\circ+74^\circ}{2}\sin\frac{74^\circ-46^\circ}{2} = 2\sin 60^\circ \sin 14^\circ = \sqrt{3}\sin 14^\circ.$$

2. Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента. В § 4 мы видели, что каждую из тригонометрических функций можно выразить через другие тригонометрические функции. При этом некоторые из выражений содержали квадратные корни. Однако удобнее бывает представлять тригонометрические функции в виде рациональных выражений от других тригонометрических функций.

Выведем формулы, позволяющие выражать функции $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$ и $\operatorname{ctg} x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Используя формулы $\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$ и $\sin^2\frac{x}{2} + \cos^2\frac{x}{2} = 1$, выразим $\sin x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Имеем

$$\sin x = \frac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}} = \frac{\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ \text{где } x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z.$$

Таким образом,

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\quad \text{где } x \neq \pi + 2\pi n,\ n \in Z. \qquad (11)$$

Используя формулы $\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}$ и $\cos^2\frac{x}{2} + \sin^2\frac{x}{2} = 1$, выразим теперь $\cos x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Имеем

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{\cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}} = \frac{1-\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}}{1+\dfrac{\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}.$$

Таким образом,

$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \text{ где } x \neq \pi + 2\pi n,\ n\in Z. \qquad (12)$$

Далее, выразим $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$ через $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Имеем

$$\operatorname{tg}x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}},\ \operatorname{ctg}x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}. \qquad (13)$$

П р и м е р 5. Пусть $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = 3$. Найти значения $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x$.

Р е ш е н и е. Согласно формулам (11), (12) и (13) имеем

$$\sin x = \frac{2\cdot 3}{1+9} = \frac{3}{5}, \qquad \cos x = \frac{1-9}{1+9} = -\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg}x = \frac{2\cdot 3}{1-9} = -\frac{3}{4}, \qquad \operatorname{ctg}x = \frac{1}{\operatorname{tg}x} = -\frac{4}{3}.$$

3. Преобразование выражения $a\sin\alpha \pm b\cos\alpha$ в произведение. Умножим и разделим выражение $a\sin\alpha \pm b\cos\alpha$ на $\sqrt{a^2+b^2}$. Тогда имеем

$$a\sin\alpha \pm b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin\alpha \pm \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\alpha\right).$$

Рассмотрим точку (a, b), лежащую на тригонометрическом круге радиуса R. Тогда $R = \sqrt{a^2+b^2}$ и этой точке соответствует угол φ, для которого

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

В этом случае можно записать равенство

$$a\sin\alpha \pm b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\varphi\cdot\sin\alpha \pm \sin\varphi\cdot\cos\alpha) =$$
$$= \sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha \pm \varphi). \qquad (14)$$

Пример 6. Представить выражение $\sin 15^\circ + \sqrt{3}\cos 15^\circ$ в виде произведения.

Решение. Имеем $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{1^2+\sqrt{3}^2} = 2$, $\sin\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\varphi = 60^\circ$. Используя формулу (14), получаем

$$\sin 15^\circ + \sqrt{3}\cos 15^\circ = 2\sin(15^\circ + 60^\circ) = 2\sin 75^\circ.$$

Выведем теперь соотношения между аргументами одноименных тригонометрических функций.

А) Пусть α и β — два аргумента, синусы которых равны, т.е. $\sin\alpha = \sin\beta$. Используя формулу (5), имеем

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Полученное равенство справедливо, когда $\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$, либо $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$. Из первого условия следует, что $\frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, а из второго, что $\frac{\alpha-\beta}{2} = \pi k$, где n и k — целые числа. Таким образом, из равенства синусов двух аргументов α и β следует, либо сумма этих аргументов равна $\pi + 2\pi n$, т.е. $\alpha + \beta = \pi + 2\pi n$, либо разность аргументов равна $2\pi k$, т.е. $\alpha - \beta = 2\pi k$, где n и k — целые числа.

Б) Пусть $\cos\alpha = \cos\beta$. Тогда

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0.$$

Отсюда следует, либо $\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = 0$, либо $\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 0$, т.е. $\alpha+\beta = 2\pi n$ или $\alpha-\beta = 2\pi k$, где $n, k \in Z$.

В) Пусть $\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta$. Запишем это равенство в виде $\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta} = 0$, причем $\cos\alpha \neq 0$ и $\cos\beta \neq 0$. Отсюда заключаем, что $\alpha - \beta = \pi n$. Таким образом, из равенства тангенсов двух аргументов α и β следует, что $\alpha - \beta = \pi n$, где $n \in Z$.

Аналогично, из равенства $\mathrm{ctg}\alpha = \mathrm{ctg}\beta$ следует, что $\alpha - \beta = \pi k$, где $k \in Z$.

П р и м е р 7. Определить значения x, при которых выполняется равенство:

а) $\sin 3x - \sin 5x = 0$; б) $\cos 6x = \cos 4x$; в) $\operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x = 0$.

Р е ш е н и е.

а) Имеем равенство $2\sin x \cdot \cos 4x = 0$. Откуда $x = \pi k$, $k \in Z$ либо $x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$;

б) имеем равенство $2\sin 5x \cdot \sin x = 0$. Откуда $x = \frac{\pi k}{5}$, $k \in Z$ либо $x = \pi n$, $n \in Z$;

в) имеем равенство $\operatorname{tg} 2x = \operatorname{tg} x$. Откуда $2x - x = \pi k$, $x = \pi k$, где $k \in Z$.

4. Доказательство тригонометрических тождеств. Рассмотрим несколько приемов, полезных при доказательстве тригонометрических тождеств. При доказательстве тождеств обычно их более сложную часть различными преобразованиями сводят к другой более простой части.

П р и м е р 8. Доказать тождество:

а) $$\frac{\cos\left(\frac{5\pi}{2} - 6\alpha\right) + \sin(\pi + 4\alpha) + \sin(3\pi - \alpha)}{\sin\left(\frac{5\pi}{2} + 6\alpha\right) + \cos(4\alpha - 2\pi) + \cos(\alpha + 2\pi)} = \operatorname{tg}\alpha.$$

Р е ш е н и е. Используя формулы приведения, запишем левую часть в виде $\frac{\sin 6\alpha - \sin 4\alpha + \sin\alpha}{\cos 6\alpha + \cos 4\alpha + \cos\alpha}$.

Теперь воспользуемся формулами (5) и (6). Тогда имеем

$$\frac{2\sin\alpha\cos 5\alpha + \sin\alpha}{2\cos 5\alpha\cos\alpha + \cos\alpha} = \frac{\sin\alpha(2\cos 5\alpha + 1)}{\cos\alpha(2\cos 5\alpha + 1)} = \operatorname{tg}\alpha.$$

б) $1 + \frac{1}{\cos 20^\circ} = \sqrt{3}\operatorname{ctg} 40^\circ$.

Преобразуем левую часть данного выражения так, чтобы получить угол в 40°. Имеем

$$1 + \frac{1}{\cos 20^\circ} = \frac{\cos 20^\circ + 1}{\cos 20^\circ} = \frac{2\sin 20^\circ(\cos 20^\circ + 1)}{2\sin 20^\circ \cos 20^\circ} = \frac{\sin 40^\circ + 2\sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{(\sin 40^\circ + \sin 20^\circ) + \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{2\sin 30^\circ \cos 10^\circ + \sin 20^\circ}{\sin 40^\circ} = \frac{\cos 10^\circ + \cos 70^\circ}{\sin 40^\circ} =$$

$$= \frac{2\cos 40^\circ \cdot \cos 30^\circ}{\sin 40^\circ} = \sqrt{3}\operatorname{ctg} 40^\circ.$$

В случае когда затруднительно свести одну часть тождества к другой, обе части тождества сводят различными преобразованиями к одному и тому же выражению.

П р и м е р 9. Доказать тождество

$$\frac{2\cos^2 2\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{2\sin^2 2a+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\frac{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}.$$

Р е ш е н и е. Упростим сначала левую часть соотношения:

$$\frac{1+\cos 4\alpha+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}{1-\cos 4a+\sqrt{3}\sin 4\alpha-1}=\frac{\sqrt{3}\sin 4\alpha+\cos 4\alpha}{\sqrt{3}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}.$$

Упрощая правую часть соотношения, получим

$$\frac{\sin\left(4\alpha+\frac{\pi}{6}\right)}{\sin\left(4\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}=\frac{\sin 4\alpha\cos\frac{\pi}{6}+\cos 4\alpha\sin\frac{\pi}{6}}{\sin 4\alpha\cos\frac{\pi}{6}-\cos 4\alpha\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\sqrt{3}\sin 4\alpha+\cos 4\alpha}{\sqrt{3}\sin 4\alpha-\cos 4\alpha}.$$

Как мы видим, левая часть заданного соотношения оказалась равна правой, что и требовалось доказать.

Иногда при доказательстве тождеств удобно использовать уже известные тождества.

П р и м е р 10. Доказать тождество:

$$\mathrm{tg}\alpha + 2\mathrm{tg}2\alpha + 4\mathrm{tg}4\alpha + 8\mathrm{ctg}8\alpha = \mathrm{ctg}\alpha.$$

Р е ш е н и е. Для доказательства этого тождества достаточно показать, что

$$\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha - 2\mathrm{tg}2\alpha - 4\mathrm{tg}4\alpha = 8\mathrm{ctg}8\alpha.$$

Обозначая левую часть последнего равенства через A и используя известное тождество $\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha = 2\mathrm{ctg}2\alpha$, имеем

$$A = (\mathrm{ctg}\alpha - \mathrm{tg}\alpha) - 2\mathrm{tg}2\alpha - 4\mathrm{tg}4\alpha = 2(\mathrm{ctg}2\alpha - \mathrm{tg}2\alpha) - 4\mathrm{tg}4\alpha = \\ = 4(\mathrm{ctg}4\alpha - \mathrm{tg}4\alpha) = 8\mathrm{ctg}8\alpha.$$

П р и м е р 11. Доказать тождества:

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}\right),$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}\right),\ \text{если}\ 90^\circ\le\alpha\le270^\circ.$$

Решение. Возьмем два известных тождества:

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}+\sin^2\frac{\alpha}{2}=1\ \text{ и }\ 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=\sin\alpha.$$

Складывая и вычитая их почленно, получаем два новых тождества:

$$\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=1+\sin\alpha,\quad \left(\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2=1-\sin\alpha.$$

Так как $45^\circ\le\frac{\alpha}{2}\le135^\circ$, то $\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\ge0$ и $\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}\le0$. Поэтому

$$\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1+\sin\alpha},\quad \cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{1-\sin\alpha}.$$

Складывая и вычитая почленно полученные равенства, имеем

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}-\sqrt{1-\sin\alpha}),$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin\alpha}+\sqrt{1-\sin\alpha}).$$

Вопросы и задания

1. Написать формулы преобразования суммы тригонометрических функций в произведение.
2. Написать формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму или разность.
3. Написать формулы, выражающие синус, косинус, тангенс и котангенс через тангенс половинного аргумента.
4. Объяснить способ преобразования выражения $a\sin\alpha\pm b\cos\alpha$ в произведение.
5. Написать соотношения между аргументами одноименных тригонометрических функций.
6. Рассказать о способах доказательства тригонометрических тождеств.

Упражнения

1. Записать в виде суммы:

а) $2\sin72^\circ \cdot \cos12^\circ$; в) $8\cos5^\circ\cos10^\circ\cos20^\circ\cos40^\circ$;

б) $4\sin25^\circ\sin35^\circ\cos25^\circ$; г) $\sin2x \cdot \sin(2x - 2)$.

2. Представить в виде произведения:

а) $\cos63^\circ + \cos27^\circ$; в) $\cos47^\circ - \cos13^\circ$;

б) $\sin86^\circ - \sin26^\circ$; г) $\sin70^\circ + \sin30^\circ$.

3. Преобразовать в произведение:

а) $1+\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}$; г) $1-\operatorname{tg}\alpha+\frac{1}{\cos\alpha}$; е) $3 - \operatorname{tg}^2\alpha$;

б) $\cos\alpha - \sin\alpha \cdot \sin2\alpha$; д) $3 - 4\sin^2\alpha$; ж) $\operatorname{ctg}^2\alpha - 3$.

в) $\cos\alpha + \sin2\alpha - \cos3\alpha$;

4. Упростить выражение:

а) $\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}$; в) $\dfrac{\cos\alpha+2\cos2\alpha+\cos3\alpha}{\sin\alpha+2\sin2\alpha+\sin3\alpha}$;

б) $\dfrac{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)}$; г) $\dfrac{\sin4\alpha+2\cos3\alpha-\sin2\alpha}{\cos4\alpha-2\sin3\alpha-\cos2\alpha}$.

5. Доказать тождество:

а) $\dfrac{\sqrt{2}\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{2\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{2}\operatorname{tg}\alpha$;

б) $\dfrac{\cos\alpha-2\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)}{2\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)-\sqrt{3}\sin\alpha}=-\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$;

в) $\dfrac{\cos\alpha-\cos3\alpha+\cos5\alpha-\cos7\alpha}{\sin\alpha+\sin3\alpha+\sin5\alpha+\sin7\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$;

г) $\dfrac{\cos\alpha-\cos2\alpha-\cos4\alpha+\cos5\alpha}{\sin\alpha-\sin2\alpha-\sin4\alpha+\sin5\alpha}=\operatorname{ctg}3\alpha$.

6. Вычислить $\frac{2\sin\alpha-3\cos\alpha}{4\sin\alpha+5\cos\alpha}$, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

7. Вычислить $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, если $\sin x+\cos x=-1$.

---

8. Упростить выражение:

а) $\frac{1+\sin\alpha+\cos\alpha}{1+\sin\alpha-\cos\alpha}$; в) $\sin^2\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-1\right)^2$.

б) $\cos^2\frac{\alpha}{2}\left(1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\right)^2$;

9. Упростить выражение:

а) $\frac{\sin 65^\circ\cos 5^\circ-\sin 5^\circ\cos 65^\circ}{\cos 40^\circ\cos 10^\circ+\sin 40^\circ\sin 10^\circ}$; в) $\frac{\operatorname{tg}12^\circ+\operatorname{tg}213^\circ}{1-\operatorname{tg}12^\circ\operatorname{ctg}237^\circ}$;

б) $\frac{\cos 75^\circ\cos 25^\circ-\sin 75^\circ\sin 25^\circ}{\sin 20^\circ\cos 10^\circ-\cos 20^\circ\sin 10^\circ}$; г) $\frac{\operatorname{tg}225^\circ+\operatorname{tg}171^\circ\operatorname{tg}21^\circ}{\operatorname{tg}(-171^\circ)+\operatorname{tg}201^\circ}$.

10. Упростить выражение:

а) $1+\sin\left(\frac{\alpha}{2}-3\pi\right)-\cos^2\frac{\alpha}{4}+\sin^2\frac{\alpha}{4}$;

б) $\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos(2\alpha-2\pi)\operatorname{ctg}\left(a-\frac{5\pi}{4}\right)}+\cos^2\alpha$; в) $\frac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

11. Преобразовать в произведение:

а) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}+\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+2$; б) $\frac{\operatorname{tg}^4\alpha-\operatorname{tg}^6\alpha}{\operatorname{ctg}^4\alpha-\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

12. Привести к виду $A\sin(\omega t+\alpha)$ выражение:

а) $6\sin 5t+8\cos 5t$; б) $4\sin 5t+3\cos 5t$.

13. Найти наибольшее и наименьшее значения функций:

а) $y=2\sin x+\sqrt{5}\cos x$; б) $y=5\sin 4x-12\cos 4x$.

14. Доказать тождество:

а) $\frac{\sin\alpha+2\cos 3\alpha-\sin 5\alpha}{\cos\alpha-2\sin 3\alpha-\cos 5\alpha}=-\operatorname{ctg}3\alpha$; б) $\frac{\sin^4\alpha+\cos^4\alpha-1}{\sin^6\alpha+\cos^6\alpha-1}=\frac{2}{3}$;

в) $\frac{\cos 4\alpha\operatorname{tg}2\alpha-\sin 4\alpha}{\cos 4\alpha\operatorname{ctg}2\alpha+\sin 4\alpha}=-\operatorname{tg}^2 2\alpha$.

§ 7. Обратные тригонометрические функции

1. Как известно, тригонометрические функции, будучи периодическими, не обладают свойством монотонности во всей области определения. Поэтому формально построенные соответствующие обратные функции (определение обратной функции см. в главе VII, часть I) не будут однозначными. Чтобы получить однозначные ветви обратных функций, следует рассматривать те промежутки из области определения тригонометрических функций, на которых они являются монотонными.

Исследуем обратные функции для каждой из тригонометрических функций.

а) Арксинус. Функция $y = \sin x$ является монотонной на каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right]$, где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Рассмотрим промежуток $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$. На этом промежутке функция возрастает и принимает значения от -1 до 1. Согласно общей теории, в этом случае существует обратная к $y = \sin x$ функция. Обратная функция определена на отрезке $[-1; 1]$ и монотонно возрастает, принимая значения от $-\frac{\pi}{2}$ до $\frac{\pi}{2}$. Эта функция обозначается символом $x = \arcsin y$, $y \in [-1; 1]$ или, в обычных обозначениях, в виде

$$y = \arcsin x,\ x \in [-1; 1].$$

График функции $y = \arcsin x$ можно получить из графика функции $y = \sin x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$ зеркальным отражением последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 17). Перечислим некоторые свойства функции $y = \arcsin x$:

1) функция определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$;
2) функция монотонно возрастает на отрезке $[-1; 1]$;
3) функция является нечетной;
4) областью значений функции является отрезок $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;
5) для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\sin(\arcsin x) = x,\ -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}.$$

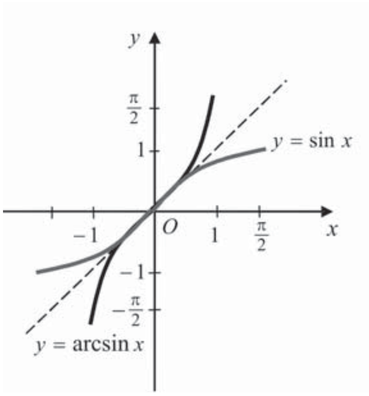


Рис. 17

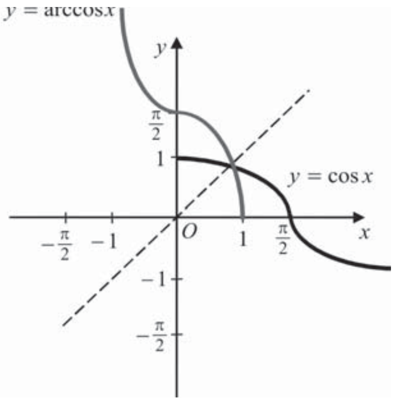


Рис. 18

П р и м е р 1. Найти $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Р е ш е н и е. Так как $\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{3}\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, то

$$\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}.$$

П р и м е р 2. Найти $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Р е ш е н и е. Имеем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=-\arcsin\frac{1}{2}=-\frac{\pi}{6}$.

б) Арккосинус. Рассмотрим функцию $y = \cos x$ на промежутке $[0; \pi]$. На этом промежутке функция монотонно убывает, принимая значения от 1 до −1. Следовательно, существует обратная функция, определенная и монотонно убывающая на отрезке $[-1; 1]$. Обратная функция обозначается $x = \arccos y$, $y\in[-1; 1]$ или, в обычных обозначениях, в виде

$$y = \arccos x,\ x\in[-1; 1].$$

График функции $y = \arccos x$ можно получить из графика функции $y = \cos x$, $0 \le x \le \pi$ зеркальным отражением последнего относительно биссектрисы I и III координатных углов (рис. 18).

Перечислим свойства функции $y = \arccos x$:

1) функция определена и непрерывна на отрезке $[-1; 1]$;

2) функция монотонно убывает на $[-1; 1]$;

3) функция не является четной и не является нечетной;
4) областью значений функции является отрезок $[0; \pi]$;
5) для любого $x \in [-1; 1]$ справедливо равенство

$$\cos(\arccos x) = x,\ 0 \le \arccos x \le \pi.$$

Пример 3. Найти $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. Так как $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ и $\frac{\pi}{6} \in [0; \pi]$, то $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$.

Пример 4. Найти $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Решение. Так как $\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ и $\frac{3\pi}{4} \in [0; \pi]$, то

$$\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{3\pi}{4}.$$

в) Арктангенс и арккотангенс.

А) Рассмотрим функцию $y = \operatorname{tg} x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Она монотонно возрастает на этом интервале, принимая все действительные значения. Следовательно, существует обратная функция, которая определена на всей числовой оси. Обратная функция монотонно возрастает, принимая значения из интервала $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Ее обозначают символом $x = \operatorname{arctg} y$, $y \in (-\infty; +\infty)$ или, в обычных обозначениях, в виде

$$y = \operatorname{arctg} x,\quad x \in (-\infty; +\infty).$$

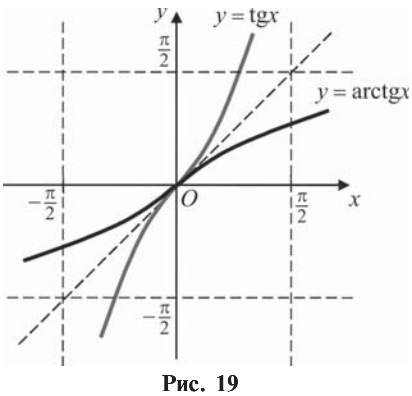


Рис. 19

График функции (рис. 19) может быть получен зеркальным отражением относительно биссектрисы I и III координатных углов ветки тангенсоиды, соответствующей интервалу $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Перечислим некоторые свойства функции $y = \operatorname{arctg} x$:

1) функция определена и непрерывна на всем интервале $(-\infty; +\infty)$;

2) функция монотонно возрастает на $(-\infty; +\infty)$;

3) функция является нечетной;

4) областью значений функции является интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

5) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x$ для любого действительного значения x, а $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при условии $|x| < \frac{\pi}{2}$.

Пример 5.

а) $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$, так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1$ и $\frac{\pi}{4} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

б) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = -\sqrt{3}$ и $-\frac{\pi}{3} \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Б) Функция $y = \operatorname{ctg} x$ монотонно убывает на интервале $(0; \pi)$, принимая все действительные значения. Следовательно, существует обратная к ней функция, определенная на всей числовой оси. Обратная функция монотонно убывает, принимая значения из интервала $(0; \pi)$. Ее обозначают символом $x = \operatorname{arcctg} y$, $y \in (-\infty; +\infty)$ или, в обычных обозначениях,

$$y = \operatorname{arcctg} x,\ x \in (-\infty; +\infty).$$

График функции $y = \operatorname{arcctg} x$ изображен на рис. 20. Перечислим некоторые ее свойства:

1) функция определена и непрерывна на всем интервале $(-\infty; +\infty)$;

2) функция монотонно убывает на $(-\infty; +\infty)$;

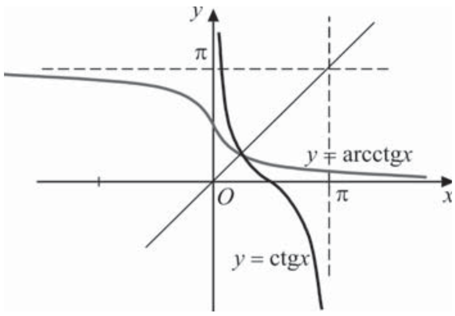


Рис. 20

3) функция не является четной и не является нечетной;

4) областью значений функции является интервал $(0;\ \pi)$;

5) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} x) = x$ для любого значения x, а $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x) = x$ при условии $0 < x < \pi$.

Пример 6. $\operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{3}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\frac{\pi}{3} \in (0;\ \pi)$;

$\operatorname{arcctg}(-\sqrt{3}) = \frac{5\pi}{6}$, так как $\operatorname{ctg}\frac{5\pi}{6} = -\sqrt{3}$ и $\frac{5\pi}{6} \in (0;\ \pi)$.

2. Преобразование выражений, содержащих обратные тригонометрические функции. При преобразовании выражений, содержащих обратные тригонометрические функции, полезно использовать следующие соотношения:

$$\left.\begin{aligned}
&\arcsin(-x) = -\arcsin x, && -\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2},\\
&\arccos(-x) = \pi - \arccos x, && 0 \le \arccos x \le \pi,\\
&\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x, && -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} x < \frac{\pi}{2},\\
&\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x, && 0 < \operatorname{arcctg} x < \pi,
\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad -1 \le x \le 1, \tag{2}$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2}, \quad -\infty < x < +\infty. \tag{3}$$

Докажем одно из них, например, (2). Достаточно показать, что $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arccos x$. Для этого вычислим значения синусов от обеих частей последнего равенства. Имеем

$$\sin(\arcsin x) = x,$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) = \cos(\arccos x) = x.$$

Так как значения синусов равны, то остается показать, что значения $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ принадлежат одному и тому же промежутку монотонности функции $y = \sin x$. Имеем

$$-\frac{\pi}{2} \le \arcsin x \le \frac{\pi}{2}, \quad 0 \le \arccos x \le \pi.$$

Отсюда $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arccos x \le \frac{\pi}{2}$, т.е. $\arcsin x$ и $\frac{\pi}{2} - \arccos x$ принадлежат отрезку $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

П р и м е р 7. Упростить выражение:

а) $\cos(\arcsin x)$, где $-1 \le x \le 1$; б) $\sin(\operatorname{arctg} x)$.

Р е ш е н и е. а) Положим, $\arcsin x = y$. Тогда $\sin y = x$, $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$. Известно, что $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Значит, $\cos^2 y = 1 - x^2$. Так как $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$, то $\cos y \ge 0$. Поэтому

$$\cos y = \sqrt{1 - x^2} \text{ или } \cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}, \text{ где } -1 \le x \le 1.$$

б) Положим, $\operatorname{arctg} x = y$. Тогда $\operatorname{tg} y = x$, $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$. Найдем $\sin y$. Известно, что $1 + \operatorname{tg}^2 y = \frac{1}{\cos^2 y}$. Отсюда $\cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y}$. Так как $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$, то $\cos y > 0$. Поэтому $\cos y = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 y}}$ или $\cos(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$. Следовательно,

$$\sin(\operatorname{arctg} x) = \sin y = \operatorname{tg} y \cdot \cos y = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.$$

П р и м е р 8. Найти область определения функции:

а) $y = \arcsin \frac{2x}{x-1}$; б) $y = \sqrt{\pi - 4\arccos \frac{x}{2}}$.

Р е ш е н и е. а) Арксинус определен для всех значений аргумента, не превосходящих по абсолютной величине единицы. Следовательно, $-1 \le \frac{2x}{x-1} \le 1$. Решая эти неравенства, находим $-1 \le x \le \frac{1}{3}$. Следовательно, область определения функции $y = \arcsin \frac{2x}{x-1}$ есть отрезок $\left[-1; \frac{1}{3}\right]$.

б) Область определения данной функции состоит из всех значений x, для которых $-1 \le \frac{x}{2} \le 1$ и $\pi - 4\arccos\frac{x}{2} \ge 0$. Поэтому $|x| \le 2$ и $\arccos\frac{x}{2} \le \frac{\pi}{4}$. Учитывая, что $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$, имеем $\arccos\frac{x}{2} \le \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$. Так как функция $y = \arccos x$ монотонно убывает в своей области определения, то имеем $1 \ge \frac{x}{2} \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$. Отсюда $\sqrt{2} \le x \le 2$. Полученное множество содержится в отрезке $[-2;\ 2]$. Поэтому областью определения $y = \sqrt{\pi - 4\arccos\frac{x}{2}}$ является отрезок $[\sqrt{2};\ 2]$.

Пример 9. Вычислить: а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6)$; б) $\arccos[\sin(-3)]$.

Решение. а) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x) = x$ при $|x| < \frac{\pi}{2}$. Используя свойство периодичности, имеем $\operatorname{tg}6 = \operatorname{tg}(6 - 2\pi)$, причем $-\frac{\pi}{2} < 6 - 2\pi < 0$. Поэтому $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}6) = \operatorname{arctg}[\operatorname{tg}(6 - 2\pi)] = 6 - 2\pi$.

б) $\arccos(\cos x) = x$ при $0 \le x \le \pi$. Имеет место равенство $\sin(-3) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\right)$. Но $\frac{\pi}{2} + 3 > \pi$. Поэтому используем формулу $\cos\alpha = -\cos(\alpha - \pi)$. Имеем

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{2} + 3 - \pi\right) = -\cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right), \text{ причем } 0 < 3 - \frac{\pi}{2} < \pi.$$

Отсюда

$$\arccos[\sin(-3)] = \arccos\left[-\cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right)\right] = \pi - \arccos\left[\cos\left(3 - \frac{\pi}{2}\right)\right] =$$
$$= \pi - \left(3 - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi}{2} - 3.$$

Пример 10. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}\left[2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right]$; б) $\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3$.

Р е ш е н и е . а) Обозначив $\alpha = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, имеем $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$, где $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Таким образом, задача свелась к отысканию tg2α при условиях $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ и $\cos\alpha = -\frac{2}{3}$. Имеем

$$\operatorname{tg}2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{-2\sqrt{\frac{1}{\cos^2\alpha}-1}}{1-\left(\frac{1}{\cos^2\alpha}-1\right)} = \frac{-2\cdot\frac{\sqrt{5}}{2}}{1-\frac{5}{4}} = 4\sqrt{5}.$$

Перед радикалом взят знак минус, поскольку $\operatorname{tg}\alpha < 0$ при $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Таким образом,

$$\operatorname{tg}\left[2\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)\right] = 4\sqrt{5}.$$

б) Обозначим искомую величину через A, т.е. arctg2 + + arctg3 = A. Тогда

$$\operatorname{tg}A = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3) = \frac{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)+\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)}{1-\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}2)\cdot\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}3)} = \frac{2+3}{1-2\cdot3} = -1.$$

Так как $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}2 < \frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{4} < \operatorname{arctg}3 < \frac{\pi}{2}$, то $\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 < \pi$, т.е. $\frac{\pi}{2} < A < \pi$. Отсюда и из равенства $\operatorname{tg}A = -1$ вытекает, что $A = \frac{3\pi}{4}$. Поэтому $\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}3 = \frac{3\pi}{4}$.

При преобразовании выражений, содержащих тригонометрические и обратные тригонометрические функции, бывает полезной следующая таблица:

	arcsin x	arccos x	arctg x	arcctg x
sin	x	$\pm\sqrt{1-x^2}$	$\frac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}$
cos	$\pm\sqrt{1-x^2}$	x	$\frac{1}{\pm\sqrt{1+x^2}}$	$\frac{x}{\pm\sqrt{1+x^2}}$
tg	$\frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$	x	$\frac{1}{x}$
ctg	$\frac{\pm\sqrt{1-x^2}}{x}$	$\frac{x}{\pm\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{x}$	x

П р и м е р 11. Найти значение выражения:

а) $\sin\left(2\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)$; б) $\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$.

Р е ш е н и е. а) Используя формулу синуса двойного угла и таблицу, получаем

$$\sin\left(2\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=2\sin\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)\cdot\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)=$$

$$=2\sqrt{1-\cos^2\left(\arccos\left(-\frac{3}{5}\right)\right)}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=2\sqrt{1-\frac{9}{25}}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=2\cdot\frac{4}{5}\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)=-\frac{24}{25}.$$

б) Используя формулу косинуса двойного угла и таблицу, получаем

$$\cos\left(2\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=\cos^2\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)-\sin^2\left(\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\right)^2-\left(\frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{3}\right)^2}}\right)^2=\frac{9}{10}-\frac{9}{9\cdot 10}=\frac{4}{5}.$$

П р и м е р 12. Проверить равенства:

а) $\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\frac{9\pi}{14}$; б) $\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)=-\frac{\pi}{10}$.

Р е ш е н и е. а) Рассматривая обе части как аргументы функции $y=\cos x$ и используя свойства этой функции, имеем слева: $\cos\arccos\left(\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{7}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{9\pi}{14}\right)=\cos\frac{9\pi}{14}$.

Справа также имеем $\cos\frac{9\pi}{14}$. Следовательно, равенство а) является справедливым.

б) Рассматривая обе части как аргументы функции $y=\sin x$ и используя свойства этой функции, имеем слева:

$$\sin\left(\arcsin\left(\cos\frac{33\pi}{5}\right)\right)=\cos\frac{33\pi}{5}=\cos\left(\frac{30\pi}{5}+\frac{3\pi}{5}\right)=\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right).$$

Справа также имеем $\sin\left(-\frac{\pi}{10}\right)$. Значит, равенство б) является верным.

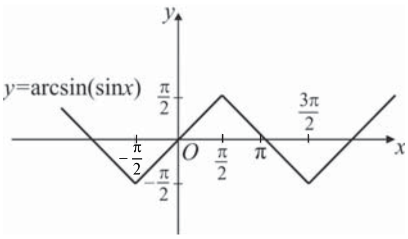


Рис. 21

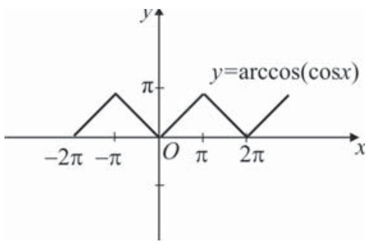
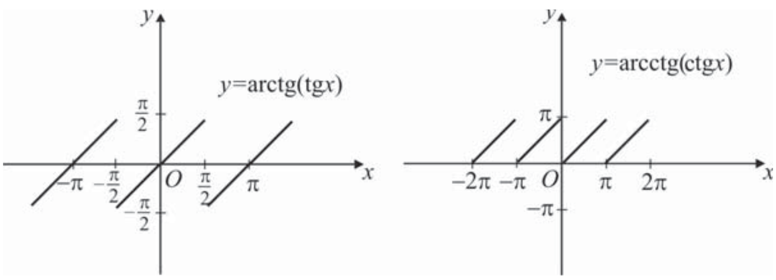


Рис. 22



а *б*

Рис. 23

В заключение приведем графики функций $y = \arcsin(\sin x)$, $y = \arccos(\cos x)$, $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$.

Графики функций $y = \arcsin(\sin x)$ и $y = \arccos(\cos x)$ изображены на рисунках 21, 22.

Графики функций $y = \operatorname{arctg}(\operatorname{tg} x)$ и $y = \operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg} x)$ изображены на рисунках 23, *а, б.*

Вопросы и задания

1. Назвать обратные тригонометрические функции.

2. Перечислить свойства обратных тригонометрических функций.

3. Как получить графики обратных тригонометрических функций?

4. Нарисовать графики обратных тригонометрических функций.

Упражнения

Вычислить (**1–6**):

1. а) $\arcsin 0$; в) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; д) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\arcsin\frac{1}{2}$; г) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$; е) $\arcsin 1$.

2. а) $\arccos 0$; в) $\arccos\frac{1}{2}$; д) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; е) $\arccos 1$.

3. а) $\operatorname{arctg} 1$; в) $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3})$; д) $\operatorname{arcctg} 0$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$; е) $\operatorname{arcctg}(-1)$.

4. а) $\arcsin 1 + \arcsin(-1)$; в) $2\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} + 4\arcsin\frac{1}{2}$;

б) $4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} - 2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$; г) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

5. а) $2\arccos 1 + 3\arccos 0$; в) $6\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} - 3\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$;

б) $2\arccos(-1) - 3\arccos 0$; г) $2\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 4\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

6. а) $3\operatorname{arctg}\sqrt{3} + 3\arccos\frac{1}{2}$; в) $3\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 2\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$;

б) $2\operatorname{arcctg} 1 + 3\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$; г) $5\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) - 3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

7. Выяснить, имеют ли смысл выражения:

а) $\arccos(\sqrt{8} - 3)$; г) $\arcsin(2 - \sqrt{15})$;

б) $\arccos(3 - \sqrt{18})$; д) $\operatorname{tg}\left(2\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

в) $\arcsin(\sqrt{6} - 2)$; е) $\operatorname{tg}\left(3\arccos\frac{1}{2}\right)$.

8. Используя равенство cos (arccos a) = a при $-1 \le a \le 1$, вычислить:

а) $\cos(\arccos 0{,}3)$; в) $\sin\left(\arccos\frac{3}{5}\right)$;

б) $\cos\left(\arccos\left(-\frac{3}{4}\right)\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\arccos\left(-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)\right)$.

9. Используя равенство sin(arcsin$a$) = a при $-1 \le a \le 1$, вычислить:

а) $\sin\left(\arcsin\frac{3}{7}\right)$; в) $\cos\left(\arcsin\frac{3}{5}\right)$;

б) $\sin\left(\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$.

---

10. Используя равенство tg(arctg a) = a при любом a, вычислить:

а) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} 3{,}5)$; в) $\operatorname{tg}(\pi - \operatorname{arctg}5)$;

б) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}(-0{,}5))$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \operatorname{arctg}7\right)$.

11. Найти значение выражения:

а) $\cos\left(\arccos\frac{\sqrt{2}}{2} - \arcsin\frac{1}{2}\right)$; в) $\sin\left(\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$;

б) $\sin\left(\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + \arcsin 1\right)$; г) $\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{arctg}\sqrt{3}\right)$.

12. Найти значение выражения:

а) $\operatorname{tg}2\left(\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; в) $\sin\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$;

б) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}2 + \operatorname{arctg}\frac{1}{2}\right)$; г) $\cos\left(\operatorname{arctg}\sqrt{3} + \arccos\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$.

13. Проверить равенство:

а) $\arcsin\frac{3}{5} + \operatorname{arctg}\frac{3}{5} = \operatorname{arctg}\frac{27}{11}$;

б) $\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \operatorname{arctg}\frac{1}{7} + \operatorname{arctg}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$.

§ 8. Тригонометрические уравнения и неравенства

1. Решение простейших тригонометрических уравнений. Выведем формулы для решения простейших тригонометрических уравнений, т.е. уравнений вида $T(x) = a$, где $T(x)$ – некоторая тригонометрическая функция.

А) Рассмотрим сначала уравнение $\sin x = a$, где $-1 \le a \le 1$. Используем график функции (рис. 24) и проведем прямую $y = a$. Если $|a| > 1$, то ввиду того, что $|\sin x| \le 1$, уравнение $\sin x = a$ не имеет решения, т.е. синусоида и прямая не имеют общих точек.

Пусть $0 < a < 1$. Тогда на промежутке $[0; 2\pi]$ данное уравнение имеет два корня (см. рис. 24), т.е. синусоида $y = \sin x$ и прямая $y = a$ на $[0; 2\pi]$ имеют две точки пересечения с абсциссами x_0 и x_1, причем $x_1 = \pi - x_0$.

Из рассуждений, приведенных в § 7, следует, что $x_0 = \arcsin a$, а $x_1 = \pi - \arcsin a$. Объединяя эти корни в одну формулу, имеем

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n = 0,\ 1. \tag{1}$$

Действительно, при $n = 0$ из формулы (1) получаем $x = \arcsin a$, а при $n = 1$ имеем $x = \pi - \arcsin a$.

В силу периодичности функции $y = \sin x$ для нахождения множества всех корней заданного уравнения, к каждому из найденных корней следует прибавить числа вида $2\pi k$, где $k \in Z$. Поэтому решение уравнения $\sin x = a$ можно записать в общем виде как

$$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z. \tag{2}$$

Пример 1. Решить уравнение $\sin x = \frac{1}{2}$.

Решение. Согласно формуле (2) имеем решение

$$x = (-1)^k \arcsin\frac{1}{2} + \pi k = (-1)^k \frac{\pi}{6} + \pi k,\ k \in Z.$$

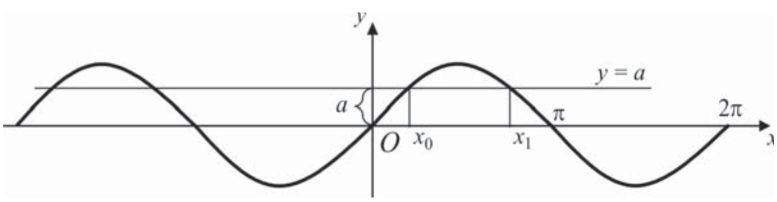


Рис. 24

П р и м е р 2. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{12}-\frac{x}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Р е ш е н и е. Используем равенство $\sin\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Тогда по формуле (2) имеем $\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k \arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\pi k,\ k\in Z$.

Так как $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$, то

$$\frac{x}{2}-\frac{\pi}{12}=(-1)^k\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\pi k,\ \text{или}\ x=\frac{\pi}{6}+(-1)^{k+1}\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Отметим следующие важные частные случаи уравнения $\sin x = a$:

Если $a = 1$, решение уравнения удобно записывать в виде

$$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Если $a = -1$, решение соответствующего уравнения записывают в виде

$$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\quad k\in Z.$$

Если $a = 0$, решение соответствующего уравнения имеет вид

$$x = \pi k,\quad k\in Z.$$

П р и м е р 3. Решить уравнение $\sin\left(\frac{\pi}{10}-\frac{x}{2}\right)=0$.

Р е ш е н и е. Имеем $-\frac{\pi}{10}+\frac{x}{2}=\pi k,\ \frac{x}{2}=\pi k+\frac{\pi}{10}$. Откуда $x=\frac{\pi}{5}+2\pi k,\ k\in Z$.

Решение уравнения $\sin x = a$ удобно иллюстрировать на единичной окружности. По определению $\sin x$ есть ордината точки A_x единичной окружности. Если $|a| < 1$, то таких точек на окружности две (рис. 25), при $a = \pm 1$ — одна.

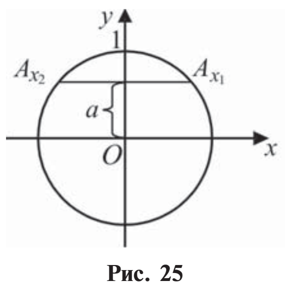


Рис. 25

Б) Рассмотрим уравнение $\cos x = a$. Если $|a| > 1$, уравнение $\cos x = a$ не имеет решения, поскольку $|\cos x| \le 1$ для любого x. Пусть $|a| \le 1$. Тогда на отрезке $[0; \pi]$ существует в точности один корень уравнения $\cos x = a$ — это число $\arccos a$.

Функция $y = \cos x$ является четной, и поэтому на отрезке $[-\pi; 0]$ уравнение $\cos x = a$ также имеет в точности один корень. Это $x = -\arccos a$. Таким образом, уравнение $\cos x = a$ на отрезке $[-\pi; \pi]$ длиной 2π имеет два корня: $x = \pm\arccos a$ (совпадающие при $a = 1$).

Так как функция $y = \cos x$ периодическая с периодом 2π, все остальные корни будут отличаться от найденных на $2\pi k$ ($k \in Z$). Следовательно, формула решения уравнения $\cos x = a$ имеет вид

$$x = \pm \arccos a + 2\pi k, \ k \in Z. \qquad (3)$$

Пример 4. Решить уравнение $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Решение. По формуле (3) находим $x = \pm\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\pi k$, $k \in Z$. Поскольку $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, приходим к результату $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in Z$.

Проиллюстрируем решение уравнения $\cos x = a$ на единичной окружности. По определению $\cos x$ — это абсцисса точки A_x единичной окружности. Если $|a| < 1$, то таких точек на окружности две — A_{x_1} и A_{x_2} (рис. 26). Если же $a = 1$ или $a = -1$, то точка одна.

При $a = 1$ числа $\arccos a$ и $-\arccos a$ совпадают (они равны нулю), поэтому решение уравнения $\cos x = 1$ принято записывать в виде

$$x = 2\pi k, \ k \in Z.$$

Особая форма записи решения уравнения $\cos x = a$ принята также при $a = -1$ и $a = 0$:

$$\cos x = -1 \ \Rightarrow \ x = \pi + 2\pi k, \ k \in Z;$$

$$\cos x = 0 \ \Rightarrow \ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, \ k \in Z.$$

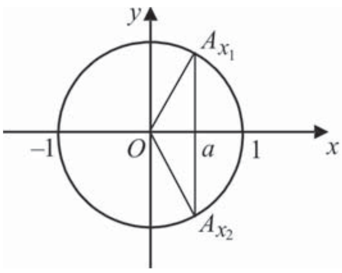


Рис. 26

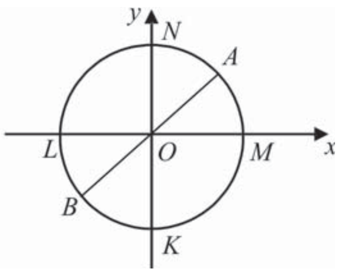


Рис. 27

П р и м е р 5. Решить уравнение $\cos\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Р е ш е н и е. Согласно форме записи решения уравнения $\cos x = 0$, имеем $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Решая это уравнение относительно x, получаем $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$.

В) Рассмотрим уравнение $\mathrm{tg} x = a$. Так как $\mathrm{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$, т.е. $\mathrm{tg} x$ равен отношению ординаты точки A числовой окружности к ее абсциссе, то найдем сначала точки окружности, для которых $\frac{y}{x} = a$. Эти точки лежат на пересечении окружности с прямой $y = ax$. Тогда мы получаем две диаметрально противоположные точки A и B, одна из которых (A) лежит на полуокружности KMN, а вторая (B) — на полуокружности NLK (рис. 27). Точка A будет соответствовать числам вида $\mathrm{arctg} a + 2\pi k$, а точка B — числам вида $\mathrm{arctg} a + \pi + 2\pi k$. Эти две формулы можно объединить в одну: $\mathrm{arctg} a + \pi n$, $n \in Z$.

Таким образом, решение уравнения $\mathrm{tg} x = a$ имеет вид

$$x = \mathrm{arctg} a + \pi n, \; n \in Z. \tag{4}$$

Аналогично для уравнения $\mathrm{ctg} x = a$ получаем решение

$$x = \mathrm{arcctg} a + \pi n, \; n \in Z. \tag{5}$$

П р и м е р 6. Решить уравнение $\mathrm{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$.

Р е ш е н и е. Используя формулу (4), имеем

$$x - \frac{\pi}{6} = \mathrm{arctg}(-\sqrt{3}) + \pi n.$$

Так как $\operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\operatorname{arctg}(\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}$, то отсюда получаем

$$x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + \pi n \text{, или } x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z.$$

Пример 7. Решить уравнение $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Решение. Используя формулу (5), имеем

$$x = \operatorname{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}} + \pi n \text{, или } x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z.$$

Приведем таблицу стандартных формул решений простейших тригонометрических уравнений на множестве действительных чисел:

Уравнение	**Формула решения**	**Примечания**
$\sin x = a$	$x = (-1)^k \arcsin a + \pi k,\ k \in Z$	$\arcsin(-a) = -\arcsin a,\ \lvert a\rvert \le 1$
$\cos x = a$	$x = \pm \arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$	$\arccos(-a) = \pi - \arccos a,\ \lvert a\rvert \le 1$
$\operatorname{tg} x = a$	$x = \operatorname{arctg} a + \pi k,\ k \in Z$	$\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a,\ a \in R$
$\operatorname{ctg} x = a$	$x = \operatorname{arcctg} a + \pi k,\ k \in Z$	$\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a,\ a \in R$

2. Основные типы и методы решения тригонометрических уравнений. К тригонометрическим уравнениям применяются те же методы, что и к алгебраическим уравнениям, а именно: введение новой переменной, умножение на некоторый множитель и другие.

Рассмотрим следующие типы тригонометрических уравнений и методы их решения:

а) *Уравнение* $Q(f(x)) = 0$.

Для нахождения x произведем замену $f(x) = z$. Тогда получим $Q(z) = 0$. Решая последнее уравнение, находим его корень $z = z_1$, затем из уравнения $f(x) = z_1$ находим искомое значение x.

Пример 8. Решить уравнение $\cos\left(10x + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{2}$.

Решение. Обозначим $10x + \frac{\pi}{8} = z$. Тогда получим уравнение $\cos z = \frac{1}{2}$. Его решение имеет вид $z = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k,\ k \in Z$. Решая теперь уравнения $10x + \frac{\pi}{8} = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi k$, находим

$$x = \frac{1}{10}\left(-\frac{\pi}{8} \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k\right),\ k \in Z\,.$$

б) *Уравнения* $\sin x = \sin y$, $\cos x = \cos y$, $\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,y$. Решение этих уравнений основано на равенствах $x = (-1)^k y + \pi k$, $k \in Z$, $x = \pm y + 2\pi n$, $n \in Z$ и $x = y + m\pi$, $m \in Z$ соответственно.

Пример 9. Решить уравнение $\cos(3x - 40°) = \cos(2x + 60°)$.

Решение. Имеем равенства $3x - 40° = \pm(2x + 60°) + 360°n$, где $n \in Z$. Решая эти уравнения, находим:

$3x - 40° = 2x + 60° + 360°n \Rightarrow x = 100° + 360°n$, $n \in Z$;

$3x - 40° = -2x - 60° + 360°n$, $5x = -20° + 360°n \Rightarrow$
$\Rightarrow x = -4° + 72°n$, $n \in Z$.

в) *Уравнение* $f(R(x)) = 0$, где $R(x)$ — тригонометрическая функция аргументов $\sin x$, $\cos x$ или $\mathrm{tg}\,x$. Такое уравнение заменой $R(x) = z$ сводится к алгебраическому уравнению. Решив алгебраическое уравнение, находим его корни z_1, z_2, ..., затем из уравнений $R(x) = z_1$, $R(x) = z_2$, ... находим искомые значения x.

Пример 10. Решить уравнение $\sin^2 x + 3\sin x + 2 = 0$.

Решение. Обозначим $\sin x = z$. Тогда получим уравнение $z^2 + 3z + 2 = 0$. Решив это квадратное уравнение, получаем корни $z_1 = -2$, $z_2 = -1$. Уравнение $\sin x = -2$ не имеет решения, а уравнение $\sin x = -1$ имеет решение $x = 270° + 360°k$, $k \in Z$. Следовательно, общее решение заданного уравнения имеет вид

$x = 270° + 360°k$, где $k \in Z$, или, что то же,
$x = -90° + 360° \cdot n$, где $n \in Z$.

г) *Уравнение, содержащее выражение, разлагаемое на множители.*

Пример 11. Решить уравнение

$$2\sin x - 2\sin 2x - 2\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2} = 0.$$

Решение. Сделаем замену $\sin 2x = 2\sin x \cos x$. Тогда уравнение примет вид

$$2\sin x - 4\sin x\cos x - 2\sqrt{2}\cos x + \sqrt{2} = 0.$$

Разложив левую часть уравнения на множители, получим

$2\sin x\,(1 - 2\cos x) + \sqrt{2}\,(1 - 2\cos x) = 0$, или
$(1 - 2\cos x)(2\sin x + \sqrt{2}) = 0$.

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} 1-2\cos x=0 \Rightarrow \cos x=\frac{1}{2}, \\ 2\sin x+\sqrt{2}=0 \Rightarrow \sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}. \end{array}\right.$$

Решив уравнения $\cos x=\frac{1}{2}$ и $\sin x=-\frac{\sqrt{2}}{2}$, находим все корни:

$$x_1=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi n,\ \ x_2=(-1)^{k+1}\cdot\frac{\pi}{4}+\pi k,\ \text{где}\ n,\ k\in Z.$$

д) *Сведение к одной тригонометрической функции.* Если заданное уравнение содержит тригонометрические функции нескольких видов, то их следует свести к одному виду.

Пример 12. Решить уравнение:

$$3\sin^2 x + 2\sin x + 2\cos^2 x - 5 = 0.$$

Решение. Произведем замену $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$. Тогда заданное уравнение примет вид

$$3\sin^2 x + 2\sin x + 2 - 2\sin^2 x - 5 = 0, \text{ или } \sin^2 x + 2\sin x - 3 = 0.$$

Получили квадратное уравнение относительно $\sin x$. Теперь, делая замену $\sin x = z$, решаем уравнение $z^2 + 2z - 3 = 0$. Его корнями являются: $z_1 = -3$, $z_2 = 1$. Уравнение $\sin x = -3$ не имеет решения, а для уравнения $\sin x = 1$ получаем $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$. Следовательно, решение исходного уравнения имеет вид $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$.

е) *Однородное уравнение.* Тригонометрическое уравнение $R(\sin x; \cos x) = 0$ называется *однородным*, если $R(\lambda\sin x; \lambda\cos x) = \lambda^n R(\sin x; \cos x)$ для некоторого $n\in N$. Такое уравнение делением на $\cos^n x$ или $\sin^n x$ сводится к уравнению вида $R(\operatorname{tg} x) = 0$ или $R(\operatorname{ctg} x) = 0$.

Пример 13. Решить уравнение

$$\sin^2 x + 2\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0.$$

Решение. Заданное уравнение является однородным ($n = 2$). Если в этом уравнении $\cos x = 0$, то и $\sin x = 0$, что невозможно. Поэтому $\cos x \neq 0$. Разделив все члены уравнения на $\cos^2 x$, получим квадратное уравнение относительно $\mathrm{tg}x$:

$$\mathrm{tg}^2 x + 2\mathrm{tg}x - 3 = 0.$$

Решив его, имеем:

а) $\mathrm{tg}x = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $\mathrm{tg}x = -3 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \mathrm{arctg}(-3) + \pi n = -\mathrm{arctg}3 + \pi n,\ \ n \in Z$.

Ответ: $\frac{\pi}{4} + \pi n$; $-\mathrm{arctg}3 + \pi n$, где $n \in Z$.

Пример 14. Решить уравнение

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 2.$$

Решение. Приведем заданное уравнение к однородному виду. Для этого умножим правую часть уравнения на тригонометрическую единицу. Тогда получим

$$5\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 4\cos^2 x = 2\cos^2 x + 2\sin^2 x.$$

После преобразований получаем однородное уравнение

$$3\sin^2 x + 3\sin x \cos x - 6\cos^2 x = 0,$$

которое делением на $3\cos^2 x \neq 0$ сводится к виду $\mathrm{tg}^2 x + \mathrm{tg}x - 2 = 0$. Решая последнее, получим:

а) $\mathrm{tg}x_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

б) $\mathrm{tg}x_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\mathrm{arctg}2 + \pi n,\ \ n \in Z$.

ж) *Уравнение, содержащее аргументы* $2x$, $3x$ и т. д. Для решения указанного уравнения следует применять формулы двойного, тройного и т. д. аргументов.

Пример 15. Решить уравнение

$$2\sin 2x \cos x - \sin 3x + 3\sin x - 2 = 0.$$

Решение. Используя формулы $\sin 2x = 2\sin x \cos x$, $\sin 3x = 3\sin x - 4\sin^3 x$, $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, заданное уравнение сведем к виду

$$2 \cdot 2(1 - \sin^2 x)\sin x - 3\sin x + 4\sin^3 x + 3\sin x - 2 = 0.$$

Откуда $4\sin x - 2 = 0$. Следовательно, $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$.

з) *Уравнение* $a\sin x \pm b\cos x = c$ $(c \neq 0)$. Такое уравнение решается с помощью формулы (14) (см. § 6).

П р и м е р 16. Решить уравнение $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2$.

Р е ш е н и е. Применяя формулу (14) из § 6, получаем

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 1 \Rightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z.$$

и) *Уравнение* $p(\sin x \pm \cos x, \sin x\cos x) = 0$. Данное уравнение решается с помощью замены $\sin x \pm \cos x = t$.

П р и м е р 17. Решить уравнение

$$2(\sin x + \cos x) + \sin 2x + 1 = 0.$$

Р е ш е н и е. Запишем данное уравнение в виде

$$2(\sin x + \cos x) + (\sin x + \cos x)^2 = 0.$$

Теперь сделаем замену $\sin x + \cos x = t$. Тогда имеем $t^2 + 2t = 0$. Решая последнее уравнение, получим $t_1 = 0$, $t_2 = -2$. Отсюда

1) $\sin x + \cos x = 0 \Rightarrow \operatorname{tg} x = -1 \Rightarrow x = \frac{-\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$;

2) уравнение $\sin x + \cos x = -2$ не имеет корней.

Следовательно, решение исходного уравнения имеет вид $x = \frac{-\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

к) *Уравнение* $R(\sin x; \cos x) = 0$ с помощью формул

$$\sin x = \frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}, \qquad \cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$$

и замены $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$ приводится к рациональному уравнению $R\left(\frac{2z}{1+z^2}; \frac{1-z^2}{1+z^2}\right) = 0$.

П р и м е р 18. Решить уравнение $4\sin x - 7\cos x = 7$.

Р е ш е н и е. Сделаем замены: $\sin x = \frac{2z}{1+z^2}$, $\cos x = \frac{1-z^2}{1+z^2}$, где $z = \operatorname{tg}\frac{x}{2}$. Тогда имеем

$$4\frac{2z}{1+z^2}-7\frac{1-z^2}{1+z^2}-7=0 \Rightarrow 8z-7+7z^2-7-7z^2=0$$

или $8z = 14$. Откуда $z=\frac{7}{4}$.

Подставляя вместо z найденное значение, имеем уравнение $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{7}{4}$. Решив его, находим $x=2\operatorname{arctg}\frac{7}{4}+2\pi n$.

Решим еще несколько уравнений, не относящихся к рассмотренным выше типам.

Пример 19. Решить уравнение $3\sin x + 4\cos x = 6$.

Решение. Так как $\frac{6}{\sqrt{3^2+4^2}}>1$, то данное уравнение не имеет решения.

Пример 20. Решить уравнение $\cos 3x + \cos 4x + \cos x = 3$.

Решение. Так как $|\cos kx| \le 1$, то в заданном уравнении левая часть равна 3 только в случае $\cos x = 1$, $\cos 3x = 1$ и $\cos 4x = 1$. Указанные равенства могут быть выполнены одновременно только при $x = 2\pi n$, $n \in Z$.

Пример 21. Решить уравнение $1 - \cos^2 x + \sin^2 3x = 0$.

Решение. Запишем уравнение в виде $\sin^2 x + \sin^2 3x = 0$. Сумма квадратов чисел равна нулю только в том случае, когда каждое слагаемое равно нулю: $\sin x = 0$, $\sin 3x = 0$. Отсюда $x_1 = \pi k$ и $x_2=\frac{\pi k}{3}$, $k \in Z$. Общее решение уравнения можно записать как $x = \pi k$, $k \in Z$.

3. Решение тригонометрических систем уравнений. При решении систем тригонометрических уравнений обычно используют метод сведения к одному уравнению с одним неизвестным, либо систему сводят к алгебраической системе уравнений относительно самих аргументов или функций этих аргументов.

Пример 22. Решить систему $\begin{cases} 2\sin x = \sin y, \\ 2\cos x = 1-\cos y. \end{cases}$

Решение. Данную систему можно записать в виде $\begin{cases} 2\sin x = \sin y, \\ 1-2\cos x = \cos y. \end{cases}$ Возведем в квадрат каждую часть обоих уравнений системы, а затем полученные равенства почленно сложим:

$4\sin^2 x + 1 - 4\cos x + 4\cos^2 x = 1 \Rightarrow 4 - 4\cos x = 0$, или $\cos x = 1$.

Отсюда имеем $x = 2\pi n$, $y = (2k + 1)\pi$, $n, k \in Z$.

Пример 23. Решить систему $\begin{cases} \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y = \dfrac{1}{3}, \\ x + y = \dfrac{\pi}{3}. \end{cases}$

1-й способ. Сведем данную систему к одному уравнению, подставляя в первое уравнение $y = \dfrac{\pi}{3} - x$. Тогда имеем $\mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{3} - x\right) = \dfrac{1}{3}$. Это уравнение равносильно уравнению

$$\mathrm{tg}x\,\frac{\sqrt{3}-\mathrm{tg}x}{1+\sqrt{3}\mathrm{tg}x} = \frac{1}{3}, \text{ или } (\sqrt{3}\mathrm{tg}x - 1)^2 = 0,$$

(знаменатель $1 + \sqrt{3}\mathrm{tg}x \neq 0$). Отсюда получаем $x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $y = \dfrac{\pi}{6} - \pi n$, $n \in Z$.

2-й способ. Так как $x + y = \dfrac{\pi}{3}$, то $\mathrm{tg}(x + y) = \sqrt{3}$. Отсюда

$$\frac{\mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y}{1 - \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y} = \sqrt{3} \Rightarrow \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \left(1 - \frac{1}{3}\right)\sqrt{3} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

Таким образом, получаем систему

$$\begin{cases} \mathrm{tg}x + \mathrm{tg}y = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}, \\ \mathrm{tg}x\,\mathrm{tg}y = \dfrac{1}{3}. \end{cases}$$

Тогда $\mathrm{tg}x$ и $\mathrm{tg}y$ являются корнями уравнения

$$z^2 - \frac{2\sqrt{3}}{3}z + \frac{1}{3} = 0.$$

Решая это уравнение, находим $\mathrm{tg}x = \mathrm{tg}y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Откуда $x = \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $y = \dfrac{\pi}{6} - \pi n$, $n \in Z$.

Пример 24. Решить систему $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ 3\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} y. \end{cases}$

Решение. Заметим, что множество допустимых значений переменных составляют все действительные числа, не равные $\frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$. Второе уравнение системы дает $\sin y \cos x = \frac{3}{4}$ и тогда система принимает вид $\begin{cases} \sin x \cos y = \frac{1}{4}, \\ \sin y \cos x = \frac{3}{4}. \end{cases}$ Складывая, а затем вычитая почленно полученные равенства, имеем соответственно: $\sin(x + y) = 1$, $\sin(x - y) = -\frac{1}{2}$. Следовательно,

$$\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, \\ x - y = -\frac{\pi}{6}(-1)^n + \pi n, \end{cases} \quad \text{где } k,\ n \in Z.$$

Таким образом,

$$x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{12}(-1)^n + \pi\left(k + \frac{n}{2}\right),\ y = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}(-1)^n + \pi\left(k - \frac{n}{2}\right), \text{ где } k,\ n \in Z.$$

4. Решение тригонометрических неравенств.

А) Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида $a_1 < \sin\alpha < b_1$, $a_2 < \cos\alpha < b_2$, $a_3 < \operatorname{tg}\alpha < b_3$, $a_4 < \operatorname{ctg}\alpha < b_4$, где a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 – заданные числа. При решении этих неравенств удобно пользоваться тригонометрическим кругом или графиком соответствующей тригонометрической функции.

Пример 25. Решить неравенство $\sin x \le 0{,}5$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

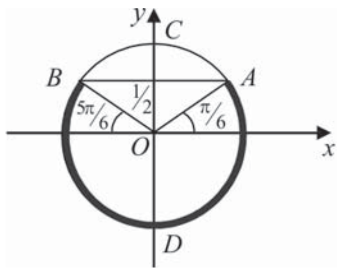


Рис. 28

Решение. Рассмотрим единичную окружность. Находим на ней точки, ординаты которых равны или меньше 0,5. Ясно, что этому условию удовлетворяют точки дуги *BDA* (рис. 28). Множеству точек этой дуги соответствует объединение двух числовых отрезков $\left[0; \frac{\pi}{6}\right]$ и $\left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right]$ из промежутка $[0; 2\pi]$. Поэтому решением неравенства является множество

$$\left[0; \frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6}; 2\pi\right].$$

Пример 26. Решить неравенство $\cos x > \frac{1}{2}$ на промежутке $[0; 2\pi]$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 29). Находим на ней точки, абсциссы которых больше $\frac{1}{2}$. Ясно, что этому условию удовлетворяют точки дуги *ACB*. Точке *B* соответствует число $\frac{\pi}{3}$, а точке *A* — число $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$. Внутренним точкам дуги *ACB* соответствует объединение числовых промежутков $\left[0; \frac{\pi}{3}\right)$ и $\left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$ из промежутка $[0; 2\pi]$. Следовательно, множество

$$\left[0; \frac{\pi}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$$

и есть решение заданного неравенства.

Пример 27. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \le 1$ на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 30). Через точку *B* проведем прямую параллельно оси *OY*. На этой прямой отложим отрезок $AB = OB = 1$. Ясно, что условию

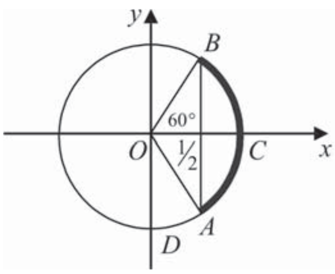


Рис. 29

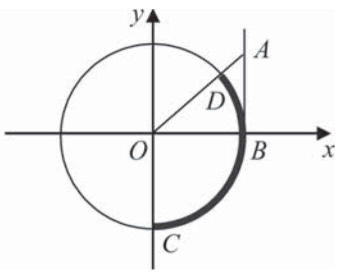


Рис. 30

примера удовлетворяют точки, лежащие внутри дуги DBC. Значит, искомые x должны удовлетворять неравенствам $-\frac{\pi}{2} < x \le \frac{\pi}{4}$. Множество, являющееся решением этих неравенств, содержится в промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Поэтому $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{4}\right]$ – решение исходного неравенства.

Пример 28. Решить неравенство $\operatorname{ctg} x \ge -\frac{1}{\sqrt{3}}$ на промежутке $(0; \pi)$.

Решение. Рассмотрим единичную окружность (рис. 31). Проведем через точку B прямую, параллельную оси OX и выберем точку $A\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}; 1\right)$. Ясно, что условию примера удовлетворяют точки, лежащие на дуге DBC. Значит, искомые x должны удовлетворять неравенствам $0 < x \le \frac{2\pi}{3}$.

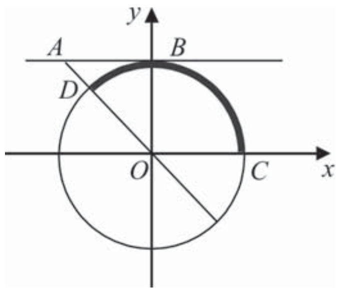


Рис. 31

Б) Рассмотрим теперь решение неравенств на множестве действительных чисел.

Пример 29. Решить неравенство $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Построим в одной и той же системе координат графики функций $y = \sin x$ и $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (см. рис. 32) и найдем корни уравнения $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ на $[0; 2\pi]$. Решением неравенства $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$

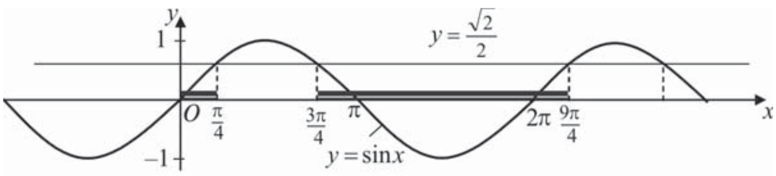


Рис. 32

на промежутке [0; 2π] является множество, состоящее из промежутков и $\left(\frac{3\pi}{4};\, 2\pi\right]$. Тогда на множестве всех действительных чисел решением заданного неравенства является объединение множеств

$\left[2\pi n;\, \frac{\pi}{4}+2\pi n\right) \cup \left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\, 2\pi(n+1)\right]$, $n \in Z$, или, что то же, объединение множеств вида $\left(\frac{3\pi}{4}+2\pi n;\, \frac{9\pi}{4}+2\pi n\right)$, $n \in Z$.

Пример 30. Решить неравенство $-2\cos x \geq 1$.

Решение. Сначала построим графики функций $y = \cos x$ и $y = -\frac{1}{2}$. Затем найдем корни уравнения $\cos x = -\frac{1}{2}$ на [0; 2π]. Это $\frac{2\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$. Тогда решением заданного неравенства является множество, состоящее из объединения промежутков $\left[\frac{2\pi}{3}+2\pi n;\, \frac{4\pi}{3}+2\pi n\right]$, $n \in Z$.

Пример 31. Решить неравенство $\operatorname{tg} x \geq \sqrt{3}$.

Решение. Построим в одной системе координат графики функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \sqrt{3}$ (рис. 33). Находим корни уравнения $\operatorname{tg} x = \sqrt{3}$ на [0; π], где π — основной период функции $y = \operatorname{tg} x$. Этим корнем является $x = \frac{\pi}{3}$. На данном промежутке решением неравенства является полуинтервал $\left[\frac{\pi}{3};\, \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда решением неравенства на множестве всех действительных

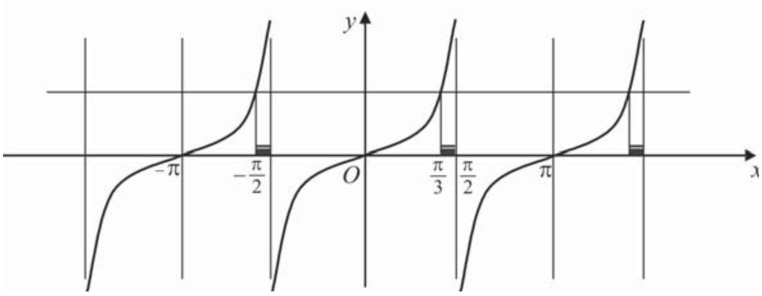


Рис. 33

чисел является множество, состоящее из объединения промежутков $\left[\frac{\pi}{3}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

Рассмотрим теперь примеры сложных тригонометрических неравенств.

Пример 32. Решить неравенство

$$\cos^3 x \cdot \sin x + \sin^3 x \cos x > \frac{1}{4}.$$

Решение. Имеем

$$\sin x \cdot \cos x\,(\cos^2 x + \sin^2 x) > \frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sin 2x > \frac{1}{4},$$

$$\sin 2x > \frac{1}{2},$$

Откуда следует $x \in \left(\frac{\pi}{12}+\pi n; \frac{5\pi}{12}+\pi n\right)$, $n \in Z$.

Пример 33. Решить неравенство $4\sin^4 x - 6\sin^2 x + 2 > 0$.

Решение. Преобразуем левую часть следующим образом:

$$(1 - \cos 2x)^2 - 3(1 - \cos 2x) + 2, \text{ или } \cos^2 2x + \cos 2x.$$

Получили равносильное неравенство $\cos^2 2x + \cos 2x > 0$, или $\cos 2x(\cos 2x + 1) > 0$. Тогда имеем две системы:

а) $\begin{cases} \cos 2x > -1, \\ \cos 2x > 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \cos 2x < -1, \\ \cos 2x < 0. \end{cases}$

Первое неравенство системы а) справедливо для всех x, кроме $x = \frac{\pi}{2}+\pi n$. Из второго неравенства системы а) следует, что $-\frac{\pi}{2}+2\pi n < 2x < \frac{\pi}{2}+2\pi n$. Поэтому решением системы а) является множество, состоящее из промежутков $\left(-\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{4}+\pi n\right)$, $n \in Z$. Это же множество является решением исходного неравенства, поскольку система б) не имеет решения.

5. Решение уравнений и неравенств, содержащих обратные тригонометрические функции. При решении уравнений, связанных с обратными тригонометрическими функциями, используется свойство функций, заключающееся в том, что равным аргументам соответствуют равные значения одноименных тригонометрических функций, если они имеют смысл для этих аргументов. Вычисляя функции от аргументов, заданных в виде аркфункций, получаем более простое уравнение (например, алгебраическое уравнение). При этом необходима проверка корней исходного уравнения, так как из условия равенства значений одноименных тригонометрических функций не всегда следует равенство аргументов.

П р и м е р 34. Решить уравнение

$$\arcsin\frac{1}{2}x + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}x = \arcsin x.$$

Р е ш е н и е. Область допустимых значений переменной составляет множество: $|x| \le 1$. К обеим частям заданного уравнения применим функцию синус. Тогда имеем

$$\sin\left(\arcsin\frac{1}{2}x + \arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) = \sin(\arcsin x).$$

Учитывая, что $\sin(\arcsin\alpha) = \alpha$ и $\cos(\arcsin\alpha) = \sqrt{1-\alpha^2}$ при любом $|\alpha| \le 1$, получаем

$$\frac{1}{2}x\sqrt{1-\frac{3}{4}x^2} + \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{1-\frac{1}{4}x^2} = x, \text{ или } x(\sqrt{4-3x^2} + \sqrt{3}\sqrt{4-x^2}) = 4x.$$

Отсюда $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$. Непосредственной подстановкой этих корней в исходное уравнение убеждаемся, что все они удовлетворяют ему. Например, для $x = -1$ имеем

$$\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \arcsin(-1) \Rightarrow -\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{2}.$$

Следовательно, корнями исходного уравнения являются $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm 1$.

П р и м е р 35. Решить уравнение

$$\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}2x + \operatorname{arctg}3x = 0.$$

Р е ш е н и е. Очевидно, что при $x > 0$ уравнение не имеет корней (так как при $x > 0$ имеем $\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}2x + \operatorname{arctg}3x > 0$). Перепишем заданное уравнение в виде

$$\operatorname{arctg}x + \operatorname{arctg}2x = -\operatorname{arctg}3x$$

и перейдем к равенству тангенсов в левой и правой его части:

$$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x + \mathrm{arctg}2x) = \mathrm{tg}(-\mathrm{arctg}3x).$$

Отсюда следует, что

$$\frac{x+2x}{1-2x^2} = -3x \Rightarrow 3x + 3x - 6x^3 = 0 \Rightarrow 6x(1 - x^2) = 0,$$

$$x_1 = 0,\ x_{2,3} = \pm 1.$$

Проверка показывает, что только $x = 0$ является корнем исходного уравнения.

Пример 36. Решить уравнение:

$$\arccos^2 x + 5\arccos x - 6 = 0.$$

Решение. Сделав замену $\arccos x = z$, получим квадратное уравнение $z^2 + 5z - 6 = 0$. Откуда $z_1 = -6$, $z_2 = 1$. Так как $0 \le \arccos x \le \pi$, то корнем является число $z_2 = 1$. Значит, $\arccos x = 1$ и $x = \cos 1$.

Пример 37. Решить неравенство:

$$2\mathrm{arctg}^2 x - 5\mathrm{arctg}x + 2 > 0.$$

Решение. Обозначив $\mathrm{arctg}x = z$, сведем данное неравенство к виду $2z^2 - 5z + 2 > 0$, или $2\left(z - \frac{1}{2}\right)(z - 2) > 0$. Последнее неравенство выполняется при $z < \frac{1}{2}$ и $z > 2$. Значит, $\mathrm{arctg}\, x < \frac{1}{2}$ и $\mathrm{arctg}\, x > 2$. Неравенство $\mathrm{arctg}\, x < \frac{1}{2}$ имеет решение $\left(-\infty; \mathrm{tg}\frac{1}{2}\right)$, а неравенство $\mathrm{arctg}\, x > 2$ не имеет решения. Следовательно, решением исходного неравенства является множество $\left(-\infty; \mathrm{tg}\frac{1}{2}\right)$.

Вопросы и задания

1. Какие тригонометрические уравнения являются простейшими?
2. Написать общий вид решений простейших тригонометрических уравнений.
3. Назвать основные типы тригонометрических уравнений.
4. Рассказать о методах решения тригонометрических уравнений.

5. Рассказать о методах решения тригонометрических систем уравнений.
6. Какие тригонометрические неравенства являются простейшими?
7. Рассказать о методах решения тригонометрических неравенств.

Упражнения

Решить уравнение (**1—21**):

1. а) $\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos x = \frac{1}{2}$; г) $\cos x = -1$.

2. а) $\sin x = -\frac{1}{2}$; в) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\sin x = 1$.

3. а) $\operatorname{tg} x = -\sqrt{3}$; б) $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$; в) $\operatorname{tg} x = 1$; г) $\operatorname{ctg} x = 0$.

4. а) $2\cos x + 1 = 0$; в) $2\cos x - \sqrt{3} = 0$.

б) $2\cos x - \sqrt{2} = 0$;

5. а) $\sqrt{2}\sin x - 1 = 0$; в) $2\sin x + \sqrt{3} = 0$.

б) $2\sin x + \sqrt{2} = 0$;

6. а) $\sqrt{3}\operatorname{tg} x + 1 = 0$; в) $\sqrt{3}\operatorname{ctg} x - 1 = 0$;

б) $\operatorname{ctg} x + 1 = 0$; г) $\operatorname{tg} x - \sqrt{3} = 0$.

7. а) $\sin\left(-\frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\operatorname{tg} 4x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

б) $\cos(-3x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{x}{3}\right) = 1$.

8. а) $2\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$; в) $\sqrt{3}\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = 1$;

б) $2\cos\left(\frac{x}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$; г) $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 1$.

9. а) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)=-1$; в) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{x}{3}\right)=1$;

б) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}-\frac{x}{2}\right)=\sqrt{3}$; г) $2\cos\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)=\sqrt{2}$.

10. а) $\sin 2x\cos x-\cos 2x\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin 3x\cos 3x=\frac{1}{4}$;

б) $\sin^2\frac{x}{2}-\cos^2\frac{x}{2}=1$; г) $\cos\frac{x}{3}\cos\frac{\pi}{5}+\sin\frac{x}{3}\sin\frac{\pi}{5}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

11. а) $(2\sin x-\sqrt{3})(3\sin x+2)=0$;

б) $(2\sin x+\sqrt{2})(\sin 4x+1)=0$;

в) $(1-2\cos x)(3+4\cos x)=0$;

г) $(2-\cos x)(1+3\cos x)=0$.

12. а) $(\mathrm{tg}\,x-3)(2\cos x-\sqrt{2})=0$; в) $(\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}\,x+1)(2\sin 2x+1)=0$;

б) $(\sqrt{3}\mathrm{tg}\,x+1)(\mathrm{tg}\,x+\sqrt{3})=0$; г) $(\mathrm{ctg}2x-3)(\mathrm{tg}x-\sqrt{3})=0$.

13. а) $2\sin^2x+\sin x-1=0$; в) $4\cos^2x-8\cos x+3=0$;

б) $2\sin^2x+\sin x-6=0$; г) $2\cos^2x+\cos x-6=0$.

14. а) $2\cos^2x-\sin x+1=0$; в) $\mathrm{tg}^2x-3\mathrm{tg}x-4=0$;

б) $4\sin^2x-\cos x-1=0$; г) $\mathrm{tg}x-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}x+1=\sqrt{3}$.

15. а) $2\cos^2x+\sqrt{3}\cos x=0$; в) $\sqrt{3}\sin x+\cos x=2$;

б) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2x-3\mathrm{tg}x=0$; г) $\sin 2x+\cos 2x=\sqrt{2}$.

16. а) $\cos x=\cos 2x$; в) $\sin 2x=\cos 3x$; д) $\mathrm{tg}x=\mathrm{ctg}x$.

б) $\sin 4x=\sin x$; г) $\mathrm{tg}2x=\mathrm{tg}3x$.

17. а) $\cos 3x-\cos 5x=\sin 4x$; в) $\cos x+\cos 3x=4\cos 2x$;

б) $\sin 9x-\sin x=\cos 5x$; г) $\sin^2x-\cos^2x=\cos 4x$.

18. а) $\sqrt{3}\sin x\cos x=\cos^2x$; в) $2\sin^2x=1+\frac{1}{3}\sin 4x$;

б) $\sin 6x+\sin^2 3x=0$; г) $2\cos^2 2x=1+\sin 4x$.

19. а) $(\sin x-\cos x)^2=1-\cos x$;

б) $2\sin 2x-3(\sin x+\cos x)-2=0$;

в) $1-\cos(\pi-x)+\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)=0$; г) $1+\cos^2x=\sin^4x$.

20. а) $2\sin^2 x - 5\sin x\cos x - 3\cos^2 x = 0$;

б) $2\cos^2 x + 3\sin^2 x - 7\sin x\cos x = 0$;

в) $\cos^2 2x + 2\sin 4x + 3\sin^2 2x = 0$;

г) $1 - \sin x\cos x + 2\cos^2 x = 0$.

21. а) $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$;

б) $\sin^2 2x + \sin^2 3x + \sin^2 4x + \sin^2 5x = 2$;

в) $\sin x\sin 2x\sin 3x = \frac{1}{4}\sin 4x$;

г) $\cos^4\frac{x}{2} - \sin^4\frac{x}{2} = \sin 2x$;

д) $\sin^6 x + \cos^6 x = \frac{1}{4}$.

22. Произведя замену $\sin x + \cos x = t$, решить уравнение:

а) $1 + \sin x + 2\left(\sin\frac{x}{2} + \cos\frac{x}{2}\right) = 0$;

б) $\sin 2x + 3 = 3\sin x + 3\cos x$;

в) $2\sin 2x - 3(\sin x + \cos x) + 2 = 0$.

23. Решить уравнение:

а) $3\cos x - 4\sin x = 5$;

б) $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$;

в) $\sqrt{3}\cos x - \sin x = 2$.

24. Применяя универсальную замену $\operatorname{tg}\frac{x}{2} = z$, решить уравнение:

а) $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3$;

б) $3\sin x - \cos x = 3$;

в) $4\sin x + \cos x = 4$.

25. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} \sin x + \sin y = 1, \\ x + y = \pi; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \cos x - \cos y = 1, \\ x + y = \pi; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y = \frac{\pi}{2}, \\ \sin^2 x - \sin^2 y = 1; \end{cases}$

г) $\begin{cases} x + y = \frac{5\pi}{6}, \\ \cos^2 x + \cos^2 y = 0{,}25; \end{cases}$

д) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{3}, \\ \cos x\cos y = \frac{1}{2}. \end{cases}$

26. Решить неравенство на заданном промежутке:

а) $\sin x > \frac{1}{2}$, $x \in [0; \pi]$;

б) $\sin x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in [-\pi; 0]$;

в) $\cos x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$;

г) $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $x \in \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2}\right]$;

д) $\operatorname{tg} x > -\sqrt{3}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

е) $\operatorname{tg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$;

ж) $\operatorname{ctg} x < \frac{1}{\sqrt{3}}$, $x \in (0; \pi)$;

з) $\operatorname{ctg} x > -1$, $x \in (0; \pi)$.

Решить неравенство (**27–31**):

27. а) $\sin x \ge \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\sin x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin x > \frac{1}{2}$;

г) $\cos x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

д) $\cos x \le \frac{1}{2}$;

е) $\cos x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

ж) $\operatorname{tg} x < -\frac{1}{\sqrt{3}}$;

з) $\operatorname{tg} x > -1$;

и) $\operatorname{ctg} x < \sqrt{3}$;

к) $\operatorname{ctg} x > 1$.

28. а) $\sin 3x < \frac{1}{2}$; б) $\cos\frac{x}{2} > \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sin\frac{x}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\operatorname{tg} 3x > 1$.

29. а) $2\cos\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) \le \sqrt{2}$;

б) $\sqrt{3}\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) < 1$;

в) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{6}\right) \ge 1$;

г) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \sqrt{3}$.

30. а) $\sin 2x\cos\frac{\pi}{3} - \cos 2x\sin\frac{\pi}{3} \le \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\sin\frac{\pi}{4}\cos 3x + \cos\frac{\pi}{4}\sin 3x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

в) $2\sin 2x\cos 2x \ge \frac{1}{2}$;

г) $\cos\frac{\pi}{4}\cos 2x - \sin 2x\sin\frac{\pi}{4} < -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

31. а) $\cos^2 x + 2\cos x > 0$;

б) $\sin^2 x - \sin x < 0$;

в) $\cos x - \sqrt{3}\sin x \ge 2$;

г) $\sin 2x + \cos 2x < 1$;

д) $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.

Решить уравнения (**32–36**):

32. а) $2\sin\frac{x}{4} = \sqrt{3}$; г) $2\cos\frac{x}{3} = 1$;

б) $\sin\left(2x - \frac{3\pi}{4}\right) = 0$; д) $3\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

в) $\sin\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = 0$; е) $2\cos\left(2x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{3}$.

33. а) $(1 + 2\cos x)(3 - 2\cos x) = 0$; в) $(2\sin x + \sqrt{3})(\sin x - 2) = 0$;
б) $(1 - \cos x)(5 + 4\cos 2x) = 0$; г) $(2\sin 2x - 1)(\sin 3x + 1) = 0$.

34. а) $\sin 5x \cos 3x = \cos 5x \sin 3x$; б) $\cos 3x \cos 2x = \sin 2x \sin 3x$.

35. а) $\arccos(2x - 1) = \frac{\pi}{3}$; е) $\operatorname{arctg}(2 - 5x) = -\frac{\pi}{3}$;

б) $\arccos\left(\frac{x-1}{2}\right) = \frac{2\pi}{3}$; ж) $\operatorname{tg}(3\arcsin x) = 1$;

в) $\arcsin\left(\frac{x}{3} - 2\right) = \frac{\pi}{6}$; з) $\arcsin\frac{3x}{5} + \arcsin\frac{4x}{5} = \arcsin x$;

г) $\arcsin(2x - 3) = \frac{3\pi}{4}$; и) $2\arcsin x = \arccos 2x$.

д) $\operatorname{arctg}(3x - 1) = \frac{\pi}{4}$;

36. а) $\cos 3x + \sin 5x = 0$; в) $\sin x(1 - \cos x)^2 + \cos x(1 - \sin x)^2 = 2$;
б) $\sin x + \cos 3x = 0$; г) $\cos^2 x + \cos^2 2x = \cos^2 3x + \cos^2 4x$.

37. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = \frac{5\pi}{3}, \\ \sin x = 2\sin y; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \arcsin x + \arccos y = \frac{\pi}{2}, \\ xy = 1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = -\frac{1}{3}, \\ \cos^2 \pi x - \sin^2 \pi y = \frac{1}{2}; \end{cases}$

38. Решить уравнение:

а) $1 - \sin 5x = \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2$; в) $\cos 2x - 5\sin x - 3 = 0$;

б) $2\operatorname{tg}^3 x - 2\operatorname{tg}^2 x + 3\operatorname{tg} x - 3 = 0$; г) $3\sin 2x + 2\cos 2x = 3$.

39. Решить неравенство:

а) $\cos\left(\frac{x}{2}+1\right) \geq \frac{1}{2}$; в) $2\cos^2 x + \sin x - 1 < 0$;

б) $\sin\left(\frac{x}{4}-2\right) < \frac{\sqrt{2}}{2}$; г) $2\sin^2 x - 5\cos x + 1 > 0$.

Упражнения для повторения

1. Определить четверть, в которой лежит точка, полученная поворотом точки $A(1;\ 0)$ на:

а) $\pi-\alpha$; б) $\alpha-\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{3\pi}{2}+\alpha$; г) $2\pi-\alpha$, где $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$.

2. Вычислить:

а) $\sin 10{,}5\pi$; б) $\cos 6\frac{1}{3}\pi$; в) $\mathrm{tg}\,\frac{135}{4}\pi$; г) $\mathrm{ctg}\,35\pi$.

3. Вычислить:

а) $4\sin\frac{\pi}{6}+2\cos\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}$; б) $\left(2\,\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\,\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$.

4. Найти значение выражения:

а) $4\cos\alpha+\sqrt{3}\,\mathrm{tg}\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{3}$;

б) $\sqrt{3}\sin\alpha-\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{ctg}\alpha$ при $\alpha=\frac{\pi}{6}$.

5. Какие из приведенных ниже функций являются четными, и какие — нечетными:

а) $\frac{\cos 2x-1}{x^2}$; в) $2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}$;

б) $\frac{\sin^2 x}{\mathrm{tg}x}$; г) $\cos^2\frac{x}{2}-\sin^2\frac{x}{2}$?

6. Найти наименьший положительный период функций:

а) $y=\cos\left(5x-\frac{3}{2}\right)$; в) $y=4\sin 2x\cos 2x$;

б) $y=3+4\cos(6x-5)$; г) $y=\cos^2 3x-\sin^2 3x$.

7. Найти значение выражения:

а) $2\cos 0^\circ - 2\sin 270^\circ + 5\sin 90^\circ + 10\cos 180^\circ$;

б) $2\cos 90^\circ + 3\mathrm{tg}\,0^\circ + 3\sin 270^\circ - 3\cos 180^\circ$;

в) $\cos 90^\circ - \sin 270^\circ - \mathrm{ctg}\,90^\circ + \mathrm{tg}\,180^\circ - \sin 180^\circ$.

8. Построить график функции:

а) $y = 1{,}5\sin(2x - 1)$; г) $y = \left|\cos|2x|\right|$;

б) $y = 2\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right)$; д) $y = |\mathrm{tg}2x| - 3$;

в) $y = \left|2\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)\right|$; е) $y = |\mathrm{ctg}x - 1|$.

9. Найти амплитуду, период и начальную фазу гармонического колебания:

а) $y = \frac{3}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right)$; б) $y = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$.

10. Найти $\mathrm{tg}\alpha$ и $\mathrm{ctg}\alpha$, если:

а) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) = \frac{1}{3}$; б) $\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right) = 3$.

11. Упростить выражение и найти его числовое значение:

а) $\frac{2\sin\alpha + \sin 2\alpha}{2\sin\alpha - \sin 2\alpha}$, если $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$;

б) $\frac{1 + \sin 2\alpha}{\sin\alpha + \cos\alpha} - \cos\alpha$, если $\alpha = \frac{\pi}{3}$.

12. Вычислить:

а) $\sin 575^\circ \cos 845^\circ - \cos 1405^\circ \sin 1675^\circ - \mathrm{tg}215^\circ \mathrm{tg}685^\circ - \mathrm{tg}^2 35^\circ$;

б) $4\sin 18^\circ \sin 306^\circ$; в) $\cos\frac{\pi}{7}\cos\frac{4\pi}{7}\cos\frac{5\pi}{7}$.

13. Упростить выражение и найти его числовое значение:

а) $\frac{\sin\left(\frac{15\pi}{2} - \alpha\right) + \cos(5\pi + \alpha)}{\cos\left(\frac{7\pi}{2} + \alpha\right) - \sin(\alpha - 3\pi)}$ при $\alpha = \frac{5\pi}{6}$;

б) $\frac{\mathrm{tg}(2\pi + \alpha) - \mathrm{tg}(3\pi - \beta)}{1 + \mathrm{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)\mathrm{tg}(\beta + \pi)}$ при $\alpha = \frac{\pi}{4}$, $\beta = \frac{\pi}{12}$.

Упростить выражение (**14–16**):

14. а) $\frac{\mathrm{ctg}^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos^2\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)}{\mathrm{ctg}^2\left(\alpha + \frac{3\pi}{2}\right) - \cos^2\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right)}$; б) $\frac{\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{1 - \mathrm{tg}^2(\alpha - 2\pi)}\cdot\frac{\mathrm{ctg}^2(\pi - \alpha) - 1}{ctg(2\pi + \alpha)}$.

15. а) $\dfrac{\sin^2\left(4\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)}{\operatorname{ctg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-2\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}+2\alpha\right)}$; б) $\dfrac{4\sin^2(\alpha-5\pi)-\sin^2(2\alpha+\pi)}{\cos^2\left(2\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)-4+4\sin^2\alpha}$.

16. а) $\dfrac{\cos 3\alpha+\cos 4\alpha+\cos 5\alpha}{\sin 3\alpha+\sin 4\alpha+\sin 5\alpha}$; б) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos 2\alpha+\cos 3\alpha}{\cos\alpha+2\cos^2\alpha-1}$.

17. Доказать тождество:

а) $\dfrac{1-2\sin^2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=\dfrac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}$; в) $\left(\dfrac{\sqrt{\operatorname{tg}\alpha}+\sqrt{\operatorname{ctg}\alpha}}{\sin\alpha+\cos\alpha}\right)^2=\dfrac{2}{\sin 2\alpha}$;

б) $\dfrac{\cos 4\alpha+1}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}=\dfrac{1}{2}\sin 4\alpha$; г) $\dfrac{\sin 2\alpha+\sin 5\alpha-\sin 3\alpha}{\cos\alpha+1-2\sin^2 2\alpha}=2\sin\alpha$.

18. Доказать тождество:

а) $\dfrac{\sin 7\alpha}{\sin\alpha}-2(\cos 2\alpha+\cos 4\alpha+\cos 6\alpha)-1=0$;

б) $1-\dfrac{1}{4}\sin^2 2\alpha+\cos 2\alpha=\cos^2\alpha+\cos^4\alpha$.

19. Преобразовать в произведение:

а) $3-4\cos^2\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)$; в) $3+4\cos 4\alpha+\cos 8\alpha$;

б) $3-4\sin^2\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$; г) $\sin 2\alpha+\sin 4\alpha+\sin 6\alpha$.

20. Доказать справедливость равенств:

а) $\dfrac{1}{\cos 34^\circ}+\dfrac{1}{\operatorname{tg}56^\circ}=\operatorname{ctg}28^\circ$; б) $1-2\sin 50^\circ=\dfrac{1}{2\cos 160^\circ}$.

21. Вычислить:

а) $\operatorname{tg}435^\circ+\operatorname{tg}375^\circ$; в) $\sin^2\dfrac{\pi}{8}+\cos^2\dfrac{3\pi}{8}+\sin^2\dfrac{5\pi}{8}+\cos^2\dfrac{7\pi}{8}$.

б) $\operatorname{tg}255^\circ-\operatorname{tg}195^\circ$;

22. Выразить $\operatorname{tg}^4\alpha+\operatorname{ctg}^4\alpha$ через m, если $m=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

23. Вычислить $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=n$.

24. Вычислить $\dfrac{2\sin 2\alpha-3\cos 2\alpha}{4\sin 2\alpha+5\cos 2\alpha}$, если $\operatorname{tg}\alpha=3$.

25. Сравнить числа:

а) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$ и $\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\arccos\left(\frac{1}{2}\right)$ и $\mathrm{arctg}(-1)$;

б) $\mathrm{arctg}\sqrt{3}$ и $\mathrm{arctg}1$; г) $\mathrm{arcctg}\frac{\sqrt{3}}{3}$ и $\mathrm{arctg}1$.

26. Вычислить:

а) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\mathrm{arctg}(-1)+\arccos\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

б) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})+\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arcsin 1$.

27. Расположить числа в порядке возрастания:

а) $\arcsin\frac{\pi}{6}$; $\arcsin(-0,3)$; $\arcsin 0,9$;

б) $\arccos 0,4$; $\arccos(-0,2)$; $\arccos(-0,8)$;

в) $\mathrm{arcctg}1,2$; $\mathrm{arcctg}\pi$; $\mathrm{arcctg}(-5)$;

г) $\mathrm{arctg}10$; $\mathrm{arctg}(-5)$; $\mathrm{arctg}0,7$.

28. Доказать справедливость тождества:

а) $\sin^2\left(\mathrm{arctg}3-\mathrm{arcctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)=\frac{1}{2}$;

б) $\cos(2\mathrm{arcctg}2) - \sin(4\mathrm{arctg}3) = 0,36$;

в) $\cos(2\mathrm{arcctg}7) = \sin(4\mathrm{arcctg}3)$.

29. Вычислить:

а) $\frac{1}{4}-\cos^4\left(\frac{5\pi}{2}+\frac{1}{2}\arccos\frac{4}{5}\right)$;

б) $\sin^2\left(\mathrm{arcctg}\frac{1}{2}-\mathrm{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)\right)$;

в) $\sin^2(0,5\arcsin 0,8 - 2\mathrm{arctg}(-2))$.

Решить уравнение (**30–36**):

30. а) $2\cos^2 x + 5\sin x - 4 = 0$; в) $\cos 3x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)$;

б) $3\sin^2 2x + 7\cos 2x - 3 = 0$; г) $\sin 3x = 2\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$.

31. а) $\sin 9x = 2\sin 3x$; в) $\sin 2x + \cos 2x = \sqrt{2}\sin 3x$;

б) $\cos 6x = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2x\right)$; г) $\cos x - \sqrt{3}\sin x = \cos 3x$.

32. а) $9^{\cos x} = 9^{\sin x} \cdot 3^{\frac{2}{\cos x}}$; в) $2\sin z - \cos z = 0{,}4$;

б) $2^{\sin^2 x} + 4 \cdot 2^{\cos^2 x} = 6$; г) $4\sin x + \cos x = 4$.

33. а) $\sin 3x - 4\sin x \cos 2x = 0$;

б) $\sin x - \sin 3x - \sin 5x + \sin 7x = 0$;

в) $\sin^4 x + \cos^4 x = \frac{5}{8}$; г) $\sin^4 x + \cos^4 x = \cos^2 2x + 0{,}25$.

34. а) $1 + \sin 2x = \sin x + \cos x$; б) $1 + 3\cos x = \sin 2x + 3\sin x$.

35. а) $\sin x \sin 5x = 1$; б) $\sin x \cos 4x = -1$.

36. а) $\cos 2x = \cos^2\frac{3x}{2}$; б) $\cos 2x = \frac{1+\sqrt{3}}{2}(\cos x + \sin x)$.

37. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = \frac{\pi}{6}, \\ \sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \arcsin x \cdot \arcsin y = \frac{\pi^2}{12}, \\ \arccos x \cdot \arccos y = \frac{\pi^2}{24}. \end{cases}$

б) $\begin{cases} \sin x \cos y = 0{,}25, \\ \sin y \cos x = 0{,}75; \end{cases}$

38. Решить неравенство:

а) $\sin^4 x - \cos^4 x > \frac{1}{2}$; б) $0{,}5^{\sqrt{3}} < 0{,}5^{\frac{\sin 2x}{1-\cos 2x}} < 0{,}5$.

39. Решить неравенство:

а) $\arcsin(x^2 - 4) \le \frac{\pi}{6}$; в) $2\arcsin x > \operatorname{arctg} x$;

б) $\operatorname{arctg}^2 3x - 2\operatorname{arctg} 3x \le 3$; г) $\arcsin x < \arccos(1 - x)$.

ГЛАВА X

НЕСТАНДАРТНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Кусочно-заданная функция. Функция Дирихле. Функции вида $y = \operatorname{sign}(x)$, $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$

1. Кусочно-заданная функция. Из главы VII , части I этой книги нам известны четыре наиболее употребляемых способа задания функций. Одним из них является аналитический способ. Аналитический способ задания функции состоит в том, что с помощью формулы конкретно указывается алгоритм вычисления значений заданной функции $y = f(x)$ для каждого из допустимых значений аргумента.

В некоторых случаях функцию задают не одной, а несколькими формулами, определенными на разных множествах. Такие функции называются *кусочно-заданными функциями.*

Пример 1. Формулами $y = -x$ при $x \in (-\infty;\ 0)$, $y = x$ при $x \in [0;\ +\infty)$ определяется кусочно-заданная функция на интервале $(-\infty;\ +\infty)$. Заданную таким образом функцию обычно записывают в виде

$$y = \begin{cases} -x, \text{ если } & x \in (-\infty; 0), \\ x, \text{ если } & x \in [0; +\infty). \end{cases}$$

В данном примере мы имеем не две функции, а две формулы, определяющие в своей совокупности одну функцию (рис. 34).

Пример 2. Построить график кусочно-заданной функции

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } & x \in [0; +\infty), \\ 1, \text{ если } & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

Решение. Для построения графика заданной функции последовательно строят график функции $y = x^2$ на промежутке $[0;\ +\infty)$, а затем график функции $y = 1$ на $(-\infty;\ 0)$ (рис. 35).

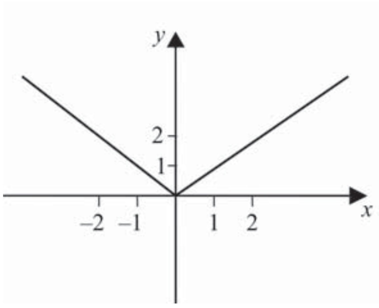


Рис. 34

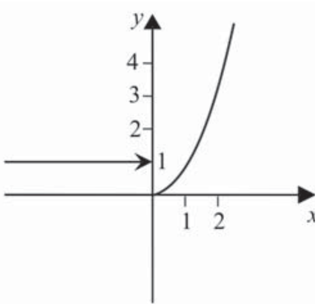


Рис. 35

2. Функция Дирихле. Часто функция задается различными формулами на множествах более сложной структуры. Примером такой функции может служить функция Дирихле

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ рационально}, \\ 0, \text{ если } x \text{ иррационально}. \end{cases}$$

3. Функция $y = \mathrm{sign}(x)$. Кусочно-заданную функцию, которая принимает значение 1, когда аргумент $x > 0$, значение 0, когда $x = 0$ и значение -1, когда $x < 0$, можно записать в виде

$$y = \begin{cases} 1, & x \in (0; +\infty), \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

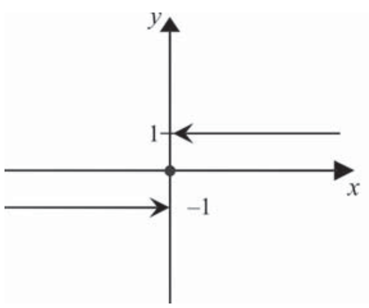


Рис. 36

Эту функцию обозначают символом $y = \mathrm{sign}(x)$. На рисунке 36 изображен график функции $y = \mathrm{sign}(x)$.

Пример 3. Построить график функции

$$y = \mathrm{sign}(x^2 - 5x + 6).$$

Решение. Аргументом данной функции является выражение $x^2 - 5x + 6$. Найдем корни уравнения $x^2 - 5x + 6 = 0$. Это числа $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$. Тогда, воспользовавшись методом интервалов для решения неравенств, имеем:

$$x^2 - 5x + 6 > 0 \text{ при } x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty);$$

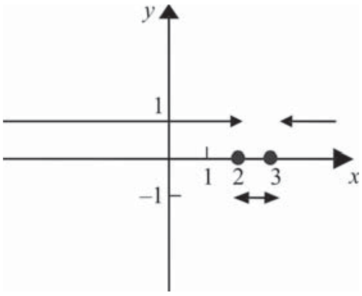


Рис. 37

$x^2 - 5x + 6 < 0$ при $x \in (2;\ 3)$;

$x^2 - 5x + 6 = 0$ при $x \in \{2;\ 3\}$.

Значит, функцию можно записать в виде

$$y = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in (-\infty; 2) \cup (3; +\infty), \\ -1, & \text{если } x \in (2; 3), \\ 0, & \text{если } x \in \{2; 3\}. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 37.

4. Функции вида $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$, $y = |f(|x|)|$ и их графики. Пусть функция задана графически (см. рис. 38). Используя этот график, построим приближенно графики функций вида $y = |f(x)|$, $y = f(|x|)$ и $y = |f(|x|)|$.

Функцию $y = |f(x)|$ можно задать аналитически в виде

$$y = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & \text{если } \operatorname{sign}(f(x)) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если } \operatorname{sign}(f(x)) < 0. \end{cases}$$

Поэтому график такой функции приближенно изображается следующим образом (рис. 39).

Функцию $y = f(|x|)$ можно задать аналитически в виде

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{если } x \in [0; +\infty), \\ f(-x), & \text{если } x \in (-\infty; 0). \end{cases}$$

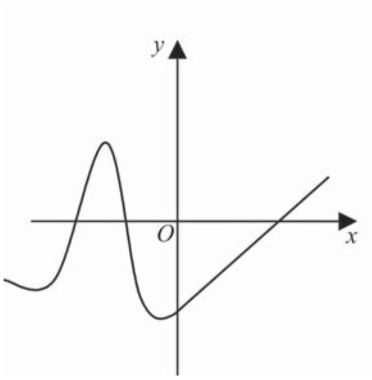


Рис. 38

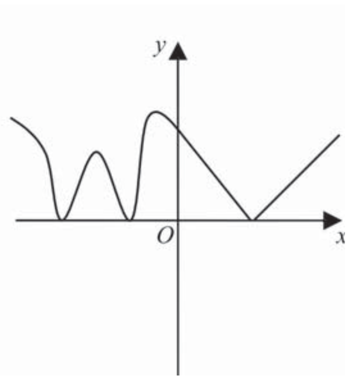


Рис. 39

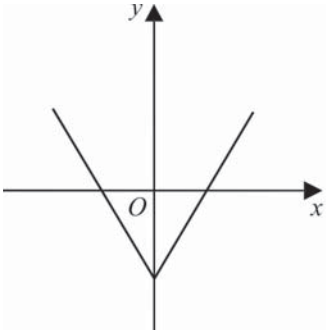


Рис. 40

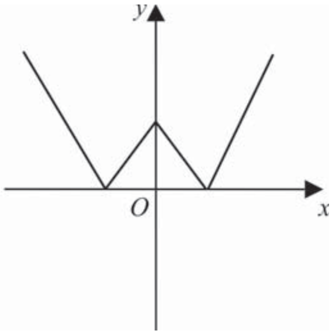


Рис. 41

График такой функции приближенно изображен на рисунке 40.

Функция $y = |f(|x|)|$ задается аналитически в виде

$$y = \begin{cases} f(x), & \text{если} \quad x \in [0;+\infty), \ \operatorname{sign}(f(x)) \geq 0 \\ -f(x), & \text{если} \quad x \in [0;+\infty), \ \operatorname{sign}(f(x)) < 0 \\ f(-x), & \text{если} \quad x \in (-\infty;0), \ \operatorname{sign}(f(x)) \geq 0 \\ -f(-x), & \text{если} \quad x \in (-\infty;0), \ \operatorname{sign}(f(x)) < 0. \end{cases}$$

График этой функции изображен на рисунке 41.

Вопросы и задания

1. Привести пример кусочно-заданной функции.
2. Дать определение и построить график функции Дирихле.
3. Дать определение и построить график функции $y = \operatorname{sign}(x)$.
4. Написать аналитический вид функции $y = f(|x|)$.
5. Написать аналитический вид функции $y = |f(|x|)|$.
6. Написать аналитический вид функции $y = |f(x)|$.

Упражнения

1. Построить график функций:

а) $y = \begin{cases} x^2 + 2x, & \text{если} \ x \in [0;+\infty), \\ -x+1, & \text{если} \ x \in (-\infty;0); \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} x^2 - 3x + |x|, & \text{если } x \in (1;+\infty), \\ x - 3, & \text{если } x \in [-1;1], \\ 3, & \text{если } x \in (-\infty;-1); \end{cases}$

в) $y = \operatorname{sign}(x^2 - 4x - 5)$;
г) $y = \operatorname{sign}(\sin(x))$;
д) $y = \sin(\operatorname{sign}(x))$;
е) $y = |\operatorname{sign}(x^2 - 5x - 6)|$;
ж) $y = \operatorname{sign}(|x^2 - 5x - 6|)$;
з) $y = \operatorname{sign}(|\sin x|)$;
и) $y = |\operatorname{sign}(\sin x)|$;
к) $y = |\operatorname{sign}(|\sin x|)|$;
л) $y = |\operatorname{sign}(|x^2 - 5x - 6|)|$.

---

2. Построить график следующих функций:

а) $y = \begin{cases} x^2 - 4x, & \text{если } x \in [2;+\infty), \\ 3x, & \text{если } x \in (-\infty;2); \end{cases}$

б) $y = \begin{cases} 4x - 8, & \text{если } x \in [0;+\infty), \\ 2, & \text{если } x \in (-2;0), \\ |x|, & \text{если } x \in (-\infty;-2]; \end{cases}$

в) $y = \operatorname{sign}(x^2 - 8x + 7)$;
г) $y = \operatorname{sign}(\cos x)$;
д) $y = \operatorname{sign}(\operatorname{tg} x)$;
е) $y = \cos(\operatorname{sign}(x))$;
ж) $y = \operatorname{tg}(\operatorname{sign}(x))$;
з) $y = |\operatorname{sign}(x^2 - 8x + 7)|$;
и) $y = \operatorname{sign}(|x^2 - 8x + 7|)$;
к) $y = \operatorname{sign}(|\cos x|)$;
л) $y = \operatorname{sign}(|\operatorname{tg} x|)$;
м) $y = |\operatorname{sign}(\cos x)|$;
н) $y = |\operatorname{sign}(\operatorname{tg} x)|$;
о) $y = |\operatorname{sign}(|\cos x|)$;
п) $y = |\operatorname{sign}(|\operatorname{tg} x|)|$;
р) $y = |\operatorname{sign}(|x^2 - 5x - 6|)|$.

§ 2. Нестандартные уравнения

Нестандартными уравнениями называют уравнения, которые задаются в виде, отличном от вида «обычного» уравнения, либо это уравнения, которые нельзя решить стандартными способами.

Примерами нестандартных уравнений могут служить уравнения:

$$5^{|x|+1} = \sin x, \quad 2\cos\frac{x}{5} = 7^x + 7^{-x}, \quad 8x(2x^2 - 1)(8x^4 - 8x^2 + 1) = 1.$$

Общего способа решения нестандартных уравнений не существует. Обычно такие уравнения решаются с применением известных свойств функции или свойств неравенств.

П р и м е р 1. Решить уравнение $5^{|x|+1} = \sin x$.

Р е ш е н и е. Поскольку $|x| \geq 0$ для всех значений x, то $|x| + 1 \geq 1$. Отсюда, используя свойство возрастания показательной функции $y = 5^x$, имеем неравенство $5^{|x|+1} \geq 5$.

Так как областью значений функции $y = \sin x$ является множество $[-1; 1]$, то для всех значений x справедливо неравенство $5^{|x|+1} > \sin x$. Поэтому заданное уравнение не имеет решения.

П р и м е р 2. Решить уравнение $2\cos\frac{x}{5} = 7^x + 7^{-x}$.

Р е ш е н и е. Нетрудно проверить, что для всех $x \in R$ справедливы неравенства $2\cos\frac{x}{5} \leq 2$ и $7^x + 7^{-x} \geq 2$. Поэтому имеет место равносильность

$$2\cos\frac{x}{5} = 7^x + 7^{-x} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\cos\frac{x}{5} = 2, \\ 7^x + 7^{-x} = 2. \end{cases}$$

Второе уравнение полученной системы имеет единственный корень $x = 0$. Это число является также корнем первого уравнения системы. Следовательно, $x = 0$ — единственный корень первоначального уравнения.

П р и м е р 3. Решить уравнение $4\sin 3x + 3\cos 3x = 6$.

Р е ш е н и е. При всех значениях x выражение $a\sin x + b\cos x$ удовлетворяет неравенствам

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a\sin x + b\cos x \leq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Поэтому имеем $-\sqrt{4^2 + 3^2} \leq 4\sin 3x + 3\cos 3x \leq \sqrt{4^2 + 3^2}$, или $-5 \leq 4\sin 3x + 3\cos 3x \leq 5$. Из этих неравенств вытекает, что заданное уравнение не имеет решения.

П р и м е р 4. Решить уравнение $9^x + 5^x = 14^x$.

Р е ш е н и е. Ясно, что уравнение имеет корень $x = 1$. Докажем, что других корней нет. Для этого разделим обе части уравнения на 14^x. Имеем

$$\left(\frac{9}{14}\right)^x + \left(\frac{5}{14}\right)^x = 1.$$

Левая часть полученного уравнения представляет собой монотонно убывающую функцию. Поэтому каждое свое значение (в частности, значение 1) эта функция принимает только один раз. Следовательно, $x = 1$ — единственный корень первоначального уравнения.

Пример 5. Решить уравнение $8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1)=1$.

Решение. Пусть $|x| \ge 1$. Тогда $x^2 \ge 1$. Отсюда легко получаем следующие неравенства:

$$2x^2-1 \ge 1,\ \ 8x^4-8x^2+1 \ge 1.$$

Это означает, что

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) \ge 8 \text{ при } x \ge 1,$$

$$8x(2x^2-1)(8x^4-8x^2+1) \le -8 \text{ при } x \le -1.$$

Следовательно, при $|x| \ge 1$ левая часть заданного уравнения не может принимать значение 1, и поэтому уравнение не имеет решения.

Пусть теперь $|x| < 1$. Сделаем замену $x = \cos t$, $0 < t < \pi$.

Так как

$$2x^2-1 = 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t,$$

$$8x^4-8x^2+1 = 2(2x^2-1)^2 - 1 = 2\cos^2 2t - 1 = \cos 4t,$$

то заданное уравнение можно записать в виде $8\cos t\cos 2t\cos 4t = 1$.

Для того чтобы решить последнее уравнение, умножим обе его части на $\sin t$. Тогда

$$8\sin t\cos t\cos 2t\cos 4t = \sin t, \text{ или } \sin 8t = \sin t.$$

Отсюда получаем уравнение $2\cos\frac{9}{2}t\sin\frac{7}{2}t = 0$. Учитывая, что $0 < t < \pi$, находим корни

$$t = \frac{2\pi k}{7},\ \ k = 1, 2, 3 \text{ либо } t = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{9}n\pi,\ n = 0, 1, 2, 3.$$

Возвращаясь теперь к x, получим следующий ответ:

$$x_1 = \cos\frac{2}{7}\pi,\ \ x_2 = \cos\frac{4}{7}\pi,\ \ x_3 = \cos\frac{6}{7}\pi,\ \ x_4 = \cos\frac{\pi}{9},$$

$$x_5 = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2},\ \ x_6 = \cos\frac{5\pi}{9},\ \ x_7 = \cos\frac{7\pi}{9}.$$

П р и м е р 6. Решить уравнение $[x] + [2x] + [3x] = 4$.

Р е ш е н и е . Пусть сначала $x \le 0$. Тогда имеем $[x] \le 0$, $[2x] \le 0$, $[3x] \le 0$. Складывая эти неравенства, получим $[x] + [2x] + [3x] \le 0$. Поэтому при $x \le 0$ уравнение не имеет решения.

Пусть $x > 0$. Тогда имеем $[x] \le [2x] \le [3x]$. В этом случае заданное уравнение равносильно совокупности следующих четырех систем уравнений:

$$\text{а) } \begin{cases} [x] = 0, \\ [2x] = 0, \\ [3x] = 4; \end{cases} \quad \text{б) } \begin{cases} [x] = 0, \\ [2x] = 1, \\ [3x] = 3; \end{cases} \quad \text{в) } \begin{cases} [x] = 0, \\ [2x] = 2, \\ [3x] = 2; \end{cases} \quad \text{г) } \begin{cases} [x] = 1, \\ [2x] = 1, \\ [3x] = 2. \end{cases}$$

Решим каждую систему в отдельности:

$$\text{а) } \begin{cases} [x] = 0, \\ [2x] = 0, \\ [3x] = 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ 0 \le 2x < 1, \\ 4 \le 3x < 5, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ 0 \le x < \frac{1}{2}, \\ \frac{4}{3} \le x < \frac{5}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

$$\text{б) } \begin{cases} [x] = 0, \\ [2x] = 1, \\ [3x] = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ 1 \le 2x < 2, \\ 3 \le 3x < 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ \frac{1}{2} \le x < 1, \\ 1 \le x < \frac{4}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

$$\text{в) } \begin{cases} [x] = 0, \\ [2x] = 2, \\ [3x] = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ 2 \le 2x < 3, \\ 2 \le 3x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 \le x < 1, \\ 1 \le x < \frac{3}{2}, \\ \frac{2}{3} \le x < 1, \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

$$\text{г) } \begin{cases} [x] = 1, \\ [2x] = 1, \\ [3x] = 2, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x < 2, \\ 1 \le 2x < 2, \\ 2 \le 3x < 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x < 2, \\ \frac{1}{2} \le x < 1, \\ \frac{2}{3} \le x < 1. \end{cases} \Leftrightarrow \varnothing.$$

Следовательно, заданное уравнение не имеет решения.

Теорема. Если $y = f(x)$ — монотонно возрастающая функция, то уравнение

$$f(x) = x \qquad (1)$$

равносильно уравнению

$$f(f(x)) = x. \qquad (2)$$

Доказательство. Пусть x_0 — корень уравнения (1), т. е. $f(x_0) = x_0$. Тогда имеем

$$f(f(x_0)) = f(x_0) = x_0.$$

Значит, x_0 также является корнем уравнения (2).

Обратно, пусть x_0 — корень уравнения (2) и функция $y=f(x)$ — монотонно возрастающая. Предположим, что $f(x_0) \neq x_0$. Для определенности, пусть $f(x_0) > x_0$ (случай $f(x_0) < x_0$ рассматривается аналогично). Тогда выполняются неравенства

$$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0,$$

что противоречит равенству $f(f(x_0)) = x_0$. Следовательно, $f(x_0) = x_0$, т. е. x_0 является корнем уравнения (1). Это означает, что уравнения (1) и (2) являются равносильными.

Пример 7. Решить уравнение $\sqrt{3+\sqrt{x}} = x - 3$.

Решение. Запишем уравнение в виде $3+\sqrt{3+\sqrt{x}} = x$ и рассмотрим функцию

$$f(x) = 3 + \sqrt{x}.$$

Ясно, что $f(x_1) < f(x_2)$, когда $0 \le x_1 < x_2$. Поэтому $y = f(x)$ — монотонно возрастающая на $[0; +\infty)$ функция. Кроме того, уравнение $3+\sqrt{3+\sqrt{x}} = x$ можно записать как $f(f(x)) = x$.

Решим уравнение $f(x) = x$, т. е. $3+\sqrt{x} = x$. Имеем

$$3+\sqrt{x} = x \Leftrightarrow x - \sqrt{x} - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = t \ge 0, \\ t^2 - t - 3 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = \frac{1\pm\sqrt{13}}{2}, \\ x \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{1+\sqrt{13}}{2} \Leftrightarrow x = \left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^2 = \frac{7+\sqrt{13}}{2}.$$

Согласно доказанной теореме полученное решение является одновременно решением уравнения $3+\sqrt{3+\sqrt{x}} = x$, а значит, является решением и исходного уравнения.

О т в е т: $\left\{\frac{7+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

П р и м е р 8. Решить уравнение $\{2x - 5\} = a$.

Р е ш е н и е. Из свойств дробной части числа следует $0 \le \{2x - 5\} < 1$. Поэтому если $a \in (-\infty;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$, то заданное уравнение не имеет решения.

Пусть $0 \le a < 1$. Тогда имеем

$$\{2x-5\} = a \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 5 = a + n, \\ n \in N, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = a + 5 + n, \\ n \in N, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{a+5+n}{2}, \\ n \in N. \end{cases}$$

О т в е т: Если число $a \in (-\infty;\ 0) \cup [1;\ +\infty)$, то уравнение не имеет решения; если же $a \in [0;\ 1)$, решением уравнения является множество $\left\{\frac{a+5+n}{2},\ n \in N\right\}$.

П р и м е р 9. Решить в натуральных числах уравнение

$$x^2 - y^2 = 2007.$$

Р е ш е н и е. $x^2 - y^2 = 2007 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 3 \cdot 3 \cdot 223 \Leftrightarrow$
$$\Leftrightarrow (x - y)(x + y) = 3 \cdot 3 \cdot 223.$$

Так как $x,\ y \in N$, то $x + y > x - y$, $x + y \in N$ и $x - y \in N$. Поэтому последнее уравнение равносильно трем следующим системам уравнений:

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2007; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 669; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y = 9, \\ x + y = 223; \end{cases}$

Решим каждую систему в отдельности. Имеем

а) $\begin{cases} x - y = 1, \\ x + y = 2007, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y, \\ 1 + y + y = 2007, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + y \\ 2y = 2006 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1003, \\ x = 1004. \end{cases}$

б) $\begin{cases} x - y = 3, \\ x + y = 669, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y, \\ 3 + y + y = 669, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + y, \\ 2y = 666, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 333, \\ x = 336. \end{cases}$

в) $\begin{cases} x - y = 9, \\ x + y = 223, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + y, \\ 9 + y + y = 223, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 9 + y, \\ 2y = 214, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 107, \\ x = 116. \end{cases}$

Следовательно, решением исходного уравнения является множество пар

$$\{(1004;\ 1003);\ (336;\ 333);\ (116;\ 107)\}.$$

П р и м е р 10. Решить в целых числах уравнение $x - y = xy$.

Р е ш е н и е. Имеем соотношения

$$x - y = xy \Leftrightarrow x - xy = y \Leftrightarrow x(1-y) = y. \qquad (3)$$

Рассмотрим следующие два случая:

1) $y = 1$. Тогда уравнение не имеет решения, поскольку $0 \neq 1$;

2) $y \neq 1$. Разделив обе части уравнения (3) на $y - 1$, получим

$$-x = \frac{y}{y-1} \text{ или } -x = 1 + \frac{1}{y-1}.$$

Так как x — целое число, то $y - 1 = \pm 1$. Поэтому имеем две пары (0; 0) и (−2; 2), удовлетворяющие заданному уравнению.

О т в е т: {(0; 0); (−2; 2)}.

П р и м е р 11. Решить в целых числах уравнение

$$x^2 + y^2 + 1 = 4z.$$

Р е ш е н и е. Пусть при делении x на 4 получается остаток l_1, а при делении y на 4 — остаток l_2. Тогда имеем $x = 4k_1 + l_1$ и $y = 4k_2 + l_2$, где k_1, $k_2 \in Z$, l_1, $l_2 \in \{0; 1; 2; 3\}$. Отсюда

$$x^2 + y^2 = (4k_1 + l_1)^2 + (4k_2 + l_2)^2 =$$
$$= 16k_1^2 + 8k_1l_1 + l_1^2 + 16k_2^2 + 8k_2l_2 + l_2^2 = 4k_3 + l_3,$$

где $k_3 \in Z$, а l_3 — остаток от деления числа $l_1^2 + l_2^2$ на 4.

Легко проверить, что при делении числа $l_1^2 + l_2^2$ на 4 могут получаться остатки, равные 0, 1 или 2, т.е. $l_3 \in \{0; 1; 2\}$. Исходное уравнение можно переписать в следующем виде:

$$4k_3 + l_3 + 1 = 4z.$$

Отсюда видно, что левая и правая части уравнения имеют разные остатки при делении на 4. Поэтому при целых x, y, z уравнение решения не имеет. О т в е т: $\varnothing$.

Вопросы и задания

1. Какие уравнения называются нестандартными уравнениями?
2. Какими способами решаются нестандартные уравнения?
3. Привести несколько примеров нестандартных уравнений.
4. Привести пример и рассказать, как решается уравнение в целых числах.
5. Привести пример и рассказать, как решается уравнение в натуральных числах.

Упражнения

1. Решить уравнение:

а) $3^{|x|} = \cos x$; б) $\sin x = x^2 - 4x + 6$;

в) $11^x + 13^x = 24^x$; г) $\sqrt{1+\sqrt{x}} = x - 1$;

д) $x^3 + 1 = 2\sqrt[3]{2x-1}$; е) $\ln(1 + \ln x) = x - 1$;

ж) $\sqrt[3]{x} + 1 = 2(2x-1)^3$; з) $|5-6x| + \dfrac{4\operatorname{tg}\frac{\pi x}{3}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\pi x}{3}} = 2\sin\dfrac{2\pi x}{3} + 4\sin\dfrac{\pi x}{3}$;

и) $\left(\sin^2 x + \dfrac{1}{\sin^2 x}\right)^2 + \left(\cos^2 x + \dfrac{1}{\cos^2 x}\right) = \dfrac{24+\sin y}{2}$;

к) $\dfrac{x^2+x+1}{x+1} + \dfrac{x^2+2x+2}{x+2} = \dfrac{x^2+3x+3}{x+3} + \dfrac{x^2+4x+4}{x+4}$.

2. Решить в целых числах уравнение:

а) $8x + 10y = 19$; в) $19x + 99y = 9$;

б) $3x - 18y = 17$; г) $x^2 - y^2 - 2y = 13$.

3. Решить в натуральных числах уравнение:

а) $x^2 - y^2 = 1995$; в) $x^2 + y^2 + z^2 = 2xyz$.

б) $x^2 - 7 = 2^y$;

---

4. Решить уравнение:

а) $12^{|x|} = \dfrac{1}{2}\sin 3x$; е) $x + \dfrac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \dfrac{35}{12}$;

б) $\sin\dfrac{\pi x}{10} = x^2 - 10x + 26$; ж) $\sin 2x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}$;

в) $8^x + 13^x = 21^x$; з) $\sin(x^3 + 2x^2 + 1) = x^2 + 2x + 3$;

г) $32 + x = \sqrt[5]{2-x}$; и) $\sqrt[4]{19-x} - \sqrt[3]{x-3} = 2$;

д) $\sqrt{x^2+1} - x = \dfrac{5}{2\sqrt{x^2+1}}$; к) $\sqrt[6]{x} + 2x^3 + \log_3(x+2) = 4 - \sqrt{1-x}$.

5. Решить в целых числах уравнение:

а) $10x + 12y = 17$; в) $x + xy + 4 = 3y$;

б) $15x - 5y = 13$; г) $2x^2 + 9x + y = 2 + 2xy$.

6. Решить в натуральных числах уравнение:

а) $x+\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{z}}=\dfrac{30}{7}$; в) $x^2+4x=8y+11$;

б) $x^3-y^3=1993$; г) $xy+5y=25+3x$.

§ 3. Нестандартные неравенства

Неравенства называют *нестандартными*, если они заданы в виде, отличном от вида «обычного» неравенства, либо если их нельзя решить стандартными способами.

Примерами нестандартных неравенств могут служить неравенства:

$$\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}<\sqrt{3},\ \sqrt{\sin x}\ge\sqrt{1-|x|+\sin x}.$$

Общего способа решения нестандартных неравенств не существует. Обычно такие неравенства решаются с применением известных свойств функции или свойств неравенств.

Пример 1. Решить неравенство $\log_5 x<\sqrt{1-x^4}$.

Решение. Область допустимых значений неравенства состоит из всех $x\in(0;\ 1]$. Ясно, что $x=1$ не удовлетворяет неравенству, так как $\log_5 1=\sqrt{1-1}$, или $0=0$.

Так как $\log_5 x<0$, $\sqrt{1-x^4}>0$ при условии $0<x<1$, то для всех $x\in(0;\ 1)$ имеет место неравенство $\log_5 x<\sqrt{1-x^4}$.
Ответ: $(0;\ 1)$.

Пример 2. Решить неравенство $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}<\sqrt{3}$.

Решение. Область допустимых значений неравенства есть промежуток $[-3;\ 9]$. Разобьем этот промежуток на два множества: $[-3;\ 0]$ и $(0;\ 9]$. Тогда для $x\in[-3;\ 0]$ имеем

$$\sqrt{x+3}\ge 0\ \text{ и }\ \sqrt[4]{9-x}\ge\sqrt[4]{9}=\sqrt{3}.$$

Значит, $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}\ge\sqrt{3}$, и поэтому исходное неравенство не имеет решения на $[-3;\ 0]$.

Для $x\in(0;\ 9]$ имеем

$$\sqrt{x+3}>\sqrt{3}\ \text{ и }\ \sqrt[4]{9-x}\ge 0.$$

Значит, $\sqrt{x+3}+\sqrt[4]{9-x}>\sqrt{3}$ и, поэтому на (0; 9] исходное неравенство также не имеет решения. Ответ: ∅.

Пример 3. Решить неравенство $\sqrt{\sin x}<\sqrt{1-|x|+\sin x}$.

Решение. Используя свойства равносильности систем неравенств, имеем

$$\sqrt{\sin x}<\sqrt{1-|x|+\sin x} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\ge 0,\\ 1-|x|+\sin x\ge 0,\\ \sin x<1-|x|+\sin x,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\ge 0,\\ 1+\sin x\ge |x|,\\ |x|<1,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\sin x\ge 0,\\ |x|\le 1+\sin x,\\ -1<x<1,\end{cases} \Leftrightarrow x\in[0;1).$$

Ответ: [0; 1).

Пример 4. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству

$$3^{\sqrt{5-x}}\le (x-4)\ln(x-4)\,?$$

Решение. Определим область допустимых значений заданного неравенства. Имеем

$$\begin{cases}5-x\ge 0,\\ x-4>0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 5,\\ x>4,\end{cases} \Leftrightarrow x\in(4;5].$$

Следовательно, только одно целое значение $x = 5$ входит в область допустимых значений.

Подставив $x = 5$ в исходное неравенство, получим неверное соотношение:

$$3^{\sqrt{5-5}}\le(5-4)\ln 1 \Leftrightarrow 1\le \ln 1 \Leftrightarrow 1\le 0.$$

Поэтому нет целых чисел, удовлетворяющих исходному неравенству.

Ответ: 0.

Пример 5. Решить неравенство $\frac{1-x}{1+x}<7^x$.

Решение. Областью допустимых значений данного неравенства является множество $(-\infty;\,-1)\cup(-1;\,+\infty)$.

Разобьем это множество на три части: 1) $x \in (-\infty; -1)$; 2) $x \in (-1; 0]$; 3) $x \in (0; +\infty)$.

Пусть $x \in (-\infty; -1)$. Тогда $\frac{1-x}{1+x} < 0$, а $7^x > 0$. Поэтому исходное неравенство выполняется и множество $(-\infty; -1)$ входит в его решение.

Пусть $x \in (-1; 0]$. Тогда $\frac{1-x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x} \geq 1$, а $7^x \leq 1$. Поэтому исходное неравенство на $(-1; 0]$ не выполняется.

Наконец, пусть $x \in (0; +\infty)$. Тогда $\frac{1-x}{1+x} = 1 - \frac{2x}{1+x} < 1$, а $7^x > 1$. Поэтому весь промежуток $(0; +\infty)$ входит в решение исходного неравенства.

Ответ: $(-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

Пример 6. Решить неравенство $[x]^2 - 5[x] + 6 \leq 0$.

Решение. Используя свойства равносильности неравенств и метод интервалов, имеем

$$[x]^2 - 5[x] + 6 \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} [x] = t, \\ t^2 - 5t + 6 \leq 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} [x] = t, \\ 2 \leq t \leq 3, \end{cases} \Leftrightarrow 2 \leq [x] \leq 3.$$

Применяя теперь свойства целой части числа, получаем

$$2 \leq [x] \leq 3 \Leftrightarrow 2 \leq x < 4 \Leftrightarrow x \in [2; 4).$$

Ответ: $[2; 4)$.

Пример 7. Решить неравенство $\operatorname{sign}([x]^2 + 4[x] + 9) \leq 0$.

Решение. Так как $[x]^2 + 4[x] + 9 = ([x] + 2)^2 + 5 \geq 5$, то при всех значениях x выполняется равенство

$$\operatorname{sign}([x]^2 + 4[x] + 5) = 1.$$

Следовательно, исходное неравенство не имеет решения.

Ответ: $\varnothing$.

Вопросы и задания

1. Какие неравенства называются нестандартными неравенствами?
2. Как решаются нестандартные неравенства?
3. Привести несколько примеров нестандартных неравенств.
4. Привести пример и рассказать, как решается неравенство в целых числах.

Упражнения

1. Решить неравенство:

а) $\sqrt{3+x} \geq 3-x$; б) $\cos x \geq y^2 + \sqrt{y - x^2 - 1}$;

в) $\sin 2^{\frac{x}{\pi}} < 2^{|\sin x|}$; г) $\arcsin \frac{2}{x} + \sqrt{x-1} > 1$;

д) $\sqrt{x^2-1}\,(4-x)\log_3(3+x) > 0$;

е) $\log_2^2 x - 2\log_2 x + x^2 - 4x + 5 > 0$; ж) $[x]^2 - 8[x] + 15 \leq 0$;

з) $\operatorname{sign}(x^2+6x+10) \leq \operatorname{sign}(x^2-5x-6)$;

и) $\operatorname{sign}(x^2+5x+6) \leq \operatorname{sign}(x^2+x+2)$.

2. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству:

а) $\sqrt{1+x} \leq \arccos(x+2)$;

б) $\sqrt[4]{1-\cos\left(\frac{x^2+x}{4}\pi\right)} + 2^{\sqrt{1-x^4}} > 1$;

в) $\sqrt{4-x} + \sqrt{x-3} < (x-1)^4(x-5)$; г) $x\log_3 x < 18$?

---

3. Решить неравенство:

а) $|x| + \sqrt{x^2-1} \geq 1$; б) $x + 2^x \leq \sqrt{1-x} + 3$;

в) $(4x - x^2 - 3)\log_2(\cos^2 \pi x + 1) \geq 1$;

г) $2^{-|x-2|}\log_2(4x - x^2 - 2) \geq 1$; д) $\log_2 x < 3 - x$;

е) $[x]^2 - 10[x] + 16 \leq 0$;

ж) $\operatorname{sign}(x^2+2x+10) \leq \operatorname{sign}(x^2+x+1)$;

з) $\operatorname{sign}(-x^2-2x-3) \geq \operatorname{sign}(x^2-3x-4)$.

4. Сколько целых чисел удовлетворяет неравенству:

а) $\sqrt{3-x} + \sqrt{x-1} > (x-1)^4(x-7)$;

б) $\sqrt{x-1} + \sqrt[4]{x+15} > 3$;

в) $\sqrt{\sqrt{x+7} - x} < \sqrt{x-1}$;

г) $\ln(1-x^2) \leq x + 0{,}25$?

§ 4. Нестандартные системы уравнений и неравенств

К *нестандартным системам уравнений или неравенств* относятся такие системы, для нахождения решения которых необходимо использование какого-либо «специфического» способа, связанного именно с данными конкретными системами.

Общего способа для нахождения решения таких систем не существует. Поэтому мы ограничимся разбором нескольких примеров.

Пример 1. Найти все пары чисел $(x;\ y)$, удовлетворяющие уравнению $8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0$.

Решение. Применяя формулу $\cos(x+y)+\cos(x-y) = 2\cos x\cos y$, получаем

$$\begin{aligned}8\cos x\cos y\cos(x-y)+1 &= 4\cos(x-y)(\cos(x+y)+\cos(x-y))+1=\\ &=4\cos^2(x-y)+4\cos(x-y)\cos(x+y)+1=\\ &=(2\cos(x-y)+\cos(x+y))^2+1-\cos^2(x+y)=\\ &=(2\cos(x-y)+\cos(x+y))^2+\sin^2(x+y).\end{aligned}$$

Тогда из равносильности уравнений и систем уравнений следует, что

$$8\cos x\cos y\cos(x-y)+1=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2\cos(x-y)+\cos(x+y))^2+\sin^2(x+y)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos(x-y)+\cos(x+y)=0,\\ \sin(x+y)=0,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2\cos(x-y)+\cos(x+y)=0,\\ x+y=n\pi,\quad n\in Z\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=-x+n\pi,\quad n\in Z\\ 2\cos(2x-n\pi)+\cos n\pi=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=-x+n\pi,\ n\in Z,\\ 2\cos 2x+1=0,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\cos 2x=-\dfrac{1}{2},\\ y=-x+n\pi,\ n\in Z,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x=\pm\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi,\ k\in Z,\\ y=-x+n\pi,\ n\in Z,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z,\\ y=\mp\dfrac{\pi}{3}-k\pi+n\pi,\ n\in Z,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\pm\dfrac{\pi}{3}+k\pi,\ k\in Z,\\ y=\mp\dfrac{\pi}{3}+m\pi,\quad m\in Z.\end{cases}$$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\pi}{3}+k\pi;\ -\frac{\pi}{3}+m\pi\right);\left(-\frac{\pi}{3}+k\pi;\ \frac{\pi}{3}+m\pi\right),\ k, m \in Z\right\}.$

Пример 2. Найти все пары чисел (x; y), удовлетворяющие уравнению

$$\sqrt{2-|y|}\,(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33})=$$
$$=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}.$$

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x)=5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}.$$

Применяя формулы $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}$, $\sin 2x=2\sin x\cos x$, $\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2}$, имеем:

$$f(x)=5\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}-3\sin 2x-\frac{9(1+\cos 2x)}{2}+3\sqrt[3]{33}=$$
$$=-2-(3\sin 2x+7\cos 2x)+3\sqrt[3]{33}=$$
$$=-2-\sqrt{58}\sin\left(2x+\arcsin\frac{7}{\sqrt{58}}\right)+3\sqrt[3]{33}\geq -2-\sqrt{58}+3\sqrt[3]{33}.$$

Покажем, что $-2-\sqrt{58}+3\sqrt[3]{33}>0$. Действительно, верны равносильные неравенства

$$-2-\sqrt{58}+3\sqrt[3]{33}>0 \Leftrightarrow 3\sqrt[3]{33}>2+\sqrt{58} \Leftrightarrow 27\cdot 33>\left(2+\sqrt{58}\right)^3 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 891>70\sqrt{58}+356 \Leftrightarrow 535>70\sqrt{58} \Leftrightarrow 107>14\sqrt{58} \Leftrightarrow 11449>11368.$$

Следовательно, $f(x)>0$ для всех $x\in(-\infty;\ +\infty)$, а $\sqrt{2-|y|}\cdot f(x)\geq 0$. Тогда и правая часть исходного уравнения является неотрицательной для всех $x\in(-\infty;\ +\infty)$, т. е.

$$(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}\geq 0.$$

Но так как $|\arcsin x|\leq\frac{\pi}{2}$, $0\leq\arccos x\leq\pi$, то для всех $x\in[-1;\ 1]$ имеем

$$(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi}{4}\leq\frac{\pi^2}{4}+\pi^2-\frac{5\pi^2}{4}=0.$$

Отсюда вытекает, что $(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}=0$. Поэтому

$$\sqrt{2-|y|}\left(5\sin^2 x-6\sin x\cos x-9\cos^2 x+3\sqrt[3]{33}\right)=$$

$$=(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2-\frac{5\pi^2}{4}\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{2-|y|}\cdot f(x)=0,\\(\arcsin x)^2+(\arccos x)^2=\frac{5\pi^2}{4}\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}|y|=2,\\|\arcsin x|=\frac{\pi}{2},\\\arccos x=\pi,\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}|y|=2,\\x=-1,\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=-1,\\y=2;\end{cases}\\\begin{cases}x=-1,\\y=-2.\end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\{(-1;\ 2);\ (-1;\ -2)\}$.

Пример 3. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases}x^2y^2-2x+y^2=0,\\2x^2-4x+3+y^3=0.\end{cases}$$

Решение. Пусть пара $(x_0;\ y_0)$ удовлетворяет заданной системе. Тогда справедлива система числовых равенств

$$\begin{cases}x_0^2y_0^2-2x_0+y_0^2=0,\\2x_0^2-4x_0+3+y_0^3=0.\end{cases}$$

Преобразуем первое из них к виду $y_0^2=\frac{2x_0}{1+x_0^2}$. Поскольку $(1-x_0)^2\ge 0$, то $\frac{2x_0}{1+x_0^2}\le 1$, и поэтому $y_0^2\le 1$, или $|y_0|\le 1$.

Второе из равенств системы можно записать в виде $2(x_0-1)^2+1+y_0^3=0$. Так как $|y_0|\le 1$, то $1+y_0^3\ge 0$. Тогда из последнего равенства следует, что $(x_0-1)^2=0$. Откуда $x_0=1$, $y_0=-1$. Ответ: $\{(1;\ -1)\}$.

Пример 4. Найти решение системы

$$\begin{cases}y+2=(3-x)^3,\\(2z-y)(y+2)=9+4y,\\x^2+z^2=4x,\\z\ge 0.\end{cases}$$

Р е ш е н и е. Пусть (x_0; y_0; z_0) удовлетворяет системе и $z_0 \ge 0$. Тогда справедлива система числовых соотношений

$$\begin{cases} y_0 + 2 = (3 - x_0)^3, \\ (2z_0 - y_0)(y_0 + 2) = 9 + 4y_0, \\ x_0^2 + z_0^2 = 4x_0, \\ z_0 \ge 0. \end{cases}$$

Выделив полный квадрат, перепишем систему в виде

$$\begin{cases} (3 - x_0)^3 = y_0 + 2, \\ (y_0 + 3 - z_0)^2 = z_0^2 - 2z_0, \\ (x_0 - 2)^2 = 4 - z_0^2, \\ z_0 \ge 0. \end{cases}$$

Отсюда ясно, что должны выполняться следующие условия:

$$\begin{cases} z_0^2 - 2z_0 \ge 0, \\ 4 - z_0^2 \ge 0, \\ z_0 \ge 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z_0 \in (-\infty; 0] \cup [2; +\infty), \\ z_0 \in [-2; 2], \\ z_0 \in [0; +\infty), \end{cases} \Leftrightarrow z_0 \in \{0; 2\}.$$

Подставляя теперь вместо z_0 значение 0, имеем:

$$\begin{cases} (x_0 - 2)^2 = 4, \\ (y_0 + 3)^2 = 0, \\ (3 - x_0)^3 = y_0 + 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 4, \\ y_0 = -3. \end{cases}$$

Подставляя вместо z_0 значение 2, получаем:

$$\begin{cases} (3 - x_0)^3 = y_0 + 2, \\ (x_0 - 2)^2 = 0, \\ (y_0 + 1)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = 2, \\ y_0 = -1. \end{cases}$$

О т в е т: $\{(4; -3; 0); (2; -1; 2)\}$.

П р и м е р 5. Решить систему $\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x \le 2y. \end{cases}$

Р е ш е н и е. Применяя свойства равносильности уравнений и систем, имеем:

$$\begin{cases} 2^{x+1} = 4y^2 + 1, \\ 2^x \le 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x \cdot 2 = 4y^2 + 1, \\ 2^x \le 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2y^2 + \frac{1}{2}, \\ 2^x \le 2y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2y^2 + \frac{1}{2}, \\ 2y^2 + \frac{1}{2} - 2y \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2y^2 + \frac{1}{2}, \\ y^2 - y + \frac{1}{4} \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2y^2 + \frac{1}{2}, \\ \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}, \\ 2^x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2}, \\ x = 0. \end{cases}$$

О т в е т: $\left\{\left(0; \frac{1}{2}\right)\right\}$.

Вопросы и задания

1. Какие системы уравнений или неравенств называются нестандартными?
2. Как решаются нестандартные системы уравнений и неравенств?
3. Привести несколько примеров нестандартных систем уравнений.

Упражнения

1. Найти все пары чисел ($x; y$), удовлетворяющие уравнению

$$\frac{3+2\cos(x-y)}{2} = \sqrt{3+2x-x^2}\cos^2\left(\frac{x-y}{2}\right) + \frac{\sin^2(x-y)}{2}.$$

2. Среди всех наборов чисел (x; y; z; v), удовлетворяющих системе уравнений $\begin{cases} x^2 + y^2 = 3, \\ z^2 + v^2 = 25, \\ xv + yz = 5\sqrt{3} \end{cases}$ найти такие, при которых выражение $x + z$ принимает наибольшее значение.

3. Решить в целых числах уравнение

$$3(x-3)^2 + 6y^2 + 2z^3 + 3y^2z^2 = 33.$$

Решить системы (**4–10**):

4. $\begin{cases} 2x^2+1=y-|\sin x|, \\ \mathrm{tg}^2 x+y^2=1. \end{cases}$ **5.** $\begin{cases} 2^x+x=y+x^2, \\ x^2+y^2=1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} \sqrt{(x-1)^2+y^2}+\sqrt{(x+1)^2+y^2}=2, \\ x^2+y^2=\sin^2 x. \end{cases}$

7. $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin^3 x+\cos^3 y+1, \\ \sin^2 x+\sin^2 y=\sin^4 x+\sin^4 y. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2y^3+2x^2+3x+3=0, \\ 2z^3+2y^2+3y+3=0, \\ 2x^3+2z^2+3z+3=0. \end{cases}$ **9.** $\begin{cases} \left|y-\frac{1}{x}\right|+\left|\frac{5}{2}-x-y\right|=\frac{5}{2}-x-\frac{1}{x}, \\ x^2+y^2=\frac{17}{4}, \\ x>0, \\ y>0. \end{cases}$

10. $\begin{cases} \left|x+\frac{1}{y}\right|+\left|\frac{10}{3}-x+y\right|=\frac{10}{3}+y+\frac{1}{y}, \\ x^2+y^2=\frac{82}{9}, \\ x>0, \\ y<0. \end{cases}$

Найти все пары чисел ($x; y$), удовлетворяющие уравнению (**11–14**):

11. $2^{1+2x-x^2}(1-x^2y^2)=x^2+y^2+2xy-2x-2y+5.$

12. $|1+\mathrm{tg}^2 y|+|1+\sin^2 x|=2.$ **13.** $\log_2(2+y^2)=\sin^2(x+2).$

14. $\sin x+\cos(x+y)=1.$

Решить системы (**15–19**):

15. $\begin{cases} y^2-xy+1=0, \\ x^2+2x=-y^2-2y-1. \end{cases}$ **16.** $\begin{cases} |xy-2|=6-x^2, \\ 2+3y^2=2xy. \end{cases}$

17. $\begin{cases} \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x = 2\sin^2 y, \\ \sin^2 y + \cos^2 z = 1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} 5^{\left|x^2-5x+4\right|-\log_5 2} = 2^{y-3}, \\ 3|y| - |y+1| + (y-2)^2 \le 3. \end{cases}$

19. $\begin{cases} 4^{\left|x^2+8x+12\right|-\log_4 7} = 7^{2y-1}, \\ |y-3| - 3|y| + 2(y+1)^2 \ge 1. \end{cases}$

Упражнения для повторения

Решить уравнение в натуральных числах (**1—4**):

1. $x + \dfrac{1}{y+\frac{1}{z}} = \dfrac{10}{7}$.

2. $6^x = y^2 + y - 2$.

3. $18x + 12y = 7$.

4. $x^2 = y^2 + y^3$.

Решить систему уравнений в натуральных числах (**5—6**):

5. $\begin{cases} x^2 - y^2 - z^2 = 1, \\ y + z - x = 3. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^3 - y^3 = 7z^4, \\ z^2 - 2y^2 = 1. \end{cases}$

Решить уравнение в целых числах (**7—10**):

7. $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{xy} + \dfrac{1}{y^2} = 1$.

8. $55x^2 - 12xy - 2y^2 = 9$.

9. $x^2 - 2xy + 2y^2 = 9$.

10. $5x^2 + y^2 + 3z^2 - 2yz = 30$.

Решить систему неравенств в целых числах (**11—12**):

11. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 18x - 20y - 166, \\ 32x - y^2 > x^2 + 12y + 271. \end{cases}$

12. $\begin{cases} x^2 + y^2 < 16x - 22y - 171, \\ 30x - y^2 > 252 + 14y + x^2. \end{cases}$

Решить уравнение (**13—18**):

13. $\sin x = 1 + \dfrac{1}{x^2+1}$.

14. $\cos x = 1 + |x|$.

15. $(x - y + 1)^2 + y^2 + (x + 2y - 3z)^2 = 0$.

16. $(x - y)^2 + (x + y + 1)^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2xy + 2xz - 2yz = 0$.

17. $12x^2 + 8y^2 + 8z^2 + 8yz + 12x - 8y - 4z + 5 = 0.$

18. $1 + (x^2 + y^2 + 1)^2 = (x^2 + y^2 + 1)(1 - x^2 - y^2 - z^2 + 2z).$

Решить уравнение (**19—23**):

19. $[x] + [2x] = 4.$ **20.** $[x]^2 - 3[x] - 4 = 0.$

21. $\{8x\} = [x].$ **22.** $\operatorname{sign}(x^2 - 8x - 9) = \operatorname{sign}(x^2 - 6x - 7).$

23. $[x] = \operatorname{sign}(x).$

Решить неравенство (**24—28**):

24. $\cos x < x^2 + 1.$ **25.** $\cos x \le 1 + |x|.$

26. $\left|\sqrt{x^2 - x + 1} - 2x + 1\right| > \sqrt{x^2 - x + 1} + 2x.$

27. $|x^3 - \sin x| < |2x^3 + \sin x|.$

28. $\sqrt[4]{1 - x^2} + \sqrt{x^4 - 1} < 2^x - \log_2(1 + x^4).$

Решить уравнение (**29—30**):

29. $\sqrt{x^2 - 4}(3\sin^2 x + 10\sin x\cos x + 11\cos^2 x - 2\sqrt[3]{301}) =$
$= 5\pi^2 - 4\arcsin^2 y - 4\arccos^2 y.$

30. $\sqrt{x^2 - 9}\left(7\sin^2 x + 4\sin x\cos x - 3\cos^2 x - 3\sqrt[3]{15}\right) =$
$= \frac{7}{8}\pi^3 - \arcsin^3 y - \arccos^3 y.$

Решить систему (**31—35**):

31. $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + xz, \\ x^3 + y^3 + z^3 = 1. \end{cases}$

32. $\begin{cases} \operatorname{tg}^2(x - y) - \frac{4}{\sqrt{3}}\operatorname{tg}(x - y) + 1 = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2}, \\ x \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right], \\ y \in [-\pi; 0]. \end{cases}$

33. $\begin{cases} \left|\dfrac{3}{y} - x\right| + \left|\dfrac{13}{2} + x + y\right| = \dfrac{13}{2} + y + \dfrac{3}{y}, \\ x^2 + y^2 = \dfrac{145}{4}, \\ x < 0, \\ y < 0. \end{cases}$

34. $\begin{cases} y \sin x = \log_2 \left|\dfrac{y \sin x}{1+3y}\right|, \\ \left(6y^2 + 2y\right)\left(4^{\sin^4 x} + 4^{\cos^2 x}\right) = 25y^2 + 6y + 1, \\ |y| \le 1. \end{cases}$

35. $\begin{cases} (2 - x)(3x - 2z) = 3 - z, \\ y^3 + 3y^2 = x^2 - 3x + 2, \\ x^2 + y^2 = 6z, \\ z \le 3. \end{cases}$

ГЛАВА XI

ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛ

§ 1. Числовые последовательности

1. Числовая последовательность. Способы задания числовых последовательностей.

Определение 1. Любая функция $y = f(n)$, заданная на множестве N всех натуральных чисел, называется *бесконечной числовой последовательностью*.

Из данного определения следует, что упорядоченное множество чисел (возможно повторяющихся) $f(1)$, $f(2)$, ..., $f(n)$, ..., где $n \in N$, является бесконечной числовой последовательностью. Для удобства обычно каждое значение $f(n)$ функции обозначают с помощью одной буквы (например, a_n) снабженной индексом, указывающим, какому натуральному числу соответствует взятое значение функции.

П р и м е р 1. Пусть дана последовательность 2, 5, 8, ... В этой последовательности $a_1 = 2$, $a_2 = 5$, $a_3 = 8$ и т. д.

П р и м е р 2. Рассмотрим последовательность 2, 4, 8, 16, ..., полученную с помощью натуральных степеней числа 2 в порядке возрастания. Тогда натуральному числу $n = 1$ соответствует значение $f(1) = 2$, натуральному числу $n = 2$ соответствует $f(2) = 4$, натуральному числу 3 соответствует 8 и т. д. Таким образом, каждому натуральному числу n поставлено в соответствие число $f(n) = 2^n$.

Пусть дана некоторая числовая последовательность

$$a_1,\ a_2,\ \dots,\ a_n,\ \dots\ . \qquad (1)$$

Числа, которые образуют последовательность, называются *членами последовательности*. В частности, a_1 называется первым членом последовательности, a_2 — вторым членом и т. д., a_n — называется n-м членом последовательности (1).

В случае когда запись (1) является конечной, ее называют *конечной числовой последовательностью.*

П р и м е р 3. Набор чисел 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, состоящий из всех цифр, является конечной числовой последовательностью.

Числовую последовательность можно задавать по-разному. Чтобы задать числовую последовательность, необходимо указать способ, позволяющий найти любой член данной последовательности.

Рассмотрим несколько способов задания последовательностей.

1-й способ. Наиболее часто встречающийся способ состоит в задании формулы общего члена числовой последовательности, т. е. формулы, выражающей каждый член числовой последовательности через его порядковый номер.

Пример 4. Пусть общий член последовательности задан формулой $a_n = n^3$. Несколько первых членов этой последовательности таковы: 1, 8, 27, 64, ...

Пример 5. Пусть общий член последовательности задан формулой $b_n = \frac{n}{n+2}$. Члены этой последовательности таковы: $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{5}{7}, ...$.

2-й способ. Последовательность задается посредством описания всех ее членов.

Пример 6. Запишем последовательность десятичных приближений числа $\sqrt{3}$, взятых с недостатком. Первые члены такой последовательности таковы: 1; 1,7; 1,71; ... .

3-й способ. Задаются несколько первых членов последовательности, а остальные члены с помощью рекуррентного соотношения выражаются через предыдущие.

Пример 7. Пусть последовательность задана соотношениями

$$a_1 = a_2 = a_3 = 2,\ a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \text{ при } n > 3.$$

Тогда последовательность имеет следующий вид: 2, 2, 2, 4, 6, 10, 16, ...

4-й способ. Если последовательность конечная, то такую последовательность можно задать указанием всех ее членов.

Пример 8. Запишем последовательность всех двузначных чисел, кратных 5:

$$10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50,$$
$$55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95.$$

2. Монотонные последовательности. Числовая последовательность (1) обычно обозначается коротко символом $\{a_n\}$, $n \in N$.

Определение 2. Числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *монотонно возрастающей*, если каждый ее член, начиная со второго, больше предыдущего, т.е.

$$a_{n+1} > a_n \text{ при } n \in N.$$

Пример 9. Пусть дана последовательность:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots .$$

Эта последовательность является монотонно возрастающей. Действительно, имеем

$$a_n = \frac{n}{n+1} = \frac{n(n+2)}{(n+1)(n+2)}, \quad a_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)}.$$

Сравним числители полученных дробей. Так как $n(n + 2) = n^2 + 2n$, а $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$, то $a_{n+1} > a_n$ при всех натуральных значениях n.

Если члены монотонно возрастающей последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$ изображать точками на числовой прямой, то a_{n+1} будет находиться правее a_n:

Определение 3. Числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *монотонно убывающей*, если каждый ее член, начиная со второго, меньше предыдущего, т.е.

$$a_{n+1} < a_n \text{ при } n \in N.$$

Пример 10. Пусть дана последовательность с общим членом $a_n = \frac{n+2}{2n}$. Сравним a_{n+1} с a_n. Имеем $a_{n+1} = \frac{n+3}{2(n+1)}$. Отсюда $a_n = \frac{(n+2)(n+1)}{2n(n+1)}$, $a_{n+1} = \frac{(n+3)\cdot n}{2(n+1)\cdot n}$. Преобразуя числители дробей, получим $(n + 2)(n + 1) = n^2 + 3n + 2$ для a_n и $(n + 3)n = n^2 + 3n$ для a_{n+1}. Следовательно, $a_{n+1} < a_n$, и поэтому данная последовательность является монотонно убывающей.

Если члены монотонно убывающей последовательности изображать точками на числовой прямой, то, начиная со второго члена, каждый член последовательности будет находиться левее предыдущего:

Кроме вышеизложенных последовательностей, на практике встречаются последовательности, называемые *монотонно неубывающими* и *монотонно невозрастающими*.

Поясним эти понятия на примерах.

Пример 11. Рассмотрим последовательность: 1, 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, ...

Эта последовательность является монотонно неубывающей последовательностью. Каждый член этой последовательности, начиная со второго, не меньше предыдущего, т.е.

$$a_{n+1} \geq a_n \text{ при } n \in N.$$

Пример 12. Пусть дана последовательность

$$1, 1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots .$$

Для этой последовательности, начиная со второго члена, выполняется соотношение $a_{n+1} \leq a_n$, $n \in N$. Такая последовательность является монотонно невозрастающей последовательностью.

Монотонно возрастающие, монотонно убывающие, монотонно неубывающие и монотонно невозрастающие последовательности называют *монотонными последовательностями*.

Следует отметить, что не все последовательности являются монотонными.

Пример 13. Последовательность, определенная формулой $a_n = (-1)^n \cdot 2$ при $n \in N$, не является монотонной последовательностью.

Действительно, так как $a_1 = -2$, $a_2 = 2$, $a_3 = -2$, $a_4 = 2$, ..., то общий член этой последовательности не удовлетворяет ни одному из указанных в определениях условий.

3. Ограниченная последовательность

Определение 4. Последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *ограниченной сверху*, если существует число a такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \leq a$.

Пример 14. Рассмотрим последовательность, составленную из десятичных приближений числа $\sqrt{2}$, взятых с недостатком: 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142; ...

В данной последовательности $a_n < 2$ для всех $n \in N$, т.е. последовательность ограничена сверху.

Определение 5. Числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ называется *ограниченной снизу*, если существует число b такое, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $a_n \geq b$.

Пример 15. Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = \frac{1}{n}: 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$. Очевидно, что каждый член этой последовательности больше нуля, т.е. для всех $n \in N$ выполняется неравенство $a_n = \frac{1}{n} > 0$. Следовательно, данная последовательность является ограниченной снизу.

Пример 16. Рассмотрим последовательность, общий член которой определяется формулой $a_n = (-1)^n n$. Эта последовательность не является ограниченной снизу и не является ограниченной сверху. Действительно, для любого числа $a > 0$ существует четное натуральное число $2k$ такое, что $a_{2k} > a$, т.е. $a_{2k} = (-1)^{2k} 2k = 2k > a$. Это означает, что заданная последовательность не является ограниченной сверху. Далее, для любого $b < 0$ существует нечетное натуральное число $2m + 1$ такое, что выполняется неравенство $|a_{2m+1}| > |b|$. Тогда $a_{2m+1} = (-1)^{2m+1}(2m + 1) = -(2m + 1) < -|b| = b$. Отсюда следует, что последовательность не является ограниченной снизу.

Ограниченная снизу и сверху числовая последовательность называется *ограниченной последовательностью*. Таким образом, последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ является ограниченной, если существуют действительные числа a и b такие, что для всех $n \in N$ выполняются неравенства $a \leq a_n \leq b$.

Геометрически ограниченная последовательность означает, что все ее члены содержатся в некотором отрезке $[a; b]$.

Последовательность, которая не является ограниченной снизу или сверху, называется *неограниченной последовательностью*.

Пример 17. Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = \frac{n}{n+1}$. Эта последовательность является ограниченной, поскольку для всех натуральных значений n выполняются неравенства $0 < \frac{n}{n+1} < 1$.

Пример 18. Последовательность, состоящая из четных натуральных чисел, является неограниченной последовательностью, так как она не ограничена сверху.

Утверждение. Для того чтобы последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ была ограниченной, необходимо и достаточно существование неотрицательного числа m такого, что для всех $n \in N$ выполняется неравенство $|a_n| \le m$.

Доказательство. Предположим, что последовательность $\{a_n\}$ ограниченная. Тогда существуют действительные числа a и b такие, что для любого члена последовательности выполняются неравенства $a \le a_n \le b$.

Если $|b| \ge |a|$, полагая $m = |b|$, для всех $n \in N$ имеем $|a_n| \le m$. Если же $|b| \le |a|$, следует положить $m = |a|$. Необходимость доказана.

Достаточность условия $|a_n| \le m$ является очевидной, так как это неравенство означает, что $-m \le a_n \le m$.

В случае когда $m = 0$, последовательность состоит из одних нулей. Действительно, если $m = 0$, то из $|a_n| \le 0$ следует $a_n = 0$ для всех $n \in N$.

Вопросы и задания

1. Дать определение числовой последовательности.
2. Привести примеры числовых последовательностей.
3. Перечислить способы задания числовых последовательностей.
4. Какие последовательности называются монотонными?
5. Перечислить все виды монотонных последовательностей.
6. Привести пример последовательности, не являющейся монотонной.
7. Какая последовательность называется ограниченной?
8. Привести пример неограниченной последовательности.

Упражнения

1. Определить, являются ли ограниченными сверху или снизу последовательности:

а) $x_n = 2n + 1$; в) $x_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; д) $x_n = 3 \cdot 3^{n-1}$.

б) $x_n = \dfrac{1}{(n+1)^2}$; г) $x_n = \dfrac{1}{n(n+2)}$;

2. Определить, являются ли нижеследующие последовательности монотонными:

а) $x_n = \dfrac{1}{n^2+1}$; б) $x_n = \dfrac{2^n+1}{2^n}$; в) $x_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n$; г) $x_n = \left(-\dfrac{1}{3}\right)^n$.

Изобразить эти числовые последовательности на числовой прямой.

3. Доказать, что последовательность $\left\{\frac{3n-1}{5n+2}\right\}$, $n \in N$ является монотонно возрастающей.

4. Если последовательность $\left\{\frac{an+2}{bn+1}\right\}$, $n \in N$ является монотонно возрастающей, то какими должны быть параметры a и b?

---

5. Определить, являются ли ограниченными сверху или снизу последовательности:

а) $x_n = \frac{1}{n^2+1}$; в) $x_n = \frac{n+2}{n}$; д) $x_n = \frac{2^n+1}{2^n}$.

б) $x_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n$; г) $x_n = \frac{2^n-1}{2^n}$;

6. Определить, являются ли нижеследующие последовательности монотонными:

а) $x_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$; б) $x_n = \left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

Изобразить эти числовые последовательности на числовой прямой.

7. Доказать, что последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, $n \in N$ является монотонно убывающей.

§ 2. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1. Определение арифметической прогрессии. Пусть d — некоторое действительное число и $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ — заданная числовая последовательность. Если для каждого члена этой последовательности, начиная со второго, выполняется равенство $a_k = a_{k-1} + d$, $k \geq 2$, то такая последовательность называется *арифметической прогрессией*. При этом число d называется *разностью арифметической прогрессии*.

Таким образом, по определению

$$a_2 = a_1 + d,\ a_3 = a_2 + d,\ a_4 = a_3 + d,\ \ldots,\ a_k = a_{k-1} + d,\ \ldots .$$

Далее имеем

$$a_3 = a_2 + d = (a_1 + d) + d = a_1 + 2d,$$
$$a_4 = a_3 + d = (a_1 + 2d) + d = a_1 + 3d.$$

Предположим, что $a_{k-1} = a_1 + ((k-1) - 1)d$. Тогда

$$a_k = a_{k-1} + d = a_1 + (k - 1 - 1)d + d = a_1 + (k-1)d.$$

Значит, $a_k = a_1 + (k - 1)d$ для всех натуральных значений k.

Полученная формула называется *формулой общего члена арифметической прогрессии*. Она выражает общий член прогрессии через его порядковый номер, первый член и разность арифметической прогрессии.

2. Свойства арифметической прогрессии.

1°. Каждый член арифметической прогрессии, начиная со второго, является средним арифметическим двух соседних членов.

Доказательство. Следует показать, что $a_k = \frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$ при всех $k \geq 2$. Если $k = 2$, то $a_2 = \frac{a_1+a_3}{2}$. Действительно, $\frac{a_1+a_3}{2} = \frac{a_1+a_1+2d}{2} = \frac{2a_1+2d}{2} = a_1 + d = a_2$. Если же $k \geq 3$, то

$$\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2} = \frac{a_1+(k-2)d+a_1+((k+1)-1)d}{2} = a_1 + (k-1)d = a_k .$$

2°. Если $k + l = m + n$, то $a_k + a_l = a_m + a_n$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} a_k + a_l &= a_1 + (k - 1)d + a_1 + (l - 1)d = \\ &= 2a_1 + (k + l - 2)d = 2a_1 + (m + n - 2)d = \\ &= a_1 + (m - 1)d + a_1 + (n - 1)d = a_m + a_n. \end{aligned}$$

3. Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии. Сумму первых n членов арифметической прогрессии обозначим S_n, т.е. $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$. Так как

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n \text{ и}$$
$$S_n = a_n + a_{n-1} + ... + a_3 + a_2 + a_1,$$

складывая почленно последние два равенства, имеем

$$2S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + ... + (a_{n-1} + a_2) + (a_n + a_1).$$

Тогда из свойства 2° вытекает, что

$$S_n = \frac{a_1+a_n}{2} \cdot n .$$

Учитывая, что $a_n = a_1 + (n - 1)d$, можно получить еще одну формулу для суммы первых n членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{2a_1+(n-1)d}{2} \cdot n .$$

П р и м е р 1. Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых 11-ти членов этой прогрессии.

Р е ш е н и е. Имеем формулу $S_{11} = \frac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11$. Согласно свойству 2°, верно равенство $a_1 + a_{11} = a_3 + a_9$. Поэтому $S_{11} = \frac{a_3 + a_9}{2} \cdot 11 = \frac{8}{2} \cdot 11 = 44$.

П р и м е р 2. Сумма трех чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 2, а сумма квадратов этих же чисел равна $1\frac{5}{9}$. Найти эти числа.

Р е ш е н и е. По условию примера имеем

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 2, \\ a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 1\frac{5}{9}. \end{cases}$$

Используя формулу $2a_2 = a_1 + a_3$(см. свойство 1°), из первого уравнения системы получаем $a_2 = \frac{2}{3}$. Тогда данная система преобразуется в следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1\frac{1}{3}, \\ a_1^2 + a_3^2 = 1\frac{1}{9}. \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $a_1 = 1, a_3 = \frac{1}{3}$ или $a_1 = \frac{1}{3}, a_3 = 1$.

Таким образом, $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ или $1, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}$ — искомые числа.

4. Геометрическая прогрессия. Последовательность отличных от нуля чисел b_1, b_2, b_3, ..., b_n, ... называется *геометрической прогрессией*, если ее члены удовлетворяют условию

$$b_k = b_{k-1} \cdot q,$$

где $k \geq 2$ и q — постоянное число, называемое *знаменателем геометрической прогрессии*.

Таким образом, по определению $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_2 \cdot q = (b_1 \cdot q) \cdot q = b_1 \cdot q^2$ и т. д. Предположим, что $b_{k-1} = b_1 \cdot q^{k-2}$.

Тогда $b_k = b_{k-1} \cdot q = (b_1 \cdot q^{k-2}) \cdot q = b_1 \cdot q^{k-1}$. Согласно методу математической индукции заключаем, что для всех натуральных значений k имеет место формула

$$b_k = b_1 \cdot q^{k-1}.$$

Полученная формула называется *формулой общего члена геометрической прогрессии*. Она выражает общий член прогрессии через его порядковый номер, первый член и знаменатель геометрической прогрессии.

5. Свойства геометрической прогрессии.

1°. Для всех $k \geq 2$ справедливо равенство $b_k^2 = b_{k-1} \cdot b_{k+1}$.

Доказательство. Используя формулу общего члена, имеем

$$b_{k-1} \cdot b_{k+1} = b_1 \cdot q^{k-2} \cdot b_1 q^k = b_1^2 \cdot q^{2k-2} = (b_1 \cdot q^{k-1})^2 = b_k^2.$$

2°. Если $k + l = m + n$, то $b_k \cdot b_l = b_m \cdot b_n$.

Доказательство. Действительно, имеют место равенства

$$b_k \cdot b_l = b_1 \cdot q^{k-1} \cdot b_1 \cdot q^{l-1} = b_1^2 \cdot q^{k+l-2} = b_1^2 \cdot q^{m+n-2} =$$
$$= b_1 \cdot q^{m-1} \cdot b_1 \cdot q^{n-1} = b_m \cdot b_n.$$

6. Сумма первых *n* членов геометрической прогрессии.

Сумму первых n членов геометрической прогрессии обозначим S_n. Нетрудно проверить, что справедливо равенство

$$1 - q^n = (1 - q) \cdot (1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Откуда следует, что $1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$. Используя формулу общего члена, получим

$$S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} =$$
$$= b_1(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}).$$

Поэтому, для суммы первых n членов геометрической прогрессии имеет место формула

$$S_n = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}.$$

Пример 3. Найти четыре числа, образующие геометрическую прогрессию, для которой $b_3 = b_1 + 9$ и $b_2 = b_4 + 18$.

Решение. Имеем $b_2 = b_1 \cdot q$, $b_3 = b_1 \cdot q^2$ и $b_4 = b_1 \cdot q^3$.

Тогда $b_1 q^2 - b_1 = 9$ и $b_1 q - b_1 q^3 = 18$, или $\begin{cases} -b_1(1-q^2) = 9, \\ b_1 q(1-q^2) = 18. \end{cases}$. Откуда следует $q = -2$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим $b_1 \cdot 3 = 9$, или $b_1 = 3$. Следовательно,

$$b_1 = 3,\ b_2 = -6,\ b_3 = 12,\ b_4 = -24.$$

Пример 4. В геометрической прогрессии знаменатель $q = 3$, а сумма первых шести членов равна 1820. Найти первый и пятый члены прогрессии.

Решение. Имеем $S_6 = b_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q}$. Тогда $1820 = b_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q}$, где $q = 3$. Отсюда $b_1 = 5$. Далее, используя формулу $b_5 = b_1 \cdot q^4$, получаем $b_5 = 5 \cdot 3^4 = 405$.

Вопросы и задания

1. Какая последовательность называется арифметической прогрессией?
2. Дать определение геометрической прогрессии.
3. Написать формулу n-го члена арифметической прогрессии.
4. Перечислить основные свойства арифметической и геометрической прогрессии.
5. Написать формулу суммы первых n членов арифметической прогрессии.
6. Вывести формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии.

Упражнения

1. В арифметической прогрессии $a_3 + a_7 = 6$ и $a_3 \cdot a_7 = 8$. Найти сумму первых шестнадцати членов прогрессии.

2. В арифметической прогрессии $S_n = \frac{n^2}{2} + 3n$. Найти отношение суммы первых $3n$ членов этой прогрессии к сумме ее первых n членов.

3. В геометрической прогрессии $b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 30$ и $b_5 + b_6 + b_7 + b_8 = 480$. Найти первый член этой прогрессии.

4. Вычислить: а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \ldots + \frac{1}{3^8}$; б) $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{10}$.

5. Сумма n первых членов последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$ определяется формулой $S_n = 2n^2 + 3n$. Является ли эта последовательность арифметической прогрессией?

6. В арифметической прогрессии $a_1 = 2$, $a_7 = 20$. Найти сумму первых 20 членов этой прогрессии.

7. В арифметической прогрессии $a_1 + a_5 = 26$ и $a_2 \cdot a_4 = 160$. Найти сумму первых шести членов прогрессии.

8. В арифметической прогрессии $a_3 = 9$, $a_7 - a_2 = 20$. Сумма первых n членов равна 91. Найти n.

9. Между числами 4 и 40 поставить четыре числа так, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

10. Найти три числа между числами 3 и 31, чтобы получилась арифметическая прогрессия.

---

11. Дана арифметическая прогрессия, в которой $a_6 = 3$, $d > 0{,}5$. Найти d при условии, что произведение $a_1 \cdot a_4 \cdot a_5$ является наибольшим.

12. Доказать, что числа $\frac{1}{\log_4 2}$, $\frac{1}{\log_6 2}$, $\frac{1}{\log_9 2}$ образуют арифметическую прогрессию.

13. Найти сумму всех четных трехзначных чисел, делящихся на 3.

14. Пусть b_1, b_2, b_3 — последовательные члены геометрической прогрессии, b_1, $b_2 + 2$, b_3 — последовательные члены арифметической прогрессии и b_1, $b_2 + 2$, $b_3 + 16$ — последовательные члены геометрической прогрессии. Найти числа b_1, b_2, b_3.

15. Даны четыре числа c_1, c_2, c_3, c_4 такие, что c_1, c_2, c_3 — геометрическая прогрессия, c_2, c_3, c_4 — арифметическая прогрессия. Найти эти числа, если известно, что $c_3 - c_1 = 9$, $c_2 - c_4 = 18$.

16. В арифметической прогрессии $a_4 + a_8 + a_{12} + a_{16} = 224$. Найти S_{19}.

17. Вычислить $\left(2+\frac{1}{2}\right)^2+\left(4+\frac{1}{4}\right)^2+\ldots+\left(2^n+\frac{1}{2^n}\right)^2$.

18. Пусть $\frac{1}{a_1}$, $\frac{1}{a_2}$, $\frac{1}{a_3}$ — последовательные члены арифметической прогрессии. Найти a_1, a_2, a_3, если известно, что $a_1+a_2+a_3=\frac{11}{18}$ и $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}=18$.

19. Доказать, что последовательность с общим членом $a_n = 2 \cdot 3^n$ является геометрической прогрессией. Найти сумму первых шести членов этой прогрессии.

20. В геометрической прогрессии $b_4 - b_2 = 24$, $b_2 + b_3 = 6$. Найти b_1 и q.

§ 3. Предел числовой последовательности

1. Определение предела числовой последовательности. Прежде чем дать определение предела числовой последовательности, рассмотрим следующие примеры.

Пример 1. Рассмотрим последовательность с общим членом $x_n = \frac{2n+1}{n}$. Тогда имеем

$$x_1 = 3,\ x_2 = \frac{5}{2},\ x_3 = \frac{7}{3},\ x_4 = \frac{9}{4},\ x_5 = \frac{11}{5},\ ...,\ x_n = \frac{2n+1}{n},\ ...$$

или $x_1 = 3$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 2\frac{1}{3}$, $x_4 = 2\frac{1}{4}$, $x_5 = 2\frac{1}{5}$, ..., $x_n = 2 + \frac{1}{n}$, ...

Видно, что с возрастанием номера члены последовательности приближаются к 2. Это будет отчетливее видно, если рассмотреть расстояния между числами x_n и 2. По определению расстояние между x_n и 2 равно абсолютной величине разности чисел x_n и 2, т. е. равно $|x_n - 2|$. Тогда имеем:

$$|x_1 - 2| = |3 - 2| = 1;$$

$$|x_2 - 2| = \left|2\frac{1}{2} - 2\right| = \frac{1}{2};$$

$$|x_3 - 2| = \left|2\frac{1}{3} - 2\right| = \frac{1}{3};$$

$$|x_4 - 2| = \left|2\frac{1}{4} - 2\right| = \frac{1}{4};$$

$$|x_5 - 2| = \left|2\frac{1}{5} - 2\right| = \frac{1}{5};$$

....

$$|x_n - 2| = \left|\frac{2n+1}{n} - 2\right| = \frac{1}{n}.$$

Отсюда ясно, что при возрастании номеров числовой последовательности расстояние $|x_n - 2|$ становится меньше любого фиксированного положительного числа. Иначе говоря, члены заданной последовательности при возрастании их номеров сколь угодно близко приближаются к 2. В таких случаях говорят, что *последовательность стремится* к 2.

Пример 2. Рассмотрим последовательность с общим членом $a_n = 2 + \frac{(-1)^{n-1}}{n}$: $3,\ 1\frac{1}{2},\ 2\frac{1}{3},\ 1\frac{3}{4},\ 2\frac{1}{5}, \ldots$.

Сопоставляя члены этой последовательности и точки на числовой прямой, видим, что с ростом номера n точки a_n справа и слева приближаются к точке с абсциссой 2. Вычислим расстояния между точками a_n и 2. Имеем

$$|a_1 - 2| = |3 - 2| = 1, \qquad |a_2 - 2| = \left|1\frac{1}{2} - 2\right| = \frac{1}{2},$$

$$|a_3 - 2| = \left|2\frac{1}{3} - 2\right| = \frac{1}{3}, \qquad |a_4 - 2| = \left|1\frac{3}{4} - 2\right| = \frac{1}{4},$$

$$|a_5 - 2| = \left|2\frac{1}{5} - 2\right| = \frac{1}{5},$$

....

$$|a_n - 2| = \left|2 + \frac{(-1)^{n-1}}{n} - 2\right| = \frac{1}{n}.$$

Видно, что значения a_n приближаются к 2. В математическом смысле это означает, что каково бы ни было положительное число ε, можно указать такой номер n_0, начиная с которого расстояние между членами данной последовательности и числом 2 меньше ε. Действительно, если, например, $\varepsilon = 0{,}001$, то начиная с номера 1001 расстояние между членами числовой последовательности и числом 2 будет меньше 0,001:

$$|a_{1001} - 2| = \frac{1}{1001} < 0{,}001.$$

Определение 1. Если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер n_0 такой, что для всех членов x_n числовой последовательности с номерами $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n - a| < \varepsilon$, то число a называется *пределом числовой последовательности* x_n *при* $n \to +\infty$.

Если a — предел числовой последовательности $\{x_n\}$, то этот факт записывается в виде

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Если последовательность имеет предел, то говорят, что *последовательность сходится*.

Докажем, например, что последовательность из примера 1 сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$. Действительно, рассмотрим разность $\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|=\left|\frac{1}{n}\right|$. Эта разность меньше ε при $n>\frac{1}{\varepsilon}$. Тогда, полагая $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$, где символ $[\cdot]$ обозначает целую часть числа, имеем: для любого $\varepsilon>0$ существует номер $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1$ такой, что для всех членов последовательности $x_n=\frac{2n+1}{n}$ с номерами $n>n_0$ выполняется неравенство $|x_n-2|<\varepsilon$. По определению это означает, что последовательность $x_n=\frac{2n+1}{n}$, $n\in N$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n}=2$. В частности, если $\varepsilon=0{,}5$, то $n_0=3$ и для всех $n>3$ выполняется неравенство $\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|<0{,}5$; для $\varepsilon=2$ имеем $n_0=1$ и при всех $n>1$ выполняется неравенство $\left|\frac{2n+1}{n}-2\right|<2$.

Теорема 1. Если последовательность $\{a_n\}$, $n\in N$ сходится, то она имеет единственный предел.

Доказательство. Предположим, что последовательность имеет два предела:

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a',\ \lim_{n\to\infty}a_n=a'',$$

где $a'\neq a''$. Положим, $\varepsilon=\frac{|a'-a''|}{4}$. Для этого ε по определению существуют номера k' и k'', что для всех $n>k'$ и $m>k''$ имеем $|a_n-a'|<\varepsilon$ и $|a_m-a''|<\varepsilon$. Пусть для определенности $k'>k''$. Тогда для всех $n>k'$ выполняются неравенства $|a_n-a'|<\varepsilon$, $|a_n-a''|<\varepsilon$. Откуда $|a_n-a'|+|a_n-a''|<2\varepsilon$.

В силу неравенства треугольника имеем

$$|a'-a''|=|a'-a_n+a_n-a''|\le|a'-a_n|+|a_n-a''|<2\varepsilon=2\cdot\frac{|a'-a''|}{4}=\frac{|a'-a''|}{2}.$$

Отсюда следует $0<|a'-a''|<\frac{|a'-a''|}{2}$, что невозможно. Полученное противоречие показывает, что последовательность может иметь только один предел.

2. Алгебраические операции над последовательностями.

Пусть даны две последовательности

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n,\ \ldots, \tag{1}$$

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n,\ \ldots\ . \tag{2}$$

Суммой последовательностей (1) и (2) называется последовательность $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$, члены которой определяются по формулам: $c_1 = a_1 + b_1$, $c_2 = a_2 + b_2$, ..., $c_n = a_n + b_n$, ...

Произведением последовательностей (1) и (2) называется последовательность вида

$$a_1b_1,\ a_2b_2,\ \ldots,\ a_nb_n,\ \ldots\ .$$

Частным последовательностей (1) и (2) называется последовательность вида

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}, \ldots, \text{ где } b_1 \neq 0,\ \ldots,\ b_n \neq 0,\ \ldots\ .$$

Произведением действительного числа α *и последовательности* (1) называется последовательность вида $\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n, \ldots$.

Символически операции над последовательностями можно записать в виде:

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\},\ n \in N;$$

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\},\ n \in N;$$

$$\{a_n\} : \{b_n\} = \left\{\frac{a_n}{b_n}\right\},\ n \in N,\ b_n \neq 0;$$

$$\alpha \cdot \{a_n\} = \{\alpha \cdot a_n\},\ n \in N.$$

Последовательность, у которой все элементы одинаковые, называется *стационарной последовательностью*.

П р и м е р 3. Пусть даны числовые последовательности с общими членами

$$a_n = \frac{1}{n} \text{ и } b_n = \frac{1}{n+1}.$$

Тогда последовательность с общим членом $c_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} = \frac{2n+1}{n(n+1)}$ является суммой, последовательность с общим членом $d_n = \frac{1}{n(n+1)}$ является произведением, последовательность с общим членом $f_n = \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{1}$ является частным заданных последовательностей. Последовательность с общим членом $g_n = \frac{\alpha}{n}$ является произведением числа α и последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$.

3. Бесконечно малые величины. Теоремы о пределах сходящихся последовательностей.

Определение 2. Если числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ имеет предел при $n \to +\infty$ и этот предел равен нулю, то такая последовательность называется *бесконечно малой последовательностью* при $n \to +\infty$ или просто *бесконечно малой величиной*.

Пример 4. Так как $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0$, то последовательность с общим членом $a_n = \frac{1}{n^2}$ является бесконечно малой последовательностью при $n \to +\infty$.

Пример 5. Если $|q| > 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{q}\right)^n = 0$. Поэтому $\left\{\left(\frac{1}{q}\right)^n\right\}$, $n \in N$ — бесконечно малая величина.

Теорема 2. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то последовательность с общим членом $b_n = a - a_n$ является бесконечно малой величиной.

Доказательство. По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|b_n| = |a_n - a| = |a - a_n| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, т. е. последовательность $\{b_n\}$, $n \in N$ является бесконечно малой при $n \to +\infty$.

Теорема 3. Если для последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$ и числа a последовательность $\{a - a_n\}$ является бесконечно малой величиной, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Доказательство. Пусть $\{a - a_n\}$ — бесконечно малая величина. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}(a - a_n) = 0$. По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|a - a_n| < \varepsilon$. По этому же определению тогда имеем $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Теорема 4 (свойства бесконечно малых величин).

1) Сумма двух бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной.

2) Произведение двух бесконечно малых величин является бесконечно малой величиной.

3) Произведение ограниченной последовательности и бесконечно малой величины является бесконечно малой величиной.

4) Произведение стационарной последовательности и бесконечно малой величины является бесконечно малой величиной.

5) Если последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ сходится к a, то ее общий член можно представить в виде суммы $a_n = a + b_n$, где $\{b_n\}$, $n \in N$ — бесконечно малая величина.

6) Если числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ является суммой стационарной последовательности с общим членом $b_n = a$ и бесконечно малой величины $\{x_n\}$, $n \in N$, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$.

Доказательство. 1) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Докажем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\{x_n + y_n\} = 0$. По определению предела, для любого $\varepsilon > 0$ существуют номера n_1 и n_2, что для всех $m > n_1$ и $l > n_2$ выполняются неравенства $|x_m| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|y_l| < \frac{\varepsilon}{2}$. Для определенности положим $n_1 \geq n_2$. Тогда для всех $n > n_1$ имеем $|x_n| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Из последних двух неравенств следует $|x_n + y_n| \leq |x_n| + |y_n| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$, или $|x_n + y_n| < \varepsilon$, что означает $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$.

2) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ выполняются неравенства $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$ и $|y_n| < \sqrt{\varepsilon}$. Тогда имеем $|x_n \cdot y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon}$, или $|x_n \cdot y_n| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = 0$.

3) Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ и $\{a_n\}$, $n \in N$ — ограниченная последовательность. Покажем, что последовательность $\{a_n x_n\}$, $n \in N$ является бесконечно малой величиной. По определению огра-

ниченной последовательности существует число $M > 0$ такое, что $|a_n| < M$ для всех $n \in N$. По определению предела последовательности для любого $\varepsilon > 0$ существует номер n_0 такой, что для всех $n > n_0$ выполняется неравенство $|x_n| < \frac{\varepsilon}{M}$. Тогда имеем $|a_n x_n| \le |a_n| \cdot |x_n| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot x_n = 0$, т. е. последовательность $\{a_n x_n\}$, $n \in N$ является бесконечно малой величиной.

Свойство 4) является следствием свойства 3). Доказательства свойств 5) и 6) предоставляем читателю.

Теорема 5. Предел произведения двух сходящихся последовательностей равен произведению их пределов.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ и $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Тогда в силу свойства 5) имеем $a_n = a + x_n$, $b_n = b + y_n$, где $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $n \in N$ — бесконечно малые величины. Тогда

$$a_n \cdot b_n = (a + x_n)(b + y_n) = ab + ay_n + x_n b + x_n y_n \ .$$

В силу доказанных выше свойств, последовательность $\{ay_n + x_n b + x_n y_n\}$, $n \in N$ является бесконечно малой величиной. Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot b_n = a \cdot b$.

Теорема 6. Для сходящейся последовательности $\{a_n\}$, $n \in N$ и произвольного числа c справедливо равенство $\lim\limits_{n\to\infty} c \cdot a_n = c \cdot \lim\limits_{n\to\infty} a_n$, т. е. постоянный множитель можно выносить за знак, обозначающий предел.

Доказательство. Согласно теореме 5 имеем

$$\lim_{n\to\infty} c \cdot a_n = \lim_{n\to\infty} c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} a_n \,.$$

Теорема 7. Предел суммы двух сходящихся последовательностей равен сумме их пределов.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Следует показать, что для любого $\varepsilon > 0$ существует номер k такой, что для всех $m > k$ выполняется неравенство $|(a_m + b_m) - (a + b)| < \varepsilon$. По определению предела для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует номер k_1 такой, что для всех $m > k_1$ справедлива оценка $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Аналогично, для $\frac{\varepsilon}{2}$ существует номер k_2 такой, что для всех $m > k_2$ имеем $|b_m - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $\max\{k_1, k_2\} = k$. Тогда для всех $m > k$ получим $|a_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ и $|b_m - b| < \frac{\varepsilon}{2}$. Значит, для всех $m > k$ выполняется неравенство

$$|(a_m + b_m) - (a + b)| = |(a_m - a) + (b_m - b)| \le |a_m - a| + |b_m - b| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

По определению это означает, что $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$.

Теорема 8. Пусть $a_n = c$, $n = 1, 2, \ldots$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = c$.

Теорема 9. Пусть последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ сходится к числу $a \ne 0$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{a}.$$

Теорема 10. Пусть последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, где $b \ne 0$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Доказательства теорем 8—10 предоставляем читателю.

4. Вычисление пределов. Рассмотрим несколько примеров на вычисление пределов.

Пример 6. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n+1}$.

Решение. Поскольку с ростом числа n числитель и знаменатель дроби неограниченно возрастают, то теорема 10 (о пределе частного) здесь неприменима. Разделив числитель и знаменатель дроби на n, имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n+1}{5n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{5+\frac{1}{n}}$. Теперь уже можем применить теорему о пределе частного. Тогда получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3+\frac{1}{n}}{5+\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5+\frac{1}{n}\right)} = \frac{3}{5}.$$

Пример 7. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-2}{5n^2-n+1}$.

Решение. Сокращая числитель и знаменатель дроби $\frac{3n^2+2n-2}{5n^2-n+1}$ на n^2, имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-2}{5n^2-n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}}{5-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(5-\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{3}{5}.$$

Пример 8. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{3n+1}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на n, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^3+2n+1}}{3n+1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{1+\frac{2}{n^2}+\frac{1}{n^3}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}\right)}=\frac{1}{3}.$$

Пример 9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-3}}{2-4n}$.

Решение. Разделив числитель и знаменатель дроби на n, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2-3}}{2-4n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1-\frac{3}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n}-4\right)}=-\frac{1}{4}.$$

Пример 10. Найти предел переменной величины $a_n=\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2}$, где $n\in N$.

Решение. В данном примере уменьшаемое и вычитаемое не имеют предела. Поэтому теорема о пределе суммы здесь неприменима. Умножим и разделим a_n на выражение $\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2}$, являющееся сопряженным выражению $\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2}$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\sqrt{n^2+3n}-\sqrt{n^2-2}\right)\left(\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2}\right)}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+3n-n^2+2}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2}}.$$

Теперь разделив числитель и знаменатель последней дроби на n, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3n+2}{\sqrt{n^2+3n}+\sqrt{n^2-2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\frac{2}{n}}{\sqrt{1+\frac{3}{n}}+\sqrt{1-\frac{2}{n^2}}}=\frac{3}{2}.$$

П р и м е р 11. Вычислить $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{3n^2+n-2}$.

Р е ш е н и е. Для вычисления данного предела числитель и знаменатель дроби разделим на n^2. Тогда имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{3n^2+n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}.$$

Пользуясь теперь доказанными выше свойствами, получим

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+3}{3n^2+n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}}{3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{2}{n}+\frac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}=$$

$$=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n}+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}}{\lim\limits_{n\to\infty}3+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}-\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}=\frac{1+0+0}{3+0-0}=\frac{1}{3}.$$

П р и м е р 12. Найти $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-1}}{3-n}$.

Р е ш е н и е. Разделив числитель и знаменатель дроби на n, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2-1}}{3-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}{\frac{3}{n}-1}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{4-\frac{1}{n^2}}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{n}-1\right)}=\frac{\sqrt{4}}{-1}=-2.$$

5. Теоремы о пределах монотонной последовательности.

Следует отметить, что не всякая числовая последовательность имеет предел. Поэтому одной из задач теории пределов является выявление признаков сходимости последовательностей. Сформулируем достаточный признак сходимости последовательности.

Теорема 11. Всякая монотонно возрастающая (не убывающая) и ограниченная сверху числовая последовательность имеет предел.

Если числовая последовательность $\{a_n\}$, $n \in N$ — монотонно возрастающая, то соответствующие ей точки на числовой прямой располагаются так, что каждая последующая точка лежит правее предыдущей. Если к тому же последовательность ограничена сверху ($a_n < c$), то все указанные точки находятся левее точки с абсциссой c. Поэтому геометрически теорема 11 означает, что на числовой прямой существует точка M, к которой слева неограниченно приближаются точки, соответствующие членам монотонно возрастающей (неубывающей), ограниченной сверху последовательности. Абсцисса такой точки M и будет являться пределом заданной последовательности.

Теорема 12. Монотонно убывающая (невозрастающая) и ограниченная снизу числовая последовательность имеет предел.

П р и м е р 13. Рассмотрим числовую последовательность, составленную из десятичных приближений числа $\sqrt{2}$, взятых с недостатком: 1,4, 1,41, 1,414, 1,4142, ...

Эта последовательность является монотонно возрастающей и ограниченной сверху. Поэтому согласно теореме 11 существует предел последовательности. Ясно, что этот предел равен $\sqrt{2}$.

Предоставляем читателю проверить, что последовательность $\{q^n\}$, $n \in N$, где число q удовлетворяет условию $|q| < 1$, сходится к нулю при $n \to +\infty$.

6. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Определение 3. Геометрическая прогрессия, знаменатель которой по абсолютной величине меньше единицы ($|q| < 1$), называется *бесконечно убывающей геометрической прогрессией*.

Выведем формулу для вычисления суммы всех членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Пусть b_1, b_2, ..., b_n, ... — бесконечно убывающая геометрическая прогрессия. Для суммы S_n первых n членов этой прогрессии имеем:

$S_1 = b_1;$
$S_2 = b_1 + b_1q;$
$S_3 = b_1 + b_1q + b_1q^2;$
. . . .
$S_n = b_1 + b_1q + b_1q^2 + \ldots + b_1q^{n-1}.$

Определение 4. *Суммой бесконечно убывающей геометрической прогрессии* называется предел (если он существует) последовательности $\{S_n\}$ сумм первых n членов этой прогрессии при $n \to +\infty$.

Рассмотрим числовую последовательность с общим членом S_n. Известно, что

$$S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}.$$

Так как последовательность $\{q^n\}$, $n \in N$, где $|q| < 1$, сводится к нулю при $n \to +\infty$, то для суммы S бесконечно убывающей геометрической прогрессии имеем:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_1(1-q^n)}{\lim\limits_{n\to\infty}(1-q)} = \frac{b_1}{1-q}.$$

Таким образом, сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

Пример 14. Вычислить $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$.

Решение. Данное выражение представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Поэтому эта сумма равна

$$S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} : \frac{1}{2} = 1.$$

Пример 15. Периодическую дробь 1,27(3) преобразовать в обыкновенную дробь.

Решение. Запишем дробь в следующем виде:

$$1{,}27(3) = 1{,}27333\ldots = 1{,}27 + 0{,}003 + 0{,}0003 + 0{,}00003 + \ldots.$$

Сумма 0,003 + 0,0003 + 0,00003 + ... представляет собой сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой $b_1 = 0{,}003$, $q = 0{,}1$. Используя формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, получим

$$1,27(3) = 1\frac{27}{100} + \frac{\frac{3}{1000}}{1-\frac{1}{10}} = 1\frac{27}{100} + \frac{1}{300} = \frac{382}{300} = \frac{191}{150}.$$

Вопросы и задания

1. Дать определение предела числовой последовательности.
2. Доказать, что сходящаяся числовая последовательность имеет единственный предел.
3. Определить операции над последовательностями. Объяснить на примере, как образуется произведение двух числовых последовательностей.
4. Дать определение бесконечно малой величины.
5. Перечислить свойства бесконечно малых величин. Доказать одно из свойств.
6. Сформулировать теоремы о пределах сходящихся числовых последовательностей.
7. Доказать, что сумма двух сходящихся последовательностей тоже сходится.
8. Доказать, что произведение двух сходящихся последовательностей тоже сходится.
9. Сформулировать условие, при выполнении которого частное двух числовых последовательностей сходится.

Упражнения

Доказать по определению (**1–4**):

1. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0$. **2.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{5n+1}{9n-2} = \frac{5}{9}$. **4.** $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3-4n}{6n+1} = -\frac{2}{3}$.

5. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

6. Вычислить: а) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n+2}{n^2+1}$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt{n^2+2n}}$.

7. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+2n+1}{2n^2-n+3}=\dfrac{1}{2}$.

8. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если:

а) $b_1=\dfrac{2}{3},\ q=\dfrac{3}{4}$; б) $b_1=1,\ q=\dfrac{1}{2}$; в) $b_2=\dfrac{5}{3},\ q=\dfrac{3}{4}$.

9. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии $b_1+b_2=12$ и $S=12{,}5$. Найти знаменатель q и первый член b_1 этой прогрессии.

10. Преобразовать в обыкновенную дробь:

а) 0,(13); б) 0,10(31); в) 0,3(41); г) 10,0(03).

11. Найти сумму геометрической прогрессии $a^2, \dfrac{a^2}{1+a^2}, \dfrac{a^2}{(1+a^2)^2}, \ldots$, где $a\neq 0$.

12. Найти условия, при которых нижеследующие последовательности будут бесконечно убывающими геометрическими прогрессиями. Найти также сумму этих прогрессий:

а) $(1+x), (1+x)^2, (1+x)^3, \ldots$; б) $\dfrac{1+x}{x}, \dfrac{(1+x)^3}{x^3}, \dfrac{(1+x)^5}{x^5}, \ldots$.

13. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{2n^2+2}-\sqrt{n^2+3}}{n-2}$.

14. Вычислить предел: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n-1}{n^2}\right)$.

Вычислить пределы (**15–20**):

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2+n-1}{(n+1)+(n+2)+\ldots+(n+n-1)+2n}$.

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}}{1-9^n}$.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+5+5^2+\ldots+5^{n-1}}{1-5^{2n}}$.

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{2+3n+n^6}}{1+3n+2n^2}$.

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n-a^{-n}}{a^n+a^{-n}}$, $|a|>1$.

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{6}{n^2}(1+2+\ldots+n)$.

Упражнения для повторения

1. Первый член арифметической прогрессии равен 1, а разность прогрессии равна 4. Является ли число 10091 членом этой прогрессии?

2. Сколько имеется двузначных натуральных чисел, кратных 7?

3. Произведение второго и двенадцатого членов арифметической прогрессии равно 1, а произведение четвертого и десятого членов этой же прогрессии равно b. Найти седьмой член этой прогрессии.

4. Сумма квадратов пятого и одиннадцатого членов арифметической прогрессии равна 3, а произведение второго и четырнадцатого членов этой же прогрессии равно k. Найти произведение первого и пятнадцатого членов прогрессии.

5. Сумма квадратов четвертого и десятого членов арифметической прогрессии равна b, а сумма квадратов пятого и девятого членов этой же прогрессии равна 1. Определить произведение второго и двенадцатого членов этой прогрессии.

6. Найти знаменатель бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если ее сумма в три раза больше суммы трех ее первых членов.

7. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3,5, а сумма квадратов членов этой же прогрессии равна $\frac{147}{16}$. Найти сумму кубов членов этой прогрессии.

8. Разность между вторым и шестым членами бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна $\frac{8}{9\sqrt{3}}$, а разность между четвертым и восьмым членами этой же прогрессии равна $\frac{8}{27\sqrt{3}}$. Найти отношение суммы квадратов членов прогрессии к сумме кубов членов этой прогрессии.

9. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 243, а сумма ее первых пяти членов равна 275. Найти прогрессию.

10. Пользуясь теоремой о пределе суммы двух сходящихся последовательностей, доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+2}{n-1}+\frac{2-3n^2}{n^2+1}\right)=-2;$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n-1}{n^2-1}\right)=0.$

11. Пользуясь теоремой о пределе произведения двух сходящихся последовательностей, доказать, что:

а) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1+5n^3)(1-n+n^2)}{n^2(n^3+3)}=5;$ б) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(15+\frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{n-7}{n+6}\right)=15.$

Найти пределы (**12—24**):

12. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(2n+1)(n-3)}{(n+2)(n+4)}.$

13. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^3-4}{n^4+6}.$

14. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^8-n^7+1}{2-3n^8}.$

15. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)^2}{5n^2-n+1}.$

16. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n(n-2)^2}{3^{n+3}n^2}.$

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{-3n+(-1)^n}{4n-(-1)^n}.$

18. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sin n}{n^2+1}.$

19. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^{n+1}+4^{n+1}}{3^n+4^n}.$

20. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!-n!}$, где $n!=1\cdot 2\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$, $1!=1$, $n\in N$.

21. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(n+3)!+(n+2)!}{(n+4)!}.$

22. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3^n-1}{3^n+1}.$

23. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\ldots+\frac{1}{3^n}}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{2^n}}.$

24. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}(1+2+3+\ldots+n).$

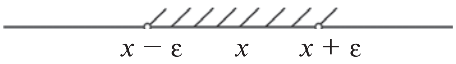
ГЛАВА XII

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 1. Предел функции

1. Окрестность точки. Начнем изучение свойств функции вблизи некоторой точки. Для этого сначала введем понятие окрестности точки. Пусть $\varepsilon > 0$.

Определение 1. *Окрестностью точки* x на числовой оси называется произвольный интервал $(x - \varepsilon,\ x + \varepsilon)$, содержащий эту точку. При этом число ε называют *радиусом окрестности*, а точку x — *центром окрестности*.



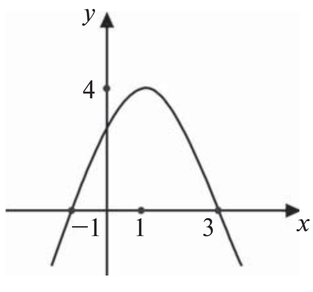
Каждая точка числовой оси имеет бесконечно много окрестностей. Легко понять, что пересечение и объединение двух окрестностей точки также является окрестностью этой точки.

Пример 1. $(2 - 0{,}1;\ 2 + 0{,}1) \cap (2 - 0{,}01;\ 2 + 0{,}01) =$
$= (2 - 0{,}01;\ 2 + 0{,}01)$;

$(2 - 0{,}1;\ 2 + 0{,}1) \cup (2 - 0{,}01;\ 2 + 0{,}01) = (2 - 0{,}1;\ 2 + 0{,}1)$.

Далее поясним на примере понятие «свойство функции вблизи некоторой точки».

Пример 2. Пусть дана функция $y = -(x - 1)^2 + 4$. Нарисуем ее график. По графику можно сказать, что в окрестности $\left(1-\frac{1}{2};\ 1+\frac{1}{2}\right)$ точки $x = 1$ функция принимает положительные значения. В этой окрестности значения функции «близки» к $y = 4$.



Определение 2. Будем говорить, что некоторое свойство функции выполняется *вблизи точки* a, если существует такая окрестность этой точки, что указанное свойство справедливо для всех, отличных от a, точек из этой окрестности.

Например, пусть $f(x) > 0$ для всех $x \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, $x \neq a$. Это означает, что вблизи точки $x = a$ функция $y = f(x)$ принимает положительные значения или, то же самое, функция положительна вблизи точки $x = a$.

2. Предел функции в точке. Дадим определение предела функции, когда ее аргументы приближаются к некоторой точке a (пишут $x \to a$). Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения D.

Определение 3. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенств $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ следует справедливость неравенства $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Другими словами, число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to a$, если для любого $\varepsilon > 0$ вблизи точки a выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$.

П р и м е р 3. Доказать, что $\lim\limits_{x \to 1}(4x - 1) = 3$.

Неравенство $|(4x - 1) - 3)| < \varepsilon$ выполняется, если $|4x - 4| < \varepsilon$ или $|x - 1| < \frac{\varepsilon}{4}$. Положим, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$. Тогда получаем следующее: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ (а именно, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$), что из $0 < |x - 1| < \delta$ следует неравенство $|(4x - 1) - 3| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim\limits_{x \to 1}(4x - 1) = 3$.

П р и м е р 4. Найти предел функции $y = x^2$ при $x \to 2$.

Р е ш е н и е. Покажем, что искомый предел равен 4. Действительно, $|x^2 - 4| = |x - 2| \cdot |x + 2|$, где $0 < |x - 2| < \delta$. Отсюда $2 - \delta < x < 2 + \delta$ и $|x + 2| < 4 + \delta$. Значит, $|x^2 - 4| < \delta(4 + \delta)$. Поэтому неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$ будет выполняться, если $\delta(4 + \delta) = \varepsilon$. Решив это уравнение относительно δ, получим $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$. Таким образом, для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ (а именно, $\delta = -2 + \sqrt{4 + \varepsilon}$), что из выполнения неравенств $0 < |x - 2| < \delta$ вытекает неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$. Следовательно, $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$.

3. Односторонние пределы. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенств $|x - a| < \delta$,

$x > a$, $x \in D$ следует справедливость неравенства $|f(x) - b| < \varepsilon$, то число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при стремлении* x *к* a *справа*.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b$ или $f(a + 0) = b$.

Аналогично, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что из выполнения неравенств $|x - a| < \delta$, $x < a$, $x \in D$ следует справедливость неравенства $|f(x) - b| < \varepsilon$, то число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при стремлении* x *к* a *слева*.

В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b$ или $f(a - 0) = b$. Пределы функции при $x \to a$ справа или слева называются *односторонними пределами*.

Отметим, что существуют функции, у которых односторонние пределы (левый и правый) не совпадают.

Пример 5. а) функция $y = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ 1, & x < 0 \end{cases}$ при $x \to 0$ имеет следующие односторонние пределы: $f(0 + 0) = 0$, $f(0 - 0) = 1$;

б) функция $y = 3x$ при $x \to 2$ имеет односторонние пределы: $f(2 + 0) = 6$, $f(2 - 0) = 6$;

в) функция $y = 2^{\frac{1}{x}}$ при $x \to 0$ не имеет правостороннего предела ($f(0 + 0) = +\infty$). В то же время левосторонний предел равен нулю ($f(0 - 0) = 0$).

4. Предел функции на бесконечности.

Определение 4. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to +\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что при всех $x > M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В таком случае пишут: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = b$.

Аналогично определяется предел функции при $x \to -\infty$.

Определение 5. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to -\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M < 0$ такое, что при всех $x < M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В этом случае пишут: $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = b$.

Пример 6. Доказать, что $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Неравенство $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - 0\right| < \varepsilon$ выполняется, если $x > \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$. Положим, $M = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$. Тогда ясно, что для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ (а именно, $M = \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^2$) такое, что при всех $x > M$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{\sqrt{x}} - 0\right| < \varepsilon$. Значит, по определению имеем: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = 0$.

Определение 6. Число b называется *пределом функции* $y = f(x)$ *при* $x \to \infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что при всех $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. В таком случае пишут: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$.

5. Бесконечно малые функции при $x \to \infty$.

Определение 7. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой функцией при* $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = 0$.

Другими словами, функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой функцией при* $x \to \infty$, если для $\forall \varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ такое, что для всех $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x)| < \varepsilon$.

П р и м е р 7. Функция $y = \frac{1}{x^2}$ — бесконечно малая функция при $x \to \infty$.

Действительно, неравенство $\left|\frac{1}{x^2}\right| < \varepsilon$ выполняется, если $|x| > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. Поэтому если взять $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$ (а именно, $M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$) такое, что при всех $|x| > M$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{x^2}\right| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$.

Например, если $\varepsilon = \frac{1}{1000}$, то следует взять $M = 10\sqrt{10}$. Тогда при всех $|x| > 10\sqrt{10}$ выполняется неравенство $\left|\frac{1}{x^2}\right| < \frac{1}{1000}$.

Пример 8. Доказать, что 2^{-x} — бесконечно малая функция при $x \to +\infty$.

Решим неравенство $|2^{-x}| < \varepsilon$. Имеем $\log_2 2^{-x} < \log_2 \varepsilon$. Отсюда $-x < \log_2 \varepsilon$, или $x > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$. Таким образом, $|2^{-x}| < \varepsilon$, если $x > \log_2 \frac{1}{\varepsilon}$.

Например, если $\varepsilon = \frac{1}{128}$, то в качестве M можно взять число $\log_2 \frac{1}{\frac{1}{128}} = 7$. Тогда при $x > 7$ имеем $|2^{-x}| < \frac{1}{128}$.

6. Свойства бесконечно малых функций при $x \to \infty$.

1°. Пусть $y = f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to \infty$ и для всех $|x| > M$, где $M > 0$ выполняется неравенство $|g(x)| \leq |f(x)|$. Тогда $y = g(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to \infty$.

2°. Если $y = f(x)$ и $y = g(x)$ — бесконечно малые функции при $x \to \infty$, то функция $y = f(x) \cdot g(x)$ является бесконечно малой при $x \to \infty$.

3°. Сумма бесконечно малых функций при $x \to \infty$ является бесконечно малой функцией при $x \to \infty$.

4°. Если $y = f(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to \infty$ и a — некоторое действительное число, то $y = a \cdot f(x)$ является бесконечно малой функцией при $x \to \infty$.

Докажем, например, свойство 1°. По условию $\forall \varepsilon > 0$ существует положительное число M_0 такое, что для всех $|x| > M_0$ имеет место неравенство $|f(x)| < \varepsilon$. Пусть $M_1 = \max\{M, M_0\}$. Так как $|g(x)| \leq |f(x)|$ при $|x| > M_1$, то при этих же значениях x выполняется неравенство $|g(x)| < \varepsilon$. Это означает, что $\lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$, т. е. $y = g(x)$ — бесконечно малая функция при $x \to \infty$.

Доказательство остальных свойств оставляем читателю в качестве упражнения.

Так же как было введено определение бесконечно малой функции при $x \to \infty$, можно ввести определение бесконечно малой функции при $x \to a$, где a — некоторое число.

Определение 8. Функция $y = f(x)$ называется *бесконечно малой функцией при* $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$.

Для бесконечно малых функций при $x \to a$ имеют место свойства, аналогичные свойствам бесконечно малых функций при $x \to \infty$.

7. Свойства предела функции в точке. Рассмотрим теперь свойства предела функции в точке. Пусть $y = f(x)$ — заданная функция с областью определения D.

1) Функция $y = f(x)$ не может иметь два различных предела при $x \to a$.

Доказательство. Предположим, что $\lim\limits_{x \to a} f(x) = c$ и $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, причем $b \neq c$. Тогда по определению, для $\varepsilon < \frac{|b-c|}{2}$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняются неравенства:

$$|f(x) - b| < \varepsilon \text{ и } |f(x) - c| = |c - f(x)| < \varepsilon.$$

Имеем $|b - c| = |f(x) - b + c - f(x)| \leq |f(x) - b| + |c - f(x)| < \varepsilon + \varepsilon$. Откуда следует $\frac{|b-c|}{2} < \varepsilon$. Полученное противоречие с неравенством $\varepsilon < \frac{|b-c|}{2}$ показывает, что предел функции должен быть единственным.

2) Если функция $y = f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то существует окрестность точки a, в которой функция $y = f(x)$ ограничена.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что для всех x, $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Отсюда имеем $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$. Значит, функция $y = f(x)$ ограничена в δ — окрестности точки a.

3) Пусть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$, где $b \neq 0$. Тогда найдется окрестность точки a, в которой знак функции совпадает со знаком числа b.

Доказательство. Пусть для определенности $b > 0$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$, в частности, $0 < \varepsilon < b$, существует $\delta > 0$, что для всех x, $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$. Предположим, что в некоторой точке x_0 из указанной окрестности выполняется неравенство $f(x_0) \le 0$. Тогда $|f(x_0) - b| \ge b$. Это противоречит выбору ε. Следовательно, для всех x, $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) > 0$, т. е. функция имеет тот же знак, что и число b.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать следующие свойства предела.

4) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и существует окрестность точки a, в которой выполняются неравенства $f(x) \le g(x) \le b$ или $b \le g(x) \le f(x)$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

5) Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ имеют пределы при $x \to a$. Тогда:

а) $\lim\limits_{x\to a}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$;

б) $\lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot g(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$, в частности,

$\lim\limits_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

6) Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b, \lim\limits_{x\to a} g(x) = c$, где $c \ne 0$. Тогда

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} = \frac{b}{c}.$$

П р и м е р 9. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}(x^2 - 4x + 1)$.

Р е ш е н и е. Используя свойства предела, имеем

$$\lim_{x\to 4}(x^2 - 4x + 1) = \lim_{x\to 4} x^2 - \lim_{x\to 4} 4x + \lim_{x\to 4} 1 = 16 - 16 + 1 = 1.$$

П р и м е р 10. Вычислить $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+2x^3+1}{x^2+5x+3}$.

Р е ш е н и е. $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x^4+2x^3+1}{x^2+5x+3} = \dfrac{\lim\limits_{x\to -1}(x^4+2x^3+1)}{\lim\limits_{x\to -1}(x^2+5x+3)} = \dfrac{(-1)^4+2(-1)^3+1}{(-1)^2+5(-1)+3} =$

$$= \frac{1-2+1}{1-5+3} = \frac{0}{-1} = 0.$$

П р и м е р 11. Вычислить $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x^2-6x+5}{x^2-25}$.

Решение. Здесь свойство 6) нельзя непосредственно применить, поскольку при $x \to 5$ предел знаменателя дроби равен нулю. Для того чтобы можно было воспользоваться свойством 6), разложим числитель и знаменатель на множители и упростим выражение:

$$\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}=\frac{(x-1)(x-5)}{(x+5)(x-5)}=\frac{x-1}{x+5}.$$

Теперь, применяя свойство 6), получаем

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-6x+5}{x^2-25}=\lim_{x\to 5}\frac{x-1}{x+5}=\frac{4}{10}=0,4.$$

8. Бесконечно большие функции при $x \to a$. Пусть снова $y=f(x)$ — заданная функция с областью определения D.

Определение 9. $y=f(x)$ называется *бесконечно большой функцией при $x \to a$*, если для любого положительного числа M существует положительное число δ такое, что при всех x, удовлетворяющих условиям $0<|x-a|<\delta$, $x\in D$, выполняется неравенство $|f(x)|>M$.

В таком случае пишут: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Связь между бесконечно большими функциями при $x \to a$ и бесконечно малыми функциями при $x \to a$ устанавливается следующей теоремой.

Теорема. Функция $y=f(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$ тогда и только тогда, когда функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Доказательство. Пусть $y=f(x)$ — бесконечно большая функция при $x \to a$. По определению, для любого $M>0$ существует $\delta>0$ такое, что при $0<|x-a|<\delta$, $x\in D$ выполняется неравенство $|f(x)|>M$.

Тогда для любого $\varepsilon>0$ можно подобрать такое M (а именно, $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$), что при $0<|x-a|<\delta$, $x\in D$ выполняется неравенство $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\dfrac{1}{M}$, или $\left|\dfrac{1}{f(x)}\right|<\varepsilon$. По определению это означает, что функция $y=\dfrac{1}{f(x)}$ является бесконечно малой при $x \to a$.

Обратное утверждение доказывается аналогичным образом.

П р и м е р 12. Функция $y = \frac{1}{(x-4)^2}$ — бесконечно большая при $x \to 4$, так как функция $y = (x - 4)^2$ является бесконечно малой при $x \to 4$.

Отметим также, что в случае, когда для любого положительного числа M существует положительное число δ такое, что из $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ следует $f(x) > M$, пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Если же для любого отрицательного числа M существует положительное число δ такое, что при $0 < |x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняется неравенство $f(x) < M$, пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.

П р и м е р 13. $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0} \frac{-1}{x^2} = -\infty$.

Вопросы и задания

1. Объяснить понятие «свойство функции вблизи точки».
2. Привести пример функции, для которой выполняется какое-нибудь свойство вблизи некоторой точки.
3. Дать определение предела функции в точке.
4. Дать геометрическую интерпретацию предела функции в точке.
5. Сформулировать определения односторонних пределов функции.
6. Привести пример функции, для которой односторонние пределы в точке различны.
7. Дать определение предела функции при $x \to \infty$.
8. Что означает понятие бесконечно малая функция при $x \to \infty$?
9. Сформулировать свойства бесконечно малой функции при $x \to \infty$.
10. Какими свойствами обладает предел функции в точке?
11. Дать определение бесконечно большой функции при $x \to a$.
12. Какая связь между бесконечно большими и бесконечно малыми функциями?

Упражнения

Вычислить (**1–11**):

1. $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^3+8}{x^2+3x+2}$.

2. $\lim\limits_{x \to \frac{1}{2}} \frac{8x^2-16x+6}{3+7x-2x^2}$.

3. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{x^3+x^2-x-1}{3x^3+3x^2+3x+3}$.

4. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{15x^3-6x^2+15x-6}{5x^4-2x^3-5x^2+2x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+6x^4}-\sqrt{2-4x}}{x+x^2+2x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3x}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0,4}\dfrac{2,5x^3-x^2+2,5x-1}{2,5x^4-x^3-2,5x^2-1}$.

8. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{4x+6}-\sqrt{2}}{\sqrt[3]{5+x}-2}$.

9. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2}x+2\sqrt{2}}{\sqrt{4x+1}-3}$.

10. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{6x+9}-\sqrt{3}}{\sqrt[3]{5+x}-2}$.

11. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{21x-63}$.

Верны ли следующие соотношения (**12–15**):

12. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+x-12}{3x^2-9}=5+\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{8-x^3}$.

13. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}+2x}{x+1}>\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x^2-5x-316}{4x^2-18x-10}$.

14. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+3x^2-4}{x^2-1}\cdot\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{\sqrt{x^2-1}-2}<0$.

15. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^3-8}{x(x^2-4)}-\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2^{x+2}-16}{4^x-2^4}=1$?

Вычислить (**16–25**):

16. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5x}{x^2-3}$.

17. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x}{1-x}$.

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-3x+1}{x-4}+2$.

19. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{3x^2-3\sqrt{3}}{x^4+x^2+1}$.

20. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\dfrac{x^2-3}{x^4+x^2+1}$.

21. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2-2})$.

22. $\lim\limits_{x\to -\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

23. $\lim\limits_{x\to\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$.

24. $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{(x+1)(x+2)}-x)$.

25. $\lim\limits_{x\to -\infty}(\sqrt{(x+1)(x+5)}-x)$.

§ 2. Непрерывная функция и ее свойства

1. Непрерывные функции. Пусть задана функция $y = f(x)$ с областью определения $D \subseteq R$ и $a \in D$.

Определение 1. Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Другими словами, функция $y = f(x)$ называется *непрерывной в точке* $x = a$, если она определена в этой точке и предел функции при $x \to a$ равен значению функции в точке a.

Отметим, что при определении предела функции в точке не требовалось, чтобы эта точка принадлежала области определения функции.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются *точками разрыва функции*.

П р и м е р 1. Пусть $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$. В точке $x = 1$ функция не определена. Поэтому о непрерывности в этой точке не может быть и речи. Значит, данная функция имеет разрыв в точке $x = 1$. В остальных точках функция непрерывна.

П р и м е р 2. Рассмотрим функцию $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2-4}, & x \neq \pm 2, \\ 0, & x = 2, \\ 1, & x = -2. \end{cases}$

Эта функция непрерывна во всех точках множества действительных чисел, кроме $x = 2$ и $x = -2$. Действительно, если $a \neq 2$ и $a \neq -2$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{x-1}{x^2-4} = \dfrac{a-1}{a^2-4} = f(a)$. Если же $a = 2$ или $a = -2$, то не существует конечного предела выражения $\dfrac{x-1}{x^2-4}$ при $x \to a$. Значит, $a = 2$ и $a = -2$ – точки разрыва данной функции.

Разрыв возникает и в тех случаях, когда для функции, заданной различными выражениями (формулами) слева и справа от рассматриваемой точки, пределы справа и слева существуют, но не совпадают. Например, функция $f(x) = \begin{cases} x, \ x \geq 0, \\ 1, \ x < 0 \end{cases}$ имеет разрыв в точке $x = 0$, потому что

$$f(0+0) = 0 \neq f(0-0) = 1.$$

В остальных точках функция является непрерывной.

Теорема 1. Пусть функции $y = f(x)$ и $y = g(x)$ непрерывны в точке $x = a$. Тогда

1°. Функция $y = f(x) + g(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

2°. Функция $y = f(x) \cdot g(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

3°. Если $g(a) \neq 0$, то функция $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ непрерывна в точке $x = a$.

4°. Если α — действительное число, то функция $y = \alpha \cdot f(x)$ непрерывна в точке $x = a$.

5°. Функция $y = (f(x))^n$, $n \in N$ непрерывна в точке $x = a$.

6°. Сложные функции $y = f(g(x))$ и $y = g(f(x))$ (если они существуют) непрерывны в точке $x = a$.

Доказательство всех утверждений теоремы следует из свойств предела функции в точке. Докажем, например, утверждение 3° теоремы 1. Так как $g(a) \neq 0$, используя свойства предела функции, имеем

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} = \frac{f(a)}{g(a)}.$$

Отсюда по определению следует непрерывность функции $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ в точке $x = a$.

Теорема 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a и $f(a) \neq 0$, то вблизи точки a знак функции совпадает со знаком числа $f(a)$.

Доказательство. Пусть для определенности $f(a) > 0$. По определению для любого $\varepsilon > 0$, в частности, если $0 < \varepsilon < f(a)$, существует число $\delta > 0$ такое, что при $|x - a| < \delta$, $x \in D$ выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Предположим, что в некоторой точке x_0 из указанной окрестности точки a выполняется неравенство $f(x_0) \leq 0$. Тогда имеем $\varepsilon > |f(x_0) - f(a)| \geq f(a)$. Это противоречит условию $f(a) > \varepsilon$. Следовательно, для всех $x \in D$, взятых из окрестности $(a - \delta;\ a + \delta)$ точки a выполняется неравенство $f(x) > 0$, т. е. знак функции вблизи точки a совпадает со знаком числа $f(a)$.

Аналогично доказывается случай, когда $f(a) < 0$.

Предоставляем читателю самостоятельно доказать следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, причем существует $\delta > 0$ такое, что $g(x) \neq 0$ при условии $0 < |x - a| < \delta$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \infty$.

П р и м е р 3. Покажем, что $\lim\limits_{x\to 4} \frac{x^2+1}{x^2-6x+8} = \infty$. Имеем

$$\lim_{x\to 4}(x^2+1) = 17, \lim_{x\to 4}(x^2-6x+8) = \lim_{x\to 4}(x-2)(x-4) = 0.$$

Используя теорему 3, получаем требуемое равенство.

2. Теорема о промежуточных значениях непрерывной на отрезке [*a; b*] функции.

Определение 2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна в каждой точке множества X, то она называется *непрерывной на множестве X*.

Рассмотрим свойства функции, непрерывной на отрезке $[a; b]$.

Пусть значения функции $y = f(x)$ в точках a и b имеют различные знаки. Тогда точки $A(a, f(a))$ и $B(b, f(b))$ графика функции располагаются по разным сторонам относительно оси абсцисс. В этом случае график непрерывной функции $y = f(x)$ будет пересекать ось OX в некоторой ее точке, т.е. существует такое значение $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) = 0$.

Теорема 4. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и принимает на концах отрезка значения разных знаков. Тогда существует хотя бы одна точка $x_0 \in [a, b]$ такая, что $f(x_0) = 0$.

Следствие 1. Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то она принимает на этом отрезке любое значение y_0, заключенное между $f(a)$ и $f(b)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть для определенности $f(a) < f(b)$ и $f(a) < y_0 < f(b)$. Рассмотрим функцию $y = f(x) - y_0$. Эта функция непрерывна на отрезке $[a, b]$. На концах отрезка функция принимает значения разных знаков. Поэтому по теореме 4 существует $x_0 \in [a, b]$, что $f(x_0) - y_0 = 0$. Тогда имеем $f(x_0) = y_0$.

Следствие 2. Пусть $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и не обращается в нуль внутри отрезка. Тогда для всех $x \in (a, b)$ функция $y = f(x)$ имеет один и тот же знак.

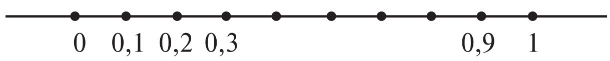
Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем от противного. Пусть существуют $x_1, x_2 \in (a, b)$ такие, что $f(x_1) \cdot f(x_2) < 0$, т. е. $f(x_1)$ и

$f(x_2)$ имеют разные знаки. Тогда по теореме 4 существует точка $x_0 \in [x_1, x_2]$ такая, что $f(x_0) = 0$. Это противоречит условию следствия 2.

Отметим также, что если в условиях теоремы 4 функция $y = f(x)$ монотонна, то она на отрезке $[a, b]$ принимает значение нуль только один раз.

Пример 4. Найти приближенное значение корня уравнения $x^3 - 3x + 1 = 0$.

Решение. Функция $x^3 - 3x + 1$ является непрерывной. Легко проверить, что $f(0) = 1 > 0$ и $f(1) = -1 < 0$. Значит, корень данного уравнения лежит на отрезке $[0, 1]$. Разделим отрезок $[0, 1]$ на десять равных частей:



Вычислим теперь значения функции во всех точках деления. Так как $f(0{,}3) = 0{,}127$ и $f(0{,}4) = -0{,}136$, то корень уравнения лежит на отрезке $[0{,}3; 0{,}4]$. Поэтому в качестве приближенного значения корня можно взять, например, число $x = \frac{0{,}3+0{,}4}{2} = 0{,}35$.

3. Замечательные пределы.

Теорема 5 (первый замечательный предел). Имеет место равенство

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1.$$

Доказательство. Рассмотрим единичный круг. Предположим, что угол α, выраженный в радианах, лежит на интервале $\left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ (рис. 42).

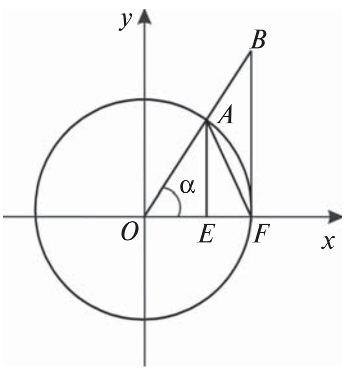


Рис. 42

Из рисунка видно, что площадь сектора OAF больше площади треугольника OAF и меньше площади треугольника OBF, т. е. $S_{\Delta OAF} < S_{\text{сек}OAF} < S_{\Delta OBF}$. Поскольку

$S_{\Delta OAF} = \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OF \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$, $S_{\text{сек}OAF} = \frac{1}{2}\alpha$, $S_{\Delta OBF} = \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$,

то $\frac{1}{2}\sin\alpha < \frac{1}{2}\cdot\alpha < \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, или $1 < \frac{\alpha}{\sin\alpha} < \frac{1}{\cos\alpha}$. Следовательно, $\cos\alpha < \frac{\sin\alpha}{\alpha} < 1$. Так как $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha = 1$, используя свойства предела функции и тригонометрических функций, имеем $\lim\limits_{\alpha\to 0}\cos\alpha \le \lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} \le 1$. Откуда $\lim\limits_{\alpha\to 0}\frac{\sin\alpha}{\alpha} = 1$.

Случай $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; 0\right)$ рассматривается аналогичным образом.

Теорема 6 (второй замечательный предел).

Последовательность $a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $n \in N$ сходится при $n \to \infty$.

Доказательство проведем в двух этапах:

а) Докажем, что последовательность $\{a_n\}$, $n\in N$ монотонно возрастает.

б) Докажем, что эта последовательность ограниченна сверху.

По формуле бинома Ньютона имеем

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\cdot\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\frac{1}{n^3} +$$
$$+ \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k}\cdot\frac{1}{n^k} + \ldots + \frac{n(n-1)\ldots(n-n+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\cdot\frac{1}{n^n} =$$
$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + \ldots + \frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

При вычислении следующего члена a_{n+1} каждый множитель в скобках вида $1-\frac{s}{n}$ заменяется большим множителем вида $1-\frac{s}{n+1}$. Поэтому $a_{n+1} > a_n$. Этим доказано утверждение а).

Покажем, что для любого натурального n справедливо неравенство $a_n < 3$.

В последней части формулы, полученной для a_n, все множители, заключенные в скобки, меньше 1. Поэтому $a_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$. Тогда, применяя неравенства $\frac{1}{2!} < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3!} < \frac{1}{2^2}$, ..., $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$, получим $a_n < 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$. Сумма $\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + ... + \frac{1}{2^{n-1}}$ представляет собой сумму геометрической прогрессии и она равна $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$. Поэтому $a_n < 2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) < 3$.

Следовательно, $\left\{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right\}$, $n \in N$, является монотонно возрастающей и ограниченной сверху последовательностью. Значит, она имеет предел.

Предел этой последовательности является иррациональным числом и обозначается через e ($e = 2{,}71828...$).

Таким образом, $\lim\limits_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$.

В заключение отметим, что такой же предел имеет функция $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to +\infty$, т. е. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$.

Вопросы и задания

1. Дать определение непрерывной в точке функции.
2. Сформулировать основные свойства непрерывной функции.
3. Доказать, что если функция $y = f(x)$ непрерывна в точке a, где $f(a) \neq 0$, то вблизи этой точки знак функции совпадает со знаком $f(a)$.
4. Дать определение непрерывной функции на множестве.
5. Какими свойствами обладает функция, непрерывная на отрезке $[a; b]$?
6. Дать схему доказательства теоремы о первом замечательном пределе.
7. Сформулировать теорему о втором замечательном пределе.

Упражнения

1. Доказать, что функция $y = x^2$ непрерывна в точке $x = 2$. Если $\varepsilon = 0{,}001$, найти такое δ, чтобы из $|x - 2| < \delta$ следовало $|x^2 - 4| < \varepsilon$.

2. Доказать, что функция $f(x)=\frac{x^2-1}{x^2+1}$ непрерывна в любой точке $x\in R$. Каким должно быть число δ, чтобы из $|x-2|<\delta$ следовало $|f(x)-f(2)|<0{,}1$?

3. Доказать непрерывность функции $f(x)=\frac{x-1}{2(x+1)}$ при $x\neq-1$. Найти δ, если из $|x-0{,}25|<\delta$ следует $|f(0{,}25)-f(x)|<0{,}01$.

4. Доказать непрерывность функции $y=\sin x$. Каким условиям должны удовлетворять x и окрестность точки $x=\frac{\pi}{2}$, чтобы имело место неравенство $1-\sin x<0{,}01$?

5. С помощью определения доказать, что функция $f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x}, & \text{если } x\neq 0,\\ 1, & \text{если } x=0\end{cases}$ является непрерывной функцией на множестве R.

6. Доказать непрерывность следующих функций:

а) $y=\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$, где $x\neq 1$, $x\neq-\frac{1}{2}$;

б) $y=\frac{x^3-1}{x^3-x^2+x-1}$, где $x\neq 1$.

7. Доказать, что функция $y=\sin x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ непрерывна и монотонно возрастает.

8. Доказать, что функция $y=\cos x$ на отрезке $[0;\pi]$ непрерывна и монотонно убывает.

9. Доказать, что функция $y=\mathrm{tg}\,x$ на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ непрерывна и монотонно возрастает.

10. Доказать, что функция $y=\mathrm{ctg}\,x$ на интервале $(0;\pi)$ непрерывна и монотонно убывает.

11. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{|x|}, & \text{если } x\neq 0,\\ 1, & \text{если } x=0\end{cases}$ разрывная в точке $x = 0$.

12. Функция $f(x)$ является возрастающей на интервале $(a; b)$. Можно ли утверждать, что функция $\varphi(x) = f^2(x)$ возрастает на этом же интервале?

13. Функции $f(x)$ и $g(x)$ являются убывающими на интервале $(a; b)$. Доказать, что функция $\varphi(x) = f(x) + g(x)$ убывает на этом же интервале.

14. Функция $f(x)$ является периодической с периодом T. Доказать, что число $T_1 = nT$, где n — любое целое число, $n \neq 0$, также является периодом этой функции.

15. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на всей числовой оси и не являются периодическими. Может ли функция $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x)$ быть периодической?

16. Функция $f(x)$ определена на интервале $(-a; a)$. Доказать, что:

а) функция $\varphi_1(x) = f(x) + f(-x)$ — четная;

б) функция $\varphi_2(x) = f(x) - f(-x)$ — нечетная.

17. Доказать, что всякую функцию $f(x)$, определенную на симметрическом интервале $(-a; a)$, можно представить в виде суммы четной и нечетной функций.

18. Доказать, что четная функция не может быть строго монотонной.

19. Найти функцию, определенную на всей числовой оси и являющуюся одновременно четной и нечетной.

20. Функции $f(x)$ и $g(x)$ определены на симметричном промежутке $(-a; a)$.

а) Доказать, что если $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции, то $\varphi_1(x) = f(x) \pm g(x)$ и $\varphi_2(x) = f(x) \cdot g(x)$ также являются четными функциями;

б) Доказать, что если $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, то функция $\varphi_3(x) = f(x) + g(x)$ — нечетная, а функция $\varphi_4(x) = f(x) \cdot g(x)$ — четная;

в) Пусть $f(x)$ — нечетная функция, $g(x)$ — четная функция. Доказать, что $\varphi_5(x) = f(x) \cdot g(x)$ — нечетная функция.

Упражнения для повторения

Вычислить (**1–11**):

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{x}$. **2.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}7x}{x}$. **3.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 6x}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{tg}2x}{\sin 5x}$. **5.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(x^6)}{(\sin x)^5}$. **6.** $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^3}{(\sin x)^5}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^4}{(\sin x)^4}$. **8.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$. **9.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{\frac{x+1}{x}}$.

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$. **11.** $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x^2-1}\right)^{x^2}$.

12. Найти точки разрыва функции:

а) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-9}$; г) $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$;

б) $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & \text{если } x\neq 0,\\ -2, & \text{если } x=0;\end{cases}$ д) $f(x)=\dfrac{x}{\cos x}$;

в) $f(x)=1+2^{\frac{1}{x}}$; е) $f(x)=[x]$.

13. Дана функция $f(x)=5\sqrt{x-1}+2\sqrt{1-x}$. Является ли функция непрерывной в точке $x=1$?

14. При каком значении A будет непрерывной в точке $x=2$ функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & \text{если } x\neq 2,\\ A, & \text{если } x=2\,?\end{cases}$

Найти пределы (**15–30**):

15. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2x^2-x-1}$. **16.** $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{2x^3-x^2+x-1}$. **17.** $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^4-6x^2-27}{x^3+3x^2+x+3}$.

18. $\lim\limits_{x\to 1}\left[\left(\dfrac{4}{x^2-x^{-1}}-\dfrac{1-3x+x^2}{1-x^3}\right)^{-1}+3\,\dfrac{x^4-1}{x^3-x^{-1}}\right]$.

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x}{5x-1}\cdot\dfrac{2x^2+1}{x^2+2x-1}\right).$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-1}{9x^2-4}-\dfrac{x^2}{3x+2}\right).$

21. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{6}}\dfrac{2\sin^2 x+\sin x-1}{2\sin^2 x-3\sin x+1}.$

22. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{1-\mathrm{ctg}^3 x}{2-\mathrm{ctg}x-\mathrm{ctg}^3 x}.$

23. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}.$

24. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-\sqrt{3x-2}}{x^2-4}.$

25. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{2-x}-1}.$

26. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sqrt{x-b}-\sqrt{a-b}}{x^2-a^2}$, $a\neq 0$, $a>b$.

27. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{x}-1}.$

28. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt{1-x}}.$

29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x^2+3x-1)\mathrm{tg}x}{x^2+2x}.$

30. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3+x^2-2}{\sin(x-1)}.$

ГЛАВА XIII

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

В этой главе будет введено одно из важнейших понятий математического анализа — понятие производной функции и рассмотрены некоторые из ее многочисленных применений. Понятие производной является полезным не только для математического анализа, но и для применений в геометрии, механике, физике и технике.

§ 1. Понятие производной функции

Рассмотрим сначала следующую физическую задачу, приводящую к понятию производной.

1. Задача о скорости прямолинейного движения. Пусть в прямолинейном движении материальной точки зависимость пройденного пути S от времени t выражается уравнением $S = f(t)$.

Поставим следующую задачу: дать согласующееся с нашими привычными и наглядными представлениями определение скорости движения (т.е. «быстроты изменения» величины пути с изменением времени).

Пусть t_0 — некоторый момент времени. Рассмотрим другой момент времени t и обозначим $\Delta t = t - t_0$ и $\Delta S = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ соответственно приращение времени и приращение пути.

Если отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ остается неизменным для различных значений Δt (т.е. движение равномерное), то это отношение и называют скоростью движения (что представляется естественным).

В общем же случае отношение $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ меняется с изменением Δt и о нем нельзя говорить как о скорости движения вообще. В этом случае об отношении $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ можно говорить лишь как о средней скорости движения за время Δt, прошедшее от исходного момента t_0.

Используем следующее наводящее соображение. Предположим, что некоторым образом уже введено понятие скорости движения в данной точке пути и в каждый момент времени t эта скорость характеризуется каким-то числом v. Тогда естественно полагать, что если Δt очень мало, то за этот промежуток времени скорость практически не меняется, т.е. средняя скорость на этом промежутке практически не отличается от значения v (чем меньше промежуток времени Δt, тем меньше скорость v успеет измениться за это время и тем ближе средняя скорость $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ к «истинной скорости» v в момент t).

Таким образом, естественно дать такое определение скорости: *скоростью v прямолинейного движения*, с законом $S = f(t)$, в данный момент времени t_0 называется предел средней скорости $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ (если он существует), когда промежуток времени Δt стремится к нулю, т.е. по определению

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}.$$

Итак, при решении некоторых важных задач мы сталкиваемся с необходимостью вычисления предела указанного вида, т.е. предела отношения приращения некоторой функции к соответствующему приращению ее аргумента (когда последнее стремится к нулю).

Перейдем теперь к рассмотрению вопроса о пределе такого вида для произвольной функции.

2. Понятие о производной. Пусть $y = f(x)$ — заданная функция с областью определения D, x_0 — фиксированная точка из этой области. Выберем еще одну произвольную точку x из области определения D. Разность $x - x_0$ называется *приращением независимой переменной* (или *приращением аргумента*) в точке x_0 и обозначается Δx (читается «дельта x», $\Delta x = x - x_0$). В этом случае говорят также, что начальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx. Вследствие этого приращения значение функции $f(x)$ изменится на величину

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Эта разность называется *приращением функции* $f(x)$ в точке x_0, соответствующим приращению $\Delta x = x - x_0$, и обозначается Δy или Δf (читается «дельта эф»). Таким образом,

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Как видно из этой формулы, при фиксированном значении x_0 приращение Δf есть функция от приращения Δx.

Далее составим отношение $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$. Это отношение также является функцией Δx. Может случиться, что такая функция имеет предел при $\Delta x \to 0$, т.е. существует

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}.$$

Определение 1. *Производной функции* $f(x)$ *в точке* x_0 называется предел отношения

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

(если он существует), когда Δx стремится к нулю.

Производная функции $f(x)$ в точке x_0 обозначается $f'(x_0)$ (читается «эф штрих от x_0»), так что $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Пример 1. Найти приращения Δx и Δf в точке $x_0 = 3$, если $f(x) = x^2 + x$ и $x = 3{,}1$.

Решение. Имеем

$$\Delta x = x - x_0 = 3{,}1 - 3 = 0{,}1,$$

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(3{,}1) - f(3) =$$
$$= 3{,}1^2 + 3{,}1 - (3^2 + 3) = 12{,}71 - 12 = 0{,}71.$$

Пример 2. Выразить приращение Δf функции $f(x) = x^2$ в точке x_0 через x_0 и Δx.

Решение. $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + \Delta x^2$.

Пример 3. Найти производную функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ в точке x_0 ($x_0 \neq 0$).

Решение. $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \dfrac{1}{x_0+\Delta x} - \dfrac{1}{x_0} =$

$$= \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)},$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{\Delta x}{x_0(x_0+\Delta x)} \cdot \frac{1}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)}, \quad (x_0 + \Delta x \neq 0,\ \Delta x \neq 0).$$

Поскольку x_0 постоянно, а при $\Delta x \to 0$ дробь $-\frac{1}{x_0(x_0+\Delta x)} \to -\frac{1}{x_0^2}$, то получаем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = -\frac{1}{x_0^2}.$$

Пример 4. Найти производную функции $f(x) = x^{3/2}$ в точке $x_0 = 0$.

Решение. Областью определения $f(x)$ является множество $[0; +\infty)$. Приращение аргумента $\Delta x = x - x_0 = x - 0 = x$. Приращение функции в точке $x_0 = 0$ равно

$$\Delta f = f(x) - f(x_0) = x^{3/2} - 0 = x^{3/2},$$

где $x \in (0; +\infty)$. Отсюда

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{x \to 0} \frac{x^{3/2}}{x} = \lim_{x \to 0} x^{1/2} = \lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0.$$

Следовательно, на конце $x_0 = 0$ промежутка $[0; +\infty)$ данная функция имеет производную, равную нулю.

Предположим теперь, что функция $f(x)$ в каждой точке некоторого множества $D_1 \subset D$ имеет производную. Тогда каждому x из D_1 будет соответствовать свое определенное значение этой производной. Такое соответствие образует на множестве D_1 некоторую новую функцию. Эту функцию называют производной функцией от функции $f(x)$ или просто производной функции $f(x)$ и обозначают $f'(x)$ (читается «эф штрих от x»), так что

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Определение 2. *Производной функцией от заданной функции* $f(x)$ (при переменном значении аргумента x) называется предел отношения приращения функции $f(x)$ к приращению ее аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю.

Как следует из определения для отыскания производной от заданной функции, надо:

1) произвольному значению аргумента x из области определения D функции дать произвольное приращение $\Delta x \neq 0$ (так, чтобы $x + \Delta x \in D$) и вычислить соответствующее приращение функции $\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$;

2) составить отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$;

3) перейти к отысканию предела отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

Те значения x, для которых этот предел существует, образуют некоторое множество $D_1 \subset D$, на котором будет существовать производная $f'(x)$ данной функции $f(x)$.

Операция отыскания производной $f'(x)$ от данной функции $f(x)$ называется *дифференцированием.*

Пример 5. Найти производную функции $y = f(x) = x^3$.

Решение. Областью определения функции $y = x^3$ является интервал $(-\infty; +\infty)$. На этом интервале возьмем произвольное значение аргумента x и дадим ему произвольное приращение Δx. Тогда

$$\Delta y = \Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^3 - x^3 =$$
$$= x^3 + 3x^2\Delta x + 3x\Delta x^2 + \Delta x^3 - x^3 = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2).$$

Отсюда $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2)}{\Delta x} =$

$$= \lim_{\Delta x \to 0}(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2) = 3x^2.$$

Таким образом, заданная функция $f(x)$ имеет производную $f'(x)$ на $(-\infty; +\infty)$ и эта производная равна $f'(x) = (x^3)' = 3x^2$.

Пример 6. Найти производную функции $f(x) = \sqrt{x}$.

Решение. Областью определения $f(x)$ является множество $[0; +\infty)$. Дадим $x \in [0; +\infty)$ приращение Δx, где $x + \Delta x \geq 0$. Имеем $\Delta f = \sqrt{x + \Delta x} - \sqrt{x}$. Тогда

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x+\Delta x} - \sqrt{x}}{\Delta x} = \frac{x + \Delta x - x}{\Delta x(\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x})} = \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}}.$$

Если $x > 0$, то существует конечный предел полученной дроби. Он равен

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{x+\Delta x} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Если же $x = 0$, то $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x}}$ и при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не стремится к конечному предельному значению. Поэтому в точке $x = 0$ функция $f(x) = \sqrt{x}$ производной не имеет.

Таким образом, функция $f(x)=\sqrt{x}$, определенная на $[0;\ +\infty)$, имеет производную $f'(x)$ лишь на интервале $(0;\ +\infty)$. Эта производная равна $f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Замечание 1. В случае, когда в данной точке при $\Delta x \to 0$ отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} \to \infty$, иногда говорят, что функция $f(x)$ имеет в этой точке бесконечную производную. Мы не будем рассматривать этот случай, и всюду в дальнейшем, говоря, что производная функции существует, мы будем иметь в виду конечный предел отношения $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$.

П р и м е р 7. Рассмотрим функцию $f(x) = |x|$. Она определена на $(-\infty;\ +\infty)$. Если $x = 0$, то

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & \Delta x>0\\ -1, & \Delta x<0.\end{cases}$$

Так как левый предел $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to -0}-\frac{\Delta x}{\Delta x}=-1$, а правый предел $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$, то $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta f}{\Delta x}\neq\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$. Поэтому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}$ не существует, т.е. в точке $x = 0$ функция $f(x) = |x|$ не имеет производной. Нетрудно проверить, что в остальных точках функция $f(x)$ имеет производную, причем $f'(x) = |x|' = 1$ при $x > 0$ и $f'(x) = |x|' = -1$ при $x < 0$. Следовательно, данная функция имеет производную $f'(x)$ лишь на множестве $(-\infty;\ 0)\cup(0;\ +\infty)$.

3. Дифференцируемые функции. В математическом анализе функцию, имеющую производную в точке x_0, называют также дифференцируемой в этой точке. Дадим точное определение дифференцируемой функции.

Определение 3. Функция $f(x)$, $x\in D$ называется *дифференцируемой в точке* $x_0\in D$, если ее приращение при переходе от x_0 к $x_0 + \Delta x$ можно представить в виде

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(k+\alpha(\Delta x))\Delta x, \qquad (1)$$

где k — некоторое число, а $\alpha(\Delta x)$ — функция приращения Δx, причем $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$.

П р и м е р 8. Показать, что функция $f(x) = x^2$:

а) является дифференцируемой в любой точке интервала $(-\infty; +\infty)$;

б) имеет производную $f'(x) = 2x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Р е ш е н и е. При любом фиксированном значении $x_0 \in (-\infty; +\infty)$ и приращении $\Delta x \neq 0$ имеем:

а) $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 = (2x_0 + \Delta x)\Delta x$.

Положим, $2x_0 = k$, $\alpha(\Delta x) \equiv \Delta x$. Тогда $\Delta f = (k + \alpha(\Delta x))\Delta x$, причем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Следовательно, функция $f(x) = x^2$ – дифференцируемая в любой точке $x_0 \in (-\infty; +\infty)$;

б) $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{(2x_0 + \Delta x)\Delta x}{\Delta x} = 2x_0 + \Delta x$. Тогда

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0) + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x_0 .$$

Следовательно, $f'(x) = 2x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

Отметим, что для линейной функции $f(x) = kx + b$ ее приращение

$$\Delta f = k(x + \Delta x) + b - (kx + b) = k\Delta x ,$$

т.е. для этой функции $\alpha(\Delta x) \equiv 0$. Следовательно, линейная функция дифференцируема в любой точке x, причем ее приращение Δf прямо пропорционально приращению аргумента Δx. Для других дифференцируемых функций имеет место лишь приближенная пропорциональность Δf и Δx (слагаемое $\alpha(\Delta x)$ в формуле (1) указывает на малое отклонение от точной пропорциональности).

С точки зрения математики дифференцируемость функции $f(x)$ в точке x_0 означает ее «линейность в малом», т.е. график дифференцируемой функции вблизи точки $(x_0, f(x_0))$ «похож» на график линейной функции (график равномерного движения). С точки зрения физики свойство дифференцируемости означает, что соответствующий физический процесс в течение малого промежутка времени протекает с «почти постоянной» скоростью («почти равномерно»).

Теорема 1. Функция $f(x)$, $x \in D$ дифференцируема в точке $x_0 \in D$ тогда и только тогда, когда в этой точке существует производная $f'(x_0)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то в силу (1) имеем

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = k + \alpha(\Delta x)\text{, где } \lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0 .$$

Тогда из свойств предела следует

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0} (k + \alpha(\Delta x)) = k .$$

По определению производной это означает, что в точке x_0 существует производная $f'(x_0) = k$.

Обратно, пусть существует

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} .$$

Положим, $\alpha(\Delta x) = \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$. Ясно, что $\lim_{\Delta x\to 0} \alpha(\Delta x) = 0$. Поэтому

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (f'(x_0) + \alpha(\Delta x))\Delta x ,$$

т.е. $f(x)$ — дифференцируемая в точке функция.

Из доказанной теоремы следует, что свойство функции иметь производную эквивалентно свойству ее дифференцируемости. Тем самым можно ввести еще одно эквивалентное определение дифференцируемой функции: *функция $f(x)$, $x\in D$ называется дифференцируемой в точке $x_0\in D$, если в этой точке существует производная $f'(x_0)$.*

4. Непрерывность и дифференцируемость. Свойство функции иметь производную тесно связано со свойством ее быть непрерывной. Имеет место следующая теорема:

Теорема 2. Если функция $f(x)$, $x\in D$ дифференцируема в точке $x_0\in D$, то она непрерывна в этой точке.

Доказательство. Согласно формуле (1) имеет место равенство

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (k + \alpha(\Delta x))\Delta x .$$

Так как $\lim_{\Delta x\to 0} (k + \alpha(\Delta x))\Delta x = (k + 0)\cdot 0 = 0$, то

$$\lim_{\Delta x\to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0\text{, т.е. } \lim_{\Delta x\to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) .$$

Это означает, что функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

Замечание 2. Обратное утверждение не является верным. Непрерывная в некоторой точке функция $f(x)$ может не быть дифференцируемой в этой точке. Действительно, функция $f(x) = |x|$ из примера 7 не дифференцируема при $x = 0$.

В то же время,

$$\lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} |x| = \lim_{x\to+0} x = 0,$$

$$\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to-0} |x| = \lim_{x\to-0} (-x) = 0,$$

т.е. $\lim_{x\to-0} f(x) = \lim_{x\to+0} f(x) = f(0)$. Это означает непрерывность $f(x) = |x|$ в точке $x = 0$.

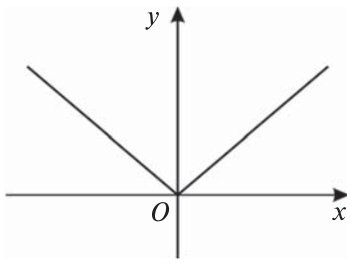


Рис. 43

Отметим также, что в точке $x = 0$ график функции $|x|$ имеет «излом». Этот факт не является случайным, поскольку функция не дифференцируема в точке $x = 0$, а дифференцируемость функции в точке означает «гладкость» ее графика в этой точке (рис. 43).

Вопросы и задания

1. Что называется приращением аргумента и приращением функции в точке?
2. Дать определение производной функции в точке.
3. Дать определение скорости прямолинейного движения материальной точки.
4. Какую функцию называют производной функцией от заданной функции?
5. Сформулировать правило отыскания производной от данной функции.
6. Какая функция называется дифференцируемой в точке?
7. Дать эквивалентное определение дифференцируемой функции.
8. Объяснить, чем отличается дифференцируемость функции в точке от непрерывности функции в этой точке.

Упражнения

1. Масса части стержня от его левого конца до точки, находящейся от этого конца на расстоянии x, равна $f(x)$. Объяснить физический смысл приращения функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$.
2. Количество жителей города в момент времени t равно $f(t)$. Объяснить смысл приращения этой функции при переходе от точки t_0 к $t_0 + \Delta t$.

3. Найти приращение функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=4x+3$, $x_0=-1$, $\Delta x=0{,}1$;

б) $f(x)=x^2+7$, $x_0=2$, $\Delta x=-0{,}1$;

в) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=-2$, $\Delta x=0{,}1$;

г) $f(x)=\dfrac{x^2}{2}$, $x_0=1$, $\Delta x=0{,}01$.

4. Найти приращения Δx и Δf в точке x_0, если:

а) $f(x)=x+4$, $x_0=1$, $x=0{,}9$;

б) $f(x)=x-x^2$, $x_0=2$, $x=2{,}1$;

в) $f(x)=|x|$, $x_0=-2{,}5$, $x=-2{,}6$;

г) $f(x)=\sqrt{x+1}$, $x_0=0$, $x=3$.

5. Выразить приращение Δf функции $f(x)$ в точке x_0 через x_0 и Δx, если:

а) $f(x)=x-x^2$; б) $f(x)=x^3+1$.

6. Ребро куба с длиной 3 м получило приращение 2 м. Найти приращение площади полной поверхности куба.

7. Аргумент x функции $f(x)=\sqrt{x}$ получил приращение $\Delta x=0{,}01$ и принял значение 0,1. Найти приращение функции.

8. Пользуясь определением, найти производную функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=x^2+3$, $x_0=-1$; в) $f(x)=3x+2$, $x_0=1$;

б) $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $x_0=2$; г) $f(x)=x^3+2$, $x_0=0$.

9. Пользуясь определением, найти производную функции $f(x)=x^3+x^2+1$.

10*. Найти производную функции $f(x)=x^n$, где n — натуральное число.

11*. Найти производную функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=\sin x$; б) $f(x)=\cos x$; в) $f(x)=\operatorname{tg}x$; г) $f(x)=\operatorname{ctg}x$.

12. Доказать, что функция $y=x^3+x$ дифференцируемая в любой точке интервала $(-\infty;+\infty)$. Пользуясь определением, найти производную этой функции.

13. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases}1-x, & x\ge 0,\\ x+1, & x<0.\end{cases}$

а) непрерывная в точке $x = 0$;
б) не является дифференцируемой в точке $x = 0$;
в) непрерывная и дифференцируемая в точках $x \neq 0$.

---

14. Выразить $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ через x_0 и Δx, если:

а) $f(x) = x^2 + x$;
в) $f(x) = \frac{4}{x}$;
б) $f(x) = x^3 - 1$;
г) $f(x) = 2x - 5$.

15. Аргумент x функции $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ получил приращение $\Delta x = 0{,}1$ и принял значение 0. Найти приращение функции.

16. Для функции $f(x) = 3x + 4$ найти приращения аргумента и функции на отрезке: а) $[1; 1{,}01]$; б) $[-3{,}1; -3]$.

17. Температура стержня в точке, находящейся на расстоянии x от его левого конца, равна $f(x)$. Объяснить физический смысл приращения функции $f(x)$ при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$.

18. Пользуясь определением, найти производную функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x) = 4x - 7$, $x_0 = 2$;
в) $f(x) = \cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$;
б) $f(x) = \sqrt{x+1}$, $x_0 = 0$;
г) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

19. Пользуясь определением, найти производную функции:

а) $f(x) = x^2 - \frac{1}{x} + 3$;
в) $f(x) = \sqrt{x} + 2x^2$;
б) $f(x) = x - \sin x$;
г) $f(x) = |x|$, $x \neq 0$.

20. Доказать, что функция $y = x^3 + x^2 + x + 1$ дифференцируемая в любой точке интервала $(-\infty; +\infty)$.

21. Показать, что функция $f(x) = \begin{cases} 0, & x \geq 0, \\ x, & x < 0 \end{cases}$ непрерывная в точке $x = 0$, но не является дифференцируемой в этой точке. Построить график функции.

§ 2. Основные правила дифференцирования

Непосредственное дифференцирование функций, осуществляемое на основе определения производной, часто бывает затруднительным при применении его к сложно устроенным функциям. Поэтому устанавливают некоторые общие правила дифференцирования.

Выведем правила дифференцирования суммы, произведения и частного функций.

Теорема 1. Алгебраическая сумма нескольких функций, имеющих в области определения D производные, также имеет в этой области производную, причем эта производная равна алгебраической сумме (того же вида) производных от слагаемых заданной суммы.

Доказательство. Не меняя общности, можно ограничиться случаем трех функций. Пусть функции $f_1(x)$, $f_2(x)$ и $f_3(x)$ имеют производные в точке $x \in D$. Рассмотрим их алгебраическую сумму, например, сумму вида $y = f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)$.

Дадим значению x приращение Δx. Тогда функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ получат соответственно приращения Δf_1, Δf_2, Δf_3. Имеем

$$\Delta y = (f_1(x+\Delta x) - f_2(x+\Delta x) + f_3(x+\Delta x)) - (f_1(x) - f_2(x) + f_3(x)) =$$
$$= (f_1(x+\Delta x) - f_1(x)) - (f_2(x+\Delta x) - f_2(x)) + (f_3(x+\Delta x) - f_3(x)) =$$
$$= \Delta f_1 - \Delta f_2 + \Delta f_3.$$

Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta f_1}{\Delta x} - \frac{\Delta f_2}{\Delta x} + \frac{\Delta f_3}{\Delta x}$. По условию теоремы существуют

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta x} = f_1'(x),\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta x} = f_2'(x),\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_3}{\Delta x} = f_3'(x).$$

Используя теорему о пределе суммы, заключаем, что существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y' = \lim_{\Delta x \to 0} \left(\frac{\Delta f_1}{\Delta x} - \frac{\Delta f_2}{\Delta x} + \frac{\Delta f_3}{\Delta x} \right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_3}{\Delta x} = f_1'(x) - f_2'(x) + f_3'(x).$$

Таким образом, для произвольного значения $x \in D$:

$$(f_1(x) - f_2(x) + f_3(x))' = f_1'(x) - f_2'(x) + f_3'(x).$$

Из проведенных рассуждений видно, что комбинация знаков в алгебраической сумме заданных функций, как и число слагаемых этой суммы, при доказательстве роли не играют.

Пример 1. Найти производную функции $y = x^3 + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$.

Решение. Применяя доказанную теорему и примеры 3, 5, 6 из § 1 настоящей главы, находим

$$y' = (x^3)' + (\sqrt{x})' + \left(\frac{1}{x}\right)' = 3x^2 + \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2}.$$

Теорема 2. Произведение двух функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, имеющих в области определения D производные, также имеет в этой области производную, причем

$$(f_1(x) \cdot f_2(x))' = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x).$$

Доказательство. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют производные в точке $x \in D$ и $y = f_1(x) \cdot f_2(x)$. Дадим x приращение Δx. Тогда функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ получат соответственно приращения Δf_1 и Δf_2. Имеем

$$\Delta y = f_1(x+\Delta x) \cdot f_2(x+\Delta x) - f_1(x) \cdot f_2(x) = (f_1(x) + \Delta f_1)(f_2(x) + \Delta f_2) -$$
$$- f_1(x) \cdot f_2(x) = f_1(x)\Delta f_2 + f_2(x)\Delta f_1 + \Delta f_1 \Delta f_2.$$

Отсюда $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f_1(x)\frac{\Delta f_2}{\Delta x} + f_2(x)\frac{\Delta f_1}{\Delta x} + \Delta f_1 \frac{\Delta f_2}{\Delta x}$.

Перейдем к пределу при $\Delta x \to 0$. При этом величины $f_1(x)$ и $f_2(x)$ не зависят от Δx и являются постоянными. Кроме того, по условию теоремы существуют

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta x} = f_1'(x), \quad \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_2}{\Delta x} = f_2'(x).$$

Так как функция $f_1(x)$ имеет производную в точке x, то в этой точке она непрерывна и, следовательно,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f_1 = \lim_{\Delta x \to 0} (f_1(x+\Delta x) - f_1(x)) = 0.$$

Поэтому из теорем о пределах суммы и произведения получаем

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\left(f_1(x)\frac{\Delta f_2}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left(f_2(x)\frac{\Delta f_1}{\Delta x}\right) + \lim_{\Delta x \to 0}\left(\Delta f_1 \frac{\Delta f_2}{\Delta x}\right) =$$
$$= f_1(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f_2}{\Delta x} + f_2(x)\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f_1}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0}\Delta f_1 \cdot \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta f_2}{\Delta x} =$$
$$= f_1(x) f_2'(x) + f_2(x) f_1'(x) + 0 \cdot f_2'(x) = f_1(x) f_2'(x) + f_2(x) f_1'(x).$$

Таким образом, для произвольного значения $x \in D$:

$$(f_1(x) f_2(x))' = f_1'(x) f_2(x) + f_1(x) f_2'(x).$$

Следствие 1. Пусть $y = cf(x)$, где c — постоянная, а функция $f(x)$ имеет производную в области определения D. Тогда функция y также имеет производную в этой области, причем

$$y' = (cf(x))' = c \cdot f'(x).$$

Правило дифференцирования, выражаемое последней формулой, обычно читается так: *постоянный множитель можно выносить за знак производной.*

Доказательство. Достаточно доказать, что производная от функции, имеющей постоянное значение c, равна нулю. Тогда, применяя теорему 2, получим требуемую формулу. Положим $f_1(x) \equiv c$ в области D. Возьмем любое $x \in D$ и дадим ему приращение Δx (где $x + \Delta x \in D$): $\frac{\Delta f_1}{\Delta x} = \frac{f_1(x+\Delta x) - f_1(x)}{\Delta x} = \frac{c-c}{\Delta x} = 0$.

Следовательно, $f_1'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f_1}{\Delta x} \equiv 0$, $x \in D$.

Пример 2. Найти производную функции:

$$y = \left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{x} + \sqrt{x}\right).$$

Решение. Применяя теорему 2 и следствие 1, имеем

$$y' = \left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)'\left(\frac{3}{x} + \sqrt{x}\right) + \left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)\left(\frac{3}{x} + \sqrt{x}\right)' = \left(2 \cdot 3x^2 - \frac{1}{x^2}\right)\left(\frac{3}{x} + \sqrt{x}\right) +$$

$$+\left(2x^3 + \frac{1}{x}\right)\left(-\frac{3}{x^2} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\right) = 18x + 6x^2\sqrt{x} - \frac{3}{x^3} - \frac{\sqrt{x}}{x^2} - 6x + \frac{x^3}{\sqrt{x}} - \frac{3}{x^3} + \frac{1}{2x\sqrt{x}} =$$

$$= 12x + 7x^2\sqrt{x} - \frac{6}{x^3} - \frac{1}{2x\sqrt{x}}.$$

Замечание 1. Пример 2 можно решить и другим способом: раскрыть скобки, упростить выражения для y, а затем произвести почленное дифференцирование.

Замечание 2. Методом математической индукции можно показать, что при тех же предположениях относительно перемножаемых функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ справедлива формула

$$(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x))' = f_1'(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) +$$

$$+ f_1(x) \cdot f_2'(x) \cdot \ldots \cdot f_n(x) + \ldots + f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot \ldots \cdot f_n'(x),$$

т.е. производная от произведения нескольких функций, имеющих производные, равна сумме всевозможных произведений, каждое из которых есть произведение производной одной из данных функций на все остальные функции.

Аналогичными рассуждениями можно доказать следующую теорему:

Теорема 3. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют производные в данной области определения D, причем функция $f_2(x)$ не обращается в нуль в этой области. Тогда частное $y = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ также имеет в области D производную, которая равна

$$y' = \left(\frac{f_1(x)}{f_2(x)}\right)' = \frac{f_1'(x) f_2(x) - f_1(x) f_2'(x)}{f_2^2(x)}.$$

Следствие 2. Пусть $y = \frac{c}{f(x)}$, где c — постоянная, а функция $f(x)$ имеет производную в области определения D, причем $f(x)$ не обращается в нуль в этой области. Тогда функция y также имеет в области D производную, которая равна

$$y' = \left(\frac{c}{f(x)}\right)' = -\frac{c}{f^2(x)} f'(x)$$

(доказательство следствия 2 предоставляем читателю).

П р и м е р 3. Найти производную функции $y = \frac{2}{x^3} + 5$.

Р е ш е н и е. Применяя следствие 2, имеем

$$y' = \left(\frac{2}{x^3}\right)' + (5)' = -\frac{2}{x^6} \cdot (x^3)' + 0 = -\frac{2}{x^6} \cdot 3x^2 = -\frac{6}{x^4}.$$

Вопросы и задания

1. Сформулировать правило дифференцирования суммы нескольких функций, имеющих производные.
2. Сформулировать правило дифференцирования, выражаемое формулой $(cf(x))' = c \cdot f'(x)$, где c — постоянное число.
3. Сформулировать правило дифференцирования частного двух функций, имеющих производные.

Упражнения

1. Найти и сравнить производные функций x, x^2, x^3, x^4, $\frac{1}{x}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x}$, $\frac{1}{x^2}$. Просматривается ли здесь какая-либо закономерность?

2. Пользуясь производными, найденными в примере 1, найти производную функций:

а) $x^4 - x^2 + x$; в) $\frac{1}{x} + x$;

б) $x^3 + \sqrt[3]{x}$; г) $x^4 + x^3 + x^2 - x - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}$.

3. Найти скорость точки в момент t_0, если:

а) $x(t) = t^3 - 2t^2 + t$, $t_0 = 5$; б) $x(t) = 5t + t^3 + \sqrt{t}$, $t_0 = 4$.

4. Найти производную функций:

а) $y = (x-1)(x^2 - 5)$; в) $y = \frac{x^2-3}{x-4}$;

б) $y = (x^4 - \sqrt{x})(x^2 + x)$; г) $y = \frac{\sqrt{x}+1}{x^3+1}$.

5. Используя формулы дифференцирования, найти производную функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x) = x^2 + 5x - 3$, $x_0 = 1$; в) $f(x) = 2\sqrt{x} + x^3 + \frac{1}{2}$, $x_0 = 4$;

б) $f(x) = 4 - 3x$, $x_0 = -2$; г) $f(x) = x^2 + \lg 2$, $x_0 = 1$.

---

6. Найти производную функций:

а) $2x^3 - 4x^2 + 5$; в) $\frac{4}{x} + \frac{x}{4}$;

б) $7x^2 - 2x + \sqrt{7}$; г) $x^2 + \frac{1}{x^2}$.

7. Найти скорость точки в момент t_0, если:

а) $x(t) = t^2 + 5t + 1$, $t_0 = 1$; б) $x(t) = 4t^3 + \frac{1}{t} + 1$, $t_0 = 1$.

8. Найти производную функций:

а) $y = (x-2)(x+2)$; в) $y = (x+2)^3$;

б) $y = \frac{x^2-9}{x-3}$; г) $y = x^2 + \lg 7 + \sin\frac{\pi}{9}$.

9. Найти производную функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x) = (x+1)^3$, $x_0 = -1$; б) $f(x) = \sin x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

10. Вывести формулу для $(f_1(x) \cdot f_2(x) \cdot f_3(x))'$.

§ 3. Производные простейших элементарных функций

К *простейшим элементарным функциям* относятся: степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции. Из этих функций можно строить более сложные элементарные функции, например, $y = \ln\cos x$, $y = \operatorname{tg}^3 x + \arcsin \ln x$ и другие.

Выведем формулы для вычисления производных простейших элементарных функций.

1. Производная степенной функции. Напомним, что *степенной функцией* называется функция, заданная формулой $f(x) = x^\alpha$, где α — некоторое действительное число. В главе VIII части I были рассмотрены основные свойства степенной функции. Теперь займемся выводом формулы для производной степенной функции. Здесь мы ограничимся случаем целого α (в общем случае, формулу дифференцирования степенной функции $f(x) = x^\alpha$ с любым действительным показателем α можно вывести, применяя правило дифференцирования сложной функции).

Итак, пусть α — целое число. Рассмотрим следующие случаи:

а) $\alpha = 0$. Тогда при $x \neq 0$ имеем функцию вида $f(x) = x^0 \equiv 1$. В этом случае $(x^0)' = (1)' = 0$ при всех $x \neq 0$;

б) $\alpha = 1$. В этом случае имеем функцию $f(x) = x$. Возьмем произвольное значение аргумента x и дадим ему приращение Δx. Тогда $\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = (x+\Delta x) - x = \Delta x$. Отсюда $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$, т.е. $(x)' = 1$ при любом x;

в) $\alpha = 2$. Имеем функцию $f(x) = x^2$, производная которой $(x^2)' = 2x$ при любом x;

г) α — любое натуральное число. Заметим, что найденные производные можно записать в виде

$$(x^0)' = 0 \cdot x^{0-1} = 0,\ (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1,\ (x^2)' = 2 \cdot x^{2-1} = 2x .$$

Продолжая аналогичные рассуждения, можно убедиться, что для значений $\alpha = 3, 4, 5, \ldots$ справедлива формула

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} . \qquad (1)$$

Предположим, что формула (1) верна при $\alpha = k > 1$, т.е. $(x^k)' = k \cdot x^{k-1}$. Тогда при $\alpha = k + 1$ получим

$$(x^{k+1})' = (x^k \cdot x)' = (x^k)' \cdot x + x^k \cdot (x)' = k \cdot x^{k-1} \cdot x + x^k \cdot 1 = (k+1) \cdot x^k .$$

Согласно методу математической индукции (см. главу II части I) отсюда следует, что формула (1) верна при всех натуральных значениях α;

д) Пусть α — целое отрицательное число. Положим $\alpha = -n$, где n — натуральное число. В этом случае имеем функцию вида $f(x) = x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$ $(x \neq 0)$.

Используя формулу дифференцирования частного, получим

$$f'(x) = \left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot (x^n)' = -\frac{1}{x^{2n}} \cdot n \cdot x^{n-1} = -\frac{n}{x^{n+1}} ,$$

т.е. $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$. Следовательно, формула (1) справедлива и для целых отрицательных значений α.

Таким образом, для всех целых α верна формула

$$(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1} .$$

Замечание 1. Формула (1) остается справедливой и для степенной функции с любым действительным показателем α.

2. Производные тригонометрических функций.

а) Производная функции $f(x) = \sin x$.

Как обычно, возьмем произвольное значение аргумента x и дадим ему произвольное приращение Δx. Тогда приращение функции равно

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x) = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right).$$

Отсюда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{2\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\cos\left(x + \dfrac{\Delta x}{2}\right) = \dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cos(x + \Delta x)$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$, имеем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \left[\frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \right] =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos x = \cos x.$$

Здесь были использованы свойство непрерывности функции $\cos x$ и один из замечательных пределов. Таким образом, при любом значении x верна формула

$$(\sin x)' = \cos x;$$

б) Производная функции $f(x) = \cos x$.

При любом значении x имеет место формула

$$(\cos x)' = -\sin x\,.$$

Вывод этой формулы осуществляется аналогично пункту а).

в) Производная функции $f(x) = \operatorname{tg} x$.

Так как $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$, функции $\sin x$ и $\cos x$ имеют производные при всех x и в области определения $\operatorname{tg} x$ имеем $\cos x \neq 0$ (т.е. $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z$), то по правилу дифференцирования частного получаем

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos x \cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Таким образом, при $x \neq \frac{\pi}{2}(2k+1),\ k \in Z$ справедлива формула

$$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x};$$

г) Производная функции $f(x) = \operatorname{ctg} x$.

При $x \neq \pi k,\ k \in Z$ имеет место формула

$$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Вывод этой формулы осуществляется аналогично пункту в).

3. Производная показательной функции. Напомним, что функция, заданная формулой $f(x) = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, называется *показательной функцией с основанием а*. Свойства такой функции были рассмотрены в главе VIII части I.

Возьмем произвольное значение аргумента x и дадим ему произвольное приращение Δx. Тогда

$$\Delta f = f(x+\Delta x) - f(x) = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Откуда $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x}$.

Воспользуемся двумя вспомогательными пределами:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{x}\ln(1+x)\right] = \lim\limits_{x\to 0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

$= \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right) = \ln e = 1.$

Здесь использованы свойство непрерывности логарифмической функции в области ее определения, один из замечательных пределов и теорема о переходе к пределу под знаком непрерывной функции;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x} = \lim\limits_{z\to 0}\left[\dfrac{z}{\ln(1+z)}\ln a\right] = \ln a\,\dfrac{1}{\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\ln(1+z)}{z}} = \ln a\cdot\dfrac{1}{1} = \ln a$.

При вычислении этого предела были использованы: замены вида $a^x - 1 = z$, $x = \log_a(1+z) = \dfrac{\ln(1+z)}{\ln a}$, результат пункта а) и тот факт, что $z \to 0$ при $x \to 0$.

Далее, так как a^x не зависит от Δx, а в силу б) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \ln a$, то

$$f'(x) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^x(a^{\Delta x}-1)}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = a^x\ln a.$$

Таким образом, при любом x справедлива формула

$$(a^x)' = a^x\ln a.$$

Отметим, что при $a = e$ значение $\ln a = \ln e = 1$. В этом случае формула для производной показательной функции принимает следующий простой вид:

$$(e^x)' = e^x.$$

Для вывода формул дифференцирования остальных простейших элементарных функций нам понадобится теорема о производной обратной функции. Сформулируем эту теорему без доказательства.

Теорема (о производной обратной функции). Если монотонная и непрерывная в области определения D функция $y = f(x)$ имеет в точке $x_0 \in D$ производную $f'(x_0) \neq 0$, то и обратная к $f(x)$ функция $x = \varphi(y)$, построенная на соответствующей области, имеет в соответствующей точке y_0 ($y_0 = f(x_0)$) производную, причем

$$\varphi'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Следствие. Если монотонная в области определения D функция $y = f(x)$ имеет в каждой точке этой области производную $f'(x)$, отличную от нуля, то и обратная к $f(x)$ функция $x = \varphi(y)$ имеет в соответствующей области производную $\varphi'(y)$, причем

$$\varphi'(y) = \frac{1}{f'(x)}. \qquad (2)$$

Применим теорему о производной обратной функции для вывода формул производных логарифмической функции и обратных тригонометрических функций. При этом предварительно запишем обратную функцию $x = \varphi(y)$ в обычных для функций обозначениях, т.е. в виде $y = \varphi(x)$. Тогда сама функция будет записана в виде $x = f(y)$. В этих обозначениях формула (2) примет вид

$$\varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)}. \qquad (3)$$

4. Производная логарифмической функции. Рассмотрим показательную функцию $x = a^y = f(y)$, где $a > 0$, $a \neq 1$. Для нее логарифмическая функция $y = \log_a x = \varphi(x)$, $x > 0$ является обратной. При любом y существует производная

$$f'(y) = (a^y)' = a^y \ln a,$$

причем она отлична от нуля. Применяя следствие последней теоремы и формулу (3), получим

$$(\log_a x)' = \varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Таким образом, для всех $x > 0$ справедлива формула

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

В частности, при $a = e$ получаем формулу

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

5. Производные обратных тригонометрических функций.

а) Производная функции $y = \arcsin x = \varphi(x)$.

Рассмотрим функцию $x = \sin y = f(y)$, для которой функция $\varphi(x)$ является обратной. Имеем $f'(y) = (\sin y)' = \cos y$. Производная $f'(y)$ отлична от нуля при условии $\cos y \neq 0$, т.е. когда $\sin y \neq \pm 1$ или $x \neq \pm 1$. При этом условии, применяя формулу (3), получаем

$$(\arcsin x)' = \varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 y}} = \pm\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поскольку значения $y = \arcsin x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то $\cos y > 0$. Поэтому $\cos y = \sqrt{1-x^2}$ и окончательно мы получаем формулу

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ где } x \in (-1;\ 1);$$

б) Производная функции $y = \arccos x$.

Имеет место формула

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \text{ где } x \in (-1;\ 1).$$

Вывод этой формулы производится аналогично пункту а).

в) Производная функции $y = \operatorname{arctg} x = \varphi(x)$.

Рассмотрим функцию $x = \operatorname{tg} y = f(y)$. Для нее имеем $f'(y) = (\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y}$. Так как $x = \operatorname{tg} y$, то $f'(y) = 1 + \operatorname{tg}^2 y = 1 + x^2$.

Эта производная не обращается в нуль для любого x. Применяя формулу (3), получаем

$$(\operatorname{arctg} x)' = \varphi'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Таким образом, имеет место формула

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in (-\infty; +\infty);$$

г) Производная функции $y = \operatorname{arcctg} x$.

При любом значении x справедлива формула

$$(\text{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Вывод этой формулы осуществляется аналогично пункту в).

В заключение приведем пример на нахождение производной элементарной функции.

Пример. Найти производную функции

$$f(x) = x^5 \sin x + e^x \ln x + 4.$$

Решение.

$$f'(x) = (x^5 \sin x + e^x \ln x + 4)' = (x^5 \sin x)' + (e^x \ln x)' + (4)' =$$
$$= (x^5)' \sin x + x^5 (\sin x)' + (e^x)' \ln x + e^x (\ln x)' + 0 =$$
$$= 5x^4 \sin x + x^5 \cos x + e^x \ln x + \frac{e^x}{x}.$$

Вопросы и задания

1. Какие функции относятся к простейшим элементарным функциям?
2. Записать в таблицу формулы производных степенной, логарифмической, показательной, тригонометрических и обратных тригонометрических функций.
3. Сформулировать теорему о производной обратной функции.

Упражнения

1. Найти производную функций:

а) $y = x^8$;
д) $y = \frac{x^4}{x^6 - 1}$;
б) $y = 2x^7 + x^6$;
е) $y = \frac{x^2 + x + 1}{x^3 - 1}$;
в) $y = x^{-2} + \frac{1}{x}$;
ж) $y = x^{41} - 41x$;
г) $y = \sqrt[5]{x^4} + \sqrt[3]{x^2}$;
з) $y = (x^5 + x^{-5})(x^2 + x^{-2})$.

2. Найти производную функций:

а) $y = 2\sin x$; б) $y = -3\cos x$; в) $y = 4x - \cos x$;

г) $y = \dfrac{x}{\sin x}$; д) $y = \sqrt{3} - \mathrm{tg}x$; е) $y = \mathrm{tg}x - \mathrm{ctg}x$;

ж) $y = x^2 \sin x$; з) $y = x \sin x + \cos x$.

3. Найти $f(0)$ и $f'(0)$, если:

а) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$;

б) $f(x) = \dfrac{x}{\cos x}$; в) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$; г) $f(x) = \mathrm{tg}x$.

4. Найти производную функций:

а) $y = 8^x$; д) $y = \log_2 x + \log_2 3$;

б) $y = 2^x x$; е) $y = \dfrac{\arcsin x}{2x}$;

в) $y = x \ln x$; ж) $y = \mathrm{arctg}x + \log_5 x + x^4$;

г) $y = e^x \cos x$; з) $y = 2e^x - \ln x + \dfrac{1}{x}$.

5. Решить уравнение $y' = 0$, если:

а) $y = x^3 - 27x + 5$; д) $y = 10^x x$;

б) $y = x^6 - 18x^2 + 7$; е) $y = x - \mathrm{arctg}x$;

в) $y = \cos x + \dfrac{1}{2}x$; ж) $y = \ln x - \dfrac{1}{2}x^2 + 1$;

г) $y = \sin x - x + 1$; з) $y = \sqrt{x} - \dfrac{1}{2}x + 3$.

6. Решить неравенство $f'(x) > 0$, если:

а) $f(x) = 3x^2 - 4x$; в) $f(x) = \sin x - \dfrac{1}{2}x$;

б) $f(x) = x^3 - 12x$; г) $f(x) = 1 - \cos x$.

7. Закон движения точки по координатной прямой задан уравнением $x(t) = t^2 + 4t + 5$. Найти скорость точки в момент времени $t_0 = 3$. В какой момент времени скорость точки равна 20?

---

8. Найти производную функций:

а) $y = \dfrac{2^x}{\sin x + 1}$; в) $y = 3\sin^2 x$;

б) $y = x\,\mathrm{tg}x$; г) $y = (x+1)(\ln x + 1)$;

д) $y = e^x(\cos x + \sin x)$; е) $y = \frac{\ln x}{x}$;

ж) $y = 5x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$; з) $y = (2 + x)^3$.

9. Вычислить значение производной функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-5}$, $x_0 = 2$;

б) $f(x) = x(\lg x - 1)$, $x_0 = 10$;

в) $f(x) = \mathrm{tg}x - x + 2$, $x_0 = \frac{\pi}{4}$;

г) $f(x) = \mathrm{arctg}x - \frac{1}{2}\ln x$, $x_0 = 1$.

10. Найти все значения x, при которых производная функции $f(x)$ равна нулю, если:

а) $f(x) = x^4 - 4x$; в) $f(x) = \mathrm{tg}x - x$;

б) $f(x) = x^8 - 2x^4 + 3$; г) $f(x) = \log_2 x - \frac{x}{\ln 2}$.

11. Найти значения x, при которых $f'(x) \geq 0$, если $f(x) = 2\sin x - \sqrt{2}x$.

12. Задать формулой хотя бы одну функцию $f(x)$, если :

а) $f'(x) = 1 + \cos x$; в) $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{1+x^2}$;

б) $f'(x) = \frac{1}{x} + x + 3$; г) $f'(x) = \frac{1}{x\ln 3} - \frac{1}{x^2} + 1$.

13. Закон движения точки по координатной прямой задан уравнением $x(t) = t^3 - 3t^2 + 4$. Найти моменты времени, в которые скорость точки равна нулю.

§ 4. Примеры применения производной

1. Геометрическое истолкование понятия производной. Пусть дана некоторая непрерывная функция $y = f(x)$, графиком которой является кривая AB (рис. 44).

Зафиксируем на кривой AB какую-либо точку M_0 и выберем на этой же кривой еще одну произвольную точку M.

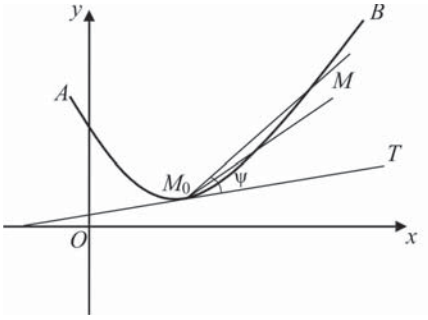


Рис. 44

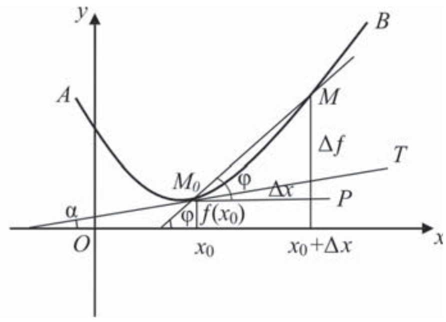


Рис. 45

Проведем секущую M_0M. Затем будем приближать точку M к M_0 по кривой AB. Секущая при этом станет поворачиваться. Может случиться, что при неограниченном приближении точки M к точке M_0 по кривой секущая M_0M будет стремиться к некоторому предельному положению. В этом случае предельное положение M_0T секущей M_0M называется *касательной к кривой* AB в данной ее точке M_0. При этом имеется в виду следующее: существует такая прямая M_0T, что угол ψ между нею и секущей M_0M (точнее говоря, один из таких углов) стремится к нулю, когда длина ρ хорды M_0M стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{\rho\to 0}\psi = 0$.

Построение касательных в отдельных точках позволяет более точно строить эскизы графиков функций.

Докажем, что из существования производной функции $f(x)$ в некоторой точке x_0 вытекает существование касательной к графику этой функции в соответствующей точке $M_0(x_0,\ f(x_0))$.

Пусть функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, равную некоторому числу k. Дадим x_0 приращение Δx и построим на кривой AB (рис. 45) две точки: $M_0(x_0,\ f(x_0))$ и $M(x_0 + \Delta x,\ f(x_0 + \Delta x))$. Далее, проведем секущую M_0M и прямую M_0P параллельно оси OX. Обозначив через φ угол между M_0M и положительным направлением оси OX, имеем $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{MP}{M_0P} = \dfrac{\Delta f}{\Delta x}$.

Положим, $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = z$. Тогда $\varphi = \operatorname{arctg}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \operatorname{arctg} z$. По предположению существует $k = f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0} z$, т.е. из $\Delta x \to 0$

следует $z \to k$. Так как функция $\varphi = \operatorname{arctg} z$ является непрерывной по z, то существует $\lim\limits_{z \to k} \varphi = \lim\limits_{z \to k} \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} k$. Следовательно, существует и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi$, причем $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \varphi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{arctg} z = \operatorname{arctg} k$. Обозначим $\operatorname{arctg} k = \alpha$. Тогда имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varphi = \alpha. \tag{1}$$

Теперь проведем через точку M_0 прямую M_0T под углом α к оси OX и положим $\psi = |\varphi - \alpha|$. Ясно, что ψ есть величина одного из углов между секущей M_0M и прямой M_0T. Учитывая (1), имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \psi = \lim_{\Delta x \to 0} |\varphi - \alpha| = 0. \tag{2}$$

Хорда M_0M имеет длину $\rho = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta f)^2}$. Если $\rho \to 0$, то и $\Delta x \to 0$, так как $|\Delta x| \le \rho$. Поэтому из (2) получаем $\lim\limits_{\rho \to 0} \psi = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \psi = 0$. Следовательно, по определению, прямая M_0T является касательной к кривой $y = f(x)$ в точке M_0.

Верно и обратное утверждение: если кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную, не перпендикулярную оси OX, то функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную, причем значение производной $f'(x_0)$ равно угловому коэффициенту k касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(k = f'(x_0))$. В этом и заключается геометрический смысл производной в данной точке.

Таким образом, если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)$, то кривая $y = f(x)$ имеет в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную, а производная $f'(x_0)$ геометрически означает угловой коэффициент k касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Замечание 1. Если производная $f'(x_0)$ не существует, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(x_0, f(x_0))$ либо тоже не существует, либо является вертикальной прямой $x = x_0$.

2. Уравнения касательной и нормали к кривой. Выведем уравнение касательной к кривой (графику) $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, f(x_0))$.

Уравнение прямой с угловым коэффициентом $k = f'(x_0)$ имеет вид

$$y = f'(x_0)x + b.$$

Для вычисления неизвестного b воспользуемся тем, что касательная проходит через точку M_0. Имеем $f(x_0) = f'(x_0)x_0 + b$. Откуда $b = f(x_0) - f'(x_0)x_0$ и уравнение касательной принимает вид $y = f'(x_0)x + f(x_0) - f'(x_0)x_0$, или

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Таким образом, производная дает нам общий способ нахождения касательных к кривым, заданным уравнениями $y = f(x)$.

Часто наряду с касательной бывает нужно провести нормаль к кривой $y = f(x)$ в данной точке $M_0(x_0, f(x_0))$. *Нормалью к кривой* в некоторой точке называют перпендикуляр к касательной к кривой в той же точке.

Если производная $f'(x_0)$ существует и $f'(x_0) \neq 0$, то уравнение нормали имеет вид:

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Если же $f'(x_0) = 0$, то уравнение нормали имеет вид: $x = x_0$.

Замечание 2. Если дано уравнение $y = kx + b$, $k \neq 0$ некоторой прямой, то коэффициент k можно определить с помощью угла α между этой прямой и положительным направлением оси абсцисс. Действительно, заданная прямая параллельна прямой $y = kx$, проходящей через начало координат. Координаты (x, y) любой (отличной от начала координат) точки прямой $y = kx$ удовлетворяют равенству $\frac{y}{x} = k$. Ясно, что отношение $\frac{y}{x}$ равно тангенсу угла наклона прямой $y = kx$ к оси абсцисс, а значит, $\frac{y}{x} = \operatorname{tg}\alpha$, т.е. $k = \operatorname{tg}\alpha$.

Пример 1. Найти тангенс угла α наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку $M(2; 8)$ графика функции $f(x) = x^3$.

Решение. Имеем $f'(x) = 3x^2$. Тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной к графику в данной точке равен угловому коэффициенту этой касательной. Так как угловой коэффициент касательной к графику функции $f(x) = x^3$ в точке $M(2; 8)$ равен $k = f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$, то $\operatorname{tg}\alpha = k = 12$.

Пример 2. Провести касательную к графику функции $y = f(x) = x^2$ в точке $M(3; 9)$.

Решение. Имеем $f'(x) = (x^2)' = 2x$. Угловой коэффициент касательной к графику в заданной точке равен $k = f'(3) =$

$= 2 \cdot 3 = 6$. Кроме того, $f(3) = 3^2 = 9$. Следовательно, уравнение касательной имеет вид

$$y = 9 + 6(x - 3), \text{ или } y = 6x - 9.$$

Для построения искомой касательной достаточно указать еще одну точку касательной, кроме точки $M(3;\,9)$, например, $N(1;\,-3)$. Теперь соединяя точки M и N прямой линией, мы построим требуемую касательную (построение графика функции $y = x^2$ и касательной MN к графику функции в точке $M(3;\,9)$ предоставляем читателю).

Пример 3. Написать уравнение нормали к графику функции $y = f(x) = x^4$ точке $M(1;\,1)$.

Решение. $f'(x) = (x^4)' = 4x^3$. Уравнение искомой нормали имеет вид

$$y = f(1) - \frac{1}{f'(1)}(x - 1).$$

Отсюда $y = 1 - \frac{1}{4}(x - 1)$, или $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{4}$.

3. Механическое истолкование понятия производной. Пусть уравнение $S = f(t)$ характеризует зависимость пути S от времени t в прямолинейном движении. По определению скорость движения в момент времени t задается равенством

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

(подразумевается, что указанный предел существует).

Этот предел представляет собой производную от функции $S = f(t)$ в точке t, т.е. $v = f'(t)$. Таким образом, *скорость прямолинейного движения есть производная от пути по времени*. Это и есть механическое истолкование понятия производной, важное для физики и техники.

Пример 4. Зависимость пути S от времени t в прямолинейном движении задается формулой $S = f(t) = t^3$. Найти скорость движения в момент времени $t = 4$.

Решение. $f'(t) = (t^3)' = 3t^2$ — скорость движения в произвольный момент времени t. Тогда скорость движения в момент времени $t = 4$ равна $v = 3 \cdot 4^2 = 48$.

4. Производные высших порядков. Механическое истолкование второй производной. Пусть дана функция $y = f(x)$, имеющая в области определения D производную $f'(x)$. Может ют *ускорением прямолинейного движения* в данный момент времени t. Таким образом, ускорение ω в момент времени t есть производная в данной точке t от скорости по времени: $\omega = \nu'(t)$. Но поскольку $\nu = f'(t)$, то

$$\omega = \nu'(t) = (f'(t))' = f''(t).$$

Следовательно, *ускорение в прямолинейном движении есть вторая производная от пути по времени*. В этом состоит механический смысл второй производной.

5. Понятие дифференциала функции. Приближенные вычисления. Рассмотрим применение производной при приближенном вычислении значений заданной функции. Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0 из области определения функции. Согласно теореме 1 (§1, глава XIII) приращение дифференцируемой в точке x_0 функции можно записать в виде

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (f'(x_0) + \alpha(\Delta x))\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Приращение

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \alpha(\Delta x)\Delta x \qquad (3)$$

при фиксированном x_0 есть функция от Δx. При этом оба слагаемых в (3) стремятся к нулю при $\Delta x \to 0$. В отличие от первого слагаемого $f'(x_0)\Delta x$, второе слагаемое $\alpha(\Delta x)\Delta x$ есть произведение двух функций $\alpha(\Delta x)$ и Δx, каждая из которых стремится к нулю при $\Delta x \to 0$. Поэтому (при $f'(x_0) \neq 0$) главное влияние на величину приращения Δy оказывает (при малом Δx) первое слагаемое $f'(x_0)\Delta x$. Оно называется *главной* (*линейной*) *частью приращения функции* $y = f(x)$, или *дифференциалом функции* $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается dy или $df(x_0)$. Следовательно, по определению

$$dy = f'(x_0)\Delta x, \ \ df(x_0) = f'(x_0)\Delta x,$$

т.е. дифференциал функции $y = f(x)$ в точке x_0 равен произведению производной этой функции в точке x_0 на приращение Δx независимой переменной.

При введенных обозначениях соотношение (3) может быть переписано в виде

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x)\Delta x.$$

Ясно, что приращение Δy функции и ее дифференциал dy не одно и то же. Однако при достаточно малых значениях Δx

мы можем пользоваться приближенным равенством

$$\Delta y \approx dy,$$

которое тем точнее, чем меньше Δx.

Соотношение $\Delta y \approx dy$ широко применяется в теории приближенных вычислений. Его можно переписать следующим образом:

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\Delta x$$

или, полагая $x = x_0 + \Delta x$, в виде

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x . \qquad (4)$$

Формула (4) позволяет находить приближенные значения функции $f(x)$ при x, достаточно близких к x_0.

Пример 6. Вычислить приближенное значение $\sqrt{4,03}$.

Решение. Положим, $f(x) = \sqrt{x}$. В качестве x_0 удобно взять число 4, так как $x = 4,03$ близко к $x_0 = 4$ и $f(x_0) = f(4) = \sqrt{4} = 2$. Производная $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$. Поэтому $f'(x_0) = f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}$. Отсюда, применяя формулу (4), получим

$$\sqrt{4,03} \approx 2 + \frac{1}{4}(4,03 - 4) = 2 + \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{100} = 2,0075.$$

Таким образом, $\sqrt{4,03} \approx 2,0075$.

Пример 7. Вычислить приближенное значение cos61°.

Решение. Положим, $f(x) = \cos x$, $x_0 = 60°$, $\Delta x = 1°$, т.е. $\Delta x = \frac{\pi}{180} \approx 0,02$. Так как $f'(x) = -\sin x$, то $f'(x_0) = -\sin 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Кроме того, $f(x_0) = \cos 60° = \frac{1}{2} = 0,5$. Применяя формулу (4), находим

$$\cos 61° \approx 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{180} \approx 0,5 - \frac{1,73}{2}\cdot 0,02 = 0,5 - 0,0173 = 0,4827.$$

Пример 8. Выведем следующую приближенную формулу:

$$(1+\Delta x)^{\alpha} \approx 1 + \alpha\Delta x . \qquad (5)$$

Положим, $f(x) = x^{\alpha}$, $x_0 = 1$ и $x = x_0 + \Delta x = 1 + \Delta x$. Имеем

$$f(x_0) = f(1) = 1, \quad f'(x) = (x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Поэтому $f'(x_0) = f'(1) = \alpha \cdot 1 = \alpha$. Применяя (4) и учитывая, что $f(x) = f(x_0 + \Delta x) = f(1 + \Delta x) = (1 + \Delta x)^\alpha$, получаем $(1 + \Delta x)^\alpha \approx 1 + \alpha \Delta x$.

Пример 9. Вычислить приближенное значение:

а) $1{,}1^{20}$; б) $\sqrt[4]{1{,}1}$.

Решение. Применяя формулу (5), находим

а) $1{,}1^{20} = (1 + 0{,}1)^{20} \approx 1 + 20 \cdot 0{,}1 = 3$;

б) $\sqrt[4]{1{,}1} = (1 + 0{,}1)^{\frac{1}{4}} \approx 1 + \frac{1}{4} \cdot 0{,}1 = 1{,}025$.

Для дальнейших наших целей полезно ввести еще понятие дифференциала независимой переменной. *Дифференциалом dx независимой переменной x* называется его приращение, т.е. по определению

$$dx = \Delta x.$$

Теперь определение дифференциала функции можно дать в следующей формулировке: *дифференциалом функции $y = f(x)$ в точке x называется произведение производной данной функции в точке x на дифференциал независимой переменной*, т.е.

$$dy = df(x) = f'(x)dx.$$

Для дифференциалов суммы, произведения и частного двух дифференцируемых функций f и g справедливы следующие соотношения:

$$d(f \pm g) = df \pm dg, \tag{6}$$

$$d(f \cdot g) = gdf + fdg, \tag{7}$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gdf - fdg}{g^2} \tag{8}$$

(здесь рассматриваются лишь те точки x, где $g(x) \neq 0$).

Выведем, например, соотношение (7). Имеем

$$d(f \cdot g) = (f \cdot g)'dx = (f' \cdot g + f \cdot g')dx =$$
$$= g \cdot f'dx + f \cdot g'dx = gdf + fdg.$$

Пример 10. Найти дифференциал функции $y = x^4 + x\sin x$.

Решение. Используя соотношения (6) и (7), находим

$$dy = dx^4 + d(x\sin x) = (x^4)'dx + \sin x dx + x d\sin x =$$

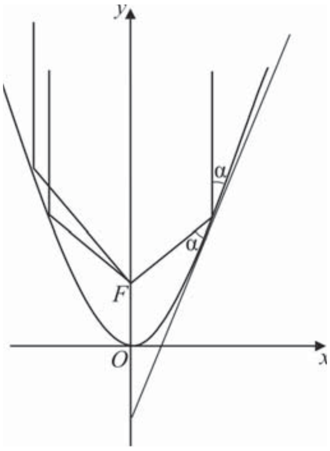


Рис. 46

$$= 4x^3dx + \sin xdx + x(\sin x)'dx =$$
$$= 4x^3dx + \sin xdx + x\cos xdx =$$
$$= (4x^3 + \sin x + x\cos x)dx.$$

(отметим, что данный пример можно решить, используя лишь определение дифференциала. Для этого сначала надо найти y', а затем использовать формулу $dy = y'dx$).

В заключение приведем пример применения производной в оптике и технике. Рассмотрим параболоид вращения (т.е. такую поверхность, которая получается при вращении параболы $y = ax^2$ вокруг оси OY). Представим себе, что внутренняя поверхность параболоида — зеркальная поверхность и это зеркало освещается пучком лучей света, параллельных оси OY. С помощью понятий производной и касательной к параболе доказывается, что все лучи, параллельные оси параболического зеркала, после отражения сходятся в одной точке, которая называется *фокусом параболического зеркала* (точка F на рис. 46). На этом свойстве параболы основано устройство параболических телескопов, параболических антенн и прожекторов.

Вопросы и задания

1. Дать определение касательной к графику функции в заданной точке.
2. В чем заключается геометрический смысл производной?
3. Дать определение нормали к графику функции в заданной точке.
4. В чем заключается механический смысл первой производной?
5. Что понимается под производной второго порядка?
6. В чем заключается механический смысл второй производной?
7. Рассказать о применениях производной.

Упражнения

1. Написать уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, если:

а) $f(x)=x^2+1$, $x_0=-\frac{1}{2}$; в) $f(x)=3\sin x$, $x_0=\pi$;

б) $f(x)=\frac{1}{x}$, $x_0=2$; г) $f(x)=-\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{3}$.

2. Написать уравнение нормали к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, если:

а) $f(x)=x^3+1$, $x_0=1$; в) $f(x)=\cos x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$;

б) $f(x)=\frac{1}{x^2}$, $x_0=-1$; г) $f(x)=\sin x$, $x_0=\frac{\pi}{4}$.

3. Найти скорость и ускорение точки в момент t_0, если:

а) $x(t)=2t^2+t-4$, $t_0=4$; в) $x(t)=t^3-2t^2+5$, $t_0=4$;

б) $x(t)=5t+t^2$, $t_0=2$; г) $x(t)=3\sin t$, $t_0=\frac{\pi}{3}$.

4. Найти тангенс угла наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку M графика функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=x^2+1$, $M(-2; 5)$; в) $f(x)=2\cos x$, $M\left(\frac{\pi}{2}; 0\right)$;

б) $f(x)=x^3-1$, $M(1; 0)$; г) $f(x)=1+\sin x$, $M(\pi; 1)$.

5. Найти производные второго и третьего порядков функции:

а) $f(x)=x^2+x+3$; д) $f(x)=\sin x+\cos x$;

б) $f(x)=\sqrt{x}+\frac{1}{x}$; е) $f(x)=\sin x-\cos x$;

в) $f(x)=3\sin x$; ж) $f(x)=3^x+\sin x$;

г) $f(x)=2\cos x$; з) $f(x)=\ln x-x^2+x+1$.

6. Вычислить $f^{(3)}(0)$, если $f(x)=e^x\cos x$.

7. Вычислить приближенные значения:

а) $\sin 61°$; в) $\sqrt{9,009}$; д) $1,02^{10}$; ж) $0,99^{15}$;

б) $\cos 59°$; г) $\sqrt{3,98}$; е) $\sqrt[5]{1,02}$; з) $\sqrt{0,99}$.

8. Найти дифференциал функции:

а) $y=x^3$; г) $y=\frac{x+1}{x^2}$; ж) $y=xe^x\sin x$;

б) $y=x+\frac{1}{x}$; д) $y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$; з) $y=5$.

в) $y=x^2\sin x$; е) $y=x\ln x$;

9. Написать уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x)$ в точке $(x_0; f(x_0))$, если:

а) $f(x) = \ln x$, $x_0 = 2$; в) $f(x) = \arcsin x$, $x_0 = \frac{1}{2}$;

б) $f(x) = e^x + 1$, $x_0 = \ln 3$; г) $f(x) = \operatorname{arctg} x$, $x_0 = 0$.

10. Найти ускорение точки в момент времени t_0, если:

а) $x(t) = t^3 - 2t^2 + 8$, $t_0 = 5$; б) $x(t) = t^4 + 1$, $t_0 = 2$.

11. Точка движется прямолинейно по закону $x(t) = -\frac{t^3}{6} + 3t^2 + 5$. Найти:

а) момент времени t, когда ускорение точки равно нулю;
б) скорость движения точки в этот момент.

12. Найти угол наклона к оси абсцисс касательной, проходящей через точку M графика функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{3}$, $M(1; 1)$; б) $f(x) = 2 + \sin x$, $M(\pi; 2)$.

13. Под какими углами пересекается с осью OX график функции $f(x) = x^2 - 3x + 2$?

14. Вычислить значения $f'(0)$, $f^{(2)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $f^{(3)}(\pi)$, если:

а) $f(x) = 3x + 1$; в) $f(x) = \sin x + x^2$;

б) $f(x) = 2x^2 + x + 3$; г) $f(x) = \sin x + \cos x$.

15. Найти $f^{(100)}(x)$, если:
а) $f(x) = \sin x$; б) $f(x) = \cos x + x^{100}$.

16. Вычислить приближенные значения:

а) $\sin 46°$; в) $\sqrt{16,01}$; д) $1,01^{30}$; ж) $\sqrt[8]{0,9}$;

б) $\cos 31°$; г) $\sqrt[3]{1,003}$; е) $1,1^{50}$; з) $\sqrt[4]{0,99}$.

17. Найти дифференциал функции:
а) $y = x$; г) $y = (x^2 + 3)(x - 4)$; е) $y = \sin x \cdot \cos x$;

б) $y = x^2$; д) $y = \frac{x-1}{x-2}$; ж) $y = \frac{1}{x}e^x$;

в) $y = x^n$, n — натуральное число; з) $y = 2(x + 1)\sin x$.

§ 5. Производная сложной функции

Правила дифференцирования, выведенные нами ранее, не дают еще возможности находить производные от многих элементарных функций, например, от сложной функции $f(x) = \ln^2 \sin 5x$. В этом параграфе мы выведем правило дифференцирования сложной функции.

1. Дифференцирование сложной функции. Пусть дана сложная функция $y = F(x)$, определяемая соотношениями $y = f(t)$, $t = g(x)$ (определение сложной функции см. в главе VII части I). Справедлива следующая теорема о производной сложной функции.

Теорема. Пусть функция $t = g(x)$ имеет в данной точке x производную, а функция $y = f(t)$ имеет производную в соответствующей аргументу x точке t. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ имеет в точке x производную, причем

$$F_x' = f_t'(t) \cdot g_x'(x)$$

(индексы внизу указывают, по какому аргументу производится дифференцирование).

Доказательство. Так как производная $f_t'(t)$ существует в данной точке t, то в силу теоремы 1 из §1 настоящей главы в этой точке при $\Delta t \neq 0$ имеем

$$\Delta F = f_t'(t)\Delta t + \alpha(\Delta t)\Delta t, \qquad (1)$$

где $\alpha(\Delta t)$ такая функция от приращения Δt, что $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \alpha(\Delta t) = 0$.

Здесь следует отметить, что функция $\alpha(\Delta t)$ при $\Delta t = 0$, вообще говоря, не была определена. Однако в формуле (1) Δt как приращение функции $t = g(x)$ может оказаться равным нулю (даже если $\Delta x \neq 0$). Поэтому чтобы формула (1) имела место и для $\Delta t = 0$ доопределим функцию $\alpha(\Delta t)$ в точке $\Delta t = 0$. Так как $\alpha(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$, то естественно положить $\alpha = 0$ при $\Delta t = 0$, т.е. $\alpha(0) = 0$.

Далее, по условию теоремы функция $t = g(x)$ имеет производную в данной точке x, а значит, эта функция непрерывна в точке x. Следовательно, $\Delta t \to 0$ при $\Delta x \to 0$. Но тогда и $\alpha(\Delta t) \to 0$ при $\Delta x \to 0$.

Разделим обе части (1) на Δx. Имеем $\dfrac{\Delta F}{\Delta x} = f_t'(t)\dfrac{\Delta t}{\Delta x} + \alpha\dfrac{\Delta t}{\Delta x}$.

При $\Delta x \to 0$ отношение $\dfrac{\Delta t}{\Delta x} = \dfrac{\Delta g}{\Delta x}$ стремится к конечному пределу $g'_x(x)$, а функция α стремится к нулю. Следовательно, существует предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(f'_t(t)\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\alpha\frac{\Delta t}{\Delta x}\right)=$$

$$=f'_t(t)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta t}{\Delta x}=f'_t(t)g'_x(x)+0\cdot g'_x(x)=f'_t(t)g'_x(x),$$

т.е. $F'_x=f'_t(t)g'_x(x)$ или

$$(f(g(x)))'=f'_t(t)g'_x(x). \qquad (2)$$

Полученное правило дифференцирования сложной функции можно сформулировать следующим образом:

Производная сложной функции $y=f(g(x))$ по независимому аргументу x равна производной функции f по промежуточному аргументу $t=g(x)$, умноженной на производную промежуточного аргумента t по независимой переменной x.

Пример 1. Найти производную функции $F(x) = 2^{\cos x}$.

Решение. Имеем сложную функцию $F(x) = f(g(x))$, где $f(t) = 2^t$, $t = \cos x = g(x)$. Так как $f'_t(t)=2^t\cdot\ln 2$, $g'_x(x)=-\sin x$, по формуле (2) получаем

$$F'(x)=2^t\ln 2(-\sin x)=-2^{\cos x}\cdot\ln 2\cdot\sin x.$$

Пример 2. Найти производную функции $F(x)=\ln^2\sin x$.

Решение. Положим, $t = \ln\sin x$. Тогда $F = t^2$. Имеем $F'_x=(t^2)'_t\cdot t'_x=2t\cdot t'_x$. Функция $t = \ln\sin x$ сама является сложной функцией. Положим теперь, $z = \sin x$. Тогда $t = \ln z$, $z = \sin x$. Поэтому $t'_x=t'_z\cdot z'_x=\frac{1}{z}\cos x=\frac{1}{\sin x}\cos x=\operatorname{ctg}x$. Подставляя значение t'_x в выражение для F'_x, получим

$$F'_x=2t\cdot\operatorname{ctg}x=2\operatorname{ctg}x\cdot\ln\sin x.$$

На практике удобно опускать специальные обозначения промежуточного аргумента. Вместо этого можно использовать запись, где первый сомножитель в формуле (2) уже вычислен, а второй лишь указан. Например,

$$(\ln\sin x)'=\frac{1}{\sin x}(\sin x)'=\frac{\cos x}{\sin x}=\operatorname{ctg}x,$$

$$(e^{2x+3})'=e^{2x+3}(2x+3)'=2e^{2x+3}.$$

2. Логарифмическое дифференцирование. Пусть дана функция $y = f(x)$, не обращающаяся в нуль в своей области определения D и имеющая на множестве D производную. Составим новую функцию

$$z = \ln|f(x)| = \ln|y|.$$

Областью определения функции z также является множество D. Ее производная существует и равна $z'_x = \frac{1}{y} y'_x$. Отсюда

$$y'_x = yz'_x. \qquad (3)$$

Следовательно, вычисление производной y'_x может быть сведено к вычислению z'_x, что нередко производится проще, чем непосредственное вычисление y'_x. Такой способ вычисления производной функции называется *логарифмическим дифференцированием*.

П р и м е р 3. Найти производную функции $y = \sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}$.

1-й способ (непосредственное вычисление):

$$y'_x = \left(\sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}\right)' = \left(\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{4}}\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{3}{4}}\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{1}{4}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{x'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\sqrt[4]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3} \cdot \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{4(x+1)^2} \cdot \sqrt[4]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3}.$$

2-й способ (логарифмическое дифференцирование):

Рассмотрим функцию $z = \ln|y| = \ln\sqrt[4]{\frac{x}{x+1}}$. Имеем

$$z = \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{4}\ln\frac{x}{x+1} = \frac{1}{4}(\ln x - \ln(x+1)) = \frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x+1).$$

Отсюда $z'_x = \left(\frac{1}{4}\ln x - \frac{1}{4}\ln(x+1)\right)' = \frac{1}{4x} - \frac{1}{4(x+1)} = \frac{x+1-x}{4x(x+1)} = \frac{1}{4x^2+4x}$.

Используя формулу (3), получаем $y'_x = y \cdot z'_x = \sqrt[4]{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{4x^2+4x}$.

Легко проверить, что полученные при 1-м и 2-м способах выражения для y'_x равны, т.е.

$$y'_x = \sqrt[4]{\left(\frac{x+1}{x}\right)^3} \cdot \frac{1}{4(x+1)^2} = \sqrt[4]{\frac{x}{x+1}} \cdot \frac{1}{4x^2+4x}.$$

Однако 1-й способ вычисления был громоздким, а 2-й — более простым.

В заключение приведем формулу вычисления производной так называемой *показательно-степенной функции* $y = (f(x))^{g(x)}$, где значения аргумента x подразумеваются такими, что $f(x) > 0$. С помощью метода логарифмического дифференцирования легко выводится правило дифференцирования этой функции:

$$[(f(x))^{g(x)}]' = g(x) \cdot f(x)^{g(x)-1} \cdot f'(x) + f(x)^{g(x)} \cdot \ln f(x) \cdot g'(x). \quad (4)$$

Это правило можно сформулировать следующим образом:

Производная показательно-степенной функции получается, если эту функцию один раз продифференцировать как степенную, а другой раз продифференцировать как показательную функцию, и результаты сложить.

Пример 4. Найти производную функции $y = x^{\sin x}$.

По формуле (4) имеем

$$(x^{\sin x})' = \sin x \cdot x^{\sin x-1} \cdot (x)' + x^{\sin x} \cdot \ln x \cdot (\sin x)' =$$
$$= x^{\sin x}\left(\frac{\sin x}{x} + \cos x \cdot \ln x\right).$$

На практике часто применяют еще один способ. Именно,

$$(x^{\sin x})' = (e^{\ln x^{\sin x}})' = (e^{\sin x \cdot \ln x})' = e^{\sin x \cdot \ln x}(\sin x \cdot \ln x)' =$$
$$= e^{\sin x \cdot \ln x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right) = x^{\sin x}\left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x}\right).$$

Вопросы и задания

1. Сформулировать теорему о производной сложной функции.
2. Объяснить метод логарифмического дифференцирования.
3. Какая функция называется показательно-степенной?
4. Сформулировать правило дифференцирования показательно-степенной функции.

Упражнения

1. Задать формулами функции f и g, из которых составлена функция $F(x) = f(g(x))$:

а) $F(x) = \sin 2x$; г) $F(x) = \sqrt{\cos x}$; ж) $F(x) = \ln \cos x$;

б) $F(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$; д) $F(x) = \sin \frac{1}{x}$; з) $F(x) = e^{\sin x}$.

в) $F(x) = (3x + 1)^5$; е) $F(x) = \operatorname{tg} \frac{x}{3}$;

2. Найти производную сложных функций:

а) $f(x) = (3x - 2)^5$; д) $f(x) = e^{\sin x}$;

б) $f(x) = (4 - 3x)^7$; е) $f(x) = \sin^2 x$;

в) $f(x) = \frac{1}{(2x+9)^3}$; ж) $f(x) = \ln(4x - 1)$;

г) $f(x) = \sqrt{4x - 5}$; з) $f(x) = \arcsin 3x$.

3. Используя метод логарифмического дифференцирования, найти производную функций:

а) $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x+1}{x+3}}$; в) $f(x) = \sqrt{(1 - \sin x)(1 - \cos x)}$;

б) $f(x) = \sqrt[5]{\frac{2x+1}{3x+4}}$; г) $f(x) = e^{\sin(3x+2)}$.

4. Найти производную сложных функций:

а) $y = x^x$; б) $y = (\sin x)^{\cos x}$; в) $y = x^{\cos x}$; г) $y = (\cos x)^{\ln x}$.

---

5. Заданы функции $f(x) = \sin x$ и $g(x) = x^2$. Задать формулой сложную функцию $F(x)$, если:

а) $F(x) = f(g(x))$; в) $F(x) = f(f(x))$;

б) $F(x) = g(f(x))$; г) $F(x) = g(g(x))$.

6. Найти производную сложных функций:

а) $f(x) = (2x - 1)^{10}$; в) $f(x) = \sqrt{\operatorname{tg}(4x - 3)}$;

б) $f(x) = \sin(\cos(5x - 2))$; г) $f(x) = e^{\operatorname{arctg}(4x+7)}$.

7. Найти такую функцию $f(x)$, что $f(g(x)) = x$, если:

а) $g(x) = 2x$; в) $g(x) = \sqrt{x + 1}$;

б) $g(x) = 2x + 3$; г) $g(x) = x^2 + 1,\ x \geq 0$.

8. Найти производную сложных функций:

а) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^2-1}{x^2+1}}$; в) $f(x) = x^{\ln x}$;

б) $f(x) = (x+1)^{10}(2x+3)^7$; г) $f(x) = e^{x^{\sin x}}$.

§ 6. Исследование функций с помощью производной

1. Признаки возрастания и убывания функции. В § 3 главы VII части I были даны определения возрастающей и убывающей функции. Однако там не указывались методы исследования функции на монотонность. Оказывается, о возрастании или убывании функции можно судить по поведению ее производной.

Сформулируем и докажем признак возрастания (убывания) функции. Но перед этим сформулируем одно вспомогательное утверждение, называемое *теоремой Лагранжа* (доказательство теоремы приводится в курсе математического анализа). Эта теорема устанавливает простое, но часто используемое в математике соотношение между значениями функции и ее производной.

Теорема 1 (Лагранж). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет производную на интервале $(a; b)$, то на этом интервале существует по крайней мере одно число c такое, что справедливо равенство

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \qquad (1)$$

Формула (1) называется *формулой Лагранжа*. Она показывает, что при указанных в теореме условиях отношение приращения функции на отрезке $[a; b]$ к приращению $(b - a)$ аргумента равно значению производной данной функции в некотором промежуточном (между a и b) значении аргумента.

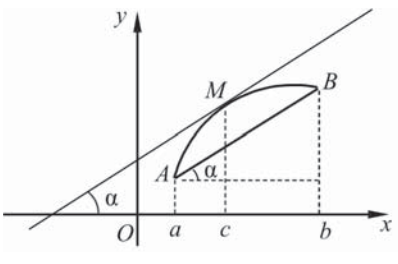


Рис. 47

Геометрически формула Лагранжа означает, что на дуге AB с уравнением $y = f(x)$ найдется такая точка M (по крайней мере, одна точка), в которой касательная к кривой параллельна хорде AB, стягивающей данную дугу (рис. 47).

Теорема 2 (достаточный признак возрастания функции). Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала $(a;\ b)$, то функция $f(x)$ возрастает на этом интервале.

Доказательство. Возьмем два произвольных значения x_1 и x_2 $(x_1 < x_2)$ аргумента x из интервала $(a;\ b)$. Функция $f(x)$ имеет производную на $(a;\ b)$, а значит, она является непрерывной на этом интервале. Следовательно, $f(x)$ на отрезке $[x_1; x_2] \subset (a;\ b)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы 1. Применяя на $[x_1; x_2]$ формулу Лагранжа, имеем

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $a < x_1 < c < x_2 < b$.

Так как $f'(x) > 0$ на $(a;\ b)$, то $f'(c) > 0$. Кроме того, $x_2 > x_1$. Значит, $f(x_2) - f(x_1) > 0$, или $f(x_2) > f(x_1)$. Этим доказано возрастание функции $f(x)$ на интервале $(a;\ b)$.

Теорема 3 (достаточный признак убывания функции). Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала $(a;\ b)$, то функция $f(x)$ убывает на этом интервале.

Доказательство теоремы 3 проводится совершенно аналогично доказательству теоремы 2.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ непрерывна в каком-либо из концов промежутка возрастания (убывания), то этот конец (т.е. точку) присоединяют к промежутку возрастания (убывания).

Пример 1. Найти промежутки возрастания и убывания функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$.

Решение. Данная функция определена на множестве $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Ее производная на этом же множестве равна $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$. Решим неравенство $f'(x) > 0$, т.е. $1 - \frac{1}{x^2} > 0$.

Применяя метод интервалов, получим, что $f'(x) > 0$ на интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(1;\ +\infty)$. Аналогично, $f'(x) < 0$ на интервалах $(-1;\ 0)$ и $(0;\ 1)$.

Так как функция $f(x)$ непрерывна в точках $x = \pm 1$, то эти точки можно присоединить к промежуткам монотонности функции. Поэтому функция $f(x)$ возрастает на промежутках $(-\infty;\ -1]$ и $[1;\ +\infty)$. Аналогично, $f(x)$ убывает на промежутках $[-1;\ 0)$ и $(0;\ 1]$.

П р и м е р 2. Найти интервалы возрастания и убывания функции $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 3$.

Р е ш е н и е. Данная функция определена на $(-\infty; +\infty)$. Для всех x она имеет производную

$$f'(x) = 6x^2 - 6x - 12 = 6(x-2)(x+1).$$

Решая неравенства $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ методом интервалов, получим, что

$$f'(x) > 0 \text{ при } x < -1 \text{ и } x > 2,$$

$$f'(x) < 0 \text{ при } -1 < x < 2.$$

Следовательно, на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(2; +\infty)$ функция $f(x)$ возрастает, а на интервале $(-1; 2)$ функция убывает.

П р и м е р 3. Из орудия вертикально вверх выпущен снаряд с начальной скоростью $v_0 = 200$ м/сек. Определить, поднимается ли снаряд вверх или падает вниз в моменты времени: $t = 15$ сек и $t = 25$ сек.

Р е ш е н и е. Расстояние s снаряда от земли выражается формулой $s(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2}$, где t — время, отсчитываемое от момента $t = 0$, а $g \approx 9{,}8$ м/сек^2 — ускорение.

Имеем $s'(t) = v_0 - gt = 200 - gt$. Тогда $s'(t) > 0$ при $t < \frac{200}{g}$ и $s'(t) < 0$ при $t > \frac{200}{g}$, т.е. функция $s(t)$ возрастает на интервале $\left(0; \frac{200}{g}\right)$ и убывает на интервале $\left(\frac{200}{g}; +\infty\right)$. Так как $t = 15 \in \left(0; \frac{200}{g}\right)$, то в момент времени $t = 15$ секунд снаряд поднимается вверх. В момент времени $t = 25$ секунд снаряд уже опускается вниз, поскольку $t = 25 \in \left(\frac{200}{g}; +\infty\right)$.

П р и м е р 4. Доказать справедливость неравенства $\frac{e^x}{x} > e$ при $x > 1$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{e^x}{x} - e$. Имеем $f'(x) = \frac{e^x}{x^2}(x-1)$.

Производная $f'(x) > 0$ при $x > 1$, а сама функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = 1$. Поэтому $f(x)$ возрастает в промежутке

$[1;\ +\infty)$. Но так как $f(1)=\frac{e^1}{1}-e=0$, то заключаем, что $f(x)>f(1)=0$ при $x>1$, т.е. $\frac{e^x}{x}-e>0$, или $\frac{e^x}{x}>e$, где $x>1$.

2. Максимумы и минимумы функции. В предыдущем пункте было рассмотрено поведение функции на промежутках, где производная $f'(x)$ сохраняет свой знак ($f'(x)>0$ или $f'(x)<0$).

При исследовании данной функции $f(x)$ часто бывает важно уметь находить те значения x, при которых значения функции $f(x)$ по сравнению с «соседними» значениями этой же функции являются наибольшими или наименьшими. В частности, такие значения возникают в тех точках, в которых возрастание функции сменяется убыванием или наоборот.

При исследовании поведения функции вблизи некоторой точки из области определения D удобно использовать понятие окрестности. *Окрестностью точки* $x_0 \in D$ далее будем называть любой интервал, содержащий эту точку.

Наибольшее значение функции в некоторой окрестности называют *максимумом* этой функции, а наименьшее значение – ее *минимумом*. Например, функция $f(x)$, график которой изображен на рисунке 48, имеет в точке x_1 максимум, а в точке x_2 функция имеет минимум.

Дадим теперь точное определение этих понятий. Пусть функция $f(x)$ определена на некотором промежутке D и x_0 – внутренняя точка этого промежутка.

Определение 1. Точка x_0 называется *точкой максимума* функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x) \le f(x_0)$ (в случае когда для всех x из некоторой окрестности x_0, $x \ne x_0$ выполнено неравенство $f(x) < f(x_0)$, точку x_0 называют *точкой строгого максимума*).

Определение 2. Точка x_0 называется *точкой минимума* функции $f(x)$, если для всех x из некоторой окрестности x_0 выполняется неравенство $f(x) \ge f(x_0)$ (в случае, когда для всех x из некоторой окрестности x_0, $x \ne x_0$ выполнено неравенство $f(x) > f(x_0)$, точку x_0 называют *точкой строгого минимума*).

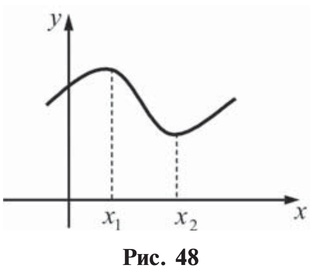


Рис. 48

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*. Точки максимума обозначают x_{max}, а точки минимума – x_{min}. Значения функции в этих точках называют соответственно *максимумами* и *минимумами функции* (общее название – *экстремум функции*). Максимум функции обозначают y_{max} или f_{max}, а минимум функции – y_{min} или f_{min}.

Пример 5. Функция $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ (рис. 49) имеет в точке $x_0 = 0$ максимум (строгий), так как, например, в ее окрестности $\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ для всех $x \neq 0$ выполняется неравенство

$$f(x)-f(0)=\sqrt{1-x^2}-\sqrt{1}=\sqrt{1-x^2}-1<0,$$

т.е. $f(x) < f(0)$, $x \in \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$, $x \neq 0$. Значит, по определению, $x_{max} = 0$, $f_{max} = f(0) = 1$.

Пример 6. Функция $f(x)=\begin{cases}2-x, & x>1,\\ -x, & x\le 1\end{cases}$ разрывная в точке $x_0 = 1$ (рис. 50). Она имеет в этой точке минимум (строгий), так как, например, в окрестности $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ точки $x_0 = 1$ для всех $x \neq 1$ выполняется неравенство $f(x) > f(x_0) = -1$. Таким образом, $x_{min} = 1$, $f_{min} = f(1) = -1$.

Пример 7. Функция $f(x)=\begin{cases}x+2, & x>0,\\ 1, & x\le 0\end{cases}$ имеет в точке $x_0 = 0$ (рис. 51) минимум (не являющийся строгим), так как в любой окрестности этой точки выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0) = 1$. При этом $x_{min} = 0$, $f_{min} = f(0) = 1$.

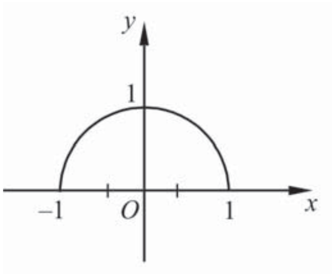


Рис. 49

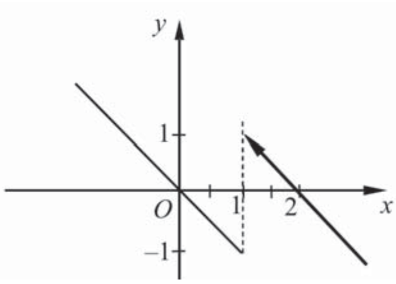


Рис. 50

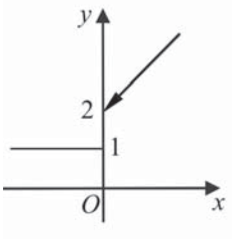


Рис. 51

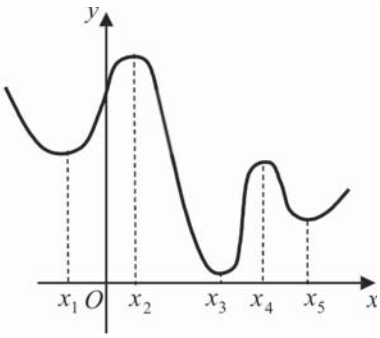


Рис. 52

Следует отметить, что поскольку $f(x) = 1$ при $x \leq 0$, то точками минимума данной функции, кроме $x_0 = 0$, являются также все значения $x < 0$ (причем эти же значения являются одновременно и точками максимума).

Замечание 2. Как видно из примера 6 (рис. 50) минимум функции в точке не является обязательно наименьшим значением функции во всей области ее определения. Аналогично, максимум функции не всегда является наибольшим значением функции во всей области ее определения.

Максимум (минимум) функции $f(x)$ в точке x_0 есть наибольшее (наименьшее) значение функции, вообще говоря, лишь в некоторой окрестности этой точки.

Функция в своей области определения может иметь несколько различных максимумов или минимумов (на рис. 52 изображен график функции, имеющей максимумы в точках x_2 и x_4, и минимумы — в точках x_1, x_3 и x_5, причем максимум функции в точке x_4 меньше минимума функции в точке x_1).

Рассмотрим теперь вопрос об отыскании точек экстремума (точек максимума или минимума) данной функции.

Необходимое условие существования экстремума функции устанавливается следующей теоремой.

Теорема 4 (необходимое условие экстремума). Если функция $f(x)$, заданная на некотором промежутке, имеет экстремум в какой-либо внутренней точке x_0 этого промежутка и в этой точке существует производная $f'(x_0)$, то эта производная необходимо равна нулю, т.е. $f'(x_0) = 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем от противного. Пусть $f'(x_0) \neq 0$, где x_0 — точка экстремума. Для определенности положим $f'(x_0) > 0$. Тогда по определению производной отношение $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ при $x \to x_0$ стремится к положительному числу $f'(x_0)$. Поэтому при всех x, достаточно близких к x_0, значение $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ также будет положительным. Для таких x имеем

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0,$$

и, значит, $f(x) > f(x_0)$ при $x > x_0$ из некоторой окрестности точки x_0. Следовательно, точка x_0 не может быть точкой максимума. Кроме того, $f(x) < f(x_0)$ при $x < x_0$ из некоторой окрестности точки x_0. Поэтому x_0 не может быть и точкой минимума. Получается, что точка x_0 не является точкой экстремума функции. Это противоречит условию теоремы.

Аналогично рассматривается случай $f'(x_0) < 0$. Следовательно, при условиях теоремы необходимо выполнение равенства $f'(x_0) = 0$.

Геометрически это означает, что касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $M(x_0, f(x_0))$, соответствующей экстремальному значению функции, параллельна оси OX (рис. 53).

Определение 3. Внутренние точки области определения функции $f(x)$, в которых ее производная $f'(x)$ равна нулю или не существует, называются *критическими точками* этой функции.

Замечание 3. Из того что $f'(x_0) = 0$, не следует, что в точке x_0 функция $f(x)$ имеет экстремум. Например, для $f(x) = x^3$ производная $f'(x) = 3x^2$ и в точке $x = 0$ имеем $f'(0) = 0$ (т.е. $x = 0$ — критическая точка). Однако экстремума в точке $x = 0$ функция не имеет (рис. 54).

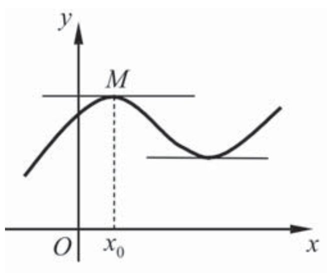


Рис. 53

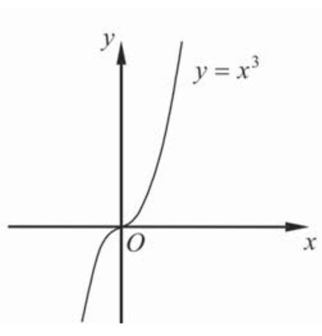


Рис. 54

Далее, кроме точек x, где $f'(x_0) = 0$, функция может иметь экстремум и в таких точках, в которых производная вовсе не существует. Например, функция $f(x) = |x|$ из примера 6, § 1 настоящей главы в точке $x = 0$ имеет экстремум (минимум). Однако эта функция в точке $x = 0$ не имеет производной ($x = 0$ — критическая точка).

Если в точке x_0 производная не существует, то экстремума в этой точке может не быть. Например, для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ производная $f'(x) = \dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ не существует в точке $x = 0$ ($x = 0$ — критическая точка). В этой точке нет и экстремума, так как в любой окрестности точки $x = 0$ разность $f(x) - f(0) = \sqrt[3]{x}$ принимает как положительные, так и отрицательные значения, т.е. нет такой окрестности нуля, где бы выполнялось неравенство $f(x) > f(0) = 0$ или $f(x) < f(0)$.

Наконец, отметим, что производная не может существовать в точках разрыва функции. Но в примерах 6, 7 мы видели, что экстремумы могут быть даже в точках разрыва.

Из сказанного выше следует, что функция может иметь экстремум только в критических точках. Однако обратное не всегда верно. Не в каждой критической точке функция имеет экстремум. Таким образом, равенство нулю производной функции в некоторой внутренней точке области определения, или отсутствие производной в этой точке является необходимым условием наличия экстремума функции в данной точке, но не является достаточным условием для этого.

Вопрос о том, является ли критическая точка функции точкой экстремума, требует дополнительного исследования. При этом бывают полезны следующие достаточные условия существования экстремума.

Теорема 5 (достаточные условия экстремума). Пусть функция $f(x)$ в некоторой окрестности $(a; b)$ точки x_0 удовлетворяет следующим условиям:

1) функция непрерывна в точке x_0;

2) производная $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) на интервале $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ (соответственно $f'(x) > 0$) на интервале $(x_0; b)$.

Тогда точка x_0 является точкой максимума (соответственно минимума) функции $f(x)$.

Доказательство. Пусть $f'(x) > 0$ на $(a; x_0)$ и $f'(x) < 0$ на $(x_0; b)$. Так как $f(x)$ непрерывна в точке x_0, то функция возрастает на промежутке $(a;\ x_0]$. Поэтому $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (a;\ x_0)$. Кроме этого, $f'(x) < 0$ на $(x_0;\ b)$. Из непрерывности $f(x)$ в точке x_0 заключаем, что $f(x)$ убывает на промежутке $[x_0;\ b)$. Поэтому $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (x_0;\ b)$. Таким образом, $f(x) < f(x_0)$ для всех $x \in (a;\ b)$, $x \neq x_0$, т. е. x_0 — точка максимума.

Аналогично рассматривается случай, когда $f'(x) < 0$ на $(a;\ x_0)$ и $f'(x) > 0$ на $(x_0;\ b)$. В этом случае x_0 будет точкой минимума.

Пример 8. Найти точки экстремума функции

$$f(x) = x^3 - 3x + 3.$$

Решение. Производная $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$ определена при всех x. Она обращается в нуль при $x = \pm 1$. Значит, точки $x = \pm 1$ являются критическими и могут быть точками экстремума. Решая методом интервалов неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$, находим, что на $(-\infty;\ -1)$ производная $f'(x) > 0$, на $(-1;\ 1)$ производная $f'(x) < 0$ и на $(1;\ +\infty)$ снова $f'(x) > 0$. Кроме того, в точках $x = \pm 1$ данная функция $f(x)$ является непрерывной. Пользуясь теоремой 5, заключаем, что $x = -1$ является точкой максимума, а $x = 1$ — точкой минимума функции $f(x)$.

Пример 9. Исследовать на экстремум функцию

$$f(x) = (x+3)^2\sqrt[3]{(x-1)^2}.$$

Решение. Функция $f(x) = (x+3)^2 (x-1)^{\frac{2}{3}}$. Ее производная существует при всех $x \neq 1$ и равна

$$f'(x) = 2(x+3)(x-1)^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3}(x-1)^{-\frac{1}{3}}(x+3)^2,$$

т. е. $f'(x) = \frac{8x(x+3)}{3\cdot\sqrt[3]{x-1}}$.

Полученная производная обращается в нуль в точках $x_1 = -3$, $x_2 = 0$. В точке $x_3 = 1$ производная не существует, тогда как сама функция в точке $x_3 = 1$ является непрерывной. Значит, x_1, x_2 и x_3 — критические точки. Применяя метод интервалов, получаем, что на $(-\infty;\ -3)$ производная $f'(x) < 0$, на $(-3;\ 0)$ производная $f'(x) > 0$, на $(0;\ 1)$ имеем $f'(x) < 0$ и на $(1;\ +\infty)$ получим $f'(x) > 0$. Таким образом, точки $x_1 = -3$ и $x_3 = 1$ являются точками минимума, а точка $x_2 = 0$ является точкой максимума.

Далее найдем экстремумы функции. Имеем $f_{min}(-3) = 0$ – минимум функции (в точке $x_1 = -3$), $f_{min}(1) = 0$ также минимум функции (но уже в точке $x_3 = 1$), а $f_{max}(0) = 9$ – максимум функции. На рисунке 55 изображен эскиз графика функции $f(x)$.

Замечание 4. В теореме 5 условие непрерывности функции $f(x)$ в точке x_0 является существенным. Отсутствие этого условия может привести к неверным выводам. Например, функция

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

имеет производную в каждой точке, кроме $x_0 = 0$, причем,

$$f'(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

Значит, на $(-\infty; 0)$ производная $f'(x) < 0$, а на $(0; +\infty)$ производная $f'(x) > 0$, т. е. при переходе через точку $x_0 = 0$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Однако в этой точке функция не имеет ни максимума, ни минимума, так как, например, на $(-1; 0)$ имеем $f(x) = -x < f(0) = 2$, а на $(0; 1)$ имеем $f(x) = x + 2 > f(0) = 2$. Здесь теорема 5 оказывается неприменимой из-за «разрывности» функции $f(x)$ в точке $x_0 = 0$.

Рассмотрим еще один интересный пример. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$ Ее производная $f'(x) = 2x$ при $x \neq 0$. Отсюда $f'(x) < 0$ при $x < 0$ и $f'(x) > 0$ при $x > 0$, т. е. производная меняет знак с минуса на плюс при переходе через точку $x = 0$. Однако в этой точке функция имеет не минимум, а максимум (что непосредственно видно из рис. 56). Это объясняется тем,

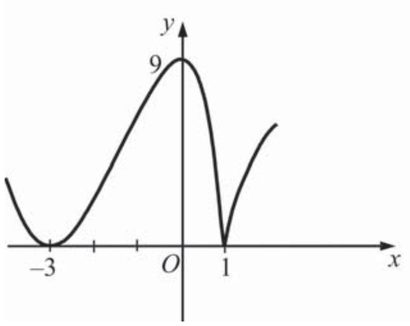


Рис. 55

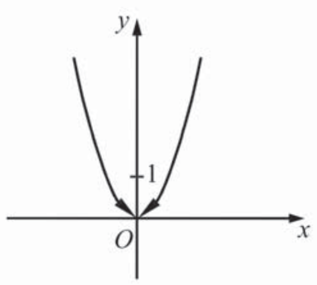


Рис. 56

что не все условия теоремы 5 выполнены (функция $f(x)$ терпит разрыв в точке $x = 0$).

Замечание 5. Если в условиях теоремы 5 производная $f'(x)$ имеет один и тот же знак слева и справа от точки x_0 (т. е. не меняет знак при переходе через точку x_0), то функция в точке x_0 не имеет экстремума.

3. Наибольшее и наименьшее значения функции. Мы рассмотрели вопрос об экстремуме функции в данной точке, т. е. вопрос о наибольшем и наименьшем значении функции в некоторой окрестности точки. Как уже было сказано в замечании 2, наибольшее (наименьшее) значение функции в некоторой окрестности не всегда является наибольшим (наименьшим) значением функции во всей ее области определения. Однако решение многих практических задач сводится к нахождению наибольшего и наименьшего значения функции во всей ее области определения. Рассмотрим вопрос об отыскании наибольшего и наименьшего значения непрерывной функции (на всей области определения). Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$. По теореме Вейерштрасса (доказывается в курсе математического анализа) такая функция непременно имеет на заданном отрезке как наибольшее, так и наименьшее значение.

Укажем правило отыскания наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Наибольшее (наименьшее) значение функция $f(x)$ может принять на одном из концов отрезка $[a; b]$ (рис. 57). Однако может случиться, что наибольшее (наименьшее) значение будет приниматься во внутренней точке отрезка (рис. 58). Очевидно, что тогда в этой точке функция будет иметь экстремум (он может быть нестрогим). Значит, наибольшее (наименьшее) значение функции $f(x)$ на $[a; b]$ либо совпадает с одним из ее экстремумов (быть может, и нестрогим), либо достигается на одном из концов отрезка.

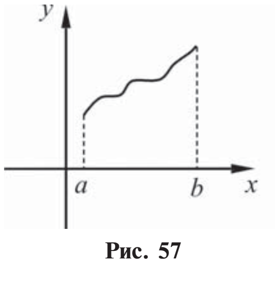


Рис. 57

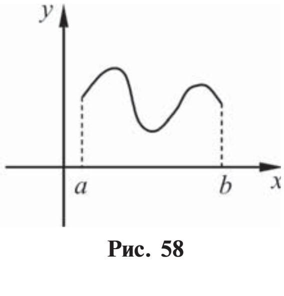


Рис. 58

В силу вышесказанного можно сформулировать следующее правило отыскания наибольшего (наименьшего) значения непрерывной на отрезке функции:

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, *то для того*, *чтобы найти наибольшее* (*наименьшее*) *значение* $f(x)$ *на этом отрезке*, *нужно найти все экстремумы функции* (если это затруднительно, можно обратиться к нахождению значений функции во всех критических точках), *а также вычислить ее значения* $f(a)$ *и* $f(b)$ *на концах* $[a; b]$ *и выбрать из этих чисел наибольшее* (*наименьшее*).

Пример 10. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ на отрезке $[-2; 2]$.

Решение. Функция $f(x)$ является непрерывной на $[-2; 2]$. Ее производная $f'(x) = 4x^3 - 4x$ определена во всех точках отрезка. $f'(x) = 0$ в точках $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 1$. Эти точки являются критическими. Именно они могут быть точками экстремума. Решая неравенства $f'(x) > 0$ и $f'(x) < 0$ убеждаемся, что на $[-2; -1)$ функция убывает ($f'(x) < 0$), на $(-1; 0)$ функция возрастает ($f'(x) > 0$), на $(0; 1)$ функция снова убывает ($f'(x) < 0$) и на $(1; 2]$ функция снова возрастает ($f'(x) > 0$). Следовательно, точка $x_1 = -1$ есть точка минимума, причем $f_{\min}(-1) = 0$, точка $x_2 = 0$ есть точка максимума, причем $f_{\max}(0) = 1$ и, наконец, точка $x_3 = 1$ есть точка минимума, причем $f_{\min}(1) = 0$.

Кроме того, на концах заданного отрезка функция принимает следующие значения: $f(-2) = f(2) = 9$. Сопоставляя найденные значения экстремумов со значениями $f(-2)$ и $f(2)$, находим, что наибольшее значение данной функции равно 9, а наименьшее есть 0.

Отметим, что на практике при нахождении наибольшего (наименьшего) значения функции вместо экстремумов функции бывает удобнее и проще вычислить значения функции во всех критических точках, а затем сравнить эти значения со значениями функции на концах отрезка.

Теория экстремумов важна не только для математики, но и имеет большое прикладное значение. С помощью этой теории часто удается решать важные в экономическом отношении задачи о получении наибольших эффектов при наименьшей затрате труда, средств и времени. При решении таких задач действуют по следующей примерной схеме:

1) данная задача «переводится» на язык функций. Для этого подбирают удобный параметр x, с помощью которого интересующую нас величину выражают как функцию $f(x)$;

2) средствами математического анализа ищется наибольшее и наименьшее значения функции $f(x)$ на некотором промежутке;

3) выясняют, какой практический смысл (в терминах первоначальной задачи) имеет полученный (на языке функций) результат.

Рассмотрим следующие примеры.

Пример 11. Из квадратного листа картона со стороной a изготовляют открытую коробку, вырезая по углам листа равные квадратики и загибая образовавшиеся края. Какой должна быть сторона основания коробки, чтобы ее объем был наибольшим?

Решение. 1) Обозначим через x длину стороны основания готовой коробки. Тогда длины сторон вырезанных квадратиков будут равны $\frac{a-x}{2}$. Поэтому объем V коробки будет равен $V(x)=\frac{a-x}{2}\cdot x\cdot x=\frac{x^2}{2}(a-x)$, причем по смыслу задачи $0 < x < a$. Таким образом, рассматриваемая задача свелась к следующей задаче: найти наибольшее значение функции $V(x)=\frac{x^2}{2}(a-x)$ на интервале $(0;\ a)$.

2) Ранее наибольшее (наименьшее) значение функции мы находили не на интервале, а на отрезке. Функция $V(x)$ непрерывна и принимает неотрицательные значения на отрезке $[0;\ a]$. Кроме того, $V(0) = V(a) = 0$. Следовательно, наибольшее свое значение функция $V(x)$ может принять лишь во внутренней точке отрезка. Поэтому результат задачи не изменится, если наибольшее значение функции $V(x)$ искать на отрезке $[0;\ a]$. В этом случае для решения задачи мы можем использовать правило отыскания наибольшего (наименьшего) значения функции на отрезке.

Найдем критически точки функции $V(x)$. Производная

$$V'(x)=x(a-x)-\frac{x^2}{2}=ax-x^2-\frac{x^2}{2}=ax-\frac{3}{2}x^2$$

определена во всех точках отрезка $[0;\ a]$. Решив уравнение $V'(x) = 0$, получим $x_1 = 0$, $x_2=\frac{2}{3}a$ (критические точки). Отсюда

$V\left(\frac{2}{3}a\right)=\frac{4}{18}a^2\left(a-\frac{2}{3}a\right)=\frac{2}{27}a^3$. Так как $V\left(\frac{2}{3}a\right)>V(0)=V(a)=0$, то наибольшее значение функции $V(x)$ на $[0;\ a]$ равно $\frac{2}{27}a^3$.

3) Возвращаясь к исходной задаче о стороне основания коробки, заключаем, что объем коробки будет наибольшим, если сторона ее основания имеет длину $x=\frac{2}{3}a$.

Пример 12. Консервная банка имеет форму круглого цилиндра радиуса r и высоты h. Определить, какими должны быть r и h, чтобы консервная банка с площадью полной поверхности $S = 216\pi$ имела наибольший объем.

Решение. 1) Для площади полной поверхности цилиндра имеем формулу

$$S = 2\pi r^2 + 2\pi rh.$$

Из нее находим, что

$$h=\frac{S}{2\pi r}-r=\frac{216\pi}{2\pi r}-r=\frac{108}{r}-r.$$

Отсюда следует, что объем цилиндра $V = \pi r^2 h$ можно выразить как функцию радиуса r:

$$V=\pi r^2 h=\pi r^2\left(\frac{108}{r}-r\right)=108\pi r-\pi r^3.$$

Таким образом, первоначальная задача свелась к отысканию максимума функции $V(r)=108\pi r-\pi r^3$, причем по смыслу задачи ясно, что $r > 0$ и $108\pi r-\pi r^3>0$, т. е. $r > 0$ и $r<\sqrt{108}$, или $0<r<\sqrt{108}$.

2) Далее, производная $V'(r)=108\pi-3\pi r^2$ определена на всем отрезке $[0;\sqrt{108}]$. Она обращается в нуль в точке $r = 6$, являющейся критической точкой функции $V(r)$. Сравнивая значения $V(0)=V(\sqrt{108})=0$ и $V(6)=432\pi$, заключаем, что наибольшим значением функции $V(r)$ на отрезке $[0;\sqrt{108}]$ является число 432π.

3) Возвращаясь к исходной задаче об определении r и h, находим, что консервная банка с площадью полной поверхности $S = 216\pi$ имеет наибольший объем при радиусе основания банки $r = 6$ и высоте банки $h=\frac{108}{6}-6=18-6=12$.

Вопросы и задания

1. Сформулировать теорему Лагранжа. Что означает геометрически формула Лагранжа?
2. Сформулировать достаточные признаки возрастания и убывания функции.
3. Дать определения точек максимума и минимума функции.
4. Что называется экстремумом функции?
5. Сформулировать необходимое условие существования экстремума функции.
6. Какие точки называются критическими точками функции?
7. Сформулировать достаточные условия существования экстремума функции.
8. Сформулировать правило отыскания наибольшего (наименьшего) значения непрерывной на отрезке функции.
9. По какой примерной схеме, используя понятие экстремума, решают задачи прикладного характера?

Упражнения

1. Найти промежутки возрастания и убывания функций:

а) $f(x) = 2 - 9x$; д) $f(x) = x^3 - 27x$;

б) $f(x) = \frac{1}{2}x - 8$; е) $f(x) = \frac{x-1}{x}$;

в) $f(x) = x^2 - 2x + 4$; ж) $f(x) = x(x^2 - 6)$;

г) $f(x) = -x^2 + 2x - 3$; з) $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

2. Найти интервалы возрастания и убывания и построить эскиз графика функций:

а) $f(x) = x^4 - 2x^2$; б) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x + 1$.

3. Построить эскиз графика функции $f(x)$, если:

а) $D(f) = [-1; 1]$, $f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$;

б) $D(f) = [-3; 5]$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-3; -1) \cup (1; 5)$,

$f'(x) < 0$ при $x \in (-1; 1)$ и $f'(-1) = f'(1) = 0$;

в) $D(f) = [-2; 3]$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-2; 0) \cup (0; 3)$ и $f'(0) = 0$.

4. Найти критические точки функций:

а) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$; в) $f(x) = \sin x$;

б) $f(x) = 9x - \frac{1}{3}x^3$; г) $f(x) = |x|$.

5. Определить, какие из следующих функций не имеют критических точек:

а) $f(x) = x^2$; в) $f(x) = 8x^3 + 5x$;

б) $f(x) = 3x - 4$; г) $f(x) = |x| + 1$.

6. Найти точки экстремума функции:

а) $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x^4$; в) $f(x) = (x - 4)^8$;

б) $f(x) = 4 - 3x^2 - 2x^3$; г) $f(x) = \frac{5}{x} + \frac{x}{5}$.

7. Исследовать функцию на возрастание, убывание и экстремумы:

а) $f(x) = x^3 - 27x$; в) $f(x) = x + \frac{4}{x^2}$;

б) $f(x) = \frac{3x}{x^2+1}$; г) $f(x) = \begin{cases} -x-1, & x > 0, \\ 1, & x = 0, \\ x, & x < 0. \end{cases}$

8. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = x^4 - 8x^2 + 3$ на отрезке [−4; 1];

б) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$ на отрезке [−2; 2];

в) $f(x) = \sin x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{3\pi}{4}\right]$;

г) $f(x) = \frac{x}{x+1}$ на отрезке [1; 2].

9. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 12t^2 - \frac{2}{3}t^3$. В какой момент времени из промежутка [6; 15] скорость движения точки будет наибольшей и какова величина этой скорости?

10. Число 6 представить в виде суммы двух неотрицательных чисел так, чтобы их произведение было наибольшим.

11. Площадь прямоугольника равна 64. Какую длину должны иметь его стороны, чтобы периметр прямоугольника был наименьшим?

---

12. Найти промежутки возрастания и убывания функций:

а) $f(x) = x^3 + 6x^2 + 12x - 13$;

б) $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$;

в) $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 12$;

г) $f(x) = x^3 - 9x + 4\sqrt{3}$;

д) $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 16$;

е) $f(x) = \frac{1-x}{x^2-7x+10}$;

ж) $f(x) = \frac{1}{2-\sin x}$;

з) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{\ln x}}$.

13. Доказать неравенства:

а) $e^x \geq x + 1$;

б) $\cos x > 1 - \frac{1}{2}x^2$ при $x > 0$.

14. Построить эскиз графика функции $f(x)$, если:

а) $D(f) = [-3; 6]$, $f'(x) > 0$ при $x \in (-3; 2)$, $f'(x) < 0$ при $x \in (2; 6)$ и $f'(2) = 0$;

б) $D(f) = [-3; 6]$, $f'(x) < 0$ при $x \in (-3; 2)$, $f'(x) > 0$ при $x \in (2; 6)$ и функция $f(x)$ не имеет производной в точке $x = 2$.

15. Найти критические точки функции. Определить также, какие из них являются точками максимума, а какие — точками минимума:

а) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 6$;

б) $f(x) = 3 + 8x^2 - x^4$;

в) $f(x) = 1 + \cos x$;

г) $f(x) = -|x|$.

16. Найти экстремумы функции:

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x^2 - 3$;

б) $f(x) = x^4 - x^3 + 4$;

в) $f(x) = x^5 - 5x^4 - 20x^3 + 10$;

г) $f(x) = \frac{x}{x^2-5x+16}$;

д) $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 7}$;

е) $f(x) = \frac{x^2}{2} - \ln x$.

17. Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

а) $f(x) = 3x^3 - 6x^2 - 5x + 8$ на отрезке $[-1; 4]$;

б) $f(x) = \begin{cases} 2x^2 + \frac{2}{x^2}, & x \in [-2; 0) \cup (0; 2], \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ на отрезке $[-2; 2]$.

18. Найти прямоугольник наибольшей площади, если длина его диагонали равна l.

19*. Найти высоту конуса наименьшего объема, описанного около шара радиуса R.

20*. Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 л жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?

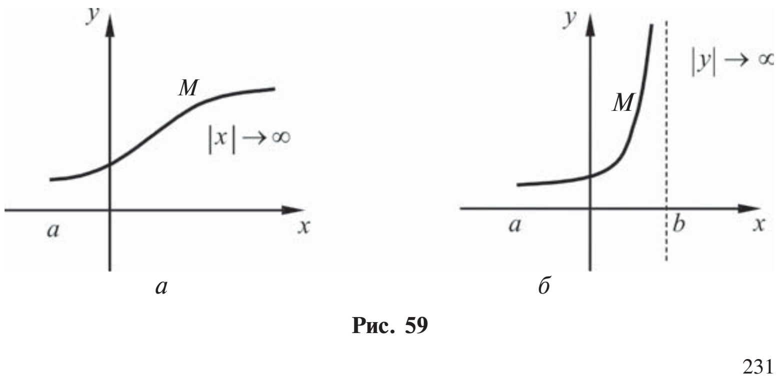
§ 7. Применение производной при построении графика функции

1. Асимптоты. Пусть задана функция $y = f(x)$ с некоторой областью определения D, содержащей интервал $(a; b)$. Предположим, что относительно данной функции имеет место следующее:

а) $f(x)$ непрерывна на $(a; b)$;

б) либо интервал $(a; b)$ бесконечен, либо функция $f(x)$ хотя бы в одной из точек a или b имеет бесконечный разрыв (т.е. $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ или $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$, где под символом ∞ подразумевается $+\infty$ или $-\infty$). Тогда ту часть кривой $y = f(x)$, которая соответствует указанному интервалу $(a; b)$, называют *бесконечной ветвью кривой.*

Будем говорить, что точка $M(x;y)$ удаляется в бесконечность при перемещении ее по бесконечной ветви кривой в данном направлении, если расстояние от нее до начала координат становится как угодно большим (см. рис. 59, *а, б*), т.е. одна из координат точки M (x или y) должна становиться как угодно большой по абсолютной величине.



а *б*

Рис. 59

Пусть когда точка $M(x;y)$ удаляется в бесконечность по бесконечной ветви кривой, расстояние MK от этой точки до некоторой прямой с уравнением $Ax + By + C = 0$ стремится к нулю (рис. 60). Это означает, что либо

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0, \qquad (1)$$

либо

$$\lim_{\substack{x\to a+0 \\ (x\to b-0)}} \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0\ , \qquad (2)$$

при условии $\lim\limits_{\substack{x\to a+0 \\ (x\to b-0)}} f(x) = \infty$ (доказательство этого утверждения приводится в курсе аналитической геометрии). В этом случае прямую с уравнением $Ax + By + C = 0$ называют *асимптотой для ветви кривой.*

Дадим теперь точное определение асимптоты.

Определение 1. *Асимптотой бесконечной ветви кривой* $y = f(x)$ называется такая прямая, расстояние до которой от точки кривой стремится к нулю при удалении точки по ветви кривой (по крайней мере, в одном направлении) в бесконечность.

Определение 2. *Асимптотой кривой* $y = f(x)$ называется прямая, которая является асимптотой, по крайней мере, для одной из бесконечных ветвей этой кривой.

Например, для кривой $y = \dfrac{1}{x}$, $x > 0$ обе оси координат OX и OY являются ее асимптотами (рис. 61).

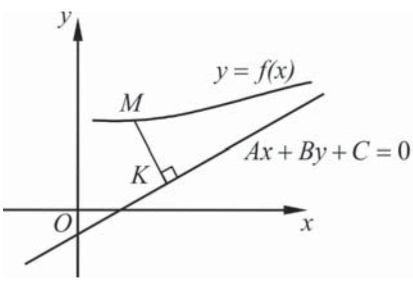


Рис. 60

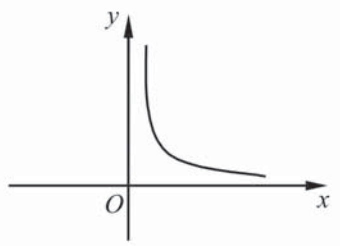


Рис. 61

Знание асимптот кривой значительно облегчает построение графика функции. Различают три вида асимптот кривой: *вертикальные* (перпендикулярные оси OX), *горизонтальные* (перпендикулярные оси OY) и *наклонные асимптоты.*

Теорема 1. Кривая $y = f(x)$ имеет вертикальную асимптоту $x = c$ тогда и только тогда, когда либо $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \infty$, либо $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = \infty$ (подразумевается, что $f(x)$ — непрерывная функция в соответствующей односторонней окрестности точки c).

Доказательство. Для того чтобы прямая с уравнением $x = c$ была асимптотой ветви кривой $y = f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы один из пределов (1) или (2) при $A = 1$, $B = 0$ и $C = -c$ был равен нулю. Ясно, что случай (1) не имеет места, поскольку $x = c$ не стремится к ∞. Следовательно, согласно (2) имеем

$$\lim_{\substack{x\to a+0\\(x\to b-0)}} \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \lim_{\substack{x\to a+0\\(x\to b-0)}} (x-c) = 0,$$

где подразумевается также, что $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\(x\to b-0)}} f(x) = \infty$. Поэтому $a - c = 0$, т.е. $c = a$ (либо $b - c = 0$, т.е. $c = b$). Отсюда и из условия $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\(x\to b-0)}} f(x) = \infty$ заключаем, что $\lim\limits_{x\to c+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$ (либо $\lim\limits_{x\to c-0} f(x) = \lim\limits_{x\to b-0} f(x) = \infty$).

Отметим, что взаимное расположение бесконечных ветвей кривой с их вертикальными асимптотами может быть различным. В случае монотонности функции $f(x)$ (хотя бы в односторонней окрестности точки c) возможные случаи взаимного расположения бесконечной ветви кривой и ее асимптоты представлены на рис. 62.

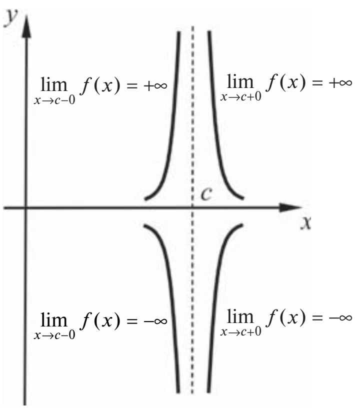


Рис. 62

Перейдем теперь к вопросу отыскания наклонных асимптот (т.е. асимптот, не перпендикулярных оси OX).

Пусть кривая $y = f(x)$ имеет наклонную асимптоту с уравнением $y = kx + l$. В этом случае соотношение (2) не имеет места, поскольку в противном случае окажется, что

$$\lim_{\substack{x\to a+0\\(x\to b-0)}} \frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \lim_{\substack{x\to a+0\\(x\to b-0)}} \frac{kx-y+l}{\sqrt{k^2+1}} = 0$$

при условии $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\(x\to b-0)}} y = \infty$. Однако, если $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\(x\to b-0)}} \dfrac{kx-y+l}{\sqrt{k^2+1}} = 0$, то

получаем, что $\lim\limits_{\substack{x\to a+0\\(x\to b-0)}} y = ka + l$ (или $kb + l$) — некоторое число. Это противоречие показывает, что интервал $(a; b)$ должен быть бесконечным и согласно (1)

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} \frac{kx-y+l}{\sqrt{k^2+1}} = 0. \tag{3}$$

Теорема 2. Прямая с уравнением $y = kx + l$ (k, l — некоторые числа) является наклонной асимптотой для кривой $y = f(x)$ тогда и только тогда, когда существуют конечные пределы $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} \dfrac{f(x)}{x} = k$ и $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} (f(x) - kx) = l$.

Доказательство. Условие (3) равносильно требованию

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} (y - kx - l) = \lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} \left[f(x) - kx - l\right] = 0. \tag{4}$$

Пусть условие (4) выполнено. Имеем

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} \left[\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right] = \lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} \left[(f(x) - kx - l)\frac{1}{x}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} (f(x) - kx - l)\cdot \lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} \frac{1}{x} = 0\cdot 0 = 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} \left(\frac{f(x)}{x} - k\right) = \lim_{\substack{x\to\infty\\(+\infty\text{ или }-\infty)}} \left[\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right) + \frac{l}{x}\right] =$$

$$= \lim_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} \left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{l}{x}\right) + \lim_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} \frac{l}{x} = 0 + 0 = 0, \text{ т.е.}$$

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k\,. \tag{5}$$

Таким образом, угловой коэффициент k асимптоты $y = kx + l$ определяется соотношением (5). Определив значение k из (5), мы можем получить, что

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} (f(x) - kx) = l\,. \tag{6}$$

Итак, если кривая $y = f(x)$ имеет асимптоту $y = kx + l$, не перпендикулярную оси OX, то необходимо существование конечных пределов (5) и (6).

Обратно, пусть существуют конечные пределы (5) и (6). Из (6) сразу следует, что $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} (f(x) - kx - l) = 0$. Отсюда имеем

$$\lim_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} \frac{kx-y+l}{\sqrt{k^2+1}} = -\lim_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} \frac{y-kx-l}{\sqrt{k^2+1}} = \frac{-1}{\sqrt{k^2+1}} \cdot \lim_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} (f(x)-kx-l) = 0,$$

т.е. выполняется условие (3), означающее, что прямая с уравнением $y = kx + l$ является асимптотой (наклонной) для кривой $y = f(x)$.

Следствие. Кривая $y = f(x)$ имеет горизонтальную асимптоту (т.е. асимптоту, перпендикулярную оси OY) с уравнением $y = l$ тогда и только тогда, когда существует конечный предел $\lim\limits_{\substack{x\to\infty \\ (+\infty \text{ или } -\infty)}} f(x) = l$ (доказательство следствия предоставляется читателю).

Замечание 1. На практике следует отдельно вычислять пределы вида $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, а также пределы $\lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - kx)$ и $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$, поскольку они могут быть различными. Это означает, что существуют различные наклонные асимптоты (при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$) данной кривой.

Замечание 2. После нахождения наклонной асимптоты полезно знать, как располагаются взаимно кривая и ее асимпто-

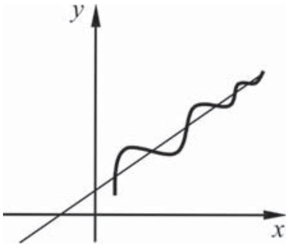


Рис. 63

та. Для этого нужно исследовать знак разности $f(x) - (kx + l)$ при больших значениях $|x|$. Если эта разность (при больших $|x|$) положительна, кривая, начиная с некоторого значения x, будет располагаться выше асимптоты. Если разность является отрицательной, кривая, начиная с некоторого большого $|x|$, располагается ниже асимптоты. Наконец, если указанная разность при больших значениях $|x|$ не сохраняет знака, кривая будет колебаться около асимптоты, постоянно пересекая ее (рис. 63).

Пример 1. Найти асимптоты кривой $f(x) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2}$.

Решение. Имеем $k = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2}{(x-1)^2} = 1,$

$$l = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{(x-1)^2} - x\right) =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 - x^3 + 2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x^2 - x}{x^2 - 2x + 1} = 2.$$

Следовательно, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой (причем, при $x \to -\infty$ и $x \to +\infty$) данной кривой.

Так как $f(x) - (kx + l) = \dfrac{x^3}{(x-1)^2} - (x + 2) = \dfrac{3x - 2}{(x-1)^2}$, то при $x > \dfrac{2}{3}$ данная разность положительна и кривая располагается над асимптотой, а при $x < \dfrac{2}{3}$ разность отрицательна и кривая располагается под асимптотой.

Далее, так как

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{x^3}{(x-1)^2} = +\infty,$$

то кривая $f(x)$ имеет на интервалах $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$ две бесконечные ветви, для каждой из которых прямая $x = 1$ является вертикальной асимптотой. Горизонтальной асимптоты кривая $f(x)$ не имеет (рис. 64).

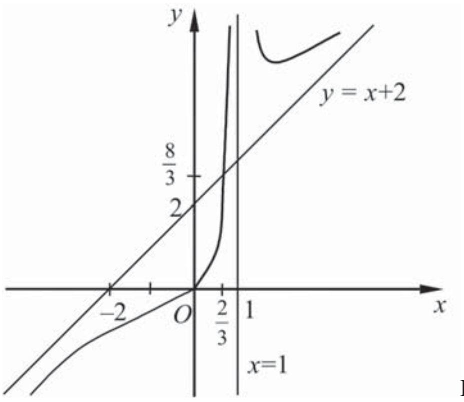


Рис. 64

2. Выпуклость кривой. Точки перегиба. Пусть кривая задана на интервале $(a;\ b)$ уравнением $y = f(x)$, где $f(x)$ имеет производную (а значит, в каждой точке кривой существует касательная, не перпендикулярная оси OX). Будем обозначать через $y_{кр}$ и $y_{кас}$ соответственно ординаты точек на кривой и на касательной к этой кривой.

На рис. 65 изображена кривая, которая располагается выше любой проведенной к ней касательной, за исключением точки касания, где кривая и касательная имеют общую точку (т.е. для всех x из $(a;\ b)$, за исключением того значения x, которое является абсциссой точки касания соответствующая разность $y_{кр}(x) - y_{кас}(x) > 0$).

Аналогично, на рис. 66 изображена кривая, которая располагается ниже любой проведенной к ней касательной, за исключением одной общей точки – точки касания (т.е. для всех x из $(a;\ b)$, за исключением того значения x, которое является абсциссой точки касания соответствующая разность $y_{кр}(x) - y_{кас}(x) < 0$).

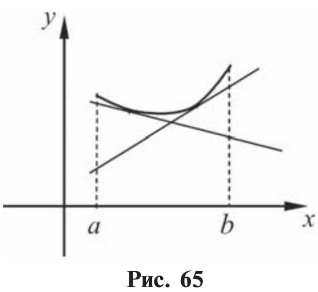


Рис. 65

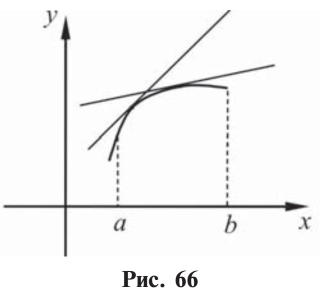


Рис. 66

В первом случае говорят, что *кривая* $y = f(x)$ *обращена на интервале* $(a;\ b)$ *выпуклостью вниз*, а во втором — что *кривая обращена выпуклостью вверх*. Выявление таких особенностей кривой облегчает построение графиков функций.

Достаточный признак выпуклости кривой (вниз или вверх) на промежутке устанавливается следующей теоремой.

Теорема 3. Пусть на отрезке $[a;\ b]$ задана непрерывная функция $y = f(x)$, причем вторая производная $f''(x) > 0$, $x \in (a;\ b)$ (соответственно $f''(x) < 0$, $x \in (a;\ b)$). Тогда кривая, являющаяся графиком функции $y = f(x)$, обращена на интервале $(a;\ b)$ выпуклостью вниз (соответственно вверх).

Доказательство. Рассмотрим случай $f''(x) > 0$, $x \in (a;\ b)$. Выберем любую точку $x_0 \in (a;\ b)$ и проведем касательную к графику в точке $M(x_0;\ f(x_0))$. Уравнение касательной имеет вид $y_{\text{кас}} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Пусть $x > x_0$ (случай $x < x_0$ рассматривается аналогично). Применим к отрезку $[x_0;\ x]$ и функции $f(x)$ формулу Лагранжа (см. § 6 настоящей главы). Имеем

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_1)(x - x_0),$$

где $x_0 < x_1 < x$. Следовательно,

$$\begin{aligned} y_{\text{кр}}(x) - y_{\text{кас}}(x) &= f(x) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \\ &= (f(x_0) + f'(x_1)(x - x_0)) - (f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)) = \\ &= (f'(x_1) - f'(x_0))(x - x_0). \end{aligned}$$

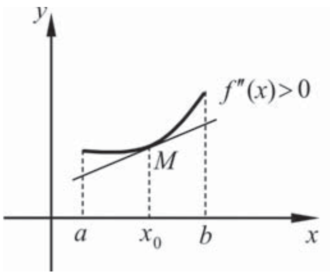
Так как существует вторая производная $f''(x)$ на $(a;\ b)$, то к первой производной $f'(x)$ и отрезку $[x_0;\ x_1]$ можно еще раз применить формулу Лагранжа. Имеем

$$f'(x_1) - f'(x_0) = f''(x_2)(x_1 - x_0), \text{ где } x_0 < x_2 < x_1.$$

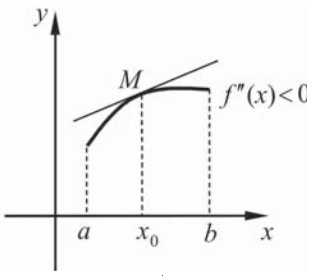
Поэтому $y_{\text{кр}}(x) - y_{\text{кас}}(x) = f''(x_2)(x_1 - x_0)(x - x_0)$. По условию теоремы $f''(x_2) > 0$. Кроме того, $x_1 > x_0$ и $x > x_0$. Отсюда следует, что $y_{\text{кр}}(x) - y_{\text{кас}}(x) > 0$, $x \in (a;\ b)$, $x \neq x_0$, т.е. график функции $y = f(x)$ обращен на интервале $(a;\ b)$ выпуклостью вниз.

Случай, когда на интервале $(a;\ b)$ вторая производная $f''(x) < 0$ рассматривается аналогично (см. рис. 67, *а, б*).

Пример 2. Исследовать направление выпуклости графика функции $y = x^2$.



а



б

Рис. 67

Решение. Так как вторая производная $y'' = (x^2)'' = 2 > 0$, то график функции на всем промежутке $(-\infty; +\infty)$ обращен выпуклостью вниз.

Пример 3. Найти интервалы, где график функции $y = x^4 - 6x^2 + 4$ обращен выпуклостью вверх или вниз.

Решение. Имеем

$$y' = (x^4 - 6x^2 + 4)' = 4x^3 - 12x, \quad y'' = (4x^3 - 12x)' = 12x^2 - 12.$$

Так как $12x^2 - 12 > 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$, то на интервалах $(-\infty; -1)$ и $(1; +\infty)$ график функции обращен выпуклостью вниз. На интервале $(-1; 1)$ имеем $12x^2 - 12 < 0$. Поэтому на этом интервале график функции обращен выпуклостью вверх.

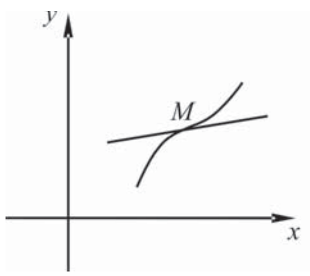


Рис. 68

Введем теперь понятие точки перегиба кривой. Обычно кривая располагается около точки касания по одну сторону от касательной. Но может случиться, что в точке касания кривая переходит с одной стороны касательной на ее другую сторону (рис. 68). Такие точки называют точками перегиба кривой.

Дадим теперь точное определение точки перегиба. Пусть кривая $y = f(x)$ рассматривается на интервале $(a; b)$ и $x_0 \in (a; b)$. Предположим, что в каждой точке этой кривой существует касательная и никакая из касательных не перпендикулярна оси OX (кроме, быть может, касательной в точке $M_0(x_0; f(x_0))$). Это означает, что функция $f(x)$ имеет производную в каждой точке $x \in (a; b)$ (кроме, быть может, точки x_0 для случая, когда соответствующая касательная перпендикулярна оси OX. Тем не менее, функция $f(x)$ в этом случае считается непрерывной в точке x_0).

Определение 3. Точка $M_0(x_0; f(x_0))$ кривой $y = f(x)$ называется *точкой перегиба* этой кривой, если на интервале $(a; x_0)$ кривая $y = f(x)$ является выпуклой вниз (вверх), а на интервале $(x_0; b)$ кривая $y = f(x)$ является выпуклой вверх (соответственно вниз).

Если M_0 — точка перегиба кривой, то говорят, что в этой точке *кривая имеет перегиб.*

Пример 4. Рассмотрим кривую $y = f(x) = x^3$ (рис. 69). В точке $M(0; 0)$ эта кривая имеет перегиб. Действительно, вторая производная $f''(x) = 6x < 0$ при $x < 0$ и $f''(x) > 0$ при $x > 0$. Поэтому на интервале $(-\infty; 0)$ кривая выпукла вверх, а на $(0; +\infty)$ кривая выпукла вниз. Кроме того, в точке M кривая имеет касательную, не перпендикулярную оси OX. Следовательно, точка M — точка перегиба данной кривой.

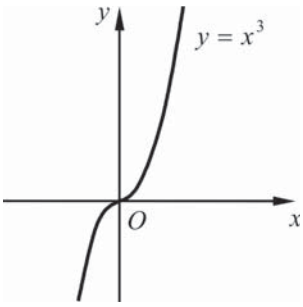


Рис. 69

Точка перегиба кривой характеризуется следующим необходимым признаком.

Теорема 4 (необходимое условие перегиба). Пусть $M(x_0; f(x_0))$ — точка перегиба кривой $y = f(x)$ и в некоторой окрестности x_0 существует вторая производная $f''(x)$, причем в самой точке x_0 функция $f''(x)$ является непрерывной. Тогда необходимо выполнение равенства $f''(x_0) = 0$.

Доказательство. Докажем от противного. Пусть $f''(x_0) \neq 0$, для определенности, $f''(x_0) > 0$. Тогда вследствие непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 существует такая окрестность $(a; b)$ этой точки, что для всех $x \in (a; b)$ будет выполняться неравенство $f''(x) > 0$. Отсюда по теореме 3 кривая $y = f(x)$ на всем интервале $(a; b)$, который содержит x_0, будет обращена выпуклостью вниз. Это противоречит тому, что в точке $M(x_0; f(x_0))$ кривая имеет перегиб.

Пример 5. Найти точки, где может иметь перегиб график функции $y = 2x^4 - 12x^2 + 5$.

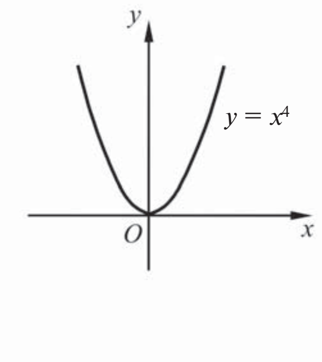


Рис. 70

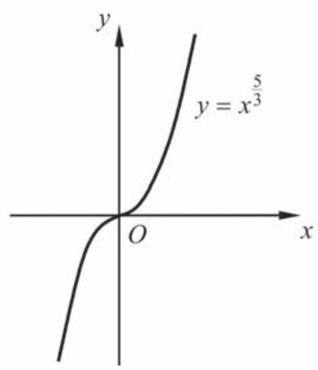


Рис. 71

Р е ш е н и е . Имеем

$$y'' = (2x^4 - 12x^2 + 5)'' = (8x^3 - 24x)' = 24x^2 - 24.$$

Решаем уравнение $f''(x) = 0$. Его корнями являются $x = \pm 1$. Соответствующие им значения функции равны $y(1) = -5$, $y(-1) = -5$. Значит, точками перегиба могут быть $M(-1; -5)$ и $N(1; -5)$.

Замечание 3. Найденное необходимое условие перегиба не является достаточным. Например, рассмотрим кривую с уравнением $y = f(x) = x^4$. Имеем $f''(x) = 12x^2$. В точке $x = 0$ имеем $f''(0) = 0$. Однако для всех $x \neq 0$ справедливо неравенство $f''(x) > 0$, т.е. данная кривая обращена выпуклостью вниз. Поэтому в точке $M(0; 0)$ нет перегиба (рис. 70).

Замечание 4. Кривая $y = f(x)$ может иметь перегиб также и в тех точках, где вторая производная $f''(x)$ вовсе не существует. Например, рассмотрим кривую $y = f(x) = x^{5/3}$ (рис. 71). Имеем

$$f'(x) = \frac{5}{3}x^{\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = \frac{10}{9\sqrt[3]{x}}, \quad x \neq 0 .$$

В точке $x = 0$ вторая производная $f''(x)$ не существует. Однако $f''(x) > 0$ при $x > 0$ и $f''(x) < 0$ при $x < 0$, т.е. точка $M(0; 0)$ является точкой перегиба данной кривой.

Таким образом, точки перегиба кривой следует искать только среди точек, в которых $f''(x) = 0$, либо $f''(x)$ не существует.

В заключение сформулируем достаточный признак существования у кривой точки перегиба.

Теорема 5 (достаточное условие перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет вторую производную в некоторой окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки $x = x_0$, причем в этой точке $f(x)$ предполагается дифференцируемой. Кроме того, пусть в указанной окрестности вторая производная $f''(x)$ сохраняет определенный знак как слева от x_0, так и справа от x_0. Тогда, если при переходе через точку $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ меняет свой знак, точка $M(x_0; f(x_0))$ является точкой перегиба графика функции $y = f(x)$.

Замечание 5. Если при переходе через $x = x_0$ вторая производная $f''(x)$ не меняет свой знак, то в точке $(x_0; f(x_0))$ нет перегиба.

Пример 6. Найти точки перегиба графика функции $y = x^4 - 6x^2 + 5$.

Решение. Вторая производная $y'' = (x^4 - 6x^2 + 5)'' = 12x^2 - 12$. Точек, в которых $f''(x)$ не существует, нет. Поэтому точками перегиба могут быть только точки с абсциссами $x = \pm 1$, где $f''(x) = 0$.

Далее, в достаточно малой окрестности точки $x = -1$ имеем $f''(x) > 0$ при $x < -1$ и $f''(x) < 0$ при $x > -1$. Значит, $f''(x)$ меняет знак при переходе через точку $x = -1$, и поэтому точка $M(-1; 0)$ является точкой перегиба графика. Аналогично, в достаточно малой окрестности точки $x = 1$ имеем $f''(x) < 0$ при $x < 1$ и $f''(x) > 0$ при $x > 1$, т.е. точка $N(1; 0)$ также является точкой перегиба графика.

Пример 7. Найти точки перегиба графика функции $y = x + \sin x$.

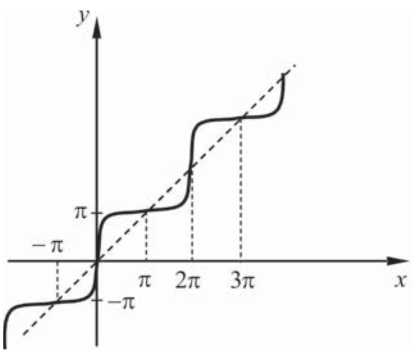


Рис. 72

Решение. $y' = 1 + \cos x$, $y'' = -\sin x$. Уравнение $-\sin x = 0$ имеет бесконечно много корней вида $x = \pi n$, $n \in Z$. Точек, в которых y'' не существует, нет. При переходе x через каждый корень вторая производная меняет свой знак. Следовательно, все точки вида $(\pi n; \pi n)$, где $n \in Z$, являются точками перегиба графика данной функции (рис. 72).

3. Построение графиков функций. Выше мы рассмотрели применения производной при изучении некоторых свойств функции. Этими применениями можно существенно расширить план исследования функции, которым мы пользовались ранее (см. главу VII части I). В этот план теперь можно включить:

1) исследование функции на непрерывность, нахождение точек разрыва функции;

2) выяснение поведения функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$;

3) определение интервалов возрастания и убывания функции с помощью производной;

4) отыскание точек экстремума;

5) нахождение асимптот графика функции;

6) нахождение промежутков выпуклости вверх (вниз) и точек перегиба.

Исследование функции с помощью понятия производной дает более качественную характеристику хода изменения функции и вследствие этого позволяет более точно строить график исследуемой функции.

На основании вышесказанного можно указать следующий примерный план исследования функции $f(x)$ и построения ее графика:

1) найти область определения функции (если она прямо не указана);

2) узнать, является ли функция четной или нечетной, периодической, ограниченной;

3) исследовать функцию на непрерывность и найти ее точки разрыва (если они имеются);

4) выяснить поведение функции при $x \to \pm\infty$ (если функция определена для как угодно больших по абсолютной величине значений x);

5) определить промежутки возрастания и убывания функции и исследовать ее на экстремумы;

6) исследовать функцию на наличие у ее графика асимптот;

7) определить промежутки выпуклости вверх (вниз) и исследовать функцию на существование у ее графика точек перегиба;

8) найти действительные корни уравнения $f(x) = 0$, тем самым определить точки пересечения графика функции с осью OX;

9) вычислить дополнительно еще несколько значений функции, в частности, вычислить значение $f(0)$, если оно существует (тем самым будет найдена точка пересечения графика с осью OY).

На практике нет необходимости проводить исследование в точности по указанному плану. Можно также менять порядок исследования. Результаты исследования удобно записывать в таблицу (см. ниже). Пользуясь результатами проведенного исследования, через нанесенные на чертеж точки проводят плавную кривую и строят график функции.

Пример 8. Исследовать функцию $y = f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ и построить ее график.

1. Областью определения функции является множество $(-\infty; -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$.

2. Функция является нечетной, поскольку область определения есть симметричное множество относительно начала координат и для всех x из области определения выполнено равенство $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{3-(-x)^2} = \dfrac{-x^3}{3-x^2} = -f(x)$.

3. В своей области определения функция является непрерывной.

4. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}+0} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}-0} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\sqrt{3}+0} f(x) = -\infty$, т.е. функция $f(x)$ при $x = \pm\sqrt{3}$ терпит бесконечный разрыв, и поэтому ее график имеет три бесконечных ветви на интервалах $(-\infty; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; +\infty)$.

5. Для значений $x \neq \pm\sqrt{3}$ функция имеет производную $f'(x) = \dfrac{x^2(9-x^2)}{(3-x^2)^2}$. Корнями уравнения $f'(x) = 0$ являются $x_1 = -3$, $x_2 = 0$ и $x_3 = 3$. При $x = \pm\sqrt{3}$ производная не существует, но для этих значений x сама функция $f(x)$ не определена. Поэтому критическими точками являются только точки $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3$.

Далее, $f'(x)$ в достаточно малой окрестности точки $x_2 = 0$ сохраняет свой знак (так как $9 - x^2 > 0$, $x^2 > 0$, $(3 - x^2)^2 > 0$ для $x \neq 0$ из такой окрестности). Следовательно, точка $x_2 = 0$ не является точкой экстремума.

$f'(x) < 0$ при $x < -3$ и $x > 3$, т.е. на интервалах $(-\infty; -3)$ и $(3; +\infty)$ функция убывает. $f'(x) > 0$ при $-3 < x < -\sqrt{3}$, $-\sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ $(x \neq 0)$ и $\sqrt{3} < x < 3$, т.е. на интервалах $(-3; -\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$ и $(\sqrt{3}; 3)$ функция возрастает.

В точке $x = -3$ функция имеет минимум $f_{\min}(-3) = 4{,}5$, а в точке $x = 3$ функция имеет максимум $f_{\max}(3) = -4{,}5$.

6. Прямые $x = -\sqrt{3}$ и $x = \sqrt{3}$ являются вертикальными асимптотами кривой, причем каждая из них является асимптотой сразу для двух соседних ветвей кривой. Так как

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{(3-x^2)x} = -1\,,$$

$$l = \lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2} = 0\,,$$

то прямая $y = -x$ является наклонной асимптотой кривой.

Далее, $y_{\text{кр}} - y_{\text{ас}} = f(x)-(-x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}+x = \dfrac{3x}{3-x^2}$. Так как $y_{\text{кр}} - y_{\text{ас}} > 0$ при $x < -\sqrt{3}$, то кривая $f(x)$ на $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ располагается над асимптотой $y = -x$. При $-\sqrt{3} < x < 0$ кривая $f(x)$ расположена под асимптотой, при $0 < x < \sqrt{3}$ кривая снова располагается над асимптотой, при $x > \sqrt{3}$ кривая снова расположена под асимптотой.

7. Для $x \neq \pm\sqrt{3}$ существует вторая производная $f''(x) = \dfrac{6x(9+x^2)}{(3-x^2)^3}$. Корнем уравнения $f''(x) = 0$ является $x = 0$.

При этом $f''(x) > 0$ для $x < -\sqrt{3}$, т.е. на интервале $(-\infty;\ -\sqrt{3})$ кривая $f(x)$ выпукла вниз; $f''(x) < 0$ для $-\sqrt{3} < x < 0$, т.е. на $(-\sqrt{3}\,;\ 0)$ кривая $f(x)$ выпукла вверх; $f''(x) > 0$ для $0 < x < \sqrt{3}$, т.е. кривая на $(0;\ \sqrt{3})$ снова выпукла вниз; $f''(x) < 0$ для $x > \sqrt{3}$, т.е. на $(\sqrt{3}\,;\ +\infty)$ кривая $f(x)$ снова выпукла вверх.

Так как при переходе x через значение $x = 0$ вторая производная $f''(x)$ меняет знак (с минуса на плюс), то точка $O(0;\ f(0))$ или, то же, точка $O(0;\ 0)$ — точка перегиба.

8. Корнем уравнения $f(x) = 0$ является число $x = 0$. Значит, график функции пересекает ось OX в единственной точке $O(0;\ 0)$.

9. Так как $f(0) = 0$, то график пересекает ось OY в единственной точке $O(0;\ 0)$. Вычислим еще несколько значений функции: $f(\pm 1) = \pm\dfrac{1}{2}$, $f(\pm 2) = \mp 8$.

Составим следующую таблицу:

x	$(-\infty;\ -3)$	-3	$(-3;\ -\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3};\ 0)$	0
y	Убывает, график выше наклонной асимптоты и выпуклый вниз	4,5 min	Возрастает, график выше наклонной асимптоты, выпуклый вниз и приближается справа к вертикальной асимптоте $x = -\sqrt{3}$	Не определена	Возрастает, график ниже наклонной асимптоты, выпуклый вверх и приближается слева к вертикальной асимптоте $x = -\sqrt{3}$	0
y'	−	0	+	Не определена	+	0
y''	+	+	+	Не определена	−	0

продолжение

x	$(0;\ \sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3};\ 3)$	3	$(3;\ +\infty)$
y	Возрастает, график выше наклонной асимптоты, выпуклый вниз и приближается справа к вертикальной асимптоте $x = \sqrt{3}$	Не определена	Возрастает, график ниже наклонной асимптоты, выпуклый вверх и приближается слева к вертикальной асимптоте $x = \sqrt{3}$	−4,5 max	Убывает, график ниже наклонной асимптоты и выпуклый вверх
y'	+	Не определена	+	0	−
y''	+	Не определена	−	−	−

Используя теперь полученные результаты и таблицу, строим график функции (рис. 73).

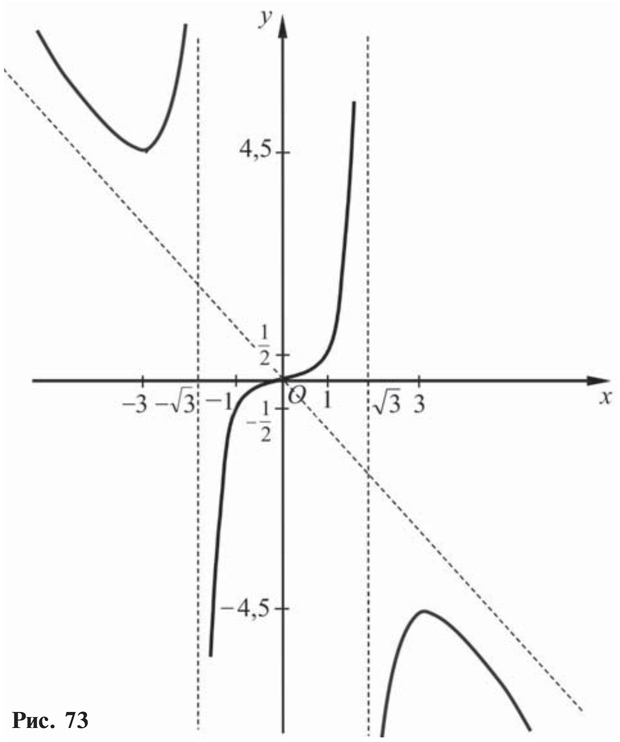


Рис. 73

Замечание 6. Функция $f(x) = \dfrac{x^3}{3-x^2}$ является нечетной и можно было ограничиться исследованием функции на множестве $[0; +\infty)$.

Вопросы и задания

1. Объяснить понятие бесконечной ветви кривой.
2. Что называется асимптотой бесконечной ветви кривой?
3. Что называется асимптотой кривой?
4. Какие асимптоты могут быть у кривой?
5. Сформулировать необходимое и достаточное условие существования у кривой вертикальной асимптоты.
6. Сформулировать необходимое и достаточное условие существования у кривой наклонной асимптоты.
7. Сформулировать необходимое и достаточное условие существования у кривой горизонтальной асимптоты.

8. Объяснить, что означает «кривая обращена на интервале выпуклостью вниз (вверх)».
9. Сформулировать достаточный признак выпуклости кривой на промежутке.
10. Какую точку кривой называют точкой перегиба?
11. Сформулировать необходимое условие существования точки перегиба.
12. Сформулировать достаточное условие существования точки перегиба.
13. Составить примерный план исследования функции и построения ее графика.

Упражнения

1. Найти асимптоты кривых, заданных уравнениями:

а) $y = \frac{x}{2-x}$; б) $y = \frac{x-1}{x^2} + 3$; в) $y = \frac{1}{(x-1)^2}$; г) $y = x + \frac{1}{x}$.

2. Исследовать направление выпуклости кривой $y = -x^2 + 1$.

3. Найти интервалы, в которых график функции $y = x^3 - 6x^2 + 1$ обращен выпуклостью вниз.

4. Найти точки перегиба графика функции:

а) $y = x^3 - 6x + 2$; б) $y = x^3 - 12x^2 + 26x + 18$.

5. Исследовать на выпуклость (вниз или вверх) и точки перегиба кривые с уравнениями:

а) $y = x^4 + 6x^2 - 5x + 3$; в) $y = \frac{x+1}{x^2+1}$;

б) $y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 8x$; г) $y = x^4 e^{-x}$.

6. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график, если:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$; в) $y = \frac{2x^2}{x^2+4}$; д) $y = x^2 e^{\frac{1}{x}}$;

б) $y = \frac{1}{5}x^5 - \frac{2}{3}x^3 + 1$; г) $y = x\sqrt{1-x}$; е) $y = x^2 \ln x$.

---

7. Найти асимптоты кривых, заданных уравнениями:

а) $y = \frac{x^4}{(x-2)^3}$; б) $y = \frac{x^2}{(x-1)^2}$;

в) $y = x - e^{-x}$; г) $y = 3x - \operatorname{arctg} x$.

8. Исследовать на выпуклость (вниз или вверх) и точки перегиба кривые с уравнениями:

а) $y = x^4 - 24x^2 + 70;$ в) $y = 6x^2 - x^4 + 15;$

б) $y = e^{\text{arctg}x};$ г) $y = x - \cos x.$

9. Исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график, если:

а) $y = \dfrac{x^2}{1-x^2};$ в) $y = \dfrac{x^3}{(x-1)^2};$

б) $y = x^4 - 4x^3 + 15;$ г) $y = x + e^{-x}.$

10. Сколько действительных корней имеет уравнение:

а) $x^4 - 4x^3 - 9 = 0;$ б) $x^2 - \dfrac{x^3}{3} - 1 = 0$?

Упражнения для повторения

1. Найти приращение функции $y = x^2$, соответствующее приращению Δx независимой переменной x. Вычислить Δy, если $x = 1$ и $\Delta x = 0{,}01$. Какова абсолютная погрешность значения Δy, если ограничиться членом, содержащим Δx в первой степени?

2. Найти приращения Δx и Δy в точке x_0, если:

а) $y = 4x^2 - 3x + 2$, $x_0 = 1$, $x = 1{,}01;$

б) $y = (x + 1)^3$, $x_0 = 0$, $x = 0{,}1.$

3. Выразить $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ через x_0 и Δx, если $f(x) = \sqrt{x} + 2$. Найти производную функции $f(x)$ в точке x_0 ($x_0 > 0$).

4. Пользуясь определением, найти производную функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = 2x^2 + 3x + 5;$ в) $f(x) = \dfrac{x+1}{x};$

б) $f(x) = (x + 2)^3;$ г) $f(x) = \dfrac{x^4+1}{x}.$

5. Доказать, что функция $y = 2(x + 3)^2$ дифференцируемая при любых значениях x.

6. Доказать, что функция $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ непрерывна и имеет производную в точке $x = 0$. Найти значение производной в этой точке.

7. Доказать, что функция $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$ непрерывна в точке $x = 0$, но не имеет производной в этой точке.

8. Найти производную функции $f(x)$ в точке x_0, если:

а) $f(x)=4x^3+3x^2+2x+1,\ \ x_0=1$;

б) $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\sin 22°,\ \ x_0=-1$;

в) $f(x)=(2x+1)\left(\sqrt{x}-1\right),\ \ x_0=4$;

г) $f(x)=\dfrac{x^3-1}{x^2+1},\ \ x_0=-3$.

9. Точка движется прямолинейно по закону $s(t)=\frac{4}{3}t^3-t+5$. Найти скорость точки в конце второй секунды (s выражено в метрах, t — в секундах).

10. Найти производную функций:

а) $y=\sqrt[3]{x}+2x^3$;

б) $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}+2\sqrt{x}$;

в) $y=(2x+3)^3$;

г) $y=\left(x+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$;

д) $y=\dfrac{x+2}{\sin x}$;

е) $y=3^{-x}\cdot\sin x$;

ж) $y=\left(x^2+1\right)\cdot\operatorname{arctg}x$;

з) $y=\sqrt[5]{x}+x\cdot\operatorname{tg}x-\log_3 x$;

и) $y=x\cdot\ln x\cdot(x+1)$;

к) $y=(1-x)\cdot\arcsin x$;

л) $y=10+\log_2 5+\cos 15°$;

м) $y=\operatorname{tg}x\cdot\cos x+7^x\cdot x^7$.

11. Вычислить значение $f'(x_0)$, если:

а) $f(x)=\dfrac{1}{\cos x},\ \ x_0=0$;

б) $f(x)=\dfrac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2},\ \ x_0=1$;

в) $f(x)=(x^2+3x)\cdot\ln x,\ x_0=1$;

г) $f(x)=e^x\cdot(x-\ln 2),\ \ x_0=\ln 2$.

12. Решить уравнение $f'(x) = 0$, если:

а) $f(x)=\frac{1}{4}x^4-8x^2+3$;

б) $f(x)=x^{10}-80x$;

в) $f(x)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x-\sin x+5$;

г) $f(x)=8x-\dfrac{2^x}{\ln 2}$.

13. Определить множество значений x, при которых $f'(x) > 0$, если:

а) $f(x) = x \cdot \ln 27 - 3^x$; б) $f(x) = \sin x - 2x$.

14. Прямолинейное движение точки происходит в соответствии с формулой $s(t) = \frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{2}t^2 + 2t$. В какие моменты времени скорость точки равнялась нулю?

15. Составить уравнения касательной и нормали к гиперболе $y = \frac{1}{x}$ в точке с абсциссой $x = -\frac{1}{2}$.

16. На параболе $y = x^2$ взяты две точки с абсциссами $x = 1$ и $x = 3$. Через эти точки проведена секущая. В какой точке параболы касательная к ней будет параллельна проведенной секущей?

17. Составить уравнение нормали к линии $y = -\sqrt{x} + 2$ в точке ее пересечения с биссектрисой первого координатного угла.

18. Точка движется прямолинейно по закону $s(t) = \frac{2}{9} \cdot \sin\frac{\pi t}{2} + 3$. Найти ускорение точки в конце первой секунды (s выражено в сантиметрах, t — в секундах).

19. Точка движется прямолинейно по закону $s = \sqrt{t}$. Доказать, что это движение является замедленным и что ускорение a пропорционально кубу скорости v точки.

20. Найти $f^{(4)}(0)$, если:

а) $f(x) = x^6 - 4x^3 + 4$; б) $f(x) = (x + 10)^6$.

21. Найти $y''(x)$, если $y(x) = \cos^2 x$.

22. Вычислить приближенные значения:

а) $\sin 91°$; б) $\cos 91°$; в) $\sqrt{8,98}$; г) $1,004^{100}$.

23. Найти дифференциал функции:

а) $y = e^{3x}$; г) $y = \operatorname{arctg} 2x$; ж) $y = \frac{\ln x}{x}$;

б) $y = \sin(3x + 2)$; д) $y = e^{\sin x}$; з) $y = x^2 \cdot \cos x \cdot e^x$.

в) $y = \frac{x-2}{x^2+1}$; е) $y = (2x + 1)^4$;

24. Заданы функции $f(x) = e^{2x}$ и $g(x) = 4x + 2$. Задать формулой сложную функцию $F(x)$, если:

а) $F(x) = f(g(x))$; в) $F(x) = f(x)^{g(x)}$;

б) $F(x) = g(f(x))$; г) $F(x) = \sqrt{g(g(x))}$.

25. Найти производную функций:

а) $y = (x^2+1)^5$; д) $y = \ln\cos x$;

б) $y = \sqrt{5x-7}$; е) $y = \sqrt{\mathrm{tg}(2x-3)}$;

в) $y = \mathrm{arctg}(3x-4)$; ж) $y = \sin(\mathrm{arctg}2x)$;

г) $y = \sin^3 x + \cos^3 x$; з) $y = e^{\sin(\cos x)}$.

26. Найти производную функций:

а) $y = (x-2)^5(4x-7)^8$; в) $y = (\sin x)^{\sin x}$;

б) $y = \sqrt[4]{\frac{x-3}{x+3}}$; г) $y = x^{\mathrm{tg}\, x}$.

27. Определить интервалы возрастания и убывания функций:

а) $y = 2 + x - x^2$; в) $y = \frac{2x}{1+x^2}$; д) $y = 2x - \sin x$;

б) $y = 3x - x^3$; г) $y = \frac{\sqrt{x}}{x+100}$ $(x \geq 0)$; е) $y = \frac{x^2}{2^x}$.

28. Доказать следующие неравенства:

а) $\sin x > x - \frac{x^3}{6}$ при $x > 0$; в) $\sin x < x$ при $x > 0$;

б) $\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2}$ при $x > 0$; г) $\ln(1 + x) < x$ при $x > 0$.

29. Исследовать на экстремум функции:

а) $y = (x - 1)^3$; б) $y = (x - 1)^4$.

30. Найти экстремумы функций:

а) $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$; в) $y = \frac{2x}{1+x^2}$;

б) $y = x + \frac{1}{x}$; г) $y = \sqrt{2x - x^2}$.

31. Найти наименьшее и наибольшее значения функции:

а) $f(x) = 2^x$ на отрезке $[-1; 5]$;

б) $f(x) = x^2 - 4x + 6$ на отрезке $[-3; 10]$;

в) $f(x) = x + \frac{1}{x}$ на отрезке [0,01; 100];

г) $f(x) = \sqrt{5 - 4x}$ на отрезке [−1; 1];

д) $f(x) = \cos x$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$;

е) $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ на отрезке [−10; 10].

32. Найти наибольший объем конуса с данной образующей l.

33*. К реке шириной a м построен под прямым углом канал шириной b м. Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

34. Найти наклонные асимптоты кривых, заданных уравнениями:

а) $y = \frac{x^2}{x+1}$; б) $y = 3x + 5$; в) $y = x^2 + \frac{1}{x}$; г) $y = \sin x$.

35. Исследовать на выпуклость (вниз или вверх) и точки перегиба кривые с уравнениями:

а) $y = 3x^2 - x^3$; в) $y = \sqrt{1 + x^2}$;

б) $y = x + x^{\frac{5}{3}}$; г) $y = e^{-x^2}$.

36. Показать, что кривая $y = \frac{x+1}{x^2+1}$ имеет три точки перегиба, лежащие на одной прямой.

37. Исследовать заданную функцию и построить ее график, если:

а) $y = 3x - x^3$; г) $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$;

б) $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$; д) $y = \frac{x}{(1-x^2)^2}$;

в) $y = (x+1)(x-2)^2$; е) $y = (x-3)\sqrt{x}$.

П р и м е р 4. Рассмотрим функцию $f(x) \equiv 1$ на множестве $(-1;\ 0)\cup(0;\ 1)$ (т.е. на множестве, состоящем из двух промежутков). Легко проверить, что на этом множестве функции

$$F_1(x) = \begin{cases} x+1, & -1 < x < 0, \\ x, & 0 < x < 1, \end{cases} \qquad F_2(x) = \begin{cases} x, & -1 < x < 0, \\ x-2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

являются первообразными для $f(x)$. Если бы формула (1) задавала все первообразные, то разность между любыми двумя первообразными была бы постоянным числом:

$$\Phi(x) - F(x) = C\ .$$

Однако разность

$$F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} 1, & -1 < x < 0, \\ 2, & 0 < x < 1 \end{cases}$$

не является величиной постоянной.

Тем не менее, справедлива следующая теорема.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ имеет на данном промежутке первообразную $F(x)$, то любая другая ее первообразная на этом же промежутке может быть получена при некотором значении $C = C_0$ из формулы (1). Другими словами, формула $\Phi(x) = F(x) + C$ задает общий вид всех первообразных для $f(x)$ на одном промежутке.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть функция $f(x)$ имеет на данном промежутке D некоторую первообразную $F(x)$ и пусть $\Phi(x)$ — любая другая первообразная для $f(x)$ на этом же промежутке. Положим, $y(x) = \Phi(x) - F(x),\ \ x \in D$. Зафиксируем некоторую точку $x_0 \in D$. Тогда для любого $x \in D$ по формуле Лагранжа можно указать такое число c, заключенное между x и x_0, что

$$y(x) - y(x_0) = y'(c)(x - x_0)\,.$$

Но $y'(x) = (\Phi(x) - F(x))' = \Phi'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0,\ \ x \in D$. Поэтому и $y'(c) = 0$. Отсюда следует $y(x) = y(x_0)$. Следовательно, для всех x из промежутка D выполнено равенство $y(x) = y(x_0)$, т.е. функция $y(x) = \Phi(x) - F(x)$ сохраняет постоянное значение $C_0 = y(x_0)$. Таким образом, первообразную $\Phi(x)$ можно получить из формулы (1) при $C = C_0$.

На вопрос, всякая ли функция $f(x)$ имеет на данном множестве первообразную, в общем случае также нужно ответить отрицательно. Перед тем как привести соответствующий пример, сформулируем следующую теорему (доказываемую в курсе анализа).

Теорема 2 (о промежуточном значении производной). Если функция $F(x)$ имеет на некотором промежутке производную $f(x)$, которая в двух каких-либо точках $x = a$ и $x = b$ ($a < b$) этого промежутка принимает различные значения: $f(a) = A$ и $f(b) = B$, то эта производная на данном промежутке принимает и всякое промежуточное между A и B значение, т.е. для любого числа C (заключенного между A и B) найдется хотя бы одна точка x_0 на интервале $(a; b)$ такая, что $f(x_0) = C$.

Теперь рассмотрим следующий пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -2 < x < 0, \\ 1, & 0 \le x < 2. \end{cases}$$

Для $f(x)$ не существует первообразной на промежутке $(-2; 2)$, т.е. $f(x)$ не может служить производной ни для какой функции $F(x)$, поскольку функция $f(x)$, принимая на $(-2; 2)$ два различных значения (это -1 и 1), не принимает никаких промежуточных значений между -1 и 1.

2. Правила нахождения первообразных. При решении задач на нахождение первообразных заданных функций полезны следующие правила:

1) Если функция $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а функция $\Phi(x)$ — первообразная для $g(x)$, то функция $F(x) + \Phi(x)$ есть первообразная для $f(x) + g(x)$.

Действительно, так как $F'(x) = f(x)$, $\Phi'(x) = g(x)$, то

$$(F(x) + \Phi(x))' = F'(x) + \Phi'(x) = f(x) + g(x).$$

2) Если функция $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k — постоянное число, то функция $kF(x)$ есть первообразная для функции $kf(x)$.

Действительно, $(kF(x))' = kF'(x) = kf(x)$.

3) Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, а k и b — постоянные числа, причем $k \ne 0$, то функция $\frac{1}{k}F(kx + b)$ есть первообразная для функции $f(kx + b)$.

Действительно, по правилу вычисления производной сложной функции имеем

$$\left(\frac{1}{k}F(kx + b)\right)' = \frac{1}{k}F'(kx + b)(kx + b)' = \frac{1}{k}f(kx + b)k = f(kx + b).$$

П р и м е р 5. Найти одну из первообразных для

$$f(x) = x + \cos x.$$

Решение. Применяя правило 1), находим, что одной из первообразных для $f(x)$ является функция $F(x) = \frac{x^2}{2} + \sin x$, так как

$$F'(x) = \left(\frac{x^2}{2} + \sin x\right)' = x + \cos x = f(x).$$

Пример 6. Найти одну из первообразных для функции $f(x) = \cos(3x - 2)$.

Решение. По правилу 3) одной из первообразных для $f(x)$ является функция $F(x) = \frac{1}{3}\sin(3x - 2)$.

Пример 7. Для функции $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ найти первообразную, график которой проходит через точку $M(4;\ 5)$.

Решение. Первообразная для $f(x)$ имеет вид $F(x) = \sqrt{x} + C$. Координаты точки $M(4;\ 5)$ графика искомой первообразной должны удовлетворять уравнению $5 = \sqrt{4} + C$. Отсюда $C = 3$. Следовательно, $F(x) = \sqrt{x} + 3$.

В целях облегчения нахождения первообразных составляют таблицу первообразных для некоторых часто встречающихся функций. Ниже приводится таблица первообразных для некоторых функций:

Функция $f(x)$	k	x^{α} $(\alpha \neq -1)$	$\frac{1}{x}$	a^x $(a \neq 1,\ a > 0)$	e^x	$\cos x$	$\sin x$
Общий вид первообразных для $f(x)$	$kx+C$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\ln\lvert x\rvert + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	e^x+C	$\sin x+C$	$-\cos x+C$

продолжение

Функция $f(x)$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$\frac{1}{1+x^2}$
Общий вид первообразных для $f(x)$	$\mathrm{tg}x + C$	$-\mathrm{ctg}x + C$	$\mathrm{arctg}x + C$

Вопросы и задания

1. Что называется первообразной функцией от заданной функции?
2. Привести примеры функций, имеющих первообразную.
3. Что можно сказать об областях определения функции и ее первообразной?
4. Сформулировать теорему об общем виде всех первообразных для заданной функции.
5. Сформулировать основные правила нахождения первообразных.
6. Составить таблицу первообразных для нескольких простейших элементарных функций.

Упражнения

1. Доказать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на указанном промежутке:

а) $F(x) = x^4 + 1$, $\quad f(x) = 4x^3$, $\quad x \in (-\infty; +\infty)$;

б) $F(x) = 3 - \cos x$, $\quad f(x) = \sin x$, $\quad x \in (-\infty; +\infty)$;

в) $F(x) = x - \frac{1}{x}$, $\quad f(x) = \frac{x^2+1}{x^2}$, $\quad x \in (0; +\infty)$;

г) $F(x) = \sin^2 x$, $\quad f(x) = \sin 2x$, $\quad x \in (-\infty; +\infty)$;

д) $F(x) = x^2 + \operatorname{tg} 3x$, $\quad f(x) = 2x + \frac{3}{\cos^2 3x}$, $\quad x \in \left(-\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6}\right)$;

е) $F(x) = \sqrt{4 - x^2}$, $\quad f(x) = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, $\quad x \in (-2; 2)$.

2. Найти одну из первообразных для функции $f(x)$ на $(-\infty; +\infty)$:

а) $f(x) = 3x^2 + 1$; $\quad$ в) $f(x) = (\sin x + \cos x)^2$;

б) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x$; $\quad$ г) $f(x) = e^{-2x}$.

3. Для нижеследующих функций найти их производную и одну из первообразных:

а) $f(x) = \frac{1}{x^2}$; $\quad$ б) $f(x) = 2 - 3\sin x$.

4. Найти общий вид первообразных для функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = \frac{1}{2} - x^{10}$; $\quad$ в) $f(x) = 1 - \frac{1}{x^3}$;

б) $f(x) = 5x^4 + \cos x$; $\quad$ г) $f(x) = (2x - 3)^5$.

5. Для функции $f(x)$ найти первообразную $F(x)$, принимающую заданное значение в указанной точке:

а) $f(x) = x^2$, $F(0) = 2$; в) $f(x) = \frac{1}{x} + 1$, $F(e) = 1$;

б) $f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4$; г) $f(x) = \frac{1}{(2x-1)^2}$, $F(0) = \frac{3}{2}$.

6. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M, если:

а) $f(x) = 4\sin x$, $M(0; 0)$; в) $f(x) = 4x + \frac{1}{x^2}$, $M(-1; 4)$;

б) $f(x) = -x^3$, $M(0; 3)$; г) $f(x) = \frac{1}{x^3} - 10x^4 + 3$, $M(1; 5)$.

7. Точка движется по прямой с ускорением $a(t)$. В начальный момент t_0 ее координата равна x_0, а скорость ν_0. Найти координату $x(t)$ точки как функцию от времени, если:

а) $a(t) = 6t$, $t_0 = 0$, $\nu_0 = 1$, $x_0 = 3$;

б) $a(t) = \cos t$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$, $\nu_0 = 0$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

---

8. Доказать, что функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на указанном промежутке:

а) $F(x) = \ln x + \sin\frac{x}{3}$, $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}\cos\frac{x}{3}$, $x \in (0; +\infty)$;

б) $F(x) = \ln(-x)$, $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in (-\infty; 0)$;

в) $F(x) = x\sqrt{x} + 1$, $f(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$, $x \in (0; +\infty)$;

г) $F(x) = \cos^2 x$, $f(x) = -\sin 2x$, $x \in (-\infty; +\infty)$.

9. Найти общий вид первообразных для функции $f(x)$, если:

а) $f(x) = e^{3x-2}$; в) $f(x) = \frac{1}{\cos^2(5x-1)}$;

б) $f(x) = (4-5x)^7$; г) $f(x) = \frac{1}{1+4x^2}$.

10. Для функции $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M, если:

а) $f(x) = 1 - 2x,\ \ M(3; 2)$; в) $f(x) = \sin x + \cos x,\ M(\pi; 2)$;

б) $f(x) = x^3 + 2,\ \ M(2; 15)$; г) $f(x) = \cos(2x - 3),\ M\left(\frac{3}{2}; 0\right)$.

11. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой $v(t) = t^2 + 2t - 1$. Записать формулу ее координаты $x(t)$, если в начальный момент времени $t = 0$ точка находилась в начале координат.

12. Точка движется прямолинейно с ускорением $a(t) = 12t^2 + 4$. Найти закон движения точки, если в момент времени $t = 1$ ее скорость равна 10, а координата равна 12.

§ 2. Неопределенный интеграл

1. Понятие неопределенного интеграла. В § 1 этой главы мы ввели понятие первообразной функции для данной функции $f(x)$. Теперь введем следующее определение.

Определение. Совокупность всех первообразных функций для данной функции $f(x)$ на множестве D называется *неопределенным интегралом* от этой функции на D.

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ на D обозначается с помощью символа

$$\int f(x)dx$$

(читается: «неопределенный интеграл от эф икс дэ икс»). Символ $\int$ называется *знаком неопределенного интеграла*, символ $f(x)dx$ называется *подынтегральным выражением*, $f(x)$ называется *подынтегральной функцией*, а x — *переменной интегрирования*.

Исходя из теоремы 1 предыдущего параграфа и данного определения мы можем записать (на заданном промежутке) следующее равенство:

$$\int f(x)dx = F(x) + C\ ,$$

где $F(x)$ — любая из первообразных функций для $f(x)$ на рассматриваемом промежутке, а C — произвольная постоянная.

Итак, чтобы найти неопределенный интеграл от данной функции $f(x)$ на заданном промежутке, достаточно найти какую-либо ее первообразную $F(x)$ и составить сумму $F(x) + C$, где C — произвольная постоянная.

Пример 1. а) $\int 3x^2 dx = x^3 + C$ на $(-\infty; +\infty)$;

б) $\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \sqrt{x} + C$ на $(0; +\infty)$.

2. Простейшие свойства неопределенных интегралов. Из определения неопределенного интеграла вытекают следующие его простейшие свойства:

1) $d\int f(x)dx = f(x)dx$ (т.е. дифференциал от неопределенного интеграла равен подинтегральному выражению);

2) $\int dF(x) = F(x) + C$, в частности, $\int dx = x + C$ (т.е. неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции с точностью до постоянного слагаемого);

3) $\int Af(x)dx = A\int f(x)dx$, где A — некоторая постоянная, $A \neq 0$, а $f(x)$ — функция, имеющая первообразную (т.е. постоянный множитель можно выносить за знак неопределенного интеграла);

4) если функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ имеют первообразные, то

$$\int [f_1(x) + f_2(x) + ... + f_n(x)]dx =$$
$$= \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx + ... + \int f_n(x)dx$$

(т.е. неопределенный интеграл от суммы нескольких функций равен сумме неопределенных интегралов от отдельных слагаемых).

Докажем, например, свойство 3). Пусть $F(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$ на заданном промежутке. Тогда $\int f(x)dx = F(x) + C$, где C — произвольная постоянная. Поэтому

$$A\int f(x)dx = A(F(x) + C) = AF(x) + AC = AF(x) + C_1, \quad (1)$$

где $C_1 = AC$ — снова произвольная постоянная (так как $A \neq 0$).

Поскольку $(AF(x))' = AF'(x) = Af(x)$, то $AF(x)$ — одна из первообразных для функции $Af(x)$ и, следовательно,

$$\int Af(x)dx = AF(x) + C_1. \quad (2)$$

Сравнивая (1) и (2), мы получаем требуемое равенство

$$\int Af(x)dx = A\int f(x)dx.$$

Доказательство остальных свойств предоставляем читателю.

Пример 2. Вычислить $\int (3x^2 + \cos x - e^x + 5)dx$.

Решение. Применяя свойства 2)—4), находим

$$\int (3x^2 + \cos x - e^x + 5)dx = \int 3x^2 dx + \int \cos x dx + \int (-e^x)dx + \int 5dx =$$
$$= x^3 + C_1 + \sin x + C_2 - \int e^x dx + 5\int dx = x^3 + C_1 + \sin x + C_2 - e^x -$$
$$-C_3 + 5x + 5C_4 = x^3 + \sin x - e^x + 5x + C,$$

где $C = C_1 + C_2 - C_3 + 5C_4$.

3. Таблица простейших неопределенных интегралов. В целях облегчения вычисления неопределенных интегралов составляют таблицу выражений для некоторых часто употребляемых простейших интегралов. Отметим, что нет строгого критерия в отношении того, какие интегралы считать табличными. Мы отнесем в эту таблицу следующие неопределенные интегралы:

1) $\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, где α — любое действительное число, $\alpha \neq -1$;

2) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \quad (x \neq 0)$;

3) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0,\ a \neq 1)$;

4) $\int e^x dx = e^x + C$;

5) $\int \cos x dx = \sin x + C$;

6) $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

7) $\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C \quad \left(x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z\right)$;

8) $\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq \pi n,\ n \in Z)$;

9) $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C \quad (|x| < 1)$;

10) $\int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$;

11) $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C \quad (a \neq 0,\ x \neq \pm a)$;

12) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a}}\,dx = \ln\left|x+\sqrt{x^2+a}\right| + C \quad (a \neq 0,\ x \neq \pm\sqrt{-a})$.

4. Простейшие методы интегрирования. В современной математике не существует единого, общего и удобного на практике метода интегрирования. Поэтому приходится создавать частные методы интегрирования, которые хотя в отдельности и недостаточно эффективны, но в совокупности позволяют вычислить интегралы во многих случаях.

а) *Метод непосредственного интегрирования.*

Вычисление неопределенных интегралов с помощью применения основных свойств неопределенных интегралов и таблицы простейших интегралов называют непосредственным интегрированием. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 3. Вычислить $\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + 4^x + 5)dx$.

Решение. Имеем

$$\int (\sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2} + 4^x + 5)dx = \int (x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{2}{3}} + 4^x + 5)dx =$$

$$= \int x^{\frac{1}{2}}dx - \int x^{\frac{2}{3}}dx + \int 4^x dx + \int 5dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + \frac{4^x}{\ln 4} + 5x + C.$$

Пример 4. Вычислить $\int \frac{2+\sqrt{x}+x^2}{\sqrt[3]{x}}dx$.

Решение. Имеем

$$\int \frac{2+\sqrt{x}+x^2}{\sqrt[3]{x}}dx = \int \frac{2+x^{\frac{1}{2}}+x^2}{x^{\frac{1}{3}}}dx = 2\int x^{-\frac{1}{3}}dx + \int x^{\frac{1}{6}}dx + \int x^{\frac{5}{3}}dx =$$

$$= 3x^{\frac{2}{3}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + \frac{3}{8}x^{\frac{8}{3}} + C.$$

Пример 5. Вычислить $\int \mathrm{tg}^2 x dx$.

Решение. Так как $\mathrm{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$, то

$$\int \mathrm{tg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int dx = \mathrm{tg} x - x + C .$$

б) *Метод подстановки* (или *метод замены переменных*).

Данный метод основан на одной теореме, которую мы изложим ниже. Пусть $F(u)$ — некоторая первообразная для функции $f(u)$ на заданном промежутке D. Тогда

$$\int f(u) du = F(u) + C . \qquad (3)$$

Пусть теперь $u = \varphi(x)$ — какая-либо функция, имеющая на некотором промежутке D_1 производную, причем значения данной функции принадлежат D. Тогда существуют сложные функции $f(\varphi(x))$ и $F(\varphi(x))$. При этом дифференциал

$$dF(\varphi(x)) = dF(u) = F'(u)du = f(u)du = f(\varphi(x))\varphi'(x)dx .$$

На основании определения неопределенного интеграла и свойства 2) имеем

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int dF(\varphi(x)) = F(\varphi(x)) + C . \qquad (4)$$

Равенство (4) выражает следующую теорему.

Теорема (о подстановке под знаком неопределенного интеграла). Соотношение (3) сохраняется, если в обе его части внести вместо u некоторую функцию $\varphi(x)$, имеющую на промежутке D_1 производную и принимающую значения, не выходящие из промежутка D.

Формулу (4) можно переписать следующим образом:

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = \int f(u)du = F(u) + C . \qquad (5)$$

Схема применения формулы (5) (метода подстановки или метода замены переменных с помощью функции $u = \varphi(x)$) на практике состоит в следующем. Пусть надо вычислить $\int g(x)dx$, который не вычисляется методом непосредственного интегрирования. Тогда, желая применить метод подстановки, данный интеграл представляют (если это возможно) в виде

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) ,$$

т.е. в виде $\int f(u)du$, где $u = \varphi(x)$. Затем вычисляется $\int f(u)du$ как функция от u, а после применяется формула (5). При этом функция $\varphi(x)$ подбирается с таким расчетом, чтобы $\int f(u)du$

вычислялся легче, чем интеграл $\int g(x)dx$, рассматриваемый как функция от x.

Пример 6. Вычислить $\int \cos 3x dx$.

Данный интеграл похож на табличный. Но в табличном интеграле $\int \cos x dx$ переменная интегрирования x и аргумент функции $\cos x$ совпадают. В нашем случае переменная интегрирования — это x, а аргумент подинтегральной функции равен $3x$. Поступим так, чтобы в подинтегральном выражении дифференциал был записан от $3x$. Именно,

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos 3x d(3x).$$

Полагая теперь $u = \varphi(x) = 3x$, будем согласно (5) иметь

$$\int \cos 3x dx = \frac{1}{3}\int \cos u du = \frac{1}{3}\sin u + C = \frac{1}{3}\sin 3x + C.$$

Пример 7. Вычислить $\int \frac{x^2 dx}{1+x^6}$.

Заметим, что $d(x^3) = 3x^2 dx$, $x^6 = (x^3)^2$. Положим, $x^3 = u = \varphi(x)$. Тогда из (5) находим

$$\int \frac{x^2 dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{3x^2 dx}{1+x^6} = \frac{1}{3}\int \frac{d(x^3)}{1+(x^3)^2} = \frac{1}{3}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{3}\operatorname{arctg} x^3 + C.$$

Пример 8. Вычислить $\int \operatorname{ctg} x dx$.

Имеем $\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx$. Так как $d\sin x = \cos x dx$, то положим $\sin x = u$. Тогда

$$\int \operatorname{ctg} x\, dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \int \frac{d\sin x}{\sin x} = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C = \ln|\sin x| + C.$$

Пример 9. Вычислить $\int \frac{dx}{x^2-a^2}$.

Справедливо равенство $\frac{1}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)$. Поэтому

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right)dx = \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x-a} - \frac{1}{2a}\int \frac{dx}{x+a} =$$

$$= \frac{1}{2a}\int\frac{d(x-a)}{x-a} - \frac{1}{2a}\int\frac{d(x+a)}{x+a} = \frac{1}{2a}\ln|x-a| - \frac{1}{2a}\ln|x+a| + C.$$

П р и м е р 10. Вычислить $\int\cos^2 xdx$.

Так как $\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$, то

$$\int\cos^2 xdx = \frac{1}{2}\int dx + \frac{1}{2}\int\cos 2xdx = \frac{1}{2}x + C_1 + \frac{1}{4}\int\cos 2xd(2x) =$$
$$= \frac{1}{2}x + C_1 + \frac{1}{4}\sin 2x + C_2 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C.$$

Замечание. Способ подстановки, основанный на использовании формулы (5), состоит в применении теоремы о подстановке к некоторому вспомогательному интегралу $\int f(u)du$. Однако часто эту теорему применяют к самому интегралу $\int g(x)dx$, который нужно вычислить. При этом полагают $x = \psi(u)$, где $\psi(u)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы о подстановке и, кроме того, имеет обратную функцию $u = \varphi(x)$. Затем получают (по теореме о подстановке) равенство

$$\int g(x)dx = \int g(\psi(u))\psi'(u)du,$$

вычисляют последний интеграл и в полученном результате подставляют вместо u функцию $\varphi(x)$.

П р и м е р 11. Вычислить $\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt[3]{x})}$.

Положим, $x = \psi(u) = u^6$, где показатель 6 выбран как наименьшее общее кратное показателей радикалов $\sqrt{x}$ и $\sqrt[3]{x}$. При этом считаем, что $u > 0$, тогда $x = u^6$ будет монотонной функцией от u, а ее обратная функция будет иметь вид: $u = \sqrt[6]{x}$. Имеем

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x}\cdot(1+\sqrt[3]{x})} = \int\frac{d(u^6)}{u^3(1+u^2)} = 6\int\frac{u^5du}{u^3(1+u^2)} = 6\int\frac{u^2du}{1+u^2} = 6\int\left(1 - \frac{1}{1+u^2}\right)du =$$
$$= 6u - 6\operatorname{arctg} u + C = 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg}\sqrt[6]{x} + C.$$

в) *Метод интегрирования по частям.*

Этот метод основан на тождестве

$$d(uv) = udv + vdu \quad \text{или же} \quad vdu = d(uv) - udv,$$

где $u = f(x)$, $v = g(x)$ — две функции, имеющие на данном промежутке производные, причем такие, что существует интеграл $\int f(x)g'(x)dx$, т.е. $\int udv$. Из этого условия следует, что существует также $\int vdu$ и $\int vdu = \int [d(uv) - udv] = \int d(uv) - \int udv$. Тогда $\int udv = \int d(uv) - \int vdu$. Так как $\int d(uv) = uv + C$, то окончательно получим

$$\int udv = uv - \int vdu. \qquad (6)$$

(постоянная C включена в знак $\int vdu$).

Формула (6) носит название *формулы интегрирования по частям*. Метод интегрирования, основанный на ее применении, называется *методом интегрирования по частям*. Он сводит вычисление интеграла $\int udv$ к вычислению интеграла $\int vdu$ (обычно более простого).

Пример 12. Вычислить $\int xe^x dx$.

Представим подинтегральное выражение $xe^x dx$ в виде udv, где u, v — некоторые функции от x (причем эти функции выбираем так, чтобы $\int vdu$ был проще для вычисления, чем исходный интеграл $\int udv$). Положим, $u = x$, $v = e^x$. Тогда $xe^x dx = x\,de^x = u\,dv$. Согласно (6) находим

$$\int xe^x dx = \int xde^x = \int udv = uv - \int vdu = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C.$$

Пример 13. Вычислить $\int \ln xdx$.

Здесь в подинтегральном выражении явно записана только одна функция — это $\ln x$. Однако мы уже имеем интеграл вида $\int udv$, где $u = \ln x$, $v = x$. Поэтому можем сразу применить формулу (6). Откуда

$$\int \ln xdx = \int udv = uv - \int vdu = x\ln x - \int xd\ln x = x\ln x - \int x(\ln x)'dx =$$
$$= x\ln x - \int x\frac{1}{x}dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

Метод интегрирования по частям не всегда удобен для применения. Умение пользоваться этим методом зависит от наличия опыта. Отметим также, что в некоторых случаях при вычислении одного и того же интеграла возникает необходимость несколько раз применять метод интегрирования по частям, чтобы в результате получить более простой для вычисления интеграл.

Вопросы и задания

1. Что называется неопределенным интегралом от заданной функции?
2. Сформулировать простейшие свойства неопределенных интегралов.
3. Написать таблицу простейших неопределенных интегралов.
4. Какие простейшие методы интегрирования применяются при вычислении неопределенных интегралов?
5. Привести по одному примеру на применение каждого из простейших методов интегрирования.

Упражнения

1. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int \sin x dx$; г) $\int \frac{dx}{x+1}$; ж) $\int \cos(3x-4)dx$;

б) $\int 5x^4 dx$; д) $\int \frac{dx}{x^2}$; з) $\int \frac{dx}{\cos^2 3x}$.

в) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$; е) $\int \cos 2x dx$;

2. Вычислить следующие интегралы:

а) $\int (x - \sin x)dx$; в) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}} dx$; д) $\int (x^2+1)^3 dx$;

б) $\int \left(\sqrt{x} - \frac{1}{x}\right)dx$; г) $\int \left(e^x - \cos\frac{x}{2}\right)dx$; е) $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$.

3. Вычислить интегралы:

а) $\int \frac{x^3+x+2}{x^2+1} dx$; в) $\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)}$; д) $\int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx$;

б) $\int \frac{\sqrt{x^3}-8}{\sqrt{x}-2} dx$; г) $\int \frac{\cos 2x}{\cos x - \sin x} dx$; е) $\int \frac{dx}{x(x+1)}$.

4. Пользуясь методом подстановки, вычислить интегралы:

а) $\int (x+1)^{100}\,dx$; в) $\int \sqrt{3x+4}\,dx$; д) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

б) $\int \frac{dx}{1-2x}$; г) $\int \frac{dx}{2^{3x+1}}$; е) $\int \frac{xdx}{1+x^2}$.

5. Пользуясь простейшими методами интегрирования, вычислить интегралы:

а) $\int \sin x \cos x dx$; в) $\int x \cos x dx$;

б) $\int \mathrm{ctg} x\, dx$; г) $\int x \ln x dx$.

---

6. Вычислить неопределенные интегралы:

а) $\int (\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} + 1)dx$; г) $\int e^{-x} dx$; ж) $\int \cos \frac{x+3}{5}\, dx$;

б) $\int \frac{\sqrt{x}+1}{x}\, dx$; д) $\int \sin \frac{x}{4}\, dx$; з) $\int \frac{x^2+3}{x^2+1}\, dx$.

в) $\int (x+2)^{15}\, dx$; е) $\int \cos(5x-7)dx$;

7. Вычислить следующие интегралы от тригонометрических функций:

а) $\int \mathrm{tg} x dx$; г) $\int \cos^3 x dx$; ж) $\int \left(\sin\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2}\right)^2 dx$;

б) $\int \cos^2 x dx$; д) $\int \sin^3 x dx$; з) $\int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^4 x}$.

в) $\int \sin^2 x dx$; е) $\int (\sin x + \cos x)^2\, dx$;

8. Пользуясь методом интегрирования по частям, вычислить интегралы:

а) $\int x \,\mathrm{arctg} x dx$; в) $\int x \sin x dx$;

б) $\int x^2 e^x dx$; г) $\int x^2 \ln x dx$.

§ 3. Понятие определенного интеграла

1. Площадь криволинейной трапеции. Пусть на отрезке $[a;\ b]$ задана непрерывная и неотрицательная функция $f(x)$ (т.е. $f(x) \geq 0,\ x \in [a;\ b]$). Фигуру, ограниченную графиком функции $f(x)$, отрезком $[a;\ b]$ оси OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 74, *а, б, в, г*), называют *криволинейной трапецией*.

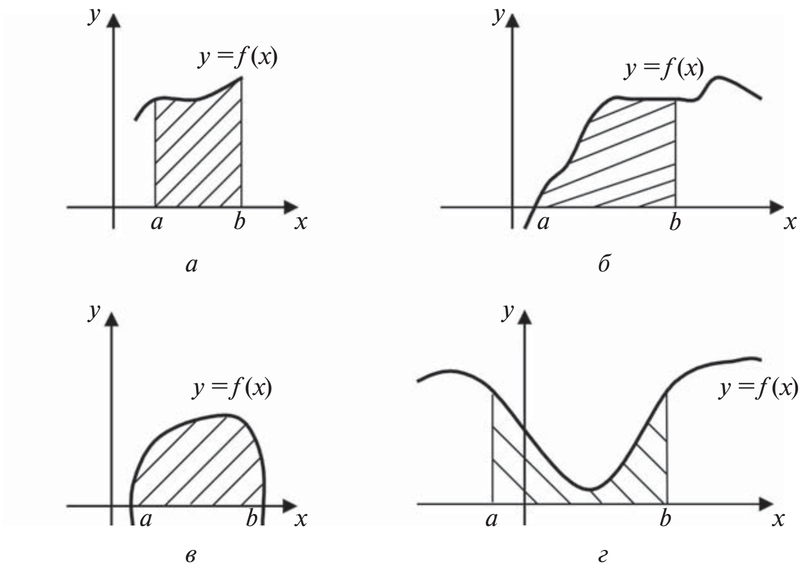


Рис. 74

Рассмотрим вопрос о вычислении площади криволинейной трапеции. Для вычисления площадей криволинейных трапеций применяется следующая теорема:

Теорема 1. Пусть $f(x)$ — непрерывная и неотрицательная на отрезке $[a;\ b]$ функция, а $F(x)$ — ее первообразная на этом отрезке. Тогда площадь S соответствующей криволинейной трапеции равна приращению первообразной $F(x)$ на отрезке $[a;\ b]$, т.е.

$$S = F(b) - F(a). \quad (1)$$

Доказательство. Введем в рассмотрение следующую функцию аргумента x. Пусть $S(x)$ — площадь той части криволинейной трапеции, которая расположена левее вертикальной

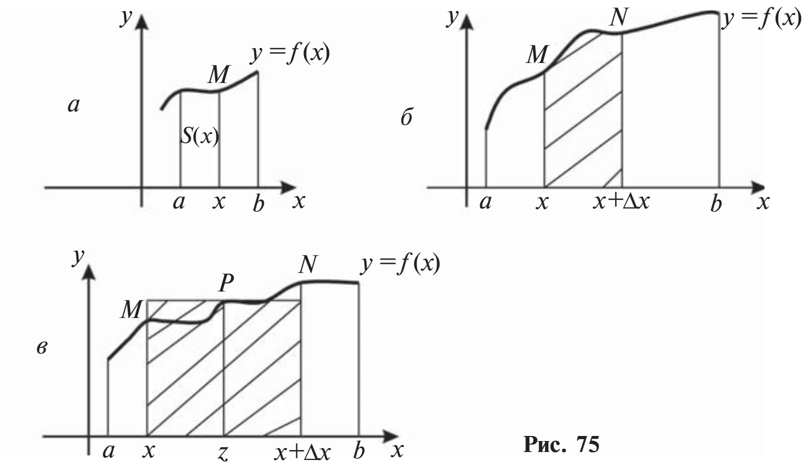


Рис. 75

прямой, проходящей через точку M с абсциссой x (рис. 75, *а*). Ясно, что функция $S(x)$ определена на отрезке $[a; b]$, причем $S(a) = 0$, а $S(b) = S$ — площадь самой криволинейной трапеции.

Докажем, что функция $S(x)$ имеет производную на $[a; b]$, причем $S'(x) = f(x)$, $x \in [a; b]$ (на концах a и b отрезка под $S'(x)$ понимается односторонняя производная).

Имеем $\Delta S(x) = S(x + \Delta x) - S(x)$ — приращение функции $S(x)$. Пусть $\Delta x > 0$. Тогда геометрически $\Delta S(x)$ означает площадь той части криволинейной трапеции, которая находится между вертикальными прямыми, проходящими через точки M с абсциссой x и N с абсциссой $x + \Delta x$ (рис. 75, *б*). Возьмем теперь прямоугольник той же площади $\Delta S(x)$, опирающийся на отрезок $[x; x + \Delta x]$ (рис. 75, *в*)). В силу непрерывности функции $f(x)$ верхняя сторона прямоугольника будет пересекать график этой функции в некоторой точке P с абсциссой z, $z \in [x; x + \Delta x]$. Так как высота такого прямоугольника равна $f(z)$, а длина равна Δx, то $\Delta S(x) = f(z)\Delta x$. Отсюда $\dfrac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(z)$ (полученная формула остается верной и при $\Delta x < 0$).

Поскольку $z \in [x; x + \Delta x]$, то $z \to x$ при $\Delta x \to 0$. Тогда из непрерывности функции $f(x)$ следует, что $f(z) \to f(x)$ при $\Delta x \to 0$. Следовательно, при $\Delta x \to 0$ существует предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta S(x)}{\Delta x} = f(x),$$

который и означает по определению производной, что $S'(x) = f(x)$.

Таким образом, функция $S(x)$ является первообразной для $f(x)$ на $[a; b]$. Так как $F(x)$ тоже является первообразной для $f(x)$ на $[a; b]$, то $S(x) = F(x) + C$, где C — некоторая постоянная. Для нахождения C подставим $x = a$. Имеем $S(a) = F(a) + C$ или $0 = F(a) + C$. Откуда $C = -F(a)$, а $S(x) = F(x) - F(a)$.

Далее, площадь S криволинейной трапеции равна $S(b)$. Поэтому, подставляя $x = b$ в последнюю формулу, получим $S(b) = F(b) - F(a)$, или

$$S = F(b) - F(a).$$

Пример 1. Вычислить площадь S криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x) = x^2$, прямыми $x = 1$, $x = 2$ и $y = 0$ (рис. 76).

Для функции $f(x) = x^2$ одной из первообразных является функция $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Поэтому

$$S = F(2) - F(1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

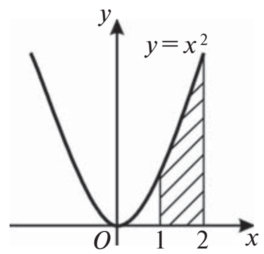


Рис. 76

Замечание 1. В § 1 настоящей главы было показано, что не всякая функция имеет первообразную. Однако если функция является непрерывной на отрезке, то она обязательно обладает первообразной. Разъяснение этого факта дает только что доказанная теорема 1, в которой для непрерывной (неотрицательной) функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ была найдена ее первообразная $S(x)$.

2. Понятие определенного интеграла. Формула Ньютона—Лейбница. Рассмотрим теперь другой подход к задаче вычисления площади криволинейной трапеции. Снова будем считать, что $f(x)$ непрерывная, неотрицательная функция на отрезке $[a; b]$. Тогда площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно приближенно подсчитать следующим образом.

Разобьем отрезок $[a; b]$ на n отрезков одинаковой длины с помощью точек $x_0, x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n$, где $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$, и пусть $\Delta x = \frac{b-a}{n} = x_k - x_{k-1}$, $k = 1, 2, ..., n$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$ как на основании построим пря-

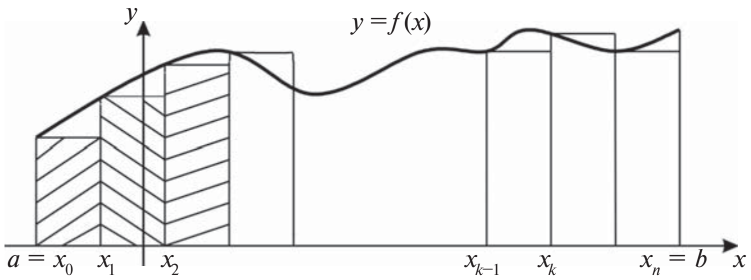


Рис. 77

моугольник с высотой $f(x_{k-1})$. Площадь этого прямоугольника будет равна

$$f(x_{k-1})\Delta x = \frac{b-a}{n} f(x_{k-1}),$$

а сумма площадей всех таких прямоугольников (рис. 77) будет равна

$$S_n = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})).$$

В силу непрерывности функции $f(x)$ объединение всех прямоугольников при достаточно большом n (т.е. при малом Δx) представляет собой фигуру, «почти совпадающую» с данной криволинейной трапецией. Можно доказать, что площадь S_n этой фигуры при $n \to \infty$ стремится к числу S (т.е. площади криволинейной трапеции). Более того, для любой непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$ (необязательно неотрицательной) выражение вида S_n при $n \to \infty$ всегда стремится к некоторому числу. Это число по определению называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$, т.е.

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int\limits_a^b f(x)dx$$

(читается: «интеграл от a до b эф от икс дэ икс»).

Числа a и b называются соответственно *нижним и верхним пределами интегрирования*. Знак $\int\limits_a^b$ называют *знаком определен-*

ного интеграла, функция $f(x)$ называется *подинтегральной функцией*, а x — *переменной интегрирования*.

Итак, если $f(x)$ — непрерывная, $f(x) \geq 0$ на $[a; b]$, то площадь S соответствующей криволинейной трапеции можно выразить формулой

$$S = \int_a^b f(x)dx\,. \tag{2}$$

Сравнивая формулы (1) и (2) для площади криволинейной трапеции, заключаем, что если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$ на $[a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)\,. \tag{3}$$

Формула (3) называется *формулой Ньютона—Лейбница*. Она остается справедливой для любой непрерывной (не обязательно неотрицательной) функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Для удобства записи разность $F(b) - F(a)$ принято сокращенно обозначать в виде $F(x)\big|_a^b$, т.е. $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$.

Пример 2. Вычислить $\int_{-2}^{2} x^3 dx$.

Решение. Для функции x^3 одной из первообразных является функция $\frac{x^4}{4}$. Поэтому

$$\int_{-2}^{2} x^3 dx = \frac{x^4}{4}\bigg|_{-2}^{2} = \frac{2^4}{4} - \frac{(-2)^4}{4} = 4 - 4 = 0\,.$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx$.

Решение. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\, dx = \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \sin\frac{\pi}{2} - \sin 0 = 1 - 0 = 1\,.$

Пример 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - 2x$ и $y = 4 - x^2$.

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения графиков заданных функций (рис. 78) из уравнения $4 - 2x = 4 - x^2$.

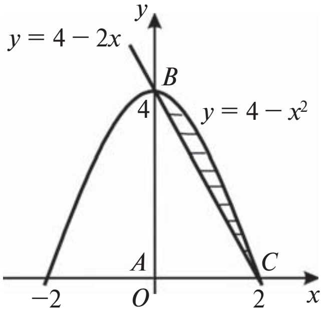


Рис. 78

Решая его, находим $x = 0$ и $x = 2$. Искомая площадь может быть получена как разность площадей криволинейной трапеции с вершинами в точках A, B, C и треугольника ABC. Имеем

$$S_{\text{трапеции}} = \int_0^2 (4 - x^2)dx = \left(4x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 =$$

$$= \left(4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(4 \cdot 0 - \frac{0}{3}\right) = 8 - \frac{8}{3} = \frac{16}{3},$$

$$S_{\text{треугольника}} = \int_0^2 (4 - 2x)dx = (4x - x^2)\Big|_0^2 =$$

$$= (4 \cdot 2 - 2^2) - (4 \cdot 0 - 0) = 8 - 4 = 4.$$

Следовательно, искомая площадь равна $S = \frac{16}{3} - 4 = \frac{4}{3}$.

Формула Ньютона–Лейбница выражает следующий важный факт: *определенный интеграл на* $[a; b]$ *от непрерывной на этом отрезке функции* $f(x)$ *равен разности значений любой первообразной функции для* $f(x)$*, вычисленных при верхнем и нижнем пределах* b *и* a *интеграла*. Следовательно, формула Ньютона-Лейбница сводит вычисление определенного интеграла к нахождению одной из первообразных функций для подынтегральной функции.

Выше мы определили интеграл $\int_a^b f(x)dx$ как предел некоторой последовательности S_n (сумм площадей прямоугольников). Вычисление определенного интеграла непосредственно с помощью этого определения (т.е. как $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$) обычно связано с большими затруднениями. Формула Ньютона–Лейбница освобождает нас от выполнения сложных операций типа: образования суммы S_n, вычисления ее предела. Формула (3) дает более удобный способ вычисления определенного интеграла (через отыскание первообразной от подынтегральной функции).

Замечание 2. Удобно также расширить понятие определенного интеграла, полагая по определению при $a \geq b$, что

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx .$$

При таком соглашении формула Ньютона—Лейбница оказывается справедливой при любых значениях a и b. В частности, будем иметь $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. Приближенное вычисление определенных интегралов. В предыдущем пункте мы видели, что если известна какая-либо первообразная для непрерывной на $[a; b]$ функции $f(x)$, то определенный интеграл от этой функции может быть вычислен по формуле Ньютона—Лейбница. Однако в ряде случаев невозможно выразить первообразную (даже если она существует) для функции $f(x)$ через известные элементарные функции в конечном виде. В этих случаях формула Ньютона—Лейбница оказывается малополезной. Вычисление же определенного интеграла непосредственно по определению (через предел) связано с большими трудностями. В таких случаях прибегают к приближенному вычислению определенных интегралов.

Существует много различных способов приближенного вычисления определенных интегралов. Здесь мы рассмотрим два из них: способ прямоугольников и способ трапеций.

В пункте 1 мы рассмотрели один способ вычисления площади криволинейной трапеции. С этой целью отрезок $[a; b]$ был разбит на n отрезков одинаковой длины $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ точками $x_0, x_1, ..., x_{n-1}, x_n$. На каждом из отрезков $[x_{k-1}; x_k]$, $k = 1, 2, ..., n$ как на основании были построены прямоугольники высотой $f(x_{k-1})$. Сумма площадей всех прямоугольников имела вид

$$S_n = \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})) .$$

Так как по определению

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{\Delta x\to 0} S_n ,$$

то в качестве приближенного значения интеграла естественно взять сумму S_n, т.е. положить $\int_a^b f(x)dx \approx S_n$ (чем больше n, тем приближенное равенство точнее). Таким образом,

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}(f(x_0) + f(x_1) + ... + f(x_{n-1})). \qquad (4)$$

Это приближенное равенство называется *формулой прямоугольников*. Способ приближенного вычисления определенного интеграла с помощью формулы (4) носит название *способа прямоугольников*.

Рассмотрим теперь другую сумму:

$$S_n = \frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \cdot \frac{b-a}{n} + \ ... \ + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2} \cdot \frac{b-a}{n}.$$

С геометрической точки зрения эта сумма означает площадь фигуры, составленной из n обычных трапеций с высотой $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ и основаниями $f(x_0)$ и $f(x_1)$, $f(x_1)$ и $f(x_2)$, ..., $f(x_{n-1})$ и $f(x_n)$ (рис. 79).

Геометрически очевидно, что площадь такой фигуры даже точнее выражает площадь криволинейной трапеции, нежели площадь фигуры ранее построенной с помощью способа прямоугольников. Поэтому площадь криволинейной трапеции (а значит, и определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$) можно принять

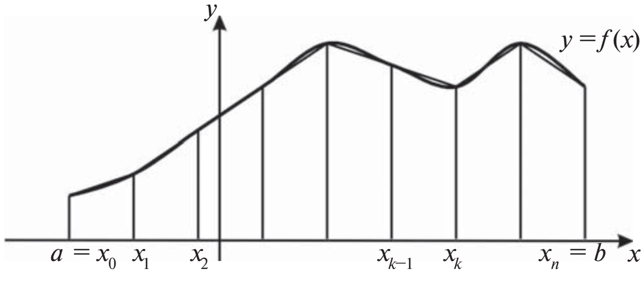


Рис. 79

приближенно равной (при большом n) площади фигуры, составленной из указанных n трапеций, т.е.

$$S=\int_a^b f(x)dx \approx S_n=\frac{b-a}{n}\left(\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2}+\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}+\ldots+\frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right)=$$

$$=\frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right).$$

Приближенное равенство

$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{n}\left(\frac{1}{2}f(x_0)+f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1})+\frac{1}{2}f(x_n)\right) \quad (5)$$

называется *формулой трапеций*. Способ приближенного вычисления определенного интеграла с помощью формулы (5) носит название *способа трапеций*.

В качестве примера применения способа прямоугольников и способа трапеций рассмотрим вычисление интеграла $\int_1^{12} x^2 dx$ (для удобства берем интеграл, точное значение которого $\int_1^{12} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^{12} = \frac{1727}{3} = 575\frac{2}{3}$ известно, что дает возможность оценить абсолютную погрешность приближенного вычисления данного интеграла).

Итак, разделим отрезок [1; 12] на n = 11 равных частей. Тогда

$$\Delta x=\frac{12-1}{11}=1,\ x_k=k+1,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ 11.$$

Теперь составим таблицу значений функции x^2 для выбранных точек деления отрезка:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144

По формуле прямоугольников (4) находим:

$$\int_1^{12} x^2 dx \approx 1\cdot(1+4+9+16+25+36+49+64+81+100+121)=506.$$

Абсолютная погрешность приближенного значения интеграла равна $575\frac{2}{3} - 506 = 69\frac{2}{3}$.

Как видно, формула (4) дала здесь лишь очень грубую оценку абсолютной погрешности. Чтобы абсолютная погрешность была мала, надо взять число делений n отрезка $[a; b]$ очень большим.

Таким образом, способ прямоугольников — это наиболее простой и вместе с тем наиболее грубый способ приближенного вычисления интеграла.

Выше мы отметили, что другой способ — способ трапеций дает возможность более точно вычислить значение определенного интеграла. Действительно, полагая, как и раньше, $n = 11$, с помощью формулы трапеций (5) находим:

$$\int_1^{12} x^2 dx \approx 1 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 + 49 + 64 + 81 + 100 + 121 + \frac{1}{2} \cdot 144\right) =$$

$$= \frac{1155}{2} = 577\frac{1}{2}.$$

Абсолютная погрешность приближенного значения интеграла здесь равна $\left|575\frac{2}{3} - 577\frac{1}{2}\right| = 1\frac{5}{6}$.

Таким образом, приближенный результат, полученный для $\int_1^{12} x^2 dx$ по формуле трапеций, оказывается значительно точнее результата, полученного для этого интеграла по формуле прямоугольников.

В общем случае точность приближенного вычисления определенных интегралов, достигаемая при способе трапеций, как правило, также значительно выше, чем при способе прямоугольников.

Вопросы и задания

1. Какую фигуру на координатной плоскости OXY называют криволинейной трапецией?
2. Сформулировать теорему о площади криволинейной трапеции.
3. Что понимается под определенным интегралом от функции непрерывной на отрезке?

4. Написать формулу Ньютона–Лейбница. Что выражает эта формула?

5. Рассказать о способе прямоугольников и о способе трапеций для приближенного вычисления определенных интегралов. При каком способе точность приближенного вычисления выше?

Упражнения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^2$, $x = 3$, $y = 0$;

б) $y = \cos x$, $x = 0$, $x = \frac{\pi}{4}$, $y = 0$;

в) $y = \frac{1}{x^2}$, $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$;

г) $y = x^3 + 1$, $x = 0$, $x = 2$, $y = 0$; д) $y = 9 - x^2$, $y = 0$;

е) $y = (x + 2)^2$, $x = 0$, $y = 0$; ж) $y = 2x - x^2$, $y = 0$;

з) $y = 1 - \cos x$, $x = -\frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{2}$, $y = 0$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 8x - 2x^2$, касательной к этой параболе в ее вершине и прямой $x = 0$.

3. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^2 x^4 dx$; г) $\int_0^\pi 3\cos\frac{x}{2}dx$; ж) $\int_1^{10}\frac{dx}{x^2}$;

б) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; д) $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; з) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x dx$.

в) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$; е) $\int_1^e \frac{dx}{x}$;

4. Вычислить интегралы:

а) $\int_{-2}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2x+5}}$; в) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)^2 dx$;

б) $\int_1^4 \left(x + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$; г) $\int_0^\pi x\cos x dx$.

5. Найти приближенное значение интеграла $\int_1^6 x^3 dx$:

а) пользуясь формулой прямоугольников; б) пользуясь формулой трапеций. В каждом из случаев найти абсолютную погрешность приближенного значения интеграла.

---

6. Вычислить интегралы:

а) $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{3}\,dx$; г) $\int_0^{\frac{\pi}{12}} (1+\cos 2x)dx$; ж) $\int_1^e x\ln x dx$;

б) $\int_1^2 \frac{dx}{(2x+1)^2}$; д) $\int_0^2 (1+2x)^3\,dx$; з) $\int_0^{\pi} x\sin x dx$.

в) $\int_{-2}^{6} \frac{dx}{\sqrt{x+3}}$; е) $\int_0^1 \frac{x-1}{x+1}\,dx$;

7. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями:

а) $y = x^3$, $x = 1$, $y = 8$;

б) $y = x^2 - 2x + 4$, $x = 2$, $y = 3$;

в) $y = 4x - x^2$, $y = 4 - x$;

г) $y = 6 + x - x^2$, $y = 6 - 2x$;

д) $y = x^2$, $y = x^3$;

е) $y = x^2$, $y = 2x - x^2$.

8. Вычислить приближенное значение числа π, применяя формулу трапеций к вычислению интеграла $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

§ 4. Некоторые применения определенного интеграла

1. Площадь плоской фигуры. Выше мы рассмотрели вопрос о вычислении площади криволинейной трапеции, т.е. фигуры, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная, неотрицательная на отрезке $[a; b]$ функция. Было установлено, что площадь S такой фигуры вычисляется по формуле

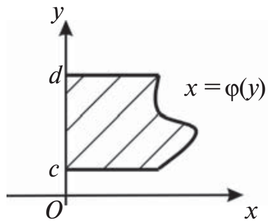


Рис. 80

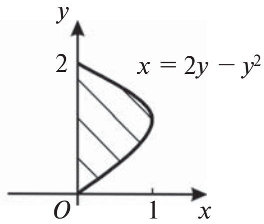


Рис. 81

$$S = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a), \qquad (1)$$

где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$ на $[a; b]$.

Фигуру, ограниченную прямыми $x = 0$, $y = c$, $y = d$ и кривой $x = \varphi(y)$, где $\varphi(y)$ — непрерывная, неотрицательная на отрезке $[c; d]$ функция (рис. 80), также называют *криволинейной трапецией* (относительно оси OY). Ясно, что для площади S такой фигуры справедлива формула

$$S = \int_c^d \varphi(y)dy = \Phi(d) - \Phi(c), \qquad (2)$$

где $\Phi(y)$ — одна из первообразных для функции $\varphi(y)$ на $[c; d]$.

П р и м е р 1. Найти площадь фигуры, ограниченной осью OY и параболой $x = 2y - y^2$.

Р е ш е н и е. Вычислим ординаты точек пересечения данной параболы (рис. 81) с осью OY:

$$2y - y^2 = 0,\ y_1 = 0,\ y_2 = 2.$$

Следовательно, по формуле (2) искомая площадь равна

$$S = \int_0^2 (2y - y^2)dy = \left(y^2 - \frac{y^3}{3} \right)\Bigg|_0^2 = 4 - \frac{8}{3} = \frac{4}{3}.$$

Рассмотрим теперь криволинейную фигуру, ограниченную прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная и неположительная ($f(x) \le 0$) на отрезке $[a; b]$ функция (рис. 82).

Для того чтобы вычислить площадь S такой фигуры, рассмотрим функцию $y = -f(x)$. Ясно, что $-f(x) \ge 0$ на $[a; b]$. Следовательно, $\int_a^b (-f(x))dx$ представляет собой площадь кри-

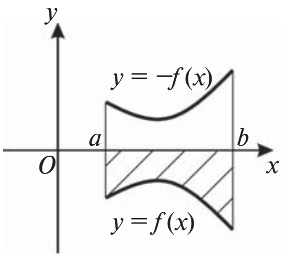


Рис. 82

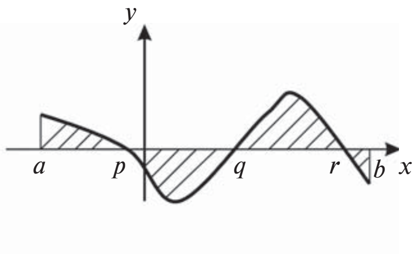


Рис. 83

волинейной трапеции, ограниченной прямыми $y = 0$, $x = a$, $x = b$ и кривой $y = -f(x)$. Но эта криволинейная трапеция есть отражение (относительно оси OX) заданной фигуры, поэтому их площади равны друг другу. Следовательно, площадь искомой фигуры

$$S = \int_a^b (-f(x))dx = -\int_a^b f(x)dx \quad \text{или} \quad S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|.$$

Если непрерывная на $[a; b]$ функция $f(x)$ меняет на нем (конечное число раз) знак, обращаясь в нуль, например, при $x = p$, $x = q$, $x = r$, где $a < p < q < r < b$, то для того чтобы вычислить площадь S фигуры, ограниченной осью OX, прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$, можно отрезок $[a; b]$ разбить на части точками, в которых $f(x)$ обращается в нуль (рис. 83). Затем отдельно вычислить интеграл от $f(x)$ на каждой части (где $f(x)$ не меняет знак) и взять сумму абсолютных величин всех полученных интегралов. Площадь S фигуры, изображенной на рисунке 83, будет равна

$$S = \left|\int_a^p f(x)dx\right| + \left|\int_p^q f(x)dx\right| + \left|\int_q^r f(x)dx\right| + \left|\int_r^b f(x)dx\right| \qquad (3)$$

или (в данном случае)

$$S = \int_a^p f(x)dx - \int_p^q f(x)dx + \int_q^r f(x)dx - \int_r^b f(x)dx.$$

П р и м е р 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью OX и кривой $y = \sin x$ на $[0; 2\pi]$ (рис. 84).

Р е ш е н и е. Функция $y = \sin x$ на $(0; 2\pi)$ обращается в нуль только в точке $x = \pi$. Разобьем отрезок $[0; 2\pi]$ на две части:

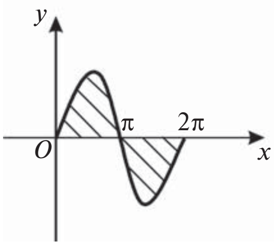


Рис. 84

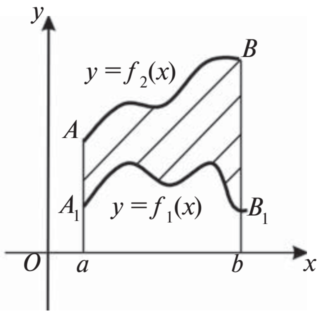


Рис. 85

$[0; \pi]$ и $[\pi; 2\pi]$. На $[0; \pi]$ имеем $\sin x \geq 0$, а на $[\pi; 2\pi]$ имеем $\sin x \leq 0$. Следовательно, по формуле (3) искомая площадь равна

$$S = \left|\int_0^{\pi} \sin x dx\right| + \left|\int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx\right| = \int_0^{\pi} \sin x dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sin x dx =$$

$$= -\cos x\Big|_0^{\pi} - (-\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 1 + 1 - (-1 - 1) = 4.$$

Далее рассмотрим плоскую фигуру, содержащуюся между прямыми $x = a$, $x = b$ и двумя непрерывными на $[a; b]$ кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, причем $0 \leq f_1(x) \leq f_2(x)$ на $[a; b]$ (рис. 85). Тогда площадь S данной фигуры будет представлять собой разность площадей криволинейных трапеций $aABb$ и aA_1B_1b. Поэтому $S = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx$ или, что тоже самое, $S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$.

Нетрудно доказать, что площадь фигуры, изображенной на рис. 86, также вычисляется по формуле

$$S = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \qquad (4)$$

(этот случай можно свести к предыдущему. Доказательство предоставляется читателю).

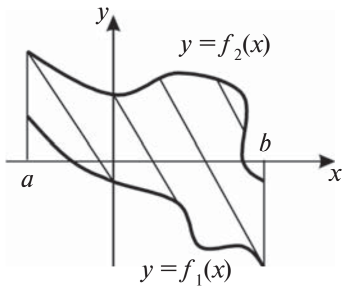


Рис. 86

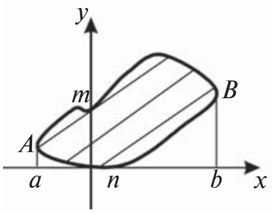


Рис. 87

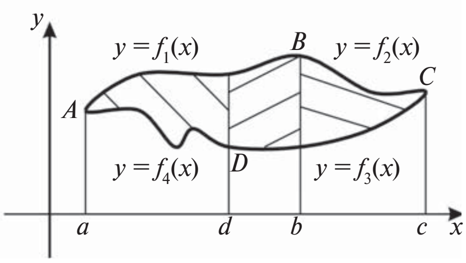


Рис. 88

Пусть теперь фигура ограничена такой замкнутой и не пересекающей себя кривой линией, что любая прямая, параллельная оси OY, пересекает кривую не более чем в двух точках (рис. 87). Тогда мы можем рассматривать эту фигуру как фигуру, ограниченную дугами AnB и AmB. Если уравнения этих дуг известны: $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$ — непрерывные на $[a; b]$ функции, то площадь заданной фигуры также может быть вычислена по формуле (4).

В случае, когда плоская фигура ограничена дугами нескольких кривых, для вычисления площади такой фигуры ее разбивают на части прямыми, параллельными оси OY (или OX), так, чтобы к вычислению площади каждой полученной части можно было бы применить одну из формул (1)—(4). Например, площадь фигуры, ограниченной дугами AB, BC, CD и DA (уравнения которых соответственно: $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $y = f_3(x)$ и $y = f_4(x)$, где $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$ — непрерывные функции), будет равна

$$S = \int_a^d (f_1(x) - f_4(x))dx + \int_d^b (f_1(x) - f_3(x))dx + \int_b^c (f_2(x) - f_3(x))dx$$

(a, b, c и d — абсциссы соответственно точек A, B, C и D (рис. 88)).

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболами $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и прямой $y = 3x$ (рис. 89).

Решение. Найдем абсциссы точек пересечения O, A и B прямой $y = 3x$ с параболами $y = x^2$ и $y = \frac{1}{2}x^2$. Это числа $x = 0$, $x = 3$ и $x = 6$ соответственно. Разобьем данную фигуру на две части прямой $x = 3$. Тогда площадь S фигуры будет равна сумме площадей этих частей:

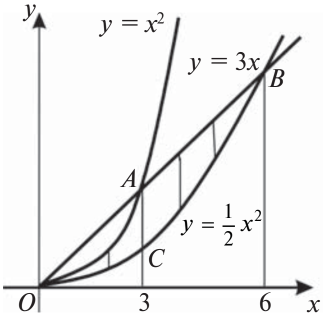


Рис. 89

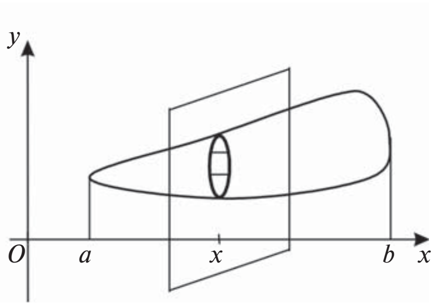


Рис. 90

$$S = \int_0^3 \left(x^2 - \frac{1}{2}x^2\right)dx + \int_3^6 \left(3x - \frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{x^3}{6}\bigg|_0^3 + \left(\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{6}\right)\bigg|_3^6 =$$

$$= \frac{9}{2} + 54 - 36 - \frac{27}{2} + \frac{9}{2} = 13,5.$$

2. Вычисление объемов тел. Пусть задано некоторое тело с объемом V. Предположим, что имеется такая прямая, что, какую бы плоскость, перпендикулярную этой прямой, мы ни брали, нам известна площадь S сечения тела данной плоскостью (рис. 90). Примем эту прямую в качестве оси OX. Тогда плоскость, перпендикулярная оси OX, пересекает ее в некоторой точке x из отрезка $[a; b]$ оси OX (a и b — точки оси OX, через которые проходят плоскости, ограничивающие тело). Поэтому каждому $x \in [a; b]$ можно поставить в соответствие единственное число $S(x)$ — площадь поперечного сечения тела плоскостью, соответствующей точке x. Тем самым на отрезке $[a; b]$ будет задана функция $S(x)$. Оказывается, если функция $S(x)$ является непрерывной на $[a; b]$, то для объема V данного тела справедлива формула

$$V = \int_a^b S(x)dx \tag{5}$$

(доказательство этого факта приводится в курсе анализа).

Вычисление объема тела с помощью определенного интеграла по формуле (5) связано с предварительным нахождением функции $S(x)$, выражающей площадь поперечного сечения тела. Обычно эта функция также находится путем интегриро-

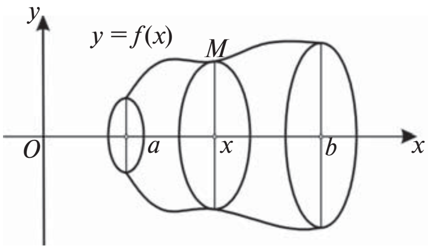


Рис. 91

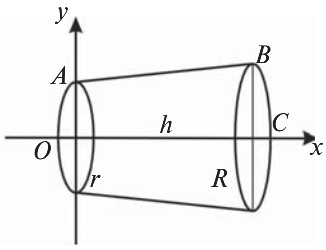


Рис. 92

вания. Но в одном важном частном случае выражение для $S(x)$ можно найти непосредственно. Рассмотрим этот случай.

Пусть вокруг оси OX вращается криволинейная трапеция, ограниченная осью OX, прямыми $x = a$, $x = b$ и кривой $y = f(x)$, где $f(x)$ – непрерывная, неотрицательная на $[a; b]$ функция. Тогда эта трапеция опишет тело, называемое *телом вращения* (рис. 91).

При вращении криволинейной трапеции каждая точка $M(x; f(x))$ кривой $y = f(x)$ описывает окружность, центр которой лежит в точке x оси OX, а радиус равен $f(x)$. Следовательно, сечение данного тела вращения плоскостью, перпендикулярной оси OX и проходящей через точку x, представляет собой круг радиуса $f(x)$. Площадь сечения в этом случае будет равна $S(x) = \pi f^2(x)$. Применяя формулу (5), получим следующую формулу для вычисления объема тела вращения:

$$V = \pi\int_a^b f^2(x)dx\,. \tag{6}$$

Пример 4. Определить объем усеченного конуса, радиусы оснований которого равны R и r, а высота равна h.

Решение. Данный усеченный конус может быть получен вращением вокруг оси OX трапеции $OABC$ (рис. 92). Уравнение образующей AB конуса имеет вид:

$$y = f(x) = r + \frac{R-r}{h}\cdot x\,,\ x\in[0;\ h].$$

Поэтому объем усеченного конуса по формуле (6) будет равен

$$V = \pi\int_0^h\left(r + \frac{R-r}{h}x\right)^2 dx = \pi\left[r^2x + 2r\,\frac{R-r}{h}\,\frac{x^2}{2} + \left(\frac{R-r}{h}\right)^2\cdot\frac{x^3}{3}\right]\Bigg|_0^h =$$

$$= \pi\left[r^2h + rh(R-r) + \frac{1}{3}h(R-r)^2\right] = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2).$$

Таким образом, с помощью определенного интеграла можно определить объем усеченного конуса по формуле

$$V = \frac{\pi h}{3}(r^2 + Rr + R^2),$$

известной нам из курса элементарной геометрии.

Замечание. Так как правая часть формулы (6) не зависит от знака $f(x)$, то эта формула остается справедливой и в случае $f(x) \le 0$ на отрезке $[a; b]$.

3. Работа переменной силы. Рассмотрим одно из применений определенного интеграла в физике. Пусть материальная точка под действием силы P движется по прямой. Если действующая сила P постоянна и направление силы совпадает с направлением движения (т.е. направлена вдоль прямой), а перемещение точки равно S, то, как известно из физики, работа A этой постоянной силы равна произведению $P \cdot S$.

Выведем теперь формулу для вычисления работы A, совершаемой переменной силой. Пусть материальная точка движется по оси OX под действием силы, проекция которой на ось OX есть функция f от аргумента x. Предполагаем, что $f(x)$ есть непрерывная функция. Под действием такой силы материальная точка перемещается из точки $M(a)$ оси OX в точку $M(b)$ (рис. 93, *а*). Покажем, что в этом случае работа A вычисляется по формуле

$$A = \int_a^b f(x)dx.$$

Действительно, разобьем отрезок $[a; b]$ оси OX на n частей одинаковой длины $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ (рис. 93, *б*). Работа, совершаемая силой на всем отрезке $[a; b]$, равна сумме работ этой силы на полученных частях $[a; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}; b]$. Так как $f(x)$

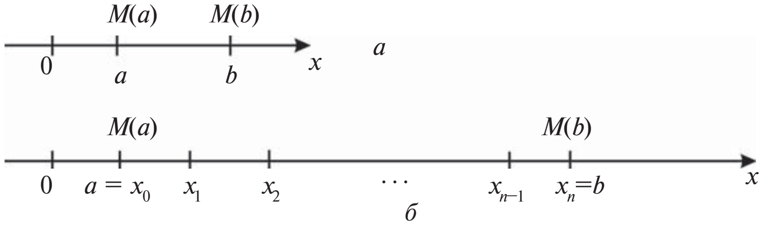


Рис. 93.

есть непрерывная функция от x, то при достаточно малом отрезке $[a;\ x_1]$ значения $f(x)$, $x \in [a;\ x_1]$ близки к значению $f(a)$. Поэтому работа силы на этом отрезке приблизительно равна $f(a) \cdot (x_1 - a)$.

Аналогично, работа силы на отрезке $[x_1;\ x_2]$ приблизительно равна $f(x_1) \cdot (x_2 - x_1)$ и т. д., работа силы на последнем отрезке $[x_{n-1};\ b]$ приблизительно равна $f(x_{n-1}) \cdot (b - x_{n-1})$. Следовательно, работа A силы на всем отрезке $[a;\ b]$ приблизительно равна

$$A_n = f(a)(x_1 - a) + f(x_1)(x_2 - x_1) + \ldots + f(x_{n-1})(b - x_{n-1}) =$$
$$= \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})),$$

при этом точность приближенного равенства тем выше, чем меньше длины отрезков, на которые разбит отрезок $[a;\ b]$. Естественно, что это приближенное равенство переходит в точное равенство при $n \to \infty$, т.е.

$$A_n = \frac{b-a}{n}(f(a) + f(x_1) + \ldots + f(x_{n-1})) \to A\ ,\ n \to \infty.$$

Но $A_n \to \int\limits_a^b f(x)dx$, $n \to \infty$ (см. § 3, п. 2 этой главы). Следовательно,

$$A = \int\limits_a^b f(x)dx \quad - \text{работа переменной силы.}$$

П р и м е р 5. Сила упругости пружины, растянутой на 5 см, равна 3 Н. Какую работу следует произвести, чтобы растянуть пружину на 5 см?

Р е ш е н и е. По закону Гука сила f, растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле $f = kx$, где k — постоянный коэффициент пропорциональности (рис. 94, *а, б*), точка O соответствует свободному положению пружины. Из условия задачи имеем $3 = k \cdot 0{,}05$. Откуда $k = 60$, а сила

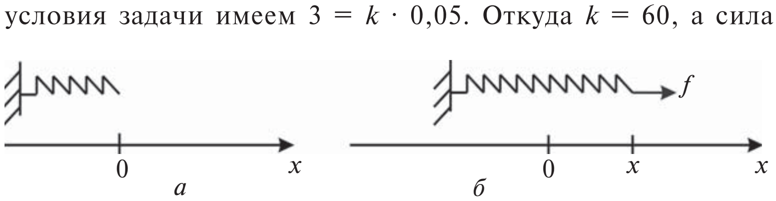


Рис. 94

$f(x) = 60x$, $x \in [0;\ 0{,}05]$. Следовательно, совершаемая работа при растяжении пружины на 5 см (= 0,05 м) равна

$$A = \int_0^{0{,}05} 60x\,dx = 30x^2\Big|_0^{0{,}05}, \text{ т.е. } A = 0{,}075 \text{ Дж.}$$

В заключение отметим, что применения определенного интеграла не исчерпываются рассмотренными выше случаями. Определенный интеграл имеет разнообразные применения в геометрии (вычисление площадей плоских фигур, площадей поверхностей, объемов тел, длин кривых линий), физике и механике (вычисление работы переменной силы, центра тяжести, момента инерции и др.).

Вопросы и задания

1. Рассказать о применениях определенного интеграла.
2. Написать формулу для вычисления площади плоской фигуры, содержащейся между двумя вертикальными прямыми $x = a$, $x = b$ и двумя непрерывными на отрезке $[a;\ b]$ кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ (где $0 \le f_1(x) \le f_2(x)$).
3. Написать формулу для вычисления объема тела вращения.

Упражнения

1. Вычислить площадь фигуры, ограниченной прямыми $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$ и кривой $y = \frac{1}{2}x^2$.

2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной осью OX и кривой $y = \cos x$ при $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{3\pi}{2}$.

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = 1 - x^2$, осью абсцисс и прямой $x = 2$.

4. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x + 4$ и осью ординат.

5. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = 3x$ и $x + y = 4$.

6. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой (эллипсом) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

7. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной осью OX, кривой $y^2 = 2x$ и прямой $x = 2\sqrt{2}$.

8. Определить объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 4 - x^2$ и $y = 0$.

9. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$.

10. Вычислить объем шара радиуса R, т.е. тела, поверхность которого выражается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2.$$

11. Сила в 4 Н растягивает пружину на 8 см. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 8 см?

---

12. Определить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = x^2 + 2x - 3$ и осью абсцисс.

13. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $x^2y = 1$ и прямыми $y = 1$, $y = 4$.

14. Вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $y = \ln x$, осью абсцисс и прямыми $x = 2$, $x = 4$.

15. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^3$, $x + y = 2$ и $y = 0$.

16. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями:

$$y = \sqrt{x},\ x = 1,\ x = 4 \text{ и } y = 0.$$

17. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями:

$$y = 2x,\ y = x + 3,\ x = 0 \text{ и } x = 1.$$

18*. Вычислить объем трехосного эллипсоида, т.е. тела, поверхность которого выражается уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

19. Какую работу надо затратить на сжатие пружины на 4 см, если известно, что сила в 2 Н сжимает эту пружину на 1 см?

Упражнения для повторения

1. Найти общий вид первообразных для функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=\sqrt{x}+\lg 2$; в) $f(x)=\cos(5-3x)$;

б) $f(x)=\frac{x+\sqrt[3]{x}}{x^2}$; г) $f(x)=e^{-2x+3}$.

2. Найти первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, если:

а) $f(x)=3x^2+2x+1$, $F(0)=3$; б) $f(x)=x+\frac{1}{x}$, $F(1)=2$;

в) $f(x)=\frac{1}{1+x^2}+\frac{\pi}{4}$, $F(1)=\pi$; г) $f(x)=0$, $F(5)=4$.

3. Для $f(x)$ найти первообразную, график которой проходит через точку M, если:

а) $f(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$, $M(4;\ 0)$;

б) $f(x)=5\cos(5x-1)$, $M\left(\frac{1}{5};\ 5\right)$;

в) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{\pi}{2}$, $M(1;\ \pi)$;

г) $f(x)=2^{3x-2}$, $M\left(0;\ \frac{1}{12\ln 2}\right)$.

4. Точка движется прямолинейно с ускорением $a(t)=t^2+3t$. Найти закон движения точки, если в момент времени $t=6$ ее скорость равна 130, а координата равна 250.

5. Найти следующие неопределенные интегралы:

а) $\int(1-\cos x)dx$; д) $\int\frac{x^2-7}{x+\sqrt{7}}dx$; и) $\int\frac{\ln^2 x}{x}dx$;

б) $\int\frac{x^3+x^2+1}{x}dx$; е) $\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$; к) $\int\frac{\cos 2x}{1+\sqrt{2}\sin x}dx$;

в) $\int(x-1)^3dx$; ж) $\int\sqrt[4]{1-3x}dx$; л) $\int\frac{\cos^2 x}{1+\sin x}dx$;

г) $\int\frac{x}{1+x}dx$; з) $\int\frac{3dx}{x(x+1)}$; м) $\int\cos\left(\frac{1}{2}x-5\right)dx$;

н) $\int x^3 \ln x dx$; п) $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$;

о) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$; р) $\int x e^{-x} dx$.

6*. Доказать, что любая первообразная нечетной функции является четной функцией.

7. Найти следующие определенные интегралы:

а) $\int_1^{27} \sqrt[3]{x} dx$; г) $\int_0^1 \frac{dx}{(x+3)^2}$; ж) $\int_0^2 |1-x| dx$;

б) $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{3dx}{x^2+1}$; д) $\int_0^{\frac{1}{3}} e^{3x} dx$; з) $\int_1^e \ln x dx$.

в) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos 3x dx$; е) $\int_0^{\pi} |\cos x| dx$;

8. Вычислить приближенное значение числа e, применяя формулу трапеций к вычислению интеграла $\int_0^1 e^x dx$.

9. Найти площади фигур, ограниченных следующими кривыми:

а) $y = x^2$, $x + y = 2$; в) $y = 2x - x^2$, $x + y = 0$;

б) $y = 2^x$, $y = 2$, $x = 0$; г) $y = x^2 + 1$, $y = 9 - x^2$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной кривой $y^2 = x + 1$ и осью ординат.

11. Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = x$, $y = 5x$ и $y = 6 - x$.

12. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси абсцисс криволинейной трапеции, ограниченной линиями $y = 2x - x^2$ и $y = 0$.

13. Найти объем тела, полученного при вращении вокруг оси OX фигуры, ограниченной линиями $y = 3x$, $y = x + 2$ и $x = 0$.

14*. Какую работу надо затратить, чтобы тело массы m поднять с поверхности Земли, радиус которой равен R, на высоту h? Чему равна эта работа, если тело удаляется в бесконечность?

ГЛАВА XV

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. Некоторые задачи, приводящие к дифференциальным уравнениям

Прежде чем давать определение дифференциального уравнения и связанных с ним понятий, рассмотрим следующие задачи, которые приводятся к нахождению функции, являющейся решением дифференциального уравнения.

Задача 1. Найти кривую, проходящую через точку $M(0;\ 1)$ и обладающую тем свойством, что в каждой ее точке угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

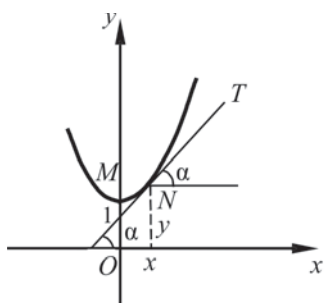


Рис. 95

Р е ш е н и е. Пусть $y = y(x)$ есть уравнение искомой кривой (рис. 95). Обозначим через α угол, образованный касательной NT с положительным направлением оси OX ($N(x,\ y)$ — точка касания). Как известно, угловой коэффициент касательной NT есть $\operatorname{tg}\alpha$, и он равен производной $y' = y'(x)$, т. е. $y' = \operatorname{tg}\alpha$.

С другой стороны, согласно условию задачи $\operatorname{tg}\alpha = 2x$. Следовательно,

$$y' = 2x. \tag{1}$$

В уравнении (1) неизвестная функция $y = y(x)$ стоит под знаком производной или, что то же, это уравнение содержит производную от неизвестной функции. Такие уравнения называют *дифференциальными уравнениями*.

Функцию $y(x)$, которая удовлетворяет уравнению (1), т. е. обращает это уравнение в тождество, называют *решением дифференциального уравнения*, а процесс нахождения решений дифференциального уравнения — *интегрированием дифференциального уравнения*.

Ясно, что решением дифференциального уравнения (1) является любая первообразная для функции $2x$. Например, $y = x^2$ будет решением дифференциального уравнения (1). Все решения уравнения (1) даются формулой $y = x^2 + C$, где C — произвольное постоянное число. В итоге мы получаем бесконечное множество решений дифференциального уравнения (1) (каждому значению C соответствует свое решение).

Кривую, являющуюся графиком решения дифференциального уравнения (1) называют *интегральной кривой* этого уравнения.

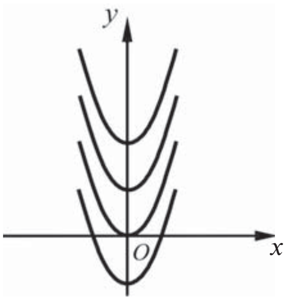


Рис. 96

Таким образом, интегральными кривыми уравнения (1) являются параболы (рис. 96)

$$y = x^2 + C. \qquad (2)$$

Они получаются из параболы $y = x^2$ сдвигом на C единиц вдоль оси OY. Все эти параболы обладают одним общим свойством, выраженным дифференциальным уравнением (1): угловой коэффициент касательной равен удвоенной абсциссе точки касания.

Наша искомая интегральная кривая $y = y(x)$, по условию задачи, должна проходить через точку $M(0;\ 1)$. Для того чтобы выделить из всего семейства интегральных кривых (2) искомую кривую, заменим в уравнении (2) x и y координатами точки M. Тогда получим $1 = 0^2 + C$ или $C = 1$. Следовательно, искомой кривой является парабола $y = x^2 + 1$ (рис. 95).

Выше мы рассмотрели дифференциальное уравнение (1), в правой части которого стоит функция $2x$. Вообще же, уравнение вида

$$y' = f(x),$$

где $f(x)$ — известная функция на некотором промежутке, а $y = y(x)$ — неизвестная функция независимой переменной x, является простейшим примером дифференциальных уравнений. Интегрирование этого уравнения состоит в нахождении всех первообразных (если они существуют) функции $f(x)$, которые, как известно, могут быть записаны в виде

$$y = \int f(x)dx + C,$$

где C — произвольное постоянное.

Характерное свойство дифференциальных уравнений — иметь бесконечное множество решений. В этом смысле приведенный пример является типичным. Поэтому, решив дифференциальное уравнение, описывающее некоторый процесс, невозможно одновременно найти зависимость между всеми величинами, характеризующими данный процесс. Чтобы выделить из бесконечного множества зависимостей ту, которая описывает именно этот процесс, надо иметь дополнительную информацию, например, знать начальное состояние процесса (в рассмотренной задаче 1 дополнительной информацией являлось то, что искомая кривая проходит через точку $M(0;\ 1)$).

Прикладное значение дифференциальных уравнений состоит в том, что решение многих задач физики и техники приводят к составлению и последующему интегрированию дифференциальных уравнений самых разнообразных видов.

Задача 2 (Радиоактивный распад). Экспериментально установлено, что скорость распада радия пропорциональна количеству нераспавшегося радия. Известно также, что половина первоначального запаса радия распадается по истечении 1600 лет. Считая, что начальное количество радия равно y_0, найти зависимость количества нераспавшегося радиоактивного вещества y от времени t.

Решение. Скорость изменения функции y (т. е. скорость радиоактивного распада) в зависимости от времени t равна производной $y'(t)$. По условию задачи

$$y'(t) = -ky(t), \tag{3}$$

где $k > 0$ — коэффициент пропорциональности, $y(t)$ — количество нераспавшегося радия, $y > 0$. В правой части уравнения (3) поставлен знак минус, потому что с возрастанием времени t количество радия y в результате распада уменьшается, т. е. $y(t)$ — убывающая функция и $y'(t) < 0$.

Уравнение (3) является дифференциальным. Оно имеет решение, например, функция $y(t) = e^{-kt}$ удовлетворяет этому уравнению. Найдем все решения данного уравнения. Для этого рассмотрим произвольную функцию $f(t)$, удовлетворяющую (3), т. е. $f'(t) = -kf(t)$. Пусть $g(t) = f(t) \cdot e^{kt}$. Тогда

$$g'(t) = \left(f(t)\cdot e^{kt}\right)' = f'(t)\cdot e^{kt} + f(t)\cdot e^{kt}\cdot k =$$
$$= -kf(t)\cdot e^{kt} + k\cdot f(t)\cdot e^{kt} = 0.$$

Из равенства нулю производной $g'(t)$ функции $g(t)$ следует, что $g(t) \equiv C$ — постоянное число (при всех $t > 0$). Поэтому $f(t) \cdot e^{kt} \equiv C$, или $f(t) = C \cdot e^{-kt}$.

Следовательно, решения уравнения (3) имеют вид

$$y(t) = C \cdot e^{-kt}, \tag{4}$$

где C — произвольное постоянное число.

По условию задачи в начальный момент $t = 0$ количество радия было равно y_0. Полагая $t = 0$, $y(0) = y_0$, из (4) находим $C = y_0$. Тогда $y(t) = y_0 \cdot e^{-kt}$. Кроме того, из условия задачи следует, что при $t = 1600$ количество радия будет $y = \frac{y_0}{2}$. Поэтому $\frac{y_0}{2} = y_0 e^{-1600k}$, или $e^{1600k} = 2$. Откуда $k = \frac{\ln 2}{1600} \approx 0,00043$.

Таким образом, зависимость количества нераспавшегося радиоактивного вещества от времени выражается формулой

$$y(t) = y_0 \cdot e^{-0,00043t},$$

где y_0 — начальное количество радия при $t = 0$. Например, через $t = 300$ лет после начала опыта будем иметь $y = y_0 \cdot e^{-0,00043 \cdot 300}$. Откуда $y = e^{-0,129} \cdot y_0$, или $y \approx 0,87 y_0$.

Это приближенное равенство показывает, что по истечении 300 лет сохранится всего 87% первоначального запаса радия.

Задача 3 (Гармонические колебания). В физике большую роль играют функции $f(t)$, которые удовлетворяют уравнению

$$f''(t) = -\omega^2 \cdot f(t), \tag{5}$$

где ω — положительная постоянная.

Рассмотрим следующую задачу, приводящую к уравнению вида (5). Пусть к шарику массой m прикреплена горизонтально расположенная пружина, другой конец которой закреплен (рис. 97, *а*). В состоянии равновесия координата x центра шарика считается равной нулю. При перемещении центра шарика в точку с координатой $x \neq 0$ возникает сила F, стремя-

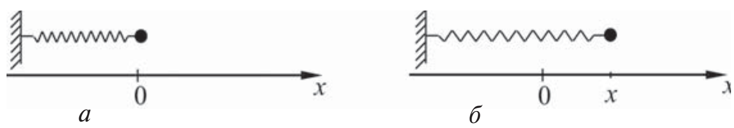


Рис. 97

щаяся вернуть шарик в положение равновесия. По закону Гука эта сила пропорциональна перемещению x, т.е.

$$F = -kx,$$

где $k > 0$ (рис. 97, *б*). С другой стороны, по второму закону Ньютона

$$F = ma,$$

где a — ускорение при движении по прямой. Так как ускорение есть вторая производная от координаты, т. е. $a(t) = x''(t)$, то

$$mx''(t) = -kx(t) \text{ или } x''(t) = -\frac{k}{m}x(t).$$

Таким образом, движение шарика под действием сил упругости подчинено уравнению вида (5) при $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Вернемся снова к уравнению (5). Покажем, что при любых постоянных A и φ функция

$$f(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \tag{6}$$

является его решением. Действительно, имеем

$$f'(t) = \left(A\cos(\omega t + \varphi)\right)' = -A\omega\sin(\omega t + \varphi),$$

$$f''(t) = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\omega^2 f(t).$$

Верно и обратное утверждение: любое решение уравнения (5) есть функция вида (6), где $A \geq 0$, $\varphi \in [0; 2\pi]$ (доказательство этого утверждения приводится в курсе высшей математики). Произвольные постоянные A и φ можно определить, если заданы начальные условия:

$$f(0) = y_0, \; f'(0) = v_0.$$

Из сказанного выше заключаем, что координата центра шарика меняется по закону

$$x(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t + \varphi\right).$$

Говорят, что шарик совершает *гармонические колебания*. Вообще, всякая физическая величина, изменяющаяся во времени в соответствии с уравнением (5), совершает гармоническое колебание. Само уравнение (5) называют *дифференциальным уравнением гармонических колебаний*. Как видно из формулы (6), гармоническое колебание является периодическим движением с периодом $T = \frac{2\pi}{\omega}$ и частотой колебания ω. Число A называется *амплитудой колебания*, φ — *начальной фазой колебания*.

Рассмотренные задачи показывают, насколько мощным аппаратом исследования являются дифференциальные уравнения. Многие законы, управляющие каким-либо процессом, записываются в виде дифференциальных уравнений. Для того чтобы знать, как данный процесс развертывается во времени, нужно уметь решать соответствующее дифференциальное уравнение.

Вопросы и задания

1. Объяснить, какие уравнения относятся к дифференциальным уравнениям.
2. Привести примеры дифференциальных уравнений.
3. Сформулировать какую-либо задачу, приводящую к дифференциальному уравнению.
4. Уравнение какого вида называют дифференциальным уравнением гармонических колебаний?

Упражнения

1. Доказать, что функция $y(x)$ удовлетворяет соответствующему дифференциальному уравнению:

а) $y' = y, \quad y(x) = 2e^x$; в) $y'' = -4y, \quad y(x) = \cos 2x$;

б) $y' = -5y, \quad y(x) = 4e^{-5x}$; г) $y'' = 4y, \quad y(x) = e^{2x} + e^{-2x}$.

2. Найти хотя бы одно, отличное от нуля, решение дифференциального уравнения:

а) $y' = 9y$; б) $y' + y = 0$; в) $y'' + 36y = 0$; г) $4y'' = -y$.

3. Найти кривую, проходящую через точку $M(0; 1)$ и обладающую тем свойством, что в каждой ее точке угловой коэффициент касательной равен ординате точки касания.

4. К началу радиоактивного распада имели 1 г радия. Через сколько минут его останется 0,125 г, если его период полураспада равен 3 мин?

5. Написать дифференциальное уравнение гармонических колебаний:

а) $x = 3\cos\left(2t + \frac{\pi}{4}\right)$; б) $x = 2\cos\left(0{,}1t + \frac{\pi}{7}\right)$.

6. Доказать, что функция $y(x) = e^x (1 + x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

7. Найти хотя бы одно, отличное от нуля, решение дифференциального уравнения:

а) $y' = -3y$; в) $y'' - 25y = 0$;

б) $y'' = x^2 + 1$; г) $y'' + 2y' + y = 0$.

8. Найти кривую, проходящую через точку $M(1;\ 2)$ и обладающую тем свойством, что в каждой ее точке угловой коэффициент касательной равен отношению ординаты и абсциссы точки касания.

9*. Период полураспада радиоактивного вещества равен 1 ч. Через сколько часов его количество уменьшится в 10 раз? Вычислите, какая доля радия останется через 1000 лет, если период его полураспада равен 1550 лет.

10. Доказать, что сумма двух гармонических колебаний $x_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ и $x_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$ будет периодической функцией тогда и только тогда, когда отношение частот есть рациональное число r, т. е. $\frac{\omega_1}{\omega_2} = r$.

§ 2. Понятие о дифференциальных уравнениях

1. Основные понятия. В предыдущем параграфе были рассмотрены примеры задач, которые приводят к дифференциальным уравнениям. Дадим теперь определения дифференциального уравнения и связанных с ним общих понятий.

Определение 1. *Дифференциальным уравнением* называется такое уравнение (относительно неизвестной функции), которое содержит хотя бы одну из производных искомой неизвестной функции.

Отметим, что кроме производных искомой функции дифференциальное уравнение может явно содержать также саму неизвестную функцию и независимую переменную x.

Пример 1. Уравнения $y'' = 0$, $y' = x^2 + y^2$, $y' - x = 0$, $y'' + 2y' + y = 3$, $y' \cdot y'' + \sin x = 0$ являются примерами дифференциальных уравнений (здесь $y = y(x)$ — неизвестная функция от независимой переменной x).

Как мы уже знаем, задача об определении неизвестной функции $y = \varphi(x)$ по заданной ее производной $f(x)$ сводится к решению уравнения

$$y' = f(x) \tag{1}$$

относительно неизвестной функции y. Такую задачу легко обобщить, например, рассмотрев задачу о нахождении функции $y = \varphi(x)$, удовлетворяющей уравнению

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

или, в общем случае, уравнению

$$F(x, y, y') = 0, \tag{3}$$

связывающему аргумент x, неизвестную функцию y и ее производную y' (сами выражения $f(x, y)$ и $F(x, y, y')$ считаются заданными).

Уравнение вида (2) разрешено относительно производной неизвестной функции. Говорят, что это уравнение задано в *нормальной форме.*

Можно рассмотреть еще более общую задачу: найти функцию $y = \varphi(x)$, удовлетворяющую соотношению

$$F\left(x, y, y', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,, \tag{4}$$

которое содержит аргумент x, неизвестную функцию y и ее производные до некоторого порядка n включительно (выражение F может явно не зависеть от любой из величин $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$, но непременно должно зависеть от $y^{(n)}$).

Если дифференциальное уравнение задано в виде

$$y^{(n)} = f\left(x,\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{(n-1)}\right), \tag{5}$$

т.е. разрешено относительно старшей производной, то говорят, что это уравнение задано в *нормальной форме.*

Наивысший из порядков производных, входящих в данное дифференциальное уравнение, называется *порядком уравнения.* Так, уравнения (1)—(3) являются дифференциальными уравнениями первого порядка, а уравнения (4), (5) — дифференциальными уравнениями n-го порядка ($n \geq 1$). Очевидно, что уравнения (1), (2), (3) и (5) являются частными случаями дифференциального уравнения (4). Например, уравнение (2) можно записать в виде (4), если перенести $f(x, y)$ в левую часть равенства. Тогда, положив $F(x, y, y') = y' - f(x, y)$ получим уравнение

$$F(x,\ y,\ y') = 0,$$

т. е. уравнение вида (4) при $n = 1$.

Дифференциальное уравнение (4) называют *обыкновенным*. Оно содержит производные от функции только одной независимой переменной x, являющейся действительным числом. Вообще же, в теории дифференциальных уравнений изучаются и такие уравнения, которые содержат несколько независимых переменных, неизвестную функцию от этих переменных и производные (так называемые *частные производные*) неизвестной функции по независимым переменным, например,

$$x \cdot z'_y - y \cdot z'_x = x + y^2 .$$

Здесь $z = z(x,\ y)$ — неизвестная функция двух независимых переменных x и y. Такие уравнения (в отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений (4)) называют *дифференциальными уравнениями с частными производными*.

В настоящей главе мы будем рассматривать только обыкновенные дифференциальные уравнения и притом только дифференциальные уравнения первого порядка, разрешенные относительно производной, т. е. уравнения вида (2)

$$y' = f(x,\ y),$$

где $f(x,\ y)$ — данное выражение, связывающее независимую переменную x и неизвестную функцию y.

Определение 2. Функция $y = \varphi(x)$, определенная вместе со своей производной на интервале $(a;\ b)$, называется *решением дифференциального уравнения* (2) на этом интервале, если эта функция, будучи подставлена в (2), обращает его в тождество, справедливое для всех $x \in (a;\ b)$, т. е. если

$$\varphi'(x) \equiv f\left(x,\ \varphi(x)\right),\ \ x \in (a;\, b).$$

Пример 2. Функция $y = \varphi(x) = e^x$ есть решение дифференциального уравнения $y' = y$ на интервале $(-\infty;\ +\infty)$.

Действительно, $y' = \varphi'(x) = \left(e^x\right)' = e^x$ на $(-\infty;\ +\infty)$. Функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ определены на $(-\infty;\ +\infty)$. При подстановке $y = e^x$ и $y' = e^x$ в данное дифференциальное уравнение получим тождество: $e^x \equiv e^x$.

Пример 3. Легко проверить, что функция $y = \varphi(x) = \dfrac{x^3}{3}$ является решением дифференциального уравнения $y' = x^2$ на $(-\infty;\ +\infty)$.

Дифференциальное уравнение может иметь и не одно решение. Например, функции вида $y = Ce^x$, где C — любое постоянное число, являются решениями дифференциального уравнения из примера 2, а функции вида $y = \frac{x^3}{3} + C$ являются решениями дифференциального уравнения из примера 3.

Таким образом, дифференциальному уравнению может удовлетворять несколько различных функций, и притом даже бесконечно много функций.

Основной задачей теории дифференциальных уравнений является отыскание всех решений дифференциального уравнения и изучение свойств этих решений.

Операцию отыскания решений дифференциального уравнения называют *интегрированием уравнения* (не путать с термином «интегрирование функции»), так как часто решение дифференциальных уравнений сводится к интегрированию функций.

2. Начальные сведения о понятиях общего и частного решения. Задача Коши. Примеры, рассмотренные в §1 и в пункте 1 настоящего параграфа, дают нам основание считать, что дифференциальное уравнение (2) имеет, вообще говоря, не одно, а бесконечно много решений. Именно, *общее решение* этого уравнения задается формулой

$$y = \varphi(x,\ C), \tag{6}$$

содержащей, кроме аргумента x, еще и произвольное постоянное C. При этом постоянное C должно входить в формулу (6) таким образом, чтобы из этой формулы при различных значениях C могли быть получены все решения уравнения (2).

Замечание 1. В некоторых случаях уравнение (2) может иметь еще и отдельные решения, не получающиеся из формулы (6) ни при каком значении C. Тем не менее, и в таких случаях говорят, что формула (6) выражает *общее решение уравнения* (2) (более точные формулировки, относящиеся к понятию общего решения дифференциального уравнения, даются в курсе высшей математики).

Всякое решение, которое получается из общего решения (6), когда постоянному C дают определенное числовое значение, называется *частным решением уравнения* (2).

Пример 4. $y = \frac{x^2}{2} + C$ есть общее решение уравнения $y' = x$ на $(-\infty;\ +\infty)$, а функции $y = \frac{x^2}{2} + 3$, $y = \frac{x^2}{2} - 7$ — частные решения этого уравнения.

Обычно для получения частного решения из общего требуют, чтобы искомая функция y при некотором значении x_0 аргумента x принимала заданное значение y_0, т. е. чтобы $y(x_0) = y_0$. При этом число x_0 называется *начальным значением аргумента*, а число y_0 — *начальным значением функции*. В совокупности числа x_0, y_0 называются *начальными данными*. Условие, указывающее, что при $x = x_0$ значение искомой функции y должно равняться числу y_0, называется *начальным условием*. Подставив начальные данные в (6), мы получим уравнение

$$y_0 = \varphi(x_0, C),$$

для определения значения C (т. е. для определения частного решения).

Задача о нахождении решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, является одной из основных задач теории дифференциальных уравнений. Такая задача называется *задачей Коши*.

В общем виде для дифференциального уравнения первого порядка в нормальной форме (2) задача Коши ставится так: требуется найти решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее начальному условию (*условию Коши*)

$$y(x_0) = y_0.$$

График решения дифференциального уравнения называется *интегральной кривой* этого уравнения. Поэтому геометрически задачу Коши можно сформулировать так: среди всех интегральных кривых уравнения (2) найти ту, которая проходит через заданную точку $M(x_0, y_0)$ координатной плоскости.

Замечание 2. При определенных ограничениях, налагаемых на правую часть уравнения (2) , т. е. на функцию $f(x, y)$, решение задачи Коши существует (условия существования и единственности решения задачи Коши рассматриваются в курсе высшей математики).

Далее, часто в процессе отыскания общего решения дифференциального уравнения (2) приходят к уравнению, не разрешенному относительно y, т. е. к соотношению вида

$$\Phi(x, y, C) = 0. \qquad (7)$$

При этом выразить y из (7) явно через известные элементарные функции не всегда возможно. Тем не менее, и в таком случае общее решение уравнения (2) считается найденным (в смысле существования функции y). В этом случае равенство

(7) называют *общим интегралом дифференциального уравнения* (2). Соотношение

$$\Phi(x, y, C_0) = 0,$$

получаемое из (7) при допустимом частном значении $C = C_0$, называют *частным интегралом дифференциального уравнения* (2).

Пример 5. Для дифференциального уравнения $y' = -\frac{x}{y}$ соотношение $x^2 + y^2 - C = 0$, где $C > 0$, является общим интегралом (доказательство этого факта будет дано в следующем параграфе).

Найдем частный интеграл данного уравнения, удовлетворяющий начальному условию $y(3) = 4$. Имеем $3^2 + 4^2 - C = 0$, или $C = 25$. Следовательно, $x^2 + y^2 - 25 = 0$ — требуемый частный интеграл.

Общего метода для отыскания решений дифференциального уравнения (2) не существует. Поэтому приходится разделять уравнения этого вида на классы и искать методы решения для каждого класса уравнений в отдельности. В следующих параграфах мы рассмотрим несколько классов дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производной y', решения которых можно выразить в элементарных функциях (либо эти решения выражаются через неопределенные интегралы от элементарных функций или, как говорят в таких случаях, решение выражается в квадратурах).

Вопросы и задания

1. Дать определение дифференциального уравнения.
2. Что называется порядком дифференциального уравнения?
3. Дать определение решения дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.
4. Что называется интегрированием дифференциального уравнения?
5. Объяснить, что называется начальным условием.
6. Сформулировать задачу Коши для дифференциального уравнения $y' = f(x, y)$.
7. Что называется интегральной кривой дифференциального уравнения?
8. Сформулировать геометрически задачу Коши.
9. Что понимается под общим интегралом дифференциального уравнения?

Упражнения

1. Проверить, что функция $y(x)$ является решением соответствующего дифференциального уравнения:

а) $y(x) = 2\cos 4x, \quad y'' + 16y = 0$;

б) $y(x) = 3\cos(2x + \pi), \quad y'' + 4y = 0$;

в) $y(x) = 4\sin\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3}\right), \quad y'' + \frac{1}{4}y = 0$;

г) $y(x) = \frac{1}{3}\sin(0{,}4x + 1), \quad y'' + 0{,}16y = 0$.

2. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y' - 2x = 3$; в) $y'' = \cos x$;

б) $y'' = -x + 1$; г) $y' = x\ln x$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' - x^3 = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 3$.

4. Среди всех интегральных кривых дифференциального уравнения $y' = e^x + 1$ найти ту, которая проходит через точку $M(1;\ 1)$.

---

5. Доказать, что функция $y(x)$ является решением соответствующего дифференциального уравнения:

а) $y(x) = \cos x + \sin x, \quad y'' + y = 0$;

б) $y(x) = x + \cos x, \quad y'' + y - x = 0$;

в) $y(x) = x\ln x - x, \quad y' = \ln x$;

г) $y(x) = \frac{5}{24}x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1, \quad y^{(4)} = 5$.

6. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y'' = x$; б) $y' = \ln x$; в) $y^{(4)} = 5$; г) $y' = x\cos x$.

7. Найти частное решение дифференциального уравнения $(1 + x^2)y' = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = \frac{\pi}{2}$.

8*. Найти линию, проходящую через точку $M(2;\ 0)$ и обладающую тем свойством, что отрезок касательной между точкой касания и осью ординат имеет постоянную длину, равную двум.

§ 3. Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение

$$y' = f(x, y)$$

называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если его можно записать в виде

$$y' = \varphi(x)\psi(y), \tag{1}$$

т. е. если его правую часть можно представить в виде произведения двух функций, одна из которых является функцией переменной x, а другая — функцией переменной y (в частности, может быть $\varphi(x) \equiv C_1$, $\psi(y) \equiv C_2$, где C_1, C_2 — постоянные).

Предполагается, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывны в соответствующих промежутках $(a; b)$ и $(c; d)$, причем $\psi(y) \neq 0$, $y \in (c; d)$,

Уравнение (1) решается следующим образом. Как известно, дифференциал функции в точке равен произведению производной функции в этой точке на дифференциал независимой переменной (см. § 4, глава XIII), т. е. $dy = y'dx$. Дифференциал dx независимой переменной x равен его приращению Δx, причем $\Delta x \neq 0$. Поэтому производную y' можно представить как частное $y' = \frac{dy}{dx}$ дифференциалов dy и dx. Тогда уравнение (1) может быть записано в виде

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x) \cdot \psi(y). \tag{2}$$

Умножая обе части равенства (2) на dx и деля обе части на $\psi(y)$, запишем его в виде

$$\frac{dy}{\psi(y)} = \varphi(x)\,dx. \tag{3}$$

В полученном уравнении в одной его части находится выражение $\frac{1}{\psi(y)}dy$ от переменной y, а в другой части — выражение $\varphi(x)dx$ от переменной x. В таком случае говорят, что *переменные разделены.*

Функции $\frac{1}{\psi(y)}$ и $\varphi(x)$ непрерывны в соответствующих промежутках $(c; d)$ и $(a; b)$, следовательно, они обладают первообразными. Пусть $\Phi(y)$ — одна из первообразных для $\frac{1}{\psi(y)}$ на $(c;\ d)$, а $F(x)$ — одна из первообразных для $\varphi(x)$ на $(a;\ b)$. Тогда

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \Phi(y) + C_1, \quad \int \varphi(x)\,dx = F(x) + C_2, \tag{4}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные. Если теперь в (3) некоторая функция $y = y(x)$ обозначает решение уравнения (1) на $(a;\ b)$, то соотношение (3) является тождеством при всех $x \in (a;\ b)$, и потому имеем

$$\frac{1}{\psi(y)}\,dy \equiv \varphi(x)\,dx, \text{ где } y = y(x),\ x \in (a;\ b).$$

Отсюда $\Phi'(y)dy \equiv F'(x)dx$ или $d\Phi(y) \equiv dF(x)$. Из последнего тождества можно заключить, что функции $F(x)$ и $\Phi(y)$, где $y = y(x)$, отличаются только постоянным слагаемым, т. е.

$$\Phi(y) = F(x) + C_3\,.$$

Отсюда, используя (4), получаем $\int \frac{dy}{\psi(y)} - C_1 = \int \varphi(x)dx - C_2 + C_3$, или

$$\int \frac{dy}{\psi(y)} = \int \varphi(x)dx + C, \tag{5}$$

где $C = C_1 + C_3 - C_2$ — произвольное постоянное.

Соотношение (5) связывает решение $y(x)$ уравнения (1), независимую переменную x и произвольное постоянное C. Это соотношение представляет собой общий интеграл уравнения (1).

Если дополнительно удастся разрешить соотношение (5) относительно искомой функции $y(x)$, то получим уже решение уравнения (1) в явном виде (т. е. общее решение уравнения).

Замечание 1. В некоторых случаях соотношение (5) определяет решение уравнения (1), быть может, не при любом действительном значении постоянного C, а лишь в некоторой допустимой области его изменения.

Пример 1. Рассмотрим снова дифференциальное уравнение из примера 5 предыдущего параграфа, т. е. уравнение

$$y' = -\frac{x}{y}\,.$$

Это уравнение является уравнением с разделяющимися переменными (здесь $\varphi(x) = -x$, $\psi(y) = \frac{1}{y}$). Функция $\varphi(x)$ непрерывна на интервале $(-\infty; +\infty)$, а функция $\psi(y)$ непрерывна на множестве $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$, причем $\psi(y) \neq 0$. Разделяя переменные, получим $ydy = -xdx$. Интегрируя, находим

$$\int ydy = -\int xdx + C .$$

Откуда $\frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + C$, или $x^2 + y^2 = 2C = C_1$. Итак, получили общий интеграл $x^2 + y^2 - C_1 = 0$ для заданного дифференциального уравнения. Ясно, что полученный общий интеграл определяет y как функцию переменной x лишь при условии $C_1 > 0$ (т.е. постоянное C_1 не может быть в данном случае произвольным действительным числом).

Согласно сказанному ранее (см. § 2, формула (7)), задачу о нахождении решения уравнения $y' = -\frac{x}{y}$ уже можно считать разрешенной, так как найден общий интеграл этого уравнения (можно, конечно, найти и общее решение этого дифференциального уравнения, выразив y через x в соотношении $x^2 + y^2 - C_1 = 0$).

Пример 2. Решить уравнение $y' = (y^2 + 1)\cdot \cos x$.

Решение. Данное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными. Здесь $\varphi(x) = \cos x$, $\psi(y) = y^2 + 1$. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ непрерывны всюду и $\psi(y) \neq 0$. Разделяя переменные, получим $\frac{dy}{y^2+1} = \cos x\, dx$. Интегрируя, находим $\int \frac{dy}{y^2+1} = \int \cos x\, dx$ или $\operatorname{arctg} y = \sin x + C$ — общий интеграл дифференциального уравнения.

Решая последнее уравнение относительно y, получаем уже общее решение $y = \operatorname{tg}(\sin x + C)$ заданного дифференциального уравнения.

Замечание 2. Может случиться, что при решении некоторых дифференциальных уравнений неопределенные интегралы $\int \frac{dy}{\psi(y)}$ или $\int \varphi(x)dx$ нельзя выразить в конечном виде через известные элементарные функции и, следовательно, нельзя будет выразить общее решение дифференциального уравнения в виде, не содержащем операции интегрирования. Тем не менее, и в этом случае задача интегрирования уравнения считается решенной (поскольку она уже сведена к изученной ранее задаче вычисления неопределенных интегралов от заданных функций, т. е. сведена к квадратурам).

П р и м е р 3. Решить уравнение $y' = e^{-y^2}$.

Р е ш е н и е. Разделяя переменные, получим $e^{y^2}dy = dx$. Откуда $\int e^{y^2}dy = \int dx + C$, или

$$\int e^{y^2}dy = x + C.$$

Известно, что интеграл $\int e^{y^2}dy$ нельзя выразить в элементарных функциях. Однако задачу интегрирования данного дифференциального уравнения можно считать решенной (поскольку задача сведена к квадратурам).

Замечание 3. При отыскании общего интеграла (5) предполагалось, что $\psi(y) \neq 0$ для всех $y \in (c;\, d)$. Если же при некотором $y = y_0 \in (c;\, d)$ имеем $\psi(y_0) = 0$, то соотношение (3) уже не будет иметь смысла (поскольку при $y = y_0$ в знаменателе окажется число 0). В таком случае функция $y(x) \equiv y_0$ также является решением дифференциального уравнения (1), так как слева в (1) имеем $y' \equiv (y_0)' = 0$, и справа имеем $\varphi(x) \cdot \psi(y) \equiv \equiv \varphi(x) \cdot \psi(y_0) = 0$, т. е. функция $y(x) \equiv y_0$ обращает (1) в тождество. Поскольку в этом случае интеграл $\int \frac{dy}{\psi(y)}$ при $y = y_0$ не определен, то полученное решение $y(x) \equiv y_0$, вообще говоря, не входит в состав общего интеграла (5). Поэтому, решая уравнение вида (1) разделением переменных, отдельно следует проверять, есть ли решения $y(x) \equiv y_0$, определяемые условиями $\psi(y_0) = 0$, $y_0 \in (c;\, d)$. Если такие решения имеются, то их надо присоединить к найденному (методом разделения переменных) общему решению уравнения (1).

П р и м е р 4. Решить уравнение $y' = y^2$.

Р е ш е н и е. Правую часть уравнения можно представить в виде $\varphi(x) \cdot \psi(y)$, где $\varphi(x) \equiv 1$, $\psi(y) = y^2$. При этом $\psi(y) = 0$, если $y = 0$. Поэтому, сначала полагая, что $y \neq 0$, разделим переменные. Имеем $\frac{dy}{y^2} = dx$. Интегрируя, находим $-\frac{1}{y} = x + C$, или $y = -\frac{1}{x+C}$ — общее решение заданного дифференциального уравнения.

При делении обеих частей дифференциального уравнения на y^2 нами было потеряно еще одно его решение, а именно, функция $y(x) \equiv 0$. Это решение не получается из общего ни при каком (конечном) значении C. Следовательно, множество всех решений заданного дифференциального уравнения состоит из его общего решения $y = -\frac{1}{x+C}$ и решения $y(x) \equiv 0$.

? Вопросы и задания

1. В каком случае дифференциальное уравнение $y' = f(x, y)$ называют уравнением с разделяющимися переменными?
2. Привести примеры дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными.
3. Какие требования налагаются на функции $\varphi(x)$ и $\psi(y)$ в уравнении $y' = \varphi(x) \cdot \psi(y)$? Что происходит, если в некоторой точке y_0 значение $\psi(y_0) = 0$?
4. Написать общий интеграл уравнения $y' = \varphi(x) \cdot \psi(y)$.

Упражнения

1. Определить, какие из нижеследующих уравнений являются дифференциальными уравнениями с разделяющимися переменными:

а) $y' = x \cdot y$; г) $x^2 - y^2 + 1 = 0$; ж) $dy - (x+1)y\,dx = 0$;

б) $y' = x + y$; д) $y' + y = 0$; з) $\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = 0$.

в) $x - y' = 0$; е) $\frac{dy}{dx} - \sin x \cdot \cos y = 0$;

2. Решить дифференциальное уравнение:

а) $y' = \frac{x}{y}$; в) $y' = e^y \cdot \cos x$;

б) $y' = \left(y^2 + 1\right) \cdot e^x$; г) $e^y\,(y' + 1) = 1$.

3. Решить уравнение:

а) $(x^2 + 1)\,dy + 2x\,(y-1)\,dx = 0$; в) $y' - x^2 y = 0$;

б) $dy - y^3 dx = 0$; г) $\sqrt{1 - y^2}\,dx + y\sqrt{1 - x^2}\,dy = 0$.

4. Найти частное решение дифференциального уравнения $\sin y \cdot \cos x\, dy = \cos y \cdot \sin x\, dx$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = \frac{\pi}{4}$.

---

5. Решить уравнение:

а) $y' = (x+1)(y+1)$; в) $e^{y^2} \cdot y' = x + 1$;

б) $\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{y^2+1}$; г) $y \cdot y' = e^{x^2}$.

6. Решить уравнение:

а) $y' \operatorname{tg} x - y = 1$; в) $x\, dy = \frac{dx}{y}$;

б) $y' = 10^{x+y}$; г) $x \cdot y \cdot y' = 1 - x^2$.

7. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' \cdot \sin x = y \cdot \ln y$, удовлетворяющее начальному условию $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$.

§ 4. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + p(x) \cdot y = q(x), \tag{1}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — заданные на некотором интервале $(a;\ b)$ функции, а $y = y(x)$ — неизвестная функция, называется *линейным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Если функция $q(x) \equiv 0$ на $(a;\ b)$, то уравнение (1) называют *линейным однородным дифференциальным уравнением* (или уравнением без правой части). Если же функция $q(x) \not\equiv 0$, уравнение (1) называют *линейным неоднородным дифференциальным уравнением* (или уравнением с правой частью).

Пусть функции $p(x)$ и $q(x)$ непрерывны на интервале $(a;\ b)$. Покажем, что уравнение (1) интегрируется в квадратурах на этом интервале.

Рассмотрим сначала линейное однородное уравнение

$$y' + p(x) \cdot y = 0. \tag{2}$$

Это уравнение называют еще уравнением, соответствующим заданному неоднородному уравнению (1). В уравнении (2) переменные легко разделяются (т.е. однородное уравнение является уравнением с разделяющимися переменными). Действительно, $y' = -p(x) \cdot y$ или $\frac{dy}{dx} = -p(x) \cdot y$, т.е. $\frac{dy}{y} = -p(x)dx$ (при $y \neq 0$). Интегрируя, находим

$$\ln|y| = -\int p(x)dx + C_1.$$

Отсюда $|y| = e^{-\int p(x)dx + C_1} = e^{C_1} \cdot e^{-\int p(x)dx}$, или $y = \pm e^{C_1} \cdot e^{-\int p(x)dx}$. Обозначая $\pm e^{C_1}$ через C, получим

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, C \neq 0. \tag{3}$$

Разделяя переменные, мы потеряли решение $y(x) \equiv 0$. Если условиться постоянному C в (3) приписывать также значение, равное нулю, то получим общее решение однородного уравнения (2) в виде

$$y = C \cdot e^{-\int p(x)dx}, \tag{4}$$

C — любое постоянное число, которое содержит решение $y(x) \equiv 0$.

Теперь перейдем к отысканию общего решения линейного неоднородного уравнения (1). Существует несколько методов решения этого уравнения. Здесь мы рассмотрим так называемый *метод вариации произвольной постоянной* (или *метод Лагранжа*).

Ясно, что если $q(x) \not\equiv 0$, то функция из формулы (4) не является решением неоднородного уравнения (1). Поставим следующий вопрос: нельзя ли в общем решении (4) линейного однородного уравнения заменить постоянное C некоторой функцией от x таким образом, чтобы выражение

$$C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx}$$

стало решением неоднородного уравнения (1)?

Итак, в формуле (4) будем считать C не постоянным числом, а некоторой функцией $C = C(x)$ (значит, постоянная величина заменяется переменной, т.е. варьируется). При этом полагаем, что $C(x)$ обладает непрерывной производной на $(a; b)$. Определим эту функцию так, чтобы

$$y = C(x) \cdot e^{-\int p(x)dx} \tag{5}$$

удовлетворяла неоднородному уравнению (1), т.е. решение уравнения (1) ищем в виде (5).

Подставим выражение (5) для y в уравнение (1) и преобразуем уравнение. Тогда имеем

$$\left(C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\right)' + p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} - C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx}\cdot p(x) + p(x)\cdot C(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x)\cdot e^{-\int p(x)dx} = q(x),$$

$$C'(x) = q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}.$$

Откуда

$$C(x) = \int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C_1,$$

где C_1 — произвольное постоянное (непосредственно проверяется, что при таком $C(x)$ функция из формулы (5) удовлетворяет уравнению (1)).

Подставляя найденное выражение для $C(x)$ в формулу (5), получим общее решение линейного неоднородного уравнения (1) в виде

$$y = \left(\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx + C_1\right)\cdot e^{-\int p(x)dx},$$

или

$$y = C_1\cdot e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\cdot\int q(x)\cdot e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (6)$$

Полученная формула для общего решения уравнения (1) является громоздкой. На практике нет необходимости запоминать эту формулу. Важно помнить лишь сам приведенный способ решения уравнения (1) и применять его снова в каждом конкретном случае.

Пример 1. Решить уравнение $x\cdot y' + y = x^2$.

Решение. Приведем сначала данное уравнение к виду (1). Имеем

$$y' + \frac{1}{x}\cdot y = x. \qquad (7)$$

Линейное однородное уравнение, соответствующее уравнению (7), имеет вид

$$y' + \frac{1}{x}\cdot y = 0.$$

Разделяя переменные и интегрируя уравнение, получим

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x}, \quad \frac{dy}{y} = -\frac{dx}{x}, \quad \ln|y| = -\ln|x| + C_1$$

(удобно положить $C_1 = \ln|C|$, $C \neq 0$). Тогда $\ln|xy| = \ln|C|$ или $xy = C$. Следовательно, функция $y = \frac{C}{x}$ является общим решением линейного однородного уравнения.

Теперь ищем общее решение дифференциального уравнения (7) в виде

$$y = \frac{C(x)}{x}, \tag{8}$$

где $C(x)$ — неизвестная функция переменной x, причем такая, что функция $y = \frac{C(x)}{x}$ удовлетворяет уравнению (7).

Подставляя выражение (8) для y в уравнение (7), получим

$$\left(\frac{C(x)}{x}\right)' + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} = x, \quad \frac{C'(x) \cdot x - C(x)}{x^2} + \frac{1}{x} \cdot \frac{C(x)}{x} = x,$$

$$\frac{C'(x)}{x} - \frac{C(x)}{x^2} + \frac{C(x)}{x^2} = x, \quad \frac{C'(x)}{x} = x, \text{ или } C'(x) = x^2.$$

Откуда $C(x) = \frac{x^3}{3} + C_2$, где C_2 — произвольное постоянное. Подставляя теперь полученное выражение для $C(x)$ в формулу (8), получим

$$y = \frac{C(x)}{x} = \frac{\frac{x^3}{3} + C_2}{x} = \frac{x^2}{3} + \frac{C_2}{x}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (7) (а значит, и исходного уравнения) имеет вид

$$y = \frac{x^2}{3} + \frac{C_2}{x},$$

где C_2 — произвольное постоянное.

Пример 2. Решить уравнение $(1+x^2)\,dy - (xy + x + x^3)\,dx = 0$.

Решение. Преобразуем это уравнение:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{xy + x(1+x^2)}{1+x^2}, \quad y' = \frac{x}{1+x^2} \cdot y + x,$$

$$y' - \frac{x}{1+x^2} \cdot y = x\,. \qquad (9)$$

Проинтегрируем соответствующее линейное однородное уравнение:

$$y' - \frac{x}{1+x^2} \cdot y = 0\,, \quad \frac{dy}{y} = \frac{x}{1+x^2}\,dx,$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{d(1+x^2)}{2(1+x^2)}, \quad \ln|y| = \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C_1\,.$$

Положив $C_1 = \ln|C|$, $C \neq 0$ имеем

$$\ln|y| = \ln\sqrt{1+x^2} + \ln|C|, \quad y = C\sqrt{1+x^2}\,.$$

Теперь ищем решение заданного дифференциального уравнения в виде $y = C(x)\sqrt{1+x^2}$. Подставляя это выражение в уравнение (9), получим

$$C'(x)\sqrt{1+x^2} + C(x)\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}} - \frac{x}{1+x^2}C(x)\sqrt{1+x^2} = x\,,$$

$$C'(x)\sqrt{1+x^2} = x,\ \ C'(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,.$$

Откуда

$$C(x) = \int\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\ dx = \frac{1}{2}\int\frac{d(1+x^2)}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2}\int(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\,d(1+x^2) =$$

$$= (1+x^2)^{\frac{1}{2}} + C_2\,,$$

где C_2 — произвольное постоянное. Следовательно, $y = \left(\sqrt{1+x^2} + C_2\right)\cdot\sqrt{1+x^2}$, т.е. общее решение заданного уравнения имеет вид

$$y = 1 + x^2 + C_2\sqrt{1+x^2}\ ,$$

где C_2 — произвольное постоянное.

Вопросы и задания

1. Какое уравнение называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка?

2. В каком случае линейное дифференциальное уравнение первого порядка называют однородным?
3. Объяснить метод Лагранжа (метод вариации произвольной постоянной).

Упражнения

1. Определить, какие из нижеследующих уравнений являются линейными дифференциальными уравнениями первого порядка:

а) $y' - 3y = 0$;
б) $y' - \cos x = xy$;
в) $y'^2 + xy = 2x$;
г) $x \ln y' + y = \cos x$;
д) $y' + xy^2 = 1$;
е) $\frac{dy}{dx} - y = x^2$;
ж) $y' + x^3 \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x}$;
з) $y' = x^2 + 1$.

2. Решить уравнение:

а) $y' + 4y = 0$;
б) $y' + 2y = 4x$;
в) $y' + y = \cos x$;
г) $y' + \frac{1-2x}{x^2} \cdot y = 1$.

3. Найти частное решение дифференциального уравнения $y' - y \operatorname{tg} x = \frac{1}{\cos x}$, удовлетворяющее начальному условию $y(0) = 0$.

---

4. Решить уравнение:

а) $2xdy + (x^2 - 6y)dx = 0$;
б) $\frac{dy}{dx} = 2y - x^2$.

5. Найти частное решение дифференциального уравнения $x \cdot y' - \frac{y}{x+1} = x$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.
6. Пусть $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — два различных решения уравнения $y' + p(x) \cdot y = q(x)$. Доказать, что функция $y = y_1 + C \cdot (y_2 - y_1)$ является общим решением данного уравнения (C — произвольное число).

Упражнения для повторения

1. Найти кривую, проходящую через точку (2; 3) и обладающую тем свойством, что отрезок любой ее касательной, заключенной между координатными осями, делится пополам в точке касания.

2. Закон распада радия состоит в том, что скорость распада пропорциональна наличному количеству радия. Известно, что половина первоначального запаса радия распадается по истечении 1600 лет. Найти, какой процент окажется распавшимся по истечении 100 лет.

3. Найти общее решение дифференциального уравнения:

а) $y' = 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1$;

б) $y' = \frac{x+1}{x}$;

в) $y'' = \sin 2x + x$;

г) $y^{(3)} = \cos 2x$;

д) $y' - x = x^2$;

е) $y'' - \sin 3x = 0$;

ж) $y^{(5)} = 1$;

з) $y' - x \cdot \sin x = 1$.

4. Найти решение дифференциального уравнения $x^2 y' = 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 1$.

5. Среди интегральных кривых уравнения $y' - \ln x = 1$ найти ту, которая проходит через точку $M(1;\ 3)$.

6. Решить уравнение:

а) $y \cdot y' + x = 0$;

б) $y' = y^2$;

в) $\sqrt{y^2 + 1}\, dx = xydy$;

г) $y' = 3 \cdot \sqrt[3]{y^2}$.

7. Найти решение уравнения, удовлетворяющее начальному условию:

а) $y' \cdot \operatorname{ctg} x + y = 2$, $y(0) = -1$; б) $y' - 2xy^2 = 2x$, $y(0) = 1$.

8. Решить уравнение $x^2 y^2 dy + (1 - y)\, dx = 0$.

9*. Замедляющее действие трения на диск, вращающийся в жидкости, пропорционально угловой скорости вращения. Найти зависимость этой угловой скорости от времени, если известно, что диск, начавший вращаться со скоростью 100 об/мин, по истечении 1 мин вращается со скоростью 60 об/мин.

10. Решить уравнение:

а) $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x} y = x^3$;

б) $xy' - 2y = 2x^4$;

в) $y' = 2x\left(x^2 + y\right)$;

г) $x \cdot \left(y' - y\right) = e^x$.

11*. Найти решение уравнения $(2x+1)\,y' = 4x + 2y$, удовлетворяющее условию $y(0) = 2$.

12*. Пусть y_1 и y_2 — два различных решения уравнения $y' + p(x) \cdot y = q(x)$. При каком соотношении между постоянными α и β линейная комбинация $\alpha y_1 + \beta y_2$ будет решением данного уравнения?

ГЛАВА XVI

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 1. Основные формулы комбинаторики

1. Введение. При решении многих практических задач приходится из заданного множества объектов выбирать элементы, обладающие некоторым свойством и располагать эти элементы в определенном порядке. В таких задачах обычно речь идет о тех или иных комбинациях объектов и поэтому их называют *комбинаторными задачами*, а область математики, в которой изучаются комбинаторные задачи, называют *комбинаторикой*.

Приведем несколько примеров комбинаторных задач:

1. Расположить на прямой 6 точек и 3 отрезка так, чтобы на каждом отрезке было по 3 точки.

2. Расположить числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16 так, чтобы они образовывали «магический квадрат», т.е. квадратную таблицу из чисел, в которой суммы чисел по всем строкам, всем столбцам и обеим диагоналям были одинаковы.

3. Определить, сколькими способами можно из 10 мальчиков и 9 девочек выбрать команду для игры в шахматы.

4. Сколько вариантов надо выбрать для того, чтобы открыть дипломат с 6-значной цифрой?

Эти примеры показывают, что комбинаторные задачи разделяются на задачи, в которых нужно: найти хотя бы одно решение поставленной задачи; найти все решения поставленной задачи; найти число всех решений задачи; среди различных способов решения задачи найти оптимальный способ; доказать, что задача не имеет решения.

Мы будем рассматривать лишь те комбинаторные задачи, в которых требуется найти число всех решений.

2. Размещения с повторениями.

Определение 1. Пусть заданы непустые множества X_1, X_2, ..., X_n. *Кортежем длины n*, составленным из элементов этих множеств, называется любая конечная последовательность вида $\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где $x_k \in X_k$, $1 \le k \le n$.

Элемент x_k называется *k-й координатой кортежа* α.

Пример 1. Из множеств $\{a, b, c\}$ и $\{1, 2\}$ можно составить 6 кортежей длины 2:

$$(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2), \ (c, 1), (c, 2).$$

Пример 2. Слово «алгебра» является кортежем длины 7, составленным из букв.

Пример 3. Число 13572 является кортежем длины 5, составленным из цифр.

Пример 4. Любое упорядоченное конечное множество является кортежем, координаты которого различны.

Определение 2. Два кортежа называются равными, если они имеют одинаковую длину и их координаты, стоящие на местах с одноименными номерами, являются одинаковыми.

Пример 5. Кортежи (3, 4, 5) и $\left(\sqrt[3]{27},\ \sqrt[3]{64},\ \sqrt[3]{125}\right)$ равны, поскольку их длины одинаковы и

$$3 = \sqrt[3]{27},\ 4 = \sqrt[3]{64},\ 5 = \sqrt[3]{125}.$$

Пример 6. Кортежи (a, b, c) и (b, a, c) не равны (различны), хотя имеют одинаковую длину и одно и то же множество координат (эти координаты стоят в разном порядке). Различными являются и кортежи (a, b, c) и (a, b, c, d) — они имеют разные длины.

Определение 3. Кортеж, не содержащий ни одной координаты, называется *пустым*.

Чтобы различать кортеж и множество в дальнейшем для обозначения кортежей будем использовать круглые скобки.

Определение 4. Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — непустые множества. *Декартовым произведением* этих множеств называется множество, состоящее из всех кортежей вида

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n), \text{ где } x_k \in X_k,\ 1 \le k \le n.$$

Декартово произведение множеств $X_1, X_2, \ldots, X_n$ обозначают $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Пример 7. Пусть $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e\}$. Тогда

$$A \times B = \{(a,d),\ (a,e),\ (b,d),\ (b,e),\ (c,d),\ (c,e)\} \text{ и}$$

$$B \times A = \{(d,a),\ (d,b),\ (d,c),\ (e,a),\ (e,b),\ (e,c)\}.$$

Этот пример показывает, что, вообще говоря, декартовы произведения $A \times B$ и $B \times A$ являются различными.

Пример 8. Найти число всех кортежей длины k, которые можно составить из элементов множества X, если число элементов этого множества равно m.

Решение. Требуется найти число элементов декартова произведения $X \times X \times \ldots \times X$ (k-раз). Так как множество X имеет m разных элементов, то указанное декартово произведение будет состоять из m^k элементов.

Определение 5. Кортежи длины k, составленные из элементов m-элементного множества X, называются *размещениями с повторениями из m элементов по k*.

Число таких кортежей обозначают $\overline{A}_m^k$. Таким образом, справедлива формула

$$\overline{A}_m^k = m^k.$$

Пример 9. Сколько 4- значных чисел можно составить из десяти цифр

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.$$

Решение. Четырехзначные числа являются кортежами длины 4, составленными из элементов множества $X = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. По доказанной формуле их число будет равно

$$\overline{A}_{10}^4 = 10^4 = 10000.$$

Пример 10. Сколькими способами можно 5 различных конфет распределить между тремя детьми?

Решение. В данном примере можно считать, что дети составляют множество из трех элементов, а длина кортежа равна 5. Тогда $\overline{A}_3^5 = 3^5 = 243$. Следовательно, 5 конфет между тремя детьми можно распределить 243 способами.

3. Размещения без повторений. Будем теперь составлять из элементов m-элементного множества X упорядоченные кортежи длины k. Другими словами, будем рассматривать кортежи длины k без повторяющихся элементов.

Определение 6. Упорядоченные кортежи длины k, составленные из элементов m-элементного множества X, называются *размещениями без повторений из m элементов по k*.

Число таких кортежей обозначают через A_m^k.

Пример 11. Найти число размещений без повторений из m элементов по k.

Решение. Первой координатой кортежа может быть любой из элементов множества X. Так как число этих элементов равно m, то получаем всего m способов.

Если первый элемент x_1 уже выбран, то второй элемент можно выбрать только $m - 1$ способами. Аналогично, если выбраны два элемента x_1 и x_2, то третий элемент x_3 можно выбрать только $m - 2$ способами и т. д.

Таким образом, имеет место формула

$$A_m^k = m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot(m-k+1).$$

Полученную формулу можно записать в упрощенном виде как

$$A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Пример 12. Определить, сколькими способами можно выбрать из 30 учеников старосту класса и ответственного за редколлегию.

Решение. Каждый выбор является размещением без повторений из 30 элементов по 2. Поэтому число способов равно $A_{30}^2 = 30\cdot 29 = 870$.

4. Перестановки без повторений. Если длина размещения без повторений равна числу m элементов множества X, то в этом размещении встречаются по одному разу все элементы из X. Два таких размещения отличаются друг от друга лишь порядком этих элементов.

Определение 7. *Перестановкой без повторений из m элементов* называют размещение без повторений из этих элементов по m.

Число перестановок без повторений из m элементов обозначают через P_m. Так как

$$P_m = A_m^m = m(m-1)(m-2)\ldots(m-(m-1)),$$

то справедлива формула

$$P_m = m!$$

Пример 13. Сколькими способами между 5 людьми можно распределить 5 различных должностей?

Решение. Занумеруем должности людей как 1, 2, 3, 4, 5 и под x_k будем подразумевать имя человека, назначенного на должность с номером k. Тогда $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ — перестановка из имен этих 5 людей, причем каждой такой перестановке соответствует один и только один способ назначения на должность. Поэтому число способов будет равно

$$P_5 = 5! = 120.$$

5. Сочетания без повторений. Будем теперь строить из элементов множества X не кортежи, а различные подмножества.

Определение 8. k-элементные подмножества m-элементного множества X называются *сочетаниями без повторений из элементов этого множества по* k.

Число сочетаний без повторений из m элементов по k обозначают через C_m^k.

Предлагаем читателю в качестве упражнения доказать, что число сочетаний без повторений из m элементов по k вычисляется по формуле

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{k!}, \text{ или } C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}.$$

Пример 14. Сколькими способами можно составить команду из 3 человек для соревнования по плаванию, если имеются 8 пловцов.

Решение. Число способов равно

$$C_8^3 = \frac{8!}{3!\cdot 5!} = \frac{6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 56.$$

6. Перестановки с повторениями. Рассмотрим сначала следующий пример. При перестановке букв в слове «орех» получается всего $P_4 = 4! = 24$ слов. Возьмем другое слово, состоящее из четырех букв, например, слово «озон». При перестановке букв в этом слове получится меньше различных слов, поскольку перестановка двух букв «о» не изменяет слова. В этом случае мы имеем дело с перестановками с повторениями.

Определение 9. *Перестановкой с повторениями* состава (k_1, k_2, k_3, ..., k_m) из букв a_1, a_2, a_3, ..., a_m называют любой кортеж длины $k_1 + k_2 + ... + k_m = n$, в который буква a_1 входит k_1 раз, буква a_2 входит k_2 раз и т. д., буква a_m входит k_m раз.

Число таких перестановок обозначают через $P_n(k_1, k_2, ..., k_m)$. Имеет место формула

$$P_n(k_1, k_2, \ldots, k_m) = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}, \text{ где } n = k_1 + k_2 + ... + k_m.$$

Пример 15. Сколько слов можно получить, переставляя буквы в слове «озон»?

Решение. Слово «озон» является кортежем длины 4, имеющим состав вида (2; 1; 1) (буква «о» входит 2 раза, буква «з» — 1 раз, буква «н» — 1 раз). Поэтому число перестановок (слов) равно

$$P_4(2;1;1) = \frac{4!}{2!\cdot 1!\cdot 1!} = \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 1} = 12.$$

Вопросы и задания

1. Что такое кортеж?
2. Как определяется декартово произведение $A \times B$?
3. Дать определение размещения с повторениями.
4. Дать определение размещения без повторений.
5. Дать определение перестановки без повторений.
6. Дать определение сочетания без повторений.
7. Дать определение перестановки с повторениями.

Упражнения

1. Составить все кортежи (a, b) длины 2, если $a \in \{1, 2, 3, 4\}$, $b \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
2. Составить все кортежи $(a, b\ c)$ длины 3, если $a \in \{0, 1\}$, $b \in \{0, 1\}$, $c \in \{0, 1\}$.
3. Найти декартово произведение $A \times B$, если $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.
4. Найти декартово произведение $A \times A \times A$, если $A = \{0, 1\}$.
5. Сколькими способами можно разложить 8 различных деталей по 5 ящикам?
6. Имеется набор из 9 карточек. На трех из них написана буква A, на трех других — буква B и на трех остальных — буква C. Сколько различных комбинаций букв можно получить, выбирая из набора 3 карточки и располагая их в определенном порядке?
7. Сколькими способами можно составить трехцветный полосатый флаг, если имеются ткани семи различных цветов?
8. В цехе работает 10 токарей. Сколькими способами можно поручить четырем из них изготовление четырех различных видов деталей?
9. Из 12 различных книг выбирают 3 для подарка. Сколькими способами это можно сделать?
10. Сколькими способами можно обить 5 стульев тканью, если имеются ткани пяти различных цветов и все стулья должны быть разного цвета?
11. Сколькими способами могут располагаться в турнирной таблице 12 футбольных команд, если известно, что никакие две команды не набрали поровну очков?

12. Сколькими способами можно выбрать 5 делегатов из состава конференции, на которой присутствует 25 человек?

13. У одного человека есть 10 различных книг по литературе, а у другого — 12 различных книг по математике. Сколькими способами они могут обменять 2 книги?

14. Сколькими способами можно заполнить карточки «Спортлото» (6 из 36)?

---

15. Составить все кортежи $(a,\ b\ c)$ длины 3, если $a \in \{x,\ y\}$, $b \in \{x,\ y\}$, $c \in \{x,\ y\}$.

16. Найти декартово произведение $A \times A \times A$, если $A = \{x,\ y\}$.

17. Сколькими способами можно распределить 5 различных подарков между тремя женщинами?

18. Имеется набор из 16 карточек. На четырех из них написано 1, на четырех других — 2, еще на четырех — 3 и на четырех оставшихся — 4. Сколько различных комбинаций цифр можно получить, выбирая из набора 4 карточки и располагая их в некотором порядке?

19. Сколькими способами можно составить пятицветный полосатый флаг, если имеются ткани восьми различных цветов?

20. В бригаде работает 10 разнорабочих. Сколькими способами двум из них можно поручить две разные работы?

21. В магазине имеется 5 разных ручек и три разных карандаша. Сколько различных комплектов, содержащих ручку и карандаш, можно приобрести в этом магазине?

22. В магазине имеется 6 сортов конфет и 4 сорта печенья. Сколько различных покупок, содержащих один сорт конфет и один сорт печенья можно сделать в этом магазине?

23. Сколько полных различных обедов можно составить, если в меню имеются 3 из первых, 4 из вторых и 2 из третьих блюд?

24. На книжной полке лежат 20 книг по алгебре, 12 книг по геометрии и 18 книг по физике. Сколькими способами можно выбрать три книги так, чтобы одна книга была по алгебре, другая — по геометрии, третья — по физике?

25. Сколько трехзначных чисел меньших 400 можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, 9, если любая из этих цифр может использоваться только один раз?

§ 2. Бином Ньютона. Треугольник Паскаля. Свойства биномиальных коэффициентов

1. Треугольник Паскаля. Для разложения степеней вида $(a+b)^n$, $n \in N$ удобно использовать формулу бинома Ньютона и так называемый треугольник Паскаля (см. главу IV части I). Напомним, что *треугольником Паскаля* называется таблица вида

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & n=1 \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & n=2 \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & n=3 \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & n=4 \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & n=5 \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & n=6 \\
 & & & & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & & & & & \ldots
\end{array}$$

Здесь коэффициенты по краям таблицы равны 1, а внутренние коэффициенты любой строки получаются как сумма двух соседних коэффициентов из предыдущей строки. При помощи такой таблицы можно находить коэффициенты в разложении $(a+b)^n$.

П р и м е р 1. Разложить $(a+b)^5$.

Р е ш е н и е. Воспользуемся коэффициентами строки, соответствующей $n = 5$. Тогда имеем

$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

2. Бином Ньютона. При больших значениях n пользоваться треугольником Паскаля неудобно. Так, например, при $n = 20$ необходимо последовательно записать 19 предыдущих строк. В общем случае удобнее использовать *формулу бинома Ньютона*:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n,$$

где биномиальные коэффициенты $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$, $0 \le k \le n$, $k,\ n \in Z$ (вывод этой формулы приведен в главе IV части I).

Например, при $n = 5$ имеем

$$(a+b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4 b + C_5^2 a^3 b^2 + C_5^3 a^2 b^3 + C_5^4 ab^4 + C_5^5 b^5 =$$
$$= a^5 + 5a^4 b + 10a^3 b^2 + 10a^2 b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

Пример 2. Разложить и упростить выражение $(x + 2)^6$.

Решение. Применяя формулу бинома Ньютона при $n = 6$, имеем разложение

$$(x+2)^6 = x^6 + 2C_6^1 x^5 + 2^2 C_6^2 x^4 + 2^3 C_6^3 x^3 + 2^4 x^2 C_6^4 + 2^5 x C_6^5 + 2^6.$$

Так как

$$C_6^1 = \frac{6!}{1!5!} = 6,\ \ C_6^2 = \frac{6!}{2!4!} = \frac{5\cdot 6}{1\cdot 2} = 15,\quad C_6^3 = \frac{6!}{3!3!} = \frac{4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 20,$$
$$C_6^4 = \frac{6!}{4!2!} = 15,\ \ C_6^5 = \frac{6!}{5!1!} = 6,$$

то, подставляя эти значения коэффициентов в разложение, получим

$$(x+2)^6 = x^6 + 12x^5 + 60x^4 + 160x^3 + 240x^2 + 192x + 64.$$

Пример 3. Найти коэффициент при x^4 в разложении выражения $(2 + x)^{10}$.

Решение. В разложении $(2 + x)^{10}$ есть слагаемое вида $C_{10}^4 x^4 \cdot 2^6$. Так как

$$C_{10}^4 x^4 \cdot 2^6 = \frac{10!}{4!\cdot 6!}\cdot x^4 \cdot 2^6 = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot 64x^4 = 13440x^4,$$

то коэффициент при x^4 равен 13440.

3. Свойства биномиальных коэффициентов. Имеют место следующие свойства:

а) $C_n^k = C_n^{n-k}$, где $0 \le k \le n,\ k,\ n \in Z$;

б) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$, где $0 \le k \le n,\ k,\ n \in Z$.

Доказательство. Применяя формулу для биномиальных коэффициентов, имеем

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_n^k.$$

Это доказывает справедливость свойства а). Свойство а) означает, что коэффициенты членов, одинаково удаленных от концов разложения, равны между собой.

Теперь в формуле бинома Ньютона положим $a = b = 1$. Тогда левая часть формулы будет равна 2^n, а в правой части получим сумму вида $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n$, что доказывает справедливость свойства б). Свойство б) означает, что сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n.

Отметим в заключение, что сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна сумме коэффициентов, стоящих на четных местах. Для того чтобы убедиться в справедливости этого утверждения, в формуле бинома Ньютона следует положить $a = 1$, $b = -1$.

Вопросы и задания

1. По какому правилу находятся коэффициенты в треугольнике Паскаля?
2. В чем состоят достоинство и недостаток треугольника Паскаля?
3. Применить формулу бинома Ньютона для $(a + 6)^8$.
4. Какими свойствами обладают биномиальные коэффициенты?

Упражнения

1. Применяя треугольник Паскаля, найти:

а) $(x + 2y)^3$; б) $(x - 2y)^3$; в) $(2x + 3)^4$; г) $(x + 3)^5$.

2. Применяя формулу бинома Ньютона, найти:

а) $(a + 5)^{10}$; б) $(3 - a)^5$.

3. Чему равен коэффициент при a^2b^4 в разложении бинома $(a + b)^6$?

4. Чему равен коэффициент при a^3b^4 в разложении бинома $(3a + 2b)^7$?

---

5. Применяя треугольник Паскаля, найти:

а) $(a - 3b)^4$; б) $(a + 3b)^5$; в) $(x - 2y)^4$; г) $(x + 4)^5$.

6. Применяя формулу бинома Ньютона, найти:

а) $(2x - 3y)^7$; б) $(3a + 4b)^4$.

7. Чему равен коэффициент при x^5 в разложении бинома $(x - 3)^8$?

§ 3. Решение комбинаторных задач

В этом параграфе рассматриваются уравнения и неравенства, в которых участвуют элементы комбинаторики.

1. Комбинаторные уравнения.

П р и м е р 1. Решить уравнение $\frac{(n+2)!}{n!}=72$, где $n\in N$.

Р е ш е н и е. Так как $(n+2)!=n!(n+1)(n+2)$, то заданное уравнение равносильно уравнению

$$(n+1)(n+2)=72 \quad \text{или} \quad n^2+3n-70=0.$$

Решив последнее уравнение, получим $n_1 = -10$, $n_2 = 7$. Число $n_1 = -10$ является посторонним корнем. Поэтому решение заданного уравнения состоит из одного корня $n = 7$. О т в е т: {7}.

П р и м е р 2. Решить уравнение $5C_3^n = C_{n+2}^4$.

Р е ш е н и е. Применяя формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$, имеем $5\cdot\frac{3!}{n!(3-n)!}=\frac{(n+2)!}{4!(n-2)!}$, где $\begin{cases} n-2\ge 0, \\ 3-n \ge 0, \end{cases}$ или $2 \le n \le 3$.

Подставим $n = 2$ в заданное уравнение. Тогда слева имеем $\frac{5\cdot 3!}{2!\cdot 1!}=15$, а справа получим $\frac{4!}{4!\cdot 0!}=1$. Это означает, что $n = 2$ не является корнем уравнения.

Далее подставим $n = 3$ в уравнение. Тогда имеем $\frac{5\cdot 3!}{3!\cdot 0!}=\frac{5!}{4!\cdot 1!}$, или $5 = 5$. Поэтому $n = 3$ является корнем заданного уравнения. О т в е т: {3}.

2. Комбинаторные неравенства.

П р и м е р 3. Решить неравенство $\frac{(n-1)!}{(n-3)!}<72$, где $n \ge 3$, $n\in N$.

Р е ш е н и е. Так как $(n-1)!=(n-3)!(n-2)(n-1)$, то данное неравенство равносильно неравенству $(n-2)(n-1)<72$. Раскрывая скобки, имеем неравенство $n^2-3n-70<0$. Решив его с помощью метода интервалов, получим, что $n \in (-7;\ 10)$. Но поскольку $n \ge 3$, $n\in N$, то решением исходного неравенства является множество {3; 4; 5; 6; 7; 8; 9}.

П р и м е р 4. Решить неравенство $C_n^5 < C_n^3$, где $n \ge 5$, $n\in N$.

Р е ш е н и е. Применяя формулы $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, $0 \le k \le n$, имеем неравенства

$$\frac{n!}{5!(n-5)!}<\frac{n!}{3!(n-3)!},\ \ \frac{1}{20(n-5)!}<\frac{1}{(n-3)!},\ \ (n-3)!<20(n-5)!,$$

$$(n-5)!(n-4)(n-3)<20(n-5)!,\ \ n^2-7n+12<20.$$

Откуда $n^2-7n-8<0$. Решив последнее неравенство методом интервалов, получим $n\in(-1;\ 8)$.

Так как $n\geq 5$, $n\in N$, то $n\in\{5;\ 6;\ 7\}$. Следовательно, решением исходного неравенства является множество $\{5;\ 6;\ 7\}$.

Вопросы и задания

1. Привести примеры комбинаторных уравнений.
2. Привести примеры комбинаторных неравенств.

Упражнения

1. Решить уравнение:

а) $\frac{(n+1)!}{(n-1)!}=30$;　　в) $13C_{2n}^{n+1}=7C_{2n+1}^{n}$;

б) $\frac{(2n)!}{(2n-3)!}=\frac{20n!}{(n-2)!}$;　　г) $3C_{2n}^{n-1}=5C_{2n-1}^{n-1}$.

2. Решить неравенство:

а) $\frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)}<1000$;　　в) $C_n^5>C_n^4$;

б) $\frac{(2n-1)!}{(2n-3)!}>420$;　　г) $C_{2n}^7>C_{2n}^5$.

---

3. Решить уравнение:

а) $\frac{n!}{(n-4)!}=\frac{12n!}{(n-2)!}$;　　б) $17C_{2n-1}^{n}=9C_{2n}^{n-1}$.

4. Решить неравенство:

а) $\frac{(n-4)(n-3)}{(n-3)!}>0{,}00002$;　　б) $C_{19}^{k-1}<C_{19}^{k}$.

Упражнения для повторения

1. В группе всего 10 учащихся. Сколькими способами можно составить список группы?

2. В пассажирском поезде 12 вагонов. Сколькими способами можно подкрепить 12 проводников к этим вагонам?

3. Пусть $A = \{0, 1, 2, 3\}$. Сколько четырехзначных чисел с различными цифрами можно составить с помощью заданных цифр?

4. В группе всего 25 учащихся. Они поменялись фотокарточками между собой. Сколько всего фотокарточек поменяли?

5. Вычислить:

а) C_8^2; б) C_7^4; в) C_8^6; г) C_{20}^{18}.

6. Доказать равенство:

а) $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 = C_5^3 + C_5^4 + C_5^5$;

б) $C_6^0 + C_6^1 + C_6^2 = C_6^4 + C_6^5 + C_6^6$.

7. Возвести в степень:

а) $(x - 2y)^6$; в) $\left(1 + y^2\right)^4$;

б) $(3x - 1)^7$; г) $\left(\frac{1}{y} + 2\right)^5$.

8. Решить уравнение $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$.

9. Решить неравенство $C_{15}^{n-2} > C_{15}^n$.

ГЛАВА XVII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1. Случайные события. Классическая вероятность

1. Введение. Раздел математики, изучающий закономерности случайных событий, называют *теорией вероятностей*. Эта теория имеет дело не с отдельными событиями, а с закономерностями случайных массовых явлений.

Потребности практики привели математиков к изучению случайных событий. Например, при организации телефонной связи в некотором районе нужно знать число вызовов в каждый момент времени. Это число «случайно» меняется с течением времени.

2. Случайные события. В теории вероятностей изучаются три вида событий:

1) достоверные события;
2) невозможные события;
3) случайные события.

Сначала определим понятие события.

Определение 1. Наблюдение какого-либо явления, при выполнении некоторого комплекса условий, будем называть *опытом*. Любой конкретный результат опыта назовем *событием*.

Примерами событий могут служить: отказ прибора в данный интервал времени, попадание в цель при выстреле, появление «герба» при бросание монеты и т. д.

События обычно обозначаются через A, B, C, ...

Определение 2. Событие называется *достоверным*, если в результате опыта это событие обязательно происходит.

Достоверные события будем обозначать через U. Например, в результате бросания монеты обязательно произойдет событие «выпал «герб» или «цифра»». Поэтому это событие является достоверным.

Определение 3. Событие называется *невозможным*, если оно не может произойти в результате рассматриваемого опыта.

Невозможные события будем обозначать через V. Например, «выпал «герб» и «цифра»» — невозможное событие при бросании одной монеты.

Определение 4. Событие называется *случайным*, если оно либо произойдет, либо не произойдет в результате рассматриваемого опыта.

Случайные события также обозначаются через A, B, C, ...

Рассмотрим опыт — бросание игральной кости. Он состоит в том, что бросают игральную кость (кубик, на сторонах которого указаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6) и смотрят, сколько выпало очков (т. е. какое число указано на грани, оказавшейся сверху). При этом, например, могут иметь место следующие случайные события:

A_1 = «выпало 1 очко», A_2 = «выпало 2 очка»,
A_3 = «выпало 3 очка», A_4 = «выпало 4 очка»,
A_5 = «выпало 5 очков», A_6 = «выпало 6 очков»,
A_7 = «число выпавших очков — простое»,
A_8 = «число выпавших очков делится на 3»,
A_9 = «число выпавших очков — четное»,
A_{10} = «число выпавших очков — нечетное».

Определение 5. Два события называются *несовместными*, если они не могут произойти одновременно в рассматриваемом опыте.

События, которые в рассматриваемом опыте могут произойти одновременно, называются *совместными*.

Пример 1. При бросании игральной кости события A_4 и A_7 одновременно не могут произойти. Поэтому эти события являются несовместными, а события A_4 и A_9 — совместные, так как они одновременно могут произойти.

Определение 6. Говорят, что *событие A благоприятствует событию B*, если из события A следует, что произойдет также событие B. В этом случае пишут $A \subset B$.

Пример 2. При бросании игральной кости событие A_2 благоприятствует событию A_9, так как если произойдет событие A_2, то произойдет и событие A_9. Значит, $A_2 \subset A_9$.

Определение 7. События A_1, A_2, ..., A_n называются *событиями, образующими полную группу*, если в результате некоторого опыта всегда происходит только одно из событий A_i, $i = 1, 2, \ldots, n$ и, кроме того, эти события являются взаимно несовместными.

Пример 3. При опыте с бросанием игральной кости события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 образуют полную группу, так как они взаимно несовместны и всегда происходит только одно из этих событий.

П р и м е р 4. События A_9 и A_{10} также образуют полную группу событий, так как при бросании игральной кости всегда происходит либо событие A_9, либо событие A_{10} и эти события являются взаимно несовместными.

Определение 8. Событие A называется *элементарным*, если ему благоприятствует только само это событие, т. е. если для A имеет место только $A \subset A$.

П р и м е р 5. Полная группа событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 состоит из элементарных событий, так как каждому из событий благоприятствует только само это событие.

П р и м е р 6. Для событий A_2, A_4, A_6, A_9 событие A_9 не является элементарным, так как ему благоприятствуют, кроме A_9, еще и события A_2, A_4, A_6.

Определение 9. *Объединением* (*сложением*) *событий* A и B называется событие C, которое происходит с появлением события A или с появлением события B.

В этом случае пишут: $C = A + B$.

П р и м е р 7. Объединением событий A_2, A_4, A_6 является событие A_9, так как если появляется одно из событий A_2, A_4 или A_6, то обязательно происходит событие A_9.

Определение 10. *Пересечением* (*произведением*) *событий* A и B называется событие C, которое происходит при одновременном появлении событий A и B.

П р и м е р 8. Пересечением событий A_8 и A_{10} является событие A_3, так как если появляются события A_8 и A_{10}, то происходит событие A_3.

Определение 11. События A и $\overline{A}$ называются *противоположными событиями*, если при появлении события A не происходит событие $\overline{A}$ и, наоборот, при появлении события $\overline{A}$ не происходит событие A.

П р и м е р 9. События A_9 и A_{10} является противоположными, так как когда появляется A_9, событие A_{10} не происходит и, наоборот, когда появляется A_{10}, не происходит событие A_9. Значит, $\overline{A}_{10} = A_9$, $\overline{A}_9 = A_{10}$.

3. Классическая вероятность. Пусть A_1, A_2, ..., A_n — элементарные события, образующие полную группу и событие B связано с ними.

Определение 12. *Вероятностью события* B называется число, определяемое по формуле

$$P(B)=\frac{m}{n}, \qquad (1)$$

где m — число элементарных событий, благоприятствующих событию B.

Вероятность события, вычисляемая по формуле (1), называется *классической вероятностью*.

Пример 10. Найти вероятность событий A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7 и A_8 при бросании игральной кости.

Решение. Так как события A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6 являются элементарными, то им благоприятствуют лишь сами эти события соответственно. Поэтому для каждого из них имеем:

$$P(A_1)=\frac{1}{6},\ P(A_2)=\frac{1}{6},\ P(A_3)=\frac{1}{6},\ P(A_4)=\frac{1}{6},$$
$$P(A_5)=\frac{1}{6},\ P(A_6)=\frac{1}{6}.$$

Далее, событию A_7 благоприятствуют элементарные события A_2, A_3, A_5, а событию A_8 благоприятствуют элементарные события A_3 и A_6. Поэтому по формуле (1) имеем:

$$P(A_7)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2},\ \ P(A_8)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}.$$

Пример 11. Бросаются две игральные кости. Найти вероятность того, что выпавшее двухзначное число делится без остатка на 13.

Решение. Когда бросаются две игральные кости, имеем 36 элементарных событий:

11,	21,	31,	41,	51,	61,
12,	22,	32,	42,	52,	62,
13,	23,	33,	43,	53,	63,
14,	24,	34,	44,	54,	64,
15,	25,	35,	45,	55,	65,
16,	26,	36,	46,	56,	66.

Из них только 13, 26, 52 и 65 делятся без остатка на 13. Значит, вероятность выпадения двухзначного числа, делящегося без остатка на 13 равна

$$P(A)=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

П р и м е р 12. На первом курсе учатся 25 студентов, 10 из них девочки. Какова вероятность того, что среди двух отличников обе девочки.

Р е ш е н и е. Общее число элементарных событий равно $n = C_{25}^2$. При этом число благоприятствующих событий равно $m = C_{10}^2 \cdot C_{25-10}^0$. Тогда по формуле классической вероятности искомая вероятность будет равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{10}^2 C_{15}^0}{C_{25}^2} = \frac{10!}{8!2!} \cdot \frac{15!}{0!15!} \cdot \frac{2!23!}{25!} = \frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1 \cdot 2}{24 \cdot 25} = \frac{3 \cdot 2}{8 \cdot 5} = \frac{3}{20} = 0{,}15.$$

В некоторых случаях вычисление вероятности некоторого события с помощью формулы (1) оказывается неудобным из-за сложности определения элементарных событий, связанных с данным событием. В таких случаях используют другие способы вычисления, отличные от классической вероятности.

Рассмотрим пример, в котором для вычисления вероятности события используется так называемая *геометрическая вероятность.*

П р и м е р 13. Пусть задуманы два неотрицательных числа x и y, причем $x \le 2$, $y \le 4$. Какова вероятность того, что $x \ge y$?

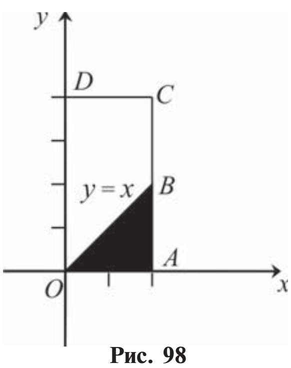


Рис. 98

Р е ш е н и е. В прямоугольной декартовой системе координат рассмотрим прямоугольник $OACD = \{M(x;\ y)\colon 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 4\}$ и прямую $y = x$ (рис. 98). Ясно, что задуманные числа являются координатами точек $M(x;\ y)$, находящихся в этом прямоугольнике, а числа, удовлетворяющие условию $x \ge y$, являются координатами точек, находящихся в треугольнике OAB. Тогда из геометрических соображений ясно, что искомая вероятность будет равна

$$P(A) = \frac{S_{\Delta OAB}}{S_{OACD}} = \frac{\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2}{2 \cdot 4} = \frac{1}{4}.$$

Вопросы и задания

1. Какие события изучаются в теории вероятностей?

2. Дать определение достоверного события.

6. На втором курсе учатся 24 студента, из них 20 — мальчиков. Какова вероятность того, что на конференции выдвигали:

а) 1 мальчика и 1 девочку; в) двух девочек.
б) двух мальчиков;

7. Задуманы два неотрицательных числа x и y, причем $x \le 5$, $y \le 10$. Какова вероятность того, что:

а) $2x \ge y$; б) $x^2 + y^2 \le 2$.

---

8. Бросаются две монеты. Указать достоверные, невозможные и случайные события:

C_1 = «появляется 1 герб»,
C_2 = «появляются 2 герба»,
C_3 = «появляются 3 герба»,
C_4 = «появляется 1 цифра»,
C_5 = «появляются 2 цифры»,
C_6 = «появляются 3 цифры».

9. Бросаются две игральные кости. Указать:

а) попарно несовместные события;
б) противоположные события, если событие

D_1 = «сумма очков на костях меньше 12»,
D_2 = «сумма очков на костях больше 12»,
D_3 = «сумма очков на костях равно 12»,
D_4 = «сумма очков на костях меньше или равно 12»,
D_5 = «сумма очков на костях больше или равно 12».

10. Бросаются монета и игральная кость. Указать все элементарные события.

11. Бросаются монета и игральная кость. Указать 12 событий, образующих полную группу событий.

12. Бросаются три игральные кости. Определить вероятности следующих событий:

а) трехзначное число является нечетным;
б) сумма выпавших очков равна 15;
в) трехзначное число делится без остатка на 11.

13. Студент должен знать ответы на 20 вопросов по алгебре и 10 вопросов по геометрии. Он готовился только на 10 вопросов по алгебре и 5 вопросов по геометрии. В билетах имеются 3 вопроса по алгебре и 1 вопрос по геометрии. Найти вероятность следующих событий:

а) студент правильно ответит на 3 вопроса по алгебре;
б) студент правильно ответит на 2 вопроса по алгебре и 1 вопрос по геометрии;
в) студент не ответит правильно ни на один вопрос.

14. Какова вероятность того, что точка, брошенная в круг радиуса 2, попадет во внутрь квадрата, вписанного в этот круг?

§ 2. Теоремы о вероятности суммы и вероятности произведения событий. Условная вероятность

1. Теоремы о вероятности суммы событий. Приведем теоремы, с помощью которых можно по вероятностям одних случайных событий вычислять вероятности других случайных событий, каким-либо образом связанных с первыми.

Теорема 1. Если события A и B несовместны, то

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Доказательство. Пусть C_1, C_2, C_3, ..., C_n — элементарные события, образующие полную группу. Пусть также событию A благоприятствуют k элементарных события, а событию B благоприятствуют m элементарных событий. Так как события A и B несовместны, то для события $A + B$ благоприятствующие элементарные события являются различными и их число равно $m + k$. Поэтому из формулы классической вероятности следует, что

$$P(A+B)=\frac{m+k}{n}=\frac{m}{n}+\frac{k}{n}=P(A)+P(B).$$

Пример 1. Стрелок стреляет в мишень. Вероятность выбить 10 очков равна $\frac{1}{5}$, а вероятность выбить 9 очков равна $\frac{3}{5}$. Чему равна вероятность выбивания не менее 9 очков?

Решение. Событие C — «выбивание не менее 9 очков» является объединением событий A — «выбивание 9 очков» и B — «выбивание 10 очков». При этом события A и B несовместны, так как они не могут произойти одновременно. Поэтому по теореме 1 имеем:

$$P(C) = P(A + B) = P(A) + P(B) = \frac{3}{5} + \frac{1}{5} = \frac{4}{5}.$$

Теорема 2. Пусть события A и $\overline{A}$ являются противоположными. Тогда

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A).$$

Доказательство. Пусть C_1, C_2, C_3, ..., C_n — элементарные события, образующие полную группу, и событию A благоприятствуют k элементарных события. Тогда событию $\overline{A}$ будут благоприятствовать $n - k$ элементарных события. Поэтому из формулы классической вероятности имеем:

$$P(\overline{A}) = \frac{n-k}{n} = \frac{n}{n} - \frac{k}{n} = 1 - \frac{k}{n} = 1 - P(A).$$

Пример 2. Задумано двухзначное число. Какова вероятность того, что задуманное число имеет различные цифры?

Решение. Обозначим через A событие «задуманное число имеет различные цифры». Тогда $\overline{A}$ — событие «задуманное число имеет одинаковые цифры». Поскольку задумано двухзначное число, то имеем всего 90 элементарных событий:

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, ..., 98, 99.

Из них только 9 элементарных событий: 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99 благоприятствуют событию $\overline{A}$. Поэтому по теореме 2 имеем:

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \frac{9}{90} = \frac{9}{10}.$$

Теорема 3. Если события A_1, A_2, A_3, ..., A_n являются попарно несовместными, то имеет место равенство

$$P(A_1 + A_2 + ... + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n).$$

Доказательство теоремы 3 проводится аналогично доказательству теоремы 1.

2. Условная вероятность. Теоремы о вероятности произведения событий.

Определение 1. События A и B называются *независимыми*, если имеет место равенство

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Определение 2. Число, выражающее вероятность события A при условии, что произошло событие B, называется *условной вероятностью события A относительно события B.*

Для условной вероятности применяют обозначение $P\left(A/_B\right)$.

Пример 3. В ящике лежат 12 красных и 8 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Какова вероятность того, что второй вынутый шар является красным, если первый вынутый шар был красным?

Решение. Если первый вынутый шар был красный, то в ящике осталось 19 шаров и из них 11 красных.

Обозначим через B событие «первый вынутый шар красный», а через A — событие «второй вынутый шар красный». Тогда из формулы (1) (см. § 1) и определения 2 следует, что

$$P\left(A/_B\right) = \frac{11}{19}.$$

Для вычисления условной вероятности применяют формулу

$$P\left(A/_B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Из нее легко выводится *формула для вычисления вероятности произведения событий*:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B).$$

Пример 4. В ящике лежат 12 красных и 8 зеленых шаров, одинаковых на ощупь. Какова вероятность того, что из двух вынутых шаров оба являются красными?

Решение. Обозначим через B событие «первый вынутый шар красный», а через A — событие «второй вынутый шар красный». Тогда $A \cap B$ является событием «оба вынутых шара являются красными».

Отсюда, применяя формулу (1) из §1 и формулу вычисления вероятности произведения событий, получаем:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A/B) = \frac{12}{20} \cdot \frac{11}{19} = \frac{33}{95}.$$

Теорема 4. Для любых событий A, B, C имеет место равенство

$$P(A \cap B \cap C) = P(A) \cdot P(B/A) \cdot P(C/A \cap B).$$

Доказательство теоремы предоставляется читателю в качестве самостоятельной работы.

Пример 5. Три сигнализатора работают независимо друг от друга. При аварии сигнализаторы срабатывают соответственно с вероятностями $\frac{8}{9}$, $\frac{7}{8}$ и $\frac{6}{7}$. Какова вероятность того, что при аварии сработают два сигнализатора?

Решение. Обозначим через

A_1 – событие «при аварии срабатывает первый сигнализатор»;

A_2 – событие «при аварии срабатывает второй сигнализатор»;

A_3 – событие «при аварии срабатывает третий сигнализатор»;

C_1 – событие «при аварии срабатывают только второй и третий сигнализаторы»,

C_2 – событие «при аварии срабатывают только первый и третий сигнализаторы»,

C_3 – событие «при аварии срабатывают только первый и второй сигнализаторы»,

$C_1 + C_2 + C_3$ – событие «при аварии срабатывают ровно два сигнализатора».

Тогда из определения 10 (см. §1) получаем следующие равенства:

$$C_1 = \overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3,\ C_2 = A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3,\ C_3 = A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}.$$

Так как события C_1, C_2, C_3 – попарно несовместны, имеет место равенство

$$P(C_1 + C_2 + C_3) = P(C_1) + P(C_2) + P(C_3).$$

Сигнализаторы работают независимо друг от друга и события A_1, A_2, A_3 являются независимыми. Поэтому из определения 1 следует, что

$$P(C_1) = P\left(\overline{A_1} \cap A_2 \cap A_3\right) = P\left(\overline{A_1}\right) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) = \frac{1}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1}{12},$$

$$P(C_2) = P\left(A_1 \cap \overline{A_2} \cap A_3\right) = P(A_1) \cdot P\left(\overline{A_2}\right) \cdot P(A_3) = \frac{8}{9} \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{6}{7} = \frac{2}{21},$$

$$P(C_3) = P\left(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A_3}\right) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P\left(\overline{A_3}\right) = \frac{8}{9} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{1}{7} = \frac{1}{9}.$$

Отсюда получаем

$$P(C_1 + C_2 + C_3) = \frac{1}{12} + \frac{2}{21} + \frac{1}{9} = \frac{73}{252}.$$

Вопросы и задания

1. Для несовместных событий A и B доказать формулу $P(A+B)=P(A)+P(B)$.

2. Как вычисляется вероятность противоположного события?

3. Для несовместных событий A, B, C доказать формулу $P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)$.

4. Дать определение условной вероятности.

5. Дать определение независимых событий.

6. Для событий A, B, C доказать формулу

$$P(A\cap B\cap C)=P(A)\cdot P(B/A)\cdot P(C/A\cap B).$$

Упражнения

1. Бросили игральную кость. Найти условную вероятность того, что выпало простое число очков, при условии, что число выпавших очков нечетно.

2. Два станка работают независимо друг от друга. Вероятность того, что первый станок проработает смену без наладки, равна $\frac{9}{10}$, вероятность того, что второй станок проработает смену без наладки, равна $\frac{4}{5}$. Какого вероятность того, что:

а) оба станка проработают смену без наладки;
б) оба станка за смену потребуют наладки;
в) только один станок потребует наладки?

3. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель первого стрелка равна 0,8, для второго — 0,75, для третьего — 0,7. Какова вероятность:

а) хотя бы одного попадания в цель;
б) ровно одного попадания в цель;
в) ровно двух попаданий в цель;
г) того, что все стрелки попали в цель;
д) того, что все стрелки промахнулись?

4. В мастерской работают три станка независимо друг от друга. За смену первый станок может потребовать наладки с вероятностью 0,15 (и после этого до конца смены наладки не потребуется). Для второго станка эта вероятность равна 0,1, для третьего — 0,12. Какова вероятность того, что:

а) хоть один станок за смену потребует наладки;

б) ровно один станок потребует наладки;

в) все станки потребуют наладки;

г) хоть один станок за смену не потребует наладки?

5. В ящике лежат 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров, одинаковых на ощупь. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность того, что:

а) оба шара — зеленые, если известно, что при этом не вынут синий шар;

б) вынутые шары — разноцветные, если известно, что не вынут синий шар;

в) оба шара — красные, если известно, что не вынут синий шар?

---

6. Бросили игральную кость. Найти условную вероятность того, что выпало простое число очков, при условии, что число выпавших очков четно.

7. Два стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,6, для второго стрелка равна 0,7. Найти вероятности следующих событий:

а) один стрелок попал в цель;
б) хотя бы один стрелок попал в цель;
в) оба стрелка попали в цель;
г) ни один стрелок не попал в цель;
д) хотя бы один стрелок не попал в цель.

8. Четыре сигнализатора при аварии работают независимо друг от друга. При аварии сигнализаторы срабатывают с вероятностями 0,6; 0,7; 0,8 и 0,9 соответственно. Найти вероятности следующих событий:

а) при аварии срабатывает более трех сигнализаторов;

б) при аварии срабатывает менее двух сигнализаторов;

в) при аварии срабатывают все сигнализаторы;

г) ни один сигнализатор не срабатывает при аварии.

9. Бросаются игральная кость и монета. Какова вероятность одновременного появления двух событий: «выпадание 6 очков» и «выпадание герба»?

10. В ящике имеется 5 карандашей черного цвета и 15 карандашей красного цвета (все карандаши внешне одинаковы). Какова вероятность того, что второй вынутый карандаш является черным, при условии, что первый карандаш тоже был черным?

§ 3. Формула Бернулли

Многие задачи теории вероятностей сводятся к *схеме Бернулли*. Суть схемы заключается в том, что некоторой опыт независимым образом повторяется n раз. Например, бросим одну и ту же монету 3 раза и посмотрим, что выпало при каждом бросании. Ясно, что результат при первом бросании монеты не влияет на результат второго бросания, а результаты первого и второго бросания не влияют на результат третьего бросания. Таким образом, мы один опыт повторяем независимо 3 раза. Рассмотренный пример является примером использования схемы Бернулли для $n = 3$.

Определение 1. Пусть опыт S_1 есть первое осуществление опыта S, опыт S_2 есть второе осуществление опыта S и т. д. Будем называть *опыты* S_1, S_2, ..., S_n *независимыми*, если результаты опытов S_1, S_2, ..., S_{k-1} не влияют на результат опыта S_k, где $k = 2, 3, ..., n$.

Сформулируем следующую простейшую задачу для схемы Бернулли. Пусть в опыте S событие A происходит с вероятностью $P(A) = p$. Опыт S повторим независимым образом n раз. Какова вероятность того, что событие A произошло ровно m раз в этих опытах?

Искомую вероятность принято обозначать через $P_n(m)$. Ответ на поставленный вопрос дает *формула Бернулли*:

$$P_n(m) = C_n^m p^m (1-p)^{n-m}.$$

Пример 1. Одна монета бросается 10 раз. Какова вероятность того, что «герб» выпадет ровно 5 раз?

Решение. При бросании монеты «герб» выпадает с вероятностью $\frac{1}{2}$. Тогда по формуле Бернулли имеем

$$P_{10}(5) = \frac{10!}{5!(10-5)!}\left(\frac{1}{2}\right)^5 \left(1-\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\cdot\frac{1}{2^{10}} = \frac{63}{256}.$$

Пример 2. Играют два шахматиста. Первый шахматист играет в два раза сильнее, чем второй шахматист. Какова вероятность того, что из четырех партий 1 раз выиграет первый шахматист («ничья» не учитывается)?

Р е ш е н и е. Обозначим через A событие «выиграл первый шахматист». Тогда из формулы (1) (см. §1) имеем $P(A)=\dfrac{2}{3}$.

Теперь из формулы Бернулли получаем

$$P_4(1)=C_4^1\left(\frac{2}{3}\right)^1\left(1-\frac{2}{3}\right)^{4-1}=\frac{4!}{1!3!}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3^3}=\frac{8}{81}.$$

П р и м е р 3. В семье трое детей. Какова вероятность того, что в этой семье два мальчика, если вероятности рождения мальчика и девочки одинаковы?

Р е ш е н и е. Обозначим через A событие «рождение мальчика». Тогда из формулы (1) (см. §1) имеем $P(A)=\dfrac{1}{2}$. Теперь, используя формулу Бернулли, получаем

$$P_3(2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{3-2}=\frac{3!}{2!1!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}.$$

П р и м е р 4. Играют два шахматиста одинаковой силы. Какова вероятность того, что первый шахматист выиграет не менее двух партий из четырех?

Р е ш е н и е. Обозначим через A событие «выиграл первый шахматист». Тогда из формулы (1) (см. § 1) имеем $P(A)=\dfrac{1}{2}$. Искомая вероятность P представляет собой сумму вероятностей $P_4(2)$, $P_4(3)$, $P_4(4)$. Поэтому, используя формулу Бернулли, получим

$$P=P_4(2)+P_4(3)+P_4(4)=C_4^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-2}+C_4^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-3}+$$

$$+C_4^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(1-\frac{1}{2}\right)^{4-4}=\frac{3\cdot 4}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{16}+4\cdot\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}.$$

Вопросы и задания

1. Дать определение независимых опытов.
2. Написать формулу Бернулли.
3. Привести пример использования схемы Бернулли.

Упражнения

1. В цехе работают 6 моторов независимо друг от друга. Каждый мотор работает определенное время с вероятностью 0,8. Найти вероятности следующих событий:

   а) работает 4 мотора;
   б) все моторы работают;
   в) все моторы не работают.

2. Событие A с вероятностью 0,3 появляется в каждом из 5 независимых испытаний. Какова вероятность того, что событие A произойдет не менее 2 раз?

3. Монету бросают 6 раз. Найти вероятности следующих событий:

   а) не более 1 раза выпадет герб;
   б) менее 2 раз выпадет герб.

---

4. Играют 2 шахматиста. Первый шахматист играет в 3 раза слабее, чем второй шахматист. Какова вероятность того, что первый шахматист выиграет три партии из трех?

5. Играют 2 шахматиста одинаковой силы. Какое из событий является более вероятным: выигрыш не менее 3 партий из 4 или выигрыш не менее 5 партий из 8?

6. Игральная кость бросается 10 раз. Какова вероятность того, что числа, кратные 3 очкам, выпадут не менее 2 и не более 5 раз?

§ 4. Элементы математической статистики

1. Введение. В этом параграфе мы рассмотрим некоторые элементы математической статистики. *Математическая статистика* — это раздел математики, который посвящен математическим методам систематизации, обработки, группировки и использования статистических данных для научных и практических выводов. *Статистическими данными* называются сведения о числе объектов, в какой-либо (более или менее обширной) совокупности данных, обладающих определенными признаками.

2. Генеральная совокупность. Выборочная совокупность (выборка). Изучение множества сходных объектов может проводиться как по качественному, так и по количественному признакам. Например, если обследуется партия деталей, то качественным признаком может быть стандартность (или нестандартность) детали, а количественным признаком — размер детали.

Проверку партии деталей можно проводить двумя различными способами:

1) можно провести контроль всех деталей;

2) можно провести контроль только определенной части деталей.

Отметим, что контроль может быть связан с разрушением деталей, и поэтому первый способ не всегда удобен при большом числе деталей в партии.

Все множество объектов, подлежащих контролю и исследованию, называется *генеральной совокупностью*. Число элементов указанного множества объектов называют *объемом генеральной совокупности*. Множество объектов, попавших на проверку, называют *выборочной совокупностью* или *выборкой*. Число элементов выборки называется *объемом выборки*.

Пример 1. Пусть из 1000 деталей для контроля отобрано 50. Тогда объем генеральной совокупности $N = 1000$, а объем выборки $n = 50$.

Пример 2. Администрация академического лицея желает проверить успеваемость учащихся по математике. Предполагается, что в лицее 350 учащихся и из них 50 попали на проверку. Тогда все учащиеся академического лицея составляют генеральную совокупность объемом 350, а попавшие на проверку 50 из учащихся составляют выборку объемом 50.

Обычно генеральная совокупность содержит конечное число объектов. Но это число, как правило, достаточно велико. Поэтому при теоретических выводах объем генеральной совокупности часто предполагается бесконечным.

Сама выборка может проводиться двумя способами. Первый способ называют *повторной выборкой*. При этом способе объекты для исследования поочередно берутся из генеральной совокупности, затем возвращаются после исследования (например, взяли деталь, измерили ее, вернули обратно, затем случайно выбрали следующую деталь для обмера. При этом не исключено, что одну и ту же деталь возьмут несколько раз).

Второй способ называют *бесповторной выборкой*. При таком способе исследованные объекты в генеральную совокупность не возвращаются (делаются бесповторные выборки).

Сделанная выборка должна достаточно полно отражать особенности всех объектов генеральной совокупности. Это особенно важно в тех случаях, когда генеральная совокупность имеет определенную неоднородность. Коротко это требование к выборке формулируют так: выборка должна быть репрезентативной, т.е. представленной.

Осуществление выборки производится следующими способами:

1. Простой случайный отбор.
2. Типовой отбор.
3. Серийный отбор.
4. Механический отбор.

Простой случайный отбор можно производить по-разному. Например, номера контролируемых деталей из всей генеральной совокупности выписываются на карточки, эти детали перемешивают и выбирают карточки.

Типовой отбор производится следующим образом. Сначала выборку делят на несколько частей, причем каждая часть является однородной относительно некоторого признака, затем на каждой части выборки производится простой случайный отбор.

При механическом отборе для исследования выбираются детали с определенным признаком, например, вторая деталь, четвертая, шестая и т. д. (т. е. детали с четными номерами). Такой отбор не всегда дает репрезентативную выборку.

Возможен также серийный отбор. Например, пусть 3 станка обрабатывают одинаковые детали. Тогда в качестве выборки можно взять детали, обработанные только первым станком.

Отметим, что в зависимости от конкретных условий производства описанные выше способы можно комбинировать.

Вопросы и задания

1. Что изучают в математической статистике?

2. Дать определения генеральной и выборочной совокупности.

3. Дать определения повторной и бесповторной выборки.

4. Что означает простой случайный отбор, типовой отбор?

5. Что означает серийный отбор, механический отбор?

Упражнения для повторения

1. Бросаются 4 монеты. Указать все элементарные события.
2. Бросаются 3 игральные кости. Определить вероятности следующих событий:
   а) сумма выпавших очков равна 10;
   б) трехзначное число делится без остатка на 4;
   в) трехзначное число делится без остатка на 9.
3. Из пяти отрезков с длинами соответственно 1, 3, 5, 7, 9 наудачу выбирают три. Какова вероятность того, что из них можно построить треугольник?
4. Куб, все грани которого окрашены, распилен на 1000 равных кубиков. Найти вероятность того, что наудачу взятый кубик имеет две окрашенные грани?
5. Какова вероятность того, что в декабре месяце произвольно выбранного года окажется пять воскресных дней?
6. На шести одинаковых карточках написаны буквы «А», «В», «К», «М», «С», «О». Карточки раскладываются наугад в ряд. Какова вероятность того, что получится слово «МОСКВА»?
7. В ящике лежат 20 одинаковых на ощупь шаров: 12 белых и 8 красных. Какова вероятность того, что 2 вынутых шара имеют разный цвет?
8. На карточках написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Наугад берутся 4 карточки и раскладываются в ряд. Какова вероятность того, что получится четное число?
9. Какова вероятность того, что точка, брошенная на квадрат со стороной 1, попадет во внутрь вписанного круга?

ГЛАВА XVIII

ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1. Линейные пространства

1. Понятие числового поля. Известно, что множество Q рациональных чисел обладает следующими свойствами:

1°. Для любых рациональных чисел r_1, r_2 существует их сумма $r_1 + r_2$, которая является рациональным числом.

2°. Для любых рациональных чисел r_1, r_2 выполняется равенство $r_1 + r_2 = r_2 + r_1$, то есть операция сложения рациональных чисел коммутативна.

3°. Операция сложения рациональных чисел ассоциативна, то есть для любых рациональных чисел r_1, r_2, r_3 выполняется равенство $(r_1 + r_2) + r_3 = r_1 + (r_2 + r_3)$.

4°. 0 — рациональное число и для любого рационального числа r выполняется равенство $r + 0 = r$.

Число 0 называют *нейтральным элементом относительно операции сложения*.

5°. Для любого рационального числа r существует единственное рациональное число $-r$ такое, что $r + (-r) = 0$.

Число $-r$ называют *противоположным элементом*.

6°. Для любых рациональных чисел r_1, r_2 существует их произведение $r_1 \cdot r_2$, которое является рациональным числом.

7°. Операция умножения рациональных чисел коммутативна, то есть для любых рациональных чисел r_1, r_2 верно равенство $r_1 \cdot r_2 = r_2 \cdot r_1$.

8°. Операция умножения рациональных чисел ассоциативна, то есть для любых рациональных чисел r_1, r_2, r_3 верно равенство $(r_1 \cdot r_2) \cdot r_3 = r_1 \cdot (r_2 \cdot r_3)$.

9°. Операция умножения рациональных чисел относительно сложения дистрибутивна, то есть для любых рациональных чисел r_1, r_2, r_3 верно равенство $r_1(r_2 + r_3) = r_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot r_3$.

10°. 1 — рациональное число и для любого рационального числа r верно равенство $r \cdot 1 = r$.

Число 1 называют *нейтральным элементом относительно операции умножения*.

11°. Для любого ненулевого рационального числа r, существует единственное рациональное число r^{-1}, называемое *обратным элементом,* такое, что $r^{-1} \cdot r = 1$.

Кроме множества рациональных чисел указанными выше свойствами обладают множество действительных чисел R и множество комплексных чисел C. Множество, обладающее свойствами 1°—11°, называется *полем*.

Возникает естественный вопрос: существуют ли поля, отличные от Q, R и C?

Следующий пример показывает, что такие поля существуют.

Пример 1. Рассмотрим множество

$$Q(\sqrt{p}) = \{a + b\sqrt{p} \mid a, b \in Q;\ p \text{ — простое число}\}.$$

Пусть z, z_1, $z_2 \in Q(\sqrt{p})$ и $z = a + b\sqrt{p}$, $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$, где a_1, a_2, b_1, $b_2 \in Q$.

Проверим выполнение свойств 1°—11°.

1. Для любых z_1, $z_2 \in Q(\sqrt{p})$ определим следующим образом операцию сложения:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) + (a_2 + b_2\sqrt{p}) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{p}.$$

Так как сумма рациональных чисел есть рациональное число, то, обозначая $a_1 + a_2 = a$, $b_1 + b_2 = b$, получим элемент $z = a + b\sqrt{p}$ из множества $Q(\sqrt{p})$. Значит, на множестве $Q(\sqrt{p})$ определена операция сложения.

2. Так как операция сложения рациональных чисел коммутативна, то для любых элементов $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ множества $Q(\sqrt{p})$ верны равенства

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{p} = (a_2 + a_1) + (b_2 + b_1)\sqrt{p} = z_2 + z_1.$$

3. Так как операция сложения рациональных чисел ассоциативна, то для любых элементов $z = a + b\sqrt{p}$, $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$, множества $Q(\sqrt{p})$ верны равенства

$$(z + z_1) + z_2 = ((a + a_1) + (b + b_1)\sqrt{p}) + a_2 + b_2\sqrt{p} =$$
$$= (a + a_1) + a_2 + ((b + b_1) + b_2)\sqrt{p} =$$
$$= a + (a_1 + a_2) + (b + (b_1 + b_2))\sqrt{p} = z + (z_1 + z_2).$$

4. Найдем элемент e множества $Q(\sqrt{p})$, удовлетворяющий условию $z + e = z$ для любого элемента $z = a + b\sqrt{p}$ из этого множества.

Пусть $e = x + y\sqrt{p}$. Тогда из равенства $(a+b\sqrt{p})+(x+y\sqrt{p}) = (a+b\sqrt{p})$ или $(a+x)+(b+y)\sqrt{p} = a+b\sqrt{p}$ получим систему уравнений $\begin{cases} a+x=a, \\ b+y=b. \end{cases}$ Каждое уравнение полученной системы имеет единственное решение на множестве рациональных чисел, то есть $\begin{cases} x=0, \\ y=0. \end{cases}$. Значит, на множестве $Q(\sqrt{p})$ существует нейтральный элемент относительно сложения. Он равен $e = 0 + 0\sqrt{p}$.

5. Найдем элемент z', удовлетворяющий условию $z + z' = e$ для любого элемента $z = a + b\sqrt{p}$ множества $Q(\sqrt{p})$.

Пусть $z' = x' + y'\sqrt{p}$. Тогда из равенства $(a+b\sqrt{p})+(x'+y'\sqrt{p}) = 0+0\sqrt{p}$ получим систему уравнений $\begin{cases} a+x'=0, \\ b+y'=0, \end{cases}$ которая на множестве рациональных чисел имеет единственное решение $\begin{cases} x'=-a, \\ y'=-b. \end{cases}$ Таким образом,

$$z' = -a + (-b)\sqrt{p} = -(a+b\sqrt{p}) \in Q(\sqrt{p}),$$

т.е. на множестве $Q(\sqrt{p})$ существует противоположный элемент.

6. Пусть $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ — два любых элемента множества $Q(\sqrt{p})$. Определим операцию умножения этих элементов по формуле

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + b_1\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p}) =$$
$$= (a_1 \cdot a_2 + pb_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{p}.$$

Так как произведение и сумма рациональных чисел есть рациональное число, то обозначая $a_1a_2 + pb_1b_2 = a$, $a_1b_2 + b_1a_2 = b$, получим $z_1 \cdot z_2 = a + b\sqrt{p} \in Q(\sqrt{p})$.

7. Так как операция умножения рациональных чисел коммутативна, то для любых элементов $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$, множества $Q(\sqrt{p})$ верны равенства

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 + pb_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{p} =$$
$$= (a_2a_1 + pb_2b_1) + (a_2b_1 + b_2a_1)\sqrt{p} = z_2 \cdot z_1,$$

т.е. операция умножения элементов на множестве $Q(\sqrt{p})$ коммутативна.

8. Для любых элементов $z = a + b\sqrt{p}$, $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ множества $Q(\sqrt{p})$ верны равенства

$$(z \cdot z_1) \cdot z_2 = ((aa_1 + pbb_1) + (ab_1 + ba_1)\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p}) =$$
$$= ((aa_1)a_2 + p(bb_1)a_2 + p(ab_1)b_2 + p(ba_1)b_2) + ((aa_1)b_2 + p(bb_1)b_2 +$$
$$+(ab_1)a_2 + (ba_1)a_2)\sqrt{p} = (a(a_1a_2) + pb(b_1a_2) + pa(b_1b_2) + pb(a_1b_2)) +$$
$$+(a(a_1b_2) + pb(b_1b_2) + a(b_1a_2) + b(a_1a_2))\sqrt{p} = (a + b\sqrt{p}) \cdot ((a_1a_2 + pb_1b_2) +$$
$$+(a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{p}) = (a + b\sqrt{p})((a_1 + b_1\sqrt{p}) \cdot (a_2 + b_2\sqrt{p})) = z \cdot (z_1 \cdot z_2),$$

т. е. операция умножения элементов на множестве $Q(\sqrt{p})$ ассоциативна.

9. Для любых элементов $z = a + b\sqrt{p}$, $z_1 = a_1 + b_1\sqrt{p}$, $z_2 = a_2 + b_2\sqrt{p}$ множества $Q(\sqrt{p})$ верны равенства

$$z(z_1 + z_2) = (a + b\sqrt{p})((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)\sqrt{p}) =$$
$$= a(a_1 + a_2) + pb(b_1 + b_2) + (a(b_1 + b_2) + b(a_1 + a_2))\sqrt{p} =$$
$$= aa_1 + pbb_1 + (ab_1 + ba_1)\sqrt{p} + aa_2 + pbb_2 + (ab_2 + ba_2)\sqrt{p} =$$
$$= (a + b\sqrt{p})(a_1 + b_1\sqrt{p}) + (a + b\sqrt{p})(a_2 + b_2\sqrt{p}) = z \cdot z_1 + z \cdot z_2.$$

Таким образом, операция умножения на множестве $Q(\sqrt{p})$ дистрибутивна относительно сложения элементов.

10. Найдем элемент e', удовлетворяющий равенству $z \cdot e' = z$ для любого элемента $z = a + b\sqrt{p}$ множества $Q(\sqrt{p})$. Пусть

$e' = x' + y'\sqrt{p}$. Тогда из равенства $(a + b\sqrt{p})(x' + y'\sqrt{p}) = a + b\sqrt{p}$ получим систему уравнений $\begin{cases} ax' + pby' = a, \\ ay' + bx' = b, \end{cases}$ которая на множестве рациональных чисел имеет единственное решение $\begin{cases} x' = 1, \\ y' = 0. \end{cases}$

Таким образом, на множестве $Q(\sqrt{p})$ существует нейтральный элемент относительно операции умножения. Он равен $e' = 1 + 0\sqrt{p}$.

11. Пусть $z = a + b\sqrt{p}$, где a, b не равны одновременно нулю. Найдем на множестве $Q(\sqrt{p})$ элемент z'', удовлетворяющий условию $z \cdot z'' = e'$, где e' — нейтральный элемент относительно операции умножения. Пусть $z'' = x'' + y''\sqrt{p}$. Тогда из равенства $(a + b\sqrt{p})(x'' + y''\sqrt{p}) = 1 + 0\sqrt{p}$ получим систему уравнений

$$\begin{cases} ax'' + pby'' = 1, \\ ay'' + bx'' = 0. \end{cases}$$

Эта система на множестве рациональных чисел имеет единственное решение

$$\begin{cases} x'' = \dfrac{a}{a^2 - pb^2}, \\ y'' = \dfrac{-b}{a^2 - pb^2}. \end{cases}$$

Значит, $z'' = \dfrac{a}{a^2 - pb^2} + \dfrac{-b}{a^2 - pb^2}\sqrt{p} \in Q(\sqrt{p})$ и на множестве $Q(\sqrt{p})$ для любого элемента (отличного от нейтрального элемента относительно операции сложения) существует обратный к нему элемент.

Таким образом, множество $Q(\sqrt{p})$ образует поле.

2. Векторы на плоскости и операции над ними. Рассмотрим множество всех векторов на координатной плоскости R^2. Из курса школьной геометрии известно, что множество всех векторов удовлетворяет следующим свойствам:

1°. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in R^2$ существует их сумма, которая также является вектором плоскости R^2 (см. рис. 99).

Напомним, что сумма векторов определяется по правилу параллелограмма.

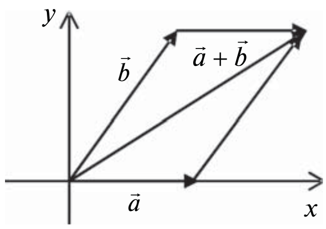


Рис. 99

2°. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in R^2$ верно условие коммутативности сложения векторов, т.е. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

3°. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in R^2$ верно условие ассоциативности сложения векторов, т.е. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

4°. На плоскости R^2 существует нуль-вектор $\vec{0}$ такой, что для любого $\vec{a} \in R^2$ верны равенства $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ и $\vec{0}+\vec{a}=\vec{a}$.

5°. Для любого вектора $\vec{a} \in R^2$ существует противоположный вектор $-\vec{a} \in R^2$ такой, что $\vec{a}+(-\vec{a})=(-\vec{a})+\vec{a}=\vec{0}$.

6°. Для любого действительного числа $\alpha \in R$ и любого вектора $\vec{a} \in R^2$ верно, что $\alpha \cdot \vec{a} \in R^2$, т. е. умножая действительное число на вектор, получим вектор.

7°. Для любых $\alpha, \beta \in R$ и любого вектора $\vec{a} \in R^2$ верно равенство $(\alpha \cdot \beta)\vec{a}=\alpha(\beta \cdot \vec{a})$.

8°. Для любых $\alpha, \beta \in R$ и любого вектора $\vec{a} \in R^2$ верно равенство $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha \cdot \vec{a}+\beta \cdot \vec{a}$.

9°. Для любого $\alpha \in R$ и любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in R^2$ верно равенство $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha \cdot \vec{a}+\alpha \cdot \vec{b}$.

10°. Для любого вектора $\vec{a} \in R^2$ верно равенство $1 \cdot \vec{a}=\vec{a}$.

3. Понятие линейного пространства. Пусть P — некоторое поле. Элементы поля P будем называть *скалярами*. Предположим, что элементы (векторы) некоторого множества V можно складывать, а скаляры из поля P можно умножать на любой элемент из V. Таким образом, полагаем, что для любых элементов (векторов) $\vec{a}, \vec{b} \in V$ существует единственный элемент (вектор) $\vec{c} \in V$ такой, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ и для любого скаляра $\alpha \in P$

и элемента (вектора) $\vec{a} \in V$ существует единственный элемент (вектор) $\vec{b} \in V$ такой, что $\alpha \cdot \vec{a} = \vec{b}$.

Если на множестве V относительно операций сложения элементов (векторов) и умножения скаляра на элемент (вектор) выполняются нижеследующие свойства, говорят, что множество V образует *линейное пространство* или *векторное пространство над полем P*:

1°. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V$ верно условие коммутативности сложения векторов, т.е. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$.

2°. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ верно условие ассоциативности сложения векторов, т.е. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$.

3°. На множестве V существует нуль-вектор $\vec{0}$ такой, что для любого $\vec{a} \in V$ верны равенства $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ и $\vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$.

4°. Для любого вектора $\vec{a} \in V$ существует противоположный вектор $-\vec{a} \in V$ такой, что $\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$.

5°. Для любых скаляров $\alpha, \beta \in P$ и любого вектора $\vec{a} \in V$ верно равенство $(\alpha \cdot \beta)\vec{a} = \alpha(\beta \cdot \vec{a})$.

6°. Для любых скаляров $\alpha, \beta \in P$ и любого вектора $\vec{a} \in V$ верно равенство $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$.

7°. Для любого $\alpha \in P$ и любых векторов $\vec{a}, \vec{b} \in V$ верно равенство $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$.

8°. Для любого вектора $\vec{a} \in V$ верны равенства $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$, где 1 и 0 – нейтральные элементы поля P относительно операций умножения и сложения соответственно.

Пример 2. Линейными пространствами над полем действительных чисел являются: множество всех векторов на оси OX, множество всех векторов на плоскости R^2, множество всех векторов в трехмерном пространстве R^3.

Вообще, если на непустом множестве, элементы которого рассматриваются над некоторым полем, определены операции сложения элементов этого множества и умножения элемента поля на элемент множества, удовлетворяющие свойствам 1° – 8°, то это множество образует линейное пространство. Поэтому линейное пространство могут образовывать не только векторы на R^2 или R^3, но и любые объекты, удовлетворяющие указанным свойствам.

П р и м е р 3. Рассмотрим множество $C_{[a;\ b]}$ всех действительнозначных непрерывных функций на отрезке $[a;\ b]$.

На множестве $C_{[a;\ b]}$ в качестве суммы элементов будем рассматривать обычную сумму функций, т.е. для любых $f(x)$, $g(x) \in C_{[a;\ b]}$ имеем $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

Например, пусть $y = \sin x$, $y = x^3 \in C_{[a;\ b]}$ Суммой этих элементов является функция $y = \sin x + x^3$, которая также является элементом множества $C_{[a;\ b]}$.

В качестве умножения скаляра на элемент будем рассматривать обычное умножение действительного числа на функцию из $C_{[a;\ b]}$, т.е. $(\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot (f(x))$.

Например, если $\alpha \in R$ и $y = \sin x$, то функция $y = \alpha \cdot \sin x$ является результатом умножения скаляра $\alpha \in R$ на элемент $y = \sin x$ множества $C_{[a;\ b]}$.

Нетрудно проверить, что на множестве $C_{[a;\ b]}$ выполняются все свойства из определения линейного пространства. Поэтому множество $C_{[a;\ b]}$ всех действительнозначных непрерывных функций на отрезке $[a;\ b]$ является линейным пространством над полем действительных чисел.

4. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов. Пусть V – линейное (векторное) пространство над полем P и $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ – векторы из множества V. Тогда говорят, что *задана система векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *линейного пространства* V.

Если $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in P$, то сумму вида $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n$ называют *линейной комбинацией системы векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Определение 1. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ – система векторов линейного пространства V над полем P. Если из равенства $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$, где $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in P$, следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$, то система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ называется *линейно независимой системой векторов*.

П р и м е р 4. На плоскости рассмотрим векторы $\vec{a}_1 = (1; 2)$ и $\vec{a}_2 = (2; 1)$. Эта система векторов является линейно независимой. Действительно, пусть $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 = \vec{0}$ для некоторых чисел $\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Тогда $\alpha_1 \cdot (1; 2) + \alpha_2 \cdot (2; 1) = (\alpha_1 + 2\alpha_2;\ 2\alpha_1 + \alpha_2) = (0;\ 0)$. Отсюда получаем систему линейных уравнений, решив которую находим значения α_1, α_2:

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 = 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -2\alpha_2, \\ 2(-2\alpha_2) + \alpha_2 = 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -2\alpha_2, \\ -3\alpha_2 = 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0.\end{cases}$$

Так как $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, то по определению система векторов $\vec{a}_1 = (1;\,2)$ и $\vec{a}_2 = (2;\,1)$ является линейно независимой.

П р и м е р 5. В трехмерном пространстве R^3 рассмотрим систему векторов $\vec{a}_1 = (1;\,2;\,3)$, $\vec{a}_2 = (0;\,2;\,3)$, $\vec{a}_3 = (2;\,0;\,1)$. Проверим, что эта система векторов линейно независимая.

Из равенства $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \alpha_3\vec{a}_3 = \vec{0}$ находим значения скаляров $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3 \in R$:

$$\begin{cases}\alpha_1 + 2\alpha_3 = 0, \\ 2\alpha_1 + 2\alpha_2 = 0, \\ 3\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -2\alpha_3, \\ \alpha_1 = -\alpha_2, \\ \alpha_3 = -3(\alpha_1 + \alpha_2),\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 = 2\alpha_3, \\ \alpha_3 = -3(-2\alpha_3 + 2\alpha_3),\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = -2\alpha_3, \\ \alpha_2 = 2\alpha_3, \\ \alpha_3 = 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\alpha_1 = 0, \\ \alpha_2 = 0, \\ \alpha_3 = 0.\end{cases}$$

Следовательно, данная система векторов является линейно независимой.

Определение 2. Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — система векторов линейного пространства V над полем P. Если выполняется равенство $\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$, где хотя бы один из скаляров α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$ отличен от нуля, то система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется *линейно зависимой системой векторов*.

П р и м е р 6. Рассмотрим на плоскости систему векторов $\vec{a}_1 = (1;\,3)$ и $\vec{a}_2 = (3;\,9)$. Так как при $\alpha_1 = -3$, $\alpha_2 = 1$ выполняются равенства

$$-3\cdot\vec{a}_1 + 1\cdot\vec{a}_2 = -3\cdot(1;\,3) + 1\cdot(3;\,9) = (-3;\,-9) + (3;\,9) = (0;\,0) = \vec{0},$$

то заданная система векторов является линейно зависимой.

Предлагаем читателю самостоятельно доказать, что система векторов $\vec{a}_1 = (1;\,0;\,3), \vec{a}_2 = (1;\,3;\,9), \vec{a}_3 = (3;\,9;\,27)$ является линейно зависимой.

5. Свойства линейной зависимости и линейной независимости.

1°. Если система векторов содержит хотя бы один нулевой вектор, то такая система является линейно зависимой.

Доказательство. Пусть вектор $\vec{a}_i = \vec{0}$. Тогда если в качестве коэффициентов линейной комбинации взять числа $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{i-1} = 0, \alpha_i = 1, \alpha_{i+1} = 0, \ldots, \alpha_n = 0$, то имеет место равенство

$$0 \cdot \vec{a}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_{i-1} + 1 \cdot \vec{a}_i + 0 \cdot \vec{a}_{i+1} + \ldots + 0 \cdot \vec{a}_n =$$
$$= \vec{0} + \ldots + \vec{0} + 1 \cdot \vec{0} + \vec{0} + \ldots + \vec{0} = \vec{0}.$$

Так как в этом равенстве не все коэффициенты равны нулю, то по определению заданная система векторов является линейно зависимой.

Подсистемой системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ называется любая система $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$, $k \le n$, состоящая из векторов, выбранных произвольным образом из заданной системы.

2°. Если некоторая подсистема заданной системы векторов линейно зависимая, то сама система также является линейно зависимой.

Доказательство. Пусть $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ — линейно зависимая подсистема системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. По определению существуют скаляры $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ такие, что выполняется равенство $\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + \ldots + \beta_k\vec{b}_k = \vec{0}$, причем хотя бы один из скаляров отличен от нуля. Пусть $\vec{c}_1, \ldots, \vec{c}_i$ все вектора системы $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$, отличные от $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$. Тогда имеет место равенство

$$\beta_1\vec{b}_1 + \beta_2\vec{b}_2 + \ldots + \beta_k\vec{b}_k + 0 \cdot \vec{c}_1 + \ldots + 0 \cdot \vec{c}_i = \vec{0},$$

где один из скаляров $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$ отличен от нуля. Это означает, что данная система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ является линейно зависимой.

3°. Любая подсистема линейно независимой системы также линейно независима.

Доказательство. Допустим обратное. Пусть $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \ldots, \vec{b}_k$ — линейно зависимая подсистема линейно независимой системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$. Тогда в силу свойства 2° система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ также должна быть линейно зависимой. Полученное противоречие доказывает справедливость свойства 3°.

Пусть $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ — некоторая система векторов и $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in P$ — скаляры. Если $\vec{b} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{a}_n$, то вектор $\vec{b}$ называют *линейной комбинацией векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$.

4°. Система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно зависима тогда и только тогда, когда хотя бы один из векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ является линейной комбинацией остальных.

Доказательство. Пусть $\vec{a}_i = \alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \alpha_{i+1}\vec{a}_{i+1} + ... + \alpha_n\vec{a}_n$. Тогда имеет место равенство

$$\alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_{i-1}\vec{a}_{i-1} + (-1)\vec{a}_i + \alpha_{i+1}\vec{a}_{i+1} + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}.$$

Отсюда следует, что система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ является линейно зависимой.

Обратно. Пусть система $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно зависима. Тогда существуют скаляры $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ такие, что имеет место равенство

$$\alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_{i-1}\vec{a}_{i-1} + \alpha_i\vec{a}_i + \alpha_{i+1}\vec{a}_{i+1} + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0},$$

где хотя бы один скаляр, например α_i, отличен от нуля. Тогда

$$\vec{a}_i = -\frac{\alpha_1}{\alpha_i}\vec{a}_1 - ... - \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i}\vec{a}_{i-1} - \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i}\vec{a}_{i+1} - ... - \frac{\alpha_n}{\alpha_i}\vec{a}_n.$$

Следовательно, вектор $\vec{a}_i$ линейно выражается с помощью остальных векторов системы.

5°. Если система векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно независима, а система векторов $\vec{b}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ линейно зависима, то вектор $\vec{b}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

Доказательство. По определению линейной зависимости векторов существуют скаляры $\beta, \alpha_1, ..., \alpha_n$ такие, что среди них есть ненулевой скаляр и $\beta \cdot \vec{b} + \alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$.

Предположим, $\beta = 0$. Тогда $\alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ и из линейной независимости системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ следует, что все скаляры $\alpha_1, ..., \alpha_n$ тоже равны нулю. Так как все скаляры $\beta, \alpha_1, ..., \alpha_n$ равны нулю, то по определению система векторов $\vec{b}, \vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ является линейно независимой. Это противоречит условию свойства 5°. Следовательно, $\beta \neq 0$.

Тогда из равенства $\beta \cdot \vec{b} + \alpha_1\vec{a}_1 + ... + \alpha_n\vec{a}_n = \vec{0}$ получаем, что

$$\vec{b} = -\frac{\alpha_1}{\beta}\vec{a}_1 - ... - \frac{\alpha_n}{\beta}\vec{a}_n,$$

т.е. вектор $\vec{b}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$.

6. Базис и размерность линейного пространства. Пусть V — линейное пространство над полем P и любой вектор этого пространства является линейной комбинацией некоторой системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ из V. Тогда говорят, что линейное пространство V является *линейной оболочкой системы векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ и пишут $<\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n> = V$. Говорят также, что *система векторов* $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ *порождает линейное пространство* V.

Определение 3. Если система линейно независимых векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2, ..., \vec{a}_n$ порождает линейное пространство V, то эта система векторов называется *базисом линейного пространства* V. При этом указанные векторы называются *базисными векторами*, а число n, т.е. число базисных векторов, называется *размерностью линейного пространства* V и обозначается $\dim V$.

Пример 7. Найти базис и размерность линейного пространства R^2.

Решение. Рассмотрим систему векторов $\vec{e}_1 = (1; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 1)$. Легко проверить, что эта система векторов линейно независима, т. е. если $\alpha_1\vec{e}_1 + \alpha_2\vec{e}_2 = \vec{0}$, то $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Кроме того, для любого вектора $\vec{a} = (x; y)$ из R^2 имеет место равенство $\vec{a} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2$. Поэтому система векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ является базисом линейного пространства R^2. Размерность этого пространства равна двум, т. е. $\dim R^2 = 2$.

Заметим, что существуют и другие базисы линейного пространства R^2, отличные от $\vec{e}_1 = (1; 0)$, $\vec{e}_2 = (0; 1)$. Например, рассмотрим систему векторов $\vec{a}_1 = (2; 1)$, $\vec{a}_2 = (1; 2)$. Эта система является линейно независимой (см. пример 4).

Кроме того, любой вектор $\vec{a} = (m; n) \in R^2$ можно линейно выразить с помощью системы векторов $\vec{a}_1, \vec{a}_2$. Действительно, из уравнения $(m; n) = x \cdot (2; 1) + y \cdot (1; 2)$, где x и y — неизвестные числа, следует равенство $(m; n) = (2x + y; x + 2y)$. Отсюда, составляя соответствующую систему уравнений, находим значения x и y:

$$\begin{cases} x + 2y = n, \\ 2x + y = m, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = n - 2y, \\ y = \frac{2n-m}{3}, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2m-n}{3}, \\ y = \frac{2n-m}{3}. \end{cases}$$

Следовательно, для вектора $\vec{a} = (m; n) \in R^2$, имеет место формула

$$\vec{a} = \frac{2m-n}{3} \cdot \vec{a}_1 + \frac{2n-m}{3} \cdot \vec{a}_2 .$$

Например, если $\vec{a} = (3;4)$, то справедливо равенство $(3;4) = \frac{2}{3}(2;1) + \frac{5}{3}(1;2)$.

Таким образом, система векторов $\vec{a}_1 = (2;1)$, $\vec{a}_2 = (1;2)$, также как и $\vec{e}_1 = (1;0)$, $\vec{e}_2 = (0;1)$, образует базис линейного пространства R^2.

Вопросы и задания

1. Дать определение числового поля.
2. Какие операции можно производить над векторами плоскости?
3. Перечислить свойства операции сложения векторов.
4. Перечислить свойства операции умножения скаляра на вектор.
5. Дать определение линейного пространства.
6. Дать определение линейно зависимой системы векторов.
7. Дать определение линейно независимой системы векторов.
8. Что такой базис и размерность линейного пространства?

Упражнения

1. Какие из нижеследующих множеств, с обычными операциями сложения элементов и умножения элемента на число, являются линейными пространствами над R:

а) множество V_0, состоящее из одного нулевого вектора на декартовой плоскости;

б) множество V_1 всех векторов декартовой плоскости, лежащих на прямой, проходящей через начало координат;

в) множество V_2 всех векторов декартовой плоскости;

г) множество $C[a; b]$ всех непрерывных функций на отрезке $[a; b]$;

д) множество всех многочленов с действительными коэффициентами, степень которых равна n?

2. Пусть даны векторы $\vec{a}_1 = (0, 1, 2, -1)$, $\vec{a}_2 = (4, -4, 3, -3)$, $\vec{a}_3 = (-1, 0, 1, 2)$. Найти линейные комбинации:

а) $\vec{a}_1 + 2\vec{a}_2 - 3\vec{a}_3$; б) $-\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 - 5\vec{a}_3$.

3. Пусть $\vec{a}_1 = (0, 1, 2, -1)$, $\vec{a}_2 = (4, -4, 3, -3)$, $\vec{a}_3 = (-1, 0, 1, 2)$. Решить уравнение:

а) $2\vec{a}_1 + \vec{x} = -\vec{a}_2$; б) $3\vec{a}_3 - 4\vec{x} = 5\vec{a}_1$.

4. Определить, какие из следующих систем векторов линейно зависимые:

а) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 3, 4)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_2 = (-1, -2, -3, -4)$;

в) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_2 = (1, 1, 3, 4)$;

г) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 3, 5)$.

---

5. Проверить, является ли вектор $\vec{x}$ линейной комбинацией векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, если:

а) $\vec{x} = (-1, -4)$, $\vec{a} = \vec{b} = (-2, -1)$, $\vec{c} = (1, 1)$, $\vec{d} = (0, 0)$;

б) $\vec{x} = (1, 1, -1)$, $\vec{a} = (2, 3, 0)$, $\vec{b} = (0, 2, -1)$, $\vec{c} = \vec{d} = (0, 0, 0)$;

в) $\vec{x} = (5, 12, -3, 8)$, $\vec{a} = (-1, 2, 1, 1)$, $\vec{b} = (-3, 1, 1, -4)$,

$\vec{c} = (6, -7, -2, 3)$, $\vec{d} = (-1, 3, -4, -3)$;

г) $\vec{x} = (1, 0, 0)$, $\vec{a} = \vec{d} = (0, 0, 0)$, $\vec{b} = (2, 3, -1)$, $\vec{c} = (1, 6, -2)$.

6. Выяснить, какие из систем векторов линейно независимые:

а) $\vec{a}_1 = (1, -2, 2, -8, 2)$,
$\vec{a}_2 = (1, -2, 1, 5, 3)$,
$\vec{a}_3 = (1, -2, 4, -7, 0)$;

б) $\vec{a}_1 = (2, 3, 1, -1)$,
$\vec{a}_2 = (3, 1, 4, 2)$,
$\vec{a}_3 = (1, 2, 3, -1)$,
$\vec{a}_4 = (1, -4, -7, 5)$;

в) $\vec{a}_1 = (2, -1, -3, 2, -6)$,
$\vec{a}_2 = (1, 5, -2, 3, 4)$,
$\vec{a}_3 = (3, 4, -1, 5, 7)$,
$\vec{a}_4 = (3, -7, 4, 1, -7)$,
$\vec{a}_5 = (0, 11, -5, 4, -4)$.

§ 2. Матрицы

1. Матрица. Квадратные матрицы порядка *n*. В первой части этой книги (см. главу VI) были даны понятия матрицы и определителей второго и третьего порядков. Напомним, что *матрицей* называется прямоугольная таблица из чисел, содержащая произвольное число m строк и произвольное число n столбцов. Для обозначения матрицы обычно используют квадратные или круглые скобки. Например,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}$$

обозначают матрицу, состоящую из четырех строк и трех столбцов. Числа, входящие в состав матрицы, называются *элементами матрицы*.

Матрицу вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

состоящую из m строк и n столбцов, называют *матрицей порядка* $m \times n$. Векторы вида $A_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$, $A_2 = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n})$, ..., $A_m = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$ являются строками матрицы A, а векторы вида $A^1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$, $A^2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$, ..., $A^n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ — столбцами матрицы A.

Если $m = n$, т. е. число строк матрицы совпадает с числом ее столбцов, то матрица называется *квадратной матрицей*.

В дальнейшем будем считать, что элементы матрицы принадлежат некоторому числовому полю P. В таком случае говорят, что *задана матрица над полем* P.

2. Операции над матрицами. Определим операции сложения и умножения матриц, а также умножения числа на матрицу.

а) Операция сложения определяется для матриц одинакового порядка. Для простоты рассмотрим матрицы порядка 3×2. Пусть $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}$. Тогда *суммой* $A + B$ *матриц* называется матрица порядка 3×2, имеющая вид

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} \end{bmatrix}.$$

Аналогично определяется сумма матриц других порядков.

П р и м е р 1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+0 \\ 2+5 & 3+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$.

б) Операция умножения матрицы на число определяется для матриц произвольного порядка. Для простоты рассмотрим квадратную матрицу порядка 3 (или 3×3). Пусть $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ – матрица над полем P и $\alpha \in P$. *Произведением числа* α *и матрицы* A называется матрица (того же порядка, что и порядок A), имеющая вид

$$\alpha \cdot A = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \alpha \cdot a_{13} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \alpha \cdot a_{23} \\ \alpha \cdot a_{31} & \alpha \cdot a_{32} & \alpha \cdot a_{33} \end{bmatrix}.$$

Аналогично можно определить произведение числа на матрицу любого другого порядка.

П р и м е р 2.

$$(-2) \cdot \begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \cdot 3 & -2 \cdot 1 & -2 \cdot 4 \\ -2 \cdot 2 & -2 \cdot 3 & -2 \cdot 1 \\ -2 \cdot 1 & -2 \cdot 0 & -2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -2 & -8 \\ -4 & -6 & -2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Матрица

$$(-1) \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & -a_{33} \end{bmatrix}$$

называется *противоположной к A матрицей* и обозначается через $-A$.

Матрица, у которой все элементы состоят из нулей, называется *нулевой матрицей*. Нулевую матрицу будем обозначать через θ. Например, $\theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ – нулевая матрица порядка 3.

Квадратная матрица, у которой диагональные элементы равны 1, а остальные элементы равны 0, называется *единичной* *матрицей*. Единичную матрицу будем обозначать через E. Например, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ — единичная матрица порядка 3.

в) Операция умножения для матриц A и B определяется в том случае, когда число столбцов матрицы A совпадает с числом строк матрицы B. Если A — матрица порядка $m \times n$, а B — матрица порядка $n \times k$, то при умножении этих матриц получается матрица порядка $m \times k$.

Рассмотрим для простоты квадратные матрицы A и B порядка 3:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}.$$

Матрица $C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$ порядка 3×3 называется *произведением матриц* A и B, если ее элементы вычислены по формулам:

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j}\text{, где } i, j = 1, 2, 3.$$

Например, элемент $C_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}$.

По аналогии можно определить произведение матриц других порядков.

П р и м е р 3. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \quad 4 \quad 1)$.

Р е ш е н и е. Матрица A имеет порядок 3×1, а матрица B имеет порядок 1×3. Поэтому для них определена операция умножения. Имеем

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \quad 4 \quad 1) = \begin{pmatrix} 1\cdot 2 & 1\cdot 4 & 1\cdot 1 \\ 4\cdot 2 & 4\cdot 4 & 4\cdot 1 \\ 3\cdot 2 & 3\cdot 4 & 3\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

Полученная матрица имеет порядок 3×3.

Матрицы A и B можно умножить и в обратном порядке. А именно,

$$B \cdot A = (2 \quad 4 \quad 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = (2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3) = (2 + 16 + 3) = (21) \cdot$$

Полученная матрица имеет порядок 1×1 (квадратная матрица порядка 1).

Пример 4. Найти произведение матриц $A = (1 \quad 2)$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение. $A \cdot B = (1 \quad 2) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = (3 + 10 \quad 4 + 12) = (13 \quad 16)$.

Пример 5. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$. Найти A^3.

Решение. $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix}$,

$$A^3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 11 & 14 \\ 7 & 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 47 & 78 \\ 39 & 86 \end{pmatrix}.$$

Далее, пусть задана квадратная матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Тогда матрицу вида

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называют *транспонированной матрицей* по отношению к A и обозначают A^{T}.

П р и м е р 6. Пусть $A=\begin{pmatrix}1&0&3\\2&4&1\\1&-4&2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ и $\alpha=2$. Найти $A^{\mathrm{T}}B+\alpha C$.

Р е ш е н и е. Имеем $A^{\mathrm{T}}=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&-4\\3&1&2\end{pmatrix}$, $A^{\mathrm{T}}B=\begin{pmatrix}1&2&1\\0&4&-4\\3&1&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}1\cdot1+2\cdot3+1\cdot2\\0\cdot1+4\cdot3-4\cdot2\\3\cdot1+1\cdot3+2\cdot2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9\\4\\10\end{pmatrix}$, $\alpha C=\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}$. Тогда $A^{\mathrm{T}}B+\alpha C=$

$=\begin{pmatrix}9\\4\\10\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\8\\12\end{pmatrix}.$

Вопросы и задания

1. Дать определение матрицы.
2. Какие операции производятся над матрицами?

Упражнения

1. Вычислить $A+B$, AB, BA, $3A$, если:

а) $A=\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4&-4\\0&i\end{bmatrix}$;

б) $A=\begin{bmatrix}1&-1&0\\2&1&1\\3&-1&2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-2&1&2\\0&4&5\\2&-3&7\end{bmatrix}$.

2. Найти произведение:

а) $\begin{bmatrix}2&1&1\\5&2&3\\6&5&2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1&3&2\\-3&-4&-5\\2&1&3\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}3&4&9\\2&-1&6\\5&3&5\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}5&6&4\\8&9&7\\-4&-5&-3\end{bmatrix}$;

в) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$; г) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -5 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$.

3*. Найти матрицы, перестановочные с матрицей A, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$; б) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

4. Решить систему уравнений:

а) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 11, \\ 4x_1 - 3x_2 - 3x_3 = 24; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 4x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 11. \end{cases}$

---

5. Вычислить $f(A)$, если:

а) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$, $f(x) = x^2 - 5x + 7$;

б) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, $f(x) = 3x^2 - 7x - 4$.

6. Возвести в степень: а) $\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 6 & -5 \end{bmatrix}^n$; б) $\begin{bmatrix} i & i \\ 0 & i \end{bmatrix}^n$.

7*. Решить матричные уравнения:

а) $AX = C$; б) $XB = C$; в) $AXB = C$, если

1) $A = \begin{bmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$;

2) $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}$.

Упражнения для повторения

1. Найти линейную комбинацию:

а) $2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - 4\vec{a}_3$ системы векторов

$\vec{a}_1 = (2,-1,1,0)$, $\vec{a}_2 = (1,1,2,1)$, $\vec{a}_3 = (-1,-2,0,1)$;

б) $4\vec{a}_1 - 3\vec{a}_2 - 2\vec{a}_3 + \vec{a}_4$ системы векторов

$\vec{a}_1 = (2, 1, 1, 1, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 0, -1, 0)$,
$\vec{a}_3 = (1, -1, 1, -1, 0)$, $\vec{a}_4 = (2, -2, 2, -2, 2)$.

2. Решить уравнение:

а) $\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2 - \vec{a}_3 + 5\vec{x} = \vec{a}_4$, если

$\vec{a}_1 = (1, 0, -2, 3)$, $\vec{a}_2 = (2, 1, 1, -2)$,
$\vec{a}_3 = (-2, -1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (5, 4, -2, 3)$;

б) $(2\vec{a}_1 + 6\vec{x}) - \vec{a}_2 + 2\vec{x} = \vec{a}_3 + \vec{a}_4$, если

$\vec{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, -2, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 3, -2)$, $\vec{a}_4 = (2, 4, 3, 4)$;

в) $\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{a}_1$, $\vec{x} - \vec{y} + \vec{z} = \vec{a}_2$, $2\vec{x} + \vec{y} + \vec{z} = \vec{a}_3$, если

$\vec{a}_1 = (0, 5, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, -3, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (13, -10, 3, -2)$.

3. Показать, что следующие системы векторов линейно не зависимы:

а) $\vec{a}_1 = (0, 2, 4, 6)$, $\vec{a}_2 = (-1, 0, 1, 1)$, $\vec{a}_3 = (2, 4, -1, 3)$;

б) $\vec{a}_1 = (4, 3, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (5, 6, 5, 0)$.

4. Показать, что следующие системы векторов линейно зависимы:

а) $\vec{a}_1 = (1, 3, 2, -4)$, $\vec{a}_2 = (1, 2, 0, 4)$, $\vec{a}_3 = (2, 4, 0, 8)$;

б) $\vec{a}_1 = (4, 3, 2, 1)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, 4, 5)$, $\vec{a}_3 = (6, 6, 6, 6)$.

5. Определить, линейно зависима или линейно не зависима система векторов, если:

а) $\vec{a}_1 = (-3, 1, 5)$, $\vec{a}_2 = (6, -2, -15)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, -2, -3)$, $\vec{a}_2 = (2, 3, 4)$, $\vec{a}_3 = (3, 5, 7)$;

в) $\vec{a}_1 = (5, 0, 0)$, $\vec{a}_2 = (0, 0, -3)$, $\vec{a}_3 = (1, 2, 0)$;

г) $\vec{a}_1 = (1, 2\sin x, \mathrm{tg}x, 2\cos x)$, $\vec{a}_2 = (\mathrm{ctg}x, 2\cos x, 1, 0)$,

$\vec{a}_3 = (\cos x, \sin 2x, \sin x, 1 + \cos 2x)$, $\vec{a}_4 = (\mathrm{tg}x, 1, 0, 2\sin x)$.

6. Дана линейно зависимая система векторов. Найти линейную зависимость между следующими векторами:

а) $\vec{a}_1 = (1, 2)$, $\vec{a}_2 = (3, 4)$, $\vec{a}_3 = (-1, 2)$;

б) $\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\vec{a}_3 = (-1, -5, -9)$;

в) $\vec{a}_1 = (4, 1, -2)$, $\vec{a}_2 = (-2, 0, 1)$, $\vec{a}_3 = (1, 1, 0)$, $\vec{a}_4 = (1, 2, 0)$;

г) $\vec{a}_1 = (1, -2, 3, 0, 1)$, $\vec{a}_2 = (7, -6, 7, 2, -5)$, $\vec{a}_3 = (-2, 0, 1, -1, 4)$.

7. Доказать, что система векторов

$\vec{e}_1 = (1, 0, 0, ..., 0, 0)$,
$\vec{e}_2 = (0, 1, 0, ..., 0, 0)$,
....
$\vec{e}_n = (0, 0, 0, ..., 0, 1)$,
$\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$,

где α_i $(i = 1, ..., n)$ — какие-нибудь числа, является линейно зависимой.

8. Вычислить:

а) $-2A + B$, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}$;

б) $3A - 4B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & 3 \end{pmatrix}$;

в) AB, если $A = (0\ 1\ 0\ 0)$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -7 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 9 & -3 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$;

г) AB, если $A = \begin{pmatrix} 21 & 22 & 23 & 24 \\ 25 & 26 & 27 & 28 \\ 29 & 30 & 31 & 32 \\ 33 & 34 & 35 & 37 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

9. Вычислить: а) $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^n$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^n$, где $n \in N$.

10*. Найти все матрицы, коммутативные с данной матрицей:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

11. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1. \end{cases}$$

12*. Решить матричное уравнение:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; в) $X \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}$;

б) $X \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -5 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

13. Вычислить определитель:

а) $\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -4 & 7 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} \log_2 3 & \log_2 5 \\ \log_5 4 & \log_3 2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 1 - 3i & 2i \\ 4i^2 & 1 + 3i \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} a + b & b \\ a - b & a \end{vmatrix}$.

14. Решить систему линейных уравнений:

а) $\begin{cases} 5x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -9, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ 10x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 7; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 6x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0, \\ 7x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0, \\ 8x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + 2x_4 = 6, \\ 5x_1 + 8x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 12, \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 2x_4 = 6; \end{cases}$

г) $\begin{cases} 6x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = 6, \\ 7x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = -3, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 9x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 0; \end{cases}$

д) $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 3, \\ 5x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 = -1, \\ 11x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -2; \end{cases}$

е) $\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 0, \\ 4x_1 - 7x_3 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 = 0, \\ 2x_1 + 3x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 5x_5 = 0, \\ 3x_1 - 4x_3 = 0. \end{cases}$

ОТВЕТЫ К УПРАЖНЕНИЯМ

ГЛАВА IX. ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1.

1. а) 36°; в) 135°; д) $\left(\frac{45}{\pi}\right)^{\circ}$; е) $\left(\frac{900}{\pi}\right)^{\circ}$. **2.** а) $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{4\pi}{3}$; д) $-\frac{2\pi}{3}$; е) $-\frac{5\pi}{4}$. **4.** а) вторая; в) первая; д) четвертая. **5.** а) $-\frac{\pi}{2}+2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; в) $2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **6.** а) первая; в) третья. **7.** 8π см. **8.** $\frac{20\sqrt{3}}{9}\pi$ см. **9.** 27π см^2. **10.** 20π см^2. **11.** $-\frac{\pi}{2}+2\pi k,\ k\in Z$. **12.** 1080°, 6π; 10800°, 60π. **13.** 144°. **14.** ≈ 5732 см^2. **15.** 20 см.

§ 2

2. а) 2; в) 1. **3.** а) 2; в) 0. **4.** а) $\sqrt{2}+1$; в) $\frac{5}{2}$; д) 4. **5.** а) первая; в) третья; д) вторая. **6.** а) минус, минус; в) минус, плюс; д) плюс, плюс. **7.** а) плюс, плюс; в) минус, минус; д) плюс, плюс. **8.** а) $\sin\alpha > 0$, $\cos\alpha < 0$, $\mathrm{tg}\alpha < 0$, $\mathrm{ctg}\alpha < 0$; в) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$, $\mathrm{tg}\alpha < 0$, $\mathrm{ctg}\alpha < 0$. **9.** а) плюс; в) плюс; д) минус. **10.** а) четная; б) четная; в) не обладает; г) нечетная; д) нечетная. **11.** а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{2\pi}{3}$; в) 6π; г) π; д) $\frac{2\pi}{5}$. **12.** а) нечетная; в) четная; д) не обладает четностью. **13.** а) $\frac{\pi}{3}$; в) π. **14.** а) 2π; в) π. **15.** а) плюс; в) минус. **16.** а) $\frac{5}{4}$; в) $\frac{\sqrt{3}}{6}$. **17.** а) 1; в) −1.

§ 3

2. а) $\frac{\pi}{2}+2\pi n$; в) $\frac{3\pi}{2}+2\pi n$; д) $\frac{\pi}{6}+2\pi n$; $\frac{5\pi}{6}+2\pi n,\ n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. **6.** а) $x\in R$, $1 \le y \le 3$, на $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right]$ возрастает, на $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$ убывает, где $n\in Z$; в) $x\in R$, $-2 \le y \le 2$, на $\left[-\frac{\pi}{2}+\pi n;\ \pi n\right]$ убывает, на $\left[\pi n;\ \frac{\pi}{2}+\pi n\right]$ возрастает, где $n\in Z$; д) $x \ne \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}$, $-\infty < y < \infty$, возрастает на $\left[-\frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2};\ \frac{\pi}{4}+\frac{\pi n}{2}\right]$, где $n\in Z$. **7.** а) $A = 2$; $T = \frac{2\pi}{3}$; $\alpha = \frac{\pi}{4}$; в) $A = 2{,}5$; $T = 4\pi$; $\alpha = -\frac{\pi}{3}$.

§ 4

1. а) $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\text{tg}\alpha = \frac{4}{3}$, $\text{ctg}\alpha = \frac{3}{4}$; в) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\text{ctg}\alpha = -\sqrt{3}$.

2. а) $\cos\alpha = -\frac{9}{41}$, $\text{tg}\alpha = -\frac{40}{9}$, $\text{ctg}\alpha = -\frac{9}{40}$; в) $\sin\alpha = -\frac{3}{5}$, $\text{tg}\alpha = -\frac{3}{4}$, $\text{ctg}\alpha = -\frac{4}{3}$.

3. а) нет; в) да. **4.** а) $-\text{ctg}^2\alpha$. **5.** а) $\frac{1}{\cos^2\alpha}$; в) $-\cos^2\beta$. **6.** а) $\frac{2}{\sin x}$; в) $\cos^2\varphi$.

7. а) $-\frac{40}{9}$; б) $-\frac{3\sqrt{10}}{10}$. **8.** а) $\sin\alpha = \pm\frac{15}{17}$, $\text{tg}\alpha = \pm\frac{15}{8}$, $\text{ctg}\alpha = \pm\frac{8}{15}$. **9.** а) $\frac{2\sqrt{3}}{3}$.
10. а) $\cos\alpha - \sin\alpha$; б) $-2\cos\alpha$. **11.** а) 1; б) $\cos\alpha$.

§ 5

1. а) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; в) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **2.** а) 0; в) 1. **3.** а) -1; в) 1. **4.** а) $\sqrt{3}$; б) 1. **5.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) 0. **6.** а) 1; б) $\text{tg}(\alpha-\beta)$. **7.** а) $\frac{3}{2}\sin 2\alpha$; в) 1. **8.** а) $\frac{\sqrt{3}-2}{2}$; в) 0. **9.** а) 1; б) -1. **10.** а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{3}{4}(\sqrt{3}-1)$. **11.** а) -1; в) $-\text{tg}\alpha$. **12.** а) $\frac{1}{2}\sin\alpha$; в) 1; г) $-\sin\alpha$; е) $\frac{1}{2}\text{ctg}\alpha$. **13.** а) $-\frac{21}{25}$; б) $\frac{15}{16}$. **14.** а) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 1. **15.** а) $2\sin\alpha$; в) $\cos 2\alpha$; д) $\frac{1}{2\sin\alpha}$; ж) $\text{tg}\alpha$. **16.** а) -1; в) $\frac{1}{2}$. **17.** а) $\sin\alpha - \sin\beta$; б) $\cos\alpha + \sin\beta$; в) 2. **18.** а) $\cos^2\alpha$; в) $\sin^3\alpha$.

§ 6

1. а) $\sin 84^\circ + \frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\sqrt{2}\cos 10^\circ + \cos 25^\circ + \sqrt{3}\cos 35^\circ + \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}$. **2.** а) $\sqrt{2}\cos 18^\circ$; в) $-\sqrt{3}\sin 17^\circ$. **3.** а) $4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\cdot\cos\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{6}\right)$; в) $4\sin^2 2\alpha\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\times$ $\times\cos\left(\frac{\alpha}{2}-\frac{\pi}{12}\right)$; д) $4\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)$; ж) $4\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cdot\frac{1}{\sin^2\alpha}$.
4. а) $\text{ctg}\alpha$; в) $\text{ctg}2\alpha$. **6.** а) $-\frac{9}{4}$. **7.** -1. **8.** а) $\text{ctg}\frac{\alpha}{2}$; в) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{a}{2}\right)$. **9.** а) 1; в) 1. **10.** а) $2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{4}\sin\left(\frac{\alpha}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$; в) $2\cos\alpha$. **11.** а) $4\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\frac{1}{\sin\alpha}$; б) $\text{tg}^8\alpha$. **12.** а) $10\sin(5t+\alpha)$, $\alpha = \arccos 0{,}6$. **13.** а) $-3 \le y(x) \le 3$.

§ 7

1. а) 0; в) $-\frac{\pi}{6}$; д) $-\frac{\pi}{4}$. **2.** а) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{3}$; д) $\frac{2\pi}{3}$. **3.** а) $\frac{\pi}{4}$; в) $-\frac{\pi}{3}$; д) $\frac{\pi}{2}$. **4.** а) 0;

в) $\frac{4\pi}{3}$. **5.** а) $\frac{3\pi}{2}$; в) $-\pi$. **6.** а) 2π; в) $\frac{7\pi}{6}$. **7.** а) да; в) да; д) нет. **8.** а) 0,3; в) $\frac{4}{5}$. **9.** а) $\frac{3}{7}$; в) $\frac{4}{5}$. **10.** а) 3,5; в) -5. **11.** а) $\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$; в) $-\frac{1}{2}$.

§ 8

1. а) $x = \pm\frac{3}{4}\pi + 2\pi n,\ n \in Z$; в) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$. **2.** а) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; в) $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. **3.** а) $x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$; в) $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. **4.** а) $x = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; в) $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi n,\ n \in Z$. **5.** а) $x = (-1)^n\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$; в) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. **6.** а) $x = -\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; в) $x = \frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. **7.** а) $x = (-1)^{n+1}\frac{2\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$; в) $x = -\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{4},\ n \in Z$. **8.** а) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ x_2 = \frac{\pi n}{2}$; в) $x = \pi + 2\pi n,\ n \in Z$. **9.** а) $x = \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$; в) $x = 3\pi n$. **10.** а) $x = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$; в) $x = (-1)^n\frac{\pi}{36} + \frac{\pi n}{6},\ n \in Z$. **11.** а) $x_1 = (-1)^n\frac{\pi}{3} + \pi n,\ x_2 = (-1)^{n+1}\arcsin\frac{2}{3} + \pi n, n \in Z$; в) $x_1 = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ x_2 = \pm\arccos\left(-\frac{3}{4}\right) + 2\pi n, n \in Z$. **12.** а) $x_1 = \operatorname{arctg}3 + \pi n,$ $x_2 = \pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; в) $x_1 = \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ x_2 = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$. **13.** а) $x_1 = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n,\ x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; в) $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. **14.** а) $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$; в) $x_1 = \operatorname{arctg}4 + \pi n,$ $x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. **15.** а) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x_2 = \pm\frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$; в) $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n,\ n \in Z$. **16.** а) $x_1 = 2\pi n,$ $x_2 = \frac{2\pi n}{3}, n \in Z$; в) $x_1 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x_2 = \frac{\pi}{10} + \frac{2\pi n}{5}, n \in Z$; д) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$. **17.** а) $x_1 = \frac{\pi n}{4},\ x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; в) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$. **18.** а) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$; в) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **19.** а) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,$ $x_2 = (-1)^n\frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$; в) $x_1 = \pi + 2\pi n,\ x_2 = \pm\frac{4\pi}{3} + 4\pi n,\ n \in Z$. **20.** а) $x_1 = \operatorname{arctg}3 + \pi n,$ $x_2 = -\operatorname{arctg}\frac{1}{2} + \pi n,\ n \in Z$; в) $x_1 = -\frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2},$

$x_2 = -\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{3} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **21.** а) $x_1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{3}, x_2 = \frac{3}{8}\pi + \frac{\pi n}{2}, n \in Z$; в) $x_1 = \frac{\pi n}{2}$, $x_2 = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; д) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **22.** а) $x = \frac{3\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$; в) $x = \frac{3\pi}{4} + \pi n, n \in Z$. **23.** а) $x = \frac{\pi}{2} + \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi n, n \in Z$; в) $x = \frac{11\pi}{6} + 2\pi n, n \in Z$. **24.** а) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n, x_2 = \operatorname{arctg}\frac{1}{5} + \pi n, n \in Z$. **25.** а) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$, $y = \pi - (-1)^n \frac{\pi}{6} - \pi n, n \in Z$; в) $x = \frac{\pi}{2} - \pi n$, $y = \pi n$, $n \in Z$. **26.** а) $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right)$; в) $x \in \left(-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}\right)$; д) $x \in \left(-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{2}\right)$; ж) $x \in \left(\frac{\pi}{6}; \pi\right)$. **27.** а) $x \in \left[\frac{\pi}{4} + 2\pi n; \frac{3\pi}{4} + 2\pi n\right]$, $n \in Z$; в) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + 2\pi n; \frac{5\pi}{6} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$; д) $x \in \left[\frac{\pi}{3} + 2\pi n; \frac{5\pi}{3} + 2\pi n\right]$; ж) $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\frac{\pi}{6} + \pi n\right)$; и) $x \in \left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \pi + \pi n\right)$, $n \in Z$. **28.** а) $x \in \left(\frac{2\pi n}{3}; \frac{\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}\right) \cup \left(\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi n}{3}; \frac{2\pi}{3}(n+1)\right)$, $n \in Z$; в) $x \in \left(\frac{16\pi}{3} + 8\pi n; \frac{20\pi}{3} + 8\pi n\right)$. **29.** а) $-\frac{\pi}{24} + \pi n \le x \le \frac{17\pi}{24} + \pi n, n \in Z$; в) $\frac{\pi}{6} + 4\pi n \le x \le \frac{7\pi}{6} + 4\pi n, n \in Z$. **30.** а) $\left[\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{6} + \pi(n+1)\right] \cup \left[\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{\pi}{3} + \pi n\right]$, $n \in Z$; в) $\frac{\pi}{24} + \frac{\pi n}{2} \le x \le \frac{5\pi}{24} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **31.** а) $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n \le x \le \frac{\pi}{2} + 2\pi n$; в) $x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi n$; д) $\frac{\pi n}{2} < x < \frac{\pi}{8} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **32.** а) $x = (-1)^n \frac{4\pi}{3} + 4\pi n, n \in Z$; в) $x = -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$; д) $x = \frac{5\pi}{6} + \pi n, n \in Z$. **33.** а) $x = \pm\frac{2}{3}\pi + 2\pi n$; в) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{3} + \pi n$, $n \in Z$. **34.** а) $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$. **35.** а) $x = \frac{3}{4}$; в) $x = \frac{15}{2}$; д) $x = \frac{2}{3}$. **36.** а) $x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x_2 = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi n}{4}$, $n \in Z$; в) $x_1 = -\frac{\pi}{4} + \pi n, x_2 = -\frac{\pi}{4} + (-1)^n \arcsin\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}} + \pi n$, $n \in Z$. **37.** а) $x = 3\frac{\pi}{2} + \pi n, y = \pi n - \frac{\pi}{6}$, $n \in Z$; в) (1;1). **38.** а) $x_1 = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{3}$, $x_2 = \frac{\pi n}{2}$; в) $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$. **39.** а) $-\frac{2\pi}{3} - 2 + 4\pi n \le x \le \frac{2\pi}{3} - 2 + 4\pi n$; в) $x \in \left(2\pi n; \frac{7}{6}\pi + 2\pi n\right) \cup \left(\frac{11}{6}\pi + 2\pi n; 2\pi(n+1)\right)$, $n \in Z$.

Ответы к упражнениям для повторения

1. а) вторая; в) четвертая. **2.** а) 1; в) −1. **3.** а) 0. **4.** а) 5. **5.** а) четная; в) нечетная. **6.** а) $\frac{2\pi}{5}$; в) $\frac{\pi}{2}$. **7.** а) −1; в) 1. **9.** $A = 1{,}5$; $T = \pi$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$.

10. а) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$; $\operatorname{ctg}\alpha = 2$. **11.** а) $\frac{1}{2}$. **12.** а) 1; в) $\frac{1}{8}$. **13.** а) $\sqrt{3}$. **14.** а) 1. **15.** а) $-\frac{1}{4}\sin 8\alpha$. **16.** а) $\operatorname{ctg}4\alpha$. **19.** а) $4\cos\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)$; в) $8\cos^4 2\alpha$. **21.** а) 4; б) $2\sqrt{3}$; в) 2. **22.** $m^4 - 4m^2 + 2$. **23.** $\frac{3n-n^3}{2}$. **24.** $-\frac{9}{4}$. **29.** а) $\frac{6}{25}$; б) 0,98; в) $\frac{1}{5}$. **30.** а) $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$; в) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{3} + \pi n$, где $n \in Z$. **31.** а) $x_1 = \frac{\pi n}{3},\ x_2 = \pm\frac{\pi}{18} + \frac{\pi n}{3},\ n \in Z$; в) $x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi n,\ x_2 = \frac{3\pi}{20} + \frac{2\pi n}{5},\ n \in Z$. **32.** а) $x_1 = \pi n,\ x_2 = -\frac{\pi}{4} + \pi n$; в) $z_1 = -2\operatorname{arctg}7 + 2\pi n$, $z_2 = 2\operatorname{arcctg}3 + 2\pi n$, $n \in Z$. **33.** а) $x_1 = \pi n,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$; в) $x = \pm\frac{\pi}{6} + \frac{\pi n}{2},\ n \in Z$. **34.** а) $x_1 = 2\pi n,\ x_2 = \frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ x_3 = -\frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$. **35.** а) $\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ n \in Z$. **36.** а) $x_1 = 2\pi n,\ x_2 = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$. **37.** а) $x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ y_1 = \frac{\pi}{3} + \pi n;\ x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi n,$ $y_2 = \pi n,\ n \in Z$; в) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. **38.** а) $\frac{\pi}{3} + \pi n < x < \frac{2\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$. **39.** а) $-\frac{3}{\sqrt{2}} < x < \frac{3}{\sqrt{2}}$; в) (0, 1).

ГЛАВА X. НЕСТАНДАРТНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1

1. а)

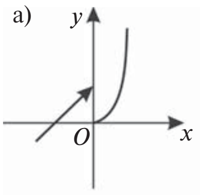


Рис. 1

б)

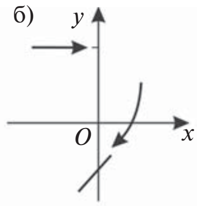


Рис. 2

в)

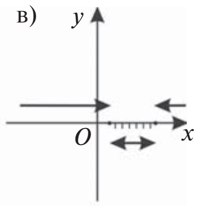


Рис. 3

г)

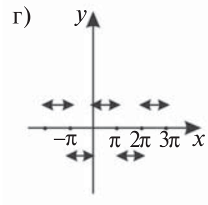


Рис. 4

д)

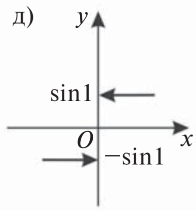


Рис. 5

е)

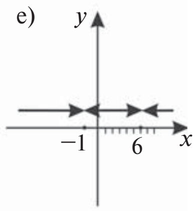


Рис. 6

з)

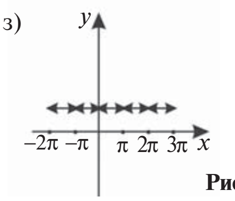


Рис. 7

ж) см. рис. 6;
и) см. рис. 7;
к) см. рис. 7;
л) см. рис. 6.

2. а)

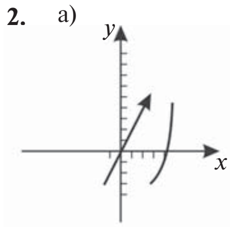


Рис. 8

б)

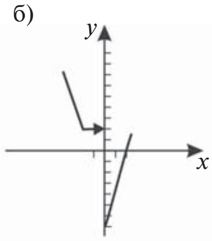


Рис. 9

в)

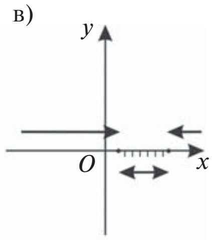


Рис. 10

г)

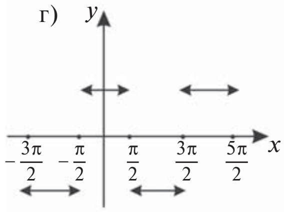


Рис. 11

д)

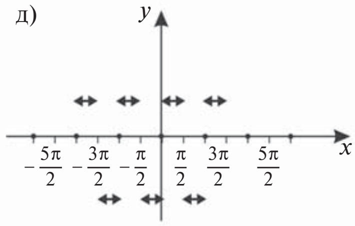


Рис. 12

е)

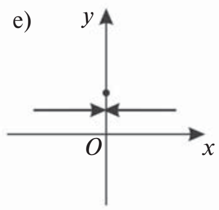


Рис. 13

ж)

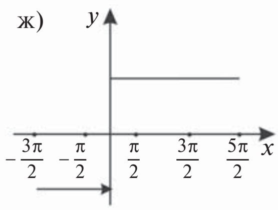


Рис. 14

з)

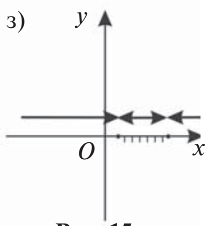


Рис. 15

и) см. рис. 15;

к)

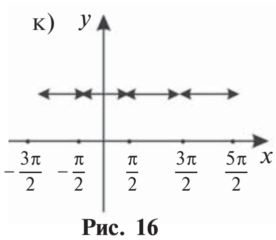


Рис. 16

л)

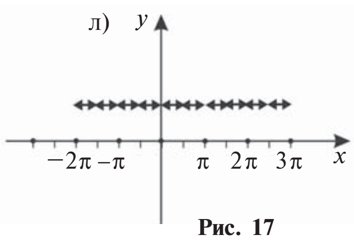


Рис. 17

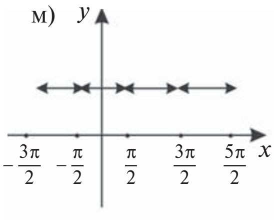


Рис. 18

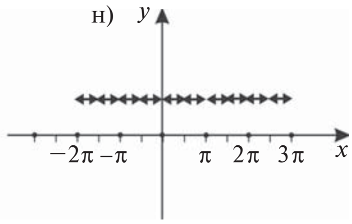


Рис. 19

о) см. рис. 16; п) см. рис. 16; р) см. рис. 15.

§ 2

1. а) {0}; б) ∅; в) {0}; г) $\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$; д) $\left\{1; \frac{\sqrt{5}-1}{2}; -\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$; е) {1}; ж) {1}; з) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; и) $x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$; $y = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$; $k, n \in Z$; к) $\left\{0; \frac{-5+\sqrt{3}}{2}; \frac{-5-\sqrt{3}}{2}\right\}$. **2.** а) ∅; б) ∅; в) $\{(-234 + 99k; 45 - 19k), k \in Z\}$; г) {(4; 1); (4; −3); (−4; −3); (−4; 1)}. **3.** а) {(998; 997); (334; 331); (202; 197); (146; 139); (63; 43); (74; 59); (58; 37); (46; 11)}; б) (3; 1); в) ∅. **4.** а) ∅; б) {5}; в) {1}; г) {−30}; д) $\left\{-\frac{3}{4}\right\}$; е) $\left\{\frac{5}{3}; \frac{5}{4}\right\}$; ж) $\left\{\frac{\pi}{4} + 2n\pi, \ n \in Z\right\}$; з) {0}; и) {3}; к) {1}. **5.** а) ∅; б) ∅; в) {(−4; 0); {2; 6); (4; 8); (10; −2)}; г) {(1; 9); (2; 8); (0; −2); (−1; 3)}. **6.** а) (4; 3; 2); б) ∅; в) ∅; г) (5; 4).

§ 3

1. а) [1; ∞); б) (0; 1); в) (−∞; +∞); г) [2; +∞); е) (0; 2)∪(2; +∞); ж) [3; 6); з) (−∞; −1)∪(6; +∞); и) ∅. **2.** а) 1; б) 2; в) 0; г) 8. **3.** а) (−∞; −1]∪[1; +∞); б) (−∞; 1]; в) 2; г) 2; д) (0; 2); е) [2; 9); ж) (−∞; +∞); з) (−1; 4). **4.** а) 3; б) бесконечно много; в) 1; г) 1.

§ 4

1. $\left(1; 1 + \frac{\pi}{2} + n\pi\right), n \in Z$. **2.** $\left(\frac{3}{\sqrt{28}}; \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}; \frac{25}{\sqrt{28}}; \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{28}}\right)$. **3.** {(6; 1; 0); (6; −1; 0); (0; 1; 0); (0; −1; 0)}. **4.** (0; 1). **5.** (0; 1). **6.** (0; 0). **7.** $\Big\{(k\pi; \pi + 2l\pi)$; $\left(k\pi; \frac{\pi}{2} + 2l\pi\right); \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + 2l\pi\right); \left(\frac{\pi}{2} + k\pi; \pi + 2l\pi\right), k, l \in Z\Big\}$. **8.** (−1; −1; −1). **9.** $\left\{\left(2; \frac{1}{2}\right); \left(\frac{1}{2}; 2\right)\right\}$. **10.** $\left\{\left(\frac{1}{3}; -3\right); \left(3; -\frac{1}{3}\right)\right\}$. **11.** (1; 0). **12.** $\Big\{\left(k\pi; \frac{\pi}{4} + n\pi\right)$;

$\left(k\pi; \frac{3\pi}{4} + n\pi\right), k, n \in Z\Big\}$. **13.** $(\pi k - 2;\ 0)$, $k \in Z$. **14.** $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi; -\frac{\pi}{2} + 2n\pi - 2k\pi\right)$, $k, n \in Z$. **15.** (2; 1). **16.** $\left\{\left(\sqrt{6}; \frac{\sqrt{6}}{3}\right); \left(-\sqrt{6}; -\frac{\sqrt{6}}{3}\right)\right\}$. **17.** $\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}k; \frac{\pi}{2} + l\pi; \frac{\pi}{2} + m\pi\right)$, $k, l, m \in Z$. **18.** {(1; 2); (4; 2)}. **19.** {(2; 0); (6; 0)}.

Ответы к упражнениям для повторения

1. (1; 2; 3). **2.** ∅. **3.** ∅. **4.** $\left(n\left(n^2 - 1\right); n^2 - 1\right)$, $n \in Z$. **5.** {(9; 8; 4); (9; 4; 8)}. **6.** ∅. **7.** ∅. **8.** {(3; 2); (−3; −2)}. **9.** {(−3; −3); (−3; 0); (3; 0)}. **10.** {(1; 5; 0); (−1; 5; 0); (1; −5; 0); (−1; −5; 0)}. **11.** (12; −8). **12.** (11; −9). **13.** ∅. **14.** 0. **15.** $\left(-1; 0; -\frac{1}{3}\right)$. **16.** $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. **17.** $\left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; 0\right)$. **18.** (0; 0; 1). **19.** [1,5; 2). **20.** [−1; 0)∪[4; 5). **21.** 0. **22.** (−∞; 7)∪(9; +∞). **23.** (−1; 0]∪[1; 2). **24.** (−∞; 0)∪(0; +∞). **25.** (−∞; +∞). **26.** $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$. **27.** (−∞; 0)∪(0; +∞). **28.** 1. **29.** {(2; −1); (−2; −1)}. **30.** {(3; −1); (−3; −1)}. **31.** $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}; \frac{1}{\sqrt[3]{3}}\right)$. **32.** $\left\{\left(\frac{\pi}{6}; -\pi\right); \left(\frac{\pi}{6}; -\frac{\pi}{6}\right); \left(\frac{\pi}{6}; 0\right)\right\}$. **33.** $\left\{\left(-6; -\frac{1}{2}\right); \left(-\frac{1}{2}; -6\right)\right\}$. **34.** $\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi; -1\right)$, $n \in Z$. **35.** {(2; −3; 3); (1; 0; 0)}.

ГЛАВА XI. ЧИСЛОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ИХ ПРЕДЕЛ

§ 2

1. $S_{16} = 20$ при $a_1 = 5$, $d = -\frac{1}{2}$ и $S_{16} = 76$ при $a_1 = 1$, $d = \frac{1}{2}$. **4.** а) сумма является суммой 9 членов геометрической прогрессии: $b_1 = 1$, $b_2 = \frac{1}{3}$, ..., $b_9 = \frac{1}{3^8}$. Тогда $q = b_2 : b_1 = \frac{1}{3}$. Откуда $S_9 = \frac{1\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^9\right)}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3^9 - 1}{3^9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{3^9 - 1}{2\cdot 3^8} = 1\frac{3320}{6521}$. **5.** Да. **6.** 610. **7.** 69, 87. **8.** 7. **9.** 4; 11,2; 18,4; 25,6; 32,8; 40. **10.** 10, 17, 24. **11.** $d = 2{,}4$. **13.** 82350. **14.** 1) 1, 3, 9. **15.** −12, 6, −3, −12. **16.** 1064. **17.** $\frac{2n\cdot 3\cdot 4^n + (4^n - 1)(4^{n+1} + 1)}{3\cdot 4^n}$. **18.** $a_1 = \frac{1}{9}$, $a_2 = \frac{1}{6}$, $a_3 = \frac{1}{3}$. **19.** $S_6 = 3^7 - 3$. **20.** $b_1 = 0{,}2$; $q = 5$.

§3

5. 0. **6.** а) 0; б) 1. **8.** а) $\frac{8}{3}$. **9.** а) $q=-\frac{1}{5}$, $b_1=15$; б) $q=\frac{1}{5}$, $b_1=10$. **10.** а) Число 0,(13) следует представить в виде суммы $\frac{13}{100}+\frac{13}{10000}+\frac{13}{1000000}+...$ бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{13}{100}, \frac{13}{10000}, \frac{13}{1000000}$, ... для которой $b_1=\frac{13}{10}$ и $q=\frac{1}{100}$. Тогда $S=\frac{\frac{13}{10}}{1-\frac{1}{100}}=1\frac{31}{99}$. **11.** $1+a^2$. **12.** а) $-2<x<0$, $S=-\left(1+\frac{1}{x}\right)$; б) $x<-\frac{1}{2}$, $S=-\frac{x^2+x}{2x+1}$. **13.** $\sqrt{2}-1$. **14.** 0,5. **15.** $1\frac{1}{3}$. **16.** 0. **17.** 0. **18.** $\frac{1}{2}$. **19.** 1. **20.** 3.

Ответы к упражнениям для повторения

1. Нет. Покажите, что уравнение $1+4(n-1)=10091$ не имеет решения в целых числах. **2.** 13. **3.** $\pm\frac{\sqrt{25b-9}}{4}$ при $b\in[1;\ \infty]$. Из условия задачи имеем систему уравнений $\begin{cases} a_2a_{12}=1, \\ a_4a_{10}=b. \end{cases}$ Эту систему можно преобразить к виду $\begin{cases} (a_7-5d)(a_7+5d)=1, \\ (a_7-3d)(a_7+3d)=b \end{cases}$ или $\begin{cases} a_7^2-25d^2=1, \\ a_7^2-9d^2=b. \end{cases}$ Отсюда получаем $d^2=\frac{b-1}{16}$, $a_7^2=\frac{25b-9}{16}$, $a_7=\pm\frac{\sqrt{25b-9}}{4}$. Поскольку $d^2\geq 0$, $a_7^2\geq 0$, то должны выполняться неравенства $b-1\geq 0$ и $25b-9\geq 0$, из которых получаем условие $b\in[1;\ \infty)$. **4.** $\frac{116k-39}{90}$ при $k\in\left[-6;\ \frac{3}{2}\right]$. **5.** $\frac{34-29b}{10}$ при $b\in\left[1;\ \frac{9}{4}\right]$. **6.** $\sqrt[3]{\frac{2}{3}}$. **7.** $\frac{1029}{38}$. Пусть $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ — геометрическая прогрессия. Покажем, что последовательность $a_1^k, a_2^k, ..., a_n^k, ...$ где $k\in N$, также является геометрической прогрессией. Действительно, так как $a_{i+1}=a_iq$, $i\in N$, то $a_{i+1}^k=a_i^kq^k$, $i\in N$ и $\frac{a_{i+1}^k}{a_i^k}=q^k$ — число, не зависящее от номера i последовательности. Таким образом, последовательности квадратов и кубов членов бесконечно убывающей прогрессии также являются убывающими прогрессиями. Поэтому имеем систему уравнений $\begin{cases} \dfrac{a_1}{1-q} = \dfrac{7}{2}, \\ \dfrac{a_1^2}{1-q^2} = \dfrac{147}{16}, \end{cases}$ решив которую находим $a_1 = 3$, $q = \dfrac{1}{7}$. Подставляя теперь полученные значения a_1 и q в формулу $\dfrac{a_1^3}{1-q^3}$, получаем ответ. **8.** $\dfrac{3\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}}$ или $-\dfrac{3\sqrt{3}+1}{2\sqrt{3}}$. **9.** 405, −180, ... **12.** 2. **13.** 0. Преобразуйте выражение $\dfrac{5n^3-4}{n^4+6}$ к виду $\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{5-\dfrac{4}{n^3}}{1+\dfrac{6}{n^3}}$ и примените теорему о пределе произведения бесконечно малой последовательности на ограниченную последовательность. **14.** $-\dfrac{5}{3}$. **15.** $\dfrac{1}{5}$. **16.** $\dfrac{1}{27}$. **17.** $-\dfrac{3}{4}$. **18.** 0. Преобразуйте выражение $\dfrac{n \sin n}{n^2+1}$ к виду $\dfrac{1}{n} \cdot \dfrac{\sin n}{1+\dfrac{1}{n^2}}$ и покажите, что последовательность $\left(\dfrac{\sin n}{1+\dfrac{1}{n^2}}\right)$ ограничена. **19.** 4. **20.** 0. Используйте равенства $\dfrac{n!}{(n+1)!-n!} = \dfrac{n!}{n!(n+1)-n!} = \dfrac{n!}{n!(n+1-1)} = \dfrac{1}{n}$. **21.** 0. **22.** 1. **23.** $\dfrac{3}{4}$. **24.** $\dfrac{3}{2}$.

ГЛАВА XII. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ И НЕПРЕРЫВНОСТЬ

§ 1

1. −12. **2.** 0. **3.** 0. **4.** ∞. **5.** $\sqrt{2}$. **6.** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$. **7.** 0. **8.** 0. **9.** ∞. **10.** 0. **11.** $\dfrac{1}{3}$. **16.** 14. **17.** ∞. **18.** 1,75. **19.** $\dfrac{3(3-\sqrt{3})}{13}$. **20.** 0. **21.** 0. **22.** $\dfrac{1}{2}$. **23.** $\dfrac{1}{2}$. **24.** $\dfrac{3}{2}$. **25.** 3.

§ 2

1. $\delta = \sqrt{4+\varepsilon} - 2$; $\delta = 0{,}00025$. **2.** $\delta = 2 - \sqrt{3}$. **3.** $\delta = \dfrac{2}{13}$. **4.** $\left|x - \dfrac{\pi}{2}\right| < \dfrac{\pi}{2} - \arcsin 0{,}99$.

12. Нет. Например, функция $f(x) = x$ на интервале (−1; 0) возрастает, а $\varphi(x) = x^2$ на этом интервале убывает. **13.** Так как для любых

$x_1, x_2 \in (a; b)$ из $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2),\ \ g(x_1) > g(x_2)$, то $f(x_1) + g(x_1) >$ $> f(x_2) + g(x_2)$ или $\varphi(x_1) > \varphi(x_2)$. Это означает, что $\varphi(x)$ является убывающей функцией на интервале $(a; b)$. **14**. Указание: доказательство проводится с помощью метода математической индукции. **15.** Да. Например, если $f(x) = x - \sqrt{x^2+1}$ и $g(x) = x + \sqrt{x^2+1}$, то $\varphi(x) = -1$ — периодическая функция, периодом которой является любое число $T \in R$, $T \neq 0$. **16.** Указание: воспользуйтесь определениями четной и нечетной функций. **17.** Указание: используйте утверждения предыдущей задачи. **18**. Пусть $f(x)$ — четная функция, определенная на некотором промежутке $(-a;\ a)$ и $x \in (-a;\ a)$. Тогда и $-x \in (-a;\ a)$. Предположим, что $x > 0$, тогда $-x < x$ и в силу строгой монотонности либо $f(-x) < f(x)$ (функция строго возрастает), либо $f(-x) > f(x)$ (функция строго убывает). С другой стороны, так как $f(x)$ — четная функция, то $f(-x) = f(x)$, что приводит к противоречию. **19.** $f(x) = 0$. По определению четной функции имеем $f(x) = f(-x)$, а по определению нечетной функции, $f(x) = -f(-x)$. Следовательно, $f(-x) = -f(-x)$, что возможно лишь при $f(-x) = 0$, но тогда и $f(x) = f(-x) = 0$. Это означает, что искомая функция принимает нулевые значения при всех $x \in R$. **20.** Доказательства утверждений а)—в) следуют непосредственно из определений четной и нечетной функций.

Ответы к упражнениям для повторения

1. 4. **2.** 7. **3.** $\frac{5}{6}$. **4.** 0,4. **5.** 0. **6.** ∞. **7.** 1. **8.** $\frac{1}{e}$. **9.** 1. **10.** e^6. **11.** e^2. **12.** а) $\{-3;\ 3\}$; б) $\{0\}$; в) $\{0\}$; г) $\{0\}$; д) $\left\{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in Z\right\}$; е) $\{n \mid n \in Z\}$. **13.** Нет. **14.** 4. **15.** $\frac{2}{3}$. **16.** 0. **17.** $-7{,}2$. **18.** 3. **19.** 1,2. **20.** $\frac{2}{9}$. **21.** -3. **22.** $\frac{3}{4}$. **23.** 3. **24.** $\frac{1}{16}$. **25.** $\frac{1}{2}$. **26.** $\frac{1}{4a\sqrt{a-b}}$. **27.** $\frac{3}{2}$. **28.** 1,2. **29.** $-\frac{1}{2}$. **30.** 5.

ГЛАВА XIII. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

§ 1

3. б) $-0{,}39$; в) $-\frac{1}{38}$. **4.** в) $\Delta x = -0{,}1$, $\Delta f = 0{,}1$; г) $\Delta x = 3$, $\Delta f = 1$. **6.** 96 м^2. **8.** б) $-\frac{1}{4}$; г) 0. **10*.** nx^{n-1}. **14.** б) $3x_0^2 + 3x_0\Delta x + \Delta x^2$; в) $-\frac{4}{x_0^2 + x_0\Delta x}$. **15.** $\frac{1}{90}$. **18.** б) 0,5; г) 0,5. **19.** б) $1 - \cos x$; в) $\frac{1}{2\sqrt{x}} + 4x$.

§ 2

3. б) $53\frac{1}{4}$. **5.** б) -3; г) 2. **6.** б) $14x - 2$; г) $2x-\frac{2}{x^3}$. **7.** б) 11. **8.** б) $y'(x) = 1$, $x\in(-\infty;\ 3)\cup(3;\ +\infty)$; г) $y'(x) = 2x$. **9.** б) 0.

§ 3

2. б) $3\sin x$; е) $\frac{4}{\sin^2 2x}$; з) $x\cos x$. **3.** б) $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$; в) $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$. **5.** б) $x_1 = 0$, $x_2 = \sqrt[4]{6}$, $x_3 = -\sqrt[4]{6}$; г) $x = 2\pi n$, $n\in Z$; ж) $x = 1$. **6.** б) $(-\infty;\ -2)\cup(2;\ +\infty)$; г) $\bigcup\limits_{n\in Z}(2\pi n;\ \ \pi+2\pi n)$. **9.** в) 1; г) 0. **10.** в) $x = \pi n$, $n\in Z$; г) $x = 1$. **12.** б) $f(x) = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + 3x$; г) $f(x) = \log_3|x| + \frac{1}{x} + x$. **13.** $t_1 = 0$, $t_2 = 2$.

§ 4

1. б) $y = -\frac{1}{4}x + 1$; в) $y = -3x + 3\pi$. **2.** б) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$; г) $y = -\sqrt{2}x + \frac{\pi+2}{2\sqrt{2}}$. **3.** б) $v(2) = 9$, $a(2) = 2$; г) $v\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$, $a\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{2}$. **4.** б) 3; г) -1. **5.** е) $f''(x) = \cos x - \sin x$, $f^{(3)}(x) = -\cos x - \sin x$; ж) $f''(x) = 3^x\ln^2 3 - \sin x$, $f^{(3)}(x) = 3^x\ln^3 3 - \cos x$; з) $f''(x) = -\frac{1}{x^2} - 2$, $f^{(3)}(x) = \frac{2}{x^3}$. **7.** б) 0,5173; г) 1,995; е) 1,004; з) 0,995. **9.** б) $y_{кас} = 3x + 4 - \ln 27$, $y_{норм} = -\frac{1}{3}x + 4 + \ln\sqrt[3]{3}$; г) $y_{кас} = x$, $y_{норм} = -x$. **10.** б) $a(2) = 48$. **12.** б) 135°. **13.** 45° и 135°. **15.** б) $\cos x + 100!$. **16.** б) 0,855; е) 6; з) 0,9975.

§ 5

2. б) $-21(4-3x)^6$; г) $\frac{2}{\sqrt{4x-5}}$; е) $\sin 2x$; ж) $\frac{4}{4x-1}$. **3.** г) $3e^{\sin(3x+2)}\cdot\cos(3x+2)$. **4.** г) $(\cos x)^{\ln x}\left[\frac{1}{x}\ln\cos x - \mathrm{tg}x\ln x\right]$. **5.** б) $F(x) = \sin^2 x$; г) $F(x) = x^4$. **7.** в) $f(x) = x^2 - 1$, $D(f) = [0;\ +\infty)$; г) $f(x) = \sqrt{x-1}$, $D(f) = [1;+\infty)$. **8.** в) $2x^{\ln x - 1}\cdot\ln x$.

§ 6

1. б) возрастает на $(-\infty; +\infty)$; г) возрастает на $(-\infty; 1]$, убывает на $[1; +\infty)$; е) возрастает на $(-\infty; 0)\cup(0; +\infty)$; з) возрастает на $(-\infty; 0)$, убывает на $(0; +\infty)$. **4.** б) $x = \pm 3$; г) $x = 0$. **6.** б) $x = -1$ — точка минимума, $x = 0$ — точка максимума; г) $x = -5$ — точка максимума, $x = 5$ — точка минимума. **7.** г) возрастает на $(-\infty; 0]$, убывает на $[0; +\infty)$, $x_{max} = 0$, $f_{max} = f(0) = 1$. **8.** в) наибольшее значение 1, наименьшее значение 0; г) наибольшее значение $\frac{2}{3}$, наименьшее значение $\frac{1}{2}$. **11.** Ширина и длина прямоугольника равны 8. **12.** г) возрастает на $(-\infty; -\sqrt{3}]\cup[\sqrt{3}; +\infty)$, убывает на $[-\sqrt{3}; \sqrt{3}]$; з) убывает на $(1; \sqrt{e}]$, возрастает на $[\sqrt{e}; +\infty)$. **15.** в) $x = \pi n$ — критические точки, $x = 2\pi n$ — точки максимума, $x = \pi + 2\pi n$ — точки минимума, где $n \in Z$; г) критическая точка $x = 0$ является точкой максимума функции. **16.** г) $f_{max} = f(4) = \frac{1}{3}$, $f_{min} = f(-4) = -\frac{1}{13}$; е) $f_{min} = f(1) = \frac{1}{2}$. **18.** Ширина и длина прямоугольника равны $\frac{\sqrt{2}}{2}l$. **19*.** $4R$. **20*.** Высота — 1,5 дм, сторона основания — 3 дм.

§ 7

1. б) $y = 3$ — горизонтальная асимптота, $x = 0$ — вертикальная асимптота; г) $x = 0$ — вертикальная асимптота, $y = x$ — наклонная асимптота. **3.** $(2; +\infty)$. **4.** б) $(4; -6)$ — точка перегиба. **5.** г) Кривая обращена выпуклостью вниз на $(-\infty; 2)$ и $(6; +\infty)$, обращена выпуклостью вверх на $(2; 6)$. Точки $\left(2; \frac{16}{e^2}\right)$ и $\left(6; \frac{1296}{e^6}\right)$ являются точками перегиба. **7.** в) $y = x$ — наклонная асимптота; г) две наклонные асимптоты $y = 3x - \frac{\pi}{2}$ и $y = 3x + \frac{\pi}{2}$. **8.** г) Кривая обращена выпуклостью вверх на интервалах вида $\left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$ и обращена выпуклостью вниз на интервалах вида $\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right)$, $n \in Z$. Точки вида $\left(\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right)$, $n \in Z$ являются точками перегиба. **10.** а) 2; б) 3.

Ответы к упражнениям для повторения

2. б) 0,1 и 0,331. **6.** 0. **8.** б) 1; г) 1,02. **9.** 15 м/с. **11.** в) 4; г) 2. **12.** б) $\sqrt[3]{2}$; в) $\pm\frac{\pi}{4} + 2\pi n, n \in Z$; г) 3. **13.** а) $(-\infty; 1)$; б) $\varnothing$. **14.** $t = 1$ и $t = 2$.

15. $y_{\text{кас}} = -4x - 4$, $y_{\text{норм}} = \frac{1}{4}x - \frac{15}{8}$. **16.** (2; 4). **17.** $y = 2x - 1$. **18.** $-\frac{\pi^2}{18}\ \frac{\text{см}}{\text{с}^2}$. **20.** б) 36000. **22.** б) − 0,02; г) 1,4. **24.** б) $F(x) = 4e^{2x} + 2$; г) $F(x) = \sqrt{16x+10}$. **27.** б) функция убывает на интервалах (−∞; −1) и (1; +∞), возрастает на (−1; 1); г) функция возрастает на интервале (0; 100) и убывает на (100; +∞); д) функция возрастает на интервале (−∞; +∞); е) функция убывает на интервалах (−∞; 0) и $\left(\frac{2}{\ln 2};\ +\infty\right)$, возрастает на $\left(0; \frac{2}{\ln 2}\right)$. **29.** а) экстремумов нет; б) минимум $y = 0$ при $x = 1$. **30.** а) максимум $y = 0$ при $x = 1$, минимум $y = -4$ при $x = 3$; б) максимум $y = -2$ при $x = -1$, минимум $y = 2$ при $x = 1$; г) максимум $y = 1$ при $x = 1$, краевой минимум $y = 0$ при $x = 0$ и $x = 2$. **31.** д) наименьшее значение равно −1, наибольшее значение равно 1; е) наименьшее значение равно 0, наибольшее значение равно 132. **32.** $\frac{2\pi}{9\sqrt{3}} l^3$. **33*.** $\left(a^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$. **34.** а) $y = x - 1$; б) $y = 3x + 5$; в) наклонной асимптоты нет; г) наклонной асимптоты нет. **35.** б) кривая на интервале (−∞; 0) обращена выпуклостью вверх, на интервале (0; +∞) обращена выпуклостью вниз. Точка (0; 0) − точка перегиба; в) кривая обращена выпуклостью вниз. Точек перегиба нет; г) кривая на интервалах $\left(-\infty; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}; +\infty\right)$ обращена выпуклостью вниз, на интервале $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ обращена выпуклостью вверх. Точки $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ и $\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\ \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$ являются точками перегиба.

ГЛАВА XIV. ИНТЕГРАЛ

§ 1

2. б) x; г) $-\frac{1}{2}e^{-2x}$. **4.** б) $x^5 + \sin x + C$; г) $\frac{1}{12}(2x-3)^6 + C$. **5.** б) $F(x) = \operatorname{tg} x - 5$; г) $F(x) = \frac{1}{2-4x} + 1$. **6.** б) $-\frac{1}{4}x^4 + 3$; г) $-\frac{1}{2x^2} - 2x^5 + 3x + 4\frac{1}{2}$. **7.** б) $x(t) = -\cos t - t + \pi$. **9.** б) $-\frac{1}{40}(4-5x)^8 + C$; г) $\frac{1}{2}\operatorname{arctg} 2x + C$. **10.** б) $\frac{1}{4}x^4 + 2x + 7$; г) $\frac{1}{2}\sin(2x-3)$. **12.** $x(t) = t^4 + 2t^2 + 2t + 7$.

§ 2

1. б) $x^5 + C$; г) $\ln|x+1|+C$; е) $\frac{1}{2}\sin 2x + C$; з) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}3x + C$. **2.** б) $\frac{2}{3}x\sqrt{x} - \ln x + C$; г) $e^x - 2\sin\frac{x}{2} + C$; е) $x - \operatorname{arctg}x + C$. **3.** б) $\frac{1}{2}x^2 + \frac{4}{3}x\sqrt{x} + 4x + C$; г) $\sin x - \cos x + C$; е) $\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$. **4.** б) $-\frac{1}{2}\ln|1-2x| + C$; г) $-\frac{2^{-3x-1}}{3\ln 2} + C$; е) $\frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C$. **5.** б) $\ln|\sin x| + C$; г) $\frac{1}{2}x^2\ln x - \frac{1}{4}x^2 + C$. **6.** б) $2\sqrt{x} + \ln x + C$; г) $-e^{-x} + C$; е) $\frac{1}{5}\sin(5x-7) + C$; з) $x + 2\operatorname{arctg}x + C$. **7.** б) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + C$; г) $\sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + C$; е) $x - \frac{1}{2}\cos 2x + C$; з) $\frac{1}{3}\operatorname{tg}^3 x + C$. **8.** б) $x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + C$; г) $\frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$.

§ 3

1. б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; г) 6; е) $2\frac{2}{3}$; з) $\pi - 2$. **3.** б) 2; г) 6; е) 1; з) $\frac{1}{2}$. **4.** б) $9\frac{1}{2}$; г) -2. **6.** б) $\frac{1}{15}$; г) $\frac{\pi+3}{12}$; е) $1 - \ln 4$; з) π. **7.** б) $\frac{1}{3}$; г) $4\frac{1}{2}$; е) $\frac{1}{3}$.

§ 4

2. 4. **4.** $10\frac{2}{3}$. **5.** 2. **6*.** πab. **7.** 8π. **9.** $\frac{2}{15}\pi$. **10.** $\frac{4}{3}\pi R^3$. **11.** 0,16 Дж. **13.** 4. **15.** $\frac{3}{4}$. **17.** 11π. **18*.** $\frac{4}{3}\pi abc$. **19.** 0,16 Дж.

Ответы к упражнениям для повторения

1. б) $\ln|x| - \frac{3}{2\sqrt[3]{x^2}} + C$; г) $-\frac{1}{2}e^{-2x+3} + C$. **2.** б) $F(x) = \frac{1}{2}x^2 + \ln|x| + \frac{3}{2}$; г) $F(x) \equiv 4$. **3.** б) $\sin(5x-1)+5$; г) $\frac{1}{3\ln 2}\cdot 2^{3x-2}$. **4.** $x(t) = \frac{1}{12}t^4 + \frac{1}{2}t^3 + 4t + 10$. **5.** в) $\frac{1}{4}(x-1)^4 + C$; д) $\frac{1}{2}x^2 - \sqrt{7}x + C$; е) $\ln|\sin x| + C$; з) $3\ln\left|\frac{x}{x+1}\right| + C$; к) $x + \sqrt{2}\cos x + C$; л) $x + \cos x + C$; н) $\frac{1}{4}x^4\ln x - \frac{1}{16}x^4 + C$; р) $-xe^{-x} - e^{-x} + C$. **7.** б) $\frac{\pi}{4}$; е) 2; з) 1. **9.** а) 4,5; б) $2 - \frac{1}{\ln 2}$; в) 4,5; г) $21\frac{1}{3}$. **10.** $1\frac{1}{3}$. **11.** 6. **12.** $\frac{16\pi}{15}$. **14*.** $A_h = mg\frac{Rh}{h+R}$, $A_\infty = mgR$.

ГЛАВА XV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1

2. г) $y=\sin\frac{x}{2}$. **3.** $y = e^x$. **4.** 9 мин. **5.** б) $x''(t)=-0,01x(t)$. **7.** г) $y=e^{-x}(1+x)$. **8.** $y = 2x$. **9*.** $\frac{1}{\lg 2}$ ч; 0,6394.

§ 2

2. б) $y=-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2+C_1x+C_2$; г) $y=\frac{1}{2}x^2\ln x-\frac{1}{4}x^2+C$. **4.** $y = e^x + x - e$. **6.** г) $y=x\sin x+\cos x+C$. **7.** $y=\operatorname{arctg}x+\frac{\pi}{4}$.

§ 3

1. а), в), д), е), ж), з). **2.** б) $y=\operatorname{tg}(e^x+C)$; г) $y=\ln(1+Ce^{-x})$. **3.** а) $|y-1|\cdot(x^2+1)=C$; г) $\sqrt{1-y^2}=\arcsin x+C$. **5.** в) $\int e^{y^2}dy=\frac{x^2}{2}+x+C$; г) $\frac{y^2}{2}=\int e^{x^2}dx+C$. **6.** а) $y=C\sin x-1$; б) $10^x+10^{-y}=C$; в) $y^2=\ln x^2+C$; г) $x^2+y^2=\ln Cx^2,\ C>0$. **7.** $y=e^{\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$.

§ 4

2. б) $y=Ce^{-2x}+2x-1$; г) $y=Cx^2e^{\frac{1}{x}}+x^2$. **3.** $y=\frac{x}{\cos x}$. **4.** б) $y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}+Ce^{2x}$. **5.** $y=\frac{x}{x+1}\cdot(x-1+\ln|x|)$.

Ответы к упражнениям для повторения

1. $y=\frac{6}{x}$. **2.** 4,2%. **3.** б) $y=x+\ln|x|+C$; ж) $y=\frac{1}{120}x^5+C_1x^4+C_2x^3+C_3x^2+C_4x+C_5$. **4.** $y=-\frac{1}{x}+2$. **5.** $y=x\ln x+3$. **6.** в) $\ln|x|=\sqrt{y^2+1}+C$; г) $y=(x+C)^3,\ y\equiv 0$. **7.** а) $y=2-3\cos x$; б) $y=\operatorname{tg}\left(x^2+\frac{\pi}{4}\right)$. **8.** $\frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C,\ y\equiv 1$. **10.** а) $x^2y=\frac{1}{6}x^6+C$; б) $y=Cx^2+x^4$; в) $y=Ce^{x^2}-x^2-1$; г) $y=Ce^x+e^x\ln|x|$. **11*.** $y=(2x+1)(\ln|2x+1|+1)+1$. **12*.** $\alpha+\beta=1$.

ГЛАВА XVI. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 1

1. (1, 0), (1; 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4). **2.** (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1). **3.** {(1, 0), (1; 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4)}. **4.** {(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)}. **5.** 390625. **6.** 27. **7.** 210. **8.** 5040. **9.** 1320. **10.** 120. **11.** 479001600. **12.** 10626. **13.** 2970. **14.** 1947792. **15.** (x, x, x), (x, x, y), (x, y, x), (y, x, x), (x, y, y), (y, x, y), (y, y, x), (y, y, y). **16.** $\{(x, x, x)$, (x, x, y), (x, y, x), (y, x, x), (x, y, y), (y, x, y), (y, y, x), $(y, y, y)\}$. **17.** 243. **18.** 256. **19.** 6720. **20.** 90. **21.** 720. **22.** 17280. **23.** 288. **24.** 4320. **25.** 12.

§ 2

1. а) $x^3+6x^2y+12xy^2+8y^3$; б) $x^3-6x^2y+12xy^2-8y^3$; в) $16x^4+96x^3+216x^2+216x+81$; г) $x^5-15x^4+90x^3-270x^2+405x-243$. **2.** а) $a^{10}+10a^9b+45a^8b^2+120a^7b^3+210a^6b^4+252a^5b^5+210a^4b^6+120a^3b^7+45a^2b^8+10ab^9+b^{10}$; б) $243-405a+270a^2-90a^3+15a^4-a^5$. **3.** 15. **4.** 15120. **5.** а) $a^4-12a^3b+54a^2b^2-108ab^3+81b^4$; б) $a^5+15a^4b+90a^3b^2+270a^2b^3+405ab^4+243b^5$; в) $x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4$; г) $x^5+20x^4+160x^3+640x^2+1280x+1024$. **6.** а) $128x^7-1344x^6y+6048x^5y^2-15120x^4y^3+22680x^3y^4-20412x^2y^5+10206xy^6-2187y^7$; б) $81a^4+432a^3b+864a^2b^2+432ab^3+256b^4$. **7.** −1512.

§ 3

1. а) {5}; б) {3}; в) {19}; г) {5}. **2.** а) {0; 1; 2; 3; 4; 5; 6}; б) $n > 11$, $n\in N$; в) {5; 6; 7}; г) $n > 6$, $n\in N$. **3.** а) {6}; б) {17}. **4.** а) {5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13}; б) {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Ответы к упражнениям для повторения

1. 3628800. **2.** 479001600. **3.** 24. **4.** 300. **5.** а) 28; б) 17; в) 28; г)190.
7. а) $x^6-12x^5y+60x^4y^2-160x^3y^3+240x^2y^4-192xy^5+64y^6$;
б) $2187x^7-5103x^6+5103x^5-2835x^4+945x^3-189x^2+21x-1$;
в) $1+4y^2+6y^4+4y^6+y^8$; г) $\frac{1}{y^5}+\frac{10}{y^4}+\frac{40}{y^3}+\frac{80}{y^2}+\frac{80}{y}+32$. **8.** {9; 10}.
9. {9, 10, 11, 12, 13, 14, 15}.

ГЛАВА XVII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

§ 1

1. Достоверные события: B_4. Случайные события: B_2, B_3, B_6. Невозможные события: B_1, B_5. **2.** а) попарно несовместные события: A_1 и A_2, A_1 и A_4, A_2 и A_3; б) противоположные события: A_1 и A_4, A_2 и A_3. **3.** ГГГ (герб, герб, герб), ГГЦ (герб, герб, цифра), ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ. **4.** а) ГГГ, ГГЦ, ГЦГ, ЦГГ, ГЦЦ, ЦГЦ, ЦЦГ, ЦЦЦ; б) один из вариантов ответов:
A_1 = «появляется ровно 1 герб»;
A_2 = «появляются ровно 2 герба»;
A_3 = «появляются ровно 3 герба»;
A_4 = «ни разу не появляется герб».

5. а) 0,5; б) $\frac{5}{36}$; в) $\frac{1}{6}$; г) 0. **6.** а) $\frac{20}{69}$; б) $\frac{95}{138}$; в) $\frac{1}{46}$. **7.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\pi}{16}$. **8.** Достоверные события: нет. Случайные события: C_1, C_2, C_4, C_5. Невозможные события: C_3, C_6. **9.** а) D_1 и D_3, D_1 и D_5, D_2 и D_3, D_2 и D_4; б) D_1 и D_3, D_1 и D_5, D_2 и D_4. **10.** Г1 (герб и 1), Г2, Г3, Г4, Г5, Г6, Ц1 (цифра и 1), Ц2, Ц3, Ц4, Ц5, Ц6. **11.** 1Г, 2Г, 3Г, 4Г, 5Г, 6Г, 1Ц, 2Ц, 3Ц, 4Ц, 5Ц, 6Ц . **12.** а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{5}{108}$; в) $\frac{2}{27}$. **13.** а) $\frac{1}{19}$; б) $\frac{15}{76}$; в) $\frac{1}{19}$. **14.** $\frac{2}{\pi}$.

§ 2

1. $\frac{2}{3}$. **2.** а) $\frac{18}{25}$; б) $\frac{1}{50}$; в) $\frac{13}{50}$. **3.** а) 0,985; б) 0,14; в) 0,425; г) 0,42; д) 0,015. **4.** а) 0,3268; б) 0,2854; в) 0,0018; г) 0,9982. **5.** а) $\frac{33}{95}$; б) $\frac{48}{95}$; в) $\frac{14}{95}$. **6.** $\frac{1}{3}$. **7.** а) 0,46; б) 0,6; в) 0,42; г) 0,12; д) 0,58. **8.** а) 0,6976; б) 0,9572; в) 0,3024; г) 0,0024. **9.** $\frac{1}{12}$. **10.** $\frac{4}{19}$.

§ 3

1. а) 0,246; б) 0,26; в) 0,000064. **2.** 0,472. **3.** а) $\frac{7}{64}$; б) $\frac{57}{64}$. **4.** $\frac{1}{64}$. **5.** Не менее 3 партий из 4 являются более вероятными. **6.** 0,488.

Ответы к упражнениям для повторения

1. ГГГГ, ГГГЦ, ГГЦГ, ГЦГГ, ЦГГГ, ГГЦЦ, ГЦГЦ, ЦГГЦ, ЦГЦГ, ГЦЦГ, ЦЦГГ, ГЦЦЦ, ЦГЦЦ, ЦЦГЦ, ЦЦЦГ, ЦЦЦЦ. **2.** а) $\frac{11}{72}$;

б) $\frac{5}{18}$; в) $\frac{4}{27}$. **3.** 0,3. **4.** 0,104. **5.** $\frac{3}{7}$. **6.** $\frac{1}{720}$. **7.** $\frac{48}{95}$. **8.** $\frac{4}{9}$. **9.** $\frac{\pi}{4}$.

ГЛАВА XVIII. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

§ 1

1. а) – г). **2.** а) (11, −7, 5, -13); б) (−7, 11, −16, 0). **3.** а) (−4, 2, −7, 5); б) $\frac{1}{4}(-3,\ -5,\ -7,\ 11)$. **4.** а) и б). **5.** а) $\vec{x}=-3\vec{a}-7\vec{b}$; б) нет; в) нет; г) $\vec{x}=\frac{2\vec{b}-\vec{c}}{3}$. **6.** а) – линейно независима.

§ 2

1. а) $A+B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 4+i\end{bmatrix}$, $A\cdot B=\begin{bmatrix}4 & -4+2i\\ 12 & -12+4i\end{bmatrix}$, $B\cdot A=\begin{bmatrix}-8 & -8\\ 3 & 4i\end{bmatrix}$, $3A=\begin{bmatrix}3 & 6\\ 9 & 12\end{bmatrix}$;

б) $A+B=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 2 & 5 & 6\\ 5 & -4 & 9\end{bmatrix}$, $A\cdot B=\begin{bmatrix}-1 & -3 & -3\\ -2 & 3 & 16\\ -2 & -7 & 15\end{bmatrix}$, $B\cdot A=\begin{bmatrix}6 & 1 & 5\\ 23 & -1 & 11\\ -17 & -12 & 11\end{bmatrix}$,

$3A=\begin{bmatrix}3 & -3 & 0\\ 6 & 3 & 3\\ 9 & -3 & 6\end{bmatrix}$. **2.** а) $\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 5 & 10 & 9\\ -5 & 0 & -7\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}11 & 9 & 13\\ -22 & -27 & -17\\ 29 & 32 & 26\end{bmatrix}$; в) $\begin{bmatrix}1\\ 7\\ 3\\ 4\end{bmatrix}$;

г) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$. **3.** а) $\begin{bmatrix}a+b & 5a\\ a & b\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}a & b & c\\ 0 & a & b\\ 0 & 0 & a\end{bmatrix}$. **4.** а) $x_1=9,\ \ x_2=2,\ \ x_3=2$;

б) $x_1=2,\ \ x_2=-2,\ \ x_3=1$. **5.** а) $\begin{bmatrix}1 & 3\\ -6 & 1\end{bmatrix}$; б) $\begin{bmatrix}-5 & 13 & -1\\ -26 & -16 & 2\\ 33 & -3 & 29\end{bmatrix}$. **6.** а)

$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$, если n – четное; $\begin{bmatrix}5 & -4\\ 6 & -5\end{bmatrix}$, если n – нечетное; б) $\begin{bmatrix}i^n & ni^n\\ 0 & i^n\end{bmatrix}$.

7. 1) а) $X=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}10 & -10\\ 13 & -13\end{bmatrix}$, б) $X=\begin{bmatrix}7 & -5\\ 7 & -5\end{bmatrix}$, в) $X=-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}70 & -50\\ 91 & -65\end{bmatrix}$;

2) а) $X=-\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & 2 & -9\\ 9 & -22 & 15\\ -28 & 56 & -42\end{bmatrix}$, б) $X=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}9 & -6 & -3\\ -1 & 2 & 11\\ -5 & 10 & 1\end{bmatrix}$,

в) $X=-\frac{1}{63}\begin{bmatrix}19 & -14 & -17\\ -41 & 70 & -23\\ 98 & -196 & 56\end{bmatrix}$.

Ответы к упражнениям для повторения

1. а) (11, 9, 8, −1); б) (8, 1, 4, 7, 2). **2.** а) $\vec{x}=\left(-\frac{4}{5},0,-\frac{2}{5},\frac{6}{5}\right)$; б) $\vec{x}=\left(\frac{3}{8},\frac{1}{8},\frac{5}{8},\frac{1}{8}\right)$; в) $\vec{x}=(13,-15,1,-3)$, $\vec{y}=(-1,4,1,0)$, $\vec{z}=(-12,16,0,4)$. **5.** а), в) − линейно независимые; б), г) − линейно зависимые. **6.** а) $-5\vec{a}_1+2\vec{a}_2+\vec{a}_3=\vec{0}$; б) $\vec{a}_1+3\vec{a}_2+\vec{a}_3=\vec{0}$; в) $\vec{a}_1+2\vec{a}_2+\vec{a}_3-\vec{a}_4=\vec{0}$; г) $-3\vec{a}_1+\vec{a}_2+2\vec{a}_3=\vec{0}$. **8**. а) $\begin{pmatrix}-1 & -9 & -10\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ -9 & 8 & -9\end{pmatrix}$; в) $(0\ \ 1\ \ 2\ \ -1)$; г) $\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$. **9.** а) $\begin{pmatrix}2^n & n\cdot 2^{n-1}\\ 0 & 2^n\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$. **10*.** а) $\begin{pmatrix}a & 0\\ b & a\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix}a & 0 & c\\ 0 & b & 0\\ c & 0 & a\end{pmatrix}$. **11.** $\vec{x}=(1,-2,3)$. **12.** а) $X=\begin{pmatrix}-3 & -6\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; б) уравнение не имеет решения; в) $X=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 5 & -4\end{pmatrix}$; г) $\frac{1}{17}\begin{pmatrix}2 & 5\\ 9 & 14\end{pmatrix}$. **13.** а) 6; б) 2; в) 0; г) a^2+b^2. **14.** а) $x_1=15$, $x_2=\frac{59}{2}$, $x_3=-\frac{22}{5}$; б) $x_1=x_2=x_3=0$. в) $x_1=2$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=2$; г) $x_1=2$, $x_2=-\frac{37}{2}$, $x_3=2$, $x_4=-\frac{9}{2}$; д) $x_1=-1$, $x_2=0$, $x_3=2$, $x_4=-1$; е) $x_1=x_2=x_3=x_4=x_5=0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Виленкин Н.Я.*, *Ивашев-Мусатов О.С.*, *Шварцбурд С.И.* Алгебра и математический анализ для 10 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1992.
2. *Виленкин Н.Я.*, *Ивашев-Мусатов О.С.*, *Шварцбурд С.И.* Алгебра и математический анализ для 11 классов. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1998.
3. *Колмогоров А.Н.* и др. Алгебра и начала анализа. Учебник для 10-11 классов средней школы. М.: Просвещение, 1990.
4. *Alimov Sh.A.*, *Halmuhamedov A.R.*, *Mirzahmedov M.A.* Algebra va analiz asoslari. 10-sinf uchun darslik. T.: O'qituvchi, 2003.
5. *Alimov Sh.A.*, *Halmuhamedov A.R.*, *Mirzahmedov M.A.* Algebra va analiz asoslari. 11-sinf uchun darslik. T.: O'qituvchi, 2004.
6. *Сканави* и др. Сборник задач по математике для поступающих во ВТУЗы. М.: Мир и образование, 2001.
7. *Уваренков И.М.*, *Малер М.З.* Курс математического анализа. Т. I. М.: Просвещение, 1966.
8. *Уваренков И.М.*, *Малер М.З.* Курс математического анализа. Т. II. М.: Просвещение, 1976.
9. *Абдуҳамедов А.У.*, *Насимов Ҳ.А.*, *Носиров У.М.*, *Ҳусанов Ж.Ҳ.* Алгебра ва математик анализ асослари, II қисм. Т.: Ўқитувчи, 2002.
10. *Шарыгин И.Ф.* Сборник задач по математике с решениями. Учебное пособие для 10 классов общеобразовательных школ. М.: АСТ, 2001.
11. *Шарыгин И.Ф.* Сборник задач по математике с решениями. Учебное пособие для 11 классов общеобразовательных школ. М.: АСТ, 2001.
12. *Ивашов О.С.* Теория вероятностей и математическая статистика. Учебное пособие для техникумов. М.: Наука, 1979.
13. *Звавич Л.И.*, *Шляпочник Л.Я.*, *Чинкина М.В.* Алгебра и начала анализа для 8—11 классов. Пособие для школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Дрофа, 2002.
14. *Карп А.П.* Сборник задач по алгебре и началам анализа. Учебное пособие для учащихся школ и классов с углубленным изучением математики. М.: Просвещение, 1995.
15. *Шабунин М.И., Прокофьев А.А., Олейник Т.А., Соколова Т.В.* Математика. Алгебра. Начало математического анализа. Профильный уровень. Задачник для 10—11 классов. М.: Бином, 2009.

СОДЕРЖАНИЕ

ГЛАВА XIV. ИНТЕГРАЛ

ГЛАВА XV. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГЛАВА XVI. ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

ГЛАВА XVII. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

ГЛАВА XVIII. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ

А 45 **Алгебра и основы матемаческого анализа.** Учебное пособие для уч-ся акад. лицеев с углубленным изучением математики/Э.М. Сайдаматов, А.К. Аманов, А.С. Юнусов, С.С. Ходжабагян; Под. общ. ред. Э.М. Сайдаматова; Министерство высшего и средного специального образования Республики Узбекистан, Центр среднего специального профессионального образования.
-Ташкент: «ILM ZIYO», 2016. Ч.II. -400 с.

I. Сайдаматов Э.М. и др.

УДК 007 (075)
ББК 22.14я722+22.161я722

ISBN 978-9943-16-298-3

Учебное издание

Сайдаматов Эркин Мамаджанович,
Аманов Абдукадир Кахарович,
Юнусов Абдухалик Салижанович,
Ходжабагян Станислав Суренович

АЛГЕБРА И ОСНОВЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Часть II

Учебное пособие для учащихся академических лицеев с углубленным изучением математики

Издание четвертое

Издательство «ILM ZIYO»

Ташкент – 2016

Редактор *О. Вульф*
Художественный редактор *Р. Чигатаев*
Компьютерная верстка *Ш. Рахимкариева*
Корректор *В. Тараненко*

Издательская лицензия AI № 275, 15.07.2015 г.

Подписано в печать с оригинала-макета 29.08 .2016.
Формат $60\times90^{1}/_{16}$. Кегль 11,5 н/шп. Гарнитура Школьная.
Печать офсетная. Печ. л. 25,0. Изд. л. 23,0
Тираж 1691. Заказ № 47.

Издательский дом «ILM ZIYO». Ташкент, 129, ул. Навои, 30.
Договор № 24—2016.
Отпечатано в типографии ЧП «PAPER MAX».
г. Ташкент, ул. Навои, 30.