O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

F. N. DEXQONOV
A. USUBJONOV

KOMBINATORIKADAN MASALALAR YECHISH

USLUBIY QO‘LLANMA

Namangan – 2023

Ushbu uslubiy qo'llanma Namangan davlat universiteti Ilmiy Kengashining 2023-yil _ _______dagi majlisida ko'rib chiqilgan va chop etishga tavsiya etilgan (_________).

Uslubiy qo'llanma universitetlarning matematika, amaliy matematika, informatika yo'nalishlari talabalari hamda umumta'lim maktablari va akademik litsey o'quvchilari uchun mo'ljallangan. Unda kombinatorikaning barcha bo'limlariga doir misollar yechimi bilan ko'rsatilgan hamda mustaqil yechish uchun masalalar javoblari bilan keltirilgan.

Uslubiy qo'llanma Namangan davlat universiteti Ilmiy Kengashi tomonidan nashrga tavsiya etilgan (2023 yil ___________ bayonnomasi)

Ma'sul muharrir:

A. Mashrabboyev– fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent

Taqrizchilar:

1. M. Xolmurodov – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.
2. Sh. Shoyusupov – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

SO‘Z BOSHI

“Kombinatorikadan masalalar yechish” fani Namangan davlat universiteti Matematika yo‘nalishi 2- va 3- kurs talabalari uchun tanlov fan sifatida o‘tiladi.

Matematika insoniyat tarixida turli hayotiy masalalarni yechishda azaldan qo‘llanib kelingan. Insonning amaliy ehtiyojlari bilan bog‘liq sodda hisoblashlar va o‘lchashlar bajarilgan. Ob’ektlarni tanlash va ularni ma’lum tartibda joylashtirish kabi matematik masalalar har doim insonni qiziqtiriradigan sohalardan hisoblangan.

Matematikaning berilgan ob’yekan ma’lum shartlarni qanoatlantiruvchi kombinatsiyalar tuzishni o‘rgatuvchi bo‘limiga kombinatorika deb ataladi. Kombinatorika yordamida o‘rganilayotgan hodisalarning matematik modeli tuziladi. Ma’lumki, hodisa ehtimolini topish matematik formulalar bilan ifodalanadi. Bu esa biror o‘rganilayotgan jarayonning (hodisaning) matematik modelidir. Hodisa ehtimolini o‘rganishda avvalo kombinatorika tushunchasini kiritish zaruriyati tug‘iladi. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o‘rganishda kombinatorika masalalari talabani bu fanlarga qiziqtiradigan asosiy omillardan hisoblanadi. Kombinatorika elementlari maktab matematika kursida avvallari (bunda kombinatorika elementlari faniga o‘quvchini qiziqtirish uchun yo‘naltirilgan) ham o‘qitilgan. Biroq o‘quv dasturlarida kombinatorika elementlarini kasb o‘rganishda matematik tatbiqlar, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanlari uchun asos sifatida qaralmagan. Shu boisdan keyinchalik kombinatorika elementlari maktabda o‘qitilmagan.

Yangilangan ta’lim tizimimizda matematikaning yangi mazmuni yaratilishi va uni o‘rganish uchun zamonaviy usullarini qo‘llanilishi talab qilinmoqda. Kombinatorika tarixiga nazar tashlasak, bir necha ming yil avval Xitoyda sehrli kvadratlar tuzish, qadimgi Yunonistonda figurali sonlar nazariyasini tuzish masalasini o‘rganishgan. Keyinchalik shashka, karta, shoshqol, domino kabi o‘yinlar kombinatorik masalalarni vujudga keltirgan. Kombinatorika masalalari Samarqanddagi Ulug‘bek maktabining taniqli matematigi G‘iyosiddin Jamshid Koshiy, X asrda yashab ijod etgan Umar Xayyom, keyinchalik Yevropa olimlari jumladan, B. Paskal, J. Kordano, G. Leybnis, Ya. Bernulli, P. Ferma, L. Eyler va boshqa olimlarning ishlarida uchraydi. XVII asrda kombinatorika ehtimollar nazariyasining yaratilishi bilan bog‘liq holda mustaqil fan sifatida yuzaga keldi.

Kasb–hunarni egallash va ixtisosni to‘g‘ri tanlash maqsadida ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanlari dunyoning rivojlangan barcha davlatlaridagi lisey va kasb-hunar kollejlarida, davlat oliy ta’lim universitetlarining mutaxasisslik yo‘nalishlarida tanlov fan sifatida ham o‘tilmoqda.

Hozir respublikamiz ta’lim tizimidagi umumta’lim maktablari, akademik lisey va kasb-hunar kollejlarida ham kombinatorika elementlari o‘rganilmoqda.

Uslubiy qo‘llanma universitetlarning matematika, amaliy matematika, informatika yo‘nalishlari talabalari hamda umumta’lim maktablari va akademik litseylarda kombinatorika elementlarini chuqurroq o‘rganish, kelajakda ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanini o‘rganishda yetarlicha asos yaratilishi bilan bog‘liq muammolarni hal qilishga qaratilgan.

1-§. Kombinatorika haqida umumiy tushuncha. Qo‘shish va ko‘paytirish qoidalari

Kombinatorikada nima o‘rganiladi? Kombinatorik xarakterga ega bo‘lgan masalalarni mumkin bo‘lgan barcha variantlar sonini hisoblashda «nechta?» yoki «necha xil usulda?» kabi savolarga javob berish talab qilinadi.

Ta’rif: Har qanday narsalardan tuzilgan va bir biridan shu narsalarning tartibi yoki o‘zi bilan farq qiluvchi to‘plamlar (gruppalar) birlashmalar (kombinatorika) deyiladi. Birlashmani tashkil etgan narsalar elementlar deyiladi. Birlashmalar (kombinatorika)da quyidagilar o‘rganiladi: o‘rinlashtirishlar, o‘rin almashtirishlar, gruppalashlar va binom formulasi.

$A=\{6,7,9\}$ va $B\{a,b,c\}$ to‘plamlar elementlaridan shunday juftliklar tuzaylikki, ulardagi birinchi o‘rindagi A ning tartib bilan olingan elementi, ikkinchi o‘rinda B ning tartib bilan olingan elementi yoziladigan bo‘lsin. Xosil bo‘ladigan juftliklar тыplamini $A\times B$ orqali belgilasak,

$$A\times B=\{(6;a),(6;b),(6;c),(7;a),(7;b),(7;c),(9;a),(9;b)(9;c)\}$$

Agar birinchi o‘rinda B elementlari qo‘yiladigan bo‘lsa, yozilishi va tartibi bilan oldingisidan farq qiladigan

$$B\times A=\{(a;6),(a;7),(a;9),(b;6),(b;7),(b;9),(c;6),(c7;),(c;9)\}$$

to‘plam xosil bo‘ladi.

$(6,a),(6,b),...$ juftliklar (ikkiliklar) tarkibidagi elementlar shu juftlikning komponentlari yoki koordinatalari deyiladi (lotincha componentis–tashkil etuvchi).

Shu kabi berilgan A,B,C to‘plamlar elemetlaridan tartiblangan uchtaliklar, umuman, k ta to’plam elementlaridan tartiblangan k taliklar to’plami tuziladi. k ta shar xil elementli to’plam uzunligi $n=k$ ga teng deyiladi. Masalan, $(4;12;13)$ va $(\sqrt{16};\sqrt{144};\sqrt{169})$ uchliklar teng va bir xil uzunliklarda $(n=3)$, komponentlari: $4=\sqrt{16}, 12=\sqrt{144}, 13=\sqrt{169}.$ Lekin

$(a;b;c)$ *ва* $(c;a;b)$ uchliklarning uzunliklari va koordinatalari bir xil bo‘lsa-da, lekin ular teng emas, chunki koordinatalari turli tartibda joylashgan.

Birorta ham komponentga ega bo’lmagan (ya’ni 0 uzunlikdagi) k talik bo’sh k talik deyiladi. To'plamda elementlarning tartibi rol o'ynamaydi, k talikda koordinatalar takrorlanish mumkin.

A va B to’plamlar elementlari sonini mos ravishda $n(A)$, $n(B)$ orqali, umumiy juftliklar sonini esa $n(A\times B)$ orqali belgilaymiz.

Teorema. A va B chekli to'plamlar elementlardan tuzilgan juftliklar soni shu to'plamlar elementlari sonlarining ko'paytmasiga teng.

$$n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$$

Birlashmalar (kombinatorika)ning har bir tushunchasini quyidagi asosiy qoidalardan foydalanib, keltirib chiqarish mumkin.

Ma’lumki bir qancha kombinatorika masalalari ikkita qoida asosida yechiladi. Bular qo‘shish va ko‘paytirish qoidasi hisoblanadi.

Qo‘shish qoidasi. Agar A_1 element n_1 usul bilan, A_2 element boshqa bir n_2 usul bilan, A_3 element birinchi ikki usuldan farqli bo‘lgan $n_3$usul bilan va shu kabi A_k element birinchi $(k-1)$ usuldan farqli bo‘lgan n_k usul bilan tanlangan bo‘lsa, u holda ko‘rsatilgan elementlardan istalgan bittasi $n_1+n_2+...+n_k$ usul bilan tanlanishi mumkin.

Ko‘paytirish qoidasi. Agar A_1 element n_1 usul bilan tanlangan bo‘lsa, har bir shunday tanlashdan keyin A_2 element n_2 usul bilan tanlangan bo‘lsa va shu kabi har bir $(k-1)$ marta tanlashdan keyin A_k element n_k usul bilan tanlangan bo‘lsa, u holda barcha elementlar $A_1, A_2, ..., A_k$ tartibda $n_1\cdot n_2\cdot ...\cdot n_k$ usul bilan tanlanishi mumkin.

MASALALAR YECHISHDAN NA’MUNALAR

1.1. Savatda 4 ta anor, 5 ta nok va 6 ta olma bor. Savatdan bitta meva tanlashni necha usulda amalga oshirish mumkin?

Yechimi: Biz kombinatorikaning qo‘shish qoidasidan foydalanamiz. Berilganlarga ko‘ra $n_1 = 4,$ $n_2 = 5$ va $n_3 = 6$. Demak, istalgan bittasi $N = n_1 + n_2 + n_3 = 4 + 5 + 6 = 15$ ta usul bilan tanlanishi mumkin ekan.

Javobi: 15 ta usulda

1.2. Savatda 4 ta anor, 5 ta nok va 6 ta olma bor. Savatdan ikkita turli nomdagi mevani tanlashni necha usulda amalga oshirish mumkin?

Yechimi: Savatdan ikkita turli nomdagi mevani tanlashlar sonini topish uchun, biz kombinatorikani ko‘paytirish va qo‘shish qoidalaridan foydalanamiz. Ya’ni $N = 4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 5 \cdot 6 = 74$.

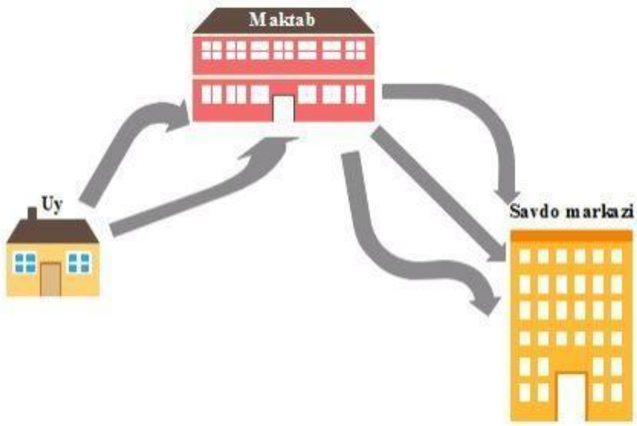
Javobi: 74 ta usulda

1.3. Savatda 4 ta anor, 5 ta nok va 6 ta olma bor. Savatdan bittadan anor, nok va olmani tanlashni necha usulda amalga oshirish mumkin?

Yechimi: Biz kombinatorikani ko‘paytirish qoidasidan foydalanib $N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 = 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ ta usulda amalga oshirish mumkinligini topamiz.

Javobi: 120 ta usulda

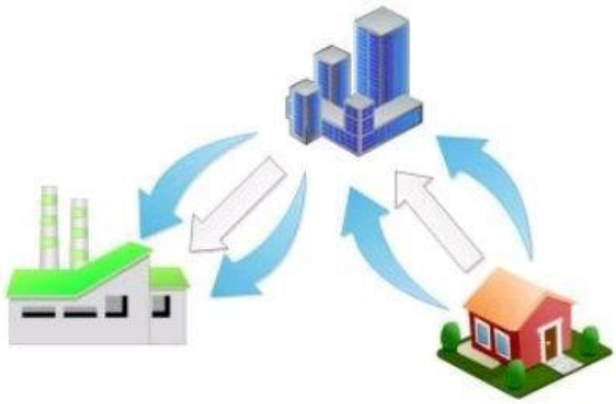
1.4. Anvar (uyidan maktabga, maktabdan savdo markaziga borishi uchun) yo‘lni necha xil usulda tanlashi mumkin?



Yechimi: Anvar uyidan maktabga 2 ta usulda borishi mumkin, maktabdan savdo markaziga esa 3 ta usulda borishi mumkin. Bundan esa biz ko‘paytirish qoidasidan foydalanib $N = 2 \cdot 3 = 6$ tenglikni olamiz.

Javobi: 6 ta usulda

1.5. Jamshid (uyidan shaharga, shahardan zavodga borishi uchun) yo‘lni necha xil usulda tanlashi mumkin?



Yechimi: Jamshid uyidan shaharga 3 ta va shahardan zavodga 3 ta usulda borishi mumkin. Ko‘paytirish qoidasidan foydalanib biz $N = 3 \cdot 3 = 9$ tenglikni olamiz.

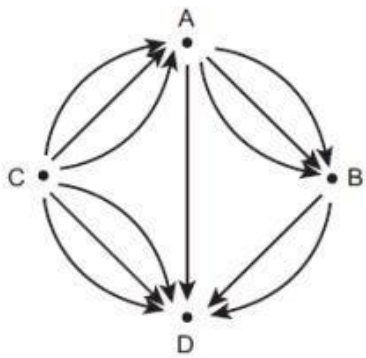
Javobi: 9 ta usulda.

1.6. Bir mamlakatda 4 ta shahar bor ekan: A, B, C va D. A shahardan B ga 5 ta yo‘l, B shahardan C ga 4 ta yo‘l olib borarkan. A dan D ga 6 ta yo‘l, D dan C ga 3 ta yo‘l bilan borish mumkin ekan. A shahardan C shaharga necha xil yo‘l bilan borish mumkin?

Yechimi: Biz birinchi navbatda A shahardan C shaharga borishni B bo‘yicha necha xil yo‘lda borishini topamiz, ya’ni $N_1 = 4 \cdot 5 = 20$. Huddi shunday D shahar orqali ham hisoblaymiz $N_2 = 6 \cdot 3 = 18$. Natijada A shahardan C shaharga jami $N = 20 + 13 = 38$ xil yo‘l bilan boorish mumkin ekan.

Javobi: 38 xil

1.7. C nuqtadan D nuqtaga necha xil usulda borish mumkin?

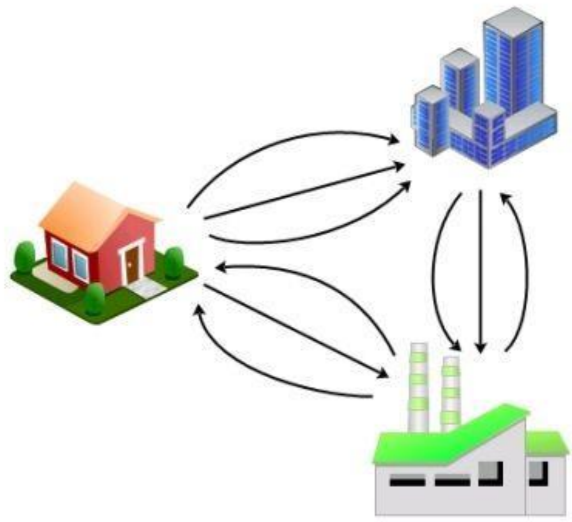


Yechimi: Ushbu holatlar bo‘lishi mumkin: 1) $C \to A \to D$, 2) $C \to A \to B \to D$ va 3) $C \to D$. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra birinchi holatda

$N_1 = 3 \cdot 1 = 3$ xil, ikkinchi holatda $N_2 = 3 \cdot 3 \cdot 2 = 18$ xil va uchinchi holatda $N_3 = 3$ xil. Demak, C dan D ga jami $N = 3 + 18 + 3 = 24$ xil usulda borish mumkin ekan.

Javobi: 24 xil

1.8. Bekzod uyidan chiqib zavodga necha xil usulda borishi mumkin?



Yechimi: 1-holatda Begzod uydan shaxarga 3 xil usulda va shaxardan zavodga 2 xil usulda borishi mumkin. Natijada Begzod shaxar orqali zavodga $N_1 = 3 \cdot 2 = 6$ xil usulda borsa bo‘ladi. 2-holatda uydan zavodga $N_2 = 1$ xil usulda borish mumkin. Demak, Begzod uydan zavodga jami $N = 6 + 1 = 7$ xil usulda borishi mumkin ekan.

Javobi: 7 xil

1.9. Toshkentdan yo‘lga chiqqan yo‘lovchi Chovka qishlog‘iga necha xil usulda kelishi mumkin?

Yechimi: Yo‘lovchi Toshkentdan Qarshiga $N_1 = 4$ xil usulda, Qarshidan Chovka qishlog‘iga $N_2 = 3$ xil usulda borishi mumkin. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $N=4\cdot 3=12$. Demak, yo‘lovchi Toshkentdan Chovka qishlog‘iga 12 xil usulda borishi mumkin ekan.

Javobi: 12 xil

1.10. Doskada 10 ta ot, 6 ta fe‘l va 9 ta sifat yozilgan. Gap tuzish uchun har bir so‘z turkumidan bittadan olish kerak. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

Yechimi: Har bir so‘z turkumidan bittadan olish kerak, bundan esa ko‘paytirish qoidasini qo‘llab $N=10\cdot 6\cdot 9=540$ xil usul ekanligini topamiz.

Javobi: 540 xil

1.11. „Rayhon“ kafesining taomnomasida 3 xil somsa, 4 xil 1-taom, 5 xil 2- taom bor ekan. 3 turdagi taomga buyurtmani nechta usulda berish mumkin?

Yechimi: Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $N=4\cdot 5\cdot 3=60$. Demak, 3 turdagi taomga buyurtmani 60 xil usulda berish mumkin ekan.

Javobi: 60 xil

1.12. Chorvador 10 ta qo‘y va 15 ta echki sotmoqchi. Xaridor bitta qo‘y va bitta echki olmoqchi. U necha xil usulda sotib olishi mumkin?

Yechimi: Xaridor har biridan bittadan olgani uchun, ko‘paytirish qoidasidan foydalanib $N=10\cdot 15=150$ xil usuldaligini topishimiz mumkin.

Javobi: 150 xil

1.13. “MEGA PLANET ”gipermarketining „Hammasi uy uchun“ bo‘limida 15 xil piyola, 8 xil vaza, 10 xil choy qoshiq bor. Nazira xola turli nomdagi ikkita buyum sotib olmoqchi. U buni necha xil usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechimi: Turli nomdagi 2 xil buyum sotib olish uchun ko‘paytirish qoidasidan $N=15\cdot 8+15\cdot 10+8\cdot 10=350$ xil usulda tanlashi mumkinligini topamiz.

Javobi: 350 xil

1.14. Maktab kutubxonasida 4 xil matematika, 2 xil fizika va 3 xil tarix faniga doir kitoblar bor. Doston turli fanga oid ikkita kitobni uyda o‘qish uchun olmoqchi. U buni necha usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechimi: Bu masalani yechimida biz ko‘paytirish qoidasidan foydalanamiz. Matematika va fizika kitoblarini olish usulari soni $4\cdot 2$ ta, matematika va tarix kitoblarini olish usullari soni $4\cdot 3$ ta, fizika va tarix kitoblarini olish usullari soni $2\cdot 3$ ta. U holda jami jami kitoblardan turli ikkita kitobni olishlar soni $N=4\cdot 2+4\cdot 3+2\cdot 3=26$ ta.

Javobi: 26 ta

1.15. Maktab oshxonasida oq non, qora non va uch xil kolbasa bor. Ulardan necha xil buterbrod tayyorlash mumkin?

Yechimi: Buterbrod tayyorlash uchun 1-holda oq non va kolbasadan $N_1=1\cdot 3=3$ xil, qora non va kolbasadan $N_2=1\cdot 3=3$ xil. Demak, jami $N=3+3=6$ xil usulda tayyorlash mumkin ekan.

Javobi: 6 xil

1.16. Tepalikdagi buloqqa 7 ta yo‘l olib boradi. Sayyoh necha xil usulda buloqqa borib kelishi mumkin?

Yechimi: Demak, borishga 7 xil kelishga 7 xil yo‘l bor, ko‘paytirish qoidasidan $N=7\cdot 7=49$.

Javobi: 49 xil

1.17. Tepalikdagi buloqqa 6 ta yo‘l olib boradi. Sayyoh borgan yo‘lidan qaytmaslik sharti bilan jami necha usulda buloqqa borib kelishi mumkin?

Yechimi: Buloqqa 6 xil yo‘dan boorish mumkin, sayyoh brogan yo‘lidan qaytmaganligi uchun qaytishga 5 xil yo‘l qoladi. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $N=6\cdot 5=30$ xil usuldaligini topamiz.

Javobi: 30 xil

1.18. Bir o‘quvchida qiziqarli matematikaga oid 7 ta kitob, ikkinchi o‘quvchida esa 9 ta badiiy kitob bor. Ular necha xil usul bilan birining bitta kitobini ikkinchisining bitta kitobiga ayirboshlashi mumkin?

Yechimi: Ko‘paytirish qoidasidan $N=7\cdot 9=63$ xil usulligini topamiz.

Javobi: 63 xil

1.19. 40 xil bolt va 13 xil gaykadan bittadan olinib, necha xil juftlik tuzish mumkin?

Yechimi: Ko‘paytirish qoidasidan $N = 40 \cdot 13 = 520$ xil usulligini topamiz.

Javobi: 520 xil

1.20. 5 ta oq, 2 ta qizil va 4 ta sariq atirgul bor. Uchta har xil guldan iborat guldastani necha usulda tuzish mumkin?

Yechimi: Ko‘paytirish qoidasidan $N = 5 \cdot 2 \cdot 4 = 40$ xil usulligini topamiz.

Javobi: 40 xil

1.21. Kitob javonida matematikadan 8 ta, chet tilidan 6 ta va fizikadan 10 ta kitob turibdi. Javondan bitta kitobni necha usulda tanlash mumkin?

Yechimi: Javondan bitta kitobni tanlab olish kerak. Demak, qo‘shish qoidasidan $N = 8 + 6 + 10 = 24$ xil usulligini topamiz.

Javobi: 24 xil

1.22. Do‘konda 8 xil pidjak, 5 xil shim va 4 xil galstuk sotilmoqda. Pidjak, shim va galstukdan iborat uchlikni (to‘plamni) necha usul bilan sotib olsa bo‘ladi?

Yechimi: Ko‘paytirish qoidasidan $N = 8 \cdot 5 \cdot 4 = 160$ xil usulligini topamiz.

Javobi: 160 xil

1.23. “Matbuot tarqatuvchi” do‘konida 7 xil konvert va 5 xil marka sotilmoqda. Konvert bilan markani necha usulda sotib olishimiz mumkin?

Yechimi: Ko‘paytirish qoidasidan $N = 7 \cdot 5 = 35$ xil usulligini topamiz.

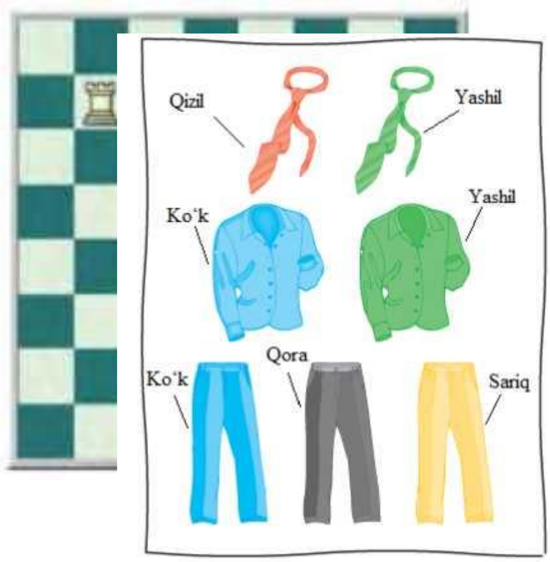
Javobi: 35 xil

1.24. Shaxmat taxtasida oq va qora ruxni bir-birini ololmaydigan („ura olmaydigan“) qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin?

Yechimi: 1-navbatda oq ruxni qarasak, u vertikal va gorizontalga 8 tadan yurishi mumkin, 2-navbatda qora rux esa vertikal va gorizontalga 7 tadan yurishi mumkin(bir-birini ura olmasligi sababli). Demak, jami $N = 8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 7 = 3136$.

Javobi: 3136 xil

1.25. Talabaning kiyimlar javonida 2 xil galstuk, 2 xil ko‘ylak va 3 xil shim bor. Talaba 1 ta galstuk, 1 ta ko‘ylak, 1 ta shimni necha xil usulda bir xil rangda bo‘lmaslik sharti bilan kiyishi mumkin?



Yechimi: Talaba 1 ta galstuk, 1 ta ko‘ylak, 1 ta shimni qo‘shish qoidasiga ko‘ra $N = 2 + 2 + 3 = 7$ xil usulda tanlashi mumkin.

Javobi: 7 xil

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR

1. $A(0;1;3;9)$ va $B(8;5;3)$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. U holda $n(A \times B)$ umumiy juftliklar sonini toping.

Javobi: $n = 12$ ta.

2. Anvar 10 ta daftar va 15 ta qalam ichidan daftar yoki qalamlardan birini oldi. Nargiza esa 1ta qalam va 1ta daftar oldi. Anvarning tanlash imkoniyati Nargizaning imkoniyatidan katta bo‘lishi mumkinmi?

J: Mumkin emas. Anvarda 25ta, Nargizada 150 ta imkoniyat bor.

3. Savatlarning birida 10 dona olma, ikkinchisida esa bir necha dona shaftoli bor. Aziz myevalarni biridan olishi mumkin. U bu ishni 21 ta usulda bajaradi. Ikkinchi savatda necha dona shaftoli bor.

Javobi: 11 ta.

4. 0,1…9 raqamlari va A,V,S. harflari yordamida nechta mashinani nomerlash mumkin. (nomer ikkita harf va 4 ta raqamdan iborat).

Javobi: $27 \cdot 10^4 = 270000$ dona.

5. «Matematika» so‘zidan oldin 2 ta unli keyin 3 ta undosh harf keladigan qilib, nechta so‘z yasash mumkin (so‘z deganda ixtiyoriy harflar ketma ketligi tushiniladi.)

Javobi: 5^5

6. Raqamlari har xil bo‘lgan nechta to‘rt xonali sonlar tuzish mumkin.

Javobi: 4536

7. Guruhda 15 ta o‘g‘il bola va 17 ta qiz boladan iborat. Guruh rahbari ular ichidan bir talabani shaxmat musobaqasiga tanlab olishi kerak. Bu tanlashdan keyin 1ta o‘g‘il va 1 ta qiz bolani shashka musobaqasiga tanlaydi. U bu ishni necha xil usul bilan qilishi mumkin.

Javobi: 240

2-§ O‘rinlashtirishlarga doir masalalar

$n = 3$ ta elementli $X = \{3;4;5\}$ to‘plam elementlardan ikki xonali sonlar, ya’ni juftliklar tuzaylik: 34,35,45,43,53,54. Bu sonlar tartiblangan =ism тыplamlardan iborat. Ular sonining jamini A_3^2 ta deb belgilaymiz (o‘qilishi: “3 elementdan 2 tadan olib, tuzilgan o‘rinlashtirishlar soni”). Bizda $A_3^2 = 6$ bo‘lmoqda. Ixtiyoriy n uchun bu sonni щisoblash formulasini topaylik. Xar qaysi juftlikning birinchi komponentasini yo 3, yo 4, yo 5, ya’ni uni $n = 3$ ta ixtiyoriy tanlash imkoni bor. Agar birinchi komponenta tanlangan bыlsa, ikkinchi komponentani tanlash uchun $n-1 = 2$ xil tanlash imkoni qoladi. Demak, jami juftliklar soni $A_3^2 = 3\cdot(3-1)$ ta, ya’ni $A_3^2 = 3\cdot 2 = 6$ ta bыladi.

Ta’rif: n ta elementdan k $(k \le n)$ tadan olib o‘rinlashtirish, deb shunday birlashmalarga aytiladiki, ularning har birida berilgan n ta elementdan k ta element bo‘lib, ular bir-biridan elementlari yoki elementlarning tartibi bilan farq qiladi.

n ta elementdan k tadan olib tuzilgan o‘rinlashtirishlar soni A_n^k simvol bilan belgilanadi (A fransuzcha “arrahgument” – o‘rinlashtirishning bosh harfi).

n ta elementli X to‘plam elementlaridan k tadan olib tuzilgan o‘rinlashtirishlar deb X to‘plamning k uzunlikdagi tartiblangan qism to‘plamiga aytiladi. Ularning soni: $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot .... \cdot (n-(k-1))$ ga teng. Uni $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ ko‘rinishda ham yozishimiz mumkin. Bu yerda xar bir juftliklar bir biridan tarkibi va tartibi jihatdan farq qiladi. Xaqiqatan, 1-komponenta ixtiyoriy tartibda n xil tanlanadi. U щolda 2- komponenta uchun $n-1$ xil tanlanish va xakozo oxirgi n komponenta uchun $n-(n-1)$ tanlanish imkoni qoladi va bunda xech qaysi komponenta takror tanlanmaydi. Barcha k uzunlikdagi ыrinlashtirishlar soni kыpaytmani xisoblash qoidasiga muvofiq quyidagi formula orqali topiladi:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot ... \cdot \left(n-(k-1)\right) = \frac{n!}{(n-k)!} \qquad (1)$$

Takrorlanuvchi o‘rinlashtirishlar.

Ushbu misolga qaraylik. Lekin endi berilgan $n = 3$ ta elemenli $X = \{3;4;5\}$ tыplam elementlardan komponentalari takrorlanadigan juftliklarini ham tuzish talab qilinsin. Ular: $33,44,55,34,35,45,43,53,54$ bo‘lib, jami $3 \cdot 3 = 3^2 = 9$ ta juftliklar. Umuman, n ta elementli X to'plam elementlaridan tuzilgan takrorlanadigan k ta komponentali k ta liklar soni k ta bir xil to‘plam elementlarning soniga teng. Bu son k ta $n(X)$ kыpaytuvchi kыpaytmasidan iborat:

$$n(X) \cdot n(X) \cdot ... \cdot n(X) = (n(X))^k = n^k$$

n ta elementli X to‘plam elementlaridan tuzilgan va elementlari takrorlanuvchi k talik juftliklar k tadan olib tuzilgan takrorlanuvchi o‘rinlashtirishlar deyiladi.Ularning soni: $\overline{A_n^k} = n^k$ formula yordamida hisoblanadi. (A harfi ustidagi chiziqcha elementlar takrorlanishi mumkinligini ko‘rsatadi. Demak, n ta elementdan k tadan takrorlash bilan o‘rinlashtirishlar soni

$$\overline{A_n^k} = n^k \qquad (2)$$

formula bilan topiladi.

MASALALAR YECHISHDAN NA’MUNALAR

1.1. Mijozning uy telefoni 7 raqamli bo‘lib, 316 dan boshlanadi. Mijoz a’zo bo‘lgan bu telefon stansiyasi nechta mijozga xizmat ko‘rsata oladi?

Yechimi: 7 raqamni boshidagi 3 ta raqami ma’lum demak, qolgan 4 ta raqamni o‘rinlashtirishlar sonini topsak yetarli. Jami 10 ta raqam bor, (2) formulaga ko‘ra $\overline{A_{10}^4} = 10^4 = 10000$.

Javobi: 10000 ta

2.2. Turli raqamli nechta to‘rt xonali son bor?

Yechimi: Ma’lumki sonning boshida 0 kelsa u hisoblanmaydi. Shuning uchun boshida 0 keladigan kombinatsiyalarni hisoblamaymiz. (1) formulaga ko‘ra $A_{10}^4 = \dfrac{9 \cdot 9!}{6!} = 4536$ ta 4 xonali turli raqamli son bor.

Javobi: 4536 ta

2.3. 3, 4, 5, 6, 7 raqamlari yordamida hammasi bo‘lib raqamlar takrorlanmasa, nechta ikki xonali son tuzish mumkin?

Yechimi: Jami 5 ta raqam mavjud va ular 0 dan farqli. Natijada (1) formulaga ko‘ra $A_5^2 = \dfrac{5!}{3!} = 20$ ta raqamlari turli 2 xonali son tuzish mumkin ekan.

Javobi: 20 ta

2.4. 7, 4, 5, 6, 9, 8 raqamlari yordamida hammasi bo‘lib raqamlar takrorlanmasa, nechta uch xonali son tuzish mumkin?

Yechimi: Jami 6 ta raqam mavjud va ular 0 dan farqli. Natijada (1) formulaga ko‘ra $A_6^3 = \dfrac{6!}{3!} = 120$ ta raqamlari turli 3 xonali son tuzish mumkin ekan.

Javobi: 120 ta

2.5. 7, 4, 5, 6, 9, 8 raqamlari yordamida nechta uch xonali son tuzish mumkin?

Yechimi: (2) formulaga ko‘ra $\overline{A_6^3} = 6^3 = 216$ ta 3 xonali son tuzish mumkin ekan.

Javobi: 216 ta

2.6. 3, 4, 5, 6, 7 raqamlari yordamida nechta ikki xonali son tuzish mumkin?

Yechimi: (2) formulaga ko‘ra $\overline{A_5^2} = 5^2 = 25$ ta 2 xonali son tuzish mumkin ekan.

Javobi: 25 ta

2.7. 3, 4, 5, 6, 0, 8 raqamlari yordamida hammasi bo‘lib raqamlar takrorlanmasa, nechta uch xonali son tuzish mumkin?

Yechimi: Ma’lumki sonning boshida 0 kelsa u hisoblanmaydi. Shuning uchun boshida 0 keladigan kombinatsiyalarni hisoblamaymiz. (1) formulaga ko‘ra $A_6^3 = \frac{5 \cdot 5!}{3!} = 100$ ta turli raqamli 3 xonali son bor.

Javobi: 100 ta

2.8. 2, 4, 5, 0, 9, 8 raqamlari yordamida nechta uch xonali son tuzish mumkin?

Yechimi: Jami 6 ta raqam mavjud. Birinchi o‘ringa 0 ni qo‘yolmaymiz demak, 1-o‘ringa 5 ta raqam, 2-o‘ringa 6 ta raqam va 3- o‘ringa ham 6 ta raqam qo‘yishimiz mumkin. Natijada jami $N = 5 \cdot 6 \cdot 6 = 180$ ta 3 xonali son bor.

Javobi: 180 ta

2.9. 1, 2, 3, 4, 5, 6 to‘plam elementlari yordamida tuzilgan nechta uch xonali sonda 4 raqami qatnashadi?

Yechimi: Buning uchun tuzish mumkin bo‘lgan jami 3 xonali sonlarni topib undan 4 raqami qatnashmaydiganlarini ayiramiz. Ya’ni $N = 6 \cdot 5 \cdot 4 - 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Javobi: 60 ta

2.10. Raqamlar takrorlanishi mumkin bo‘lsa, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 raqamlaridan nechta 4 xonali son tuzish mumkin?

Yechimi: (2) formulaga ko‘ra $\overline{A_8^4} = 8^4$ ta 4 xonali son tuzish mumkin ekan.

Javobi: 8^4 ta

2.11. 6, 2, 4, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan 5 xonali sonlar tuzildi. Ularning nechtasi 2 ga bo‘linadi?

Yechimi: Berilgan raqamalar turli bo‘lgani uchun biz $P_n = A_n^n = n!$ formuladan foydalanishimiz mumkin, faqat sonning oxirida 7 va 9 kelgan holatlar kombinatsiyalarini umumiy kombinatsiyalar sonidan ayirib yuboramiz. Ya’ni, $N = P_5 - P_4 - P_4 = 5! - 4! - 4! = 72$ ta 5 xonali 2 ga karrali son tuzish mumkin.

Javobi: 72 ta

2.12. 6, 2, 4, 7, 9 raqamlaridan ularni takrorlamasdan 5 xonali sonlar tuzildi. Ularning nechtasi 4 ga bo‘linadi?

Yechimi: 4 ga bo‘linishi uchun oxirgi ikki raqami 4 ga bo‘linishi kerak. Bunday sonlar esa 24, 96, 64 va 72. Berilgan son 5 xonali bo‘lganligi uchunboshidagi uchta raqami kombinatsiyalar sini $N_1 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$, bunday holatlar esa bizda 4 ta demak jami $N = 4 \cdot 6 = 24$ ta.

Javobi: 24 ta

2.13. Hamma raqamlari toq bo‘lgan nechta 5 xonali son bor?

Yechimi: Ma’lumki toq raqamlar 5 ta. (4) formulaga ko‘ra $\overline{A_5^5} = 5^5 = 3125$ ta.

Javobi: 3125 ta

2.14. Hamma raqamlari juft bo‘lgan nechta 5 xonali son bor?

Yechimi: Ma’lumki juft raqamlar 5 ta. Bizda 0 raqamini sonning boshiga qo‘yolmaymiz va (2) formulaga asoslanib $N = 4 \cdot 5^4 = 2500$ ta.

Javobi: 2500 ta

2.15. Nechta uch xonali sonda faqatgina bitta 6 raqami bor?

Yechimi: 1-holatda 1-raqami 6 bo‘lsa, 2- va 3-raqamlariga 9 tadan raqam qo‘yish mumkin, u holda $N_1 = 1 \cdot 9 \cdot 9 = 81$. 2- va 3-holatla 2-raqami (3-raqami) 6 bo‘lsa, birinchi raqamiga 8 ta va uchinchi (ikkinchi) raqamlariga 9 ta raqam qo‘yish mumkin. U holda $N_2 = N_3 = 8 \cdot 1 \cdot 9 = 72$. Natijada jami $N = 81 + 2 \cdot 72 = 225$ ta.

Javobi: 225 ta

2.16. 5 raqamiga ega bo‘lmagan ikki xonali sonlar nechta?

Yechimi: Bizda jami raqamlar 10 ta lekin, 5 raqamidan foydalana olmaymiz. Shuning uchun 1-o‘ringa 8 ta raqam qo‘yishimiz mumkin (0 va 5 raqamini qo‘yolmaganimiz sababli, 2-o‘ringa 9 ta raqam qo‘yishimiz mumkin. Natijada jami $N = 8 \cdot 9 = 72$ ta.

Javobi: 72 ta

2.17. 3 raqamiga ega bo‘lmagan uch xonali sonlar nechta?

Yechimi: Yuqoridagi 2.16-masalaga asosan jami $N = 8 \cdot 9 \cdot 9 = 648$ ta.

Javobi: 648 ta

2.18. 0 raqamiga ega bo‘lmagan to‘rt xonali sonlar nechta?

Yechimi: Yuqoridagi 2.16-masalaga asosan jami $N = 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 = 6561$ ta.

Javobi: 6561 ta

2.19. 0 va 8 raqamiga ega bo‘lmagan uch xonali sonlar nechta?

Yechimi: Biz 8 ta raqamdan foydalanib 3 xonali son tuzishimiz kerak. 4.16-masalaga asosan jami $N = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$ ta.

Javobi: 512 ta

2.20. Nechta 4 xonali sonda faqatgina bitta 7 raqami bor?

Yechimi: Yuqorida keltirilgan 2.15-masaladagi hulosalarga asosan $N = 1 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 + 3 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 1 = 2673$ ta.

Javobi: 2673 ta

2.21. Yozuvida hech bo‘lmaganda bitta juft raqam qatnashgan ikki xonali sonlar nechta?

Yechimi: Ma’lumki jami 90 ta 2 xonali son mavjud. Berilgan masalani yechimini topish uchun jami 2 xonali sonlardan jami 2 xonali toq sonlarni ayirish kifoya. Ddemak, $N = 90 - 5 \cdot 5 = 75$ ta.

Javobi: 75 ta

2.22. Yozuvida hech bo‘lmaganda bitta juft raqam qatnashgan uch xonali sonlar nechta?

Yechimi: Jami 900 ta 3 xonali son mavjud. Berilgan masalani yechimini topish uchun jami 3 xonali sonlardan jami 3 xonali toq sonlarni ayirish kifoya. Demak, $N = 900 - 5 \cdot 5 \cdot 5 = 775$ ta.

Javobi: 775 ta

2.23. Yozuvida hech bo‘lmaganda bitta juft raqam qatnashgan 6 xonali sonlar nechta?

Yechimi: Jami 900000 ta 6 xonali son mavjud. Berilgan masalani yechimini topish uchun jami 6 xonali sonlardan jami 6 xonali toq sonlarni ayirish kifoya. Ddemak, $N = 900000 - 5^6 = 884375$ ta.

Javobi: 884375 ta

2.24. Zalda 2 ta bo‘sh joy bor. 3 nafar kishidan 2 tasini shu joyga necha xil usulda o‘tqazish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $A_3^2 = \frac{3!}{1!} = 6$ ta.

Javobi: 6 xil usulda

2.25. Zalda 3 ta bo‘sh joy bor. 10 nafar kishidan 3 tasini shu joyga necha xil usulda o‘tqazish 5 mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 8 \cdot 9 \cdot 10 = 720$ ta.

Javobi: 720 xil usulda

2.26. 2 ta har xil kitobni 20 ta o‘quvchidan 2 tasiga bittadan berish sharti bilan necha xil usulda berish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 19 \cdot 20 = 380$ ta.

Javobi: 380 xil usulda

2.27. Futbol bo‘yicha jahon chempionatida oltin, kumush, bronza medallari uchun bo‘ladigan o‘yinlarda 16 ta jamoa qatnashmoqda. Medallar jamoalar orasida necha xil usul bilan taqsimlanishi mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $A_{16}^{3}=\dfrac{16!}{13!}=14\cdot15\cdot16=3360$ ta.

Javobi: 3360 xil usulda

2.28. Agar natural sonning yozuvida faqat toq raqam qatnashsa, bunday sonni „yoqimtoy“ son deymiz. Nechta 4 xonali „yoqimtoy“ son mavjud?

Yechimi: Bilamizki 5 ta toq raqam mavjud. U holda (2) formuladan foydalanib $\overline{A_{5}^{4}}=5^{4}=625$ ta.

Javobi: 625 ta

2.29. Futbol jamoasidagi 11 kishi orasidan jamoa sardori va uning yordamchisini necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Yechimi: O‘rinlashtirish qoidasidan foydalanamiz. Demak, (1) formulaga ko‘ra $A_{11}^{2}=\dfrac{11!}{9!}=10\cdot11=110$ ta.

Javobi: 110 xil usulda

2.30. 15 ta o‘quvchisi bo‘lgan sinfdan sinf sardori, yordamchisi va tozalik posboni necha xil usul bilan saylanishi mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $A_{15}^{3}=\dfrac{15!}{12!}=13\cdot14\cdot15=2730$ ta.

Javobi: 2730 xil usulda

2.31. 30 ta o‘quvchisi bo‘lgan sinfdan sinf sardori, yordamchisi va tozalik posboni necha xil usul bilan saylanishi mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $A_{30}^{3}=\dfrac{30!}{27!}=28\cdot29\cdot30=24360$ ta.

Javobi: 24360 xil usulda

2.32. Qo‘mitaga 7 kishi saylangan. Ular orasidan rais, yordamchi, kotib necha xil usul bilan tayinlanishi mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $A_7^3 = \frac{7!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$ ta.

Javobi: 210 xil usulda

2.33. Odatda, uchburchakning uchlari lotin alifbosining katta harflari bilan belgilanadi. Lotin alifbosida 26 ta harf bor. Uchburchakning uchlarini necha xil usulda belgilash mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $A_{26}^3 = \frac{26!}{23!} = 24 \cdot 25 \cdot 26 = 15600$ ta.

Javobi: 15600 xil usulda

2.34. 0, 1, 5, 6, 7, 8 raqamlaridan foydalanib 200 dan kichik nechta son hosil qilish mumkin?

Yechimi: Berilgan raqamalar 6 ta. 200 dan kichik sonlar 3 guruhga bo‘linadi 3 xonali, 2 xonali va 1 xonali. 1) 3 xonali sonlarda birinchi raqamiga faqat 1 ni qo‘yish mumkin (200 dan oshmasligi uchun) qolgan o‘rinlaga barcha sonlarni qo‘yish mumkin. Ya’ni $N_1 = 1 \cdot 6 \cdot 6 = 36$. 2) 2 xonali sonlarda 1-o‘ringa 0 dan farqli barchasini qo‘ysa bo‘ladi $N_2 = 5 \cdot 6 = 30$. 3) 1-xonali sonlar shu raqamlarning o‘zlari $N_3 = 6$. Natijada jami $N = 36 + 30 + 6 = 72$.

Javobi: 72 ta

2.35. Har biri uchta har xil raqamdan iborat nechta uch xonali natural son tuzish mumkin?

Yechimi: Ma’lumki 10 ta raqam bor va 1-o‘ringa 0 raqamini qo‘yib bo‘lmaydi. Demak, 1-o‘ringa 9 ta, 2-o‘ringa ham 9 ta va 3-o‘ringa 8 ta raqam qo‘yish mumkin (har bir raqam turli bo‘lganligi uchun). Natijada jami $N = 9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$.

Javobi: 648ta

2.36. Lazizning chamadoni kod bilan ochiladi. Bu kod uchta turli raqamdan iborat bo‘lib, har bir raqam 3 dan katta emas. Kodda 13 soni qatnashmaydi. Laziz kodni unutib qo‘ygan bo‘lsa, kodni topish uchun u ko‘pi bilan necha marta „urinishi“ lozim bo‘ladi?

Yechimi: 3 dan oshmaydigan raqamlar 4 ta 0, 1, 2 va 3. Demak, kod raqamlari takrorlanmasa ularni tuzish soni $N_1 = 4\cdot 3\cdot 2 = 24$ ta. Lekin, 13 soni kodda qatnashmaslik kerak. Ma'lumki 13 soni ushbu $13x,\ y13$ ko'rinishlarda kelishi mumkin. Bunda x, y lar 2 tada 0 va 2 larni qabul qila oladi. Natijada eng ko'pi bilan $N = 24 - 4 = 20$ marta urinish kerak.

Javobi: 20 ta

2.37. Ko'p qavatli uyda yo'lak eshigidagi qulf kod bilan ochiladi. Kod 0 va 1 raqamlaridan tuzilgan 4 xonali son (0000 va 1111 sonlar kod emas deb hisoblangan.) Qulf kodini unutgan bo'lsangiz, eshikni eng ko'pi bilan nechta urinishda ocha olasiz?

Yechimi: Qulf ko'di 4 xonali. Demak, har bir xonasiga 2 tadadan jami $N_1 = 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2 = 16$ ta imkoniyat bor. Lekin, 0000 va 1111 kod hisoblanmaydi. Shuning uchun, $N = 16 - 2 = 14$.

Javobi: 14ta

2.38. 5 ta har xil daftarni uch bola o'rtasida necha xil usul bilan taqsimlash mumkin?

Yechimi: (4) formulaga ko'ra $\overline{A_3^5} = 3^5 = 243$ ta.

Javobi: 243 ta

2.39. 1000 so'mlik pulni 100, 200, 500 so'mlik pullar bilan necha xil usulda maydalash mumkin?

Yechimi: Aytaylik $\{1000, 200, 500\} = \{a, b, c\}$ deb belgilasak. Ushbu holatlar bo'lishi mumkin: $\{10a\}, \{8a, b\}, \{6a, 2b\}$, $\{4a, 3b\}, \{2a, 4b\}$, $\{5b\}, \{5b, c\}$, $\{4a, b, c\}$, $\{a, 2b, c\}$, $\{3a, b, c\}$. Demak, jami 10 ta.

Javobi: 10 ta

2.40. Shaxmat taxtasiga oq va qora shohlarni, o'yin qoidalarini buzmagan holda, necha xil usulda qo'yish mumkin?

Yechimi: Ushbu 3 ta holat bo'lishi mumkin: 1) oq shoh burchakda, 2) oq shoh taxtaning chetida (lekin burchakda emas), 3) oq shoh taxtaning chetida emas. Bunday usullar soni $N = 4\cdot 60 + 24\cdot 58 + 36\cdot 55 = 3612$ ta.

Javobi: 3612 ta

2.41. Har xil rangli ikkita ruh shaxmat taxtasida shunday joylashganki, ularning har biri ikkinchisini urib olishi mumkin. Shunday joylashtirishlardan nechta mavjud?

Yechimi: Bir qatorda ikki ruxni o‘rinlashtirishlar soni $A_8^2 = \frac{8!}{6!} = 56$ ta. Jami gorizontal va vertikal 16 ta qator mavjud. Demak, bir-birini urub olishi mumkin bo‘lgan joylahtirishlar soni $N = A_8^2 \cdot 16 = 56 \cdot 16 = 896$ ta.

Javobi: 896 ta

2.42. Avtomashinalarni davlat ro‘yxatidan o‘tkazishda 3 ta raqam, 3 ta harf va viloyat (shahar) uchun belgilangan koddan foydalaniladi. Masalan, avtomashina nomeridagi **50** kod bu mashina Namangan viloyatida ro‘yxatdan o‘tganini bildiradi. Namanganda eng ko‘pi bilan quyidagi uslubda nechta avtomashina davlat ro‘yxatidan o‘tishi mumkin? (Ruxsat etilgan harflar 24 ta)

50 F 040 OA

Yechimi: Bizga 24 ta harf va 10 ta raqam berilgan. Har bir harfni o‘rniga 24 tadan va har bir raqam o‘rnida 10 tadan imkoniyat bor. Natijada ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra jami usullar soni $N = 24 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 24 = 13824000$ ta.

Javobi: 13824000 ta

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR

1. Har xil raqamli 4 raqami qatnashmagan besh xonali sonlar soni nechta.

Javobi: $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5$

2. A,V,S,D,Ye,F elementlardan bitta harf takrorlanmaydigan qilib nechta to‘rt harfli so‘z tuzish mumkin.

Javobi: $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3$

3. Har bir o‘quvchi kamida bitta kitob olishi mumkin bo‘lsa, to‘rta o‘quvchi 12 ta kitobni necha xil usulda taqsimlab olishadi.

Javobi: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9$

4. $\{a,d,b,m\}$ to‘plamning barcha qism to‘plamlari sonini toping.

Javobi: $2^4=16$ ta.

5. Bir guruhda 17 ta talaba ikkinchi guruhda 20 ta talaba o‘qiydi. Birinchi guruhdan 4 ta ikkinchi guruhdan 5 ta talaba bo‘lgan kichik guruhlar soni nechta.

Javobi: $A_{17}^4 \cdot A_{20}^5$

6. 3,4,5,6,7 sonlaridan nechta 3 xonali sonlar tuzish mumkin.

Javobi: $5^3=125$

7. 25 ta o‘quvchi 5 xil rangli buyoqni necha xil usulda tanlash mumkin.

Javobi: 25^5

8. $n(x)=15$ va $n(z)=13$ bo‘lsin. X to‘plamni Z ga akslantirishlar sonini toping.

Javobi: 15^{13}

9. $n(x)=7$ va $n(y)=9$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin. X to‘plamni Y to‘plamga akslantirish Y to‘plamni X to‘plamga akslantirishlar sonidan katta bo‘lishi mumkinmi.

Javobi: Mumkin.

10. 0,1,2,…….9 raqamlaridan 3 tasi bir xil va 2 tasi har xil raqamli nechta besh xonali nomer tuzish mumkin.

Javobi: $\overline{A}_{10}^3 \cdot A_9^2 = 10^3 \cdot 9 \cdot 8$

3-§. O‘rin almashtirishga doir masalalar

Ta’rif: Faqat elementlarining tartibi bilangina farq qiluvchi (ya’ni $n=k$) o‘rinlashtirishlar soni o‘rin almashtirish deyiladi. m ta elementdan tuzilgan o‘rin almashtirishlar soni P_n bilan belgilanadi (P - fransuzcha permutation – o‘rin almashtirish so‘zining bosh harfi).

n ta elementdan tuzilgan o‘rin almashtirish deb, shu elementlardan n tadan olib tuzilgan o‘rin almashtirishlarga aytiladi. Agar n ta elementdan k tadan olib o‘rinlashtirishlarda $n = k$ bo‘lsa, o‘rin almashtirish hosil bo‘lib faqat elementlari tartibi bilan farqlanadi. Ularning soni

$$P_m = A_m^m = m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot ....2 \cdot 1 = m!, \quad P_n = n! \qquad (1)$$

ga teng.

Izoh. $n!$ - birdan n gacha natural sonlar ko‘paytmasi bo‘lib, “n faktorial” deb o‘qiladi.

Ta’rif. Takrorli o‘rin almashtirish deb, tarkibida a_1 element k_1 marta a_2 element k_2 marta, …., a_m element k_m marta qatnashuvchi $k = k_1 + k_2 + ... + k_m$ uzunlikdagi k talikka aytiladi. Ularning soni

$$P(k_1, k_2, ...k_m) = \frac{k!}{k_1! \cdot k_2! ....k_m!} \qquad (2)$$

ga teng, bu yerda $k = k_1 + k_2 + ... + k_m$. Takrorsiz o‘rin almashtirishlar formulasining $k_1 = k_2 = ... = k_m = 1$, bo‘lgan xususiy holi.

3.1. 5 ta turli xatni 5 ta turli konvertga necha xil usulda joylash mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $P_5 = 5! = 120$ xil usulda joylashi mumkin.

Javobi: 120 xil

3.2. Tug‘ilgan kuningizga taklif etilgan 6 ta do‘stingizni 6 ta stulga necha xil usulda o‘tkaza olasiz?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $P_6 = 6! = 720$ xil usulda o‘tkazishi mumkin.

Javobi: 720 xil

3.3. Stolda ona tili, algebra, geometriya, fizika darsliklari yotibdi. Sevara ularni kitob javoniga qo‘ymoqchi. Bu darsliklar javonda jami necha xil usulda turishi mumkin?

Yechimi: Bizda jami 4 ta kitob bor (2) formulaga ko‘ra $P_4 = 4! = 24$ xil usulda turishi mumkin.

Javobi: 24 xil

3.4. 7 nafar o‘quvchi navbatga necha usul bilan turishi mumkin?

Yechimi: (2) formulaga ko‘ra $P_7 = 7! = 5040$ xil usulda turishi mumkin.

Javobi: 5040 xil

3.5. Ba‘zi mamlakatlarning bayroqlari turli rangdagi 3 ta gorizontal yoki 3 ta vertikal „yo‘l“ lardan iborat. Oq, yashil, ko‘k rangli matolar yordamida shunday bayroqlardan necha xilini tikish mumkin?

Yechimi: 1-hlatda gorizantal joylashtirsak (2) formulaga ko‘ra $P_3 = 3! = 6$ xil, 2-holatda vertikal joylashtirsa ham huddi shunday 6 xil demak, jami $N = 6 + 6 = 12$ xilini tikishi mumkin.

Javobi: 12 xil

3.6. „BARNO“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „BARNO“ so‘zida 5 ta harf bor va ular takrorlanmaydi. Demak, (2) formulaga ko‘ra $P_5 = 5! = 120$ ta so‘z hosil qilish mumkin. Izox: bunda hosil bo‘lgan so‘zlarning ma’noli bo‘lishi shart emas.

Javobi: 120 ta

3.7. „KUNFU“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „KUNFU“ so‘zida 5 ta harf bor va ularning ichida “U” harfi 2 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (5) formulaga asosan $P_5(2) = \frac{5!}{2!} = 60$ ta so‘z hosil qilish mumkin.

Javobi: 60 ta

3.8. „BARAKA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „BARAKA“ so‘zida 6 ta harf bor va ularning ichida “A” harfi 3 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (5) formulaga asosan $P_6(3)=\frac{6!}{3!}=120$ ta so‘z hosil qilish mumkin.

Javobi: 120 ta

3.9. „MATEMATIKA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „MATEMATIKA“ so‘zida 10 ta harf bor va ularning ichida “M” 2 marta, “A” 3 marta va “T” harfi 2 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (5) formulaga asosan $P_{10}(2;\,3;\;2)=\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!}=151200$ ta so‘z hosil qilish mumkin.

Javobi: 151200 ta

3.10. „NOZIMA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „NOZIMA“so‘zida 6 ta harf bor va ular takrorlanmaydi. Demak, (2) formulaga ko‘ra $P_6=6!=720$ ta so‘z hosil qilish mumkin. Izox: bunda hosil bo‘lgan so‘zlarning ma’noli bo‘lishi shart emas.

Javobi: 720 ta

3.11. „LALAKU“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „LALAKU“ so‘zida 6 ta harf bor va ularning ichida “L” 2 marta va “A” harfi 2 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (5) formulaga asosan $P_6(2;\;2)=\frac{6!}{2!\cdot 2!}=180$ ta so‘z hosil qilish mumkin.

Javobi: 180 ta

3.12. „ALLA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „ALLA“ so‘zida 4 ta harf bor va ularning ichida “L” 2 marta va “A” harfi 2 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (5) formulaga asosan $P_4(2;\ 2)=\dfrac{4!}{2!\cdot 2!}=6$ ta so‘z hosil qilish mumkin.

Javobi: 6 ta

3.13. „BARRA“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „BARRA“ so‘zida 5 ta harf bor va ularning ichida “R” 2 marta va “A” harfi 2 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (5) formulaga asosan $P_5(2;\ 2)=\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$ ta so‘z hosil qilish mumkin.

Javobi: 30 ta

3.14. „DAFTAR“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „DAFTAR“ so‘zida 6 ta harf bor va ularning ichida “A” harfi 2 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (5) formulaga asosan $P_6(2)=\dfrac{6!}{2!}=360$ ta so‘z hosil qilish mumkin.

Javobi: 360 ta

3.15. „TATU“ so‘zida harflar o‘rnini almashtirib, nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: „TATU“ so‘zida 4 ta harf bor va ularning ichida “T” harfi 2 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (5) formulaga asosan $P_4(2)=\dfrac{4!}{2!}=12$ ta so‘z hosil qilish mumkin.

Javobi: 12 ta

3.16. „KELEBEK“ so‘zi yordamida „B“ harfidan boshlanib „L“ harfi bilan tugaydigan nechta so‘z hosil qilish mumkin?

Yechimi: KELEBEK“ so‘zida 7 ta harf bor. Lekin bizda “B” va “L” harflari mahkamlanga. Demak, 5 ta harf qolmoqda va ularning ichida “K” harfi 2 marta va “E” 3 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (5) formulaga asosan $P_5(2;3)=\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10$ ta so‘z hosil qilish mumkin.

Javobi: 10 ta

3.17. 24975 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 5 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechimi: 24975 sonida 5 ta raqam bor va ular takrorlanmaydi. Demak, (2) formulaga ko‘ra $P_5=5!=120$ ta son hosil qilish mumkin.

Javobi: 120 ta

3.18. 24905 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 5 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechimi: 24905 sonida 5 ta raqam bor va ular takrorlanmaydi. Ma’lumki sonning boshida 0 raqami bo‘lsa u 5 xonali emas, 4 xonali son hisoblanadi. Shuning uchun $N=4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1=96$ ta son hosil qilish mumkin.

Javobi: 96 ta

3.19. 25975 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 5 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechimi: 25975 sonida 5 ta raqam bor va ularning ichida “5” raqami 2 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (2) formulaga asosan $P_5(2)=\dfrac{5!}{2!}=60$ ta 5 xonali son hosil qilish mumkin.

Javobi: 60 ta

3.20. 35115 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 5 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechimi: 35115 sonida 5 ta raqam bor va ularning ichida “1” va “5” raqamlari 2 marta takrorlanyabdi. Shuning uchun ham (2) formulaga asosan $P_5(2;2)=\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$ ta 5 xonali son hosil qilish mumkin.

Javobi: 30 ta

3.21. 25970 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 5 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechimi: 25970 sonida 5 ta raqam bor va ular takrorlanmaydi. Ma’lumki sonning boshida 0 raqami bo‘lsa u 5 xonali emas, 4 xonali son hisoblanadi. Shuning uchun $N = 4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 96$ ta son hosil qilish mumkin.

Javobi: 96 ta

3.22. 25950 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 5 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechimi: 25950 sonida 5 ta raqam bor va “5” raqami 2 marta takrorlanyabdi. Ma’lumki sonning boshida 0 raqami bo‘lsa u 5 xonali emas, 4 xonali son hisoblanadi. Shuning uchun ham (2) formulaga asosan $P_5(2) = \dfrac{4\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2!} = 48$ ta 5 xonali son hosil qilish mumkin.

Javobi: 48 ta

3.23. 4034 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 4 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechimi: 4034 sonida 4 ta raqam bor va “4” raqami 2 marta takrorlanyabdi. Ma’lumki sonning boshida 0 raqami bo‘lsa u 4 xonali emas, 3 xonali son hisoblanadi. Shuning uchun ham (2) formulaga asosan $P_4(2) = \dfrac{3\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2!} = 9$ ta 4 xonali son hosil qilish mumkin.

Javobi: 9 ta

3.24. 251102 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 6 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechimi: 251102 sonida 6 ta raqam bor va “1” va “2” raqamlari 2 marta takrorlanyabdi. Ma’lumki sonning boshida 0 raqami bo‘lsa u 6 xonali emas, 5 xonali son hisoblanadi. Shuning uchun ham (2) formulaga asosan $P_6(2;\,2) = \dfrac{5\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{2!\cdot 2!} = 150$ ta 6 xonali son hosil qilish mumkin.

Javobi: 150 ta

3.25. 34005 sonning raqamlari joylarini almashtirib jami nechta har xil 5 xonali son hosil qilish mumkin?

Yechimi: 34005 sonida 5 ta raqam bor va “0” raqami 2 marta takrorlanyabdi. Sonning boshida 0 yoki 00 kelsa ular hisoblanmaydi. Shuning uchun ham (2) formulaga asosan $P_5(2) = \dfrac{4 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = 36$ ta 5 xonali son hosil qilish mumkin.

Javobi: 36 ta

3.26. Alida 3 ta fizika va 2 ta matematika kitoblari bor. Ali matematika kitoblari yonma-yon boʻlishi sharti bilan bu 5 kitobni jami necha xil usulda joylashtirishi mumkin?

Yechimi: 2 ta matematika kitob doim yonma-yon kelishi kerak. Demak, bu raqamdan (0 dan farqli) nechta turli 4 xonali son bilan tuzish kerak degan bilan deyarli oʻxshash. (1) formulaga koʻra $P_4 = 4! = 24$, endi matematika kitobi 2 ta va ularni oʻrnini almashtirishlar soni ham 2!=2 ga teng. Natijada jami N=48 xil usulda joylashtirishi mumkin.

Javobi: 48 xil

Eslatma! Aytaylik m ta fizika va n ta matematika kitoblari mavjud. U holda matematika kitoblarini yonma yon boʻlish sharti bilan $m+n$ ta kitobni joylshtirishlar soni quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$N = n! \cdot (m+1)! \qquad (3)$$

Bu yerda n yonma yon keluvchi fan sifatida qaralyabdi.

3.27. Urolda 3 ta fizika va 2 ta matematika kitoblari bor. Urol fizika kitoblari yonma-yon boʻlishi sharti bilan bu 5 kitobni jami necha xil usulda joylashtirishi mumkin?

Yechimi: Bizda $n = 3$ va $m = 2$. (3) formulaga koʻra $N = 3! \cdot 3! = 36$ xil.

Javobi: 36 xil

3.28. Bekzodda 2 ta fizika va 4 ta matematika kitoblari bor. Bekzod fizika kitoblari yonmayon boʻlishi sharti bilan bu 6 kitobni jami necha xil usulda joylashtirishi mumkin?

Yechimi: Bizda $n=2$ va $m=4$. (3) formulaga ko'ra $N=2!\cdot 5!=240$ xil.

Javobi: 240 xil

3.29. Firdavsda 2 ta fizika va 4 ta matematika kitoblari bor. Firdavs matematika kitoblari yonma-yon bo'lishi sharti bilan bu 6 kitobni jami necha xil usulda joylashtirishi mumkin?

Yechimi: Bizda $n=4$ va $m=2$. (3) formulaga ko'ra $N=4!\cdot 3!=144$ xil.

Javobi: 144 xil

3.30. 1, 2, 3, ..., 9 raqamlaridan ularni takrorlamay tuzilgan 9 xonali sonlar ichida 2 va 5 raqamlari yonma-yon turadiganlari nechta?

Yechimi: Bunda ham (3) formuladan foydalansak bo'ladi. Bizda $n=2$ va $m=7$ demak, $N=2!\cdot 8!=2\cdot 8!$ xil.

Javobi: $2\cdot 8!$ xil

3.31. Ushbu kartalarni bir qatorga necha xil usulda taxlash mumkin?

Yechimi: Bu masala 5 ta raqamdan nechta turli 5 xonali tuzish kerak degan savol bilan bir xil. Demak, bizda 5 ta raqam bor va "1" va "2" raqamlari 2 marta takrorlanyabdi. (2) formulaga ko'ra $P_5(2;\,2)=\dfrac{5!}{2!\cdot 2!}=30$.

Javobi: 30 xil

3.32. Onada 3 ta olma, 4 ta nok va 2 ta apelsin bor. To'qqiz kun mobaynida u har kuni bolasiga bittadan meva beradi. Buni necha xil usul bilan bajarish mumkin?

Yechimi: Jami 9 ta meva bor va "olma" 3 marta, "nok" 4 marta va "apelsin" 2 marta takrorlanyabdi. (2) formulaga ko'ra $P_9(3;\,4;2)=\dfrac{9!}{3!\cdot 4!\cdot 2!}=1260$.

Javobi: 1260 xil

3.33. 2 raqami ikki marta, 3 raqami uch marta uchraydigan besh xonali sonlar nechta?

Yechimi: (2) formulaga ko‘ra $P_5(2;3)=\dfrac{5!}{2!\cdot 3!}=10$.

Javobi: 10 ta

3.34. Shaxmatdagi oq sipohlarni (2 ta ot, 2 ta fil, 2 ta rux, farzin va shohni) taxtaning birinchi yo‘liga necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

Yechimi: Jami 8 ta tosh bor va bulardan 3 tasi 2 tadan takrorlanyabdi. Shuning uchun (2) formuladan $P_8(2;2;2)=\dfrac{8!}{2!\cdot 2!\cdot 2!}=5040$ ta usul bilan joylashtirish mumkin.

Javobi: 5040 ta

3.35. Shaxmat taxtasida 8 ta ruxni bir-birini ololmaydigan (ura olmaydigan) qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin?

Yechimi: Shaxmat doskada 8 ta ruxni bir birini ololmaydigan qilib joylashtirish uchun: 1-toshga 8 ta, 2- toshga 7 ta va oxirgi toshga 1 ta imkoniyat qoladi. Bunda jami usullar soni ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra $P_8=1\cdot 2\cdot ...\cdot 7\cdot 8=8!$ ta.

Javobi: 8! ta

3.36. Beshta 1,2,3,4,5 o‘lchamli mahsulotlarni yashiklarga joylashtirish kerak. Agar 2 ning 3 dan keyin joylashtirish mumkin bo‘lmasa, unda mahsulotlarni necha xil usul bilan joylashtirish mumkin?

Yechimi: Beshta yashikka 5 xil o‘lchamli mahsulotni joylashtirishlar soni $P_5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ ta. Agar $\{2,3\}$ juftlikni olib $1,(2,3),4,5$ o‘lchamlardan o‘rin almashtirishlar tuzilsa, $P_4=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24$ ta. U holda misol sharti bo‘yicha 120-24=96 ta.

Javobi: 96 ta

3.37. Kitob tokchasidagi 15 ta kitobdan 3 tasi rus, ingliz, fransuz tilida. Bu kitoblarni yonma yon keladigan qilib necha xil usulda joylashtirish mumkin?

Yechimi: Bu uchta kitobdan bitta juftlik tuzamiz. Ular orasida $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ ta o‘rin almashtirishlar mavjud. Tokchada juftlik tuzilgandan keyin 13 ta element qoladi (uchtalik kitoblar juftligi bilan). O‘zaro o‘rin almashtirishlar soni $P_{13} = 13!$, birgalikda o‘rin almashtirishlar soni esa $P_{13} \cdot P_3 = 13! \cdot 6$ ta.

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR

1. Yigirma nafar o‘quvchidan iborat sinfda o‘zaro sovg‘a almashtirishlar soni qancha?

Javobi: $P_{20} = 20!$

2. Mehnat so‘zidan 6 ta harfdan iborat nechta har xil so‘z tuzish mumkin.

Javobi: $P_6 = 6!$

3. A,B,C,D,E harflaridan A harfi B harfidan keyin joylashadigan qilib o‘rin almashtirishlar soni qancha?

Javobi: $P_4 = 4! = 24.$

4. A,B,C,D,E harflaridan A harfi B harfidan keyin, C harfi E harfidan keyin joylashadigan qilib o‘rin almashtirishlar soni qancha?

Javobi: $P_3 = 6$ ta.

5. Kitob tokchasidagi 10 ta matematika va 8 ta fizika kitoblarining o‘zaro o‘rin almashtirishlari soni qancha? (Matematika va fizika kitoblari o‘zaro aralashib ketishi mumkin emas). Ularni o‘zaro aralashtirmasdan nechta o‘rin almashtirish bajarish mumkin?

Javobi: $P = P_{10} + P_8 = 10! + 8!$

6. O‘ttizta daftarni 3 ta sumkaga 6 tadan, 4 ta sumkaga 3 tadan necha usulda joylashtirish mumkin.

Javobi: $P(6,6,6,3,3,3,3) = \dfrac{30!}{(6!)^3 \cdot (3!)^4}$

7. «OROMGOH» so‘zidagi harflarni necha usul bilan o‘rin almashtirib ikkita «o» harfi yonma-yon turmaydigan qilish mumkin?

Javobi: 120 ta .

8. «QALAM» so‘zidagi harflarni necha usul bilan almashtirib ikkita unli harf orasida ikkita undosh harf keladigan qilish mumkin.

Javobi: 38.

9. «MATEMATIK» so‘zini harflarini necha usul bilan almashtirib ikkita bir xil harflar yonma-yon kelmaydigan qilish mumkin.

Javobi: $\frac{9!}{(2!)^3} - 6!! = 44640$

10. Xaridor 10 kg olma, 15 kg uzum va 20 kg nokdan faqat bittasini necha usulda tanlab olish mumkin.

Javobi: $P = \frac{45!}{10! \cdot 15! \cdot 20!}$

11. O‘nta daftar, 8 ta qalam va 3 ta ruchkani 31 ta o‘quvchi orasida necha xil usulda taqsimlash mumkin.

Javobi: $P \frac{23!}{10! \cdot 3! \cdot 8!}$

12. $\{1,2,3\}$ to‘plamdan tarkibida uchta bir, ikkita bir, to‘rtta uch raqami ishtirok etgan to‘plamlar nechta tuzish mumkin.

Javobi: $P(2,3,4) = \frac{9!}{2! \cdot 3! \cdot 4!} = 1260$

4-§. Takrorsiz guruhlashga doir masalalar

Endi X to‘plam elementlaridan k taliklar emas, balki =ism to‘plamlar tuzaylik. Ular o‘z tarkibidagi elemenlari bir-biridan far= =iladi. Masalan: $X = (a,b,d,e,f)$ to‘plam bo‘yicha tuzilgan $k = 3$ ta elementli $\{a,,d,f\},\{a,e,f\},\{b,d,e\}$ uchtaliklar biz aytayotgan =ism to‘plamlardir.

n ta elementli X to‘plamning k ta elementli =ism to‘plamlari shu elementlardan k tadan olib tuzilgan takrorsiz guruhlar (kombinatsiyalar) deyiladi.

Ta’rif: Guruhlashlar deb n ta elementdan k tadan olib tuzilgan va bir-biridan eng kamida bitta element bilan farq qiladigan o‘rinlashtirishlarga aytiladi.

n ta elementdan tuzilgan guruhlashlar soni C_n^k bilan belgilanadi. (C - fransuzcha combinasion – guruhlash so‘zining bosh harfi).

Agar P_k o‘rin almashtirishlar sonini C_n^k gruppalashlar soniga ko‘paytirsak, A_n^k o‘rinlashtirishlar sonini hosil qilamiz: $C_n^k \cdot P_k = C_n^k$, bundan: $C_n^k = \frac{A_n^k}{P_n}$ kelib chiqadi. Gruppalashlarni quyidagicha ham tushuntirish mumkin:

n ta elementli X to‘plamning k ta elementli qism to‘plamlari shu elementlardan k tadan olib tuzilgan gruppalashlar deyiladi.

Ularning soni

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n(n-1)........(n-(k-1))}{k!} \quad \text{yoki } C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \qquad (1)$$

ga teng, bunda har bir juftliklar bir biridan faqat tartibi bilan farq qiladi.

MASALALAR YECHISHDAN NA’MUNALAR

5.1. 5 nafar o‘quvchidan 2 nafarini „Bilimlar bellashuvi“ da qatnashish uchun tanlab olish kerak. Buni necha xil usulda bajarish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_5^3 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ ta.

Javobi: 10 xil

5.2. Jamshid, Urol, Surayyo, Nozima, Barno va Doston a’lo baholarga o‘qiydi. Maktab ma‘muriyati a‘lochilar uchun sovg‘a tarzida konsertga 4 ta chipta olib keldi. Shu chiptalar a’lochilar o‘rtasida necha usulda taqsimlanishi mumkin?

Yechimi: Jami 6 ta a’lochi o‘quvchi bor. (3) formulaga ko‘ra $C_6^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$ ta.

Javobi: 15 ta

5.3. Kutubxonachi Sizga 8 ta turli kitobni o‘qishni taklif qildi. Siz shulardan 3 tasini tanlab olmoqchisiz. Buni necha xil usulda amalga oshirish mumkin?

Yechimi: (3) formulaga ko‘ra $C_8^3 = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{6} = 56$ ta.

Javobi: 56 xil

5.4. Taqsimchada 10 ta yong‘oq bor edi. Nozima ixtiyoriy 3 tasini olmoqchi bo‘ldi. Buni u necha xil usulda amalga oshirishi mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_{10}^3 = \frac{10!}{7! \cdot 3!} = \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{6} = 120$ ta.

Javobi: 120 xil

5.5. Barno 6 ta masaladan ixtiyoriy 4 tasini tanlamoqchi. Surayyo esa 6 ta boshqa masaladan 2 tasini tanlamoqchi. Barno bu ishni necha xil usulda bajarishi mumkin? Surayyochi?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_6^4 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} = 15$, $C_6^2 = \frac{6!}{4! \cdot 2!} = 15$. Demak, Barn ova Surayyo bu ishni 15 xil usulda bajarar ekan.

Javobi: Ikkalasi ham 15 xil usulda

5.6. 15 nafar do‘stlar o‘‘zaro qo‘l berib ko‘rishishdi. Jami qo‘l berishlar soni nechta bo‘lgan?

Yechimi: Masalani shartidan 15 nafar do‘stlarni 2 talab guruhlab chiqishimiz kerak. Buning uchun (1) formuladan foydalansak bo‘ladi. Demak, $C_{15}^2 = \frac{15!}{13! \cdot 2!} = 105$ ta.

Javobi: 105 ta

5.7. 8 nafar do‘stlar o‘zaro qo‘l berib ko‘rishishdi va biroz muddat o‘tgach yana qo‘l berib xayrlashishdi. Jami qo‘l berishlar soni nechta bo‘lgan?

Yechimi: Masalani shartidan 15 nafar do‘stlarni 2 talab guruhlab chiqishimiz kerak va ular qayta hayirlashishgani uchun bu jarayonni 2 marotaba hisoblaymiz. Buning uchun (1) formuladan foydalansak bo‘ladi. Demak, $N = 2 \cdot C_8^2 = 2 \cdot \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 56$ ta.

Javobi: 56 ta

5.8. 12 nafar o‘rtoq o‘‘zaro shaxmat turniri o‘tkazishmoqchi. Bunda har bir bola qolgan har bir bola bilan bir partiya shaxmat o‘ynaydi. Bu turnirda jami nechta partiya o‘ynaladi?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_{12}^2 = \frac{12!}{10! \cdot 2!} = 66$ ta.

Javobi: 66 ta

5.9. 14 nafar o‘rtoq o‘‘zaro shaxmat turniri o‘tkazishmoqchi. Bunda har bir bola qolgan har bir bola bilan ikki partiya shaxmat o‘ynaydi. Bu turnirda jami nechta partiya o‘ynaladi?

Yechimi: Har bir bola 2 partiya o‘ynaganligi uchun (1) formuladan chiqqan natijani 2 ga ko‘paytirishimiz kerak. Ya’ni $N = 2 \cdot C_{14}^2 = 2 \cdot \frac{14!}{12! \cdot 2!} = 182$ ta.

Javobi: 182 ta

5.10. Futbol chempionatida 18 ta jamoa qatnashyapti. Agar har bir jamoa boshqa jamoa bilan o‘z maydonida va raqib maydonida o‘ynaydigan bo‘lsa, chempionatda jami qancha o‘yin o‘ynaladi?

Yechimi: Yuqoridagi 5.9-masalaga ko‘ra $N = 2 \cdot C_{18}^2 = 2 \cdot \frac{18!}{16! \cdot 2!} = 306$ ta.

Javobi: 306 ta

5.11. Sinfda 20 nafar o‘quvchi bor. Fan olimpiadasida qatnashish uchun 3 nafar o‘quvchidan iborat jamoani tanlab olishimiz kerak. Buni necha usulda amalga oshirish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_{20}^3 = \frac{20!}{17! \cdot 3!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{6} = 1140$ ta.

Javobi: 1140 ta

5.12. Sinfda 30 nafar o‘quvchi bor. Fan olimpiadasida qatnashish uchun 3 nafar o‘quvchidan iborat jamoani tanlab olishimiz kerak. Buni necha usulda amalga oshirish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_{30}^{3}=\dfrac{30!}{27!\cdot 3!}=\dfrac{28\cdot 29\cdot 30}{6}=4060$ ta.

Javobi: 4060 ta

5.13. Tadbirkor 8 ta gazetadan 5 tasiga o‘z firmasi haqida e‘lon bermoqchi. U 5 ta gazetani necha xil usulda tanlashi mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_{8}^{3}=\dfrac{8!}{5!\cdot 3!}=56$ ta.

Javobi: 56 xil

5.14. Matematika to‘garagida faol qatnashuvchi 10 ta o‘quvchidan 4 tasini Xalqaro matematika olimpiadasiga (IMO) yuborish uchun ularni necha xil usulda tanlasa bo‘ladi?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_{10}^{4}=\dfrac{10!}{6!\cdot 4!}=210$ ta.

Javobi: 210 xil

5.15. Do‘kondagi 10 xil mevadan 3 xilini sotib olmoqchisiz. Buni necha xil usulda bajara olasiz?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_{10}^{3}=\dfrac{10!}{7!\cdot 3!}=120$ ta.

Javobi: 120 xil

5.16. 11- sinfda 12 ta fandan dars o‘tiladi. Juma kuni jadval bo‘yicha 5 soat dars bo‘lib, har bir soatda har xil dars o‘tiladi. Juma kungi jadvalni necha xil usulda tuzish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_{12}^{5}=\dfrac{12!}{7!\cdot 5!}=\dfrac{8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{120}=792$ ta.

Javobi: 792 xil

5.17. 7 yigit va 4 qizdan iborat o‘quvchilar guruhidan oltita o‘quvchini shunday tanlab olish kerakki, ularning ichida qizlar soni ikkitadan kam bo‘lmasin. Buni necha xil usul bilan amalga oshirish mumkin?

Yechimi: Qizlarni guruhga 2, 3 va 4 ta tadan tanlab olish mumkin. Ikkita qizni C_4^2 usul bilan, shundan so‘ng 4 ta yigitni C_7^4 usul bilan tanlab olamiz. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra bunday usullar soni $C_4^2 \cdot C_7^4$ ta. Agar avval uchta qiz tanlab olingan bo‘lsa, u holda $C_4^3 \cdot C_7^3$ ta usul mavjud. Agar 4 ta qiz tanlab olingan bo‘lsa, $C_4^4 \cdot C_7^2$ ta usul mavjud. Jami $C_4^2 \cdot C_7^4 + C_4^3 \cdot C_7^3 + C_4^4 \cdot C_7^2 = 371$ ta usul bilan 6 kishidan iborat guruh tuzish mumkin.

Javobi: 371 ta

5.18. 7 ta olma va 3 ta nok bor. Ularni necha xil usul bilan har birida 5 tadan meva bo‘lgan va ulardan hech bo‘lmaganda 1 tasida nok bo‘lgan ikkita taqsimchaga qo‘yish mumkin?

Yechimi: Bu masalada 3 xil holat ro‘y berishi mumkin. 1-holatda 1 ta nok, 4 ta olma tanlashlar soni $C_3^1 \cdot C_7^4 = 105$ ta, 2-holatda 2 ta nok va 3 ta olama tanlab olishlar soni $C_3^2 \cdot C_7^3 = 105$ ta va 3-holatda 3 ta nok va 2 ta olma tanlab oishlar soni $C_3^3 \cdot C_7^2 = 21$ ta. Natijada jami $N = 105 + 105 + 21 = 231$ ta.

Javobi: 231 ta

5.19. 12 ta oq atirgul va 13 ta qizil atirguldan ikkita oq atirgul va uchta qizil atirguldan iborat guldasta tuzish kerak. Buni necha xil usulda bajarish mumkin?

Yechimi: 12 ta oq atirguldan 2 ta tanlab olishlar soni C_{12}^2 ta, 13 ta qizil atirguldan 3 ta tanlab olishlar soni C_{13}^3 ta. Ko‘paytirish qoidasiga ko‘ra jami $C_{12}^2 \cdot C_{13}^3 = 18876$ ta.

Javobi: 18876 ta

5.20. Gul sotuvchida 5 ta qizil va 10 ta oq chinnigul qolibdi. A‘zamxon singlisi Mubinabonuga 2 ta qizil va 3 ta oq chinniguldan iborat guldasta sovg‘a qilmoqchi. Buni u necha xil usul bilan amalga oshirishi mumkin?

Yechimi: Yuqoridagi 5.19-masalaga ko‘ra $C_5^2 \cdot C_{10}^3 = \dfrac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \dfrac{10!}{7! \cdot 3!} = 1200$ ta.

Javobi: 1200 ta

5.21. Aylanada olingan 6 ta nuqta A, B, C, D, E, F harflari bilan belgilangan. Har bir nuqta qolgan har bir nuqta bilan tutashtirilsa, nechta kesma hosil bo‘ladi?

Yechimi: Jami 6 ta nuqta va shulardan 2 tadan guruhlab chiqishimiz kerak. Demak, (1) formulaga ko‘ra $C_6^2 = \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$ ta.

Javobi: 15 ta

5.22. Aylanada yotuvchi 20 ta turli nuqta belgilandi. Uchlari belgilangan nuqtalarda yotuvchi vatarlar soni nechta?

Yechimi: Yuqoridagi 5.21-masalaga asosan topamiz $C_{20}^2 = \frac{20!}{18!\cdot 2!} = 190$ ta.

Javobi: 190 ta

5.23. Aylanada olingan (n+1) ta nuqta orqali nechta vatar o‘tkazish mumkin?

Yechimi: Jami $n+1$ ta nuqtani 2 talab guruhlab chiqamiz. Ya’ni, (3) formulaga asosan $C_{n+1}^2 = \frac{(n+1)!}{(n-1)!\cdot 2!} = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ta.

Javobi: $\frac{n\cdot(n+1)}{2}$ ta

5.24. Aylanada yotuvchi 20 ta turli nuqta belgilandi. Uchlari belgilangan nuqtalarda yotuvchi uchburchaklar sonini hisoblang.

Yechimi: 20 ta nuqtani 3 talab guruhlab chiqamiz. Ya’ni (1) formulaga asosan $C_{20}^3 = \frac{20!}{17!\cdot 3!} = 1140$ ta.

Javobi: 1140 ta

5.25. Aylanada yotuvchi 20 ta turli nuqta belgilandi. Uchlari belgilangan nuqtalarda yotuvchi qavariq to‘rtburchaklar sonini hisoblang.

Yechimi: (1) formulaga asosan $C_{20}^4 = \frac{20!}{16!\cdot 4!} = \frac{17\cdot 18\cdot 19\cdot 20}{24} = 4845$ ta.

Javobi: 4845 ta

5.26. 7 ta to‘g‘ri chiziqlar ko‘pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_7^2 = \frac{7!}{5!\cdot 2!} = 21$ ta.

Javobi: 21 ta

5.27. 10 ta to‘g‘ri chiziqlar ko‘pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $C_{10}^2 = \frac{10!}{8!\cdot 2!} = 45$ ta.

Javobi: 45 ta

5.28. Markazlari har xil nuqtalarda bo‘lgan 4 ta aylana ko‘pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

Yechimi: Biz C_n^2 orqali n ta aylanalarni 2 talab kesishishini belgilaymiz. Ma’lumki ikkita aylan ko‘pi bilan 2 ta nuqtada kesishadi. U holda n ta aylana ko‘pi bilan $N = 2\cdot C_n^2 = 2\cdot \frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = n\cdot(n-1)$ ta nuqtada kesishadi. Demak, 4 ta yalana ko‘pi bialn $N = 4\cdot(4-1) = 12$ ta nuqtada kesisadi.

Javobi: 12 ta

5.29. Markazlari har xil nuqtalarda bo‘lgan 5 ta aylana ko‘pi bilan nechta nuqtada kesishadi?

Yechimi: Yuqoridagi 5.28- masalaga asosan $N = 5\cdot(5-1) = 20$ ta.

Javobi: 20 ta

5.30. Qavariq yettiburchakning diagonallari nechta nuqtada kesishadi? Hech qaysi uchta diagonal bitta nuqtada kesishmaydi, deb faraz qiling.

Yechimi: Ma’lumki qavariq to‘rtburchakning diognallari 1 ta buqtada kesishadi. Demak, biz qavariq 7 burchakning diognallaridan nechta to‘rtburchak hosil bo‘lishini topishimiz kifoya. (1) formulaga ko‘ra $C_7^4 = \frac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$ ta.

Javobi: 35 ta

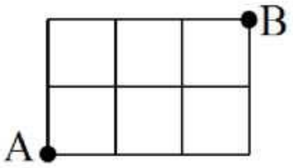
5.31. Qavariq sakkizburchakning diagonallari nechta nuqtada kesishadi? Hech qaysi uchta diagonal bitta nuqtada kesishmaydi, deb faraz qiling.

Yechimi: Yuqoridagi 5.30-masaladan foydalanamiz. Natijada (1) formulaga ko‘ra $C_8^4=\frac{8!}{4!\cdot 4!}=70$ ta.

Javobi: 70 ta

Eslatma! Agar to‘g‘ri to‘rtburchakning o‘lchamlari $m\times n$ bo‘lsa va u $m\cdot n$ ta kvadratchalarga ajratilgan bo‘lsa, u holda A dan B ga olib boruvchi eng qisqa yo‘llar soni C_{m+n}^{n} yoki C_{m+n}^{m} ga teng bo‘ladi.

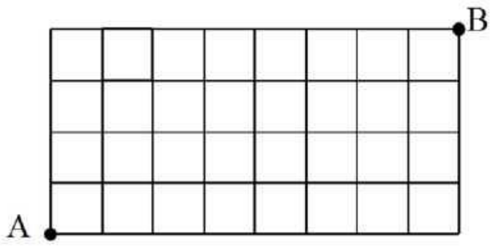
5.32. O‘lchamlari 3×2 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak 3 · 2 = 6 ta kvadratchalarga bo‘lingan. Kvadratchalarning tomonlari bo‘yicha yurganda A dan B ga olib boruvchi eng qisqa yo‘llar soni nechta?



Yechimi: Yuqoridagi qoidaga asosan ishlaymiz. Bizda $m=2, n=3$ demak, eng qisqa yo‘llar soni $C_5^2=\frac{5!}{3!\cdot 2!}=10$ ta.

Javobi: 10 ta

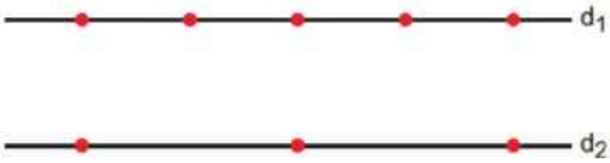
5.33. O‘lchamlari 8×4 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak 8 · 4 = 32 ta kvadratchalarga bo‘lingan. Kvadratchalarning tomonlari bo‘yicha yurganda A dan B ga olib boruvchi eng qisqa yo‘llar soni nechta?



Yechimi: Yuqoridagi qoidaga asosan ishlaymiz. Bizda $m=8, n=4$ demak, eng qisqa yo‘llar soni $C_{12}^4=\frac{12!}{8!\cdot 4!}=495$ ta.

Javobi: 495 ta

5.34. Asosining uchlari d1 to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalarda, uchi esa d2 to‘g‘ri chiziqdagi nuqtada bo‘lgan nechta uchburchak yasash mumkin? (d1//d2)



Yechimi: d_1 chiziqda da 5 ta nuqta d_2 chiziqda 3 ta nuqta mavjud. Asosi d_1 chiziqda bo‘lganligi uchun, d_1 dan nuqtalarni 2 tadan, d_2 dan 1 tadan guruhlashimiz kerak. U holda jami hosil bo‘ladigan uchburchaklar soni $C_5^2 \cdot C_3^1 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 10 \cdot 3 = 30$ ta.

Javobi: 30 ta

5.35. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lib, ularning birida 4 ta, ikkinchisida 3 ta nuqta belgilangan. Uchlari shu nuqtalarda bo‘lgan nechta uchburchak bor?

Yechimi: Bunda 1-navbatda 4 ta nuqtadan 2 tadan va 3 ta nuqtadan 1 tadan guruhlashimiz mumkin. 2-navbatda 4 ta nuqtadan 1 tadan va 3 ta nuqtadan 2 tadan guruhlashimiz mumkin. Natijada jami hosil bo‘ladigan uchburchaklar soni $N = C_4^2 \cdot C_3^1 + C_4^1 \cdot C_3^2 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{4!}{3! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 18 + 12 = 30$ ta.

Javobi: 30 ta

5.36. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lib, ularning bittasida 5 ta, ikkinchisida 3 ta nuqta belgilangan. Uchlari shu nuqtalarda bo‘lgan nechta uchburchak mavjud?

Yechimi: Yuqoridagi 5.35-masaladan foydalansak. Jami hosil bo‘ladigan uchburchaklar $N = C_5^2 \cdot C_3^1 + C_5^1 \cdot C_3^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!} + \frac{5!}{4! \cdot 1!} \cdot \frac{3!}{1! \cdot 2!} = 30 + 15 = 45$ ta.

Javobi: 45 ta

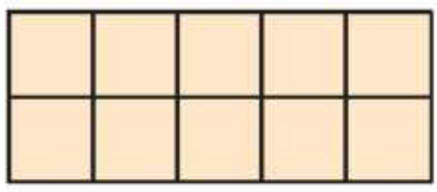
5.37. Ikkita parallel chiziqning birida 8 ta, ikkinchisida 11 ta nuqta belgilandi. Uchlari belgilangan nuqtalarda bo‘lgan qavariq to‘rtburchaklar sonini toping.

Yechimi: Ma’lumki to‘rtburchakning 3 ta uchi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydi. Demak, har ikkala chiziqdan ham nuqtalarni 2 tadan guruhlashimiz kerak bo‘ladi. Natijada jami hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar

$$N = C_{11}^2 \cdot C_8^2 = \frac{11!}{9! \cdot 2!} \cdot \frac{8!}{6! \cdot 2!} = 1540.$$

Javobi: 1540 ta

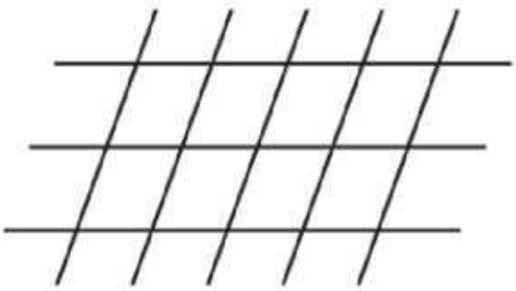
5.38. Ushbu shaklda nechta turli to‘rtburchak bor?



Yechimi: Ma’lumki pastga yo‘nalgan chiziqlarni 2 tasidan to‘rtburchaklar hosil bo‘ladi. Asosida 6 ta nuqta joylashgan va yon tomonga 3 ta kesma yo‘naltirilgan (asos bilan). Demak, jami hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar soni $3 \cdot C_6^2 = 45$ ta.

Javobi: 45 ta

5.39. Quyidagi shakl yordamida nechta turli parallelogram yasash mumkin?



Yechimi: Asosda 5 ta nuqta bor va yon tomonida 3 ta. Demak, jami hosil bo‘ladigan parallelogramlar soni $3 \cdot C_5^2 = 30$ ta.

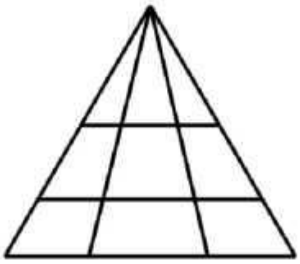
Javobi: 30 ta

5.40. Ikkita parallel to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lib, ularning bittasida 4 ta, ikkinchisida 6 ta nuqta belgilangan. Uchlari shu nuqtalarda bo‘lgan nechta to‘rtburchak mavjud?

Yechimi: Yuqoridagi 5.37-masalaga ko‘ra jami hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar soni $N = C_4^2 \cdot C_6^2 = \frac{4!}{2!\cdot 2!} \cdot \frac{6!}{4!\cdot 2!} = 6 \cdot 15 = 90$ ta.

Javobi: 90 ta

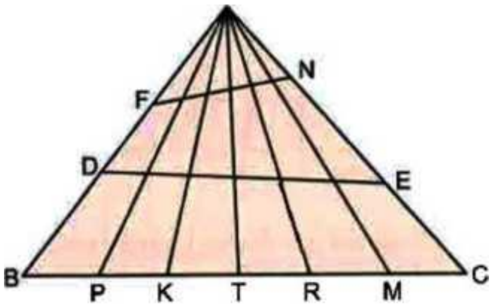
5.41. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: Asosda 4 ta nuqta bor va yon tomonida 3 ta. Demak, jami hosil bo‘ladigan uchburchaklar soni $3 \cdot C_4^2 = 18$ ta.

Javobi:18 ta

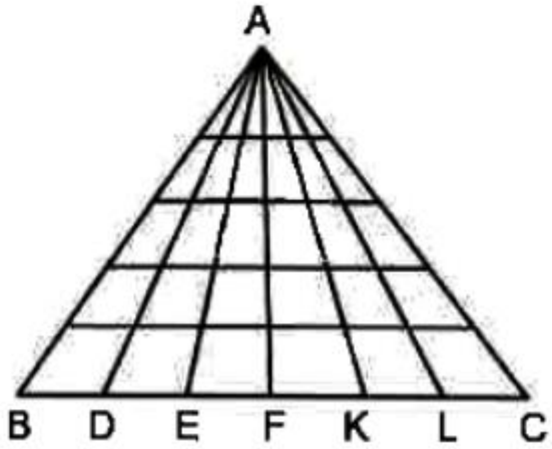
5.42. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: Asosda 7 ta nuqta bor va yon tomonida 3 ta. Demak, jami hosil bo‘ladigan uchburchaklar soni $3 \cdot C_7^2 = 63$ ta.

Javobi: 63 ta

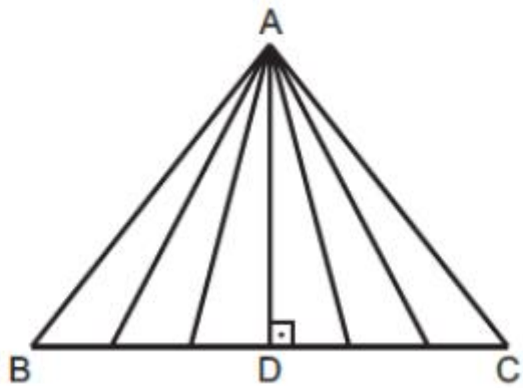
5.43. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: Asosda 7 ta nuqta bor va yon tomonida 5 ta. Demak, jami hosil bo‘ladigan uchburchaklar soni $5 \cdot C_7^2 = 105$ ta.

Javobi: 105 ta

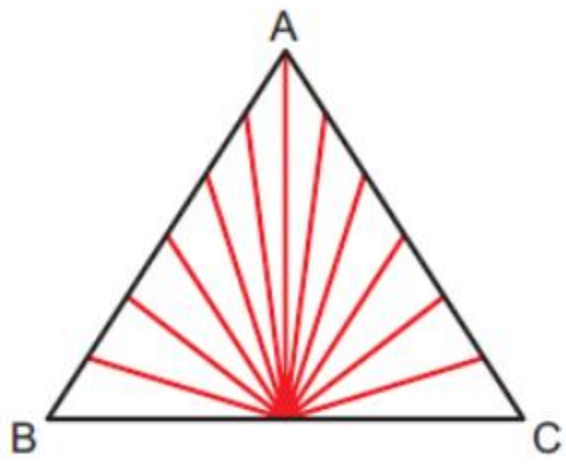
5.44. AD⊥ BC. Quyidagi shaklda nechta to‘g‘ri burchakli bo‘lmagan uchburchak bor?



Yechimi: To‘g‘ri burchakli bo‘lmagan uchburchaklarni hisoblaganimiz uchun asosdagi D nuqtani hisoblamaymiz. Shunda asosda 6 ta nuqta bor. Demak, jami hosil bo‘ladigan (to‘g‘ri burchakli bo‘lmagan) uchburchaklar soni $C_6^2 = 15$ ta.

Javobi: 15 ta

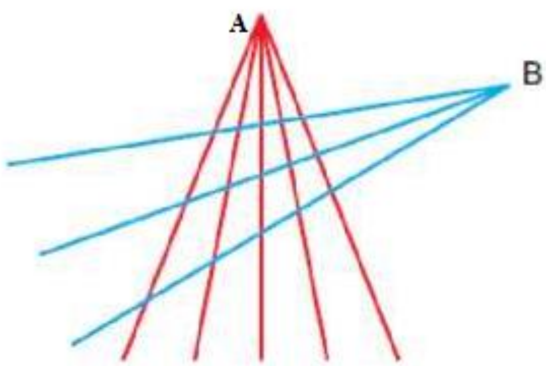
5.45. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: Bu masalani 3 xil holatda qaraymiz. 1-holatda ucburchakning yarmini hisoblab AC ni asos deb olsak natijada asosda 7 ta nuqta bor. 2-holatda AB ni asos deb olsak, 1-holat bilan bir xil chiqadi. 3-holat berilgan uchburchakni 2 qismga ajratib olganimiz uchun berilgan ABC uchburchakning o‘zi ham hisoblanadi. Demak, jami hosil bo‘ladigan uchburchaklar soni $C_7^2 + C_7^2 + 1 = 43$ ta.

Javobi: 43 ta

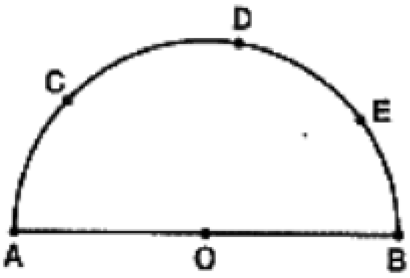
5.46. Ushbu shakldа nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: Bu masalani 2 xil holatda qaraymiz. 1-holatda A nuqtani uchburchakning uchi deb olsak. Asosda 5 ta nuqta mavjuda va yon tomonida 3 ta. 2-holatda B nuqtani uchburchakning uchi deb olsak: asosda 3 ta nuqta mavjuda va yon tomonida 5 ta. Demak, jami hosil bo‘ladigan uchburchaklar soni $3 \cdot C_5^2 + 5 \cdot C_3^2 = 45$ ta.

Javobi: 45 ta

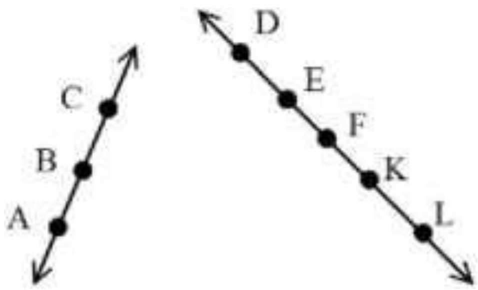
5.47. Quyida berilgan 6 ta nuqta orqali nechta turli uchburchak yasash mumkin?



Yechimi: (3) formulaga ko‘ra 6 ta nuqtadan $C_6^3 = 20$ ta uchburchak tuzish mumkin. Lekin A, O va B nuqtalar bir to‘g‘ri chiziqda yotgani uchun $N = 20 - 1 = 19$ ta.

Javobi: 19 ta

5.48. AC to‘g‘ri chiziqda 3 ta nuqta, DL to‘g‘ri chiziqda 5 ta nuqta berilgan. Uchlari shu nuqtalarda bo‘lgan nechta turli uchburchak yasash mumkin?



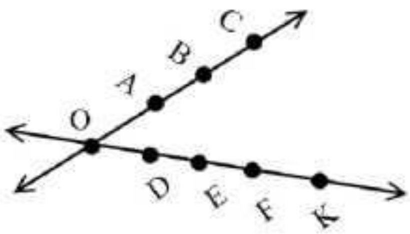
Yechimi: Bunda 2 xil holatni qaraymiz. 1-holatda AC chiziqdan nuqtalarni 1 tadan DL chiziqdagi nuqtalarni 2 tadan guruhlaymiz. 2-holatda AC dagi nuqtalarni 2 tadan va DL dagi chiziqlarni 1 tadan guruhlaymiz. Natijada jami uchburchaklar soni $C_3^1 \cdot C_5^2 + C_3^2 \cdot C_5^1 = 30 + 15 = 45$ ta.

Javobi: 45 ta

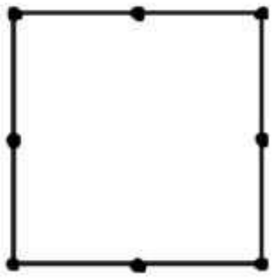
5.49. Quyida berilgan 8 ta nuqta orqali nechta turli uchburchak yasash mumkin?

Yechimi: Berilgan 8 ta nuqtadan $C_8^3 = 56$ ta uchburchak yasash mumkin. Lekin, bir chiziqda 5 ta, ikkinchi chiziqda 4 ta nuqta bir to‘g‘ri chiziqga tushub qolgan. Natijada jami uchburchaklar soni $C_8^2 - C_5^2 - C_4^2 = 56 - 10 - 4 = 42$ ta.

Javobi: 42 ta



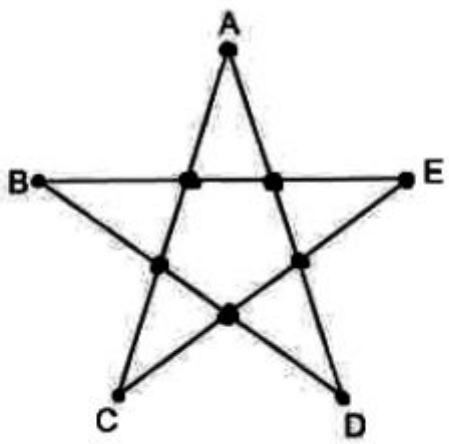
5.50. Kvadratning tomonlarida berilgan 8 ta nuqta orqali nechta turli uchburchak yashash mumkin?



Yechimi: (3) formulaga ko‘ra 8 ta nuqtadan $C_8^3 = 56$ ta uchburchak tuzish mumkin. Lekin kvadratning 4 ta tomonida 3 ta nuqta bir kesmada yotadi. Ma’lumki 3 ta bir to‘g‘ri chiziqda yotmagan nuqtadan 1 ta uchburchak yasash mumkin. Shuning uchun jami uchburchaklar soni $N = 56 - 4 = 52$ ta.

Javobi: 52 ta

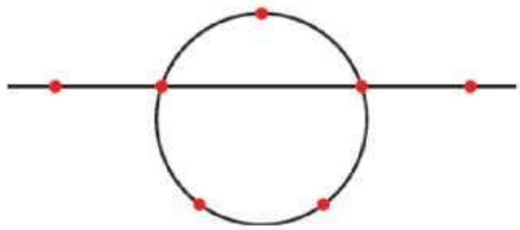
5.51. Yulduzchada berilgan 10 ta nuqta orqali nechta turli uchburchak yasash mumkin?



Yechimi: (3) formulaga ko‘ra 10 ta nuqtadan $C_{10}^3 = 120$ ta uchburchak tuzish mumkin. Lekin, 5 ta kesmada 4 ta nuqta bir kesmada yotadi. Shuning uchun jami uchburchaklar soni $N = C_{10}^3 - 5 \cdot C_4^3 = 120 - 20 = 100$ ta.

Javobi: 100 ta

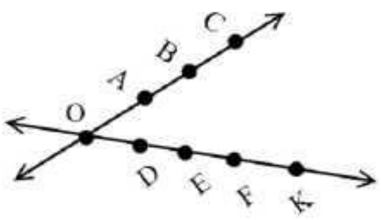
5.52. Quyida shakldagi 7 ta nuqta yordamida nechta turli to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazish mumkin?



Yechimi: 7 ta nuqtadan $C_7^2 = 21$ ta to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin va chizmada ham bitta chiziq berilgan. Lekin 4 ta nuqta bir chiziqda yotgani uchun ular orqali o‘tuvchi $C_4^2 = 6$ ta to‘g‘ri chiziqni ayirib tashlashimiz kerak. Demak, jami $N = 21 + 1 - 6 = 16$ ta.

Javobi: 16 ta

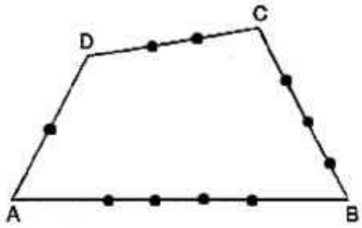
5.53. Quyida berilgan 8 ta nuqta orqali nechta turli to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?



Yechimi: Chizmada OC va OK lar 2 ta chiziq berilgan va OK chiziqni qaraydigan bo‘lsak, undagi 4 ta nuqtani har biridan OC dagi nuqtalar orqali 3 tadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Demak, jami $N = 2 + 4 \cdot 3 = 14$ ta.

Javobi: 14 ta

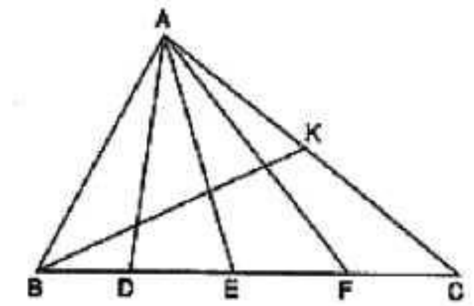
5.54. Quyida berilgan 10 ta nuqta orqali nechta turli to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin?



Yechimi: AD dagi nuqtadan 9 ta, DC dagi nuqtalarni har biridan 7 tadan va CB dagi 3 ta nuqtaning har biridan 4 tadan to‘g‘ri chiziq o‘tkazish mumkin. Qo‘shimcha DC, CB va BA 3 ta chiziq ham bor (AD ni hisoblay olmaymiz chunki u 1 ta nuqta orqali hosil qilingan). Demak, jami hosil bo‘luvchi turli to‘g‘ri chiziqlar $N = 9 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 4 + 3 = 38$ ta.

Javobi: 38 ta

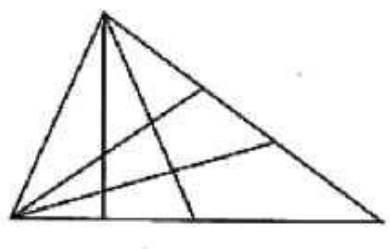
5.55. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: 2-xil holatda qaraymiz. 1) BC ni asos sifatida qarasak asosda 5 ta nuqta va yon tomonda 2 ta nuqta muvjud. U holda uchburchaklar soni $2 \cdot C_5^2 = 20$ ta. 2) CK ni asos sifatida qarasak unda 2 ta va yon tomonda 4 ta nuqta mavjud. U holda uchburchaklar soni $C_2^2 \cdot 4 = 4$ta. Natijada jami uchburchaklar soni $N = 20 + 4 = 24$ ta.

Javobi: 24 ta

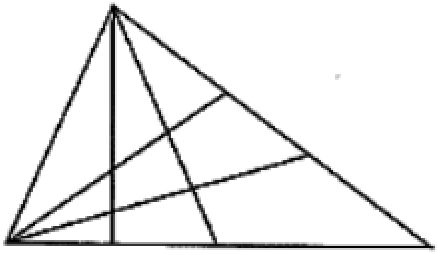
5.56. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: 5.55- masalaga ko‘ra. 1-holatda $C_4^2 \cdot 3 = 18$ ta. 2-holatda $C_3^2 \cdot 3 = 9$ta. Natijada jami uchburchaklar soni $N = 18 + 9 = 27$ ta.

Javobi: 27 ta

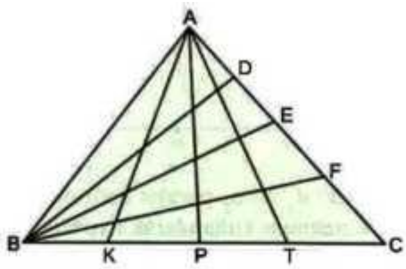
5.57. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: 5.55- masalaga ko‘ra. 1-holatda $C_5^2 \cdot 3 = 30$ ta. 2-holatda $C_3^2 \cdot 4 = 12$ ta. Natijada jami uchburchaklar soni $N = 30 + 12 = 42$ ta.

Javobi: 42 ta

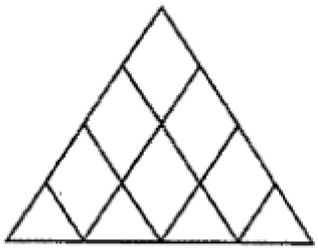
5.58. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: 152- masalaga ko‘ra. 1-holatda $C_5^2 \cdot 4 = 40$ ta. 2-holatda $C_4^2 \cdot 4 = 24$ ta. Natijada jami uchburchaklar soni $N = 40 + 24 = 64$ ta.

Javobi: 64 ta

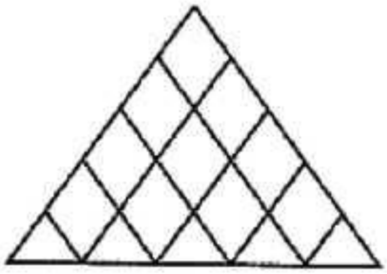
5.59. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: 1-qator ya’ni asosda 4 ta uchburchak, 2-qatorda 3 ta, 3-qatorda 2 ta va oxiri 1 ta katta uchburchak. Demak, jami uchburchaklar soni $N = 4 + 3 + 2 + 1 = 10$ ta.

Javobi: 10 ta

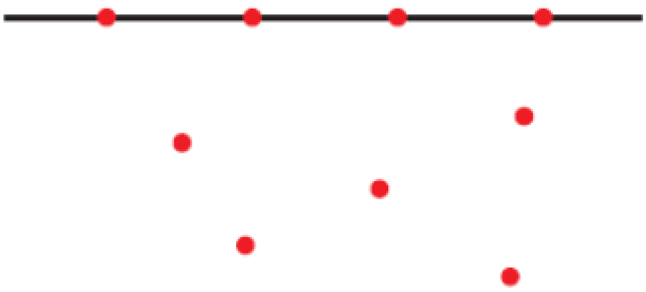
5.60. Ushbu shaklda nechta turli uchburchak bor?



Yechimi: 1-qator ya'ni asosda 5 ta uchburchak, 2-qatorda 4 ta, 3-qatorda 3 ta, 4-qatorda 2 ta va oxiri 1 ta katta uchburchak. Demak, jami uchburchaklar soni $N = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ ta.

Javobi: 15 ta

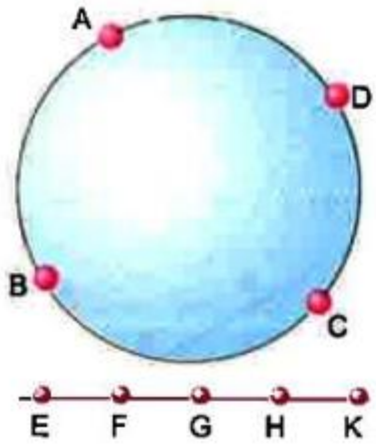
5.61. Quyida berilgan 9 ta nuqta yordamida nechta turli to‘rtburchak yasash mumkin? (Bunda chiziqdan pastda joylashgan nuqtalarning 3 tasi bir to‘g‘ri chiziqda yotmaydi deb qarang)



Yechimi: 3 xil holat bo‘lishi mumkin. 1) to‘rtburchakning 2 ta uchi chiziqda 2 ta uchi pastda u holda hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar soni $C_4^2 \cdot C_5^2 = 6 \cdot 10 = 60$ ta. 2) 1 ta uchi chiziqda 3 ta uchi pastda u holda hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar soni $C_4^1 \cdot C_5^3 = 4 \cdot 10 = 40$ ta. 3) to‘rtburchakning 4 ta uchi ham pastda joylash u holda hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar soni $C_5^4 = 5$ ta. Shunday qilib jami (1)+(2)+3)=105 ta to‘rtburchak chizish mumkin.

Javobi: 105 ta

5.62. Quyida berilgan 9 ta nuqta yordamida nechta turli to‘rtburchak yasash mumkin?



Yechimi: 3 xil holat bo‘lishi mumkin. 1) to‘rtburchakning 2 ta uchi chiziqda 2 ta uchi aylanada u holda hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar soni $C_5^2 \cdot C_4^2 = 10 \cdot 6 = 60$ ta. 2) 1 ta uchi chiziqda 3 ta uchi aylanada u holda hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar soni $C_4^3 \cdot C_5^1 = 4 \cdot 5 = 20$ ta. 3) to‘rtburchakning 4 ta uchi ham aylanada joylash u holda hosil bo‘ladigan to‘rtburchaklar soni $C_4^4 = 1$ ta. Shunday qilib jami (1)+(2)+3)=81 ta to‘rtburchak chizish mumkin.

Javobi: 81 ta

5.63. Idishda 1, 2, 3, ..., 10 sonlari yozilgan sharlar bor. Idishdan uchta shar olamiz. Nechta holda ularda yozilgan sonlar yig‘indisi 9 dan kichik bo‘lmaydi?
Yechimi: Berilgan 10 ta sondan 3 tadan guruhlashlar soni $C_{10}^3 = 120$ ta. Lekin yig‘indisi 9 dan katta bo‘lmaydigan ushbu $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,2,5\}$ va $\{1,3,4\}$ guruhlar mavjud. Demak, bunday guruhlar soni $N = 120 - 4 = 116$ ta.

Javobi: 116 ta

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR

1. Yigirma kishidan iborat guruhdan 3 kishini shaxmat musobaqasiga necha xil usulda tanlab olish mumkin?

Javobi: $C_{20}^3 = \dfrac{20!}{3! \cdot 17!} = 1140$

2. $A = \{1,2,3,4,5\}$ to‘plamning barcha qism to‘plamlari sonini toping.

Javobi: $C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 32$ ta.

3. n ta elementdan 2 tadan olib tuzilgan gruppalashlar soni $n+1$ ta elementdan 4 tadan olib tuzilgan gruppalashlar sonidan 3 marta ko‘p bo‘lsa, n ni toping.

Javobi: $\mathrm{n}=3$

4. Bir aylanada yotgan 7 ta nuqtadan nechta vatar o‘tkazish mumkin.

Javobi: $C_7^2=21$ ta.

5. $A_{x+1}^3-C_x^1=2x$ tenglamani yeching.

Javobi: $x=2$

6. $2\cdot C_n^4<C_{n+1}^5$ tengsizlikni yeching.

Javobi: $(19;+\infty)$

7. A guruhda 20 ta talaba va B guruhda 25 ta talabalar 3 tadan kichik guruhlarga bo‘linadi. Bu kichik guruhlardan A guruhga va B guruhga tegishli bitta talabani necha usulda tanlab olish mumkin?

Javobi: $C_{20}^3\cdot C_{25}^3$

8. Do‘konda 20 turdagi O‘zbekistonda ishlab chiqarilgan mahsulot, 32 turdagi Rossiyada ishlab chiqarilgan, 15 turdagi Yevropada ishlab chiqarilgan mahsulotlar bor. Xaridor 5 turdagi O‘zbeksitonda ishlab chiqarilgan, 12 turdagi Yevropada ishlab chiqarilgan, 17 turdagi Rossiyada ishlab chiqarilgan mahsulotlarni sotib olmoqchi. Uning imkoniyatlari soni qancha?

Javobi: $C_{20}^5\cdot C_{32}^{17}\cdot C_{15}^{12}$

6-§. Takrorli guruhlashga doir masalalar

Agar n ta elementdan k tadan guruhlashda elementlar qayta olish bajarilmasdan qaytarilsa, u holda n ta elementdan k tadan takrorlash bilan guruhlash deyiladi.

n ta elementdan k tadan takrorlash bilan guruhlashlar soni

$$\overline{C_n^k}=C_{n+k-1}^k=\frac{(n+k-1)!}{k!\cdot(n-1)!} \qquad (1)$$

kabi aniqlanadi.

MASALALAR YECHISHDAN NA'MUNALAR

6.1. To'rtta a, b, c, d elementdan ikkitadan tuzish mumkin bo'lgan barcha takroriy guruhlar nechta?

Yechimi: (1) formulaga ko'ra $\overline{C_4^2} = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$ ta.

Javobi: 10 ta

6.2. Maktab oshxonasida 3 xil ko'rinishda shirinliklar bor. O'quvchi 2 dona shirinlikni necha usulda tanlab olish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko'ra $\overline{C_3^2} = \dfrac{4!}{2!\cdot 2!} = 6$ ta.

Javobi: 6 ta

6.3. Maktab oshxonasida 4 xil ko'rinishda shirinliklar bor. O'quvchi 5 dona shirinlikni necha usulda tanlab olish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko'ra $\overline{C_4^5} = \dfrac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$ ta.

Javobi: 56 ta

6.4. Maktab sport anjomlari bazasida futbol, volleybol va basketbol to'plari bor bor. Sport murabbiyi 5 dona to'pni necha usulda tanlab olish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko'ra $\overline{C_4^5} = \dfrac{8!}{5!\cdot 3!} = 56$ ta.

Javobi: 56 ta

6.5. Maktab sport anjomlari bazasida 11 xil ko'rinishda futbol to'plari bor bor. Sport murabbiyi 6 dona to'pni necha usulda tanlab olish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko'ra $\overline{C_{11}^6} = \dfrac{16!}{6!\cdot 10!} = \dfrac{11\cdot 12\cdot 13\cdot 14\cdot 15\cdot 16}{720} = 8008$ ta.

Javobi: 8008 ta

6.6. Bolalar archa bayramiga sovg'a tayyorlash uchun 5 xil meva berildi. Bu mevalardan 8 ta mevadan iborat necha xil sovg'a tayyorlash mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko'ra $\overline{C_5^8} = \dfrac{12!}{8!\cdot 4!} = 495$ ta.

Javobi: 495 ta

6.7. 4 xil kitobdan necha usul bilan 7 kitobdan iborat to‘plam yozish mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $\overline{C_4^7} = \dfrac{10!}{7!\cdot 3!} = 120$ ta.

Javobi: 120 ta

6.8. 4 xil mevadan necha usulda 6 dona mevalardan iborat sovg‘a tayyorlash mumkin?

Yechimi: (1) formulaga ko‘ra $\overline{C_4^6} = \dfrac{9!}{6!\cdot 3!} = 84$ ta.

Javobi: 84 ta

6.9. To‘rtta 100 so‘mlik va to‘rtta 50 so‘mlik tangalardan to‘rtta tangani necha xil usul bilan tanlab olish mumkin?

Yechimi: $\{100;\ 50\} = \{A;\ B\}$ desak, ushbu $\{4A\}, \{3A;\ B\}$, $\{2A; 2B\}$, $\{A;\ 3B\}$ va $\{4B\}$ holatlar bolishi mumkin. Demak, jami 5 ta.

Javobi: 5 ta

6.10. 0, 1, 2, ..., 9 sonlaridan foydalanib nechta domino toshi yasash mumkin?

Yechimi: Ma’lumki domino toshida raqamlar 2 martadan takrorlanadi. Demak, (1) formulaga ko‘ra $\overline{C_{10}^2} = \dfrac{11!}{2!\cdot 9!} = 55$ ta.

Javobi: 55 ta

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR

1. Xaridor 6 xil mahsulotdan 10 tasini necha usulda tanlab oladi?

Javobi: 561.

2. Tomonlari 9,10,11,12,13 bo‘la oladigan uchburchakdan nechta yasash mumkin?

Javobi: 35ta.

3. To‘rtta qalam, beshta kitob, 3 ta diskdan iborat to‘plamni o‘rin almashtirishlar soni va x elementdan bittadan olib tuzilgan takrorli gruppalashlar soni yig‘indisi 27730 ga teng. x ni toping.

Javobi: $x=10$

4. x ta elementdan $x+1$ tadan olib tuzilgan takrorli gruppalashlar sonini $x+3$ ta elementdan $x-1$ tadan olib tuzilgan takrorli gruppalashlar soniga nisbati $\frac{2}{3}$ ga teng, x ni toping.

Javobi: $x=4$

5. $\overline{C_{6-k}^{k}} < \overline{C_{4-k}^{k+2}}$ tengsizlikni yeching.

Javobi: $\left(0,\frac{3}{2}\right)\cup\{1\}$

7-§. Binom formulasi

Ixtiyoriy yig‘indining ixtiyoriy natural darajasini binom formulasi orqali hisoblash mumkin.

$$(x+a)^n = C_n^0x^n + C_n^1x^{n-1}a + ... + C_n^kx^{n-k}a^k + ... + C_n^na^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^kx^{n-k}a^k$$

Agar $x=a=1$ bo‘lsa,

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$$

kelib chiqadi, va ushbu $C_n^k = C_n^{n-k}$ tenglik o‘rinli ekanligini quyidagi

$$C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot(n-(n-k))!} = C_n^{n-k}$$

tenglik orqali isbotlash mumkin.

Binom formulasini quyidagicha ham yozish mumkin.

$$(x+a)^n = P(n,0)x^n + P(n-1,1)x^{n-1}a + ... + P(n,0)a^n =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} P(n-k.k)x^{n-k}a^k$$

bu yerda $P(n-k,k) = \dfrac{n!}{(n-k)!\cdot k!} = C_n^k$

Umumiy holda formulani ushbu

$$(x_1 + x_2 + ... + x_i)^k = \sum P(k_1, k_2 ....k_i)x_1^{k_{11}} x_2^{k_2} ....x_i^{k_i}$$

lo‘rinishda yozish mumkin. Bu yerda k va i- ixtiyoriy sonlar, $k_1 + k_2 + ... + k_i = k$ nomanfiy butun sonlar yig‘indisi.

Binom formulasining xossalari:

1. x ning daraja ko‘rsatgichi kamayib boradi, a ning daraja ko‘rsatgichi esa ortib boradi. Ularning daraja ko‘rsatgichlari yig‘indisi n ga teng.

2. Yoyilma $m+1$ ta haddan iborat.

3. Binomial koeffisiyentlar yig‘indisi 2^n ga teng.

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$$

4. Yoyilmaning istalgan hadi $T_{k+1} = C_n^k x^{n-k} a^k$ dan iborat.

5. Yoyilmaning chetlaridan teng uzoqlikda turgan hadlarining koeffisiyentlari o‘zaro teng.

6. Toq o‘rinlarda turgan binomial koeffisiyentlar yig‘indisi juft o‘rinda turgan binomial koeffisiyentlar yig‘indisiga teng.

MASALALAR YECHISHDAN NA’MUNALAR

7.1. $(a+b+c+d)^5$ ifodani Nyu’ton binomi formulasi yordamida yoying.

Yechimi: $(a+b+c+d)^5 = \sum P(k_1, k_2, k_3, k_4) a^{k_1} b^{k_2} c^{k_3} d^{k_4}$ bunda (k_1, k_2, k_3, k_4) to‘rttalikka nisbatan $k = k_1 + k_2 + k_3 + k_4 = 5$ yig‘indi tuziladi. to‘rttaliklar $(5,0,0,0),....(2,1,1,1),...(2,2,1,0),....$ Ularning takrorlanishlari soni:

$$P(5,0,0,0).=...........=\frac{5!}{5!}=1$$

$$P(4,1,0,0)=.........=\frac{5!}{4!}.=5$$

$$P(3,1,1,0)=..............\frac{5!}{3!}=20$$

$$P(2,1,1,1)=..............=\frac{5!}{2!}=60$$

$$P(2,2,1,0)=.................\frac{5!}{2!\cdot 2!}=30$$

ga teng. Natijada ifoda quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$(a+b+c+d)^5=(a^5+b^5+c^5+d^5)+5(a^4b+....+cd^4)+20(a^3bc+...+bcd^3)+$$

$$+60(a^2bcd+......abcd^2)+30(a^2b^2c+.......+bc^2d^2$$

7.2. $\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^{18}$ binom yoyilmaning o‘rta hadini toping.

Yechimi: $\left(\frac{5}{\sqrt{x}}+x^{\frac{2}{3}}\right)^{18}=C_{18}^0(\frac{5}{\sqrt{x}})^{18}+C_{18}^1(\frac{5}{\sqrt{x}})^{17}x^{\frac{2}{3}}+...........+C_{18}^{18}(x^{\frac{2}{3}})^{18}$

yoyilmada 19 ta had bor. O‘rta had esa quyidaginga teng:

$$C_{18}^{10}\left(\frac{5}{\sqrt{x}}\right)^8\left(x^{\frac{2}{3}}\right)^{10}=5^8\cdot 43785x^{\frac{8}{3}}.$$

7.3. $\left(\sqrt[4]{5}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^x$ binom yoyilmaning boshidan to‘qqizinchi hadini shu yoyilmaning oxiridan to‘qqizinchi hadiga nisbati $\frac{1}{15}$ ga teng. x toping.

Yechimi: Berilgan ifodani N’yuton binomi formulasi yordamida yozamiz.

$$\left(\sqrt[4]{5}+\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^x=C_x^0\left(\sqrt[4]{5}\right)^x+C_x^1\left(\sqrt[4]{5}\right)^{x-1}\frac{1}{\sqrt[4]{3}}+...+C_x^8\left(\sqrt[4]{5}\right)^{x-8}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^8+$$

$$+...+C_x^{x-8}\left(\sqrt[4]{5}\right)^8\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{x-8}+...+C_x^x\left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^x$$

yoyilmani boshidan to‘qqizinchi hadi $C_x^8\left(\sqrt[4]{5}\right)^{x-8}\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^8$ ga, oxiridan to‘qqizinchi hadi esa $C_x^{x-8}\left(\sqrt[4]{5}\right)^8\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5}}\right)^{8-8}$ ga teng. $C_n^k=C_n^{n-k}$ tenglik o‘rinli bo‘lgani uchun $C_x^8=C_x^{x-8}$ tenglik kelib chiqadi. Shartga ko‘ra

$$\frac{C_x^8\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{x-8}\left(3^{\frac{-1}{4}}\right)^8}{C_x^{x-8}\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^8\left(3^{\frac{-1}{4}}\right)^{x-8}}=\frac{1}{15}.$$

U holda $\frac{C_x^8\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^{x-8}\left(3^{\frac{-1}{4}}\right)^8}{C_x^{x-8}\left(5^{\frac{1}{4}}\right)^8\left(3^{\frac{-1}{4}}\right)^{x-8}}=\frac{1}{15}$, bu ifodani soddalashtirib ushbu

$(5^{\frac{1}{4}})^{x-8-8}\cdot(3^{\frac{-1}{4}})^{8-(x-8)}=\frac{1}{15}$ tenglamani yechamiz.

$$(5^{\frac{1}{4}})^{x-8-8}\cdot(3^{\frac{-1}{4}})^{8-(x-8)}=\frac{1}{15},\quad (5^{\frac{1}{4}})^{x-8}\cdot(3^{\frac{-1}{4}})^{16-x}=\frac{1}{15},$$

$$5^{\frac{x-16}{4}}\cdot 3^{\frac{x-16}{4}}=\frac{1}{15},\ 15^{\frac{x-16}{4}}=15^{-1},\quad \frac{x-16}{4}=-1,$$

$$x=12$$

7.4. $\left(\sqrt{3^{x-1}}+2^{\frac{x}{2}}\right)^n$ binom yoyilmasi beshinchi hadining binomial koeffisiyenti ikki asosga ko‘ra logarifmini uch marta orttirilgani bilan uchinchi hadi binomial koeffisiyenti ikki asosga ko‘ra logarifmi orasidagi ayirma $\log_2 3-1$ ga tengligi ma’lum bo‘lsa, x ning qanday qiymatida uchinchi hadni $\sqrt{2}$ marta orttirilgani bilan to‘rtinchi hadi nisbati 1 ga teng bo‘ladi.

Yechimi: Masala shartiga ko‘ra $\log_2(3C_n^4)-\log_2 C_m^2=-2$ bo‘lgani uchun

$\log_2(3C_n^4)-\log_2 C_m^2=\log_2 3-1$, u holda

$$\log_2 \frac{3C_n^4}{C_n^2} = \log_2 \frac{3}{2}, \qquad \frac{3C_n^4}{C_n^2} = \frac{3}{2} \qquad \frac{3n!}{4!(n-4)!} \cdot \frac{2!(n-2)!}{n!} = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3n!}{4!(n-4)!} \cdot \frac{2!(n-2)(n-3)(n-4)!}{n!} = \frac{3}{2}, \qquad \frac{(n-3)(n-2)}{4} = \frac{3}{2}$$

$$n^2 - 5n = 0$$

tenglamani yechamiz, $n = 0$, $n = 5$. Binom ko‘rsatgich $n = 5$ bo‘lsa, quyidagi

$$\frac{\sqrt{2}C_5^2(\sqrt{3^{x-1}})^3 \cdot 2^{\frac{x}{2}\cdot 2}}{C_5^3(\sqrt{3^{x-1}})^2 \cdot 2^{\frac{x}{2}\cdot 3}} = 1$$

tenglama hosil bo‘ladi. Bu tenglamani yechamiz. Tenglamaning surati $\sqrt{2}C_5^2(\sqrt{3^{x-1}})^3 \cdot 2^{\frac{x}{2}\cdot 2} = 10\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{(x-1)\cdot 3}{2}} \cdot 2^x$, maxraji esa $C_5^3(\sqrt{3^{x-1}})^2 \cdot 2^{\frac{3x}{2}} = 10 \cdot 3^{x-1} \cdot 2^{\frac{3x}{2}}$, ko‘rinishga ega. Ularning nisbatini hisoblaymiz, natijada ushbu $\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{3(x-1)}{2}-(x-1)} \cdot 2^{x-\frac{3x}{2}} = 1$ tenglik hosil bo‘ladi, $\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{3(x-1)}{2}-(x-1)} \cdot 2^{x-\frac{3x}{2}} = 1$ bu tenglamani yechamiz,

$$\sqrt{2} \cdot 3^{\frac{x-1}{2}} \cdot 2^{\frac{-x}{2}} = 1, \qquad \sqrt{2} \cdot 3^{\frac{x}{2}} \cdot 3^{\frac{-1}{2}} \cdot 2^{\frac{-x}{2}} = 1, \qquad \sqrt{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = 1, \quad \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x}{2}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x = 1.$$

Javobi: $x = 1$

MUSTAQIL YECHISH UCHUN MASALALAR

1. $\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5$ N’yuton binomi formulasidan foydalanib yoying.

Javobi: $x^5 + \frac{5\sqrt{3}}{3}x^4 + \frac{10}{3}x^3 + \frac{10\sqrt{3}}{9}x^2 + \frac{5}{9}x + \frac{\sqrt{3}}{27}$

2. $(a + b + c + d + e)^5$ yoyilmasidan eng katta koeffisiyentni toping.

Javobi: 5!

3. $\left(x^2 + \frac{3}{\sqrt{x}}\right)^9$ binom yoyilmasining o‘rta hadini toping.

Javobi: $C_9^5 x^4 (\frac{3}{\sqrt{x}})^5$ va $C_9^4 x^5 (\frac{3}{\sqrt{x}})^4$

4. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{5}\sqrt{x}\right)^7$ binom yoyilmasining x^5 katnashgan hadinining nomerini toping.

Javobi: 5.

5. $\left(\sqrt[5]{\frac{\sqrt{x}}{y}}+\sqrt{\frac{\sqrt[3]{y}}{x}}\right)^{10}$ binom yoyilmasida x va y ning bir xil darajalari qatnashgan hadining nomerini toping.

Javobi: O‘n birinchi had.

6. $\left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{3}}\right)^5$ N’yuton binomi formulasidan foydalanib yoying.

Javobi:

$$\left(x^{\frac{1}{2}}-2x^{\frac{1}{3}}\right)^5=(x^{\frac{1}{2}})^5+(-1)\cdot C_5^1(\sqrt{x})^4\cdot 2\cdot\sqrt[3]{x}+(-1)^2\cdot C_5^2(\sqrt{x})^3\cdot(2\cdot\sqrt[3]{x})^2+\ldots+$$

$$+(-1)^5\cdot C_5^5(2\sqrt[3]{x})^5=x^{\frac{5}{2}}-10x^{\frac{7}{3}}+40x^{\frac{13}{6}}-80x^2+80x^{\frac{11}{6}}-32\sqrt[3]{x^5}$$

7. $\left(\frac{\sqrt[6]{a^2}\,x+\sqrt{x}}{\sqrt{a}(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a})}+2\sqrt{a}\right)^8$ ifoda soddalashtirilsin va yoyilmaning a qatnashmagan hadi topilsin.

Javobi: beshinchi had, $1120\sqrt[3]{x^2}$

8. Bir binomning daraja ko‘rsatgichi ikkinchi binomning daraja ko‘rsatgichidan 6 ta kam, har ikkala yoyilma binom koeffisiyentlarining yig‘indisini o‘nli logarifmlarini qo‘shsak, natija 0 ga teng. Shu ko‘rsatgichni toping.

Javobi: $m=3$

9. $\left(\sqrt{x}-\frac{7}{x}\right)^n$ binom yoyilmasi uchinchi xadining koeffisiyenti 36 ga teng bo‘lsa, shu yoyilmaning to‘qqizinchi hadini toping.

Javobi: $\frac{9\cdot 7^8}{\sqrt{x^{15}}}$

10. $\left(\sqrt{x}+\frac{y}{\sqrt{x}}\right)^n$ binom yoyilmasining oltinchi hadi uning sakkizinchi hadidan 21 marta katta. Yoyilmaning x qatnashmagan hadini toping.

Ko‘rsatma: $C_n^5 = 21\cdot C_n^7$ dan foydalaning. $n=4$, $n=7$

Javobi: $n=4$ da uchinchi had, $6\cdot y^2$

11. $\left(\sqrt[3]{x\sqrt{x}}+4\sqrt{\frac{2}{x}}\right)^n$ binom yoyilmasining barcha binomial koeffisiyentlari yig‘indisi 256 ga teng. Sh u binom yoyilmasining x^2 bo‘lgan hadini toping.

Javobi: Izlanayotgan (uchinchi) had $396x^2$

12. Maxraji $\left(\sqrt[3]{3}+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ga, birinchi hadi 2 ga teng bo‘lgan geometrik progressiyaning oltinchi hadini toping.

Javobi:
$$b_6 = b_1 q^5 = 6\cdot\sqrt[3]{9}+\frac{30\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt{2}}+30+\frac{10\cdot\sqrt[3]{9}}{\sqrt{2}}+\frac{5}{2}\cdot\sqrt[3]{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}=6\sqrt[3]{9}+15\sqrt[6]{72}+30+$$
$$+5\sqrt[6]{648}+\frac{5}{2}\sqrt[3]{3}+\frac{\sqrt{2}}{4}$$

13. $(a+b+c)^{10}$ N’yuton binomi formulasidan foydalanib yoying, yoyilmada nechta had qatnashgan?

Javobi:

$$(a+b+c)^{10} = a^{10}+b^{10}+c^{10}+10(a^9b+ab^9+a^9c+ac^9+bc^9+b^9c)+90(a^8bc+b^8ac+c^8ab)+$$
$$+360(a^7b^2c+a^7bc^2+b^7a^2c+b^7ac^2+c^7a^2b+c^7ab^2)+1260(a^6b^2c^2+a^2b^6c^2+a^2b^2c^6)+$$
$$+840(a^6b^3c+a^6bc^3+b^6a^3c+b^6ac^3+c^6a^3b+c^6ab^3)+210(a^6b^4+a^6c^4+b^6a^4+b^6c^4+$$
$$+c^6a^4+c^6b^4)+1260(a^5b^4c+a^5bc^4+b^5a^4c+b^5ac^4+c^5a^4b+c^5ab^4)+2520(a^5b^3c^2+a^5b^2c^3+$$
$$+b^5a^3c^2+b^5a^2c^3+c^5a^3c^2+b^5a^2c^3)+3150(a^4b^4c^2+a^4c^4b^2+c^4a^2b^4)+252(a^5b^5+$$
$$+a^5c^5+b^5c^5)+175(a^4b^3c^3+a^3b^4c^3+a^3b^3c^4)+120(a^3b^7+a^3c^7+b^3a^7+b^3c^7+c^3a^7+c^3b^7)$$

14. $\left(2x^2+\frac{y}{2x}\right)^m$ binom yoyilmaning ko‘rsatgichi m ning qanday qiymatida ikkinchi, uchinchi va to‘rtinchi hadlarining koeffisiyentlari arifmetik progressiyani tashkil etadi.

Ko‘rsatma: $C_m^1+C_m^3=2\cdot C_m^2$ dan foydalaning?

Javobi: $m=7$, $m=2$

15. $\left(\frac{\sqrt[x]{2}}{\sqrt[3]{2}}+2\cdot\sqrt[x-3]{4}\right)^{6}$ binom yoyilmaning to‘rtinchi hadi 640 ga teng. Bu ifodadagi x ni toping.

Javobi: $x=3\pm\sqrt{6}$

16. x ning qanday qiymatida $\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+\sqrt[4]{x}\right)^{8}$ binom yoyilmasining bir hadidagi x ning darajasini shu haddan keyingi haddagi x ning daraja ko‘rsatgichiga nisbati $-\frac{4}{3}$ bo‘lganda, bu hadni $x^{\frac{5}{6}}$ ga ko‘paytirsak keyingi haddan 126 ta ko‘p bo‘ladi.

Javobi: $x=\sqrt[4]{1{,}8}$

17. Binom yoyilmasining uchinchi hadining koeffisiyenti to‘rtinchi hadining binomial koeffisiyentiga nisbati $\frac{3}{4}$ ga teng bo‘lsa, x ning qanday qiymatida $\left(\sqrt[5]{2^{x}}+\frac{1}{\sqrt[4]{2^{x-1}}}\right)^{m}$ binom yoyilmasining oltinchi hadi binom ko‘rsatgichidan 16 marta katta bo‘ladi.

Javobi: $m=6$ da $x=-\frac{55}{21}$

18. Agar binomning m ko‘rsatgichi yoyilma uchinchi hadining binomial koyeffisentidan 14 ta ko‘p ekanligi ma’lum bo‘lsa, x ning qanday qimatida $\left(\frac{\sqrt{\sqrt{2^{x}}}}{32}+\frac{16}{\sqrt[3]{2^{x}}}\right)^{m}$ binom yoyilmasining beshinchi hadini oltinchi hadiga nisbati $\frac{20}{3}$ ga teng bo‘ladi.

Javobi: $m=7$ da $x=12$

19. Agar binom yoyilmasining oxirgi uchta hadini binomial koeffisiyentlari yig‘indisi 37 ga teng ekanligi ma’lum bo‘lsa, to‘rtinchi va yettinchi hadlari yig‘indisi $196\cdot3^{\frac{7-7x}{3}}$ ga teng x ning qanday qiymatida binom yoyilmasida bo‘ladi.

Ko‘rsatma: Binom yoyilmasining boshidan va oxiridan barobar uzoqlikda turgan hadlarining binomial koeffisiyentlari tengligidan foydalaning.

$$1+m+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}=37$$

Javobi: $m=8$ da $x=1\frac{2}{5}$

20. Agar $\left(\sqrt[3]{3^{\lg(5-2^x)}}+\sqrt[4]{3^{(x-1)\cdot\lg 2}}\right)^m$ binom yoyilmasining ikkinchi, uchinchi va to‘rtinchi hadlarining binomial koeffisiyentlari mos ravishda arifmetik progressiyani ikkinchi, oltinchi va uninchi hadlaridan iborat ekanligi ma’lum bo‘lsa, x ning qanday qiymatida shu binom yoyilmasining beshinchi hadi 315 ga teng bo‘ladi.

Ko‘rsatma: $2\cdot a_6=a_2+a_{10}$ arifmetik progressiya xossasidan foydalaning.

Javobi: $m=7$ da $x=2$ $x=0$

8-§. Takrorlash uchun masalalar

1. Guruh o‘n yetti talaba, guruh boshlig‘i va uning yordamchisidan iborat. Guruh talabalari o‘z vazifalarini necha usulda taqsimlashlari mumkin?

Javobi: $A_{19}^2=342$

2. Guruh guruh boshlig‘i, uning yordamchisi va 20 ta talabadan iborat. Ba’zan bitta talaba barcha vazifalarni bajarish uchun yetarli bo‘lsa, guruh talabalari o‘z vazifalarini necha usulda taqsimlashlari mumkin?

Javobi: $\overline{A_{22}^2}=22^2=484$

3. Musobaqada yetti kishilik guruhdan tashqari 15 kishi qatnashayapti.Bu guruh a’zolari egallagan o‘rinlarini necha usulda almashtirishlari mumkin?

Javobi: $A_{22}^7=\frac{22}{15!}$

4. 32 kishi tarkibida 8 ta, 10 ta,5 ta, 3 ta, 6 ta lik guruhlarga bo‘lingan. Bu guruhlarni har xil sostavi nechta bo‘lishi mumkin?

Javobi: $P=\dfrac{32!}{8!\cdot 10!\cdot 5!\cdot 3!\cdot 6!}$

5. Agar har bir sonda bir xil raqamlar ishtirok etmasligi lozimn bo‘lsa, 0,4,5,7,8,9 raqamlaridan 2 ga bo‘linadigan nechta besh xonali son tuzish mumkin?

Javobi: $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2+2\cdot(4\cdot 4\cdot 3\cdot 2)=312$

13. Tokchada 25 ta kitobdan ikkitasi chet tilida. Bu ikki kitobni yonma-yon kelmaydigan qilib, necha xil usulda joylashtirish mumkin.

Javobi: $27!-2\cdot 26!$

14. O‘nta olmani ikkita bola uchtadan, bitta bola to‘rttadan, olib necha usulda bo‘lib olishlari mumkin?

Javobi: 4200

8. 0,3,4,5,6,7 raqamlaridan tuzilgan uch xonali sonlardan nechtasida 7 raqami ishtirok etadi (sonlarda raqamlar takrorlanmaydi) ?

Javobi: 20 ta.

9. 0,1,2,3,4,5 raqamlaridan 3 ga bo‘linuvchi nechta har xil raqamli uch xonali son tuzish mumkin?

Javobi: 40 ta.

10. 25 ta talaba o‘qiydigan guruhdan 6 ta talabani musobaqaga jo‘natish kerak. Agar guruh boshlig‘i va 2 ta yordamchi bir paytda jo‘namasligi lozim bo‘lsa, bunday jo‘natishlar soni qancha bo‘ladi?

Javobi: $C_{25}^{6}-C_{22}^{3}=175560$

11. «Matematika» so‘zida 3 ta «a» harfi yonma-yon kelmaydigan qilib nechta so‘z yasash mumkin (So‘z deganda harflar ketma-ketligi tushuniladi)?

Javobi: $\dfrac{10!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}-8!$

12. 24 ta talaba o‘qiydigan guruhdan guruh boshlig‘i va 5 ta talabani necha xil usul bilan ajratib olish mumkin?

Javobi: $24\cdot C_{23}^{5}=24\cdot\dfrac{23!}{5!\cdot 18!}$

13. 20 ta talaba o‘qiydigan guruhdan guruh boshlig‘i bitta yordamchi va 3 ta talabani necha usulda ajratib olish mumkin.

Javobi: $20\cdot 19\cdot C_{18}^{3}$

14. Usta 4 kun davomida 5 ta xonani ta’mirlash kerak. Agar usta bir kunda eng kamida bitta xonani ta’mirlagan bo‘lsa, u bu ishni kunlar bo‘yicha necha xil usulda taqsimlash mumkin.

Ko‘rsatma: (a,b,c,d) juftliklarda 3 tasi kamida 2, bittasi 2 bo‘lishi mumkin. Tarkibida 3 ta 1, 1 ta 2 raqami bo‘lgan $P(3,1)$ takrorli o‘rin almashtirishlar sonidan foydalaning.

Javobi: $P(3,1)=\dfrac{4!}{3!}=4$

15. Guruhda 24 ta talabadan 12 tasi a’lo bahoga, 12 tasi yaxshi bahoga o‘qishadi. Ularni yonma-yon o‘tirganlarini biri a’loga, ikkinchisi yaxshi bahoga va ketma-ket birining orqasiga ikkinchisining bahosi bir xil bo‘ladigan qilib ikkita qatorga necha xil usul bilan o‘tkazish mumkin.

Javobi: $2\cdot(12!)^{2}$

16. Agar $(1+x)^{7}+(3+x)^{9}+(4+x)^{11}$ ifodaning hamma qavslarini ochib ixchamlasak, biror ko‘pxad hosil bo‘ladi. Bu ko‘pxadning qavslarini ochmasdan x^{7} ning oldidagi koeffisiyentlarini aniqlang.

Javobi: 84805

17. $\left(5x+\dfrac{2}{x^{3}}\right)^{m}$ yoyilmaning beshinchi hadida x qatnashmaydi, x ning qanday qiymatida shu had $(5+2\cdot x^{2})^{20}$ yoyilmaning to‘qqizinchi hadiga teng bo‘ladi.

Javobi: $x^{16}=\dfrac{11}{32\cdot 26\cdot 17\cdot 19}$

18. $\left(\dfrac{2}{n}+3n\right)^{n}$ yoyilmaning boshidan uchinchi hadini oxiridan uchinchi hadiga ko‘paytmasi 6^{n+4} ga teng bo‘lsa, yoyilmaning eng katta binomial koeffisiyentini toping.

Javobi: 126.

19. $C_{x-1}^{y}:C_{x}^{y}:C_{x+1}^{y+1}=2:3:4$ bo‘lsa, x va y larni toping.

Javobi: $x=\dfrac{1}{5},y=\dfrac{3}{5}$

20. $P_{x+2} = 126 \cdot A_x^3 \cdot P_{x-2}$ tenglamani yeching.

Javobi: $x_1 = 15, x_2 = 3$

21. Yoyilmaning beshinchi hadini oltinchi hadiga nisbati $\frac{2\sqrt{15}}{9}$ ga teng bo‘lishi uchun $\left(\frac{2}{\sqrt{3}} + \sqrt{5}\right)^m$ binomda m ning qanday qiymatida naturol darajaga ko‘tarish kerak.

Javobi: $m = 7$

22. Agar $\left(\frac{4}{\sqrt[4]{x}} + 3 \cdot \sqrt[5]{x}\right)^m$ yoyilmaning o‘n birinchi hadi x ga bog‘liq bo‘lmasa, A_m^3 ni hisoblang.

Javobi: 4896.

23. $\left(5 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{x}} - \frac{2}{x}\right)^m$ yoyilmaning ikkinchi va uchinchi hadi binomial koeffisiyentlari yig‘indisi 36 ga teng, x ni o‘z ichiga olmagan hadini yozing.

Javobi: Bunday had mavjud emas.

24. $\frac{A_x^4 \cdot P_{x-4}}{P_{x-2}} = 42$ tenglamani yeching.

Javobi: 7

25. Agar har bir sonda bir xil raqamlar ishtirok etishi mumkin bo‘lsa, 7, 5,3,4,6 raqamlaridan 2 ga bo‘linadigan nechta 4 xonali sonlar tuzish mumkin?

Javobi: 250.

26. Guruh 30 talaba, Hasan va Husanlardan iborat. Hasan va Husanni yonma-yon o‘tirmaydigan qilib talabalarni necha usulda joylashtirish mumkin?

Javobi: $32! - 2 \cdot 31!$

27. $C_{12}^6 + C_{12}^5 = C_{11}^6$ tenglikni tekshirib ko‘ring.

Javobi: Tenglik noto‘g‘ri.

28. Qirq kishidan iborat jamoadan 5 kishidan iborat kichik guruh va barcha kichik guruhlarga yetarli bo‘lgan ikkita yetakchini necha usulda tanlab olish mumkin?

Javobi: $C_{40}^{2}\cdot C_{38}^{5}$

29. Tenglamalar sistemasini yeching:

$$\begin{cases} \dfrac{A_x^{n-3}}{A_x^{n-2}} = \dfrac{1}{8} \\ \dfrac{C_x^{n-3}}{C_x^{n-2}} = \dfrac{5}{8} \end{cases}$$

Javobi: $x = 12, \quad n = 7$

30. Agar $(9-x)^5 + (10+x)^7 + (11-x)^9$ ifodani hamma qavslarini ochib o‘xshash hadlarni ixchamlasak, biror ko‘phad hosil bo‘ladi. x^5 ning oldidagi koeffisiyentini aniqlang.

Javobi: -11542

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. M.Mirzaahmedov va b. Matematika. 6-sinf darslik. O‘qituvchi”, 2017.

2. Sh.A. Alimov, O.R. Xolmuhamedov, M.A. Mirzaahmedov. Algebra: 7-sinf uchun darslik. “O‘qituvchi” NMIU, 2017. –192 b.

3. Asliddin Abdullayev. Kombinatorika testlar to‘plami, 2020.

4. Алимов Ш.О., Колягин Ю.М., Сидоров Ю.В., Федорова Н.Е., Шабунин М.И. Алгебра, 8-синф учун дарслик, Т. Ўқитувчи, 1996 й. 300 бет.

5. В.Е. Гмурман. Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан масалалар ечишга доир қўлланма .Т. Ўқитувчи , 1980 й. 365 бет.

6. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. М.Наука, 1980 г. 496 стр.

7. Меликулов А., Қурбонов П., Исмоилов П. Математика 1-қисм, Касб-ҳунар коллежлари учун ўқув-қўлланма, Т. Ўқитувчи, 2003 й. 319 бет.

8. Меликулов А., Қурбонов П., Исмоилов П. Математика 2-қисм, Касб-ҳунар коллежлари учун ўқув-қўлланма, Т. Ўқитувчи, 2003 й. 343 бет.

9. Абдуҳамидов А. У., Насимов Ҳ. А., Носиров У. М., Ҳусанов Ж. Ҳ. Алгебра ва математик анализ асослари, 2- қисм, Академик лицейлар учун дарслик, Т. Ўқитувчи, 2003 й.

M U N D A R I J A