22 / 1
1047

FARXOD RAJABOV

MATEMATIKA

O'ZBEKISTON FAYLASUFLARI
MILLIY JAMIYATI NASHRIYOTI

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

FARXOD RAJABOV

MATEMATIKA

(O'quv qo'llanma)

(«Tasviriy san'at va muhandislik grafikasi», «Musiqa ta'limi», «Jismoniy tarbiya va jismoniy madaniyat» yo'nalishlari talabalari uchun)

O'zbekiston faylasuflari
milliy jamiyati nashriyoti

Toshkent—2007

Al-Xorazmiy nomidagi Urganch davlat universitetining ilmiy kengashi va Respublika muvofiqlashtirish komissiyasi majlisining qaroriga binoan o‘quv qo‘llanma chop qilishga tavsiya etiladi.

Taqrizchilar:

1. **Madrimov M.** – Nizomiy nomli Toshkent davlat pedagogika universiteti «Matematik tahlil» kafedrasi dotsenti, f.m.f.n.
2. **Siddiqov A.** – Toshkent Arxitektura- Qurilish instituti «Informatika va axborot texnologiyalari» kafedrasi mudiri, t.f.d., professor.
3. **Abdurahimov A.** – Toshkent Arxitektura-Qurilish instituti «Oliy va amaliy matematika» kafedrasi mudiri, f.m.f.n., dotsent.
4. **Madrahimov R.** – UrDU «Funksiyalar nazariyasi» kafedrasi mudiri, f.m.f.n., dotsent.
5. **Yarmetov J.** – UrDU «Boshlang‘ich ta’lim nazariyasi va metodikasi» kafedrasi mudiri, f.m.f.n., dotsent.

Ushbu o‘quv qo‘llanma universitet va institutlarning «Tasviriy san’at va muhandislik grafikasi», «Musiqa ta’limi», «Jismoniy tarbiya va jismoniy madaniyat» yo‘nalisi bo‘yicha matematika fani dasturi asosida yozilgan. Unda to‘plamlar va mantiqiy mulohazalar, vektorlar va chiziqli algebra elementlari, analitik geometriya elementlari, differensial va integral hisobi, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari bayon etilgan.

Ushbu o‘quv qo‘llanma universitet va pedagogika institutlarining talabalari (Tasviriy san’at va muhandislik grafikasi, musiqa ta’limi, jismoniy tarbiya va jismoniy madaniyat yo‘nalislari) uchun tavsiya etiladi.

22.1
R17

Rajabov F.
Matematika: o‘quv qo‘llanma: («Tasviriy san’at va muhandislik grafikasi», «Musiqa ta’limi», «Jismoniy tarbiya va jismoniy madaniyat» o‘nalishlari talabalari uchun)/ F. Rajabov; O‘zbekiston Respublikasi Oliy va o‘rta-maxsus ta’lim vazirligi. – Toshkent: «O‘zbekiston faylasuflari milliy jamiyati» nashriyoti, 2007. – 280 b. – Б.ц.

ББК 22.1я73

ISBN 978-9943-319-42-4

So'zboshi

Ta'lim sohasidagi islohotlar, DTS lari qabul qilinishi har bir yo'nalish bo'yicha darslik va o'quv qo'llanmalarni yaratishni taqozo etadi. Shu sababli biz ushbu qo'llanmani yozishni ma'qul topdik.

Qo'llanma universitet va pedagogika institutlarining «Tasviriy san'at va muhandislik grafikasi», «Musiqa ta'limi», «Jismoniy tarbiya va jismoniy madaniyat» yo'nalishlari bo'yicha ta'lim olayotgan talabalariga mo'ljallangan bo'lib, shu yo'nalishlar uchun tasdiqlangan dasturga asosan yozilgan.

Qo'llanmaning asosiy vazifasi matematikaning dasturida ko'rsatilgan to'plamlar va mantiqiy mulohazalar, vektorlar va chiziqli algebra elementlari, analitik geometriya elementlari, differensial va integral hisobi, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika elementlari bo'limlarini qisqacha bayon etish, mavzularga doir misol va masalalarni yechish usullarini ko'rsatishdan iborat.

Muallif dastur materialini, iloji boricha, qisqa, zarur joylarda misollar yechish orqali tushuntirish bilan bayon etishga harakat qildi. Har bir bob so'ngida talabalarning mustaqil o'z-o'zini nazorat qilish maqsadida savollar hamda mustaqil o'rganishlari uchun mavzular keltirilgan.

Qo'llanmaga muallifning al-Xorazmiy nomli Urganch Davlat universitetining pedagogika fakultetida ko'p yillar davomida o'qigan ma'ruzalari va o'tkazgan amaliy mashg'ulot materiallari asos qilib olindi. Bundan tashqari, shu sohaga tegishli mavjud o'zbek va rus tillaridagi adabiyotlardan ham foydalanildi. Foydalanilgan adabiyotlar ro'yxati qo'llanma oxirida keltirilgan.

Qo'llanmani o'qib chiqib o'zlarining fikr-mulohazalarini bildirgan Urganch Davlat universiteti fizika-matematika faqulteti dekani fizika-matematika fanlari doktori, professor A. Hasanov, shu faqultet dotsentlari R. Karimov, R. Madrahimov, S.Masharipova, Nizomiy nomli Toshkent Davlat Pedagogika universiteti «Matematik tahlil» kafedrasi dotsenti M. Madrimov, Toshkent Arxitektura-Qurilish instituti «Oliy va amaliy matematika» kafedrasi mudiri dotsent A.Abdurahimov, Toshkent Arxitektura-Qurilish instituti «Informatika va axborot texnologiyalari» kafedrasi mudiri, t.f.d., professor A.Siddiqovlarga o'zimning chuqur minnatdorchiligimni bildiraman.

Qo'llanma haqida bildirilgan fikr va mulohazalarni minnatdorchilik bilan qabul qilaman.

Muallif.

I BOB
TO‘PLAMLAR VA MANTIQIY MULOHAZALAR

1-§. To‘plamlar, sonli to‘plamlar, universal va tartiblangan to‘plamlar

To‘plam deganda narsalar, buyumlar, obyektlarni biror xossasiga ko‘ra birgalikda (bitta butun deb) qarash tushuniladi.

Masalan, hamma natural sonlarni birgalikda qarasak, natural sonlar to‘plami hosil bo‘ladi. Talabalar uyida yashovchi talabalarni birgalikda qarash bilan shu yotoqxonadagi talabalar to‘plamini hosil qilamiz. To‘g‘ri chiziqda joylashgan hamma nuqtalarni bitta butun deb qarash shu to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plamini, maktabdagi o‘quvchilarni birgalikda qarash o‘quvchilar to‘plamini beradi va h.k.

1-ta’rif. To‘plamni tashkil etuvchi narsalar, buyumlar, obyektlar to‘plamning elementlari deb ataladi. Masalan, yuqoridagi misollardagi o‘quvchilar, talabalar, natural sonlar mos to‘plamlarining elementlari hisoblanadi. To‘plamlar, odatda, alfavitining katta harflari bilan, ularning elementlari esa alfavitning kichik harflari bilan belgilanadi. A to‘plam $a, b, s, d, \ldots, \alpha, \beta, \gamma$ elementlaridan tuzilganligi $A=\{a, b, s, d, \ldots, \alpha, \beta, \gamma\}$ ko‘rinishda yoziladi. Agar to‘plamning barcha elementlari ko‘rsatilgan yoki uning elementlarini shu to‘plamga tegishli yoki tegishli emasligini anglatuvchi xossasi berilgan bo‘lsa, to‘plam berilgan hisoblanadi. Bunday xossaga to‘plamning tavsifiy xossasi deyiladi. Masalan, juft sonlar to‘plami to‘g‘risida so‘z yurutganda bu to‘plamning tavsifiy xossasi uning barcha elementlarini ikkiga butun son marta bo‘linishidir.

2-ta’rif. Bitta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deb ataladi va $\varnothing$ bilan belgilanadi.

a element A to‘plamning elementi ekanligi $a \in A$ yoki $A \ni a$ ko‘rinishda belgilanadi va «a element A to‘plamning elementi», «a element A to‘plamga tegishli», «a element A to‘plamda mavjud» yoki «a element A to‘plamga kiradi» deb ataladi.

a element A to‘plamning elementi emasligi $a \notin A$ yoki $A \not\ni a$ belgi bilan ko‘rsatiladi. Masalan, $A=\{a, b, s\}$ to‘plam uchun $a \in A$, $s \in A$ lekin $e \notin A$.

To‘plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Birinchi holda chekli to'plamga, ikkinchi holda esa cheksiz to'plamga ega bo'lamiz. Masalan, $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{a,b,s\}$, to'plamlar chekli bo'lib, ular mos ravishda bitta, ikkita va uchta elementlardan tuzilgan. Quyidagi $A=\{1,2,3,...,n,...\}$, $B=\{2,\ 4,\ 6,\ ...,\ 2n,...\}$ to'plamlar cheksiz.

Agar A to'plamning a elementi B to'plamning b elementiga teng, ya'ni $a=b$ desak, bundan bitta element ikkala to'plamda har xil harflar bilan belgilanganligini tushunamiz.

3-ta'rif. A to'plamning har bir elementi B to'plamda ham mavjud bo'lsa, va aksincha, B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham mavjud bo'lsa, A va B to'plamlarni teng (bir xil) deb atab buni $A=B$ yoki $B=A$ ko'rinishda belgilaymiz.

Ta'rifdan ma'lumki ikki to'plamning tengligi ularning aslida bitta to'plam ekanligini bildiradi. Shunga o'xshash, bir qancha to'plamlarning tengligi haqida gapirish mumkin.

4-ta'rif. B to'plamning har bir elementi A to'plamda ham mavjud bo'lsa B ni A to'plamning to'plam osti yoki qismi yoki qism to'plami deymiz, buni quyidagicha belgilaymiz:

$$B\subset A \text{ yoki } A\supset B$$

Izoh. Bu ta'rifdan ko'rinadiki, B to'plamning hamma elementlari A da mavjud bo'lgan holda, A da B ga kirmagan boshqa elementlar bo'lmasa, $A=B$ yoki $B=A$ tenglikka kelamiz.

Shuning bilan birga 4-ta'rifdan bo'sh to'plam va har bir to'plam o'zining to'plam osti (qism – to'plami) ekanligi ko'rinadi.

Masalan, $A=\{a, b, s, d, e, f, g\}$ to'plam uchun $B=\{a\}$ $C=\{b, d, g\}$, $D=\{f, g\}$ to'plamlarning har qaysisi to'plam osti (qism to'plam)dir.

Agar A to'plamning har bir elementiga B to'plamning yagona bir elementi mos kelsa, A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi deyiladi. Agar A va B to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa ular ekvivalent deyiladi va $A\sim B$ ko'rinishda belgilanadi.

Masalan, natural sonlar to'plami N, barcha juft sonlar to'plami M bilan ekvivalent.

Haqiqatan ham natural sonlar to'plami N bilan barcha juft sonlar to'plami M orasida o'zaro bir qiymatli moslikni o'rnatish oson, har bir natural son $n\in N$ ga $m=2n\in M$ juft soni mos keladi va aksincha.

Ikkita chekli to'plam orasida ekvivalentlikni o'rnatishni ikkita yo'li bor:

1) To'plamlar elementlari orasida bevosita o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish orqali;

2) To'plamlar elementlarini sanash va ularni har biridagi elementlar sonini taqqoslash yo'li bilan.

Masalan, agar $A=\{1,\ 2,\ 3\}$ va $B=$ {stol, stul, parta} bo'lsa, u holda bu to'plamlar chekli ekvivalent bo'lib, har bir to'plam uchta elementga ega. Agar n elementdan tashkil topgan chekli to'plamni elementlarini biror tarzda $1,\ 2,\ 3,\ 4, ...,\ n$ natural sonlar bilan nomerlash mumkin bo'lsa, u tartiblangan deyiladi.

Masalan, guruhdagi talabalar to'plami tartiblangan, chunki ularni otasining ismlarini guruh jurnalida natural sonlar yordamida tartiblash mumkin.

5-ta'rif. B to'plamning barcha elementlari A to'plamda mavjud bo'lib, shu bilan birga A da B ga tegishli bo'lmagan elementlar ham mavjud bo'lsa B to'plam A to'plamning xos qism to'plami deyiladi.

6-ta'rif. A to'plamning o'zi va $\varnothing$ to'plamga shu A to'plamning xos bo'lmagan qism to'plami deyiladi.

7-ta'rif. Har qanday to'plamning xos qism to'plami deb qaralmagan to'plamga universal to'plam deyiladi va U bilan belgilanadi.

U universal to'plamning barcha qism to'plamlari orasida ikkita xosmas qism to'plam mavjud bo'lib, ulardan biri U ning o'zi, ikkinchisi esa bo'sh to'plam, qolganlari esa xos qism to'plamlar bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. To'plam deganda nimani tushunasiz?
2. To'plam osti nima? Haqiqiy sonlar to'plami qism to'plamlarini ko'rsating.

2-§. To'plamlar ustida amallar va ularning xossalari

Ta'rif. a, b, s, d, f elementlar A va B to'plamlarning har birida mavjud bo'lsa, ular bu to'plamlarning umumiy elementlari deyiladi.

Masalan, $A = \{a, b, s, d, f\}$, $B = \{a, b, d\}$ to'plamlar uchun a, b, d — umumiy elementlar.

1) To'plamlar kesishmasi *(ko'paytmasi).* A va B to'plamlarning umumiy elementlaridangina tuzilgan C to'plam A va B to'plamlarning kesishmasi (ko'paytmasi) deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$C = A * B$ yoki $C = A \cap B$ bu yerda $\cap$ — belgi to'plamlarning kesishmasini bildiradi.

Bitta ham umumiy elementga ega bo'lmagan to'plamlarning kesishmasi $\varnothing$ bo'sh to'plamga teng.

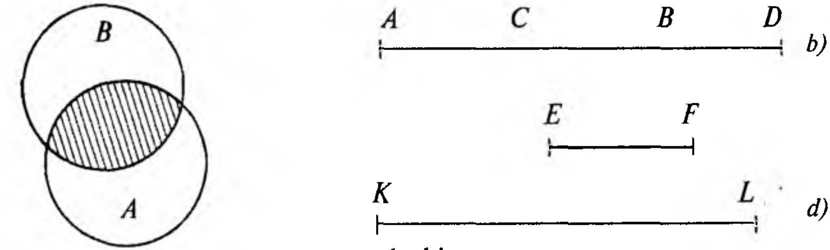
Masalan, 1). $A = \{a, b, s, d, e\}$ va $B = \{a, s, d, e, b\}$ to'plamlar uchun: $A \cap B = \{a, b, s, d, e\}$ ga teng.

2) $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $B = \{4, 6, 5, 8\}$ va $C = \{4, 6, 8, 10, 11\}$ to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng: $A \cap B \cap C = \{4, 6\}$

3) $A = \{2, 5, 6\}$ va $B = \{7, 8, 9\}$ to'plamlarning kesishmasi ushbuga teng: $A \cap B = \varnothing$

4) $A = \{x \mid x \in N,\ 1 \le x < 15\}$, $B = \{x \mid x \in N,\ 6 < x \le 19\}$

$A \cap B = \{x \mid x \in N,\ 6 < x < 15\}$



1-chizma.

To‘plamlarning kesishmasi geometrik nuqtayi nazardan figuraning kesishmasiga mos keladi.

1-a chizmada shtrixlangan qism A va B to‘plamlar kesishmasini 1-b chizmada CB kesma AB va CD kesmalar kesishmasini ifodalaydi.

1-d chizmada $[EF]$ va $[KL]$ kesmalar kesishmaydi, demak kesishma bo‘sh to‘plam.

Xususiy holda: $A \cap A \cap A.... = A \quad A \cap \varnothing = \varnothing$

Yuqoridagi xulosalar to‘plamlar soni ikkitadan ortiq bo‘lgan hol uchun ham to‘g‘ri.

2) To‘plamlar birlashmasi (*yigindisi*). Berilgan A va B to‘plamlarning birlashmasi (yig‘indisi) deb, shu A va B to‘plamlarning har biridagi hamma elementlardangina tuzilgan C to‘plamga aytamiz. Yig‘indi $C = A + B$ yoki $C = A \cup B$ ko‘rinishda belgilanadi.

To‘plamlarda har bir element bir martagina olinishi lozim bo‘lgani uchun, to‘plamlardan har ikkalasining umumiy elementlari C yigindida bir martagina olinadi.

Misollar:

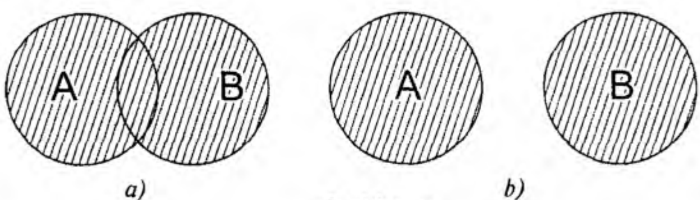
1) $A = \{a, b, s, d\}$ $B = \{a, b, s, d, e, f\}$ to‘plamlarning birlashmasi ushbuga teng:

$$A \cup B = \{a, b, s, d, e, f\}$$

2) $A = \{3, 4, 5, 6\}$ va $B = \{5, 6, 8, 9, 10\}$ to‘plamlar uchun

$$A \cup B = \{3, 4, 5, 6, , 8, 9, 10\} \text{ ga teng.}$$

To‘plamlarning birlashmasi geometrik nuqtayi nazardan figuralarning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to‘plamni bildiradi.



2-chizma.

2-a, b chizmalarda shtrixlangan yuza A va B to'plamlarning birlashmasini bildiradi.

Xususiy holda: $A \cup A \cup A \cup ... = A$ $A \cup Ж = A$

Agar $B \subset A$ bo'lsa, $A \cup B = A$ dir.

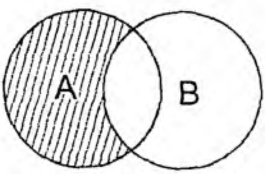
To'plamlar soni ikkitadan ortiq bo'lganda ham birlashma uchun chiqarilgan xulosalar to'g'ri bo'ladi.

3) To'plamlar ayirmasi. Berilgan A va B to'plamlarning ayirmasi deb shunday C to'plamga aytiladiki, u A ning B da bo'lmagan barcha elementlaridan tuziladi va quyidagicha belgilanadi:

$C = A - B$ yoki $C = A \setminus B$

Misollar:

1). $A = \{1, 2, 5, 6\}$ va $B = \{3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ uchun $R = A \setminus B = \{1, 2\}$;



3-chizma

2). $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ va $B = \{7, 8, 9\}$ uchun $R = A \setminus B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$;

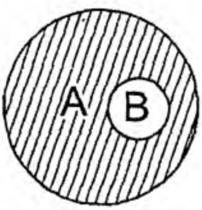
3). $A = \{1, 2, 3\}$ va $B = \{1, 2, 3\}$ uchun $R = A \setminus B = \varnothing$.

To'plamlarning ayirmasi geometrik nuqtayi nazardan chizmada ko'rsatilgan, shtrixlangan yuzani bildiradi (3-chizma)

Xususiy holda: $A \setminus A = \varnothing$;

$A \setminus \varnothing = A$

4) To'plamga to'idiruvchi: A to'plam va uning B qismi berilgan bo'lsin, ya'ni $B \subset A$, A dagi B ga kirmay qolgan hamma elementlardangina tuzilgan qism, B ning to'ldiruvchisi deb ataladi va $\overline{B}$ ko'rinishda belgilanadi.



5-chizma

Bunda $\overline{B}$ qism to'plam B ni A gacha to'ldiradi, ya'ni B va $\overline{B}$ ning birlashmasi xuddi A ga teng bo'ladi.

Masalan, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ va $B = \{2, 5, 6, 8\}$ bo'lsa, $\overline{B} = \{1, 3, 4, 7, 9\}$ bo'ladi.

Agar A to'plam biror boshqa to'plamning qismi deb qaralmasa, u holda A to'plamning to'ldiruvchisi $\varnothing$ bo'sh to'plam bo'lib, $\varnothing$ ning to'ldiruvchisi esa A bo'ladi, ya'ni: $\overline{A} = \varnothing$ va $\overline{\varnothing} = A$.

Agar $A \supset B$ bo'lsa, u holda $A \setminus B$ ayirma, B to'plamni A to'plamga to'ldiruvchisi deyiladi. Bu 4-chizmada ifodalangan.

Ushbu tengliklarga egamiz: $B \cap \overline{B} = \varnothing$

$$A \cup \overline{A} = A$$

$$B \setminus \overline{B} = B$$

$$\overline{B} - B = \overline{B}$$

Eslatma. A va B to'plamlarning aqalli bittasida ikkinchisiga kirmaydigan elementlar mavjud bo'lsa, A va B ni tengsiz to'plamlar deymiz. Uni quyidagicha belgilaymiz: $A \neq B$

5) To'plamlar to'g'ri ko'paytmasi.

A va B to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi deb shunday to'plamga aytiladi-ki, u to'plam elementlari tartiblangan (x, y) juftlardan iborat bo'lib, bu juftning birinchisi A to'plamdan, ikkinchisi esa B to'plamdan olinadi.

To'g'ri ko'paytma $A \times B$ ko'rinishda belgilanadi.

Misol:

$$A = \{4, 5, 7\} \text{ va } B = \{-1, 2, 4, 5\}$$

to'plamlar berilgan bo'lsin. U holda A va B to'plamlarning to'g'ri ko'paytmasi quyidagicha bo'ladi:

$$A x B = \{(4,-1),(4, 2),(4, 4),(4, 3),(5,-1),(5,2),(5,4),(5,5),(7,-1),(7,2),(7,4),(7,5)\}$$

Agar biz to'g'ri ko'paytma elementi (x, y) dagi x ni biror nuqtani abssissasi, y ni esa ordinatasi desak, u holda bu to'g'ri ko'paytma tekislikdagi nuqtalar to'plamini ifodalaydi.

Boshqacha aytganda haqiqiy sonlar to'plami R ni R ga to'g'ri ko'paytmasi $R \times R$ ni tasvirlaydi.

6) To'plamlar ustida amallar xossalari.

To'plamlar ustidagi amallar quyidagi xossalarga ega:

To'plamlar kesishmasi uchun

1) $A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik xossasi)

2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiativlik xossasi)

To'plamlar birlashmasi uchun:

1) $A \cup B = B \cup A$ (kommutativlik xossasi)

2) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (assotsiativlik xossasi)

Ixtiyoriy A, B, C to'plamlar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

1) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivligi)

2) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivligi)

3) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

4) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$

Bu xossalarni (munosabatlarni) to'g'riligi Venn diagrammasini chizish orqali ko'zga tashlanadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. To'plamlar birlashmasi, kesishmasi, ayirmasi ta'riflarini aytib bering.
2. To'plamga to'ldiruvchi deganda nimani tushunasiz?
3. To'plamlar ustida amallar qanday xossalarga ega?
4. Sonli to'plam nima?

3-§. Mulohazalar va ular ustida mantiqiy amallar

3.1. Mulohaza.

Maktabda o‘rganiladigan matematikada o‘quvchilarda taqqoslash, obyektlarni klassifikatsiyalash, faktlarni analiz qilish, ayrim sodda fikrlarni isbotlash, tenglama, tengsizliklarni yechish kabilar haqidagi jumlalar bilan ish ko‘riladi.

1-ta’rif. Chin yoki yolg‘onligi haqida fikr yuritish mumkin bo‘lgan darak gaplarga mulohaza (jumla) deyiladi. Mulohazalar matematik mantiq fanining boshlang‘ich tushunchasi hisoblanib, quyidagicha quriladi:

1) Obyektlar to‘plami beriladi;

2) Obyektlarning ba’zi bir xossalari va ular orasidagi munosabatlar bayon qilinadi;

Mulohazalar nazariyasining boshlang‘ich obyektlari sodda mulohazalardan tashkil topadi va ular alifboning kichik harflari a,b,s,...lar bilan belgilanadi. Har bir sodda mulohaza chin yoki yolg‘on bo‘lishi mumkin. Chin mulohaza qiymati 1, yolg‘on mulohaza qiymati 0 bilan belgilanadi. Chin mulohaza (ch), yolg‘on mulohaza (yo) harfi bilan belgilanadi.

a – «$4>3$» – chin mulohaza;
b – «$7+5=12$» – chin mulohaza;
s – «5 – *juft son*» – yolg‘on mulohaza;
d – «7 – *toq son*» – chin mulohaza.

Matematikada har bir teorema mulohaza hisoblanadi. Teoremani isbotlash uchun oldin rostligi isbotlangan teoremalar, aksiomalar va boshlang‘ich tushunchalardan foydalaniladi. Bizga ma’lumki sodda mulohazalardan bog‘lovchi so‘zlar yordamida murakkab mulohazalar hosil qilinadi. Bular “emas”, “va”, “yoki”, “...kelib chiqadi”, “agar bo‘lsa, ... u holda”, “zarur va yetarli” kabi bog‘lovchi so‘zlar bo‘lib, bularni har bittasi bitta mantiqiy amalga mos keladi.

Endi mulohazalar ustida bajariladigan amallarni qaraymiz:

1) Mulohaza inkori a – biror mulohaza bo‘lsa, u mulohazani yolg‘on deb boshqa mulohazaga ega bo‘lamiz. Bu mulohazaga a – mulohazani inkori deyiladi va u $\bar{a}$ bilan belgilanadi. Chin mulohazani inkori yolg‘on, yolg‘on mulohazani inkori chin bo‘ladi.

Masalan. "$3^2=6$"– b yolg‘on mulohaza, "$3^2\neq 6$"– b esa chin mulohaza. Bulardan tubandagi jadvalni tuzamiz:

a	$\bar{a}$	$\bar{\bar{a}}$
ch	yo	ch
yo	ch	yo

2) Mulohazalar kon'yunksiyasi.

Aytaylik a va b elementar mulohazalar bo'lsin. a va b mulohazalarni "va" bog'lovchi yordamida biriktirib, yangi mulohaza hosil qilamiz va unga a va b mulohazalarning kon'yunksiyasi deyiladi. U $a \wedge b$ ko'rinishda belgilanib, "a va b" deb o'qiladi. a va b konyunksiyasi a va b larning ikkalasi chin bo'lganda – chin, bittasi yoki ikkalasi yolg'on bo'lganda – yolg'on deb belgilanadi.

a	b	$a \wedge b$
ch	ch	ch
ch	yo	yo
yo	ch	yo
yo	yo	yo

«$7-4=3$» va «$4-$*juft son*» kon'yunksiyasi chin, «$3<8$», «$8<11$» mulohazalar «$3<8$», «$8<11$» kon'yunksiyalar chin, ularni birlashtirib, «$3<8<11$» deb yozish mumkin. Demak, qo'sh tengsizlik ham mulohazalar kon'yunksiyasini ifodalar ekan. Mulohazalar kon'yunksiyasi $a \wedge b = b \wedge a$ komutativlik $(a \wedge b) \wedge c = a \wedge (b \wedge c)$ assotsiativlik xossalariga ega.

a mulohazani inkori $\bar{a}$ bilan kon'yunksiyasini qaraylik.

a	$\bar{a}$	$a \wedge \bar{a}$
ch	yo	yo
yo	ch	yo

Bunda $a \wedge \bar{a}$ – aynan yolg'on deyiladi. $a \wedge a = yo$ deb yoziladi.

3) Mulohazalar diz'yunksiyasi.

Ikkita mulohazani yoki bog'lovchisi bilan birlashtirib yangi mulohaza hosil qilamiz. Bu mulohazaga mulohazalar diz'yunksiyasi deyiladi va $a \vee b$ ko'rinishda belgilanib «a yoki b» deb o'qiladi. Mulohazalar diz'yunksiyasi uni hosil qiluvchi ikkala mulohaza yolg'on bo'lgan paytda yolg'on, qolgan hollarning barchasida chin. Uning jadvali quyidagicha:

a	b	$a \vee b$
ch	ch	ch
ch	yo	ch
yo	ch	ch
yo	yo	yo

Ikkita elementar mulohazadan diz'yunksiya tuzamiz.

1-misol. «$12>8$», «$12=8$» mulohazalari berilgan «$12>8$» yoki «$12=8$» – bu mulohaza chin, chunki unga kiruvchi «$12 \geq 8$» kabi yoziladi. Bundan ko'rinadiki, qat'iymas sonli tengsizlik, qat'iy tengsizlik va tenglikning diz'yunktsiyasini tashkil qilar ekan.

2-misol. $2 \leq 2, 2 = 3$ mulohazalarni ikkalasi ham yolg‘on. Bu mulohazalarni diz’yunksiyasi ham yolg‘on. Ixtiyoriy a,b,s mulohazalar uchun quyidagilar o‘rinli:

$a \vee b = b \vee a$ (kommutativlik xossasi)

$(a \vee b) \vee s = a \vee (b \vee s)$ (assotsiativlik xossasi)

Odatda assotsiativlik xossasini yozishda qavslar tashlab yoziladi. Chinlik jadvali yordamida quyidagilarga ishonch hosil qilish mumkin.

$$(a \vee b) \wedge s = (a \wedge s) \vee (b \wedge s)$$

$$(a \wedge b) \vee s = (a \vee s) \wedge (b \vee s)$$

Birinchisi diz’yunksiyaga nisbatan kon’yunksiyaning distiributivligi deb ataladi. a mulohazani uni inkori diz’yunksiyani tuzamiz.

a	$\overline{a}$	$a \vee \overline{a}$
ch	yo	ch
yo	ch	ch

Bu holda $a \vee \overline{a}$ aynan chin deyiladi va $a \vee \overline{a}$ = ch deb yoziladi. Shunday misolni qaraylik: «$x^2 + 3 = 0$ tenglama haqiqiy ildizga egami yoki ega emas, “bunda” haqiqiy ildizga ega” – mulohazani a bilan belgilasak, “haqiqiy ildizga ega emas” – mulohazasi $\overline{a}$ bo‘ladi. Ikkalasini diz’yunksiyasi ixtiyoriy a da $a \vee \overline{a} = ch$ bo‘ladi. Chinlik jadvali yordamida kon’yunksiya, diz’yunksiya va mulohaza inkori orasidagi quyidagi munosabatlarni o‘rganish mumkin.

a) $\overline{a \wedge b} = \overline{a} \vee \overline{b}$, b) $\overline{a \vee b} = \overline{a} \wedge \overline{b}$

Bularga De Morgan formulalari deyiladi.

3.2. Mulohazalar implikatsiyasi.

Agar a mulohaza o‘rinli bo‘lsa u holda b mulohaza o‘rinli bo‘lib, mulohazalar implikatsiyasi deyiladi. $a \Rightarrow b$ ko‘rinishda belgilanadi. U $a \Rightarrow b$ implikatsiyasiga kiruvchi a mulohazaga implikatsiya sharti, b mulohazaga esa implikatsiya natijasi deyiladi. $a \Rightarrow b$ implikatsiya faqat a mulohaza chin, b mulohaza yolg‘on holatidagina yolg‘on bo‘lib, qolgan barcha hollarda chin qiymatga ega. Chinlik jadvali quyidagicha:

a	b	$a \Rightarrow b$
ch	ch	ch
ch	yo	yo
yo	ch	ch
yo	yo	ch

Implikatsiya amalini mulohaza inkori va diz’yunktsiya amali orqali ifodalash mumkin $(a \Rightarrow b) = \overline{a} \vee b$. Buni chinlik jadvali yordamida isbotlash mumkin.

a	b	$\bar{a}$	$a \Rightarrow b$	$\bar{a} \vee b$
ch	ch	yo	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo
yo	ch	ch	ch	ch
yo	yo	ch	ch	ch

$a \Rightarrow b$ implikatsiya berilgan bo‘lsa mulohazalar o‘rnini almashtirib $b \Rightarrow a$ yangi implikatsiyaga ega bo‘lamiz. Bu yozilgan implikatsiyaga teskari implikatsiya deyiladi. Masalan, “agar 138 sonini raqamlar yig‘indisi 3 ga karrali bo‘lsa, u holda 138 soni 3 ga karrali” implikatsiyaga teskari implikatsiya: “agar 138 soni 3 ga karrali bo‘lsa, u holda uning raqamlarini yig‘indisi 3 ga karrali”. Bu chin implikatsiya, ammo hamma vaqt ham teskari implikatsiya chin bo‘lavermaydi. Masalan, agar $5 > 2$ bo‘lsa u holda 5 juft son yolg‘on teskarisi: agar 5 juft son bo‘lsa u holda $5 > 2$ bo‘ladi, bu chin, chunki implikatsiya sharti yolg‘on. a va b mulohazalarini ularni inkoriga almashtirsak $\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$ implikatsiyaga ega bo‘lamiz. Bu implikatsiya $a \Rightarrow b$ implikatsiyaga qarama-qarshi deyiladi.

Chinlik jadvali yordamida $a \Rightarrow b$ va $\bar{b} \Rightarrow \bar{a}$ lar teng kuchli ekanini ko‘rish mumkin. Masalan, “agar o‘nli sanoq sistemasida 130 sonini oxirgi raqami nol bilan tugasa, u holda 130 soni 5 ga bo‘linadi”. Unga teng kuchli implikatsiya “agar 130 soni 5 ga bo‘linmasa, u holda uning o‘nli sanoq sistemasida yozilishida oxirgi raqami nol bilan tugamaydi”. Bu holda ikkalasi ham chin. $b \Rightarrow a$ va $\bar{a} \Rightarrow \bar{b}$ implikatsiyalarni ham teng kuchli ekanini kuzatish mumkin.

3.3. Mulohazalar ekvivalensiyasi.

Ikkita a va b mulohazalarning ikkalasi ham chin yoki ikkalasi ham yolg‘on bo‘lganda chin, qolgan hollarda yolg‘on bo‘ladigan yangi mulohazaga mulohazalarining ekvivalensiyasi deyiladi. Ekvivalensiya $a \Leftrightarrow b$ ko‘rinishida belgilanadi. Chinlik jadvali tubandagicha:

a	b	$a \Leftrightarrow b$
ch	ch	ch
yo	ch	yo
ch	yo	yo
yo	yo	ch

Masalan, “129 soni 3 ga bo‘linadi faqat uning raqamlari yigindisi 3 ga bo‘linsa”, a mulohaza – “129 soni 3 ga bo‘linadi”, b mulohaza – “129 sonini raqamlar yigindisi 3 ga bo‘linadi”.

Ikki mulohaza ham chin bo‘lganligi uchun ekvivalensiya ham chin. Ikkala mulohaza yolg‘on bo‘lsa, u holda ham ekvivalensiya chin bo‘ladi. Masalan, “127 soni 3 ga bo‘linadi, faqat 127 sonining raqamlar yigindisi 3 ga bo‘linsa” – bu holda a va b lar ikkalasi ham yolg‘on.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Mulohaza nima? Murakkab mulohazalar qanday hosil bo‘ladi?
2. Mulohaza inkori deganda nimani tushunasiz?
3. Mulohazalar kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi chinlik jadvallarini tuzing.
4. Mulohazalar implikatsiyasi va ekvivalensiyasini chinlik jadvallarini tuzing.

4-§. Kvantorlar va predikatlar, ular ustida amallar

Matematikada bir yoki bir necha o‘zgaruvchini o‘z ichiga oluvchi jumlalar ko‘p uchraydi. Masalan, $x>7$, $x+y=11$. Bu jumlalar o‘zgaruvchining qiymatlariga qarab chin yoki yolg‘on bo‘lishi mumkin, boshqacha aytganda mulohazaga aylanishi mumkin.

1-ta’rif. Tarkibida erkli o‘zgaruvchilar qatnashib, bu o‘zgaruvchilarning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymatlarida mulohazaga aylanadigan darak gapga predikat deyiladi va u $A(x), B(x), R(x), Q(x) \ldots$ ko‘rinishda belgilanadi.

Predikat tarkibiga kirgan o‘zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlar to‘plami predikatning aniqlanish sohasi deyiladi.

O‘zgaruvchi o‘rniga qo‘yganda, predikatni chin(rost) mulohazaga aylantiruvchi qiymatlari predikatning chinlik(rostlik) to‘plami deyiladi.

Predikatlar tarkibidagi o‘zgaruvchilar soniga qarab bir, ikki va hakozo o‘rinli predikatlar deyiladi.

$R(x)-$ bir o‘rinli predikat bo‘lib, x obyektning biror xossaga ega bo‘lishini bildiradi.

Misol. $R(x)$: «$x-$ toq son” ko‘rinishidagi predikat berilgan bo‘lsin. $R(x)$ predikat bir o‘rinli bo‘lib, uning aniqlanish sohasi natural sonlar to‘plami N dan, qiymatlar sohasi mulohazalar to‘plamidan iborat bo‘lib, har bir mulohazaning qiymati esa ikki elementli $\{0;1\}$ to‘plamdan iborat. Bu predikat qiymatlarining jadval ko‘rinishi quyidagicha:

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$R(x)$	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Jadvaldan ko‘rinadiki: 1) predikatlar mulohaza emas, lekin x ning biror to‘plamga tegishli aniq qiymatlarida, u mulohaza bo‘ladi.

2) $A-$ biror obyektlar to‘plami bo‘lsa, bu to‘plamdagi predikat-xossa deganda biz shu A to‘plamda chin yoki yolg‘on qiymatni qabul qiluvchi bir o‘zgaruvchili funksiyani tushunamiz.

2-ta’rif. A to‘plamning $R(x)$ predikatni chin mulohazaga aylantiruvchi B qism to‘plamiga $R(x)$ predikatning chinlik sohasi deyiladi.

3-ta’rif. Agar $R(x)$ predikat A to‘plamning barcha elementlarida chin(yolg'on) qiymatni qabul qilsa, $R(x)$ predikat A to'plamda aynan chin (yolg'on) deyiladi.

Misollar. 1) $R(x)$: «x – musbat son» – predikat N to'plamda aynan chin;

2) $R(x)$: «x manfiy son» – predikat N to'plamda aynan yolg'on;

3) $E(x)$: «x toq son» – predikat N to'plamda bajariluvchi predikat.

Bir, ikki, uch o'rinli predikatlar mos ravishda unar, binar, ternar predikatlar deyiladi.

Istalgan tenglama yoki tengsizlik predikat bo'ladi.

Predikatni mulohazaga aylantirishning yana bir usuli kvantorlardan foydalanishdir.

Quyidagi misolni qaraylik.

10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 sonlari haqida quyidagilarni aytish mumkin:

a) berilgan barcha sonlar ikki xonali sonlardir.

b) berilgan sonlardan ba'zilari toq sonlardir.

Bu jumlalarga nisbatan ularning chin yoki yolg'onligi to'g'risida fikr yuritish mumkinligidan ular mulohaza bo'ladi.

Agar biz ulardan "barcha", "ba'zilari" so'zlarini olib tashlasak, jumlalarni chinmi yoki yolg'onmi savoliga javob berib bo'lmaydi. Demak, "barcha", "ba'zi" so'zlarni qo'shish bilan mulohaza hosil qilinadi. Endi kvantorlarni ko'rib o'tamiz.

4.1. Kvantorlar.

Ta'rif. "Barcha" va "ba'zi" so'zlari kvantorlar deb aytiladi. "Kvantor" so'zi lotincha bo'lib, "qancha" ma'nosini anglatadi, ya'ni kvantor u yoki bu mulohazada qancha (barcha yoki ba'zi) obyekt haqida gap borayotganini bildiradi. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari bir-biridan farq qilinadi.

"Ixtiyoriy", "har qanday", "har bir", "barcha(hamma)" so'zlari umumiylik kvantoridir. Umumiylik kvantori "$\forall$" belgisi bilan belgilanadi. U belgi inglizcha "All" so'zining bosh harfidan olingan bo'lib, bizningcha "hamma" ma'nosini beradi.

"Mavjud", "ba'zi (ayrim)", "topiladi", "kamida bitta" so'zlari mavjudlik kvantoridir. Mavjudlik kvantori "$\exists$" belgisi bilan belgilanadi. U belgi inglizcha "Exist" so'zining bosh harfidan olingan bo'lib, bizningcha "mavjud", "bor", "topiladi" ma'nosini beradi.

Biror A to'plamning "barcha x elementlari uchun" deganda mulohaza qisqacha $\forall x \in A$, "ba'zi bir x elementlar uchun" degan mulohaza esa $\exists x \in A$ orqali belgilanib, ular mos ravishda umumiylik va mavjudlik kvantorlari deb yuritiladi. Kvantorlar qatnashgan predikatlar quyidagicha yoziladi:

$$(\forall x \in A)P(x)$$

(qisqacha: $(\forall x \in A)P(x)$) belgi "A to‘plamning barcha x elementlari uchun $P(x)$ predikat chin,

$$(\exists x \in A)P(x)$$

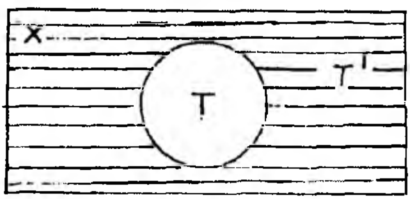
(qisqacha: $(\exists x \in A)P(x)$) belgi "A to‘plamning shunday x elementi mavjudki, bu element uchun $P(x)$ predikat chin" deb o‘qiladi.

Masalan. $P(x)$: "x soni 3 ga karrali" – $x \in \mathrm{N}$ bo‘lsin,
"Ixtiyoriy x soni 3 ga karrali" – yolg‘on mulohaza,
"3 ga karrali x sonlar mavjud" – chin mulohaza.
Mulohazalar ustida amallar bajarilganidek predikatlar ustida ham amallar bajariladi.

4.2. Predikatlar ustida mantiqiy amallar.

1. Predikatlar inkori.

Aytaylik X to‘plamda $A(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. $A(x)$ chin bo‘lganda, yolg‘on, yolg‘on bo‘lganda chin bo‘ladigan $\overline{A(x)}$ predikat $A(x)$ predikatning inkori deyiladi.



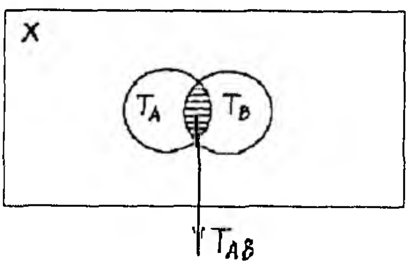
5-chizma.

$A(x)$ predikatning chinlik to‘plami T bo‘lsa, $\overline{A(x)}$ ning chinlik to‘plami, T', ya’ni T to‘plamni to‘idiruvchisi bo‘ladi (5-chizma).

Masalan, $A(x)$ "x soni 5 ga bo‘linadi", $\overline{A(x)}$] "x soni 5 ga bo‘linmaydi".

2. Predikatlar kon’yunksiyasi.

X to‘plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo‘lsin. Bu holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar kon’yunksiyasi bo‘ladi.



6-chizma.

$A(x) \wedge B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar chin bo‘lganda chin bo‘ladi.

$T_A - A(x)$ predikatning chinlik to‘plami, $T_B - B(x)$ predikatning chinlik to‘plami bo‘lsa, u holda $A(x) \wedge B(x)$ predikatning chinlik to‘plami $T_{A \wedge B} = T_A \cap T_B$ bo‘ladi (6-chizma).

Masalan, $X=\{5;6;10;15;20;24\}$ to'plamda $A(x)$: "x juft son"; $B(x)$: "x soni 5 ga karrali" predikatlari berilgan bo'lsin.

U holda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar kon'yunksiyasi predikati $A(x)\wedge B(x)$ "x soni juft va 5 ga karrali". $A(x)$ predikatning chinlik sohasi $\{6,10,20,24\}$,

$B(x)$ predikatning chinlik sohasi $\{5;10;15;20\}$ bo'ladi.

$A(x)\wedge B(x)$ predikatning chinlik sohasi $\{10;20\}$ bo'ladi.

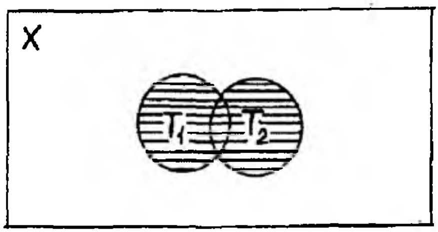
$\{10;\ 20\}$ – to'plam esa $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar chinlik sohalari kesishmasidan iborat bo'ladi.

3. Predikatlar diz'yunksiyasi.

X to'plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin. $A(x)\vee B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar diz'yunksiyasi deyiladi.

$A(x)\vee B(x)$ predikat $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning hech bo'lmaganda biri chin bo'lganda, chin bo'ladi. Shu sababli $T_{A\vee B}=T_A\bigcup T_B$.

Masalan, yuqoridagi misolda "x juft son yoki 5 ga karrali". $A(x)\wedge B(x)$ predikatning chinlik sohasi $\{6;10;15;20;\ 24\}$ to'plamdan iborat, boshqacha aytganda, $\{5,6,10,15,20,24\}$ to'plam $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarning chinlik to'plamlarining birlashmasidan iborat (7-chizma).



7-chizma.

4. Predikatlar implikatsiyasi.

X to'plamda $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar berilgan bo'lsin. $A(x)\Rightarrow B(x)$ predikatga berilgan predikatlarning implikatsiyasi deyiladi.

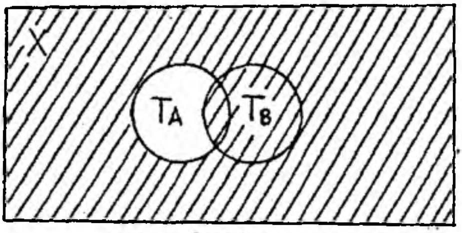
Boshqacha aytganda "agar $A(x)$ bo'lsa, $B(x)$ bo'ladi" predikatiga aytiladi.

Masalan, $A(x)$: "x natural soni 4 ga bo'linadi", $B(x)$: "x natural soni 3 ga bo'linadi" predikatlari berilgan. Bu predikatlardan $A(x)\Rightarrow B(x)$ predikatini tuzamiz.

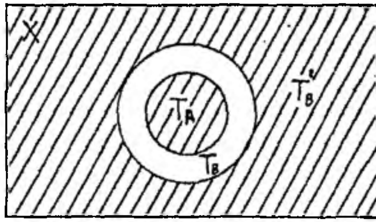
$A(x)\Rightarrow B(x)$: "x natural soni 4 ga bo'linsa, u holda u 3 ga ham bo'linadi". Bu predikat x sonning ba'zi qiymatlarida chin, qolgan qiymatlarida yolg'on.

$A(x)\Rightarrow B(x)$ predikatning chinlik to'plami, $B(x)$ predikatning chinlik to'plami T_B bilan $A(x)$ predikatning chinlik to'plami, T_A ning to'ldiruvchisi birlashmasidan iborat (8-chizma).

Ba'zi hollarda bir predikatning chinligidan ikkinchi predikatning chinligi kelib chiqadi. Masalan, «x 4 ga bo'linadi», predikatidan «x 2 ga bo'linadi» predikati kelib chiqadi.



8-chizma.



9-chizma.

Bu hol $T_A \subset T_B$ bo'lganda o'rinli (9-chizma).

Bu holda $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikatga mantiqiy kelib chiqishlik deyiladi.

Bunda $B(x)$ predikatga $A(x)$ predikat uchun zaruriy shart, $A(x)$ esa $B(x)$ predikati uchun yetarlik shart deyiladi.

Agar $A(x)$ va $B(x)$ predikatlarni chinlik to'plamlari $T_A = T_B$ bo'lsa, u holda $A(x) \Rightarrow B(x)$ predikati tengkuchlilik (ekvivalentlik) munosabati deyiladi.

Masalan, $A(x)$: " $x-$ natural son", $B(x)$: " x – butun son"

$A(x) \Rightarrow B(x)$: " $x-$ natural son bo'lsa, u butun son".

$A(x) \Rightarrow B(x)$ predikati ekvivalentlik munosabati bo'lsa, u holda $A(x)$ va $B(x)$ larning har biri ikkinchisi uchun zarur va yetarli shart deyiladi.

Predikatlar tarkibiga kirgan o'zgaruvchilar soniga qarab bir o'rinli, ikki o'rinli va hokazo bo'ladi.

Ikki, uch, ... , n o'rinli predikatlar orqali ham kvantorli mulohazalar hosil qilish mumkin. Masalan, $(\forall x, \forall y)P(x;y)$ mulohaza biror to'plamning "barcha x va barcha y elementlari uchun $P(x;y)$ chin" deb o'qiladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Predikat nima?
2. Predikat aniqlanish sohasini ta'riflang.
3. Umumiy va mavjudlik kvantorlari deb nimaga aytiladi?
4. Predikat inkori deganda nimani tushunasiz?
5. Predikatlar kon'yunksiyasi va diz'yunksiyasi chinlik jadvallarini tuzing.
6. Predikatlar orasida kelib chiqishlik va tengkuchlilik munosabatlari uchun "zarur" va "etarli" so'zlarini ochib bering.

5-§. Munosabatlar va moslik

5.1. Binar munosabatlar va ularning xossalari. Munosabat tushunchasi.

Biz to'plamlarni o'rganganda ularni taqqoslab, ular kesishadi yoki teng, yoki biri ikkinchisining qismi deb to'plamlar orasidagi munosabatni qaradik. Natural sonlar to'plamini qaraganda sonlar orasidagi turli

– tuman bog'lanishlarni ko'ramiz. Masalan, 7 soni 6 sonidan katta, 12 soni 9 sonidan 3ta ko'p, 3 soni 2 sonidan keyin keladi va hokazo.

Xuddi shunga o'xshash, geometriyada figuralarning tengligi va o'xshashligi, to'g'ri chiziqlarning parallelligi va perpendikularligi kabi munosabatlar qaraladi.

Bulardan ko'rinadi-ki, matematikada asosan, ikki ob"ekt orasidagi munosabat qaraladi, bunga binar munosabatlar deyiladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan munosabatlar orasida umumiylik bormi, yo'qmi degan masalani qarasak, u yoki bu munosabatlarni qarashda biz berilgan to'plamlar sonlaridan tashkil topgan tartiblangan juftliklar bilan amallar bajarishni ko'ramiz.

Masalan, $X=\{4,5,6\}$ to'plamda 1 ta ko'p munosabatini qarasak, "5 soni 4 sonidan 1 ta ko'p", "6 soni 5 sonidan 1 ta ko'p". Shu to'plamda katta munosabatni qarasak "5>4", "6>4", "6>5". Shunga o'xshash kichik munosabatini qarasak "4 soni 5 sonidan 1 ta kam", "5 soni 6 sonidan 1 ta kam".

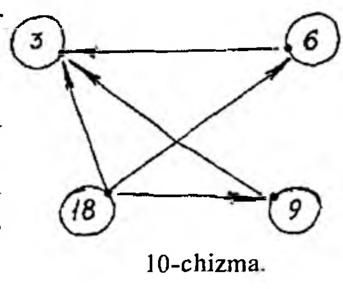
Keltirilgan misoldagi "1 ta ko'p" munosabat uchun {(5:4), (6;5)} to'plam, "katta" munosabati uchun {(5;4), (6;4), (6;5)} to'plam, "kichik" munosabati uchun {(4;5), (5;6)} to'plamlarga ega bo'lamiz. Bu to'plamlar esa elementlari $X=\{4,5,6\}$ to'plam elementlaridan hosil qilingan sonlar juftliklari to'plami bilan aniqlanadi. Boshqacha aytganda, bu to'plamlar $X=\{4,5,6\}$ to'plam Dekart ko'paytmasining elementlaridan tashkil topgan qism to'plamlardir, ya'ni

$$X\times X=\{(4;4),(4;5),(4;6),(5;4),(5;5),(5;6),(6;4),(6;5),(6;6)\}.$$

Bundan ko'rinadiki, ko'rib o'tilgan munosabtlar $X\times X$ Dekart ko'paytmaning qism to'plami bilan aniqlanar ekan.

1-ta'rif. $X\times X$ to'plamning istalgan G qism to'plami binar munosabat deyiladi. Binar munosabatlar alfavitning bosh harflari $P, Q, R, S,\ldots,$ bilan belgilanadi.

Matematikada binar munosabatlar $a=b, a<b, a>b, a\neq b, a\parallel b, a\perp b$ kabi belgilar orqali berilgan.



10-chizma.

Munosabatlarni grafiklar yordamida ko'rgazmali tasvirlash mumkin. Masalan, $X=\{3,6,9,18\}$ to'plam elementlari uchun "karrali" munosabatini ko'ramiz va uning grafigini chizamiz (10-chizma). 18 soni 3 ga karrali, 18 soni 6 ga karrali, 18 soni 9 ga karrali va hokazo. X to'plamdagi ixtiyoriy son o'z-o'ziga karrali bo'lgani uchun oxiri ustma-ust tushadigan strelkalar mavjud. Bunday strelkalar sirtmoqlar deyiladi.

To'plamlarni berilish usullari kabi munosabatlar ham berilish usullariga ega.

1) X to'plamda berilgan R munosabat X to'plamdan olingan va shu

munosabat bilan bog'langan barcha elementlar juftliklarini sanab ko'rsatish bilan beriladi.

2) X to'plamda bo'lgan barcha elementlar juftliklarining tavsifiy xossasini ko'rsatish bilan beriladi.

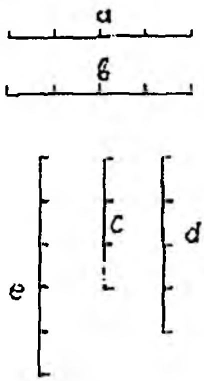
5.2. Munosabatlarning xossalari.

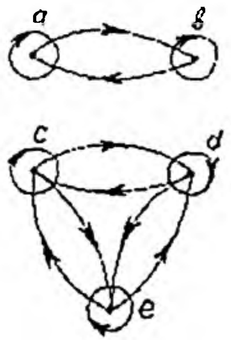
Munosabatlarning xossalarini ajratib ko'rsatish uchun matematikada yuqorida aytib o'tilgan munosabatlarni kesmalar to'plamida grafiklar yordamida tasvirlaymiz. a, b, c, d, e kesmalar berilgan bo'lsin (11-a, b, d, e chizmalar).

Grafiklardan ko'rinadiki parallellik va tenglik munosabatlari refleksiv xossaga ega ekan.

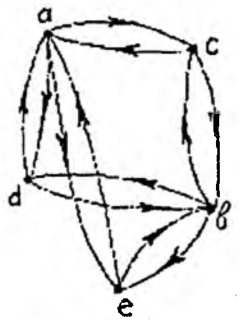
1-ta'rif. Agar X to'plamning ixtiyoriy elementi haqida u o'z-o'zi bilan R munosabatda deyish mumkin bo'lsa (ya'ni xRx bajarilsa) to'plamdagi R munosabat refleksiv deyiladi.

Agar munosabat refleksiv bo'lsa, grafikning har bir uchida sirtmoq bo'ladi.

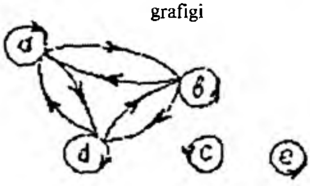




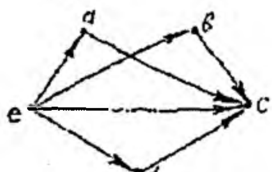
a) parallelik munosabatining grafigi



b) perpendikularlik munosabatining grafigi



d) tenglik munosabatining grafigi



e) «uzunroq» munosabatining grafigi

11-chizma.

2-ta'rif. Agar X to'plamning birorta ham elementi uchun xRx bajarilmasa, R munosabat X to'plamda antirefleksiv deyiladi. "$>$", "$<$" (uzun, qisqa), "$\perp$" munosabatlari antirefleksivdir.

Kesmalarning parallellik, perpendikularlik va tenglik munosabatlari grafiklariga e'tibor bersak, ularning o'ziga xos xususiyati, agar elementlar juftini tutashtiruvchi bitta strelka bor bo'lsa u holda albatta shu elementlarni tutashtiruvchi qarama-qarshi yo'nalgan boshqa strelka ham bo'ladi.

Bundan esa parallellik, perpendikularlik va tenglik munosabatlari simmetriklik xossasiga ega ekanligi ko'rinadi.

3-ta'rif. Agar X to'plamda R munosabat uchun xRy va yRx shartlar bir vaqtda bajarilsa, R munosabatga simmetrik munosabat deyiladi.

Simmetriklik xususiyatiga ega bo'lmagan munosabatlar ham mavjud. Masalan, grafiklardagi uzunroq munosabatini qaraylik. Bu grafikni o'ziga xos xususiyati strelkani ikkita uchi tutashtirilsa u yagona bo'ladi. Bundan "Uzunroq" munosabati antisimmetrik xossaga ega ekanligi ko'rinadi.

4-ta'rif. Agar X to'plamning turli x va y elementlari uchun xRy shartdan yRx kelib chiqmasa, X to'plamdagi R munosabatga antisimmetrik munosabat deyiladi.

Parallellik, tenglik va uzunroq munosabatlari grafiklariga e"tibor bersak, strelka birinchi elementdan ikkinchi elementga, ikkinchi elementdan uchinchi elementga borsa, albatta birinchi elementdan uchinchi elementga ham boradi. Bu tranzitivlik xossasini ifodalaydi.

5-ta'rif. Agar X to'plamda R munosabat uchun xRy va yRz dan xRz kelib chiqsa, u holda X to'plamda R munosabatga tranzitiv munosabat deyiladi.

Kesmalarning parallelligi va tengligi munosabatlari refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalarga ega. Perpendikularlik munosabati simmetriklik xossasiga, "uzunroq" munosabati antisimmetrik va tranzitivlik xossasiga ega.

6-ta'rif. Agar X va Y to'plam elementlari orasidagi R munosabatda X to'plamning har bir elementiga Y to'plamning bittadan ortiq bo'lmagan elementi mos kelsa u holda R funksional munosabat yoki funksiya deyiladi.

7-ta'rif. Agar R munosabat funksional bo'lsa, u holda uning aniqlanish sohasi funksiyaning aniqlanish sohasi deyiladi, qiymatlar sohasi funksiyaning qiymatlar sohasi deyiladi.

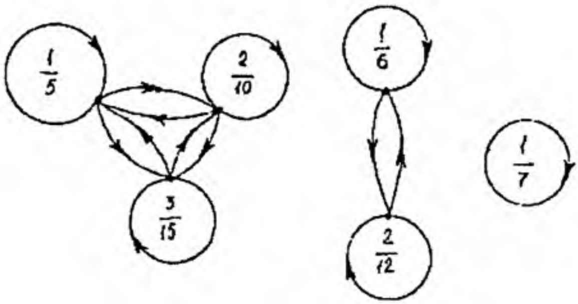
8-ta'rif. Agar X va Y to'plamlar elementlari orasidagi R munosabatda X ning har bir elementiga Y ning faqat bitta elementi mos kelsa, u holda R munosabat X ni Y ga syuryektiv akslantirish deyiladi.

9-ta'rif. Agar akslantirishning qiymatlar sohasi Y to'plam bilan teng bo'lsa, akslantirish inyektiv deyiladi.

Ekvivalentlik munosabati

Ta'rif. Agar X to'plamda berilgan R munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lsa, u holda u ekvivalentlik munosabati deyiladi.

Misol. $\left\{\frac{1}{5}; \frac{1}{6}; \frac{1}{7}; \frac{2}{10}; \frac{2}{12}; \frac{3}{15}\right\}$ kasrlar to'plamida tenglik munosabati berilgan (12-chizma).



12-chizma.

Bu munosabat:

1) refleksiv, chunki ixtiyoriy kasr o'z-o'ziga teng;

2) simmetrik, chunki x kasrning y kasrga tengligidan y kasrni x kasrga tengligi ham kelib chiqadi;

3) tranzitiv, chunki x kasrning y kasrga va y kasrning z kasrga tengligidan x kasrning z kasrga tengligi kelib chiqadi.

4) Agar X to'plamda ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsa, u holda bu munosabat X to'plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan qism to'plamlariga ajratadi. Yuqoridagi misolimizda qism to'plamlar

$$\left\{\frac{1}{5}; \frac{2}{10}; \frac{3}{15}\right\}, \left\{\frac{1}{6}; \frac{2}{12}\right\}, \left\{\frac{1}{7}\right\}.$$

Bu qism to'plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi va qism to'plamlarining birlashmasi birlamchi misolda berilgan to'plam bilan ustma-ust tushadi.

Tartib munosabati.

"Tartib" so'zi kundalik hayotimizda doimo uchraydi. Masalan, jismoniy tarbiya darslarida talabalarning bo'y-bo'yiga qarab joylashish tartibi, o'zbek alfavitida harflarning kelish tartibi va hokazo.

Ta'rif. Agar X to'plamdagi R munosabat tranzitiv va antisimmetrik bo'lsa, u holda bu munosabatga tartib munosabati deyiladi. X to'plam esa tartib munosabati bilan tartiblangan deb ataladi.

Masalan, $X=\{3,6,9,18\}$ to'plamni "kichik" munosabati yordamida tartiblashtirish mumkin. Boshlang'ich ta'limning birinchi sinfida o'quvchilar "katta" va "kichik" munosabatlari bilan keyinchalik esa kesmalar uchun "uzun" va "qisqa" munosabatlari bilan tanishadilar. Bu munosabatlar yordamida sonlar va kesmalar to'plamida tartib o'rnatiladi.

5.3. Ikki to'plam elementlari orasidagi moslik.

Ikki to'plam elementlari orasidagi moslikni ko'rishdan oldin, ikki to'plam Dekart ko'paytmasi va uning qism to'plamlarining misollar yordamida eslaylik. Aytaylik bizga $X=\{a,b,c\}$ va $Y=\{m,n\}$ to'plamlari berilgan bo'lsin. U holda

$X\times Y=\{(a,m),(a,n),(b,n),(b,m),(c,m),(c,n)\}$ ga ega bo'lamiz.

Bu Dekart ko'paytma 64 ta qism to'plamga ega.

1-ta'rif. $X\times Y$ Dekart ko'paytmaning istalgan G_f qism to'plami X va Y to'plamlar orasidagi binar moslik deyiladi. Binar so'zi lotincha bis so'zidan olingan bo'lib, ikki to'plam elementlari orasida so'z borishini bildiradi.

Moslik lotin alifbosining $f, d, t, s, \ldots$ kabi harflari bilan belgilanadi.

Bizga ma'lum bo'lgan funksiyalarning hammasi moslik tushunchasiga misol bo'la oladi.

X to'plam moslikning birinchi to'plami deyiladi. X to'plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to'plami moslikning aniqlanish *sohasi deyiladi.*

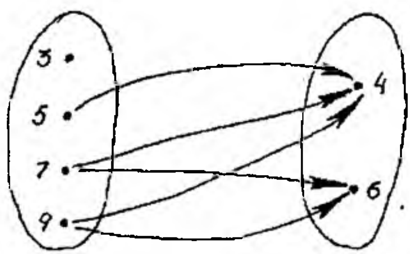
Y to'plam moslikning ikkinchi to'plami deyiladi. Y to'plamning moslikda qatnashgan elementlari to'plami moslikning qiymatlar to'plami deyiladi.

$G_f\subset X\times Y$ to'plam moslikning grafigi deyiladi. G_f grafik biror R moslikdagi $x;y$ juftliklar to'plami, ya'ni xRy, bu yerda $x\in X$, $y\in Y$.

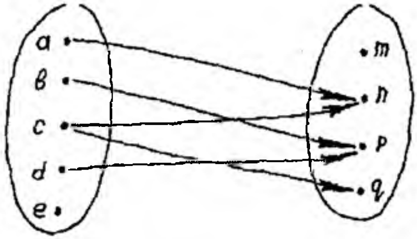
Ikki to'plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo'nalishli kesmalar(strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar moslikning grafigi deyiladi.

Chekli to'plamlar orasidagi moslik grafiklar yordamida ko'rgazmali tasvirlanadi.

Misollar: 1. $X=\{3,5,7,9\}$ va $Y=\{4,6\}$ to'plamlar orasidagi "katta" mosligining grafigini yasaymiz. Buning uchun berilgan to'plamlar elementlarini nuqtalar bilan belgilaymiz va X to'plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalardan Y to'plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalarga strelkalar o'tkazamiz (13-chizma).



13-chizma.



14-chizma.

Natijada biz X va Y to'plamlar elementlari orasidagi "katta" mosligiga ega bo'lamiz .

2. $X = \{a, b, c, d, e\}$

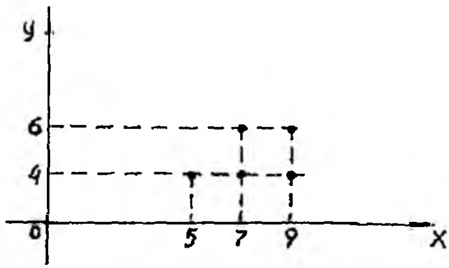
$Y = \{m.n.p.q\}$

$G_f = \{(a.n).(b.p),(c,n),.(c.q).(d.p)\}$

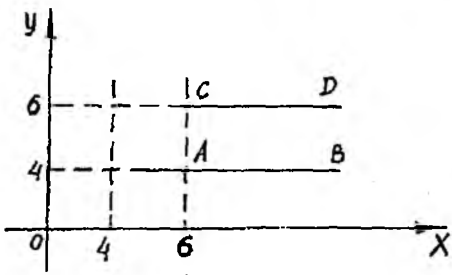
grafigini chizaylik (14-chizma).

Bunda aniqlanish sohasi $= \{a, b, c, d\}$.

Qiymatlar to'plami $= \{n, p, q\}$.



15-chizma.



16-chizma.

X va Y sonli to'plamlar elementlari orasidagi moslik koordinata tekisligidagi grafik yordamida tasvirlanadi.

Buning uchun R moslikda bo'lgan barcha sonlar jufti koordinata tekisligida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Buning natijasida hosil bo'lgan figura R moslikning grafigi bo'ladi. Yuqoridagi misolning grafigini chizamiz (15-chizma).

Moslikni bunday tasvirlash ularni berilgan moslikda cheksiz ko'p sonlar jufti bo'lganda ko'rgazmali tasvirlash imkonini beradi.

Masalan, $X = R$ va $Y = \{4 ; 6\}$ to'plamlar orasidagi "katta" mosligini qaraylik va grafigini yasaylik. Moslikni $[AB)$ va $[CD)$ nurlar ifodalaydi (16-chizma).

2-ta'rif. Agar f moslikning aniqlanish sohasi birinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik hamma yerda aniqlangan deyiladi.

3-ta'rif. Agar f moslikning qiymatlar to'plami ikkinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik syuryektiv deyiladi.

4-ta'rif. Agar f moslikda birinchi to'plamning har bir elementiga ikkinchi to'plamning bittadan ortiq bo'lmagan elementi mos kelsa, f moslik funksional deyiladi

5-ta'rif. Agar f moslikda ikkinchi to'plamning har bir elementiga birinchi to'plamning 1 tadan ortiq bo'lmagan elementi mos qo'yilgan bo'lsa, f moslik inyektiv deyiladi.

6-ta'rif. Syuryektiv va inyektiv moslik bir so'z bilan biektiv deyiladi.

7-ta'rif. Hamma yerda aniqlangan funksional moslikka akslantirish deyiladi.

8-ta'rif. X va Y to'plamlar orasidagi f moslik biektiv akslantirish bo'lsa, X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan deyiladi.

Moslik turlariga misollar keltiramiz.

Misol. Aytaylik X – kiyim iladigan (veshalka) garderobdagi paltolar to'plami, Y esa shu garderobdagi ilgaklar to'plami bo'lsin.

Agar har bir palto ilgakga ilinib turgan bo'lsa(polda yotmasdan) u holda X to'plam Y to'plamga akslantirish bo'ladi.

Agar bu akslantirishda har bir ilgakga bittadan ortiq palto ilinmagan bo'lsa (bo'sh ilgaklar ham bo'lishi mumkin) bu akslantirish inyektiv bo'ladi.

Agar hamma ilgaklar band bo'lsa(bunda ayrim ilgaklarda bittadan ortiq paltolar ilingan ham bo'lishi mumkin) bu akslantirish syuryektiv bo'ladi.

Agar har bir ilgakda bittadan palto ilingan bo'lsa(o'zaro bir qiymatli) bu akslantirish biektiv bo'ladi.

9-ta'rif. X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan bo'lsa, bu to'plamlar teng quvvatli deyiladi va qisqacha $X \sim Y$ ko'rinishda yoziladi. Masalan, agar $X\{a,b,c,d,e\}$ $Y\{x,y,z,t,p\}$ bo'lsa, u holda

$X \sim Y$ bo'ladi, chunki, X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin.

10-ta'rif. Barcha natural sonlar to'plami N ga teng quvvatli to'plamlar sanoqli to'plam deyiladi.

Agar ikkita X va Y to'plamlar orasidagi mosliklarning G_f grafigi $X \times Y$ dekart ko'paytmasi bilan ustma-ust tushsa, bu moslik to'la moslik deyiladi. Agar moslik grafigi G_f, bo'sh bo'lsa $G_f = \varnothing$) moslik bo'sh moslik deyiladi.

Ixtiyoriy ikkita X va Y to'plamlar orasida bo'sh va to'la mosliklar mavjud bo'lishi mumkin.

X va Y dekart ko'paytma to'plam ostilari ustida turli xil amallarni bajarish mumkin.

Shuningdek, moslikka teskari moslik ham mavjud. xRy moslikka teskari $yR^{-1}x$ ko'rinishda yoziladi.

O'z-ozini tekshirish uchun savollar.

1. Munosabat xossalarini grafiklarda tasvirlang.
2. Refleksiv, simmetrik, antisimmetriklik, tranzitiv munosabatlarni grafiklar yordamida tushuntiring.
3. Ekvivalentlik va tartib munosabatlarini misollar yordamida tushuntiring.

4. $G_f \subset X \times Y$ nimani bildiradi?
5. Moslikning berilish usullarini aytib bering.
6. Moslik turlariga misollar keltiring va ular grafiklarining o'ziga xos xususiyatlarini ko'rsating.
7. Uchburchakning o'rta chizig'i bilan asosi orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkinmi?
8. Barcha toq sonlar to'plami bilan barcha juft sonlar to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish mumkinmi?
9. Chekli to'plamlarning teng quvvatli bo'lish shartini ayting.
10. Cheksiz to'plamlar uchun bu shart qanday?
11. Bo'sh va to'la mosliklar qanday bo'ladi?

6-§. Kombinatorika

6.1. Yig'indi va ko'paytma qoidalari.

Elementlarning turli kombinatsiyalari, ularning soni haqidagi masalalarga kombinatorika masalalari deyiladi. Ko'pgina kombinatorika masalalarini yechish ikkita qoidaga, ya'ni yig'indi va ko'paytma qoidasiga asoslangan .

1. Kombinatorikada to'plamlar birlashmasi elementlari sonini hisoblash masalasi yig'indi qoidasiga asoslanib topiladi:

Agar $X \cap Y = \varnothing$ bo'lsa,

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y); \tag{1}$$

(1) formula bilan yechiladigan kombinatorika masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi: Agar X to'plam n ta elementga Y to'plam m elementga ega bo'lsa va X, Y to'plamlar kesishmasa, u holda $X \cup Y$ to'plam $n+m$ ta elementga ega bo'ladi.

Masalan, savatda 7 ta olma va 12 ta o'rik bor bo'lsa, 1 ta mevani 7+12=19 usul bilan tanlash mumkin.

Agar X va Y to'plamlar kesishmasi bo'sh to'plam bo'lmasa, ya'ni $X \cap Y \neq \varnothing$, u holda to'plamlar birlashmasini elementlarni sonini hisoblash qiyin bo'ladi, chunki ikkala to'plam umumiy elementlarga ega bo'ladi.

Masalan, $\{a; b; c; d; e; f\}$ va $\{e; f; k; l\}$ to'plamlar birlashmasi 6+4=10 ta elementdan emas, balki 8 ta elementdan tashkil topgan, ya'ni $X \cup Y = \{a; b; c; d; e; f; k; l\}$. Buning sababi e, f elementlari ikkala to'plamda ham bor. Demak, birlashmadagi elementlar sonini topish uchun elementlar sonidan $X \cap Y$ kesishma elementlar sonini ayirish kerak. Boshqacha aytganda agar $X \cap Y \neq \varnothing$ bo'lsa

$$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y); \tag{2}$$

(2) formula bilan yechiladigan masala: 60 talabadan 45 tasi matematika nazoratini, 47 tasi chet tili nazoratini topshirdi. 3 talaba ikkala fandan o‘ta olmadi. Nechta qarzdor talaba bor?

Yechish. A – matematika fanidan o‘ta olmagan.

B – chet tili fanidan o‘ta olmagan talabalar to‘plami bo‘lsin.

$n(A)=60-45=15$ $\qquad n(A\cap B)=3$

$n(B)=60-47=13$ $\qquad n(A\cup B)=15+13-3=25$.

Javob: 25 ta qarzdor talaba bor.

Uchta X,Y,Z to‘plamlar uchun $X\cap Y\cap Z\neq 0$ bo‘lsa,

$n(X\cup Y\cup Z)=n(X)+n(Y)+n(Z)-n(X\cap Y)-n(X\cap Z)-n(Y\cap Z)+n(X\cap Y\cap Z)$; (3)

formulaga ega bo‘lamiz.

2. Kombinatorikaning ikkinchi qoidasi, chekli to‘plamlar berilganda ularning elementlaridan tuzilgan Dekart ko‘paytmasi elementlari sonini topish imkonini beradi va bu qoida ko‘paytma qoidasi deyiladi.

$$n(A*B)=n(A)*n(B). \qquad (4)$$

Ko‘paytma qoidasiga oid kombinatorika masalasining umumiy ko‘rinishi:

Agar X to‘plamni x elementini n usul, Y to‘plamni y elementini m usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, (x,y) tartiblangan juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin” (n ta to‘plam uchun $n>2$).

$$n(A_1A_2\ldots A)^{*}=n(A_1)\cdot n(A_2)\cdot\ldots\cdot n(A_n). \qquad (5)$$

Masalan, A shahardan B shaharga 3 yo‘l bilan, B shahardan C shaharga 2 yo‘l bilan borish mumkin bo‘lsa, A shahardan C shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

Yo‘lning 1-qismini 3 xil, 2-qismini 2 xil yo‘l bilan o‘tish mumkin bo‘lsa, umumiy yo‘lni 3*2=6 usul bilan o‘tish mumkin.

Umumlashgan ko‘paytma qoidasi:

Agar x elementni m usul bilan, y elementni x ni tanlab bo‘lgandan so‘ng, n usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, (x,y) juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin.

Masalan, nechta turli raqamlar bilan yozilgan 2 xonali sonlar bor?

Yechish. 1-raqamni 9 usul bilan (1, 2, ..., 9), 2-raqamni ham 9 usul bilan (noldan boshlab o‘nliklar raqamidan boshqa raqamlar) tanlash mumkin. Demak, hammasi bo‘lib 9*9=81 ta shunday son bor ekan.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Yig‘indi qoidasini to‘plamlar orasidagi munosabat bilan bog‘liq holda tushuntiring.
2. Ko‘paytma qoidasi bilan yechiladigan kombinatorik masalalardan namuna keltiring.

3. 1 dan 9 gacha bo'lgan raqamlardan nechta 5 xonali son tuzish mumkin? Masala yechimi kombinatorikaning qaysi formulasi bilan ifodalanadi?

4. $n(A*B)=n(B*A)$ ekanini isbotlang.

6.2. Kombinatorika elementlari.

1. Agar chekli X to'plam elementlari biror usul bilan nomerlab chiqilgan bo'lsa, X to'plam tartiblangan deyiladi.

M: $X=\{x_1, x_2, ..., x_m\}$.

Bitta to'plamni turli usul bilan tartiblash mumkin.

Masalan, sinf o'quvchilarini yoshiga, bo'yiga, og'irligiga qarab yoki alfavit bo'yicha tartiblash mumkin.

m-elementli X to'plamni necha xil usul bilan tartiblash mumkin?

Tartiblash – bu elementlarni nomerlash demakdir. 1-elementni m usul bilan, 2-elementni m – 1 usul bilan tanlash mumkin va hokazo, oxirgi elementni tanlash uchun faqat bitta usul qoladi xolos.

Tartiblashlarning umumiy soni $m.(m-1).(m-2)...2.1=m!$ ga teng.

Birinchi m ta natural son ko'paytmasi matematikada "m–faktorial" deyiladi va qisqacha $m!$ ko'rinishda yoziladi. Masalan, $5! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$.

Shunday qilib, m-elementli X to'plamni turli tartiblashtirishlar soni $m!$ ga teng ekan. Bu tartiblashtirishlar bir xil elementlardan tashkil topib, ular bir-biridan tartiblashish o'rni bilan farq qiladi, elementlar esa qayta takrorlanmaydi. Shuning uchun ularni takrorlashsiz o'rin almashtirishlar deyiladi va $P_m=m!$ deb belgilanadi, (P_m – fransuzcha Permutation – so'zidan olingan bo'lib, o'rin almashtirish degan ma'noni beradi).

Masalan, a,b,c uchta harfdan $3!=6$ ta o'rin almashtirish tuzish mumkin

$$abc, acb, cab, cba, bac, bca.$$

Endi umumiyroq masalani qaraymiz.

m elementli X to'plamdan nechta tartiblangan k to'plamlar tuzish mumkin?

Bu masalaning oldingi masaladan farqi shundaki, tartiblash k elementda tugatiladi. Ularning umumiy soni.

$$m(m-1)(m-2)...(m-k+1)$$

ko'paytmaga teng.

U A_m^k bilan belgilanadi va m elementdan k tadan takrorlanmaydigan o'rinlash- tirishlar soni deb ataladi.

$$A_m^k=m*(m-1)...(m-k+1)=\frac{m!}{(m-k)!}$$

$$A_m^m = P_m = m! \quad 0! = 1 \text{ deb olinadi.}$$

Masala. Sinfdagi 26 o‘quvchidan guruh sardori va proforgini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

$$A_{26}^2 = \frac{26!}{24!} = 25 \cdot 26 = 650 \text{ (usul bilan)}$$

(A_m^k - fransuzcha arrangrment o‘rinlashtirish so‘zini bosh harfi)

Kombinatorika masalalaridan yana birini ko‘raylik.

m elementli X to‘plamning nechta k elementli to‘plam ostilari bor?

Bunday to‘plam ostilariga m elementdan k tadan takrorlanmaydigan guruhlashlar soni deyiladi va u C_m^k – ko‘rinishda belgilanadi (C_m^k – fransuzcha combinasion so‘zidan olingan bo‘lib, guruhlash ma’nosini beradi).

Buning formulasini keltirib chiqarishda C_m^k ni m va k lar orqali ifodalaymiz. Aytaylik m elementli X to‘plamning k ta elementli B to‘plam ostilari bo‘lsin.

B to‘plam ostilari k ta elementlarni saqlagani uchun uni $k!$ usulda tartiblashtirish mumkin.

Bunda X to‘plam elementlaridan tuzilgan k elementli tartiblangan to‘plamlarning soni X to‘plamdagi tartiblanmagan k-elementli to‘plam ostilar sonidan $k!$ marta ko‘p.

Masalan, 4 elementli A - $\{a, b, c, d\}$ to‘plamning nechta 3 elementli qism to‘plami bor?

$$\{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}.$$

4 ta shunday qism to‘plam bor ekan.

Bu qism to‘plamlarni tartiblaganda 6 barobar ko‘proq qism to‘plamlariga ega bo‘lamiz.

Masalan, $\{a, b, c\}$ ni tartiblasak:

$$(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a) \text{ ega bo‘lamiz.}$$

Tartibli k elementli to‘plamlarining soni A_m^k, k elementli to‘plamostilar sonini C_m^k bilan belgiladik. Bundan:

$$A_m^k = k! \cdot C_m^k; \quad A_m^k = \frac{m!}{(m-k)!} \text{ bo‘lishidan}$$

$$C_m^k = \frac{m!}{(m-k)!k!}$$

formulaga ega bo‘miz.

Misol. 20 kishilik guruhdan, 4 kishilik nomzodni necha usul bilan saylash mumkin?

$$C_{20}^4 = \frac{20!}{16! \cdot 4!} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 4845 \text{ ta usul.}$$

C_m^k ko'rinishdagi sonlarning quyidagi xossalari bor (bular $0 \le k \le m$ bo'lgan xol uchun o'rinli):

1⁰. $C_m^k = C_m^{m-k}$;

2⁰. $C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k$;

3⁰. $C_m^0 = C_m^m = 1$.

C_m^k ko'rinishdagi sonlarni Paskal uchburchagi ko'rinishida joylashtirish mumkin:

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4
\end{array}
$$

Har bir son o'zining tepasidagi 2 ta son yig'indisidan iborat.

Har bir qatordagi sonlar $(a+b)^m$ ko'phadning yoyilmasidagi binomial koeffitsientlarga teng. Ularning yig'indisi m elementli X to'plamning barcha qism to'plamlari sonini beradi.

Masalan, 1+2+1=4. Demak, 2 elementli to'plamning hammasi bo'lib 4 ta qism to'plami bor ekan. Ular 1 ta bo'sh 2 ta 1 elementli va 1 ta 2 elementli, ya'ni X to'plamning o'zidan iborat bo'lgan qism to'plamlardir.

Yana bir masalani, ya'ni chekli m elementli X to'plamning barcha qism to'plamlari sonini topish masalasini ko'raylik.

Qism to'plamlar soni $\overline{A}_2^m = 2^m$ formula bilan topiladi. Masalan, 2 elementli to'plamning to'plamostilari soni $2^2=4$ ga,3 elementli to'plamning to'plamostilari soni $2^3=8$ ga teng. Shu bilan birga bu son Paskal uchburchagining 4 qatoridagi sonlar yig'indisiga ham teng, ya'ni:

$$C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1+3+3+1=8.$$

Umuman olganda:

$$C_m^0 + C_m^1 + \ldots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. m elementli X to'plamni necha usul bilan tartiblash mumkin?
2. m elementli X to'plamning nechta k elementli tartiblangan qism to'plami bor?
3. m elementli X to'plamning barcha qism to'plamlari nechta?
4. Paskal uchburchagining xususiyatini ayting.

7-§. Kompleks sonlar to‘plami. Kompleks son

Ixtiyoriy ko‘rinishdagi algebraik tenglamalarni yechishda haqiqiy sonlar to‘plami yetarli emas. Haqiqatan ham, haqiqiy sonlar to‘plamida diskriminanti manfiy bo‘lgan kvadrat tenglama yechimga ega emas.

Masalan, $x^2+1=0$.

Bu qiyinchiliqdan qutilish maqsadida kompleks sonlar to‘plami kiritiladi. Bu to‘plamga haqiqiy sonlar to‘plami to‘plam osti sifatida kiradi. Kompleks sonlar to‘plami C bilan belgilanadi. $D<0$; $x^2+1=0$ tenglama yechimi kompleks sonlar to‘plamida bor deb ya’ni $i=\sqrt{-1}$ bilan belgilanuvchi mavhum birlik kiritamiz. Bu mavhum birlik yuqoridagi tenglamani yechimi bo‘ladi, ya’ni $i^2+1=0$; $i^2=-1$. Shunday qilib biz haqiqiy sonlar to‘plamini bi mavhum sonlar bilan to‘idiramiz. Haqiqiy a sonini mavhum bi soniga qo‘shishdan $a+bi$ kompleks sonini hosil qilamiz.

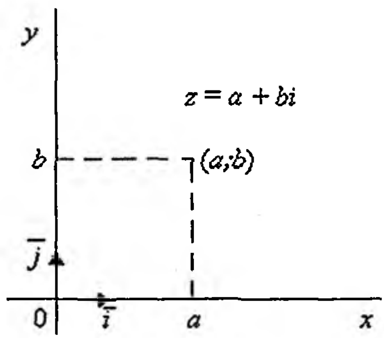
Ta’rif. $a+bi$ ifodaga kompleks son (bunda a, b haqiqiy sonlar, i — esa mavhum birlik, a — kompleks sonining haqiqiy, bi — esa mavhum qismlari) deyiladi. Agar a_1+b_1i va a_2+b_2i kompleks sonlarida $a_1=a_2$, $b_1=b_2$ bo‘lsa, ular teng deyiladi. Odatda kompleks son bitta z harf bilan belgilanadi.

$z=a+bi$ kompleks sonni haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo‘lsa, ya’ni $a=0$ va $b=0$ bo‘lsa u kompleks son nolga teng bo‘ladi.

Mavhum qismlari bilan farq qiluvchi $z_1=a+bi$ va $z_2=a-bi$ kompleks sonlarga qo‘shma deyiladi. Haqiqiy va mavhum qismlarning ishoralari bilan farq qiluvchi ikkita $z_1=a+bi$ va $z_2=a-bi$ kompleks sonlarga qarama-qarshi kompleks sonlar deyiladi.

7.1. Kompleks sonning geometrik tasviri.

$R=\{0;\bar{i};\bar{j}\}$ koordinatalar sistemasida abssissalar o‘qiga $z=a+bi$ kompleks sonning haqiqiy qismi a ni, ordinatalar o‘qiga esa mavhum qismining koeffitsienti b *ni joylashtirsak, tekislikda* $(a;b)$ nuqtaga ega bo‘lamiz. Shu nuqta $a+bi$ kompleks sonni geometrik tasviri deb qabul qilinadi. Odatda bu z nuqta deyiladi. Shunday qilib tekislikning har bir nuqtasi bitta kompleks sonni ifodalaydi. Boshqacha aytganda tekislik nuqtalari bilan kompleks sonlar to‘plami



17-chizma.

o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Ox o'qida kompleks sonni haqiqiy qismi joylashgani uchun haqiqiy o'q, ordinatalar o'qida mavhum qismga tegishli son joylashgani uchun mavhum o'q, xOy tekisligini o'zi esa kompleks tekislik deyiladi.

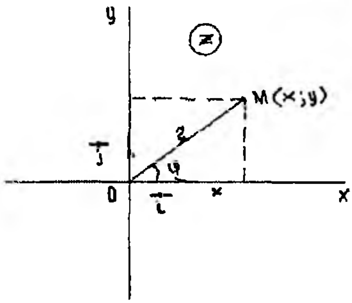
Kompleks tekislik z bilan belgilanadi (17-chizma).

7.2. Kompleks sonning trigonometrik shakli.

$z = x + yi$ ko'rinishdagi son algebraik ko'rinishdagi kompleks son deyiladi. Kompleks sonni trigonometrik shaklini hosil qilish uchun 18-chizmadan foydalanamiz.

Shakldan:

$$x = r\cos\varphi; \quad y = r\sin\varphi \tag{1}$$



18-chizma.

bunda r – kompleks z – sonni tasvirlagan vektorning uzunligini ifodalaydi va unga z sonning moduli. φ – burchakni esa z ning argumenti deyiladi.

$$(1) \Rightarrow |z| = |x + yi| = r = \sqrt{x^2 + y^2} \tag{2}$$

Argument bir qiymatli aniqlanmay, balki $2\pi k$ qo'shiluvchi qadar aniqlikda aniqlanadi, bunda k – butun son.

Argumentning barcha qiymatlari orasidan $0 \le \varphi \le 2\pi\kappa$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat bosh qiymat deyiladi va tubandagicha belgilanadi. $\varphi = \arg z$

(1) tengliklarni hisobga olib, kompleks sonni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$(1) \Rightarrow z = x + yi \Rightarrow r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \tag{3}$$

bu yerda

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \qquad \varphi = \arg z = \begin{cases} arctg\dfrac{y}{x}, \text{ agar } x > 0; y > 0 \text{ bo'lsa} \\ \pi + arctg\dfrac{y}{x}, \text{ agar } x < 0 \text{ bo'lsa} \\ 2\pi + arctg\dfrac{y}{x}, \text{ agar } x > 0, y < 0 \text{ bo'lsa} \end{cases}$$

(3) ga kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi.

1-misol. Kompleks sonning moduli 3 ga, argumenti $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$ ga teng bo'lsa, uning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

(1) formuladan $x = r\cos\varphi = 3\cos\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$.

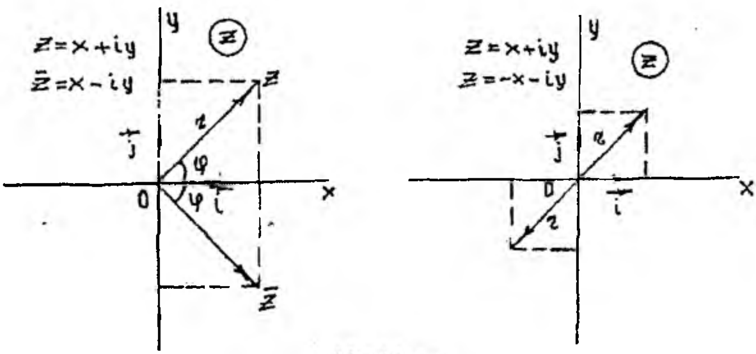
$$y = r\sin\varphi = 3\sin\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}.$$

2-misol. $z = i$ kompleks sonning argumentini toping.

$$x = 0,\ y = 1,\ r = 1;\quad \varphi = \frac{\pi}{2}.$$

3-misol. Qo‘shma va qarama-qarshi sonlarni chizmada tasvirlang va izohlang.

Shakldan ko‘rinadiki, qo‘shma kompleks sonlar bir xil modulga va absolut qiymatlari bo‘yicha teng argumentlarga ega bo‘lib, haqiqiy o‘qqa simmetrik bo‘lgan nuqtalar bilan tasvirlanadi, ya’ni qarama-qarshi kompleks sonlar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar bilan tasvirlanadi (19-chizma).



19-chizma.

4-misol. $z = 2 - 2i$ kompleks sonini trigonometrik shaklda ifodalang.

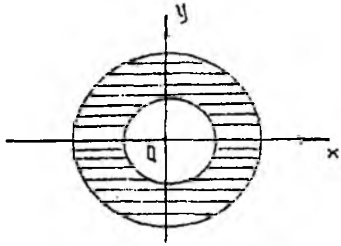
$$x = 2; y = -2; r = 2\sqrt{2}.$$

$$tg\varphi = -1; \varphi = 2\pi - arctg(1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}.$$

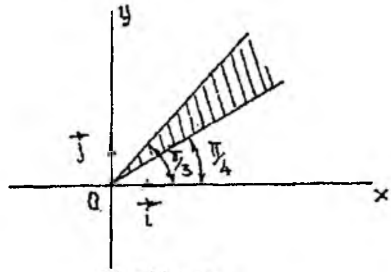
Shunday qilib $z = 2\sqrt{2}(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4})$. Endi kompleks sonlar to‘plamining ba’zi bir to‘plam ostilarini ifodalovchi munosabatlarni geometrik nuqtayi nazardan ko‘rib o‘taylik.

a) $|z| = 3$ bu munosabat kompleks tekisligida markazi koordinata boshida radiusi 3 ga teng bo‘lgan aylananing nuqtalarini ifodalaydi.

b) $3 \le |z| \le 5$ munosabat esa markazi koordinatalar boshida joylashib ichki radiusi 3 va 5 ga teng bo‘lgan kontsentrik aylanalar bilan chegaralangan nuqtalar to‘plamini ifodalaydi (20-chizma).



20-chizma.



21-chizma.

d) $arctgz = \frac{\pi}{4}$ munosabatga kompleks tekisligida koordinata boshidan 45° burchak ostida chiquvchi nurdagi nuqtalar to'plami mos keladi.

e) $\frac{\pi}{4} \le \arg z \le \frac{\pi}{3}$ munosabatga esa kompleks tekisligidagi koordinata boshidan 45° va 60° burchak ostida chiquvchi nurlar bilan chegaralangan nuqtalar to'plami hamda nurlar ustida yetuvchi nuqtalar to'plami kiradi (21-chizma).

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Kompleks sonlar bilan haqiqiy sonlar to'plamining farqi nimada?
2. Kompleks sonni moduli va argumenti deganda nimani tushunasiz.

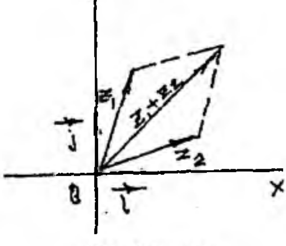
8-§. Kompleks sonlar ustida amallar

8.1. Qo'shish.

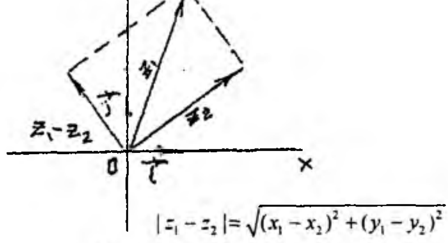
$z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning yig'indisi deb, $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$ tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi. Geometrik nuqtayi nazardan kompleks sonlarni qo'shish vektorlarni qo'shish qoidasiga asoslanadi (22-chizma).

Misol. *$z_1 = 3 + 4i$ va $z_2 = 4 - 3i$ kompleks sonlarni yig'indisini toping.*

$$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (4 - 3i) = (3 + 4) + i(4 - 3) = 7 + i.$$



22-chizma.



23-chizma.

8.2. Ayirish.

$z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarni ayirmasi deb, shunday kompleks songa aytiladiki, unga ayriluvchi kompleks sonni qo'shganda kamayuvchi kompleks son hosil bo'ladi.

$$z_1-z_2=(a_1+b_1i)+(a_2+b_2i)=(a_1-a_2)+i(b_1-b_2).$$

Ikkita kompleks son ayirmasini moduli shu sonlarni kompleks sonlar tekisligida tasvirlovchi nuqtalar orasidagi masofaga teng (23-chizma).

Misol. $z_1=6+5i$ va $z_2=4-2i$ kompleks sonlarni ayirmasini toping.

$$z_1-z_2=(6+5i)-(4-2i)=(6-4)+i(5+2)=2+7i.$$

8.3. Kompleks sonlarni ko'paytirish.

$z_1=a_1+b_1i$ *va* $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning ko'paytmasi deb, $i^2=-1$ ekanligini hisobga olgan holda kompleks sonlarni ko'paytmasi ikkita ko'phad ko'paytmasi shaklida ko'paytirishdan hosil bo'lgan kompleks songa aytiladi.

$$z_1\cdot z_2=(a_1\cdot a_2-b_1\cdot b_2)+(a_1b_2-a_2b_1)i.$$

z_1 va z_2 kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa ya'ni $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi)$ va $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ u holda ularning ko'paytmasi $z_1\cdot z_1=r_1\cdot r_2(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2))$ bo'ladi.

Misol. $z_1=3(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ va $z_2=\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$ kompleks sonlarni ko'paytmasini toping.

Yechish.

$$z_1\cdot z_2=3\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4}\right)\right]=3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)=3\sqrt{2}i.$$

8.4. Kompleks sonlarni bo'lish.

Kompleks sonlarni bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi. Boshqacha aytganda $z\cdot z_2=z_1$ bo'lsa, z soni $z_1=x_1+iy_1$ ning $z_2=x_2+iy_2$ kompleks songa bo'linmasi deyiladi.

$z=\frac{z_1}{z_2}$ bo'linmani topish uchun kasrni surat va maxrajini z_2 ni qo'shmasi $\bar{z}_2$ ga ko'paytiramiz.

$$z=\frac{z_1\cdot\bar{z}_2}{z_2\cdot\bar{z}_2} \quad \text{bundan} \quad z=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+y_2^2}+i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2};$$

Agar kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni $z_1=r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_1)$ va $z_2=r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)$ u holda

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1(\cos\varphi_1+i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2+i\sin\varphi_2)}=\frac{r_1}{r_2}[(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)].$$

Shunday qilib, kompleks sonlarni bo'lishda bo'linuvchining moduli bo'luvchining moduliga bo'linadi, argumentlari esa ayriladi.

Misol. $z_1=\sqrt{3}+i$ ni $z_2=-3+3i$ ga

a) algebraik, b) trigonometrik ko'rinishda bo'ling.

Yechish.

a) $$\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}+i}{-3+3i}=\frac{(\sqrt{3}+i)(-3-3i)}{(\sqrt{3}+i)(-3-3i)}=\frac{3[(1-\sqrt{3})-(\sqrt{3}+1)i]}{18}=$$

$$=\frac{(1-\sqrt{3})-(\sqrt{3}+1)i}{6}=-\frac{1-\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}+1}{6}i;$$

b) $z_1=\sqrt{3}+i=2(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6})$; $\quad z_2=-3+3i=3\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}}{3\sqrt{2}(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4})}=\frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{4})]=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(-\frac{13\pi}{2})+i\sin(-\frac{13\pi}{12})]=\frac{2}{3\sqrt{2}}(\cos\frac{13\pi}{12}-i\sin\frac{13\pi}{12})=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}[\cos(\pi+\frac{\pi}{12})-i\sin(\pi+\frac{\pi}{12})]=\frac{2}{3\sqrt{2}}(-\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12})=$$

$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot[-\cos(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})+i\sin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})]=$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot[(-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4})+i(\sin\frac{\pi}{3}\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{3}\cdot\sin\frac{\pi}{4})]=$$

$$\frac{2}{3\sqrt{2}}[(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})+i(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})]=-\frac{1-\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}+1}{6}i.$$

8.5. Darajaga ko'tarish.

Kompleks sonlarni ko'paytirish qoidasidan darajaga ko'tarish qoidasi kelib chiqadi.

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ kompleks son uchun $n-$ natural son bo'lganda $z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$. Bu formulani Muavr formulasi deyiladi. Muavr formulasini tadbiq qilishda $i^{4k}=1$; $i^{4k+1}=i$; $i^{4k+2}=-1$; $i^{4k+3}=-i$ bo'lishini e'tiborga olishimiz kerak.

Misol. $(-1+i)^4$ *ni hisoblang.*

$$z=-1+i=\sqrt{2}(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4})$$

$$z^4=(-1+i)^4=\left(\sqrt{2}\right)^4\cdot\left(cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)^4=$$

$$=4\left(\cos 4\cdot\frac{3\pi}{4}+i\sin 4\cdot\frac{3\pi}{4}\right)=4(\cos 3\pi+i\sin 3\pi)=4(-1+oi)=-4+oi.$$

8.6. Kompleks sondan ildiz chiqarish.

Ildiz chiqarish amali darajaga ko'tarish amaliga teskari amal. Kompleks sonning n – darajali ildiz $\sqrt[n]{z}$ deb, shunday z^* – kompleks songa aytiladiki, z^* ning n – darajasi z soniga tengdir, ya'ni $(z^*)^n=z$

Aytaylik $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ va $z^*=\rho(\cos\theta+i\sin\theta)$ bo'lsin.

Muavr formulasiga asosan $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\rho^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$, bundan $r=\rho^n, n\theta=\varphi+2\pi\kappa$; ρ va θ ni topamiz.

Bu yerda κ – istalgan butun son, $\sqrt[n]{r}$ – arifmetik ildiz.

Demak, $\sqrt[n]{r(\cos\varphi+i\sin\varphi)}=\sqrt[n]{r}(\cos\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n}+i\sin\frac{\varphi+2\pi\kappa}{n})$; bu yerda $\kappa=0,1...n-1$

Misol. $\sqrt[3]{1}$ ning ildizlarini toping.

Yechish. sonni trigonometrik ko'rinishda yozamiz. $z=1$ bo'lib, $z=1=\cos 0+i\sin 0$ bo'ladi.

$$\sqrt[3]{1}=\sqrt[3]{\cos 0+i\sin 0}=\cos\frac{2\pi\kappa}{3}+i\sin\frac{2\pi\kappa}{3}.$$

$$\kappa=0;\ z_1=\cos 0+i\sin 0=1;$$

$$\kappa=1;\ z_2=\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\kappa=2;\ z_3=\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Kompleks sonlar ustida amallar bajarganda qanday sonlar hosil bo'ladi, misollar yordamida tushuntiring?
2. Kompleks sonlarni ko'paytirish va bo'lishni misollar orqali tushuntiring.
3. Kompleks sonni darajaga ko'tarish formulasini keltirib chiqaring.

II BOB
MATRITSALAR ALGEBRASI

1-§. Matritsalarni ko‘paytirish

Matritsalarning ko‘paytmasi haqida birinchi ko‘paytuvchining satrlari sonni ikkinchi ko‘paytuvchining ustunlari soniga teng bo‘lgan holdagina so‘z yuritish mumkin, ya’ni faqat $(m\times n)$ o’lchamli matritsani $(n\times k)$ o‘lchamli matritsaga ko‘paytirish mumkin. Ko‘paytmada $(m\times k)$ o‘lchamli matritsa hosil bo‘ladi. Buni quyidagi sxema bilan ifodalash mumkin:

$$(m\times n)(n\times k)=(m\times k).$$

Xususiy holda, kvadrat matritsalarni ko‘paytirish uchun ularning tartiblari bir xil bo‘lishi talab qilinadi. Ko‘paytma ham xuddi shu tartibdagi kvadrat matritsani ifodalaydi.

Aytaylik, bizga A va B matritsalar berilgan bo‘lsin. A va B matritsalarni ko‘paytirish qoidasi quyidagicha: $A\cdot B=C$ ko‘paytmaning har bir c_{ij} elementini hosil qilish uchun A matritsaning i-satridagi elementlarini B ning j-ustunidagi mos elementlariga ko‘paytirib, natijalar qo‘shiladi. Masalan, $(m\times n)$ o‘lchamli

$$A=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\ldots a_{1j}\ldots & .a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}\ldots a_{2j}\ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2}\ldots a_{ij}\ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2}\ldots a_{mj}\ldots & a_{mn} \end{vmatrix}$$

va $(n\times k)$ o‘lchamli

$$B=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\ldots b_{1j}\ldots & .b_{1k} \\ b_{21} & b_{22}\ldots b_{2j}\ldots & b_{2k} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ b_{s1} & b_{s2}\ldots b_{sj}\ldots & b_{sk} \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ b_{n1} & b_{n2}\ldots a_{nj}\ldots & b_{nk} \end{vmatrix}$$

matritsalarni ko'paytirish natijasida $(m\times k)$ o'lchamli

$$C=\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12}\dots c_{1j}\dots c_{1k} \\ c_{21} & c_{22}\dots c_{2j}\dots c_{2k} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ c_{i1} & c_{i2}\dots c_{ij}\dots c_{ik} \\ \dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\ c_{m1} & c_{m2}\dots c_{mj}\dots c_{mk} \end{vmatrix}$$

matritsa hosil bo'ladi, bunda

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\dots+a_{ij}b_{sj}+\dots+a_{in}b_{nj}=\sum_{s=1}^{n}a_{is}b_{sj};\begin{pmatrix} i=\overline{1,m} \\ j=\overline{1,k}\end{pmatrix} \qquad (*)$$

Matritsalarni ko'paytirish kommutativlik xossasiga ega emas, ya'ni $A\cdot B\neq B\cdot A$. Uchta matritsani ko'paytirish

$[(m\times n)(n\times k)](k\times p)=(m\times k)(k\times p)=(m\times p)$ sxema bo'yicha amalga oshiriladi. Matritsalarni ko'paytirish assosiativlik xossalariga ega, ya'ni

$$(A\cdot B)\cdot C=A\cdot(B\cdot C)$$

tenglik o'rinlidir.

Misol.

$$A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ va } B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

matritsalarning ko'paytmasini toping.

Yechish. (*) formulaga ko'ra:

$$A\cdot B=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 3\cdot2+3\cdot1+(-1)\cdot3 & 3\cdot1+3\cdot1+(-1)\cdot(-1) & 3\cdot4+3\cdot(-2)+(-1)\cdot3 \\ 1\cdot2+(0)\cdot1+3\cdot3 & 1\cdot1+(0)\cdot1+3\cdot(-1) & 1\cdot4+(0)\cdot(-2)+3\cdot3 \\ 3\cdot2+1\cdot1+1\cdot3 & 3\cdot1+1\cdot1+1\cdot(-1) & 3\cdot4+1\cdot(-2)+1\cdot3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & 7 & 3 \\ 11 & -2 & 18 \\ 10 & 3 & 13 \end{pmatrix}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Matritsa nima?
2. Matritsalarni ko'paytirish qoidasini misollar yordamida tushuntiring.

2-§. Teskari matritsa

Bosh diagonal elementlari birlardan va qolgan hamma elementlari nollardan iborat.

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ko'rinishdagi $n-$tartibli kvadrat matritsaga birlik matritsa deyiladi. Oldingi mavzuga asosan, E matritsa $n-$tartibli istalgan A matritsa uchun

$$A\cdot E=E\cdot A=A$$

shartni qanoatlantiruvchi yagona matritsa ekani kelib chiqadi

1-ta'rif. A matritsa uchun $A\cdot B=E$ tenglikni qanoatlantiruvchi B matritsa A ga teskari matritsa deyiladi va u $B=A^{-1}$ ko'rinishda belgilanadi.

2-ta'rif. Barcha satr vektorlari chiziqli erkli matritsa xos bo'lmagan (aynimagan) matritsa, barcha satr vektorlari chiziqli bog'langan matritsa xos (aynigan) matritsa deb ataladi.

Xos bo'lmagan matritsalarga doir quyidagi ikkita teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Xos bo'lmagan matritsani elementar almashtirishlar yordamida birlik matritsaga keltirish mumkin.

2-teorema. Xos bo'lmagan matritsaga teskari matritsa mavjud va yagonadir (teoremaning isbotlari A.G.Kuroshning «Oliy algebra kursi» kitobida keltirilgan).

Teskari matritsani topish.

Aytaylik, $n-$tartibli kvadrat, xos bo'lmagan A matritsa berilgan bo'lsin:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

A matritsaga teskari B matritsani topish uchun, uni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{array}\right) \qquad (1)$$

Chap tomonida berilgan A matritsa, o'ng tomonda E birlik matritsa yozilgan. Bu matritsalarning ikkalasiga bir vaqtda A matritsani birlik E matritsaga keltiradigan satrlar bo'yicha elementar almashtirishlar qo'llaymiz.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right) \tag{2}$$

(2) ning o'ng tomonidagi matritsa xuddi A ga teng teskari B matritsani ifodalaydi, ya'ni

$$A \cdot B = E$$

bo'ladi. A matritsa o'z navbatida B ga teskari bo'lganligi sababli $B \cdot A = E$ ham bajariladi.

Misol. Berilgan

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 7 \\ 2 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

matritsaga teskari bo'lgan A^{-1} matritsani toping.

Yechish. Buning uchun quyidagi matritsani tuzamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -3 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Birinchi ustunni 1 ga, so'ngra -2 ga ko'paytirib, mos ravishda ikkinchi va uchinchi ustunga qo'shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ikkinchi ustunni 2 ga va 1 ga ko'paytirib, mos ravishda birinchi va uchinchi ustunga qo'shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Uchinchi ustunni 3 ga ko'paytirib, birinchi ustunga qo'shamiz va ikkinchi ustunni 1 ga ko'paytiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Ikkinchi va uchinchi ustunlarni almashtiramiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 6 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Natijada A ga teskari A^{-1} matritsaga ega bo'lamiz:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix} 6 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Teskari matritsaga ta'rif bering.
2. Xos va xosmas matritsalarni tushuntiring.
3. Birlik matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Misol yordamida berilgan matritsaga teskari matritsa tuzing.

3-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar ko'rinishida ifodalash

Bizga n noma'lumli n chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}.$$

Bu sistema koeffitsientlaridan tuzilgan matritsa quyidagicha bo'ladi:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}$$

Biz faqat A xos bo'lmagan matritsa bo'lgan holnigina qaraymiz. (3) sistemaning chap tomonida A matritsani

$$X=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}$$

matritsaga ko'paytirishdan kelib chiqadigan n satrli va bir ustunli matritsaning elementlari, sistemani o'ng tomonida esa

$$B=\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

matritsaning elementlari turibdi. Shu sababli ikki matritsaning tenglik ta'rifiga asosan, (3) ni tubandagicha

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & . \; . \; . & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & . \; . \; . & a_{2n} \\ . & . & . \; . \; . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & . \; . \; . & a_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

yoki qisqacha

$$A\cdot X=B \tag{4}$$

ko'rinishda yozish mumkin. Bu tenglama matritsaviy tenglama (chiziqli tenglamalar sistemasini matritsali ko'rinishi) deyiladi. A xos bo'lmagan matritsa bo'lgani sababli, unga teskari bo'lgan A^{-1} matritsa mavjud, shu sababli (4) ni chap tomondan A^{-1} ko'paytiramiz:

$$A^{-1}\cdot(A\cdot X)=A^{-1}\cdot B, \quad \text{lekin} \quad A^{-1}\cdot(A\cdot X)=(A^{-1}\cdot A)\cdot X=EX=X,$$

demak,

$$X=A^{-1}\cdot B$$

yoki

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & . \; . \; . & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & . \; . \; . & a'_{2n} \\ . & . & . \; . \; . & . \\ a'_{n1} & a'_{n2} & . \; . \; . & a'_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} a'_{11}b_1+a'_{12}b_2+\ldots+a'_{1n}b_n \\ a'_{21}b_1+a'_{22}b_2+\ldots+a'_{2n}b_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{n1}b_1+a'_{n2}b_2+\ldots+a'_{nn}b_n \end{pmatrix}$$

bundan esa, ikki matritsaning tenglik shartiga asosan (4) yoki (3) ning yechimiga ega bo'lamiz:

$$x_i=a'_{i1}b_1+a'_{i2}b_2+\ldots+a'_{in}b_n, \quad \left(i=\overline{1,n}\right). \tag{5}$$

Misol.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 3 \\ 7x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 1 \\ 9x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini matritsaviy ko‘rinishda yozing va uning yechimini toping.

Yechish. Berilgan sistemaning matritsasini yozamiz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 7 & 2 & 5 \\ 9 & 3 & 7 \end{pmatrix} \text{ va } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \; B = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

deb belgilasak, u holda sistemaning «matritsaviy» ko‘rinishi

$$A \cdot X = B \qquad (*)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. A ga teskari A^{-1} matritsa

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

bo‘lgani sababli (*) ni chap tomondan A^{-1} ga ko‘paytiramiz: u vaqtda

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} B$$

yoki

$X = A^{-1} \cdot B$ ga egamiz, bundan $A^{-1} \cdot B$ ni topamiz:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{13}{3} & \frac{11}{3} \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3- \\ 1- \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{58}{3} \\ 7 \end{pmatrix}$$

Demak, tenglamalar sistemasini yechimi:

$$x_1 = \frac{2}{3}; \; x_2 = -\frac{58}{3}; \; x_3 = 7$$

O‘z-o‘zini tekshirish ucnun savollar.

1. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsalar ko‘rinishida ifodalang.
2. Matritsalar ko‘rinishida berilgan chiziqli tenglamalar sistemasini misollar yordamida yechimlarini topishni ko‘rsating.

III BOB
CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

1-§. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy ko'rinishi. Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi.

Quyidagi ko'rinishdagi sistemaga n o'zgaruvchili n ta chiziqli tenglama sistemasi deyiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = c_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = c_n \end{cases} \qquad (1)$$

$n=2,3$ bo'lgan hollar uchun biz bu sistemani yechimlarini topishni qaraymiz. $n=2$ bo'lganda (1) sistemadan quyidagi ko'rinishdagi sistemaga ega bo'lamiz

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = c_2 \end{cases} \qquad (2)$$

(2) ga birinchi darajali (yoki chiziqli) ikki noma'lumli ikki tenglama sistemasi deyiladi, bunda x_1, x_2-noma'lumlar. $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, c_1, c_2$ - berilgan sonlar.

Agar (2) sistemadagi c_1, c_2 ozod hadlarning ikkalasi nolga teng bo'lsa, sistema bir jinsli sistema deyiladi, c_1 va c_2 ozod hadlarning hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli bo'lsa, sistema bir jinslimas deyiladi. (2) tenglamalar sistemasining yechimi deb sonlarning shunday (x_0, y_0) juftiga aytiladiki, bu juft sistemaning har bir tenglamasini sonli tenglikka aylantiradi.

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 = c_1 \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 = c_2 \end{cases}$$

tenglamalarning kamida bitta yechimga ega bo'lgan sistemasi birgalikdagi sistema, bironta ham yechimga ega bo'lmagani birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

(2) tenglamalar sistemasini yechish bu:

1) sistemaning birgalikdagi sistema ekanini aniqlash;

2) agar u birgalikda bo‘lsa, u holda uning barcha yechimlarini topish demakdir.

(2) ko‘rinishdagi sistemani yechishni o‘rta maktab kursidan bilamiz. Buni yechishni ikki usuli bor: o‘rniga qo‘yish va noma’lumlarni yo‘qotish.

1. Noma’lumlarni yo‘qotish usuli.

(2) ko‘rinishdagi sistemani yechishni qaraymiz. Soddalik uchun noma’lumlar oldidagi koeffitsientlarni bitta indeksli qilib olib, tubandagi sistema yechimini qaraymiz:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{3}$$

bunda noma’lumlar oldidagi koeffitsientlarlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsin. (3) sistemani yechishda noma’lumlarni yo‘qotish usulini qo‘llaymiz. Buning uchun (3) sistema tenglamalaridan birinchisining har ikkala qismini b_2 ga, ikkinchisini esa $-b_1$ ga ko‘paytirib, ularni hadma had qo‘shib quyidagini topamiz:

$$(a_1b_2 - a_2b_1)x = c_1b_2 - c_2b_1 \tag{4}$$

shundan keyin birinchi tenglamaning har ikkala qismini $-a_2$ ga, ikkinchi tenglamaning har ikkala qismini a_1 ga ko‘paytirib hadma - had qo‘shib

$$(a_1b_2 - a_2b_1)y = c_2a_1 - c_1a_2 \tag{5}$$

ni topamiz.

Agar $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ bo‘lsa, (4) sistemaning yechimlari mavjud bo‘lib, bu yechim (4), (5) lardan topiladi.

$$x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}; \qquad y = \frac{c_2a_1 - c_1a_2}{a_1b_2 - a_2b_1}. \tag{6}$$

2. O‘rniga qo‘yish usuli.

(3) sistemaning istalgan bir tenglamasidan bitta noma’lumni topib, ikkinchi tenglamaga qo‘yamiz, natijada bir noma’lumli tenglamaga ega bo‘lamiz.

(3) sistema birinchi tenglamasidan y *ni topamiz*

$$y = \frac{c_1 - a_1x}{b_1} \tag{7}$$

(7) ni (3) sistemani ikkinchi tenglamasiga qo‘yamiz, ya’ni

$$a_2x + b_2\frac{c_1 - a_1x}{b_1} = c_2 \tag{8}$$

$$(8) \Rightarrow x = \frac{c_1b_2 - c_2b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \tag{9}$$

$$(7),(9) \Rightarrow \quad y = \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1 b_2 - a_2 b_1} \qquad (10)$$

Uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini umumiy ko'rinishi esa tubandagicha:

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases} \qquad (11)$$

Bu sistemani yechimlari ham ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini yechimlari topilganday topiladi, ya'ni yechimni topishda o'rniga qo'yish, noma'lumlarni yo'qotish usullaridan foydalaniladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki noma'lumli tenglamalar sistemasini yechimga ega bo'lish, bo'lmasligini misollar yordamida tushuntiring.
2. Uch noma'lumli tenglamalar sistemasini yechish usullarini aytib, misollar orqali tushuntiring.

2-§. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

Ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini yechish orqali ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar tushunchasiga kelamiz.

2.1. Ikkinchi tartibli determinantlar.

Ikkinchi tartibli determinant tushunchasiga ikki noma'lumli ikkita chiziqli tenglama sistemasini yechish orqali kelinadi. Aytaylik ushbu

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1 \\ a_2 x + b_2 y = c_2 \end{cases} \qquad (1)$$

chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin. (1) sistemaning x va y o'zgaruvchilari oldidagi koeffitsientlaridan ushbu

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \qquad (2)$$

jadvalni tuzamiz. Odatda bunday jadval matritsa deb ataladi.

Bunday ko'rinishdagi ifodalar matematikaning turli sohalarida ko'p uchrab turadi. Shuning uchun ular uchun mahsus belgilash va nomlar kiritish maqsadga muvofiqdir.

$\Delta = a_1 b_2 - a_2 b_1$ son (2) matritsaning determinanti deyiladi va u quyidagicha belgilanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \quad \text{yoki} \quad \Delta = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \tag{3}$$

a_1, b_1, a_2, b_2 sonlar (3) determinantning elementlari deyiladi. Bu determinantning ikkita satri va ikkita ustuni bor: a_1, a_2 sonlar birinchi ustunni, b_1, b_2 ikkinchi ustunni tashkil qiladi.

Xuddi shunday birinchi satr elementlari: a_1, b_1 ikkinchi satr elementlari a_2, b_2 dan iboratdir.

a_1 va b_2 elementlar bosh diagonal elementlari, a_2 va b_1 elementlar yordamchi diagonal elementlari deyiladi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli determinantni hisoblash uchun bosh diagonalda turgan elementlar ko'paytmasidan yordamchi diagonalda turgan elementlar ko'paytmasini ayirish kerak ya'ni:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1.$$

Misol. Quyidagi determinantni hisoblang.

1) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix}$.

Yechish. Ikkinchi tartibli determinantni hisoblashning yuqoridagi qoidasiga ko'ra topamiz.

1) $\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5\cdot(-1) - 2\cdot(-4) = -5 + 8 = 3.$

2) $\begin{vmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{vmatrix} = \cos\alpha \cdot cos\alpha - \sin\alpha(-\sin\alpha) = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1.$

2.2. Uchinchi tartibli determinantlar.

Ushbu $\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2 \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3 \end{cases}$

tenglamalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Xuddi ikkinchi tartibli determinantga o‘xshash, bu yerda uchinchi tartibli determinant tushunchasini kiritamiz. Bu sistema koeffitsientlaridan tuzilgan uchinchi tartibli kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} \tag{4}$$

(4) matritsaning uchinchi tartibli determinanti deb

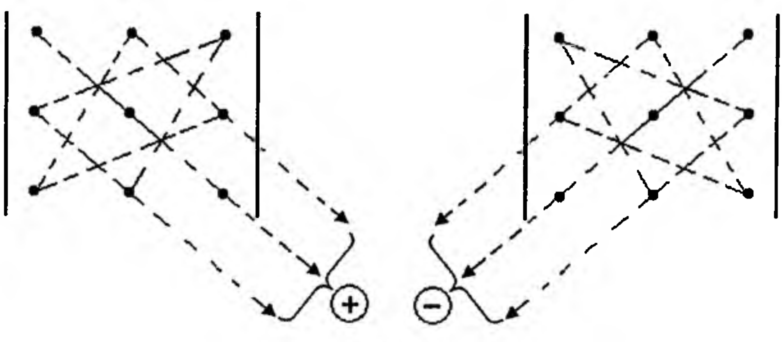
$$\Delta = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \tag{5}$$

songa aytiladi. Ikkinchi tartibli determinant bo‘lgan holdagi simvolikadan foydalanib bu determinant tubandagicha belgilanadi:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

(5) dagi har qaysi ko‘paytma determinantning hadlari deyiladi. Hadlar oldidagi ishoralarni esda saqlash qiyin emas. Agar biz (5) ga kiruvchi musbat hadlardagi uchta element ko‘paytmasini tashkil qiluvchi elementlarni punktir chiziqlar bilan tutashtirsak, u holda esda saqlanib qoluvchi ushbu sxema hosil bo‘ladi.

Xuddi shunday manfiy ishoralar bilan (5) ga kiruvchi ko‘paytmalar uchun quyidagi sxemaga ega bo‘lamiz (24-chizma).



24-chizma.

Qulaylik uchun determinantning elementlarini ikkita indeksli bitta harf bilan belgilash qabul qilingan bo‘lib, bu indekslar element turgan satr va ustunlarning nomerlarini: birinchi indeks har doim satr nomerini, ikkinchi indeks esa ustun nomerini ko'rsatadi.

Masalan, a_{32} hadning indeksi uchinchi satrning ikkinchi ustuni elementi ekanini bildiradi. Bu belgilashlardan foydalanib, uchinchi tartibli determinantni quyidagicha yozish mumkin:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & c_{13} \\ a_{21} & b_{22} & c_{23} \\ a_{31} & b_{32} & c_{33} \end{vmatrix}.$$

Misol. Quyidagi uchinchi tartibli determinantlarni hisoblang.

$$1)\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix}; \qquad 2)\ \begin{vmatrix} b & 1 & b \\ -1 & b & 1 \\ b & -1 & b \end{vmatrix}.$$

Yuqoridagi sxema va (5) formulaga ko'ra topamiz.

$$1)\ \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot 0\cdot 5 + 4\cdot 2\cdot(-1) + 0\cdot 2\cdot 1 - 4\cdot 0\cdot 1 - 5\cdot 2\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 5 = 2;$$

$$2)\ \begin{vmatrix} b & 1 & b \\ -1 & b & 1 \\ b & -1 & b \end{vmatrix} = b\cdot b\cdot b + 1\cdot 1\cdot b + b\cdot(-1)\cdot(-1) - b\cdot b\cdot b + 1\cdot 1\cdot b + 1\cdot 1\cdot b = 4b.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Determinant nima?
2. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulalarini yozib, hisoblash usullarini ko'rsating (misollar yordamida).

3-§. Determinantning xossalari

1. Determinantning hamma ustunlarini uning mos satrlari bilan (yoki aksincha) o'rnini almashtirishdan determinant o'zgarmaydi, ya'ni

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Isbot. Δ – berilgan determinant, Δ^* esa Δ dan uning satrlarini mos ustunlar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinant bo'lsin. Δ ni birinchi satr elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Endi Δ^* ni birinchi ustun elementlari bo'yicha yoyib chiqamiz:

$$\Delta^*=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Demak, $\Delta=\Delta^*$.

(Determinantni satr va ustun elementlari bo'yicha yoyib hisoblashni mustaqil o'rganish talabalarga topshiriladi.)

2. Determinantning istalgan ikkita satrining (yoki ikki ustunining) o'rinlari almashtirilsa, determinantning faqat ishorasi o'zgaradi. Masalan, agar birinchi va uchinchi satrlarning o'rinlarini almashtirsak:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{vmatrix}.$$

3. Ikkita satri yoki ikkita ustuni bir xil bo'lgan determinantning qiymati nolga teng.

4. Biror satr (yoki ustun) elementlarining umumiy ko'paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Isbot. Aytaylik, determinantning ikkinchi satr elementlari umumiy ko'paytuvchiga ega bo'lsin:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bu determinantni ikkinchi satr elementlari bo'yicha yoyamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=ka_{21}A_{21}+ka_{22}A_{22}+ka_{23}A_{23}=k\Delta.$$

5. Agar determinant biror i-satr (ustuni)ning har bir elementi ikkita qo'shiluvchining yig'indisidan iborat, ya'ni $a_{ik} = a_k + m_k$ $(k = \overline{1, n})$ bo'lsa, u holda berilgan determinant shunday ikkita determinantning yig'indisiga teng bo'ladiki, bu determinantlarning i-satridan boshqa satrlari dastlabki determinantnikiday bo'ladi, ularning biridagi i-satr elementlarning, ikkinchisi esa m_k elementlardan iborat bo'ladi.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_1 + m_1 & a_2 + m_2 & a_3 + m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} m_1 & m_2 & m_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

6. Determinantning biror ustun (satr) elementlariga boshqa ustunning (satrning) bir xil songa ko'payttirilgan mos elementlarini qo'shishdan determinantning qiymati o'zgarmaydi.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} + ka_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} + ka_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+k\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} & a_{13} \\ a_{23} & a_{22} & a_{23} \\ a_{33} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Bayon qilingan xossalar yuqori tartibli determinantlar uchun ham to'gri.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Determinantlarni xossalarini aytib bering.
2. Determinant xossalaridan barchasini misollar yordamida to'g'riligini tekshiring.

4-§. Determinantlarni ikki va uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishga tatbiqi. Kramer formulasi

4.1. Ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasi.

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \tag{1}$$

tenglamalar sistemasini analitik usulda tekshirishga o‘tamiz (1) sistema yechimga ega deb faraz qilamiz. Oldingi 2-paragrafda topilganlardan foydalanib, quyidagilarni yozish mumkin:

$$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix};\ c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix};\ a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}.$$

Ushbu belgilashlarini kiritamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix};\ \Delta_x=\begin{vmatrix}c_1 & b_1\\ c_2 & b_2\end{vmatrix};\ \Delta_y=\begin{vmatrix}a_1 & c_1\\ a_2 & c_2\end{vmatrix}. \qquad (*)$$

Yuqoridagi belgilardan foydalanib (1)-sistemani yechimini topamiz:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta};\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}. \qquad (2)$$

bu yerda $\Delta-(1)$ sistemaning determinanti deyiladi, Δ_x determinant esa Δ ning birinchi ustun elementlarini ozod hadlar ustuni bilan almashtirish orqali Δ_y esa Δ ning ikkinchi ustun elementlarini ozod hadlar ustuni bilan almashtirish orqali hosil qilingan.

1. Avval $\Delta\neq 0$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bu holda (1) sistema har doim yechimga ega va bu yagona yechim bo‘lib, u (2) formulalar bilan beriladi.

2. $\Delta=0$ bo‘lsin, u holda yordamchi determinantlardan hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli bo‘lsa, (1) sistema bitta ham yechimga ega emas. Bunda (1) ning tenglamalaridan kamida biri o‘rinli bo‘lmaydi.

Shunday qilib, $\Delta=0$ bo‘lganda va Δ_x yoki Δ_y yordamchi determinantlardan kamida bittasi noldan farqli bo‘lsa, (1) sistema yechimga ega emas.

Odatda bunday holda berilgan sistemaning tenglamalari birgalikda emas deyiladi.

3. Nihoyat, $\Delta=0$ va $\Delta_x=\Delta_y=0$ bo‘lsin. Bu holda birinchi tenglamaning koeffitsientlari ikkinchi tenglamaning koeffitsientlariga proportsional bo‘ladi va (1) sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi. Yuqorida aytilganlarni yakunlab, quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin: (1) sistema yechimga ega bo‘lishi uchun uning determinanti noldan farqli bo‘lishi zarur:

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & b_1\\ a_2 & b_2\end{vmatrix}\neq 0 \qquad \Delta\neq 0$$

bo‘lganda (1) ni yagona yechimi quyidagicha topiladi.

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}; \qquad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}.$$

Bu formulalar Kramer formulalari deyiladi.

Misol. Ushbu tenglamalar sistemasining barcha yechimlarini toping.

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x-y=2. \end{cases}$$

Yechish. Sistemaning determinantlarini topamiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}=-2-9=-11;$$

$$\Delta \neq 0$$

bo'lgani uchun, sistema yagona yechimga ega.

$$\Delta_x=\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-11; \quad \Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}=-11.$$

Kramer formulalariga ko'ra:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-11}{-11}=1; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{-11}{-11}=1.$$

4.2. Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglamalar sistemasi.

Uch noma'lumli uchta chiziqli tenglama sistemasini tekshirish bilan shug'ullanamiz. Chiziqli tenglamalarning ushbu

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=d_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=d_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=d_3 \end{cases} \qquad (1)$$

sistemasi berilgan bo'lsin. Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan determinantni Δ bilan belgilaymiz:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

yordamchi determinantlarni tuzamiz.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} d_1 & a_{12} & a_{13} \\ d_2 & a_{22} & a_{23} \\ d_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & d_1 & a_{13} \\ a_{21} & d_2 & a_{23} \\ a_{31} & d_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \ \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & d_1 \\ a_{21} & a_{22} & d_2 \\ a_{31} & a_{32} & d_3 \end{vmatrix}$$

berilgan sistema x, y, z yechimga ega bo'lsa,bu yechimni topish uchun quyidagi formulalarga ega bo'lamiz.

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}; \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}; \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} \tag{3}$$

Quyidagi hollar sodir bo'lishi mumkin.

1. $\Delta \neq 0$ bu holda (3) formulalardan (1) sistema bitta yechimga ega ekani kelib chiqadi.

2. $\Delta = 0$ va $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ determinantlardan kamida bittasi noldan farqli. Bu holda (1) sistema yechimga ega bo'lmaydi.

3. $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$ bu holda (1) sistema yo cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi,yoki umuman yechimga ega bo'lmaydi.

Misol. Ushbu uch noma'lumli uchta chiziqli tenglama sistemasini yeching:

$$\begin{cases} 2x + 3y + z = 2 \\ 3x - y + 2z = -3 \\ 4x + y - 3z = 4. \end{cases}$$

Yechish. Berilgan sistemaning asosiy determinanti va yordamchi determinantlarni tuzamiz.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 + 3 + 24 + 4 + 27 - 4 = 60 \neq 0$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 6 - 3 + 24 + 4 - 4 - 27 = 0$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 4 & 4 & -3 \end{vmatrix} = 18 + 12 + 16 + 12 - 16 + 18 = 60$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -8+6-36+8+6-36=-60.$$

Demak, $\Delta \neq 0$ bo'lgani uchun sistema yagona yechimga ega. Bu yechim quyidagidir.

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{0}{60}=0; \quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{60}{60}=1; \quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-60}{60}=-1.$$

Javob: $(0,1,-1)$.

4.3. Uch noma'lumli uchta tenglamaning bir jinsli sistemasi.

Barcha ozod hadlari nolga teng bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasiga bir jinsli sistema deyiladi.U quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=0 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=0 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=0. \end{cases} \qquad (1)$$

(1) ko'rinishdagi istalgan bir jinsli sistema hech bo'lmaganda bitta yechimga ega, chunonchi $x=y=z=0$ yechimga, ya'ni nol yechimga ega. Bu sistema qachon nolga teng bo'lmagan yechimga ega bo'lishini aniqlash uchun ikkita holni qarab chiqamiz:

1) Sistema determinanti noldan farqli, ya'ni $\Delta \neq 0$. Bu holda (1) sistema faqat nol yechimga ega bo'ladi: $x=y=z=0$.

2) $\Delta=0$ bu (1) sistemaning nolga teng bo'lmagan yechimi mavjud bo'lishi uchun zaruriy shart hisoblanadi. Bu holda sistema cheqsiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

a) Buni isbot qilish uchun dastlab determinantning algebraik to'ldiruvchilaridan (algebraik to'ldiruvchi to'g'risida tushuncha beriladi) kamida bittasi noldan farqli deb faraz qilamiz.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad \text{bo'lsin.}$$

(1) sistemaning dastlabki ikkita tenglamasini ushbu ko'rinishda yozamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{cases} \tag{2}$$

Endi $A_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ bo'lgani uchun istalgan z da (1) sistema ushbu

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -a_{13}z & a_{12} \\ -a_{23}z & a_{22} \end{vmatrix}}{A_{33}} = \frac{A_{31}}{A_{33}}z; \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & -a_{13}z \\ a_{21} & -a_{23}z \end{vmatrix}}{A_{33}} = \frac{A_{32}}{A_{33}}z; \tag{3}$$

formulalar bilan aniqlanuvchi yechimlarga ega bo'ladi. Agar $k = \frac{z}{A_{33}}$ deb olsak, (2) ning yechishni ushbu ko'rinishda yozish mumkin:

$$x = kA_{31}; \; y = kA_{32}; \; z = kA_{33}.$$

k – son istalgan qiymatlarni qabul qilishi mumkin. Biz berilgan (1) sistemaning dastlabki ikkita yechimini topdik. Bu yechimlar k ning har qanday qiymatida (1) sistemaning uchinchi tenglamasini ham qanoatlantirishini ko'rsatish mumkin. Yuqorida aytganimizdek, k istalgan qiymatlarni qabul qilgani uchun (1) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

b) Endi determinantning barcha algebraik to'ldiruvchilari nolga teng deb faraz qilamiz. U holda (1) sistemaning har qanday ikkita tenglamasi proportsional koeffitsientlarga ega bo'ladi va demak, sistemaning har qanday ikkita tenglamasini ulardan birining hamma hadlarini biror ko'paytuvchiga ko'paytirish orqali ikkinchisiga keltirish mumkin, binobarin sistema bitta tenglamaga keltiriladi, qolgan ikkita tenglama bu tenglamaning natijasi bo'ladi. Ravshanki, bunday sistema cheksiz ko'p nol bo'lmagan yechimga ega (chunki ikkita noma'lumga ixtiyoriy sonli qiymatlar berib, uchinchi yechimni esa sistemaning birdan bir erkli tenglamsidan topish mumkin.)

Misol. Ushbu tenglamalar sistemasini yeching.

$$\begin{cases} 2x + y + 3z = 0; \\ x + 2y - z = 0; \\ 3x + 3y + 2z = 0. \end{cases}$$

Yechish. Sistemada $\Delta=0$ ekanini ko'rish mumkin. Sistemaning dastlabki, ikkita tenglamasini

$$\begin{cases} 2x+y=-3z; \\ x+2y=z; \end{cases}$$

ko'rinishda yozamiz.

Bu sistemani Kramer qoidasi bo'yicha yechamiz.

$$\Delta^{*}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=4-1=3.$$

Demak, berilgan sistema cheksiz ko'p yechimga ega ekan, chunki z ixtiyoriy olinib, x va y larning mos qiymatlarini topamiz. Masalan, $\Delta_x=-7z$ deb olib, $\Delta_y=5z$ ni; $z=1$ deb olib, $x=-7, y=5$ ni topamiz va hokazo.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlarni tadbiq qilib yechishni ko'rsating.
2. Uch noma'lumli chiziqli tenglamalar sistemasini determinantlar orqali yechish formulasini yozing.
3. Kramer formulalarini yozib ko'rsating.
4. Uch noma'lumli uchta tenglamalarning bir jinsli sistemasini determinantlar yordamida yechishni ko'rsating.

5-§. Chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish

Biz shu paytgacha tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasini qaradik. Agar bunday sistemaning determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda sistema yagona yechimga ega bo'lishi ma'lum.

Endi ixtiyoriy, ya'ni tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo'lmagan chiziqli tenglamalar sistemasini tekshiramiz. Bunday sistema uchun yechim yagona bo'lmasligi yoki umuman yechim mavjud bo'lmasligi ham mumkin. Chiziqli tenglamalar sistemasi birorta ham yechimga ega bo'lmasa, sistema birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi. Agar chiziqli tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, bunday sistema birgalikda deyiladi. (Agar birgalikda bo'lgan sistema yagona yechimga ega bo'lsa, sistema aniq sistema deb, agar yechim bittadan ko'p bo'lsa, aniq bo'lmagan sistema deb ataladi.)

Endi koeffitsientlari sonlardan iborat bo'lgan sistema yechimlarini topish uchun qulay bo'lgan noma'lumlarni ketma-ket yoqotish usulini, ya'ni Gauss metodini bayon qilamiz. Quyidagi ixtiyoriy chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = c_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \ldots + a_{sn}x_n = c_s; \end{cases} \tag{1}$$

(1) da $a_{11} \neq 0$ bo'lsin deb faraz qilaylik, a_{11} nolga teng bo'lishi ham mumkin. Bunday holda ishni sistemaning birinchi tenglamasidagi birorta noldan farqli koeffitsientdan boshlash kerak. Dastlab birinchi tenglamadan tashqari barcha tenglamalaridan x_1 ni yo'qotib (1) sistemani o'zgartiramiz. Buning uchun birinchi tenglamaning har ikkala tomonini $a_{11} \neq 0$ ga bo'lib chiqamiz. Natijada berilgan sistemaga ekvivalent ushbu yangi sistemani hosil qilamiz.

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + \dfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \dfrac{a_{1k}}{a_{11}}x_k + \ldots + \dfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n = \dfrac{c_1}{a_{11}}; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ik}x_k + \ldots + a_{in}x_n = c_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mk}x_k + \ldots + a_{mn}x_n = c_m. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Endi bu sistemaning birinchi tenglamsini a_{21} ga ko'paytiramiz va ikkinchi tenglamadan ayiramiz. Bu ishni davom ettirib, birinchi tenglamani endi a_{31} ga ko'paytirib, uchinchi tenglamadan ayiramiz va h.k. Bu jarayonni shunday davom ettirib, ma'lum qadamdan keyin berilgan sistemaga teng kuchli bo'lgan quyidagi yangi sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l} x_1 + a'_{12}x_2 + \ldots + a'_{1k}x_k + \ldots + a'_{1n}x_n = c'_1; \\ a'_{22}x_2 + \ldots + a'_{2k}x_k + \ldots \quad + a'_{1n}x_n = c'_1; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{i2}x_2 + \ldots + a'_{ik}x_k + \ldots \quad + a'_{in}x_n = c'_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a'_{m2}x_2 + \ldots + a'_{mk}x_k + \ldots \quad + a'_{mn}x_n = c'_m. \end{array}\right\} \tag{3}$$

Bu yerda quyidagicha belgilashlardan foydalanilgan:

$$a'_{ik} = \frac{a_{1k}}{a_{11}};\ a'_{ik} = a_{ik} - \frac{a_{ik}}{a_{11}} a_{21};\ i = \overline{1,m},\ k = \overline{2,n};$$

$$c'_1 = \frac{c'_1}{a_{11}};\ c'_i = c_i - \frac{c_1}{a_{11}} a_{21};\ i = \overline{2,m};$$

a'_{22} koeffitsientni noldan farqli deb faraz qilib, (3) sistemaning ikkinchi tenglamasini a'_{22} ga bo'lamiz va hosil bo'lgan sistemaning ikkinchi tenglamasini ketma-ket $a'_{32}, \ldots, a'_{i2}, \ldots, a'_{m2}$ ga ko'paytiramiz hamda navbatma-navbat sistemaning tegishli (birinchi va ikkinchi tenglamalaridan tashqari) tenglamalaridan ayiramiz.

Bu jarayonni davom ettirib, chap tomonidagi barcha koeffitsientlari nol bo'lgan, ozod hadi esa noldan farqli bo'lgan tenglamalar sistemasiga kelsak, bu sistema yuqorida ko'rsatilganidek, birgalikda bo'lmaydi. Agar sistema birgalikda bo'lsa,quyidagi sistemadan birini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1K}x_K + \ldots + b_{1n}x_n &= B_1; \\ x_2 + \ldots + b_{2K}x_K + \ldots + b_{2n}x_n &= B_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_p + \ldots + b_{pn}x_n &= B_p. \end{aligned}\right\} \qquad (4)$$

yoki (bunda $p < n$)

$$\left.\begin{aligned} x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1K}x_K + \ldots + b_{1n}x_n &= B_1; \\ x_2 + \ldots + b_{2K}x_K + \ldots + b_{2n}x_n &= B_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k + \ldots + b_{kn}x_n &= B_k; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= B_n. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

(4)-pogonasimon (trapetsiya), (5) esa uchburchak ko'rinishidagi sistema deyiladi. (5) bo'lgan holda oxirgi tenglamadan $x_n = B_n$ ga egamiz. x_n ning qiymatini oldingi tenglamaga qo'yib, x_{n-1} ni topamiz, uni o'z navbatida oldingi tenglamaga qo'yib, x_{n-2} ni topamiz va h.k.

Yuqorida aytilganlarni yakunlab quyidagilarni hosil qilamiz. Gauss metodini chiziqli tenglamalarni har qanday sistemasi uchun tadbiq etish mumkin. Bunda, agar almashtirishlar jarayonida barcha noma'lumlarning oldidagi koeffitsientlari nolga teng, ozod hadi esa noldan farqli bo'lgan tenglama hosil qilsa, sistema birgalikda bo'lmaydi;

agar bunday tenglamaga ega bo'lmasak, sistema birgalikda bo'ladi. Agar birgalikdagi sistema (5) uchburchak ko'rinishiga kelsa, u aniq bo'ladi, (4) ko'rinishiga kelsa, aniqmas bo'ladi. Aytilganlarni chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi bo'lgan holga, ya'ni ozod hadlar nolga teng bo'lgan tenglamalarga ham qo'llash mumkin. Bunday sistema har doim birgalikda bo'ladi, chunki y $(0,0,...,0)$ nol yechimga ega. Qaralayotgan sistemada tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsin. U holda, sistemamiz uchburchak shakliga keltirilishi mumkin emas, chunki Gauss metodi bo'yicha o'zgartirish jarayonida tenglamalar soni kamayishi mumkin, lekin ortishi mumkin emas, binobarin u (4) ko'rinishga keltiriladi, ya'ni aniqmasdir.

1-misol. Quyidagi chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss metodi bilan yeching:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 6; \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 7. \end{cases}$$

Yechish. Birinchi tenglamadagi x_1 oldida turgan koeffitsient yordamida qolgan tenglamalardagi x_1 noma'lumdan qutilamiz. Buning uchun birinchi tenglamaning barcha hadlarini 2 ga ko'paytirib, ikkinchi tenglamadan ayiramiz. Birinchi tenglamaning o'zini uchinchi tenglamadan ayiramiz. Natijada quyidagi ko'rinishdagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ -5x_2 - 4x_3 = 4; \\ -x_2 - 6x_3 = 6. \end{cases}$$

Ikkinchi va uchinchi tenglamalar faqat x_2 va x_3 noma'lumlarga ega. Uchinchi tenglamaning hadlarini 5 ga ko'paytirib, 2-tenglamdan ayiramiz. Natijada tubandagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1; \\ -5x_2 - 4x_3 = 4; \\ -26x_3 = 26. \end{cases}$$

Uchinchi tenglamadan $x_3 = -1$, buni ikkinchi tenglamaga qo'yib, x_2 noma'lumli topamiz:

$$-5x_2 - 4 \cdot (-1) x_3 = 4;$$

$$x_2 = 0.$$

x_2 va x_3 noma'lumlarning qiymatlarini birinchi tenglamaga qo'yib, x_1 noma'lumni topamiz: $x_1 + 0 - 3 = 1$; $x_1 = 4$.

Javob: $(4; 0; -1)$.

2-misol. Ushbu:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 5; \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 14. \end{cases}$$

chiziqli tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Birinchi tenglamadagi x_2 oldida turgan koeffitsient yordamida qolgan tenglamalardagi x_2 noma'lumdan qutulamiz. Buning uchun birinchi tenglama hadlarini uchga, ikkinchi tenglama hadlarini 2 ga ko'paytirib, birinchi tenglamani ikkinchi tenglamadan ayiramiz. Natijada quyidagi ko'rinishdagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ x_1 + 0 - 7x_3 = -11; \\ 0 + 0 + 0 = 0. \end{cases}$$

Uchinchi tenglama hadlari va ozod hadi nollardan iborat bo'lgani uchun, bu tenglamani tashlab yuborsak, tubandagi sistema hosil bo'ladi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 7; \\ x_1 - 7x_3 = -11. \end{cases}$$

Birinchi tenglamadagi x_1 noma'lumdan qutulish uchun 1-tenglamani 2-tenglamadan ayirsak, x_1 va x_2 noma'lumlarga nisbatan yechiladigan ushbu sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} -2x_2 - 10x_3 = -18; \\ x_1 - 7x_3 = -11. \end{cases}$$

Ikkinchi tenglamadan x_1 ni, birinchi tenglamadan x_2 ni topamiz:

$$\begin{cases} x_1 = 7x_3 - 11; \\ x_2 = -5x_3 + 9. \end{cases}$$

bu yerda x_3 ixtiyoriy son.

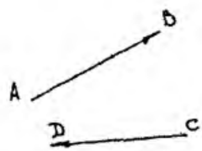
O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Gauss metodining mohiyatini tushintiring.
2. Gauss metodi yordamida misollar yechib ko'rsating.

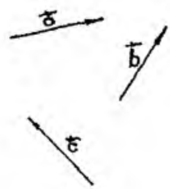
IV BOB
VEKTORLAR VA CHIZIQLI ALGEBRA ELEMENTLARI

1-§. Vektor. Nol vektor. Vektor uzunligi, qiymati va yo‘nalishi

Agar kesma oxirlarining tartibi e’tiborga olinsa, u yo‘nalgan hisoblanadi. Agar oldin A nuqta keyin B nuqta berilgan bo‘lsa, u holda A nuqta $\overline{AB}$ yo‘nalgan kesmaning boshi B nuqta esa oxiri deyiladi. $\overline{AB}$ yo‘nalgan kesma ustiga chiziq qo‘yish bilan belgilanadi. Oddiy kesmaning uchlari teng huquqli bo‘lib, ularning tartibini ahamiyati yo‘q. Yo‘nalgan kesmada esa boshi oxirining o‘rinlari almashtirilishi bilan ularning yo‘nalishi o‘zgaradi. Yo‘nalgan $\overline{AB}$ kesmaning uzunligi deb, $[AB]$ kesmaning uzunligiga aytiladi va $|\overline{AB}|$ bilan belgilanadi. Yo‘naltirilgan kesma vektor deyiladi. Vektorlarni belgilashda biz ustiga strelka qo‘yilgan kichik harflardan foydalanamiz: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \ldots$. Ba’zan vektorlar kesma oxirlarini ko‘rsatuvchi o‘sha harflar bilan ham belgilanadi.

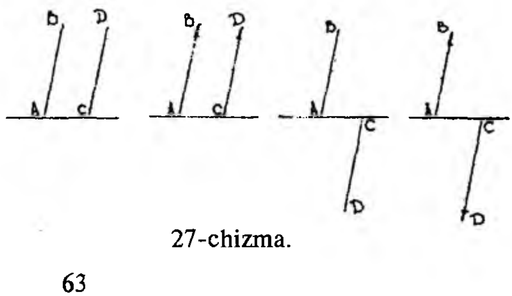


25-chizma.



26-chizma.

Masalan, vektorni 25, 26-chizmada ko‘rsatilgandek, $\overrightarrow{AB}$ ko‘rinishda belgilash mumkin. A nuqta vektorning boshi, B nuqta vektorning oxiri deyiladi. Agar $\overline{AB}$ va $\overline{CD}$ yo‘nalgan kesmalar bir xil (qarama-qarshi) yo‘nalishli bo‘lsa $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{CD}$ vektorlar bir xil (qarama-qarshi) yo‘nalishli vektorlar deyiladi. (27-chizma.)



27-chizma.

$\vec{a}$ vektorning absolut qiymati (uzunligi) yoki moduli deb shu vektorni tasvirlovchi kesma uzunligiga aytiladi. $\vec{a}$ vektorning absolut qiymati $|\vec{a}|$ bilan, $\overrightarrow{AB}$ vektorning absolut qiymati esa $\left|\overrightarrow{AB}\right|$ bilan belgilanadi. Moduli birga teng bo‘lgan vektor birlik vektor deyiladi. Vektorning boshi uning oxiri bilan ustma-ust tushishi mumkin. Bunday vektorlar nol vektor deb ataladi. Nol vektor ustiga strelka qo‘yilgan nol $(\vec{0})$ bilan belgilanadi. Nol vektorning yo‘nalishi haqida so‘z yuritilmaydi – u aniqlanmagan. Nol vektorning moduli nolga teng deb hisoblanadi. Noldan farqli ikkita vektor bir to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotsa, bunday vektorlar kollinear vektorlar deyiladi. $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning kollinearligi $\vec{a}\parallel\vec{b}$ ko‘rinishida belgilanadi. Uzunliklari teng, kollinear va bir xil yo‘nalishli ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ ko‘rinishida belgilanadi. Bir tekislikka parallel bo‘lgan yoki shu tekislikda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlar deyiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Vektor nima?
2. Kollinear, komplanar va nol vektorlarni tushuntiring.

2-§. Vektorlar ustida amallar

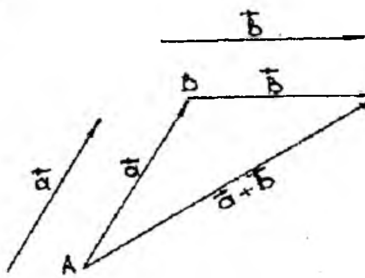
2.1. Vektorlarni qo‘shish.

Ta’rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig‘indisi deb istalgan A nuqtadan $\vec{a}$ vektorni qo‘yib, uning oxiri B ga $\vec{b}$ vektorni qo‘yganda boshi $\vec{a}$ vektorning boshi A da, oxiri $\vec{b}$ vektorning oxiri C da bo‘lgan $\overrightarrow{AC}$ vektorga aytiladi. (28-chizma.)

$\vec{a},\vec{b}$ vektorlarning yig‘indisi $\vec{a}+\vec{b}$ bilan belgilanadi. Vektorni qo‘shish ta’rifidan istalgan A, B va C uch nuqta uchun

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC} \qquad (1)$$

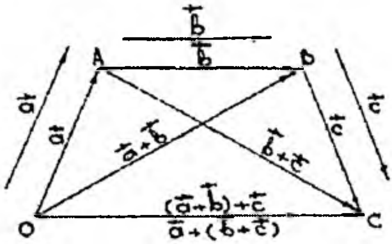
tenglik o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. (1) tenglik vektorlarni qo‘shishning uchburchak qoidasi deyiladi. Ikki kollinear vektorni qo‘shish ham shu qoida bo‘yicha bajariladi.



28-chizma.

Vektorlarni qo‘shish amali quyidagi xossalarga ega:

1. Qo‘shishning gruppalash (assotsiativlik) xossasi. Har qanday $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar uchun $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ munosabat o‘rinli.



29-chizma.

Isbot. Vektorlarni qo‘shishning uchburchak qoidasidan (29-chizma.):

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB};$$

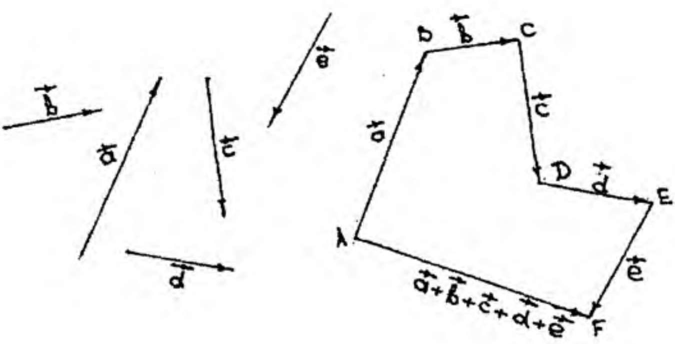
$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OC};$$

$$\vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC};$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overline{OA}+\overline{AC}=\overline{OC};$$

bundan $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$ ekani kelib chiqadi.

Qo‘shiluvchi vektorlarning soni ikkitadan ortiq bo‘lganda ularni qo‘shish quyidagicha bajariladi. Berilgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, ..., l$ vektorlarning yig‘indisini hosil qilish uchun $\vec{a}$ vektorning oxiriga $\vec{b}$ vektorning boshini qo‘yish keyin, $\vec{b}$ vektorning oxiriga $\vec{c}$ vektorning boshini qo‘yish va h.k. Bu ishni oxirgi vektor ustida bajarilguncha davom ettirish kerak. Yig‘indi vektor yani $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+...+l$ yig‘indisi bo‘lgan vektor boshi $\vec{a}$ vektorning boshidan, oxiri esa l vektorning oxiridan iborat vektor bo‘ladi.

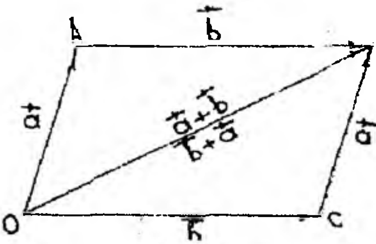


30-chizma.

Masalan, 30-chizmadagi $\overrightarrow{AF}$ vektor berilgan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}, \vec{e}$ vektorlarni qo‘shishdan hosil bo‘lgan vektordir.

2) Qo‘shishning o‘rin almashtirish (kommutativlik) xossasi. Har qanday ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor uchun $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ tenglik o‘rinlidir.

Isbot. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ va $\vec{b}=\overrightarrow{AB}$ bo‘lsin. Ikki hol bo‘lishi mumkin:



31-chizma.

a) $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlar kollinear emas. Bu holda O, A, B nuqtalar bitta to‘g‘ri chiziqda yotmaydi (31-chizma). OAB uchburchakni $OABC$ parallelogrammga to‘ldirsak, vektorlarni qo‘shishning uchburchak qoidasiga ko‘ra:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB},$$

$$\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB},$$

bu ikki tenglikdan esa $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ kelib chiqadi.

b) $\vec{a}\parallel\vec{b}$ bo‘lsin. Bu holda O, A, B nuqtalar bitta d to‘g‘ri chiziqda yotadi. d to‘g‘ri chiziqda yotmaydigan C nuqta olaylik, u holda

$$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{OB}. \qquad (2)$$

a) holga ko‘ra $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{OC}$.

Lekin, $\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}$ bo‘lgani uchun:

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}; \qquad (3)$$

qarama-qarshi vektorlar yig‘indisi $\vec{0}$ ga teng bo‘lgani uchun $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AC}=\vec{0}$ ikkinchi tomondan,

$$\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB} \qquad (4)$$

(3) va (4) tengliklardan $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ tenglikka ega bo‘lamiz.

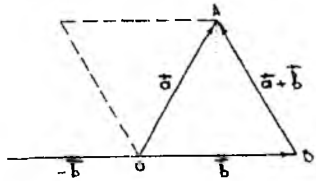
3) har qanday $\vec{a}$ vektorga nol vektor qo‘shilsa, $\vec{a}$ vektor hosil bo‘ladi, ya’ni $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$. Uchburchak qoidasiga ko‘ra istalgan $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ vektor uchun $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{OA}$ tenglik yoki $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ tenglik o‘rinli.

4) har qanday $\vec{a}$ vektor uchun shunday $\vec{a}'$ mavjud-ki, uning uchun:

$$\vec{a}+\vec{a}'=0 \qquad (5)$$

2.2. Vektorlarni ayirish.

Ta’rif. $\vec{a}, \vec{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\vec{b}$ vektorning yig‘indisiga aytiladi. Bu ta’rifdan ko'rinadiki, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ ayirma vektorni yasash uchun $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$ vektorni yasash kerak ekan. Agar $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar bitta O nuqtaga qo'yilgan (32-chizma) hamda $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ va $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ deb belgilangan bo'lsa, u holda



32-chizma.

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}$$

Bu holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasini topish uchun boshi $\vec{B}$ nuqtada oxiri $\vec{A}$ nuqtada bo'lgan $\overrightarrow{BA}$ vektorni yasash yetarli bo'ladi.

2.3. Vektorlarni songa ko'paytirish.

$\vec{a}\neq 0$ vektor va α son berilgan bo'lsin, bu yerda $\alpha\in R$.

Ta'rif. Vektorning α songa ko'paytmasi deb shunday $\vec{b}$ vektorga aytiladiki $\alpha>0$ bo'lganda $\vec{b}$ ning yo'nalishi $\vec{a}$ ning yo'nalishi bilan bir xil, $\alpha<0$ da $\vec{b}$ ning yo'nalishiga teskari bo'lib, $\vec{b}$ vektorning uzunligi esa $\vec{a}$ vektorning uzunligi bilan α son modulining ko'paytmasiga teng, $\vec{a}$ ning α songa ko'paytmasi $\vec{b}=\alpha\vec{a}$ shaklida belgilanadi. Bu ta'rifdan bevosita quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

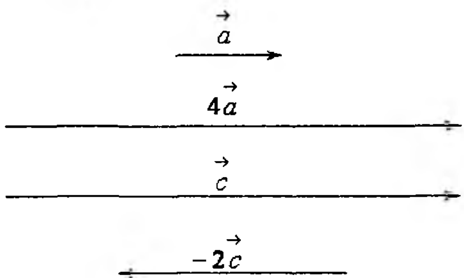
a) ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $0\cdot\vec{a}=0$

b) ixtiyoriy $\alpha\in R$ son uchun: $\alpha\cdot\vec{0}=\vec{0}$

d) ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun: $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$; $(-1)\cdot\vec{a}=-\vec{a}$

e) $\vec{a}$ va $\alpha\vec{a}$ vektorlar o'zaro kollineardir:

33-a chizmada $\vec{a}$ vektor 4 soniga ko'paytirilgan; $\vec{b}=4\vec{a}$; 33-b chizmada $\vec{c}$ vektor -2 soniga ko'paytirilgan; $\vec{b}=-2\vec{c}$. Biror $\vec{a}\neq 0$ vektorni o'zining uzunligiga teskari $\frac{1}{|\vec{a}|}$ songa ko'paytirilsa, shu vektor yo'nalishidagi birlik vektor (ort) hosil bo'ladi, ya'ni $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a}=\vec{a}_0(|\vec{a}_0|=1)$.



33-chizma.

Teorema. Agar $\vec{a}\parallel\vec{b}$ $(\vec{a}\neq 0)$ bo'lsa, u holda shunday α son mavjudki,

$$\vec{b} = \alpha\vec{a} \quad \text{bo‘ladi.} \tag{6}$$

Isbot. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ bo‘lgani uchun quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ bo‘lsa, $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ bo‘lib, bundan $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$ bu holda $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo‘ladi.

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ bo‘lsa $\frac{1}{|\vec{a}|}\cdot\vec{a} = -\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ bo‘lib, bundan $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$; bu holda $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ bo‘ladi.

3) $\vec{b} = 0$ bo‘lganda $\vec{b} = 0\cdot\vec{a}$ bundan $\alpha = 0$. Demak, vektorni songa ko‘paytirish ta’rifidan va bu teoremadan quyidagi xulosani chiqarish mumkin:

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \alpha\vec{a} \quad (\alpha \in R)$$

Shunday qilib (6) munosabat $\vec{a},\vec{b}$ vektorlar kollinearligining zaruriy va yetarli shartidir.

Vektorni songa ko‘paytirish quyidagi xossalarga ega:

a) $1\cdot\vec{a} = \vec{a}; (-1)\cdot\vec{a} = -\vec{a}$;

b) $\alpha(\beta\cdot\vec{a}) = (\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ (gruppalash qonuni);

d) $\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\cdot\vec{a} + \alpha\cdot\vec{b}$ (vektorlarni qo‘shishga nisbatan taqsimot qonuni);

e) $(\alpha+\beta)\cdot\vec{a} = \alpha\cdot\vec{a} + \beta\cdot\vec{a}$ (skalyarni qo‘shishga nisbatan taqsimot qonuni).

Ikkinchi xossani, ya’ni tenglikning o‘rinli ekanini ko‘rsatish bilan cheklanamiz.

Isbot. Ma’lumki, $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ vektorlar bir xil $|\alpha|\cdot|\beta|\cdot|\vec{a}|$ uzunlikka ega. Vektorni songa ko‘paytirish amali ta’rifiga ko‘ra agar $\alpha\cdot\beta > 0$ bo‘lsa, $\alpha(\beta\cdot\vec{a})$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ vektorlar bir xil yo‘nalgan, agar $\alpha\cdot\beta < 0$ bo‘lsa, bu vektorlar $\vec{a}$ ga qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘ladi. Shunday qilib, agar $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\vec{a} \neq \vec{0}$ bo‘lsa, $\alpha(\beta\cdot\vec{a}) = (\alpha\cdot\beta)\vec{a}$ ga ega bo‘lamiz. Agar $\alpha = 0$, $\beta = 0$ yoki $\vec{a} = \vec{0}$ bo‘lsa, u holda $\alpha(\beta\cdot\vec{0}) = 0$ va $(\alpha\cdot\beta)\vec{a} = 0$ bo‘ladi.

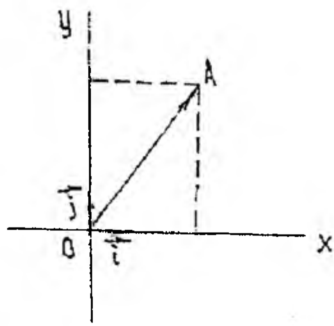
O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Vektorlar ustidagi amallarni geometrik nuqtayi nazardan kelib chiqqan holda tushuntirib bering.
2. Vektorning skalyarga ko‘paytmasi deganda nimani tushunasiz?

3-§. To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi. Nuqtaning va vektorning koordinatalari

3.1. Tekislikda koordinatalar sistemasini kiritish.

Tekislikda nuqta, chiziq, kesma, shuningdek, boshqa geometrik ob’ektlarni o‘rinlarini tasvirlash uchun to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi kiritiladi. Buning uchun tekislikda biror 0 nuqtada kesishuvchi o‘zaro perpendikular ikkita o‘qni olamiz. Bu o‘qlarning har birida 0 nuqtadan boshlab kollinear bo‘lmagan $\vec{i},\vec{j}$ vektorlarni ajratamiz.(34-chizma.)



34-chizma.

1-ta’rif. Musbat yo‘nalishlari mos ravishda $\vec{i},\vec{j}$ vektorlar bilan aniqlanuvchi o‘zaro perpendikular ikkita o‘qdan tashkil topgan sistema tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi va $R=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$ ko‘rinishda belgilanadi. O nuqta koordinatalar boshi, $\vec{i},\vec{j}$ birlik vektorlar esa koordinata vektorlari deyiladi. Ta’rifga asosan, $\vec{i},\vec{j}$ vektorlar ortogonal va birlik vektorlardir: $|\vec{i}|=|\vec{j}|=1$; $\vec{i}\perp\vec{j}$. Musbat yo‘nalishlari $\vec{i},\vec{j}$ vektorlar bilan aniqlangan o‘qlar mos ravishda abssissalar va ordinatalar o‘qlari deb ataladi.

Tekislikda $R=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$ koordinata sistemasi berilgan bo‘lsin. Shu tekislikning A nuqtasi uchun $\overrightarrow{OA}$ vektor A nuqtaning radius–vektori deyiladi. $\overrightarrow{OA}$ vektor uchun quyidagi munosabatni yozish mumkin:

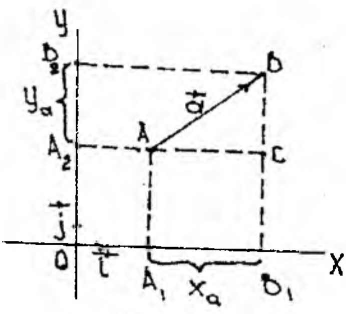
$$\overrightarrow{OA}=x\vec{i}+y\vec{j}.$$

2-ta’rif. OA radius–vektorning x,y koordinatalari A nuqtaning $R=\{0,\vec{i},\vec{j}\}$ koordinata sistemasida koordinatalari deyiladi va u $A(x;y)$ ko‘rinishda belgilanadi. Bunda x A nuqtaning abssissasi, y esa A nuqtaning ordinatasi deyiladi.

Endi vektorning koordinatalarini qaraymiz.

3-ta’rif. Vektorning koordinata o‘qlaridagi proyeksiyalari vektorning koordinatlari deb aytiladi.

Vektorni Ox o‘qidagi proyeksiyasi uning birinchi koordinatasi yoki x koordinatasi, Oy o‘qidagi proyeksiyasi uning ikkinchi koordinatasi yoki y koordinatasi deyiladi.



35-chizma.

Shunga ko'ra $\vec{a}$ vektorning koordinatalarini x_a, y_a bilan belgilasak, u holda ta'rifga asosan,

$$x_a = pr_{Ox}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{i});$$
$$y_a = pr_{Oy}\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos(\vec{a} \wedge \vec{j}).$$

Aytaylik, tekislikda $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ vektori berilgan bo'lsin. A nuqtadan Ox o'qiga parallel, B nuqtadan Oy o'qiga parallel to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz (35-chizma).

Ularning kesishish nuqtasi C bo'lsin. U holda

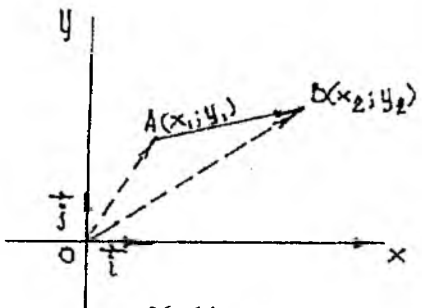
$\overrightarrow{AC} = x_a \cdot \vec{i}$, $\overrightarrow{CB} = y_a \cdot \vec{j}$ va $\vec{a} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j}$ bo'ladi.

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar x_a, y_a lar $\vec{a}$ vektorining koordinatalari bo'lsa, $\vec{a}$ vektorni uning koordinatalari orqali tubandagi ko'rinishda yozish mumkin,

$$\vec{a} = x_a \cdot \vec{i} + y_a \cdot \vec{j}. \tag{1}$$

(1) vektor tenglik ko'p hollarda $\vec{a} = \{x_a, y_a\}$ simvolik ko'rinishda yoziladi.

(1) tenglik tekislikdagi har qanday vektorni ikkita o'zaro perpendikular vektorlarga yoyib yozish mumkinligini bildiradi. Umuman olganda tekislikdagi har qanday vektorni kollinear bo'lmagan ikkita vektorga yoyib yozish mumkin. Vektorning boshi va oxirini koordinatalari $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ ga nisbatan ma'lum bo'lsa bu vektorning koordinatalarini topishni qaraylik.



36-chizma.

Aytaylik, $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ ga nisbatan $A(x_1; y_1)$; $B(x_2; y_2)$ bo'lsin (36-chizma). Bu holda $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{i} + y_1\vec{j}$; $\overrightarrow{OB} = x_2\vec{i} + y_2\vec{j}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$;

$AB = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j}$.

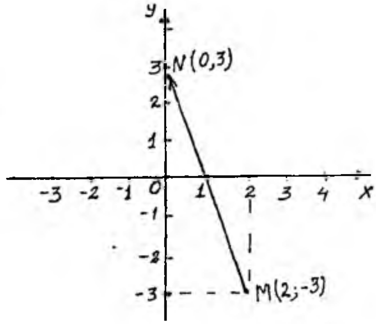
Bundan,

$$\overline{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}; \tag{2}$$

ya'ni vektorning koordinatalari shu vektor oxirining koordinatlaridan mos ravishda boshining koordinatlarini ayirish bilan hosil qilinadi.

Misol. $R = \{0, \vec{i}, \vec{j}\}$ da $M(2; -3), N(0; 3)$ nuqtalarni yasang. $\overrightarrow{MN}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish. $M(2;-3)$ nuqtani yasash uchun $\overrightarrow{OM}=2\vec{i}-3\vec{j}$ vektorni yasaymiz. Buning uchun O nuqtadan boshlab $\vec{i}$ ga kollinear $2\vec{i}$ va $\vec{j}$ ga kollinear $-3\vec{j}$ vektorni yasaymiz. So'ngra bu vektorlarning yig'indisini topsak, $\overrightarrow{OM}$ vektor hosil bo'ladi va undan izlanayotgan M nuqtani topamiz. Xuddi shunday $N(0;3)$ nuqtani yasash uchun $\overrightarrow{ON}=3\vec{j}$ vektorni yasaymiz. $N(0;3)$, $\overrightarrow{MN}=\{-2;6\}$.

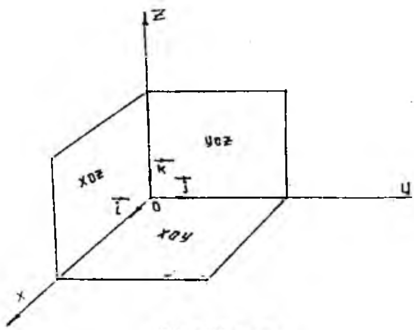


37-chizma.

3.2. Fazoda koordinata sistemasini kiritish.

Bitta O nuqta, kesishuvchi o'zaro perpendikular uchta Ox, Oy, Oz to'g'ri chiziqlarni olamiz (38-chizma).

Shunga o'xshash qolgan ikkita tekislikni mos ravishda xOz va yOz tekisliklari deymiz. Ox, Oy, Oz to'g'ri chiziqlar koordinata o'qlari (mos ravishda abssissa, ordinata applikata), ularning kesishish nuqtasi 0 koordinata boshi, xOz yOz va xOy tekisliklar koordinata tekisliklari deyiladi.



38-chizma.

O nuqta har bir o'qni ikkita yarim to'g'ri chiziqqa ajratadi. Ulardan birini musbat, boshqasini manfiy deb kelishib olamiz. Bu usul bilan hosil qilingan $Oxyz$ sistemaga fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi deyiladi. Odatda Ox, Oy, Oz koordinata o'qlarining birlik vektorlari mos ravishda $\vec{i}, \vec{j}$ va $\vec{k}$ lar orqali belgilanadi. Fazodagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasi $R=\{0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ko'rinishda ham belgilanadi. Fazodagi vektorning koordinatalari deb uni koordinata o'qlaridagi proeksiyalariga aytiladi. Vektorni Ox o'qdagi proeksiyasi uni birinchi yoki $x-$koordinatasi, Oy o'qdagi proeksiyasi uni ikkinchi yoki $y-$koordinatasi, Oz o'qdagi proeksiyasi uchinchi yoki z koordinatasi deb aytiladi.

Aytaylik, fazoda o'zining x_a, y_a, z_a koordinatalari bilan $\vec{a}$ vektori berilgan bo'lsin. Tekislikda vektorni koordinatalariga o'xshash

$$\vec{a} = x_a\vec{i} + y_a\vec{j} + z_a\vec{k} \qquad (3)$$

tenglikni bajarilishini isbotlash mumkin. (3) tenglik fazodagi har qanday vektorni o‘zaro perpendikular bo‘lgan uchta vektorga yoyib yozish mumkinligini bildiradi.

Umuman olganda fazodagi har qanday vektorni uchta o‘zaro kollinear bo‘lmagan vektorlarga yoyish mumkin. Vektorlarni koordinatalari berilganda vektorlarning yig‘indisi, ayirmasini va vektorni songa ko‘paytirishni ko‘rib chiqamiz. Vektorlarni qo‘shish (ayirish) va vektorni songa ko‘paytirish xossasidan agar, $\vec{a}$ vektorning koordinatalari x_a, y_a, z_a $\vec{b}$ vektorning koordinatlari x_b, y_b, z_b bo‘lsa, u holda

$$\vec{a}\pm\vec{b} = (x_a\vec{i} \pm y_a\vec{j} \pm z_a\vec{k}) \pm (x_b\vec{i} \pm y_b\vec{j} \pm z_b\vec{k}) = (x_a \pm x_b)\vec{i} + (y_a \pm y_b)\vec{j} \pm (z_a \pm z_b)\vec{k}$$

ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib $\vec{a}\pm\vec{b}$ vektori $\{(x_a \pm x_b) + (y_a \pm y_b) \pm (z_a \pm z_b)\}$ koordinatalarga ega bo‘ladi, ya’ni

$$\vec{a}\pm\vec{b} = \{x_a \pm x_b; y_a \pm y_b; z_a \pm z_b\} \qquad (4)$$

$\lambda\vec{a}$ vektorining koordinatalari esa $\lambda x_a, \lambda y_a, \lambda z_a$ bo‘ladi, ya’ni

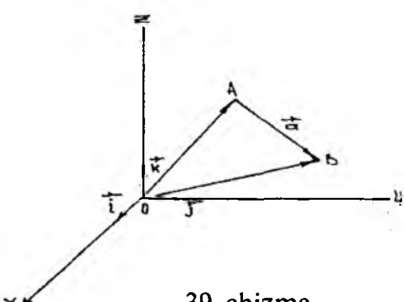
$$\lambda\vec{a} = \lambda x_a, \lambda y_a, \lambda z_a \qquad (5)$$

Demak, ikki vektorni qo‘shganda (ayirganda) ularning mos koordinatalari qo‘shiladi (ayriladi). Vektorni songa ko‘paytirganda, uning koordinatlari shu songa ko‘payadi.

Misol. $\vec{a}$ ={2;-3;1} vektori berilgan. Unga kollinear bo‘lgan $\vec{b}$ ={*x*;*y*;4} vektorining noma’lum koordinatalarini aniqlang.

Yechish. Ikki vektorning kollinearlik shartiga asosan $\vec{b} = \lambda\vec{a} = \lambda\{2\vec{i}; -3\vec{j}, \vec{k}\}$ u holda (2) formulaga asosan $\vec{b} = \{2\lambda; -3\lambda + \lambda\}$. Ikkinchi tomondan λ=4 demak $\vec{b} = \{8; -12; 4\}$ bo‘ladi.

Endi *A* nuqtaning koordinatalarini ko‘rib o‘tamiz. Aytaylik, fazoda *Oxyz* dekart koordinatalar sistemasi berilgan bo‘lsin. Bu sistema istalgan *A* nuqta uchun $\overrightarrow{OA}$ vektorning koordinatalari uning radius vektorining koordinatalaridir. Odatda *A* nuqtaning koordinatalari shu harfning yonida kichik qavs ichida yoziladi: $A(x_a; y_a; z_a)$ *A* va *B* nuqtalarning koordinatalari ma’lum bo‘lganda $\overrightarrow{AB}$ vektorning koordinatalarini topishni ko‘raylik. Aytaylik, *A* nuqtaning koordinatalari $(x_A; y_A; z_A)$ *B* nuqtaning koordinatalari (x_B, y_B, z_B) bo‘lsin. U holda (39-chizma).



39-chizma

$$\vec{AB}=\vec{OB}-\vec{OA}=(x_B\vec{i}+y_B\vec{j}+z_B\vec{k})-(x_A\vec{i}+y_A\vec{j}+z_A\vec{k})=$$
$$=(x_B-x_A)\vec{i}+(y_B-y_A)\vec{j}+(z_B-z_A)\vec{k}.$$

Bu yerdan $\vec{AB}$ vektor $x_B-x_A; y_B-y_A; z_B-z_A$ koordinatalarga ega bo'lishini ko'ramiz. Demak, vektorning koordinatalari uning mos koordinatalari ayirmasiga teng:

$$AB=\{x_B-x_A; y_B-y_A;\ z_B-z_A\}. \tag{6}$$

Misol. Agar $A(2;5;1)$ va $B(5;3;6)$ bo'lsa $\vec{AB}$ vektorning koordinatalarini toping.

Yechish. Aytaylik, $\vec{AB}=\{x_{AB}; y_{AB}; z_{AB}\}$ bo'lsin, u holda (6) formulaga asosan:

$$x_{AB}=x_a-x_b=5-2=3;$$
$$y_{AB}=y_a-y_b=3-5=-2;$$
$$z_{AB}=z_a-z_b=6-1=5.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Tekislikda, fazoda to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasini izohlang.
2. Nuqtaning va vektorning koordinatalarini tushuntiring.

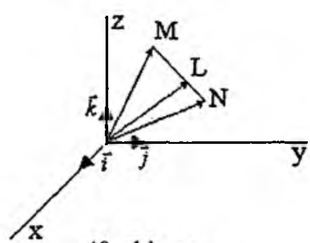
4-§. Kesmani berilgan nisbatda bo'lish

MN kesmani berilgan $\lambda_1:\lambda_2$ nisbatda bo'lish talab qilinsin. Agar *MN* kesmada *ML* masofa absolut qiymatining *LN* masofa absolut qiymatiga nisbati $\lambda_1:\lambda_2$ ga teng bo'lsa, *L* nuqta *MN* kesmani $\lambda_1:\lambda_2$ nisbatda bo'ladi deyiladi.Berilgan masalani hal qilish uchun *MN* kesmaning

$$\frac{|ML|}{|LN|}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi $L(x_L;\ y_L;\ z_L)$ nuqtasining koordinatalarini topish kerak (40-chizma). Ta'riflanishiga ko'ra *L* nuqta *MN* kesmani $\lambda_1:\lambda_2$ nisbatda bo'lishi uchun

$$\vec{ML}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot\vec{LN} \tag{1}$$



40-chizma.

tenglikni bajarilishi zarur.

$\vec{ML}$ va $\vec{LN}$ vektorlarni $\vec{OM},\vec{OL}$ va $\vec{ON}$ radius-vektorlar orqali ifodalaymiz. U holda (1) tenglama $\vec{OL}-\vec{OM}=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\cdot(\vec{ON}-\vec{OL})$ ko'rinishni oladi.

Bundan esa

$$\vec{OL} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} \cdot \vec{OM} + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} \vec{ON} \tag{2}$$

kelib chiqadi.

(2) formula qo‘yilgan masalaning yechimini beradi, chunki u NN kesmani berilgan $\lambda_1 : \lambda_2$ nisbatda bo‘luvchi L nuqtaning radius-vektorini $M(x_M, y_M, z_M)$ va $N(x_N, y_N, Z_N)$ nuqtalarning radius-vektorlari orqali ifodalaydi.

(2) vektor tenglikka asosan quyidagi tengliklarga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned} x_L &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} x_M + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} x_N; \\ y_L &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} y_M + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} y_N; \\ y_N &= \frac{\lambda_2}{\lambda_1 + \lambda_2} z_M + \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} z_N. \end{aligned} \tag{3}$$

(3) formula berilgan kesmani $\lambda_1 : \lambda_2$ nisbatda bo‘luvchi L nuqtaning koordinatalarini topish formulalaridir. L nuqta MN kesmaning o‘rtasi bo‘lgan xususiy holda (3) formula

$$x_L = \frac{x_M + x_N}{2}; \; y_L = \frac{y_M + y_N}{2}; \; z_L = \frac{z_M + z_N}{2} \tag{4}$$

ko‘rinishni oladi. (4) formula kesmani teng ikkiga bo‘luvchi nuqtaning koordinatalarini hisoblash formulalaridir.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Kesmani berilgan nisbatda bo‘luvchi nuqtaning koordinatalarini hisoblash uchun formula keltirib chiqaring.
2. Kesmani teng ikkiga bo‘luvchi nuqtaning koordinatalarini hisoblash uchun formula keltirib chiqaring.

5-§. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

Vektorlar ustida hozirgacha bajarilgan amallar (qo‘shish, ayirish, songa ko‘paytirish) chiziqli amallar bo‘lib, natijada yana vektorlar kelib chiqadi. Bu mavzuda vektorlar ustida natija skalyar (son) hosil bo‘ladigan amalni ko‘rib chiqamiz.

Ta'rif. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasidan hosil bo'lgan son bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi. Agar ikkita vektordan birortasi nol vektor bo'lsa, skalyar ko'paytma nolga teng bo'ladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $\vec{a}\cdot\vec{b}$ ko'rinishida belgilanadi, demak,

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (1)$$

Bu yerda φ berilgan $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak. (1) formula yordamida kuchning bir nuqtadan ikkinchi nuqtagacha to'g'ri chiziqli harakatida bajargan ishini hisoblash mumkin. Aytaylik biror jism o'zgarmas F kuchning tasirida boshlangich B nuqtadan C nuqtagacha to'g'ri chiziqli harakatlansin, u holda bajarilgan ish

$$A=\left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{BC}\right|\cos\varphi$$

bilan ifodalanadi. U skalyar kattalik bo'lib, $\vec{F}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasidan iboratdir. Bu yerda φ – $\vec{F}$ va $\overrightarrow{BC}$ vektor orasidagi burchak.

Misol. $|\vec{a}|=3$; $|\vec{b}|=4$ hamda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak 45^0 ga teng bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasini toping.

Yechish. (1) formulaga asosan topamiz:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cdot\cos45^0=12\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=6\sqrt{2}.$$

Skalyar ko'paytmaning xossalari:

1) Ixtiyoriy $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uchun quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

Bu xossa skalyar ko'paytmaning kommutativlik xossasi deyiladi.

Isbot. Bu xossa skalyar ko'paytmaning ta'rifidan bevosita kelib chiqadi, ya'ni

$$\left.\begin{array}{l}\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi\\ \vec{b}\cdot\vec{a}=|\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos\varphi\end{array}\right\}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}.$$

2) Ixtiyoriy $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar va ixtiyoriy $k\in R$ son uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=k(\vec{a}\cdot\vec{b}) \qquad (2)$$

Bu xossadan vektorlarni skalyar ko'paytirishda sonli ko'paytuvchini skalyar ko'paytma belgisi tashqarisiga chiqarish mumkin degan xulosa kelib chiqadi.

Isbot. Bu xossani isbot qilish uchun ikki vektor orasidagi burchak tushunchasidan foydalanamiz. Ma'lumki, agar $k>0$ bo'lsa $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $k\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Ta'rifga ko'ra:

$(k\vec{a})\cdot\vec{b}=|k|\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=k\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=k(\vec{a}\cdot\vec{b})$; agar $k<0$ bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\alpha=180^0-\varphi$ ga teng;

$$(k\vec{a})\vec{b}=|k\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos(180^0-\varphi)=k\cdot|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi=k(\vec{a}\cdot\vec{b})\cos\varphi=k(\vec{a}\cdot\vec{b}).$$

3) Har qanday $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}. \tag{3}$$

Bu xossa skalyar ko'paytmaning distributivlik xossasi deyiladi.

Isbot. Agar $\vec{a}=0$ bo'lsa, $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ tenglikning o'rinliligi o'z-o'zidan ravshan. Agar $\vec{a}\neq 0$ bo'lsa,u holda $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|\,np_l(\vec{b}+\vec{c})$.

Bu yerda l o'qi $\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}=\vec{e}$ birlik vektori bilan aniqlangan.

Har qanday $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar uchun $np_l(\vec{b}+\vec{c})=np_l\vec{b}+np_l\vec{c}$ munosabat o'rinlidir.

Demak,

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=|\vec{a}|(np_l\vec{b}+np_l\vec{c})=\vec{a}np_l\vec{b}+\vec{a}np_l\vec{c}=\vec{a}\vec{b}+\vec{a}\vec{c}$$

bundan esa $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$ tenglikning o'rinli ekani ko'rinadi.

4) Har qanday vektorning o'z-o'ziga skalyar ko'paytmasi bu vektor uzunligining kvadratiga teng:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2. \tag{4}$$

Isbot. Skalyar ko'paytma ta'rifidan:

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{a})=|\vec{a}|^2\cos 0^0=|\vec{a}|^2$$

$\vec{a}\cdot\vec{a}$ ifoda $\vec{a}^2$ bilan belgilanadi va $\vec{a}$ vektorning skalyar kvadrati deb ataladi. Bunga ko'ra (4) tenglikdan $\vec{a}$ vektorning uzunligi uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a^2}. \tag{5}$$

Skalyar ko'paytma yordamida bizga tanish ba'zi ayniyatlarni isbotlash mumkin. Masalan,

$$(\vec{a}\pm\vec{b})^2=\vec{a}^2\pm 2\vec{a}\vec{b}+\vec{b}^2$$

ayniyatni isbot qilaylik, buning uchun ayniyatning chap tomonidan uning o'ng tomonini keltirib chiqaramiz:

$$(\vec{a}\pm\vec{b})\cdot(\vec{a}\pm\vec{b})=\vec{a}(\vec{a}\pm\vec{b})+\vec{b}(\vec{a}\pm\vec{b})=\vec{a}\cdot\vec{a}\pm\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{a}\cdot\vec{b}\pm\vec{b}\cdot\vec{b}=\vec{a}^2\pm 2\vec{a}\vec{b}\pm\vec{b}^2.$$

Teorema. Nol bo'lmagan ikkita vektorning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, bu vektorlar o'zaro perpendikular bo'ladi va aksincha.

Isbot. Faraz qilaylik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o'zaro perpendikular bo'lsin, u holda ular orasidagi burchak 90° ga teng, demak $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=0$ u holda

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})$$

$$\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=0\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

demak, $\vec{a}\perp\vec{b}\Rightarrow\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u vektorlar perpendikulardirlar. Nol bo'lmagan ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lishi uchun $.\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=0$ bo'lishi kerak, bu esa $(\vec{a}\wedge\vec{b})$ burchak 90^0 qiymatni qabul qilganda o'rinlidir. Demak, $\vec{a}\cdot\vec{b}=0\Rightarrow\vec{a}\perp\vec{b}$

Endi koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko'paytmasini qaraymiz. $\vec{a}=\{x_a,y_a,z_a\}$ va $\vec{b}=\{x_b,y_b,z_b\}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsin.

U holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar, $\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}$ va $\vec{b}=x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}$ yoyilmalarga ega bo'ladi. Skalyar ko'paytmaning xossalaridan foydalanib, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni skalyar ko'paytiramiz:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})\cdot(x_b\vec{i}+y_b\vec{j}+z_b\vec{k}=x_ax_b\vec{i}\vec{i}+x_a\vec{i}y_b\vec{j}+$$

$$+y_a\vec{j}x_b\vec{i}+y_ay_b\vec{j}\vec{j}+x_a\vec{i}z_b\vec{k}+y_a\vec{j}z_b\vec{k}+z_a\vec{k}x_b\vec{i}+z_a\vec{k}y_b\vec{j}+z_az_b\vec{k}\vec{k}.$$

Ta'rifga ko'ra:

$$\vec{i}^{\,2}=1;\ \vec{j}^{\,2}=1;\ \vec{k}^{\,2}=1;\ \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{i}=\vec{i}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{j}=0.$$

U holda

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_ax_b+y_ay_b+z_az_b. \tag{6}$$

Demak, koordinatalari bilan berilgan ikki vektorni skalyar ko'paytmasi bu vektorlar mos koordinatlari ko'paytmalarining yig'indisiga teng. Koordinatalari bilan berilgan $\vec{a}=\{x_a,y_a,z_a\}$ vektor uchun $\vec{a}\cdot\vec{a}$ skalyar ko'paytmani topaylik. $\vec{a}$ ni $\vec{a}=x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k}$ ko'rinishda yozib olamiz.

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})(x_a\vec{i}+y_a\vec{j}+z_a\vec{k})$$

(6) tenglikka asosan

$$\vec{a}\cdot\vec{a}=x_ax_a+y_ay_a+z_az_a.$$

Ma'lumki,

$$|\vec{a}|=\sqrt{a\cdot a}=\sqrt{a^2}=\sqrt{x_a^2+y_a^2+z_a^2}. \tag{7}$$

Bu esa koordinatalari bilan berilgan vektorning uzunligi uning koordinatlari kvadratlarining yig'indisidan olingan arifmetik kvadrat ildizga teng ekanligini ko'rsatadi. (7) formuladan foydalanib ikki nuqta orasidagi masofani topish mumkin. $A(x_1;y_1;z_1)$ va $B(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. U holda

$$\rho(A,B)=\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2} \qquad (8)$$

bo'ladi, bunda $\rho(A;B)$ – A va B nuqtalar orasidagi masofa.

Skalyar ko'paytmadan foydalanib ikki vektor orasidagi burchakni, vektorlarning o'qdagi proyeksiyalarini hisoblash mumkin. Ikki vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ orasidagi burchak $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$ formula bo'yicha hisoblanadi.

Agar vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}\cdot\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}}$$

formula bo'yicha hisoblanadi. Agar vektorlar tekislikda berilgan bo'lsa z koordinatalari nolga teng deb olinadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki vektorning skalyar ko'paytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Skalyar ko'paytmaning qanday xossalari bor?
3. Koordinatalari bilan berilgan ikki vektorni skalyar ko'paytirish formulasini keltirib chiqaring.
4. Vektor uzunligi uchun formula keltirib chiqaring.
5. Ikki vektor orasidagi burchak uchun formula keltirib chiqaring.
6. Ikki vektorning o'zaro perpendikularlik sharti nimadan iborat?

6-§. Ikki vektorning vektor ko'paytmasi va uning xossalari

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorni bir-biriga ko'paytirish natijasida son (sonlar) xosil bo'lishini ko'rdik. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorni bir-biriga ko'paytirish natijasida vektor hosil bo'lishi ham mumkin.

Ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorning vektor ko'paytmasi deb, shunday $\vec{c}$ vektorga aytiladiki, bu vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikular bo'lib, uning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan yasalgan parallelogramm yuziga teng, yo‘nalishi esa $\vec{c}$ vektorning C uchidan qaraganda $\vec{c}$ vektor atrofida $\vec{a}$ vektordan $\vec{b}$ vektorga eng kichik burchak bilan aylanishi soat strelkasiga teskari bo‘lishi kerak.

Vektor ko‘paytma $[\vec{a}\ \vec{b}]$ yoki $\vec{a}\times\vec{b}$ ko‘rinishda belgilanadi. Boshqacha ta’rif ham berish mumkin.

Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko‘paytmasi deb quyidagi uchta shartni qanoatlantiradigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi:

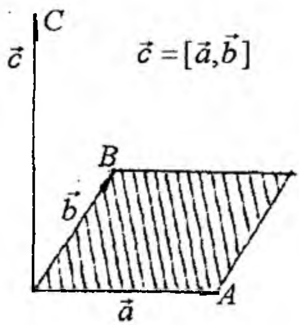
1) $\vec{c}=[\vec{a}\cdot\vec{b}]=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a}\wedge\vec{b});\ (0<(\vec{a}\wedge\vec{b})<\pi);$

2) $[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{a},[\vec{a},\vec{b}]\perp\vec{b}$ ($\vec{c}$ vektor $\vec{a},\vec{b}$ vektorlarga ortogonal);

3) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ vektorlar ko‘rsatilgan tartibda o‘ng uchlikni tashkil qilsin.

Bu ta’rifda keltirilgan uchta shartning har birining geometrik ma’nosini aniqlaylik.

1-shart $\vec{c}$ vektorning uzunligi ($|\vec{c}|$-son) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzini ifodalovchi songa teng ekanini bildiradi (41-chizma) chunki $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a}\wedge\vec{b});(0<(\vec{a}\wedge\vec{b})<\pi)$ ifoda tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat parallelogramm yuzini ifodalaydi.



41-chizma.

2-shart vektor ko‘paytma (ya’ni $\vec{c}$ vektor) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar bilan aniqlanadigan tekislikka perpendikular ekanini bildiradi.

3-shart vektor ko‘paytmaning yo‘nalishini aniqlaydi.

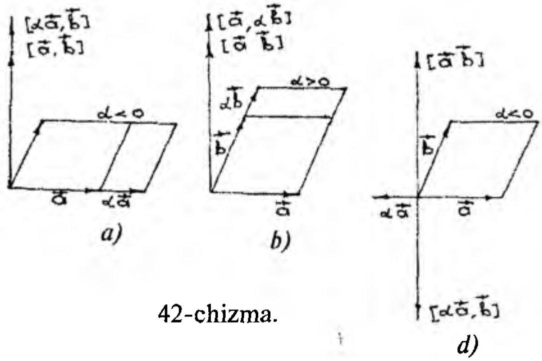
Vektor ko‘paytma quyidagi xossalarga ega:

1) Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lsa yoki ulardan kamida biri nol vektor bo‘lsa, ularning vektor ko‘paytmasi nolga teng bo‘ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, $\vec{a}\parallel\vec{b}$ bo‘lsa, $(\vec{a}\wedge\vec{b})=0$ yoki 180° bo‘lib, birinchi shartga asosan $|\vec{c}|=0$ bo‘ladi. Moduli nolga teng vektor esa albatta nol vektordir.

2) $[\vec{a},\vec{b}]=-[\vec{b},\vec{a}]$ ya’ni ko‘paytuvchilarning o‘rinlarini almashtirishda vektor ko‘paytmaning ishorasi o‘zgaradi.

Isbot. Haqiqatan ham, vektor ko‘paytma ta’rifining 1) va 2) shartlariga asosan, $[\vec{a},\vec{b}]$ va $[\vec{b},\vec{a}]$ vektorlarning uzunliklari teng va ikkalasi



42-chizma.

ham bitta tekislikka perpendikular, yo'nalishlari esa uchinchi shartga asosan, $\vec{c}$ vektor tomonga qarab eng qisqa yo'l bilan soat strelkasi harakatiga teskari bo'lsa, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor tomonga qarab qisqa yo'l bilan burilish esa soat strelkasi harakati bo'yicha bo'lib qoladi, demak yo'nalish avvalgiga o'xshash bo'lishi uchun $[\vec{a},\vec{b}]$ vektor $[\vec{b},\vec{a}]$ vektorga nisbatan qarama-qarshi yo'nalgan bo'lishi kerak (42-a, b, d chizma).

3. $[\alpha\vec{a},\vec{b}]=[\vec{a},\alpha\vec{b}]=\alpha[\vec{a},\vec{b}]$ bu yerda α istalgan haqiqiy son (skalyar ko'paytuvchiga nisbatan assotsiativlik qonuni).

Isbot. $[\alpha\vec{a},\vec{b}]$va $\alpha[\vec{a},\vec{b}]$ vektorlarning modullari teng, yo'nalishlari esa $\alpha>0$ bo'lganda $[\vec{a},\vec{b}]$ vektor bilan bir xil, $\alpha<0$da esa $[\vec{a},\vec{b}]$ ning yo'nalishiga qarama-qarshi (42-a, b, d chizma).

4) $[\vec{a}+\vec{a}',\vec{b}]=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a}',\vec{b}]$; $[\vec{a},\vec{b}+\vec{b}']=[\vec{a},\vec{b}]+[\vec{a},\vec{b}']$.

Bu xossalardan quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\left[\alpha\vec{a}+\beta\vec{b},\gamma\vec{c}+\delta\vec{d}\right]=\alpha\gamma[\vec{a},\vec{c}]+\beta\gamma\left[\vec{b},\vec{c}\right]+\alpha\delta\left[\vec{a},\vec{d}\right]+\beta\delta\left[\vec{b},\vec{d}\right].$$

Vektor ko'paytmadan foydalanib, uchburchakning yuzini hisoblash uchun formula chiqaramiz. Aytaylik, ABC uchburchak $R=\left\{0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasiga nisbatan uchlarining koordinatalari bilan berilgan bo'lsin: $A(x_1;y_1;z_1)$, $B(x_2;y_2;z_2)$, $C(x_3;y_3;z_3)$

Vektor ko'paytma ta'rifidagi I-shartga ko'ra uning moduli parallelogrammning yuzini beradi. Uning yarmi esa uchburchakning yuziga teng.

Shuning uchun

$$S_{\Delta abc}=\frac{1}{2}\left|\left[\vec{AB},\vec{AC}\right]\right| \tag{2}$$

ega bo'lamiz.

Agar $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo‘lsa, ya’ni $\vec{AB}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$; $\vec{AC}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;\ z_3-z_1\}$. U holda $\vec{AB}$ va $\vec{AC}$ vektorlarni vektor ko‘paytmasi tubandagicha ifodalanadi.

$$\left[\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right]=\left[(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}+(z_2-z_1)\vec{k}\right]\left[(x_3-x_1)\vec{i}+(y_3-y_1)\vec{j}+(z_3-z_1)\vec{k}\right]=$$

$$=(x_2-x_1)(x_3-x_1)\vec{i}\cdot\vec{i}+(x_2-x_1)(y_3-y_1)\vec{i}\cdot\vec{j}+(y_2-y_1)(z_3-z_1)\vec{j}\cdot\vec{k}+$$

$$+(z_2-z_1)(x_3-x_1)\vec{k}\cdot\vec{i}+(z_2-z_1)(y_3-y_1)\vec{k}\cdot\vec{j}+(z_2-z_1)(z_3-z_1)\vec{k}\cdot\vec{k}+$$

$$+(x_2-x_1)(z_3-z_1)\vec{i}\cdot\vec{k}+(y_2-y_1)(x_3-x_1)\vec{j}\cdot\vec{i}+(y_2-y_1)(y_3-y_1)\vec{j}\cdot\vec{j};$$

Vektor ko‘paytma ta’rifiga asosan

$$\left[\vec{i}\cdot\vec{i}\right]=0,\quad \left[\vec{j}\cdot\vec{j}\right]=0,\quad \left[\vec{k}\cdot\vec{k}\right]=0$$

$$\left[\vec{i}\cdot\vec{j}\right]=-\left[\vec{j}\cdot\vec{i}\right]\quad \left[\vec{i}\cdot\vec{k}\right]=-\left[\vec{k}\cdot\vec{i}\right]\quad \left[\vec{k}\cdot\vec{j}\right]=-\left[\vec{j}\cdot\vec{k}\right]$$

bo‘lgani uchun

$$\left[\vec{AB}\cdot\vec{AC}\right]=(x_2-x_1)(y_3-y_1)\vec{k}+(x_2-x_1)(z_3-z_1)\vec{j}-(y_2-y_1)(x_3-x_1)\vec{k}+$$

$$+(y_2-y_1)(z_3-z_1)\vec{i}-(z_2-z_1)(x_3-x_1)\vec{j}-(z_2-z_1)(y_3-y_1)\vec{i};$$

Demak,

$$S=\frac{1}{2}\left\|\begin{matrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\end{matrix}\right\|.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi deb nimaga aytiladi?
2. Vektor ko‘paytmaning qanday xossalari bor?
3. Vektor ko‘paytmaning geometrik ma’nosi nima?
4. Vektor ko‘paytma ta’rifidan foydalanib, uchburchak yuzini hisoblash uchun formula keltirib chiqaring.

V BOB.
ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI
1-§. Tekislikda chiziq tenglamasi

1.1. Ikki o'zgaruvchili tenglama va uning grafigi. Chiziq tenglamasi.

Aytaylik,

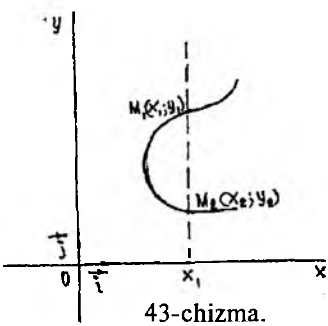
$$F(x;y)=0 \qquad (1)$$

tenglama x, y o'zgaruvchilarni bir–biri bilan bog'lovchi biror tenglama bo'lsin. Bu tenglama o'zgaruvchilaridan birini, masalan y ni ikkinchisining funksiyasi kabi aniqlaydi. U holda (1) ni y ga nisbatan yechsak

$$y=f(x) \qquad (2)$$

(bu yerda $a \le x \le b$) tenglama hosil bo'ladi. (2) da $x \in [a,b]$ kesmada o'zgarganda $f(x)$ funksiyani uzluksiz ravishda o'zgaradi deb qaraymiz.

Dastlab $f(x)$ bir qiymatli funksiya deb qarab, x va y larni $R=\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinatalar tekisligidagi biror M nuqtaning koordinatalari deb faraz qilamiz. U vaqtda x ning har bir qiymati uchun (2) tenglama y ning yakka bitta qiymatini aniqlaydi. Demak, x ning har bir qiymatiga tekislikning koordinatalari $(x; f(x))$ bo'lgan birgina nuqtasi to'g'ri keladi. Agar x uzluksiz ravishda o'zgarib turli qiymatlar olsa, x nuqta $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinatalar tekisligida x va y ning qiymatlariga qarab o'rnini o'zgartira boradi va biror geometrik o'rinni tasvirlaydi. Bu geometrik o'rin chiziq deb ataladi. Agar $f(x)$ funksiya ko'p qiymatli bo'lsa, yani x ning har bir qiymatiga y ning bir necha $y_1; y_2; ...; y_n$ qiymatlari mos kelsa, u holda x ning har bir qiymatiga $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ tekislikda $M_1; M_2; M_n$ nuqtalar to'g'ri keladi. Masalan, $y=f(x)$ funksiya ikki qiymatli bo'lsin.



43-chizma.

Bu holda x ning har bir qiymatiga y ning $y_1 = f(x_1)$ va $y_2 = f(x_1)$ qiymatlari mos kelib, $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinatalar tekisligida x ning x_1 qiymati bilan ikkita $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_1;y_2)$ nuqta aniqlanadi (43-chizma). $[a;b]$ kesmada x uzluksiz o'zgarganda M_1 va M_2 nuqtalar ham o'rinlarini uzluksiz ravishda o'zgartiradi va chiziq deb atalgan geometrik o'rinni tasvirlaydi.

Ta'rif. Agar chiziq ixtiyoriy nuqtasining x va y koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantirsa, va aksincha, by tenglamani qanoatlantiradigan har bir juft $(x;y)$ qiymat chiziq nuqtasini tasvirlasa, u holda (1) tenglamaga chiziqning oshkormas tenglamasi deb ataladi. Analitik geometriyada ikki xil masala qaraladi:

1) berilgan geometrik xossalariga ko'ra chiziq tenglamasini tuzish;

2) tenglamasiga ko'ra koordinatalari tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik obrazini yaratish.

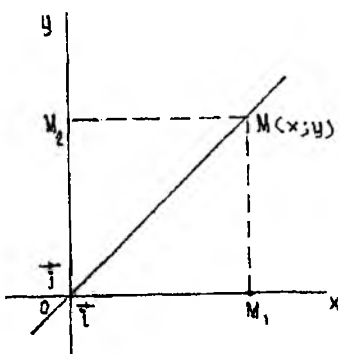
Misol. Koordinata burchaklari bissektrisalarining tenglamalari tuzilsin.

Yechish. Dastlab, bissektrisaga xos geometrik xossani ifodalaymiz. Burchak bissektrisasi bu burchak ichida yotuvchi va uning tomonlaridan barobar uzoqlikdagi nuqtalarning geometrik o'rnini ifodalaydi. By xossaga asoslanib I va III koordinat burchaklarining bissektrisasi tenglamasini tuzamiz (44-chizma).

Agar OM birinchi koordinat burchagining bissektrisasi bo'lib, $M(x;y)$ uning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsa, xossaga ko'ra:

$|M_1M| = |M_2M|$ yoki $y = x$ (3)

Agar M(x.y) uchinchi koordinat burchagining bissektrisasidagi ixtiyoriy nuqta bo'lsa, x ham y ham manfiy son bo'lib, ularning absolyut qiymatlari bir-biriga teng bo'ladi va biz yana (3) tenglamaga kelamiz. Shynga o'xshash II va IV koordinat burchaklarining bissektrisasi tenglamasi



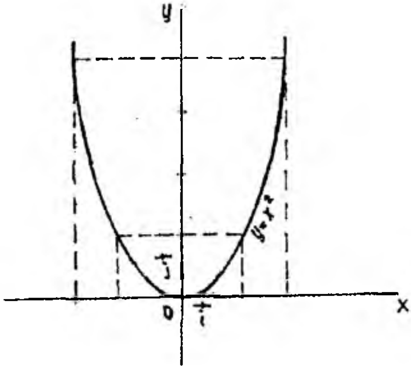
44-chizma.

$$y = -x \tag{4}$$

ekanligini ko'rish mumkin.

Endi chiziqning (1) tenglamasiga ko'ra yasash masalasini qaraymiz. x, y koordinatlarni bog'lovchi biror tenglamaning tekislikda qanday chiziqni tasvir etishini bilish uchun chiziqni shu tenglamaga asoslanib yasash kerak. Tekislikdagi nuqta esa o'zining (x, y) koordinatalari bilan aniqlanadi. Shyning uchun (1) tenglamadagi x ga $x_1; x_2; ...; x_n$ qiymatlarni bersak,

$$F_1(x_1; y) = 0;\ F_2(x_2; y) = 0; ...; F_n(x_n; y) = 0 \qquad (4)$$



45-chizma.

tenglamalar hosil bo'ladi. Bu tenglamalardan x ning $x_1; x_2; ...; x_n$ qiymatlariga mos bo'lgan y ning $y_1; y_2; ...; y_n$ qiymatlarini topamiz, natijada koordinatalari (1) tenglamani qanoatlantiruvchi

$$(x_1; y_1);\ (x_2; y_2);\ ...;\ (x_n; y_n) \qquad (5)$$

nuqtalarga ega bo'lamiz. Bu nuqtalarni koordinatalar sistemasiga joylashtirib, ularni tutash chiziq bilan birlashtirsak (1) tenglamani tasvir etuvchi chiziq hosil bo'ladi. Bu chiziqga ikki o'zgaruvchili (1) tenglamaning grafigi deyiladi.

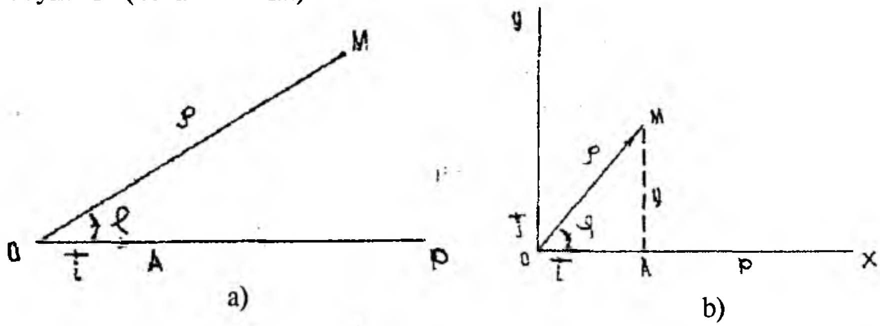
Misol. $y = x^2$ tenglama tasvirlaydigan chiziq yasalsin. **Yasash.** Tenglamadagi x ga $... -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; ...$ qiymatlarni beramiz va shunga mos y ni qiymatlarini topamiz. Buni jadval shaklda yozamiz.

x	...	-3	-2	-1	0	1	2	3	...
y	...	9	4	1	0	1	4	9	...

Natijada $...(-3;9); (-2;4); (-1;1); (0;0); (1;1); (2;4); (3;9); ...$ nuqtalar hosil bo'ladi. Bu nuqtalarni $\{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ sistemada joylashtirib, ularni birlashtirsak, $y = x^2$ funksiyaning grafigi ya'ni parabola chizig'i hosil bo'ladi (45-chizma).

1.2. Qutb koordinata sistemasi. Nuqtaning dekart va qutb koordinatalari orasidagi bog'lanish.

Matematikada bir necha xil koordinatalar sistemasi bilan bir qatorda qutb koordinatalar sistemasi ham qo'llaniladi. Oriyentatsiyali tekislikda biror O nuqta, $[OR)$ nur va $[OR)$ nurda yotuvchi $\overline{OA} = \vec{i}$ birlik vektorni olamiz. (Tekislikda olingan $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}\}$ koordinata sistemasi $\vec{i}$ vektorini O nuqta atrofida $\vec{j}$ vektor ustiga tushirish uchun qisqa yo‘l bo‘yicha burish soat strelkasi harakatiga teskari bo‘lsa, koordinata sistemasi musbat oriyentatsiyali, tekislikni esa oriyentatsiyalangan deyiladi.) Hosil qilingan geometrik obraz qutb koordinatalar sistemasi deyiladi. (46-a chizma.)



46-chizma.

Uni $R=\{0;\bar{i}\}$ ko‘rinishda belgilaymiz. O nuqta qutb boshi, $[OR)$ nur esa qutb o‘qi deyiladi. M nuqtaning tekislikdagi holati ikki son: biri $[OA]$ masofa, ikkinchisi $[OR)$ nur $[OM)$ nurning ustiga tushishi uchun burilishi kerak bo‘lgan $\varphi=\bar{i}\wedge OM$ burchak bilan to‘la aniqlanadi. Qutb o‘qini $[OM)$ nur ustiga tushgunga qadar burish soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda bajarilsa, φ - musbat deb, aks holda φ – manfiy deb hisoblanadi.

$\rho=|\overline{OM}|$, ρ ni M nuqtaning qutb radiusi, φ – ni M nuqtaning qutb burchagi ρ,φ larni M nuqtaning qutb koordinatalari deyiladi va $M(\rho;\varphi)$ ko‘rinishida belgilanadi. O nuqta uchun $\rho=0$ bo‘lib, φ aniqlanmagan hisoblanadi. Agar ρ va φ burchak $0\le\rho\le\infty$; $0\le\varphi<2\pi$ oraliqda o‘zgarsa, tekislikning har bir nuqtasi qutb koordinatalari bilan mos keladi.

Har bir qutb koordinata sistemasiga musbat oriyentirlangan to‘g‘ri burchakli koordinata sistemasini mos qo‘yish mumkin. Bunda O nuqta (qutb) koordinatalar boshi bo‘lib xizmat qiladi. Faraz qilaylik ρ,φ lar M nuqtaning qutb koordinatalari, x,y esa M nuqtaning to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasidagi koordinatalari bo‘lsin (46-b chizma.):

U holda chizmadan $$\begin{cases} x=\rho\cos\varphi; \\ y=\rho\sin\varphi. \end{cases} \qquad (6)$$

M nuqtaning qutb koordinatalari ρ va φ ma'lum bo'lsa (6) dan $x;y$ ni topish mumkin. $(6)\Rightarrow$

$$x^2+y^2=\rho^2 \;\Rightarrow\; \rho=\sqrt{x^2+y^2}. \tag{7}$$

Agar $\rho\neq 0$ bo'lsa (6),(7) $\Rightarrow$

$$\cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}; \qquad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{8}$$

$M\neq 0$ nuqtaning to'g'ri burchakli dekart koordinatalari x,y ma'lum bo'lsa, (7), (8) dan ρ va φ larni topish mumkin. Demak, (6), (8) formulalar dekart va qutb koordinatalari sistemasini bogl'ovchi formulalardir. Tekislikda qutb koordinata sistemasi berilgan bo'lsin. Bu sistemada biz ρ yoki φ lardan birini o'zida saqlovchi $f(\rho;\varphi)$ ifodani olaylik. Bu ifoda tekislikda bir qancha figurani ifodalashi mumkin.

Masalan, figura $f(\rho;\varphi)=\rho-4$ munosabat bilan aniqlangan bo'lsin. U holda:

a) $F_1=\{M(\rho;\varphi)|\rho=4\}$ (markazi O qutbda va radiusi $\rho=4$ ga teng bo'lgan aylana)

b) $F_2=\{M(\rho;\varphi)|\rho-4>0\}$ (F_1 aylanadan tashqaridagi nuqtalar to'plami);

v) $F_3=\{M(\rho;\varphi)|\rho-4<0\}$ (O markazli $\rho=4$ radiusli ochiq doira.);

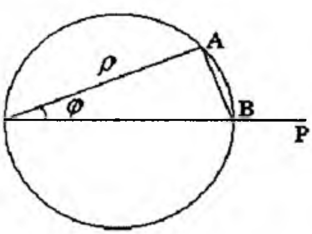
g) $F_4=\{M(\rho;\varphi)|\rho-4\geq 0\}$ $(F_1\cup F_2)$;

d) $F_5=\{M(\rho;\varphi)|\rho-4\leq 0\}$ ($\rho=4$ radiusli doira);

e) $F_6=\{M(\rho;\varphi)|\rho-4\neq 0\}=(F_2\cup F_3)$;

$f(\rho;\varphi)=0$ tenglamani figuraning berilgan qutb koordinata sistemasidagi tenglamasi deyiladi.

Qutb koordinata sistemasining tanlanishiga qarab bitta figurani ifodalovchi tenglama turli xil bo'lishi mumkin.



47-chizma.

Masalan, qutb koordinata sistemasining qutbi aylana markazida joylashsa

$$\rho=a(a-const) \tag{9}$$

tenglama markazi qutbda radiusi a ga teng bo'lgan aylanani ifodalaydi.

Agar qutb aylanada yotib, qutb o'qi esa aylana markazidan o'tsa, tenglama boshqa ko'rinishda bo'ladi (47-chizma).

$$\rho = 2a\cos\varphi . \qquad (10)$$

(9) va (10) tenglamalarni quyidagicha o‘zgartirib yozamiz:

$$\rho - a = 0; \qquad (11)$$

$$\rho - 2a\cos\varphi = 0. \qquad (12)$$

(11), (12) tenglamalar bitta aylanani ifodalaydi, lekin tenglamalar har xil. Bittasi o‘zida ρ ni saqlasa, ikkinchisi ρ va φ ni o‘zida saqlaydi (chunki koordinatalar sistemasi har xil).

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Chiziq tenglamasini keltirib chiqaring.
2. Nuqtaning qutb koordinatalarini tushuntiring.
3. Nuqtaning qutb va dekart koordinatalari orasidagi boglanishni ifodalovchi formulani yozing.

2-§. Tekislikda to‘g‘ri chiziqning turli tenglamalari

Ta’rif. To‘g‘ri chiziqqa parallel yoki shu to‘g‘ri chiziqda yotuvchi har qanday vektor uning yo‘naltiruvchi vektori deyiladi. Quyida biz to‘g‘ri chiziqning berilish usullariga qarab uning tenglamasini keltirib chiqamiz.

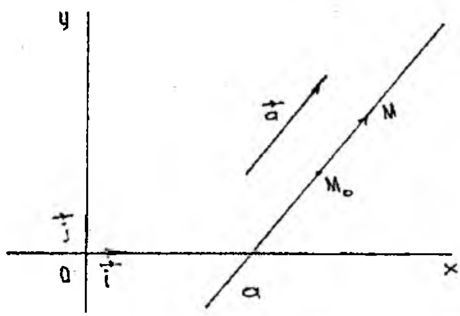
2.1. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari.

To‘g‘ri chiziq a biror $\{0;\vec{i}\,\vec{j}\}$ koordinata sistemasiga nisbatan o‘zining biror $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasining va yo‘naltiruvchi $\vec{a}=\{a_1;a_2\}$ vektorining berilishi bilan aniqlanadi. To‘g‘ri chiziqda ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqta olamiz. U holda $\overline{M_0M}$ vektori $\vec{a}$ vektori bilan kollinear bo‘ladi. U holda shunday t soni topiladiki

$$\overline{M_0M} = t\vec{a}; \quad t \in R \qquad (1)$$

munosabat bajariladi (48-chizma).

Aksincha, biror M nuqta uchun (1) munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\overline{M_0M} \parallel \vec{a}$ demak (1) munosabat faqat to‘g‘ri chiziqqa tegishli M nuqtalar uchungina bajariladi. M, M_0 nuqtalarning radius vektorlarini mos ra-



48-chizma.

vishda $\vec{r},\vec{r}_0$ bilan belgilasak ya'ni, $\vec{r}=\overline{OM}$, $\vec{r}_0=\overline{OM_0}$ bo'lsa, u holda $\overline{M_0M}=\vec{r}-\vec{r}_0$ bo'ladi. (1) tenglikdan

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{a} \tag{2}$$

Bu tenglamaga a to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi deyiladi. t ga turli qiymatlar berib, a ga tegishli nuqtalarning radius vektorlarini hosil qilamiz; (2) tenglamaga kirgan t o'zgaruvchi parametr deyiladi. Endi (2) ni koordinatalarda yozaylik, u holda quyidagi tenglamalar hosil bo'ladi:

$$\begin{aligned} x&=x_0+a_1t;\\ y&=y_0+a_2t. \end{aligned} \tag{3}$$

Bu tenglamalar to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari deb ataladi. Agar a to'g'ri chiziq koordinata o'qlaridan birortasiga ham parallel bo'lmasa, ya'ni $a_1a_2\neq 0$ shart bajarilsa, (3) dan quyidagi

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2} \tag{4}$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bundan

$$a_2x-a_1y+(-a_2x_0+a_1y_0)=0. \tag{5}$$

Bu yerda shartga ko'ra a_1,a_2 ning bittasi noldan farqli, shy sababli (5) birinchi darajali tenglamadir. Bundan esa har qanday to'g'ri chiziq birinchi darajali tenglama bilan ifodalanadi degan muhim xulosaga kelamiz.

Misol. $M_0(5;-3)$ nuqta orqali o'tuvchi va yo'naltiruvchi vektori $\vec{a}=\{2;-1\}$ bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Masala shartiga ko'ra

$x_0=5;\quad y_0=-3;\quad a_1=2;\quad a_2=-1$ (3) formulaga asosan $x=5+2t;\quad y=-3-t$ tenglamalarga ega bo'lamiz. Bu tenglamalar biz izlagan to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalaridir.

2.2. Ikki nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi.

Bizga ma'lumki ikki nuqta orqali yagona to'g'ri chiziq o'tadi. Agar M_1 va M_2 nuqtalarning $\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ sistemaga nisbatan koordinatalari ma'lum bo'lsa shu nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz.

Aytaylik $M_1(x_1;y_1)$; $M_2(x_2;y_2)$ bo'lsin. Izlanayotgan a to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqta olamiz.

Agar $\overline{M_1M_2}=(x_2-x_1;\ y_2-y_1)$ vektori $\overline{M_1M}=(x-x_1;\ y-y_1)$ vektoriga kollinear bo‘lsa, M nuqta to‘g‘ri chiziqda yotadi, bu deganimiz quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$\overline{M_1M}=t\overline{M_1M_2} \tag{6}$$

(6) munosabatda vektorlarni tengligiga asosan

$$x-x_1=t(x_2-x_1) \quad \text{va} \quad y-y_1=t(y_2-y_1) \tag{7}$$

ga ega bo‘lamiz.

Bundan esa

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1} \tag{8}$$

(8)–tenglama berilgan ikki nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi deyiladi. Bu tenglama $x_2-x_1\neq 0$ va $y_2-y_1\neq 0$ bo‘lganda o‘rinli. Agar $x_2-x_1=0$ bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziq (Oy) o‘qqa parallel bo‘lib, tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$x-x_1=0 \quad \text{yoki} \quad x=x_1$$

Misol. ABC uchburchakning uchlarining koordinatalari berilgan: $A(13;4)$, $B(10;-6)$, $C(13;12)$. AB va BC tomonlarining tenglamasini tuzing.

Yechish. 1) AB tomonini tenglamasini tuzamiz. (8) formulaga murojaat qilamiz.

$$\frac{x-13}{-3}=\frac{y-4}{-10}; \qquad (AB)$$

$$-10(x-13)=-3(y-4); \quad -10x+130=-3y+12; \quad 10x-3y-118=0.$$

Endi BC tomonini tenglamasini tuzamiz.

$$\frac{x-10}{13-10}=\frac{y+6}{12+6}; \quad \frac{x-10}{3}=\frac{y+6}{18}; \quad 18x-180=3y+18; \quad 18x-3y-198=0. \quad (BC)$$

2.3. To‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan kesgan kesmalari bo‘yicha tenglamasi.

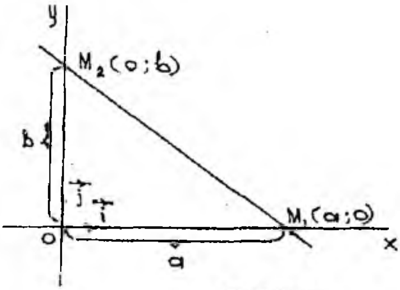
a to‘g‘ri chiziqni aniqlovchi M_1 va M_2 nuqtalar koordinata o‘qlari (Ox) va (Oy) da yotsin.

Aniqlik uchun $M_1(a;0)$ (Ox) o‘qda, $M_2(0;b)$ (Oy) o‘qida yotsin (49-chizma). Bu holda (8) tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0} \text{ yoki } \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1. \tag{9}$$

(9) tenglamaga to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan kesgan kesmalari bo‘yicha tenglamasi deyiladi, bu yerda a va b lar to‘g‘ri chiziqni mos ravishda (Ox) va (Oy) o‘qlaridan kesgan kesmalarini ifodalaydi.

Misol. To‘g‘ri chiziq tenglamasi $2x-8y-16=0$, uning koordinata o‘qlari bilan kesishgan nuqtalarini toping.



49-chizma.

Yechish. Kesishgan nuqtalarning koordinatalarini topish uchun, berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalarga nisbatan tenglamasi (9) ko‘rinishiga keltiramiz.

$$\frac{x}{8}-\frac{y}{2}=1.$$

Demak, koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalari: $A(8;0)$ va $B(0;-2)$.

2.4. To‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi.

Dastlab to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti tushunchasini kiritamiz.

Ta’rif. $\vec{a}$ vektor $\{\vec{i};\vec{j}\}$ bazisda a_1, a_2 koordinatalarga ega va $a_1 \neq 0$ bo‘lsa, u holda $a_2/a_1=k$ son $\vec{a}$ vektorning burchak koeffitsienti deyiladi. To‘g‘ri chiziqni burchak koeffitsientli tenglamasini keltirib chiqaramiz. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqni bitta nuqtasi va burchak koeffitsienti tekislikda shu to‘g‘ri chiziq vaziyatini to‘la aniqlaydi. (Oy) o‘qqa parallel to‘g‘ri chiziqlar uchun burchak koeffitsient mavjud emas. Shyning uchun (Oy) o‘qqa parallel bo‘lmagan a to‘g‘ri chiziq $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o‘tsin va k burchak koeffitsientga ega bo‘lsin. a to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. (4) ga asosan $a_1 \neq 0$ shartda

$$y-y_0=\frac{a_2}{a_1}(x-x_0) \text{ bu yerda } \frac{a_2}{a_1}=k$$

demak,

$$y-y_0=k(x-x_0) \tag{10}$$

$$\text{yoki} \quad y = kx + b \tag{11}$$

bu yerda $b = y_0 - kx_0$

(11) tenglama to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi. $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar orqali o‘tgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti, $k = \dfrac{y_2 - y}{x_2 - x_1}$ formula bilan aniqlanadi.

To‘g‘ri chiziqning bunday berilishi, to‘g‘ri chiziq Oy o‘qiga parallel bo‘lmagan holda to‘g‘ridir. k ni yani burchak koeffitsientni geometrik izohlaymiz (50-chizma). M_1M_2N uchburchakdan, burchak koeffitsient $k = tg\alpha$ ekanligi ko‘rinadi,bu yerda α $-(Ox)$ o‘qini soat strelkasi yo‘nalishiga teskari yo‘nalishda burib, a to‘g‘ri chiziq bilan ustma-ust tushgunga qadar burish burchagi, shuning uchun ham $k-$ burchak koeffitsienti deyiladi.

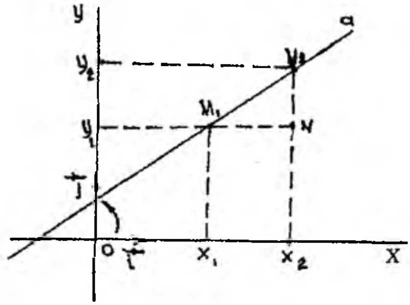
1-misol. $M_1(4;2)$ va $M_2(5;3)$ nuqtalar orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsientini toping.

Yechish. (10) formulaga ko‘ra $k = \dfrac{3-2}{5-4} = 1$ bundan $k = tg\alpha = 1$

Demak, $\alpha = 45^0$.

2-misol. (Ox) o‘qi bilan 45^0 burchak tashkil etib $M(2;-3)$ nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing (50-chizma).

Yechish. Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsienti $k = tg\alpha = tg45^0 = 1$ ga teng. (10) tenglamaga $x_0 = 2;\ y_0 = -3$ qiymatlarni qo‘yib quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz.



50-chizma.

$$y + 3 = x - 2 \quad \text{yoki} \quad x - y - 5 = 0.$$

2.5. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.

Yuqoridagi tenglamalarning barchasi uchun xarakterli bo‘lgan narsa, ularning birinchi darajali bo‘lishligidir.

Shuning uchun, tubandagi birinchi darajali

$$Ax + By + C = 0 \tag{12}$$

tenglama to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. (12) umumiy tenglama bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning koordinata o‘qlariga nisbatan joylashuvida, tubandagi hollar bo‘lishi mumkin:

a) agar $C=0$ bo‘lsa, (12)–to‘g‘ri chiziq koordinata boshidan o‘tadi;

b) agar $A=0, C\neq 0$ bo‘lsa (12) to‘g‘ri chiziq Ox o‘qiga, agar $B=0, C=0$ bo‘lsa (12) to‘g‘ri chiziq Oy o‘qiga parallel bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasidan burchak koeffitsienti k ni topaylik. $k=-A/B=a_2/a_1$ demak, to‘g‘ri chiziq $\vec{a}$ yo‘naltiruvchi vektorining koordinatalari sifatida $-B$, A sonlarini qabul qilish mumkin, ya’ni umumiy tenglamasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori sifatida:

$$\vec{a}=\{-B;\, A\} \tag{13}$$

vektorni olish mumkin.

Tekislikning $(x;\, y)$ koordinatali barcha nuqtalarining (12) to‘g‘ri chiziqdan bir tomonda joylashishi uchun $Ax+By+C>0$ yoki $Ax+By+C<0$ tengsizlikni bajarilishi kerak. $M_1(x_1;\, y_1)$ va $M_2(x_2;\, y_2)$ nuqtalarning to‘g‘ri chiziqning turli tomonida joylashishlari uchun $Ax_1+By_1+C>0$ va $Ax_2+By_2+C<0$ lar turli xil ishoraga ega bo‘lishlari zarur va yetarli.

1-misol. $5x-2y+4=0$ to‘g‘ri chiziqning normal vektorini ko‘rsating.

Yechish. Normal vektor $\overline{N}=\{A;\, B\}$ ko‘rinishda bo‘lgani uchun berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasida $A=5;\ B=-2$.

Shuning uchun $\overline{N}=\{5;\, -2\}$.

2-misol. $2x+y-4=0$ va $x-y+1=0$ to‘g‘ri chiziqlarni kesishish nuqtasi orqali o‘tib $x+y-5=0$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Dastlab ikki to‘g‘ri chiziqni kesishish nuqtasini topamiz, buning uchun kesishish nuqtasini koordinatalarini $x_1;\ y_1$ deb olamiz. U holda,

$$\begin{cases} 2x_1+y_1-4=0; \\ x_1-y_1+1=0; \end{cases}$$

sistemadan $x_1=1;\, y_1=2$ ga ega bo‘lamiz.

Izlanayotgan to‘g‘ri chiziqni yo‘naltiruvchi vektori $\vec{a}$ sifatida $x+y-5=0$ to‘g‘ri chiziqning normal vektorini olsa bo‘ladi. $\overline{N}=\{1;1\}$ y holda izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi tubandagicha bo‘ladi.

$1(x-1)+1(y-2)=0$ yoki $x+y-3=0$.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. To‘g‘ri chiziqning turli ko‘rinishdagi tenglamalarini yozing.
2. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasiga ko‘ra tekshiring.

3-§. Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziqning o‘zaro joylashuvi

Tenglamalari bilan berilgan d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlarni olaylik.

$$d_1:\ A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad (1)$$

$$d_2:\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \quad (2)$$

Bu to‘g‘ri chiziqlarning tekislikda o‘zaro joylashuvini tekshirish uchun (1) va (2) ni sistema qilib tekshirish kerak. Sistemani tekshirish esa chiziqli tenglamalar sistemasini tekshirishda ko‘rib o‘tilgan edi. d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvida ushbu hollar bo‘lishi mumkin: a) d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar kesishadi (sistema yagona yechimga ega); b) d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar parallel, bu holda $A_1/A_2 = B_1/B_2$ bo‘ladi.; v) agar $A_1/A_2 = B_1/B_2 = C_1/C_2$ bo‘lsa, d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar ustma-ust tushadi.

Misol. $3x - 4y - 2 = 0$ va $x + y - 3 = 0$ to‘g‘ri chiziqlarning tekislikda joylashuvini tekshiring .

Yechish. Tekislikda joylashuvini tekshirish uchun tubandagi sistemani tekshiramiz

$$\begin{cases} 3x - 4y - 2 = 0; \\ x + y - 3 = 0. \end{cases}$$

By sistemadan kesishish nuqtasini topamiz: (2;1)

Demak, to‘g‘ri chiziqlar kesishadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

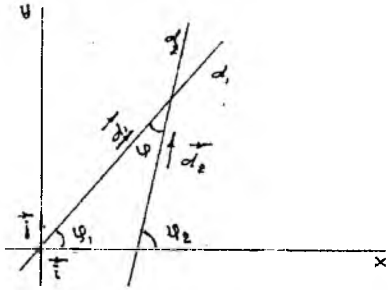
1. Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziq joylashuvini tushintirib bering.

4-§. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak

d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak deganda, bu to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi (φ burchak 0^0 dan 90^0 gacha oraliqda o‘zgaradi).

d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar quyidagi tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin (51-chizma.):

$$d_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0; \quad (1)$$



51-chizma.

$$d_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (2)$$

$\vec{d}_1 = \{-B_1 ; A_1\}$ vektor d_1 to‘g‘ri chiziqning $\vec{d}_2 = \{-B_2 ; A_2\}$ vektor d_2 to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektoridir. U holda ta’rifga asosan d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$\cos\varphi = \cos(\vec{d}_1 \wedge \vec{d}_2) = \frac{\vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2}{|\vec{d}_1| \cdot |\vec{d}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

(3)

Xususiy holda,

$$\vec{d}_1 \perp d_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (4)$$

(4) tenglik ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti hisoblanadi. $\{0; \vec{i}\,; \vec{j}\}$ sistemada Oy o‘qqa parallel bo‘lmagan d_1 va d_2 to‘g‘ri chiziqlar burchak koeffitsientli tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin (51-chizma).

$$d_1 : y = k_1x + b_1;$$
$$d_2 : y = k_2x + b_2.$$

Bu holda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak tubandagi formula bilan ifodalanadi:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}; \qquad (5)$$

$$ctg\varphi = \frac{1 + k_1k_2}{k_2 - k_1}. \qquad (6)$$

$\varphi -$ bu yerda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak (5) formula to‘g‘ri chiziqlar perpendikular bo‘lmagan holda ishlatiladi. (5) va (6) formuladan $k_1 = k_2$ to‘g‘ri chiziqlarning parallellik, $k_1k_2 = -1$ to‘g‘ri chiziqlarning perpendikularlik shartlari kelib chiqadi.

Agar to‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalar bilan berilsa, u holda

$$tg\varphi = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & A_2 \\ B_1 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2 + B_1B_2}. \qquad (7)$$

To‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, u holda

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2} \tag{8}$$

ikki to‘g‘ri chiziqning parallellik sharti,

$$A_1A_2+B_1B_2=0 \tag{9}$$

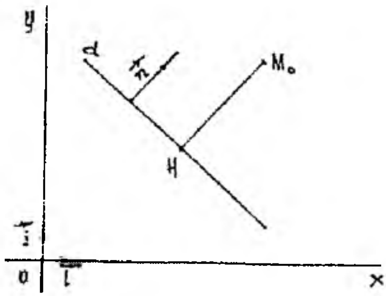
esa ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti hisoblanadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak uchun formula keltirib chiqaring.
2. Ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik va parallellik shartlari nimadan iborat?

5-§. Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa

$\{0;\vec{i};\vec{j}\}$ koordinata sistemasida $Ax+By+C=0$ d to‘g‘ri chiziq va $M_0(x_0;y_0)$ nuqta berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan d to‘g‘ri chiziqqa perpendikular o‘tkazamiz va ularni kesishgan nuqtasini H bilan belgilaymiz (52-chizma).



52-chizma.

$\overline{HM}$ vektorning uzunligini M_0 nuqtadan d to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa deyiladi va $\rho(M_0,d)$ ko‘rinishda belgilanadi. $\vec{n}=\{A,B\}$ vektor berilgan to‘g‘ri chiziqning normal vektori. Agar M_0 nuqta d to‘g‘ri chiziqni nuqtasi bo‘lsa, $\rho(M_0,d)=0$ bo‘ladi. Agar M_0 nuqta d to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo‘lmasa, u holda $\rho(M_0,d)=|\overline{HM_0}|$,

$|\overline{HM_0}|$ va $\vec{n}$ vektorlar kollinear, chunki $\vec{n}$ vektor d to‘g‘ri chiziqning normali. U holda nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa tubandagicha bo‘ladi:

$$\rho(M_0,d)=\frac{|\overline{HM_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{1}$$

Agar H nuqtaning koordinatalari $x_1;y_1$ bo‘lsa, u holda $\overline{HM_0}=\{x_0-x_1;\,y_0-y_1\}$ bo‘ladi. H nuqta d to‘g‘ri chiziqqa tegishli bo'lgani uchun $A_1x+B_1y+C_1=0$, u holda (1) formula quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\overline{HM_0}\cdot\vec{n}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)=Ax_0+By_0-(Ax_1+Bx_1)=Ax_0+By_0+C=0 \quad (2)$$

Shu bilan birga $|\vec{n}|=\sqrt{A^2+B^2}$ ekanini nazarda tutsak (1) formula quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\rho(M_0,d)=\frac{|Ax_0+Bx_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}} \quad (3)$$

(3) berilgan M_0 nuqtadan berilgan d to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani hisoblash formulasidir.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Tekislikda nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasini keltirib chiqaring.

6-§. To'g'ri chiziqlar dastasi

To'g'ri chiziqlar dastasi ikki xil bo'ladi: kesishuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi va parallel to'g'ri chiziqlar dastasi. Agar 4-§ dagi (1) va (2) tenglamalar bilan ifodalanuvchi to'g'ri chiziqlar biror nuqtada kesishsa, u nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar kesishuvchi to'g'ri chiziqlar dastasini tashkil qiladi. Shu nuqta dasta markazi deyiladi.

Agar (1) va (2) to'g'ri chiziqlarni yo'naltiruvchi vektorlari parallel yoki ustma-ust tushsa, u holda shu yo'nalishdagi to'g'ri chiziqlar parallel to'g'ri chiziqlar dastasini ifodalaydi. Kesishuvchi to'g'ri chiziqlar dastasining markazi orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0;$$

bu yerda, α va β lar bir vaqtda nolga teng bo'lmagan har xil qiymatlarni qabul qiladi. Agar kesishuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi markazining koordinatlari $(x_0;y_0)$ berilgan bo'lsa, u holda dasta tenglamasi tubandagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\alpha(A_1x_0+B_1y_0+C_1)+\beta(A_2x_0+B_2y_0+C_2)=0. \quad (1)$$

Misol. To'g'ri chiziqlar $2x+3y+10=0$ va $4x-5y-5=0$ tenglamalar bilan berilgan. Shu to'g'ri chiziqlar va $M(2;3)$ nuqta orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Dastlab berilgan to‘g‘ri chiziqlardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasi tenglamasini tuzamiz.

$$2x+3y+10+\lambda(4x-5y-5)=0\,. \qquad (*)$$

Bu to‘g‘ri chiziqlar dastasidan $M(2;3)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqni ajratib olishimiz kerak. Biz izlayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini M nuqta koordinatalari qanoatlantirishi kerak. Shuning uchun M nuqta koordinatalarini (*) tenglamaga qo‘yamiz.

$$4+9+10+\lambda(4\cdot 2-5\cdot 3-5)=0 \qquad \lambda=\frac{23}{12}.$$

Bu qiymatni (*) tenglamaga qo‘yib izlanayotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini olamiz. $116x-79y+5=0$.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar dastasini tushuntiring.
2. Parallel to‘g‘ri chiziqlar dastasini ta’riflang.

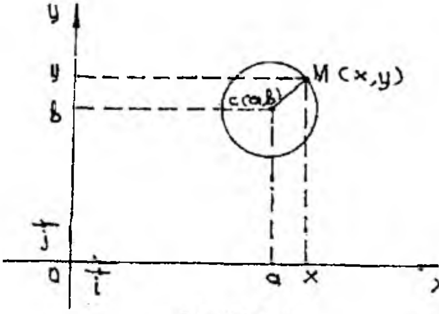
7-§. Tekislikda ikkinchi tartibli egri chiziqlar

Bizga ma’lumki, tekislikda to‘g‘ri burchakli Dekart koordinata sistemasida har qanday birinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili tenglama ya’ni $Ax+By+C=0$ ko‘rinishdagi tenglama (A va B koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng emas) to‘g‘ri chiziq tenglamasi edi. Endi ikkinchi tartibli ikki o‘zgaruvchili tenglamani qaraymiz. Bunday tenglama bilan ifodalanuvchi chiziqlar ikkinchi tartibli egri chiziqlar deyiladi. Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni turlari bilan tanishamiz.

7.1. Aylana.

$R(0;\vec{i};\vec{j})$ koordinata sistemasi berilgan bo‘lsin. Bu sistemaga nisbatan $C(a;b)$ markazli va R radiusli aylana tenglamasini tuzamiz.

Aylananing har bir nuqtasi berilgan $C(a;b)$ nuqtadan barobar teng uzoqda yotgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rni bo‘lishi ta’rifidan foydalanamiz (53-chizma).



53-chizma.

$M(x;y)$—aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra

$$MC = R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} \quad \text{yoki} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \qquad (1)$$

(1) tenglama markazi $C(a;b)$ nuqtada va radiusi R ga teng aylananing kanonik tenglamasi. Agar aylana markazi koordinatalar sistemasi boshi bilan ustma-ust tushsa, tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$x^2 + y^2 = R^2. \qquad (2)$$

Egri chiziq parametrik ko‘rinishdagi tenglamaga ham ega. Aytaylik M nuqta egri chiziq bo‘ylab harakatlansin va biror t vaqtda $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ koordinatalarga ega bo‘lsin.

U holda

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \qquad (3)$$

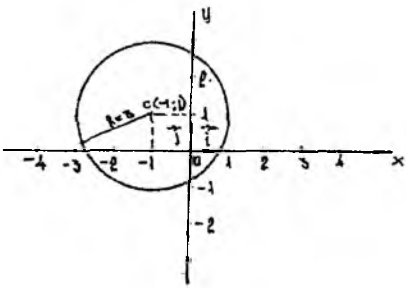
tenglamalar sistemasi egri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi, bunda t parametr hisoblanadi. Masalan,

$$\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad (4)$$

tenglamalar aylananing parametrik tenglamalaridir. Agar egri chiziqning parametrik tenglamalari ma’lum bo‘lsa, undan foydalanib, egri chiziqning oshkormas ko‘rinishdagi tenglamasini keltirib chiqarish mumkin. Oshkormas tenglama ba’zi hollarda chiziq tenglamasini ifodalamasligi ham mumkin. Boshqacha aytganda chiziqqa tegishli bo‘lmagan nuqtaning koordinatalari oshkormas tenglamani qanoatlantirishi mumkin. Agar (4) sistemadan t parametrni chiqarsak, $x^2 + y^2 = R^2$ tenglamaga ega bo‘lamiz.

Misol. $C(-1;1)$ nuqtada, radiusi 2 birlik bo‘lgan aylana yasang.

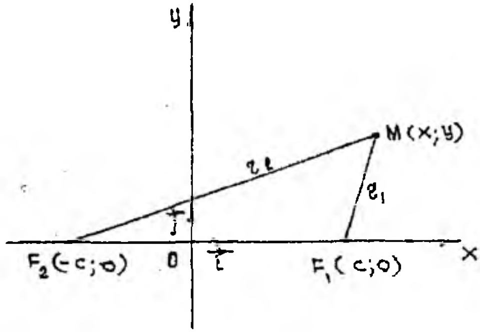
Yechish. Shartga ko‘ra aylana markazining koordinatalari $a=-1$; $b=1$ va radiusi uzunligi $R=2$ bo‘lganligidan $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ formulaga ko‘ra aylana tenglamasi $(x+1)^2+(y-1)^2=4^2$ bo‘ladi (54-chizma).



54-chizma.

7.2. Ellips.

1-ta'rif. Ixtiyoriy nuqtasidan fokuslari deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi o'zgarmas miqdor $2a$ ga teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga **ellips** deb ataladi.



55-chizma.

O'zgarmas miqdor $2a$ fokuslar orasidagi masofadan katta deb olinadi. Ellips tenglamasini tuzish uchun koordinatalar sistemasini tubandagicha kiritamiz. Berilgan ikki nuqtani birlashtiruvchi to'g'ri chiziqni abssissalar o'qi deb qabul qilamiz, koordinatlar boshini esa berilgan nuqtalar o'rtasida olamiz.

Berilgan F_1 va F_2 fokuslar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilaymiz. U holda F_1, F_2 nuqtalarning koordinatlari mos ravishda $(c;0)$ va $(-c;0)$ ga teng bo'ladi.

Ta'rifga ko'ra $2a > 2c$ yoki $a > c$. Ellips ixtiyoriy nuqtasini $M(x;y)$ bilan belgilaymiz (55-chizma).

Ellipsdagi ixtiyoriy M nuqtaning F_1 va F_2 fokuslaridan masofalarini uni fokal radiuslari deyiladi va r_1, r_2 bilan belgilanadi, ya'ni $r_1 = \rho(F_1, M)$ va $r_2 = \rho(F_2, M)$ ellipsning ta'rifiga ko'ra

$\rho(F_1, M) + \rho(F_2, M) = 2a$. (*)

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra

$$\left.\begin{aligned} |F_1, M| &= \sqrt{(x-c)^2 + y^2}; \\ |F_2, M| &= \sqrt{(x+c)^2 + y^2}; \end{aligned}\right\} \quad (**)$$

$$(**),\ (*) \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a.$$

Bu tenglamani 1-chi hadini o'ng tomonga o'tkazib, hosil bo'lgan tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2;$$

bundan $2cx = -4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + 4a^2 - 2cx.$

Bu ifodani ixchamlashtirgandan keyin quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz.

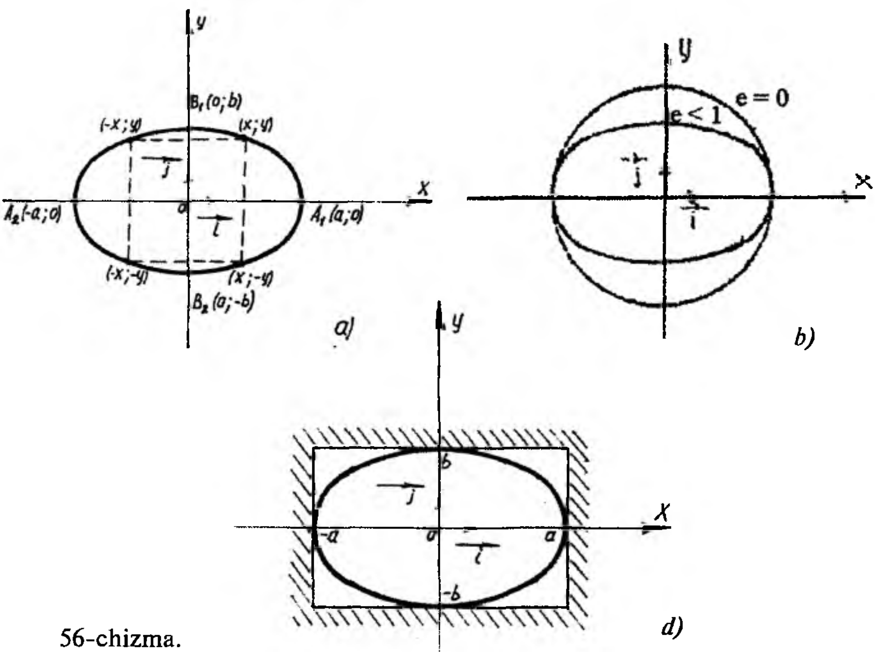
$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a(a^2-c^2).$$

Tenglamaning ikkala qismini $a^2(a^2-c^2)$ ga bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$ $a>c$ bo‘lgani uchun a^2-c^2 musbat miqdordir, uni b^2 bilan belgilasak tenglama

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1. \tag{5}$$

ko‘rinishni oladi. (5) tenglamaga ellipsning kanonik tenglamasi deyiladi. Ellipsning $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (5) kanonik tenglamasiga ko‘ra shaklini o‘rganamiz.

1) (5) tenglama bilan aniqlangan ellips koordinatlar sistemasi o‘qlariga nisbatan simmetrikdir. Haqiqatan $(x;y)$ shu ellipsning biror nuqtasi bo‘lsa, ya’ni x,y sonlar (5) tenglamani qanoatlantirsa, u vaqtda (5) tenglamada o‘zgaruvchi x,y ning faqat kvadratlari qatnashgani uchun bu tenglamani $(-x;y),(x;-y)$ va $(-x;-y)$ nuqtalarning koordinatalari ham qanoatlantiradi (56-a chizma).



56-chizma.

Shuning uchun koordinata o'qlari ellipsning simmetriya o'qlaridir. Simmetriya o'qlarining kesishgan nuqtasi $O(0;0)$ ellipsning markazi deyiladi, fokuslar yotgan o'qi uning fokal o'qi deyiladi.

2) Ellipsning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtalarini topamiz. Masalan (Ox) o'q bilan kesishgan nuqtalarni topish uchun ushbu tenglamalarni birgalikda yechamiz.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=0 \end{cases} \tag{6}$$

(6) sistemaning ikkinchi tenglamasidan $y=0$ ni birinchi tenglamasiga qo'ysak, $x=\pm a$ hosil bo'ladi. Shunday qilib ellips (Ox) o'qini $A_1(a;0)$ va $A_2(-a;0)$ nuqtalarda kesadi. Shu singari ellipsning (Oy) o'q bilan kesishgan $B_1(0;b)$ va $B_2(0;-b)$ nuqtalari topiladi. Demak, ellipsning barcha nuqtalari tomonlari $2a, 2b$ bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichiga joylashgan (56-d chizma).

Shu bilan birga ellips chiziqidan tashqarida joylashgan nuqtalarni ellips tenglamasini qanoatlantirmasligini ham ko'rsatish mumkin. Faraz qilaylik ellips chiziqiga tegishli bo'lmagan $N\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ nuqta ellips chiziqiga tegishli bo'lsin. U holda bu nuqta ellips tenglamasini qanoatlantirishi kerak, ya'ni

$$\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{a^2}+\frac{\left(\frac{b}{2}\right)^2}{b^2}=1$$

tenglik bajarilishi kerak. Ammo biz $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\neq 1$ ga ega bo'lamiz. Demak farazimiz noto'g'ri. $N\left(\frac{a}{2};\frac{b}{2}\right)$ nuqta ellipsga tegishli emas.

2-ta'rif. Ellipsning fokuslari orasidagi masofani katta o'qining uzunligiga nisbati ekssentrisiteti deyiladi va e harfi bilan belgilanadi.

Ta'rifga ko'ra

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a}. \tag{7}$$

Hamda $c<a \Rightarrow 0<e<1$.

Ellipsning ekssentrisiteti uning shaklini aniqlashda muhim rol o'ynaydi. Haqiqatan ham $c^2=a^2-b^2$, shuning uchun

$$e^2=\frac{c^2}{a^2}=\frac{a^2-b^2}{a^2}=1-\left(\frac{b^2}{a^2}\right) \text{ bundan } \frac{b}{a}=\sqrt{1-e^2}$$

ekssentrisitet $e\Rightarrow 1$ da $b/a\Rightarrow 0$ bo'lib, b kichiklashadi va ellips (Ox) o'qqa qisila boradi, aksincha, $e\Rightarrow 0$ bo'lsa bu holda ellips aylanaga yaqinlasha boradi. Xususiy holda $a=b$ bo'lsa, u aylanadan iborat bo'ladi (56-b chizma).

Ellipsning koordinata o'qlari (simmetriya o'qlari) bilan kesishgan nuqtalari uning uchlari deyiladi. Ellipsning 4 ta uchi bor, (chizmada ular A_1, A_2, B_1, B_2 bilan belgilangan) $[A_1A_2]$ kesma va uning uzunligi $2a$ ellipsning katta o'qi $[OA_1]$ kesma va uning uzunligi a esa ellipsning katta yarim o'qi deyiladi. $[B_1B_2]$ kesma va uning uzunligi $2b$ ellipsning kichik o'qi, $[OB_1]$ kesma va uning uzunligi b esa ellipsning kichik yarim o'qi deyiladi. Ellips chegaralangan chiziq. (5) tenglamadan ko'rinadi-ki, uning chap tomonidagi ifoda doimo musbat bo'lib, har bir hadi quyidagi shartni qanoatlantirishi kerak.

$$\frac{x^2}{a^2}\le 1;\quad \frac{y^2}{b^2}\le 1 \text{ bundan } |x|\le a;\quad |y|\le b.$$

Misol. $M(0;3)$ nuqta orqali o'tuvchi, fokuslari orasidagi masofa 4 ga teng bo'lgan ellipsning kanonik tenglamasini tuzing va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Ellipsning kanonik tenglamasini yozamiz.

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ shartga ko'ra $M(0;3)$ nuqta ellipsga tegishli, shuning

uchun $\frac{9}{b^2}=1$ bundan $b^2=9$. Endi a^2 parametrni topish qoldi.

$$a^2=b^2+c^2$$

$c-$fokuslar orasidagi masofaning yarmi bo'lgani uchun, shartga ko'ra $c=2$ U holda $a^2=9+4=13$.

Demak, $\frac{x^2}{13}+\frac{y^2}{9}=1$

Tuzilgan tenglamaga ko'ra $a=\sqrt{13}$, $b=3$ bulardan foydalanib, c ni topamiz.

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=2;\quad e=\frac{c}{a}=\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

7.3. Giperbola

3-ta'rif. Ixtiyoriy nuqtasidan fokuslari deb ataluvchi berilgan ikki F_1 va F_2 nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o'zgarmas miqdor $2a$ ga teng bo'lgan tekislikdagi barcha nuqtalar to'plamiga giperbola deyiladi.

O'zgarmas miqdor $2a$ fokuslar orasidagi masofadan kichik deb olinadi.

Giperbola tenglamasini keltirib chiqarish uchun belgilashlarni, chizmani oldingi ellips tenglamasiga o'xshash qilib olamiz. Berilgan fokuslar orasidagi masofani $2c$ bilan belgilaymiz. U holda F_1, F_2 nuqtalarning koordinatlari mos ravishda $(-c;0)$ va $(c;0)$ ga teng bo'ladi. Ta'rifga ko'ra $2a<2c$ yoki $a<c$.

Giperbola ixtiyoriy nuqtasini $M(x;y)$ bilan belgilaymiz (55-chizma).

Giperboladagi ixtiyoriy M nuqtaning F_1 va F_2 fokuslaridan masofalarini uni fokal radiuslari deyiladi va r_1, r_2 bilan belgilanadi, ya'ni $r_1=\rho(F_1,M)$ va $r_2=\rho(F_2,M)$.

Giperbolaning ta'rifiga ko'ra:

$$\left||F_1,M|-|F_2,M|\right|=2a. \qquad (*)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasiga ko'ra

$$\begin{aligned} |F_1,M|&=\sqrt{(x-c)^2+y^2};\\ |F_2,M|&=\sqrt{(x+c)^2+y^2}; \end{aligned} \qquad (**)$$

$$(**),\ (*)\ \Rightarrow \sqrt{(x-c)^2+y^2}-\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Bu tenglamani ikkinchi hadini o'ng tomonga o'tkazib, hosil bo'lgan tenglamaning ikkala tomonini kvadratga ko'tarsak:

$$x^2-2cx+c^2+y^2=4a^2+4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2cx+c^2+y^2;$$

bundan $-2cx=4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+4a^2+2cx$.

Bu ifodani ixchamlashtirgandan keyin quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz.

$$(c^2-a^2)x^2-a^2y^2=a^2(c^2-a^2).$$

Tenglamaning ikkala qismini $a^2(c^2-a^2)$ ga bo'lib, quyidagini hosil qilamiz.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

$c<a$ bo'lgani uchun c^2-a^2 musbat miqdordir, uni b^2 bilan belgilasak tenglama:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (8)$$

ko'rinishni oladi. Bu tenglamaga giperbolaning kanonik tenglamasi deyiladi. Giperbolaning (8) tenglamasiga ko'ra shaklini aniqlaymiz. Buning uchun giperbola tenglamasidan ham ellips tenglamasi ustida olib borilgan muhokamalarni takrorlab, giperbolaning tarmoqlari koordinatalar boshi va koordinata o'qlariga nisbatan simmetrikligi aniqlanadi. Giperbola (Ox) o'qni $A_1(a;0)$ va $A_2(-a;0)$ nuqtalarda kesadi (57-chizma). (8) tenglama bilan aniqlangan giperbola (Oy) o'q bilan kesishmaydi. Haqiqatan (8) tenglamaga $x=0$ ni qo'ysak, $y^2=-b^2$ bo'ladi, holbuki bu tenglik haqiqiy sonlar sohasida o'rinli bo'lmaydi. A_1, A_2 nuqtalar giperbolaning uchlari deyiladi. Giperbolaning uchlari orasidagi $2a$ masofa uning haqiqiy o'qi deyiladi.

Ordinatalar o'qida 0 dan b masofada turuvchi $B_1(0;b)$ va $B_2(0;-b)$ nuqtalarni belgilaymiz. $|B_1B_2|=2b$ ni giperbolaning mavhum o'qi deyiladi. Agar $M(x;y)$ nuqta giperbolada yotsa uning uchun (8) tenglamadan $|x|\geq a$ demak $x=\pm a$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $-a<x<a$ sohada giperbolaning nuqtalari yo'q. (8) tenglamani y ordinata o'qiga nisbatan yechamiz.

$$y=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}. \qquad (9)$$

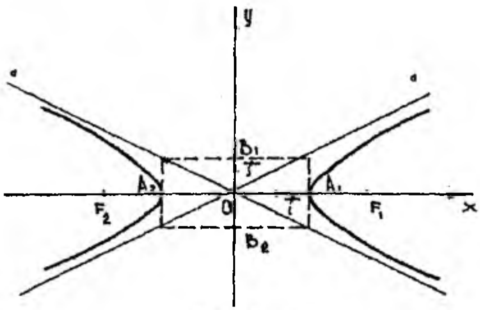
Bu tenglamadan ko'rinadiki, x miqdor a dan $+\infty$ gacha ortganda va $-a$ dan $-\infty$ gacha kamayganda y miqdor $-\infty < y < +\infty$ – oraliqdagi qiymatlarni qabul qiladi. Demak, giperbola ikki qismdan iborat bo'lib, ular giperbolaning tarmoqlari deyiladi. Giperbolaning bir (o'ng) tarmog'i $x>a$ yarim tekislikda, ikkinchi (chap) tarmog'i $x<-a$ yarim tekislikda joylashgan.

Agar giperbolaning fokuslari ordinatalar o'qida joylashgan bo'lsa, uning kanonik tenglamasi

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1 \qquad (10)$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Giperbola asimptotalarga ega. Agar tekis chiziqning nuqtasi shu chiziq bo‘ylab harakatlanib borganida uning d to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofasi nolga intilsa, d to‘g‘ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

$y=\frac{b}{a}x$; $y=-\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlar $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ giperbolaning asimptotalaridir (57-chizma).



57-chizma.

Yarim o‘qlari teng bo‘lgan giperbola teng tomonli deb ataladi.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglamada $a=b$ bo‘lganda:

$$x^2-y^2=b. \qquad (11)$$

Teng tomonli giperbola asimptotalarining tenglamalari $y=x$, $y=-x$ ko‘rinishda bo‘lib, ular o‘zaro perpendikular bo‘ladi. Bu asimptotalarni yangi koordinata o‘qlari sifatida qabul qilsak, teng tomonli giperbola tenglamasi o‘rta maktab kursida ko‘riladigan ixcham ko‘rinishni oladi.

Giperbolaning fokuslari orasidagi masofani haqiqiy o‘qining uzunligiga nisbati giperbolaning ekssentrisiteti deyiladi va ellipsdagidek e harfi bilan belgilanadi:

$$e=\frac{2c}{2a}=\frac{c}{a};$$

Giperbolada $c>a=>e>1$ ekssentrisitet giperbolaning shaklini aniqlashda muhim rol o‘ynaydi. Haqiqatan ham $e=c/a$ dan $c=ea$ buni $b^2=c^2-a^2$ ga qo‘ysak, $b^2=a^2(e^2-1)$ yoki $\frac{b}{a}=\sqrt{e^2-1}$ bo‘lib, bundan ko‘rinadiki, ekssentrisitet e qanchalik kichik, ya’ni $e=>1$ intilsa, b/a

shunchalik kichik, $b/a \to 0$, ga intiladi, ya'ni giperbola o'zining haqiqiy o'qiga siqilgan bo'ladi, aksincha, e kattalashib borsa b/a ham kattalashib, giperbola tarmoqlari kengayib boradi.

1-misol. Giperbolaning haqiqiy o'qi 18 ga fokuslari orasidagi masofa 24 ga teng bo'lsa, uning kanonik tenglamasini tuzing va ekssentrisitetini toping.

Yechish. Shartga ko'ra $2a=18 \Rightarrow a=9$ va $2c=24 \Rightarrow c=12$ Endi b^2 ni topish qoldi $b^2=c^2-a^2=63$. Demak, $\frac{x^2}{81}-\frac{y^2}{63}=1$.

2-misol. $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1$ giperbolaning asimptota tenglamalari tuzilsin.

Yechish. Berilgan tenglamada $a^2=5$, $b^2=20$, bundan $a=\sqrt{5}$, $b=2\sqrt{5}$. Asimptota tenglamalari $y=\frac{b}{a}x$; $y=-\frac{b}{a}x$ ko'rinishda edi. Demak,

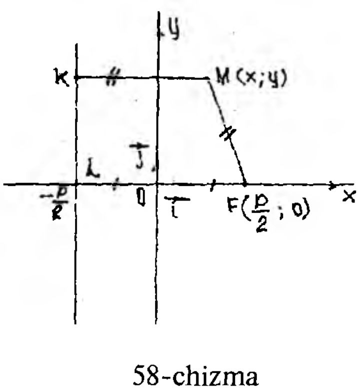
$$y=\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \text{ yoki } y=2x.$$

$$y=-\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{5}} \text{ yoki } y=-2x.$$

7.4. Parabola

4-ta'rif. Ixtiyoriy nuqtasidan berilgan nuqtagacha va berilgan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofalari o'zaro teng bo'lgan tekislikning barcha nuqtalari to'plami parabola deyiladi. Berilgan nuqta parabolaning fokusi, berilgan to'g'ri chiziq esa parabolaning direktrisasi deyiladi.

Parabolaning fokusini F, direktrisasini d bilan, fokusdan direktrisagacha bo'lgan masofani p bilan belgilaymiz.



58-chizma

Parabola tenglamasini ta'rifidan foydalanib, uning kanonik tenglamasini keltirib chiqaramiz. Buning uchun koordinatalar sistemasini tubandagicha kiritamiz. F nuqtadan o'tuvchi va d to'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan to'g'ri chiziqni abssissalar o'qi deb qabul qilamiz.

Abssissalar o'qini d to'g'ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi L bo'lsin. Ordinatalar o'qini $[FL]$ kesmaning o'rtasidan o'tkazamiz (58-chizma).

Tanlangan koordinata sistemasiga nisbatan direktrisa $x=-\frac{p}{2}$ tenglamaga, F fokus esa $\left(\frac{p}{2};0\right)$ koordinatalarga ega bo'ladi.

Parabolaning ixtiyoriy nuqtasi $M(x;y)$ bo'lsin. M nuqtadan direktrisaga tushirilgan perpendikularning asosini K bilan belgilaylik. U holda parabolaning ta'rifiga ko'ra,

$$|KM|=|MF| \qquad (*)$$

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalansak,

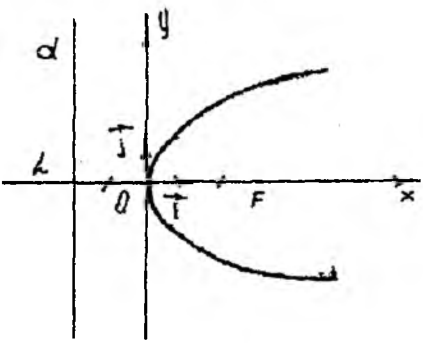
$$|KM|=\sqrt{(x+p/2)^2}; \qquad (**)$$

$$|MF|=\sqrt{(x-p/2)^2+y^2};$$

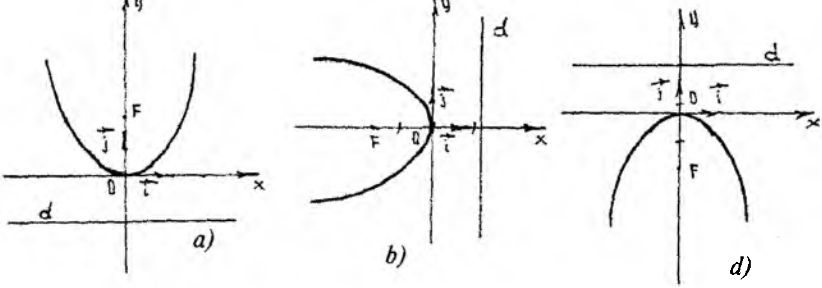
(*), (**) $\Rightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2$ qavslarni ochib ixchamlaymiz.

$$x^2-px+\frac{p^2}{4}+y^2=x^2+px+\frac{p^2}{4} \text{ yoki } y^2=2px \qquad (12)$$

(12) tenglama parabolaning kanonik tenglamasi deyiladi. Parabola shaklini uning (12) tenglamasiga ko'ra tekshiramiz. $y^2\geq 0$ va $p>0$ bo'lgani uchun (12) tenglamada $x\geq 0$ bo'lishi kerak. Bundan esa (12) tenglama bilan ifodalanuvchi parabolaning barcha nuqtalari o'ng yarim tekislikda joylashganligi kelib chiqadi, $x=0$ da (12) $\Rightarrow y=0$ bo'lib, parabola koordinatlar boshidan o'tadi. Koordinatalar boshi parabolaning uchi deyiladi. x ning har bir $x>0$ qiymatiga y ning ishoralari qarama-qarshi, ammo absolyut miqdorlari teng bo'lgan ikki qiymati mos keladi. Bundan esa parabolaning (Ox) o'qqa nisbatan simmetrik joylashganligi ko'rinadi. (Ox) o'qi simmetriya o'qi. (12) tenglamadan ko'rinadiki, x ortib borishi bilan $|y|$ ham ortib boradi. Demak, yuqoridagi xossalarga ko'ra parabolaning shaklini tasavvur qilish mumkin (59-chizma). Agar parabola koordinatalar sistemasiga nisbatan (60-a, b, d) chizmadagidek joylashgan bo'lsa, ularning tenglamalari mos ravishda $x^2=2py$, $y^2=-2px$, $x^2=-2py$ ko'rinishda bo'ladi. Misol: $x+4=0$ to'g'ri chiziq va $F(-2;\ 0)$ nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar geometrik o'rnining tenglamasini tuzing



59-chizma.



60-chizma.

Yechish. K(x;y) nuqta biz izlayotgan geometrik o'rinning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga asosan $|FK|=\sqrt{(x+2)^2+y^2}$. masala shartiga ko'ra $x+4=0$ to'g'ri chiziq K(x; y) nuqtadan $|FK|=x+4$ masofada bo'ladi.

Shuning uchun $\left(\sqrt{(x+2)^2+y^2}\right)^2=(x+4)^2$ yoki

$(x+2)^2+y^2=x^2+8x+16 \Rightarrow y^2-4x+12=0$ yoki $y^2=4x+12$; $x=\frac{1}{4}y^2-3$

Bu esa Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgan parabola tenglamasidir.

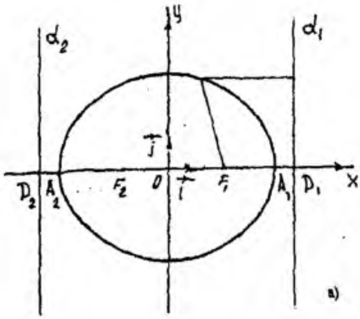
7.5. Ellips va giperbolaning direktrisalari.

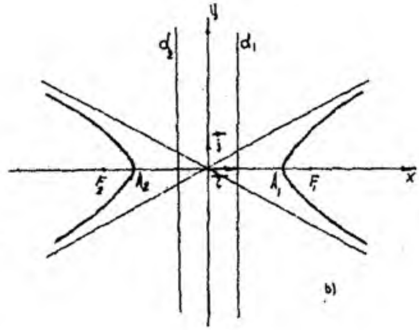
5-ta'rif. Ellips (giperbola) ning berilgan F fokusiga mos direktrisasi deb uning fokal o'qiga perpendikular va markazidan shu F fokusi yotgan tomonda $\frac{a}{e}$ masofada turuvchi to'g'ri chiziqni aytiladi.

Bu yerda a — ellips (giperbola)ning (haqiqiy) yarim o'qi, e — ekssentrisiteti.

F_1 va F_2 ga mos direktrisalarini d_1 va d_2 bilan belgilaymiz. Ta'rifga ko'ra direktrisalar d_1: $x-\frac{a}{e}=0$; d_2: $x+\frac{a}{e}=0$ tenglamalarga ega bo'ladi. Ellips uchun $e<1 \Rightarrow \frac{a}{e}>a$, giperbola uchun $e>1 \Rightarrow \frac{a}{e}<a$ bundan esa ellipsning ham,giperbolaning ham direktrisalari ularni kesmasligi ko'rinadi (61-a, b chizmalar). Ellips (giperbola)ning direktrisalari uchun quyidagi mulohaza ham o'rinlidir. Ellips (giperbola)ning ixtiyoriy nuqtasidan fokusgacha bo'lgan masofani o'sha nuqtadan shu fokusgacha mos direktrisasigacha bo'lgan masofasiga nisbati o'zgarmas miqdor bo'lib, ellips (giperbola)ning ekssentrisitetiga teng.

Misol. Katta o'qi 12 ga teng bo'lgan ellipsning $x=\pm 16$ to'g'ri chiziqlar direktrisalari bo'lsa, shu ellipsning tenglamasini tuzing.





61-chizma.

Yechish. masala shartiga ko'ra

$2a=12 \Rightarrow a=6$ ya'ni $\pm\frac{a}{e}=\pm16$ bundan $\frac{a}{e} = 16$ ammo $e=\frac{c}{a}$

u holda $\frac{a^2}{c} = 16$ yoki $c=\frac{a^2}{16}=\frac{36}{16}=2\frac{1}{4}$;

ellips uchun

$$b^2=a^2-c^2 = 36-\frac{81}{16}=\frac{495}{16};$$

Demak, $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{\frac{495}{16}}=1.$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Qanday chiziq ellips deyiladi? Uning kanonik tenglamasini keltirib chiqaring.
2. Qanday nuqtaga ellips markazi,qanday nuqtalarga ellips uchlari deyiladi?
3. Qanday chiziq giperbola deb ataladi? Uning kanonik tenglamasini keltirib chiqaring.
4. Giperbolaning markazi va uchlari deb qanday nuqtalarga aytiladi?
5. Ellips va giperbolaning ekssentrisiteti deb nimaga aytiladi? Ularni ifodalovchi formulalarni yozing.
6. Giperbolaning direktrisasi nima? Giperbolaning fokuslari qayerda yotadi?
7. Giperbolaning asimptotalari nima?
8. Parabolaga ta'rif bering. Uning kanonik tenglamasini yozing?
9. Parabolaning fokusi va direktrisasi nima? Ular qanday xossa bilan bog'langan?

VI BOB

FAZODA TEKISLIK TO‘G‘RI CHIZIQ VA IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

1-§. Tekislik. Tekislikning berilish usullari

1.1.Tekislikning normali va bitta nuqtaga ko‘ra tenglamasi.

Tekislik o‘zining biror $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtasining va normalining berilishi bilan fazoda bir qiymatli aniqlanadi. Tekislikka perpendikular bo‘lgan $\vec{n} \neq 0$ vektorni tekislikning normali deyiladi. Tekislik tenglamasini aniqlash uchun Dekart koordinatalar sistemasini tanlaymiz. $\{A,B,C\} - \vec{n}$ normalning shu sistemadagi koordinatalari, $(x_0;y_0;z_0)$ esa π tekislik M_0 nuqtasining shu sistemadagi koordinatalari bo‘lsin. $M(x;y;z)$ fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. M nuqtani π tekislikka tegishli bo‘lishi uchun $\overline{M_0M}$ vektor $\vec{n}$ vektorga perpendikular bo‘lishi, ya’ni $\overline{M_0M} \cdot \vec{n} = 0$ bo‘lishi zarur va yetarli. $\overline{M_0M}$ vektor $\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ koordinatalarga ega bo‘lgani uchun,

$$\overline{M_0M} \cdot \vec{n} = A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0.$$

Demak, π tekislik M nuqtasining koordinatalari

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0; \qquad (1)$$

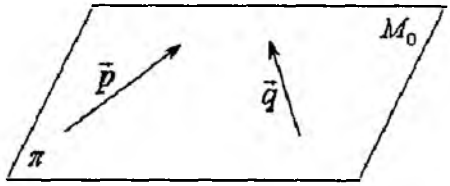
tenglamani qanoatlantiradi.

$\vec{n} \neq 0$ bo‘lgani uchun $A^2+B^2+C^2 \neq 0$. Endi (1) tenglamani har qanday $x_1;y_1;z_1$ yechimi π tekislikning biror nuqtasini aniqlashini isbotlaymiz. Haqiqatan ham M_1 nuqta $x_1;y_1;z_1$ koordinatalarga ega bo‘lsin, u holda $\overline{M_0M_1}$ vektor $\{x_1-x_0;y_1-y_0;z_1-z_0\}$ koordinatalarga ega bo‘ladi va (1) munosabat o‘rinli bo‘lgani uchun $\overline{M_0M_1}$ vektor $\vec{n}$ vektorga perpendikular bo‘ladi.

1.2. Tekislikning bitta nuqtasi va unga parallel ikkita nokolinear vektorlarga ko'ra tenglamasi.

Tekislik o'zining biror $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqtasining va tekislikka parallel bo'lgan ikkita nokollinear $\vec{p}=\{\alpha_1;\beta_1;\gamma_1\}$ $\vec{q}=\{\alpha_2;\beta_2;\gamma_2\}$ vektorlarni berilishi bilan aniqlanadi.

Tekislikda ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani olamiz. U holda $\overline{M_0M}$ vektor $\vec{p},\vec{q}$ vektorlar bilan komplanar bo'ladi, demak, bu vektorlar chiziqli bog'liq bo'lib, bundan ularning koordinatalaridan tuzilgan uchinchi tartibli determinant nolga teng bo'lib chiqadi (62-chizma).



62-chizma.

Vektorlarni koordinatalarda yozaylik.

$$\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\};$$
$$\vec{p}=\{\alpha_1;\beta_1;\gamma_1\} \quad \vec{q}=\{\alpha_2;\beta_2;\gamma_2\};$$

u holda quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}=0. \tag{2}$$

Aksincha, (2) shart bajarilsa, M nuqta π tekislikka tegishli bo'ladi. Demak, (2) π ning tenglamasi. Bu tenglama berilgan nuqtadan o'tib, berilgan nokollinear ikki vektorga parallel bo'lgan tekislikning tenglamasi deb ataladi.

$\overline{M_0M}$, $\vec{p},\vec{q}$ – vektorlar bir tekislikda yotgani uchun, ular chiziqli bog'liqdir. Ya'ni,

$$\overline{M_0M}=t\vec{p}+n\vec{q};t,n\in R; \tag{3}$$

bu yerda t, n sonlar parametrlardir, (3) dan,

$$\begin{aligned} x&=x_0+\alpha_1t+\alpha_2n; \\ y&=y_0+\beta_1t+\beta_2n; \\ z&=z_0+\gamma_1t+\gamma_2n; \end{aligned} \tag{4}$$

(4) – tekislikning parametrik tenglamalari deyiladi.

1.3. Uchta nuqta orqali o'tgan tekislik tenglamasi.

Bir tekislikda yotgan uchta nuqta tekislikning vaziyatini to'la aniqlaydi. Aytaylik, uchta $M_1(x_1;\, y_1;\, z_1)$, $M_2(x_2;\, y_2;\, z_2)$, $M_3(x_3;\, y_3;\, z_3)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

Agar biz $M_0 = M_1$; $\vec{p} = M_1M_2$; $\vec{q} = M_1M_3$ desak hamda $\overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$, $\overline{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$ ni e'tiborga olsak, (2) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{5}$$

(5) uch nuqtadan o'tgan tekislik tenglamasini ifodalaydi.

1.4. Tekislikning kesmalar bo'yicha tenglamasi.

Tekislik o'zining koordinata o'qlaridan kesgan kesmalari a, b, c larning berilishi bilan aniqlanadi. Aytaylik tekislik koordinatalar boshidan o'tmasin va u $(Ox), (Oy), (Oz)$ o'qlarini mos ravishda $M_1(a,0,0)$, $M_2(0,b,0)$, $M_3(0,0,c)$ nuqtalarda kessin.

U holda (5) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\begin{vmatrix} x - a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0;$$

bundan

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{6}$$

(6) – tenglama tekislikning koordinata o'qlaridan ajratgan kesmalari bo'yicha tenglamasi deb ataladi.

1.5. Tekislikning umumiy tenglamasi.

Yuqorida ko'rib o'tilgan tekislik tenglamalari birinchi darajali bo'lib,

$$Ax + By + Cz + D = 0; \tag{7}$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Shuning uchun (7) ko'rinishdagi tenglamaga tekislikning umumiy tenglamasi deyiladi. Bunda A, B, C lar bir vaqtda nolga teng emas.

Tekislikning umumiy tenglamasi (7) ga ko'ra tekislikning koordinata o'qlariga nisbatan joylashuvi to'g'risida fikr yuritamiz:

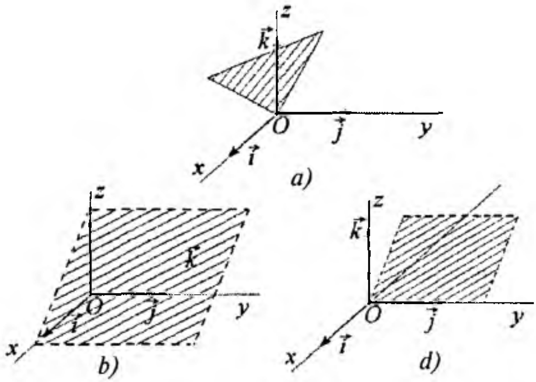
a) agar $D = 0$ bo'lsa, (7) tekislik koordinata boshidan o'tadi;

b) agar $A = 0$ bo'lsa, (7) tekislik (Ox) o'qiga parallel, $B = 0$ bo'lsa, (Oy) o'qiga parallel, $C = 0$ bo'lsa tekislik (Oz) o'qiga parallel bo'ladi.

Shuningdek,

$$A=0 \Leftrightarrow \pi \parallel (Ox), A=D=0 \Leftrightarrow \pi \supset (Ox);$$
$$B=0 \Leftrightarrow \pi \parallel (Oy), B=D=0 \Leftrightarrow \pi \supset (Oy);$$
$$B=0 \Leftrightarrow \pi \parallel (Oz), C=D=0 \Leftrightarrow \pi \supset (Oz);$$

d) agar $A=B=0$, $C \neq 0$ bo'lsa, $\pi \parallel (xOy)$. Jumladan, $D=0$ bo'lsa, $z=0$ ya'ni xOy tekislik tenglamasiga ega bo'lamiz. Shunga o'xshash $x=a$ yOz tekislikligiga parallel π tekislikni ifodalaydi. $x=0$, yOz tekislikning o'zini ifodalaydi. $y=b$ esa $\pi \parallel (xOz)$ tekislikni, $y=0$ bo'lsa xOz tekislikning o'zini ifodalaydi (63-*a, b, d* chizmalar).



63-chizma.

1-misol. $M(2;4;-6)$ nuqta orqali o'tuvchi va $\vec{n}=\{3;-1;6\}$ vektorga perpendikular bo'lgan tekislikning tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Bizga ma'lumki, berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o'tib $\vec{n}=\{A,B,C\}$ vektorga perpendikular bo'lgan tekislikning tenglamasi $A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0$ ko'rinishda edi. Masala shartidan $x_1=2; y_1=4; z_1=-6$; $A=3; B=-1; C=6$ Bularni tenglamaga qo'ysak,

$$3\cdot(x-2)-1\cdot(y-4)+6\cdot(z+6)=0;$$
$$3x-6-y+4+6z+36=0;$$
$$3x-y+6z+34=0.$$

Bu izlangan tekislik tenglamasi.

2-misol. Tekislik $A(3;4;3)$ nuqtadan o'tib, $\vec{p}=\{2;1;2\}$, $\vec{q}=\{3;4;2\}$ vektorlarga parallel bo'lsin. Shu tekislikning parametrik va umumiy tenglamalari tuzilsin.

Yechish. Berilganlarni (2) tenglama bilan solishtirsak,

$x_0=3;\quad y_0=4;\quad z_0=3;$
$\alpha_1=2;\quad \beta_1=1;\quad \gamma_1=2;$
$\alpha_2=3;\quad \beta_2=4;\quad \gamma_2=2;$

larga ega bo'lamiz.

(4) ga asosan parametrik tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$x = 3 + 2t + 3p;$$
$$y = 4 + t + 4p;$$
$$z = 3 + 2t + 2p;$$

(2) ga asosan:
$$\begin{vmatrix} x-3 & y-4 & z-3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Uchinchi tartibli determinantni ochib ixchamlasak, tekislikning umumiy tenglamasiga ega bo‘lamiz.
$$6x - 2y - 5z + 5 = 0.$$

Bu tenglama — izlangan tekislikning umumiy tenglamasi.

3-misol. $3x + y - 6z - 18 = 0$ tekislik berilgan. Bu tekislikning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarini koordinatalarini toping.

Yechish. Berilgan tenglamani tekislikning koordinata o‘qlaridan kesgan kesmalari bo‘yicha tenglamasi ko‘rinishga keltiramiz.
$$\frac{3x}{18} + \frac{y}{18} - \frac{6z}{18} = 1 \text{ yoki } \frac{x}{6} + \frac{y}{18} - \frac{z}{3} = 1.$$

Demak, tekislik (Ox) o‘qini $(6;0;0)$ (Oy) o‘qini $(0;18;0)$, (Oz) o‘qini $(0;0;3)$ nuqtalarda kesadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

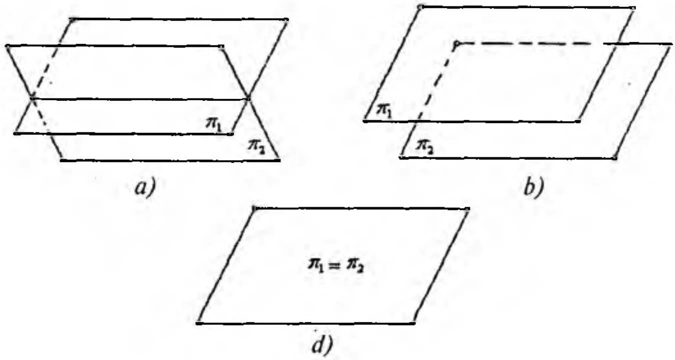
1. Tekislikning normal vektori nima?
2. Tekislikning normali va bitta nuqtasiga ko‘ra tenglamasini keltirib chiqaring.
3. Tekislikning bitta nuqta va unga parallel ikkita nokolleniar vektorlarga ko‘ra tenglamasini chiqaring.
4. Tekislik tenglamasidagi hadlarga qarab, u koordinata o‘qlariga nisbatan qanday joylashadi?

2-§. Fazoda ikkita va uchta tekislikning o‘zaro joylashuvi

2.1. Fazoda ikkita tekislikning o‘zaro joylashuvi.

Aytaylik, Dekart koordinata sistemasida ikkita π_1 va π_2 tekisliklar o‘zlarining tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin.
$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \qquad (1)$$
$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2)$$

Bu ikki tekislik to‘g‘ri chiziq orqali kesishadi, yoki ular o‘zaro parallel bo‘lib, umumiy nuqtaga ega emas, yoki ustma-ust tushadi (64-a, b, d chizma). Bu hollarning qaysi biri yuz berishini bilish uchun π_1, π_2 ga tegishli tenglamalar sistemasini tekshirish kerak (bu matritsalar yordamida tekshiriladi).



64-chizma.

2.2. Fazoda uchta tekislikning o‘zaro joylashuvi.

Aytaylik, Dekart koordinata sistemasida uchta tekislik o‘zining tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin.

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (3)$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (4)$$

$$\pi_3 : A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \quad (5)$$

Bu uchta tekislikning fazoda o‘zaro joylashuvida 8 ta hol ro‘y berishi mumkin (65-chizma).

1) Uchta tekislik bitta umumiy nuqtaga ega;

2) Tekisliklar juft-juft kesishadi, ammo umumiy nuqtaga ega emas;

3) Uchta tekislik bitta to‘g‘ri chiziq bo‘yicha kesishadi;

4) Ikkita tekislik o‘zaro parallel bo‘lib, uchinchi tekislik ularni kesadi;

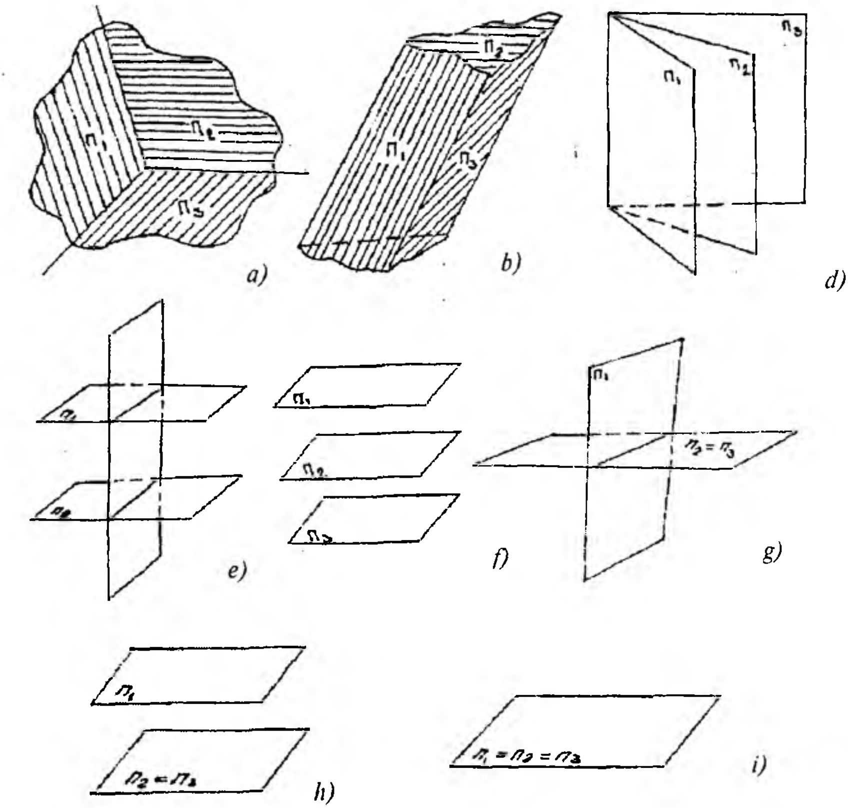
5) Uchta tekislik o‘zaro parallel joylashgan bo‘ladi;

6) Ikkita tekislik ustma-ust tushadi va uchinchi tekislik ularni kesadi;

7) Ikkita tekislik ustma-ust tushadi va uchinchi tekislik ularga parallel bo‘ladi;

8) Uchta tekislik ham ustma-ust tushadi.

Bu hollardan qaysi biri yuz berishini bilish uchun π_1, π_2, π_3 ga tegishli tenglamalar sistemasini tekshirish kerak (bu ham matritsalar yordamida tekshiriladi).



65-chizma.

Misol. $x+2y+z=6$, $2x+3z=10$ va $3y-2z=-1$ tekisliklarning kesishmasi aniqlansin.

Yechish. Bu tekisliklarning kesishmasini aniqlash uchun quyidagi sistemani yechimini aniqlaymiz;

$$\begin{cases} x+2y+z=6; \\ 2x+3z=10; \\ 3y-2z=-1. \end{cases}$$

Bu sistemalar uchun quyidagi determinantlarni tuzamiz va uni hisoblaymiz.

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix}=6-9+8=5.$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 10 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 70 - 60 = 10; \qquad x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 6 & 1 \\ 2 & 10 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 27 - 22 = 5; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 10 \\ 0 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 40 - 30 = 10; \qquad z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2$$

Demak, tekisliklar (2; 1; 2) nuqtada kesishadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikkita tekislikni fazoda o‘zaro joylashuvini tushintiring.
2. Uchta tekislikni fazoda o‘zaro joylashuvini tushintiring.

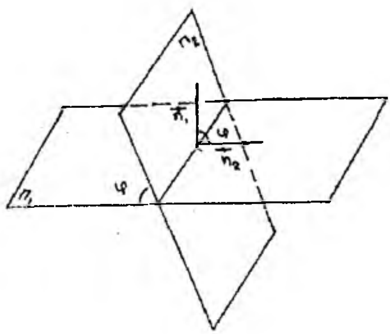
3-§. Ikki tekislik orasidagi burchak

Fazoda Dekart koordinata sistemasida kesishuvchi ikki tekislik o‘zining tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin.

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \qquad (1)$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (2)$$

Ikki tekislik kesishganda to‘rtta ikki yoqli burchak hosil bo‘lib, ulardan o‘zaro vertikal bo‘lganlari teng (66-chizma).



66-chizma.

Demak, ikkita har xil burchak hosil bo‘lib, ularning biri ikkinchisini to‘ldiradi. Shuning uchun shu ikki burchakdan birini topsak yetarli. Ikki yoqli bu ikki burchakdan birining chiziqli burchagi berilgan tekislikning $\vec{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchakka teng bo‘ladi. $\overline{n_1}$ va $\overline{n_2}$ orasidagi burchakni φ desak,

$$\cos\varphi = \cos(\vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2) = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}. \qquad (3)$$

(3)-formuladan xususiy holda ikkita tekislikning perpendikularlik sharti kelib chiqadi, ya'ni $\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0$ bundan esa $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$ ikki tekislikning perpendikularlik sharti:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \quad \text{yoki} \quad A_1 : B_1 : C_1 = A_2 : B_2 : C_2 \qquad (4)$$

esa ikki tekislikning parallellik shartlarini ifodalaydi.

Misol. Berilgan ikki $3x + 2y - 2z + 4 = 0$ va $2x + 2y + 5z - 3 = 0$ tekisliklar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. Ikki tekislik orasidagi burchak

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$

formula yordamida aniqlanadi. Berilgan tekisliklarda

$A_1 = 3,\quad B_1 = 2,\quad C_1 = -2$ va $A_2 = 2,\quad B_2 = 2,\quad C_2 = 5$

Demak,

$$\cos\varphi = \frac{3\cdot 2 + 2\cdot 2 - 2\cdot 5}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-2)^2}\sqrt{2^2 + 2^2 + 5^2}} = \frac{6 + 4 - 10}{\sqrt{9 + 4 + 4}\cdot\sqrt{4 + 4 + 25}} =$$

$$= \frac{0}{\sqrt{17}\cdot\sqrt{33}} = 0 \quad \cos\varphi = 0; \quad \varphi = \frac{\pi}{2}$$

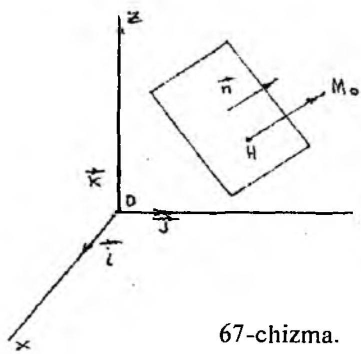
Demak, berilgan ikki tekislik o'zaro perpendikular.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikkita tekislik orasidagi burchakni hisoblash uchun formula keltirib chiqaring.
2. Ikkita tekislikning parallellik va perpendikularlik shartlari nimadan iborat?

4-§. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa

Fazoda Dekart koordinatalar sistemasida $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqta va $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislik berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblash talab qilinsin. Buning uchun berilgan M_0 nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning asosini H bilan belgilaymiz (67-chizma).



67-chizma.

$|\overline{HM_0}|=d$ biz izlayotgan masofa bo'ladi. $\vec{n}=\{A;B;C\}$ tekislik normal vektorini o'tkazamiz. $\overline{HM_0}$ vektor $\vec{n}$ vektorga kollinear. $\overline{HM_0}$ va $\vec{n}$ vektorlarni skalyar ko'paytmasini topamiz.

$$\overline{HM_0}\cdot\vec{n}=|\overline{HM_0}|\cdot|\vec{n}|\cdot\cos(\overline{HM_0},\wedge\vec{n})=d\cdot|\vec{n}|\cdot(\pm1)$$

Bundan esa

$$d=\frac{|\overline{HM_0}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|} \tag{1}$$

(1) formulani koordinatalarda hisoblaymiz. Aytaylik H nuqtaning koordinatalari $(x_1;y_1;z_1)$ bo'lsin. U holda

$$\overline{HM_0}\cdot\vec{n}=A(x_0-x_1)+B(y_0-y_1)+C(z_0-z_1)=$$
$$=Ax_0+By_0+Cz_0-(Ax_1+By_1+Cz_1)$$

bo'ladi. H nuqta berilgan tekislikda yotgani uchun $Ax_1+By_1+Cz_1+D=0$ bo'ladi, bundan esa $\overline{HM_0}\cdot\vec{n}=Ax_0+By_0+Cz_0+D$; $\vec{n}=\sqrt{A_2+B_2+C_2}$ ekanini e'tiborga olsak,

$$\cos\varphi=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \tag{2}$$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofani hisoblash formulasidir.

1-misol. $M(1;-2;3)$ nuqtadan $2x+3y-4z+4=0$ tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Yechish. (2) formulaga ko'ra

$x_0=1;\ y_0=-2;\ z_0=3;\ A=2;\ B=3;\ C=-4;\ D=4$.

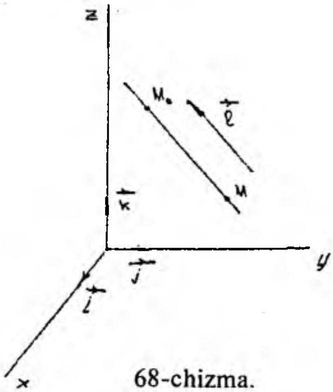
u holda $d=\frac{|1\cdot2+3\cdot(-2)+(-4)\cdot3+4|}{\sqrt{2^2+3^2+(-4)^2}}=\frac{12}{\sqrt{29}}$; $d=\frac{12}{\sqrt{29}}$ (birlik).

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Fazoda nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa formulasini keltirib chiqaring.

5-§. Fazoda to'g'ri chiziq. To'g'ri chiziqning berilish usullari

5.1. To'g'ri chiziqning biror nuqtasi va yo'naltiruvchisiga ko'ra tenglamasi.



68-chizma.

To'g'ri chiziq o'zining biror $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasi va shu to'g'ri chiziqni yo'naltiruvchi vektori $\vec{\ell} = \{\ell_1; \ell_2; \ell_3\}$ ning berilishi bilan aniqlanadi (68-chizma). To'g'ri chiziqning ixtiyoriy $M(x, y, z)$ nuqtasini olaylik; $\overline{M_0M}$ va $\vec{\ell}$ vektorlari kollinear bo'lgani uchun

$$\overline{M_0M} = t \cdot \vec{\ell} \quad (t \in R) \tag{1}$$

$\overline{OM_0} = \vec{r}_0$, $\overline{OM} = \vec{r}$ desak, hamda $\overline{M_0M} = \overline{OM} - \overline{OM_0}$ ni hisobga olsak, (1) ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{\ell}. \tag{2}$$

(2) tenglama to'g'ri chiziqning vektorli tenglamasi deb ataladi. $\overline{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\}$ va (1) dan

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \ell_1 t; \\ y &= y_0 + \ell_2 t; \\ z &= z_0 + \ell_3 t; \end{aligned} \tag{3}$$

ko'rinishdagi tenglamalar sistemasi to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari deyiladi.

5.2. To'g'ri chiziqning kanonik tenglamasi.

(3) – tenglamadan parametr t ni chiqarib

$$\frac{x - x_0}{\ell_1} = \frac{y - y_0}{\ell_2} = \frac{z - z_0}{\ell_3} \tag{4}$$

ega bo'lamiz. Bunga to'g'ri chiziqning kanonik tenglamalari deyiladi.

5.3. Ikki nuqta orqali o'tgan to'g'ri chiziq tenglamasi.

Ikkita $M_1(x_1; y_1; z_1)$ va $M_2(x_2; y_2; z_2)$ nuqtalar orqali o'tuvchi to'g'ri chiziq

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1} \tag{5}$$

tenglamalar bilan ifodalanadi (bu tenglama birinchi punktdagi M_0 nuqta o'rniga M va $\vec{\ell} = \overline{M_1M_2}$ deb olinsa, (1) munosabatdan kelib chiqadi). Yoki

$$x_1 = x_1 + (x_2 - x_1)t;$$
$$y_1 = y_1 + (y_2 - y_1)t; \qquad (6)$$
$$z_1 = z_1 + (z_2 - z_1)t;$$

(6) tenglamalar sistemasi to‘g‘ri chiziqning parametrik ko‘rinishdagi tenglamasidir.

To‘g‘ri chiziq ikkita π_1 va π_2 tekisliklarning kesishish chizig‘i sifatida ham berilishi mumkin, ya’ni $d = \pi_1 \cap \pi_2$

$$\pi_1 : \ A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$\pi_2 : \ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \qquad (7)$$

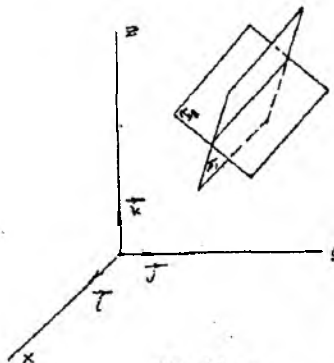
Bu tenglamalar sistemasi $\pi_2 \neq \pi_1 \Rightarrow A_1 : B_1 : C_1 \neq A_2 : B_2 : C_2$ shart bajarilgan to‘g‘ri chiziqni aniqlaydi (69-chizma).

1-misol. (3; 2; 1) nuqtadan o‘tgan va yo‘naltiruvchi vektori $\vec{\ell} = \{1; 2; 3\}$ bo‘lgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi yozilsin.

Yechish. (4) tenglamadan foydalanamiz. Masala shartiga ko‘ra,

$$x_0 = 3; \ y_0 = 2; \ z_0 = 1;$$
$$\ell_1 = 1; \ \ell_2 = 2; \ell_3 = 3.$$

U holda, $\dfrac{x-3}{1} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{3}.$



69-chizma.

2-misol. $A(-2;1;4)$ va $B(6;-2;6)$ nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.

Yechish. Berilgan ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi (5) formula yordamida aniqlanadi. Bu formulaga berilgan nuqtalarning koordinatalarini qo‘ysak

$$\frac{x+2}{6+2} = \frac{y-1}{-2-1} = \frac{z-4}{6-4} \quad \text{yoki} \quad \frac{x+2}{8} = \frac{y-1}{-3} = \frac{z-4}{2}$$

to‘g‘ri chiziq tenglamasiga ega bo‘lamiz.

6-§. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak

Aytaylik, $R = \{0; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k}\}$ Dekart koordinata sistemasiga nisbatan ℓ to‘g‘ri chiziq o‘zining

$$\begin{cases} x = x_0 + \ell_1 t; \\ y = y_0 + \ell_2 t; \\ z = z_0 + \ell_3 t; \end{cases} \qquad (1)$$

parametrik tenglamasi, π tekislik

$$Ax + By + Cz + D = 0; \tag{2}$$

tenglamasi bilan berilgan bo‘lsin. To‘g‘ri chiziq bilan tekislikning o‘zaro joylashuvini tekshirish uchun tubandagi tenglamani tekshiramiz.

$$\left(A\ell_1 + B\ell_2 + C\ell_3\right)t + \left(Ax_0 + By_0 + Cz_0\right) = 0.$$

Bunda quyidagi hollar bo‘ladi;

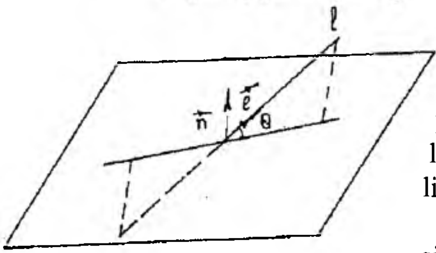
a) agar $A\ell_1 + B\ell_2 + C\ell_3 \neq 0$ bo‘lsa, ℓ to‘g‘ri chiziq tekislik bilan kesishadi.

b) agar

$$\left.\begin{aligned} A\ell_1 + B\ell_2 + C\ell_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(3) bajarilsa $\ell \cap \pi = \varnothing$ bo‘ladi.

c) agar $\left.\begin{aligned} A\ell_1 + B\ell_2 + C\ell_3 = 0 \\ Ax_0 + By_0 + Cz_0 = 0 \end{aligned}\right\}$ bo‘lsa, $\ell \subset \pi$ bo‘ladi.



70-chizma.

To‘g‘ri chiziq bilan tekislik orasidagi burchak deb, to‘g‘ri chiziq bilan uning tekislikdagi ortogonal proyeksiyasi orasidagi burchakka aytiladi. (1) to‘g‘ri chiziq bilan (2) tekislik orasidagi burchak (70-chizma).

$$\sin\theta = \frac{\left|Al_1 + Bl_2 + Cl_3\right|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{\ell_1^2 + \ell_2^2 + \ell_3^2}} \tag{4}$$

formula yordamida topiladi.

$$A\ell_1 + B\ell_2 + C\ell_3 = 0 \tag{5}$$

berilgan tekislikning berilgan to‘g‘ri chiziqqa parallellik,

$$\frac{A}{\ell_1} = \frac{B}{\ell_2} = \frac{C}{\ell_3} \tag{6}$$

esa perpendikularlik shartlaridir. Endi tekislik va to‘g‘ri chiziqqa doir mashqlar bajarishda zarur bo‘lgan tenglamalarni keltirib o‘tamiz:

1) Berilgan $M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqtadan o‘tib, berilgan $\frac{x - x_0}{\ell_1} = \frac{y - y_0}{\ell_2} = \frac{z - z_0}{\ell_3}$ to‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq

$$\frac{x - x_1}{\ell_1} = \frac{y - y_1}{\ell_2} = \frac{z - z_1}{\ell_3} \tag{7}$$

tenglamalar bilan aniqlanadi.

2) Berilgan $M_1(x_1;\,y_1;\,z_1)$ nuqtadan o‘tib, berilgan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka perpendikular bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning tenglamasi

$$\frac{x-x_1}{A}=\frac{y-y_1}{B}=\frac{z-z_1}{C} \tag{8}$$

ko‘rinishda aniqlanadi.

3) Berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o‘tib, berilgan $Ax+By+Cz+D=0$ tekislikka parallel bo‘lgan tekislikning tenglamasi:

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+C(z-z_1)=0 \tag{9}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

4) Berilgan $M_1(x_1;y_1;z_1)$ nuqta orqali o‘tuvchi va $\frac{x-x_1}{\ell_1}=\frac{y-y_1}{\ell_2}=\frac{z-z_1}{\ell_3}$ to‘g‘ri chiziqqa perpendikular bo‘lgan tekislik tenglamasi tubandagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\ell_1(x-x_1)+\ell_2(y-y_1)+\ell_3(z-z_1)=0 \tag{10}$$

Misol. Berilgan $\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-2}$ to‘g‘ri chiziq va $3x+y-4z-8=0$ tekislik orasidagi burchak va ularning kesishish nuqtasini toping.

Yechish. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak
$\sin\theta=\frac{|A\ell_1+B\ell_2+C\ell_3|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2}}$ formula yordamida aniqlanadi.

Shuning uchun $A=3,\ B=1,\ C=-4$

$\ell_1=2,\quad \ell_2=1,\quad \ell_3=-2$

$$\sin\theta=\frac{3\cdot2+1\cdot1+(-2)\cdot(-4)}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{6+1+8}{\sqrt{9+1+16}\cdot\sqrt{4+1+4}}=\frac{15}{\sqrt{26}\cdot3}=\frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\theta=\arcsin\left(\frac{5\sqrt{26}}{26}\right)\approx\arcsin0{,}976\approx77^0 27'$$

Endi ularning kesishish nuqtasini topamiz, uning uchun to‘g‘ri chiziq tenglamasini parametrik ko‘rinishga keltiramiz.

$$\frac{x+2}{2}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-2}=t; \qquad \frac{x+2}{2}=t;\quad \frac{y-3}{1}=t;\quad \frac{z-4}{-2}=t. \qquad \left.\begin{aligned}x&=2t-2\\ y&=t+3\\ z&=-2t+4\end{aligned}\right\}(\alpha).$$

Buni tekislik tenglamasiga qo‘yamiz.

$$3(2t-2)+(t+3)-4(-2t+4)-8=0;$$
$$6t-6+t+3+8t-16-8=0;$$
$$15t-27=0;$$
$$t=\frac{27}{15}.$$

Buni (a) ga qo‘ysak,

$$x=\frac{54}{15}-2=\frac{24}{15};$$
$$y=\frac{27}{15}+3=\frac{72}{15};$$
$$z=-\frac{54}{15}+4=\frac{6}{15}=\frac{2}{5}.$$

Demak, $\left(\left(\frac{24}{15}\right);\left(\frac{72}{15}\right);\left(\frac{2}{5}\right)\right)$ nuqta to‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Fazoda to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori nima?
2. To‘g‘ri chiziqning kononik tenglamasini keltirib chiqaring.
3. To‘g‘ri chiziq umumiy tenglamasi bilan berilgan bo‘lsa, uni yo‘naltiruvchi vektorini qanday aniqlash mumkin?

7-§. Fazoda ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak

Ikkita to‘g‘ri chiziq $R=\{0;\vec{i};\vec{j};\vec{k}\}$ Dekart koordinata sistemasida o‘zining tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin.

$$\ell:\frac{x-x_0}{\ell_1}=\frac{y-y_0}{\ell_2}=\frac{z-z_0}{\ell_3}$$

$$\ell':\frac{x-x'_0}{\ell'_1}=\frac{y-y'_0}{\ell'_2}=\frac{z-z'_0}{\ell'_3}$$

Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak deb, bu to‘g‘ri chiziqlarni yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchakka aytiladi.

ℓ to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori $\vec{\ell}=\{\ell_1,\ell_2,\ell_3\}$ ℓ' to‘g‘ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori $\overline{\ell}'=\{\ell'_1,\ell'_2,\ell'_3\}$ bo'lib, $\overline{\ell}$ va $\overline{\ell}'$ vektorlar orasidagi burchak φ desak $\overline{\ell}$ va $\overline{\ell}'$ vektorlar orasidagi burchak chiziqlar orasidagi burchakni beradi. Shuning uchun ikki to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{\overline{\ell}\cdot\overline{\ell}'_1}{|\overline{\ell}||\overline{\ell}'|}=\frac{\ell_1\cdot\ell'_1+\ell_2\cdot\ell'_2+\ell_3\cdot\ell'_3}{\sqrt{\ell_1^2+\ell_2^2+\ell_3^2}\sqrt{\ell'^2_1+\ell'^2_2+\ell'^2_3}} \tag{1}$$

formula yordamida aniqlanadi.

(1) formuladan esa quyidagi kelib chiqadi;

$$\ell\perp\ell' \Leftrightarrow \overline{\ell}\cdot\overline{\ell}'=0\Rightarrow \ell_1\cdot\ell'_1+\ell_2\cdot\ell'_2+\ell_3\cdot\ell'_3=0$$

Misol. Yo'naltiruvchi vektorlari mos ravishda $\vec{n}_1=\{7;2;5\}$, $\vec{n}_2=\{3;10;4\}$ bo'lgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak topilsin.

Yechish. Bu vektorlar orasidagi burchak to'g'ri chiziqlar orasidagi burchakka teng. Demak, berilgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, (1) formulaga ko'ra:

$$\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{7\cdot3+2\cdot10+5\cdot4}{\sqrt{7^2+2^2+5^2}\cdot\sqrt{3^2+10^2+4^2}}=\frac{61}{\sqrt{78}\cdot\sqrt{125}}=\frac{61}{5\sqrt{5}\cdot\sqrt{78}}\approx0.618$$

$$\varphi=\arccos(0.618)\approx51^0 54'$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. To'g'ri chiziq va tekislik orasida burchakni qanday tushunasiz?

8-§. Ikkinchi tartibli sirtlar

Ikkinchi tartibli sirtlarning umumiy tenglamasi.

Biror Dekart koordinata sistemasida koordinatalari quyidagi tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plami ikkinchi tartibli sirt deyiladi.

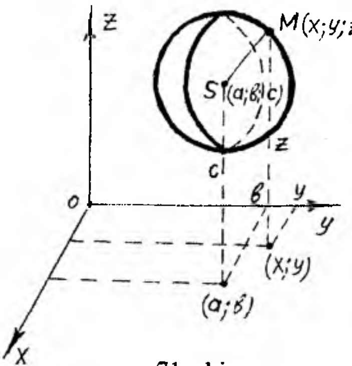
$$a_{11}x^2+a_{22}y^2+a_{33}z^2+2a_{12}xy+2a_{13}xz+2a_{23}yz+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{1}$$

bu tenglamadagi $a_{11},a_{22},a_{33},a_{12},a_{13},a_{23}$ koeffitsiyentlarning kamida bittasi noldan farqli bo'lishi kerak. Agar biror sirt dekart sistemasida 2-darajali tenglama bilan berilgan bo'lsa, boshqa sistemada ham 2-daraja bilan beriladi. Biz oddiy ko'rinishdagi ikkinchi darajali tenglamalarning ba'zilarini qaraymiz.

8.1. Sfera tenglamasi. Sferik sirt.

Sferik sirt deb, berilgan nuqtadan bir xil uzoqlikda joylashgan nuqtalar to‘plamining geometric o‘rniga aytiladi. Boshqacha aytganda, sharning chegarasi shar sirti yoki sfera deb aytiladi.

Sferaning $Oxyz$ to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasini tuzamiz. Aytaylik, $S(a;b;c)$ nuqta sferaning markazi, R esa uning radiusi bo‘lsin (71-chizma).



71-chizma.

Sferaning ixtiyoriy nuqtasi $M(x;y;z)$ uning markazi bo‘lgan nuqtadan R masofada joylashish xossasidan foydalansak, sfera tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$SM=R \Rightarrow (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2 \quad (2)$$

(2) tenglamaga markazi S(a;b;c) nuqtada va radiusi R ga teng bo‘lgan sfera tenglamasi deyiladi. Agar $a=b=c=0$ bo‘lsa, (2) tenglamadan markazi koordinatalar boshida radiusi R ga teng bo‘lgan sfera tenglamasiga ega bo‘lamiz.

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$

Endi (2) ni quyidagicha yozamiz.

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0 \quad (3)$$

(3) dan: 1) Sferani ikkinchi tartibli sirt ekanini ko‘ramiz. 2) (3) da $xy;zx;yz$ ko‘paytmalar qatnashgan hadlar yo‘qligini: 3) $x^2;y^2;z^2$ oldidagi koeffitsientlarning tengligini ko‘rib turibmiz.

Endi (1) da $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$ va $a_{11}=a_{22}=a_{33}$ deb olinsa, u holda

$$a_{11}x^2+a_{11}y^2+a_{11}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \quad (4)$$

tenglama sferani ifoda qiladimi degan savolga javob beraylik.

(4) ni $a_{11}\neq 0$ ga bo‘lib yuborib

$$\frac{2a_{14}}{a_{11}}=A; \quad \frac{2a_{24}}{a_{11}}=B; \quad \frac{2a_{34}}{a_{11}}=C; \quad \frac{a_{44}}{a_{11}}=D$$

belgilashlarni kiritsak,

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0 \quad (5)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga ega bo‘lamiz. (5) tenglamani ham biroz shakl o‘zgartirishlardan keyin ushbu ko‘rinishda yozamiz.

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2-4D) \qquad (6)$$

yoki

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2 \qquad (7)$$

(7) dan ko‘rinadiki, $A^2+B^2+C^2-4D\geq 0$ bo‘lganda (7) tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu deganimiz $A^2+B^2+C^2-4D>0$ bo‘lsa (7) tenglama markazi $\left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2};-\frac{C}{2}\right)$ nuqtada va radiusi $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ ga teng bo‘lgan sferani ifodalaydi.

Agar $A^2+B^2+C^2-4D=0$ bo‘lsa (7) tenglama $\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$ ko‘rinishda bo‘lib, u faqat bitta $\left(-\frac{A}{2};-\frac{B}{2};-\frac{C}{2}\right)$ nuqtani ifodalaydi.

Demak, (5) tenglama faqatgina $A^2+B^2+C^2-4D>0$ shartda sferani aniqlaydi.

Misol. $x^2+y^2+z^2-2x+4y+8z+6=0$ sferaning markazi va radiusi topilsin. Berilgan tenglamani $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ko‘rinishga keltiramiz.

Buning uchun tenglamada x; y; z li hadlarni olib ularni to‘la kvadratga keltiramiz.

$$x^2+y^2+z^2-2x+4y+8z+6 \Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2+6-1-4-16=0$$

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=15 \quad \text{yoki} \quad (x-1)^2+(y+2)^2+(z+4)^2=(\sqrt{15})^2$$

Demak, sferani markazi (1;–2;–4) nuqtada, radiusi esa $R=\sqrt{15}$ ga teng.

8.2 Ikkinchi tartibli silindrik sirt.

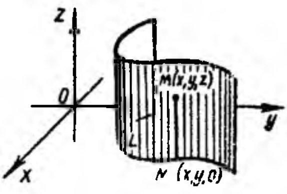
Biz yasovchilari koordinata o‘qlariga parallel bo‘lgan silindrik sirtlarni qaraymiz. Biror o‘qqa parallel holda biror L chiziqni kesib o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning uzluksiz harakatlanishidan hosil bo‘lgan sirt silindrik sirt deb ataladi.

Xarakatlantiruvchi to‘g‘ri chiziq yasovchi, berilgan L chiziq esa yo‘naltiruvchi deb ataladi.

Yasovchi Oz o‘qqa parallel, yo‘naltiruvchi L chiziq esa Oxy tekislikda yotadigan va

$$F(x;y)=0 \tag{8}$$

tenglama bilan aniqlanadigan holni qaraymiz (72-chizma).



72-chizma.

Sirtning yasovchisida ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqta olamiz, uning birinchi ikkita koordinatasi $N(x,y,0)$ koordinatalari bilan bir xil bo‘ladi. Shu sababli silindr sirtining $M(x;y;z)$ nuqtasining koordinatalari yo‘naltiruvchi chiziqning (8) tenglamasini qanoatlantiradi.

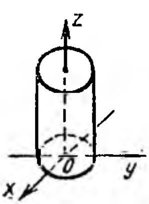
Demak, (8) tenglama yasovchilari Oz o‘qqa parallel silindrik sirtning tenglamasidir. Shunday qilib, z koordinatani o‘z ichiga olmagan va fazoda qaralayotgan (8) tenglama, yasovchilari Oz o‘qqa parallel va L yo‘naltiruvchisi Oxy tekislikda (8) tenglama bilan aniqlanadigan silindr sirtini aniqlaydi.

Shunga o‘xshash agar tenglamada x koordinata qatnashmasa $F(y,z)=0$ tenglama, agar tenglamada y koordinata qatnashmasa $F(x,z)=0$ tenglama mos ravishda yasovchilari Ox va Oy o‘qlariga parallel bo‘lgan silindrik sirtlarni aniqlaydi.

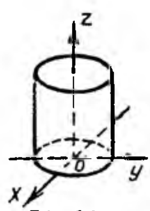
1-misol. $x^2+y^2=R^2$ tenglama bilan aniqlanadigan sirt silindrik sirt bo‘lib, u doiraviy silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Oz o‘qqa parallel, yo‘naltiruvchi esa Oxz tekislikdagi radiusi R va markazi koordinatalar boshida bo‘lgan $x^2+y^2=R^2$ aylana tenglamasidir (73-chizma).

2-misol. $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ tenglama bilan aniqlanadigan silindrik sirt elliptik silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Oz o‘qqa parallel, yo‘naltiruvchi esa Oxy tekislikdagi yarim o‘qlari a va b bo‘lgan ellipsdir (74-chizma).

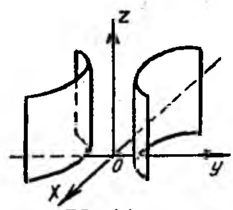
3-misol. $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ tenglama bilan aniqlanadigan silindirik sirt giperbolik silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Oz o‘qqa parallel,



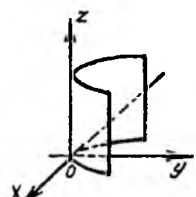
73-chizma.



74-chizma.



75-chizma.



76-chizma.

yo'naltiruvchi esa Ozy tekislikdagi haqiqiy o'qi a va mahxum o'qi b bo'lgan giperboladir (75-chizma).

4-misol. $x^2 = 2pz$ tenglama bilan aniqlanadigan silindrik sirt parabollik silindr deb ataladi. Uning yasovchilari Oz o'qqa parallel, yo'naltiruvchisi esa Oxz tekislikdagi paraboladir (76-chizma).

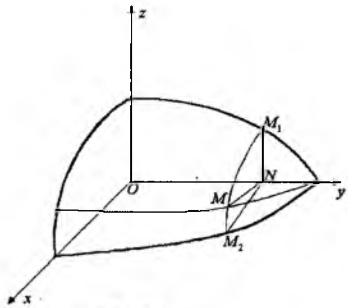
8.3. Aylanma sirtlar.

Faraz qilaylik yOz tekisligida Oy o'qini kesmaydigan biror L chiziq

$$F(Y,Z) = 0 \tag{9}$$

tenglama bilan berilgan bo'lsin (77-chizma). Bu chiziqning Oy o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtni tenglamasini topamiz.

Bu sirtning ixtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtasini olamiz. Bu nuqta orqali (Oy) o'qga perpendikular tekislik o'tkazamiz. Tekislik sirt bilan kesishib, aylana hosil qiladi. Uning markazi aylanish o'qida yotgan $N(o;y;o)$ nuqta bo'ladi. M va N nuqtalarning ordinatalari bir xil, ya'ni $Y = y$



77-chizma.

Aylananing MN radiusi M va N nuqtalar orasidagi masofadan iborat bo'ladi, ya'ni $Z = \sqrt{x^2 + z^2}$ ga teng. MN va M_1N — aylana radiuslari bo'lgani uchun

$$MN = M_1N = Z$$

Demak, berilgan (9) tenglamada

$$Y = y, \; Z = \sqrt{x^2 + z^2}$$

Y va Z larning ifodalarini (9) tenglamaga qo'ysak aylanma sirt tenglamasiga ega bo'lamiz.

$$F(y; \sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \tag{10}$$

Agar L chiziqning hamma nuqtalari uchun $z \geq 0$ bo'lmasa, $z < 0$ bo'lishi mumkin u holda $MN = -Z$ yoki $Z = -\sqrt{x^2 + z^2}$

Bu holda aylanma sirt tenglamasi

$$F(y; -\sqrt{x^2 + z^2}) = 0. \tag{11}$$

Ikkala holni birlashtirib, yoz tekisligidagi L chiziqning Oy o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan aylanma sirt tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$F(y;\pm\sqrt{x^2+z^2})=0. \qquad (12)$$

Boshqa koordinatalar tekisligidagi tekis chiziqlarning biror koordinata o‘qi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasi ham shu qoidaga asosan tuziladi.

Misol. $\frac{z^2}{c^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ellipsning (Oy) o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan aylanma sirt tenglamasi tuzilsin:

Echish: Ellips tenglamasidagi z ni $\pm\sqrt{x^2+z^2}$ bilan almashtiramiz.

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{x^2+z^2}{c^2}=1.$$

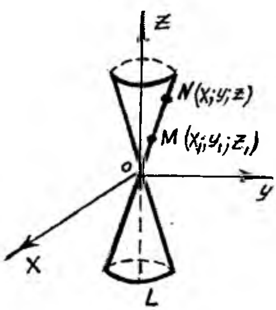
Bu esa izlangan sirt tenglamasi $b=c$ bo‘lsa bu sirt sferaga aylanadi.

8.4 Ikkinchi tartibli konus sirt.

Fazoda $L-$ ikkinchi tartibli chiziq berilgan bo‘lsin. Qo‘zg‘almas biror nuqtadan o‘tib, L chiziq bilan kesishgan holda uzluksiz harakat qiluvchi to‘g‘ri chiziqning chizgan sirti konus sirt deb ataladi. To‘g‘ri chiziq konusning yasovchisi, L chiziq konusning yo‘naltiruvchisi, qo‘zg‘almas nuqta konusning uchi deyiladi.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0. \qquad (13)$$

tenglama to‘g‘ri burchakli Dekart sistemasida uchi koordinatalar boshida bo‘lgan ikkinchi tartibli konusni ifodalaydi.



78-chizma.

Agar biror $M(x_1;y_1;z_1)$ nuqta (koordinatalar boshida yotmasligi kerak) (13) sirtda yotsa, koordinatalar boshi va $M(x_1;y_1;z_1)$ nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasi ham (13) sirtda yotadi.

Haqiqatan ham $N(x;y;z)$ nuqta OM to‘g‘ri chiziqda yotgan ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. (78-chizma). Bu holda N nuqtaning koordinatalari $x=x_1t$; $y=y_1t$; $z=z_1t$ (to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari) tenglamalarni qanoatlantiradi.

$M(x_1;y_1;z_1)$ nuqta (13) sirtda yotgani uchun (13) tenglamani qanoatlantiradi.

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}-\frac{z_1^2}{c^2}=0.$$

Endi (13) tenglamaga N nuqtaning koordinatalarini qo‘ysak

$$\frac{(x_1t)^2}{a^2}+\frac{(y_1t)^2}{b^2}-\frac{(z_1t)^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

hosil bo‘ladi. Bundan ko‘rinadiki, N nuqtaning koordinatalari ham (13) tenglamani qanoatlantiradi, ya’ni sirtda yotadi.

8.5. Ellipsoid.

Biror to‘g‘ri burchakli Dekart koordinata sistemasida koordinatalari

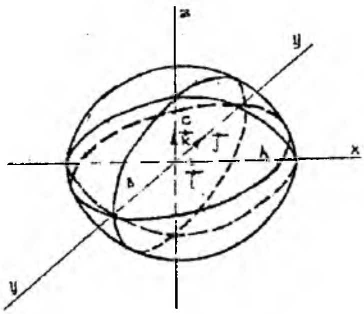
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{14}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni ellipsoid deyiladi.

(14) tenglama ellipsoidning kanonik tenglamasi bo‘lib, a, b, c lar ellipsoidning yarim o‘qlaridir.

Ellipsoid uchun koordinata tekisliklari simmetriya tekisliklari bo‘lib xizmat qiladi. Simmetriya o‘qlari ellipsoidning o‘qlari deyiladi.

Ellipsoidning o‘qlari bilan kesishish nuqtalari uning uchlari deyiladi. Simmetriya markazi ellipsoidning markazi deyiladi (79-chizma).



79-chizma.

Agar, ellipsoidning xOy tekisligiga parallel bo‘lgan $z=h$ tekislik bilan kessak, kesim tubandagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}.$$

bunda, agar $|h|<c$ bo‘lsa, kesim ellipsni, agar $|h|>c$ bo‘lsa, kesim bo‘sh to‘plamdan, agar $|h|=c$ bo‘lsa, kesim ellipsoidning uchini ifodalaydi. Shunga o‘xshash, ellipsoidni xOz va yOz koordinata tekisliklariga parallel tekisliklar bilan kesish (kesimda) natijasida ellips, bo‘sh to‘plam yoki ellipsoid uchi hosil bo‘lishini ko‘rish mumkin.

Misol: Yarim o‘qlari mos ravishda 3,5,9 ga teng bo‘lgan ellipsoid tenglamasi tuzilsin.

Yechish. Masala shartida berilganlarga ko‘ra a=3; b=5; c=9. U holda ellipsoid tenglamasi $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}+\frac{z^2}{81}=1$ bo‘ladi.

8.6. Giperboloidlar.

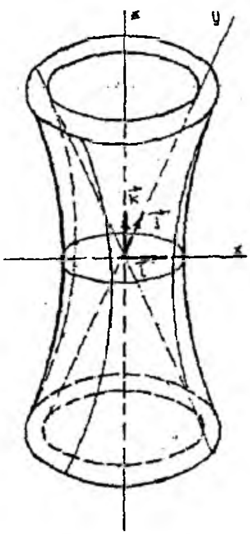
1. Biror to'g'ri burchakli Dekart koordinata sistemasida koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (15)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni bir pallali giperboloid deyiladi. (15) ko'rinishdagi tenglamaga bir pallali giperboloidning kanonik tenglamasi deyiladi. (15) tenglamadan ko'rinadiki, koordinata tekisliklari bir pallali giperboloidning simmetriya tekisliklari hisoblanadi. (Ox) va (Oy) o'qlari bir pallali giperboloidni kesadi va uning haqiqiy o'qlari deyiladi. Oz o'qi esa bir pallali giperboloid bilan kesishmaydi, shuning uchun unga mavhum o'q deyiladi. Bir pallali giperboloidning o'qlari bilan kesishish nuqtalari uning uchlari deyiladi. Koordinata boshi 0 nuqta bir pallali giperboloidning simmetriya markazi bo'lib, uning markazi deyiladi. a, b-sonlari bir pallali giperboloidning haqiqiy yarim o'qlari, c esa mavhum yarim o'qi deyiladi (80-chizma).

Giperboloidning xOy tekislik bilan kessak, kesimda

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\\ z=0\end{cases}$$



80-chizma.

ellips hosil bo'ladi. Shunga o'xshash, giperboloidni xOz, yOz tekisliklar bilan kessak, kesimda

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ y=0\end{cases} \quad \text{va} \quad \begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1\\ x\le 0\end{cases}$$

giperbolalar hosil bo'ladi. Agar giperboloidni xOz tekislikka parallel bo'lgan $z=h$ tekislik bilan kessak, kesimda

$$\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2(1+\frac{h^2}{c^2})}+\dfrac{y^2}{b^2(1+\frac{h^2}{c^2})}=1\\ z=h\end{cases}$$

ellips hosil bo'ladi. Bu ellips yarim o'qlari: $\tilde{a}=\frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2}$; $\tilde{b}=\frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2}$; $h=0$ bo'lsa, ellipsning yarim o'qlari o'zining minimal qiymatiga ega bo'ladi, ya'ni $\tilde{a}=a, \tilde{b}=b$

Bir pallali giperboloidni (Oy) va (Ox) o‘qiga perpendikular bo‘lgan tekisliklar bilan kessak, $(x=h;\ y=h)$ kesimda γ' va γ'' lar hosil bo‘ladi:

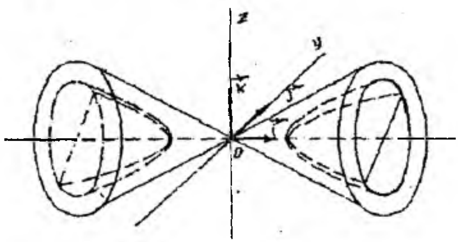
$$\gamma':\begin{cases}\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{a^2}=1-\dfrac{h^2}{b^2}\\ y=h\end{cases} \text{ va } \gamma'':\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1-\dfrac{h^2}{a^2}\\ x=h\end{cases}.$$ Agar, $|h|\neq a, |h|\neq b$ bo‘lsa,

u holda γ' va γ'' lar giperbolalarni ifodalaydi. Agar, $|h|=b$ bo‘lsa, u holda γ' - kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar juftini, $|h|=a$ bo‘lsa, γ'' - kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlar juftini ifodalaydi.

2. Biror to‘g‘ri burchakli Dekart koordinata sistemasida koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \qquad (16)$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o‘rni ikki pallali giperboloid deyiladi.



81-chizma.

(16) – tenglamaga ikki pallali giperboloidning kanonik tenglamasi deyiladi (81-chizma).

(16) tenglamadan ko‘rinadiki, koordinata tekisliklari ikki pallali giperboloid uchun simmetriya tekisliklari hisoblanadi. (Ox) o‘qi sirtni ikki haqiqiy nuqtada kesadi, shuning uchun unga haqiqiy o‘q deyiladi.

$(Oy),(Oz)$ o‘qlari ikki pallali giperboloid bilan haqiqiy nuqtalarga ega emas, shuning uchun ularga mavhum o‘qlar deyiladi. Ikki pallali giperboloidni o‘qlar bilan kesishish nuqtalari, uning uchlari deyiladi. U ikkita haqiqiy uchga ega.

a – son ikki pallali giperboloidda haqiqiy yarim o‘q, b va c lar mavhum yarim o‘qlar deyiladi. Ikki pallali giperboloidni (Ox) o‘qqa perpendikular bo‘lgan tekislik bilan kessak, kesimda

$$\gamma''':\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=\dfrac{h^2}{a^2}-1\\ h=x\end{cases}$$

hosil bo‘ladi.

agar, $|h|>a$ bo‘lsa, γ''' ellipsdan iborat bo‘ladi.

agar, $|h|<a$ bo‘lsa, u holda $\gamma'''=\varnothing$

agar, $|h|=a$ bo‘lsa, γ''' nuqtadan iborat bo‘ladi.

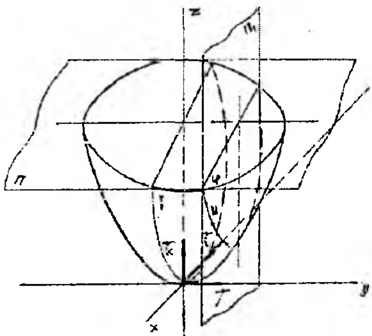
Shunga o'xshash, ikki pallali giperboloidni mavhum o'qlariga perpendikular bo'lgan tekisliklar bilan kessak, kesimda giperbola hosil bo'lishiga ishonch hosil qilamiz.

Misol: $4x^2+3y^2-6z^2+24=0$ tenglama bilan qanday sirt tasvirlanadi.

Yechish. Tenglamaning ikkala tomonini 24 ga bo'lib, uni tubandagi ko'rinishga keltiramiz. $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{8}-\frac{z^2}{4}=-1$ bu tenglama yarim o'qlari $a=\sqrt{6}, b=2\sqrt{2}, c=2$ bo'lgan uch o'qli ikki pallali giperboloidni tasvirlaydi.

8.7. Paraboloidlar.

1. Biror to'g'ri burchakli Dekart koordinata sistemasida koordinatalari



82-chizma.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{17}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni elliptik paraboloid deyiladi (82-chizma).

(17) tenglamadan ko'rinadiki, yOz va xOz tekisliklari elliptik paraboloid uchun simmetriya tekisliklari hisoblanadi. (Oz) o'qi elliptik paraboloidning simmetriya o'qi hisoblanib, uning o'qi deyiladi. Koordinata sistemasining boshi elliptik paraboloidning koordinata o'qlari bilan kesishgan nuqtasi bo'lib, uning uchi deyiladi. Elliptik paraboloidni uning o'qiga perpendikular bo'lgan tekislik bilan kessak, kesim tubandagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\gamma: \begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2h \\ z=h \end{cases}$$

agar $h>0$ bo'lsa, γ -ellips, agar $h<0$ bo'lsa $\gamma=\varnothing$ agar h=0 bo'lsa, γ kesim O uchdan iborat bo'ladi.

Elliptik paraboloidni (Ox), (Oy) o'qlariga perpendikular bo'lgan x=h va y=h tekisliklar bilan kessak, kesimda parabola hosil bo'ladi.

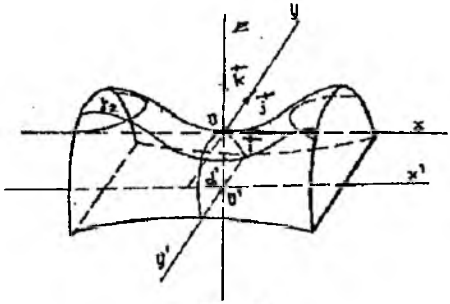
2. Biror to'g'ri burchakli Dekart koordinata sistemasida koordinatalari

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z. \tag{18}$$

tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalarning geometrik o'rni giperbolik paraboloid deyiladi. (18) tenglama esa uning kanonik tenglamasidir (83-chizma).

Giperbolik paraboloidni xOy tekislikka parallel bo'lgan $z=h$ tekislik bilan kessak, kesim quyidagi tenglama bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=2h \\ z=h \end{cases}$$



83-chizma.

$h>0$ bo'lganda, bu chiziq haqiqiy o'qi $z=h$ tekislikda va (Ox) o'qqa parallel giperbolani, $h<0$ bo'lganda esa, haqiqiy o'qi (Oy) o'qqa parallel giperbolani tasvirlaydi. $h=0$ bo'lganda, kesim ikkita kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini aniqlaydi. Shunga o'xshash giperbolik paraboloidni (Oy) va (Ox) o'qlarga perpendikular tekislik bilan kessak, kesimda parabola hosil bo'lishini ko'rish mumkin.

1-misol: $4x^2+3y^2=12z$ tenglama bilan berilgan sirt shaklini aniqlang.

Yechish. Sirt shaklini aniqlash uchun tenglamani har ikkala tomonini 6 ga bo'lamiz. U holda $\dfrac{x^2}{\frac{3}{2}}+\dfrac{y^2}{2}=2z$ ko'rinishidagi tenglamaga ega bo'lamiz. Bu tenglamani ham $2z=\dfrac{z^2}{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$ ko'rinishida yozish mumkin. Bundan ko'rinadiki, berilgan tenglama elliptik paraboloidni tasvirlar ekan.

2-misol: $x^2-y^2=4z$ tenglama bilan berilgan sirtning shaklini aniqlang.

Yechish. Berilgan sirt tenglamasini $2z=\dfrac{x^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}-\dfrac{y^2}{\left(\sqrt{2}\right)^2}$ ko'rinishida yozish mumkin. Demak, berilgan tenglama giperbolik paraboloidni tasvirlar ekan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Silindrik sirt ta'rifini aytib bering.
2. Uch o'qli ellipsioidning kanonik tenglamasini yozing va uni kesimlar usuli bilan shaklini tekshiring.
3. Bir kavakli va ikki kavakli giperboloidni kanonik tenglamalarini yozing va ularni shaklini kesimlar usuli bilan tekshiring.
4. Giperbolik, elliptik paraboloidlarni kanonik tenglamalarini yozing va ularning shakllarini kesimlar usuli bilan tekshiring.

VII BOB
DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOBI

1-§. Funksiya tushunchasi. Sonli funksiya. Funksiyaning berilish usullari

1.1. Funksiya.

Atrofimizda uchraydigan hodisalarni (fizik, biologik va h.k.) o'rganganda bu hodisani tavsiflovchi va unga tegishli o'zgaruvchi kattaliklarni bittasini boshqasiga (ixtiyoriy ravishda o'zgaradigan) bog'liq ravishda o'rganish maqsadga muvofiq.

Masalan, zarracha harakatida bosib o'tilgan yo'l, o'rmondagi «yirtqich»lar sonining o'sishi va hokazolar vaqtga bog'liq holda o'rganiladi.

Shular orqali biz funksiya tushunchasiga kelamiz.

Funksiya bu tirik va o'lik tabiatdagi mavjud qonuniyatlarni ifodalovchi usullardan biri hisoblanadi.

Funksiya tushunchasi matematik tushunchalarning asosiylaridan biri sanaladi. Bu tushuncha matematika bilan turli real hodisalar orasidagi bog'lanishni ochib beradi. Funksiya tushunchasi ikki to'plam elementlari orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

Masalan, sinfdagi partalar (ikki o'rinli) to'plami A bilan o'quvchilar to'plami B orasidagi bog'lanishni olib qaraylik: 1 partaga 2 ta o'quvchi, 2 partaga 4 ta o'quvchi, 3 partaga 6 ta o'quvchi va hokazo mos keladi. Boshqacha aytganda A to'plam elementlari bilan B to'plam elementlari orasidagi biror qonunga mos funksional bog'lanish o'rnatiladi.

Ta'rif. Agar biror f qonunga ko'ra X to'plamning har bir x elementiga Y to'plamning yagona y elementi mos kelsa, u holda X to'plamda $f(x)$ funksiya berilgan deyiladi va $y=f(x)$, $x\in X$ ko'rinishda belgilanadi, bunda x funksiyani argumenti, y esa funksiya qiymati deyiladi. X to'plam funksiyani aniqlanish sohasi, Y to'plam esa funksiyaning qiymatlar sohasi deyiladi. Ko'pgina adabiyotlarda funksiyaning aniqlanish sohasi $D(f)$ ko'rinishida belgilanadi. Funksiyalarni belgilashda faqat $y=f(x)$ harfidan emas, balki boshqa harflardan ham foydalanish mumkin.

Masalan, $y = y(x)$, $y = g(x)$, $y = A(x)$, $y = F(x)$ va boshqalar. Agar yuqoridagi funksiya ta'rifida X va Y to'plamlar $X \in R$, $Y \in R$ bo'lsa, funksiya sonli funksiya deyiladi. Biz bu kursimizda sonli funksiyalar bilan ish ko'ramiz va uni bundan keyin qisqacha funksiya deb ishlatamiz.

1.2. Funksiyaning berilish usullari.

Agar X va Y to'plamlar hamda ularning funksional bog'liq qonuni berilgan bo'lsa, funksiya berilgan hisoblanadi. Funksiya asosan quyidagi usullarda beriladi:

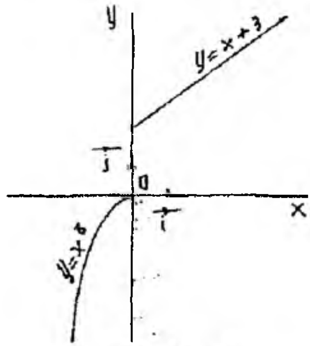
a) Analitik usul. Bu usulda o'zgaruvchilar orasidagi bog'liqlik formulalar yordamida beriladi.

Misol. $y = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ funksiya; aniqlanish sohasi $D(f) = [-1;1]$ kesmada, qiymatlar to'plami $[0;1]$ kesmada bo'lgan funksiyani aniqlaydi.

Ayrim hollarda funksiya funksiyaning aniqlanish sohasidagi oraliqlarga qarab turli formulalarda berilishi mumkin.

Masalan,

$$y = \begin{cases} x^3 & x < 0 \\ x + 3 & x > 0 \end{cases} \quad \text{(84-chizma.)}$$



84-chizma.

b) Jadval usulida:

Funksiya jadval usulida berilganda funksiya argumentlari va unga mos keluvchi funksiya qiymatlari jadvalda keltiriladi.

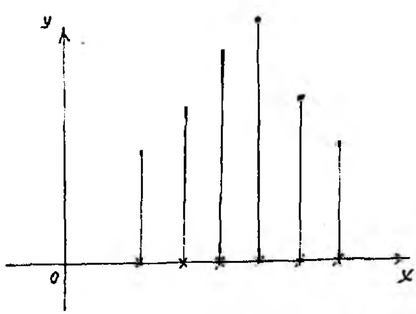
Masalan,

1) To'rt xonali matematik jadvallar.

2)

x	0	0,2	0,4	3	0,5	4	2	1,5
y	-2	3	5	8	2	1,5	6	4

Jadvaldan ko'rinadiki, funksiyaning aniqlanish sohasi argumentning 8 ta qiymatida bo'lib, unga funksiyaning ham 8 ta qiymati to'g'ri kelgan. Jadvaldagi qiymatlar tajribalardan yoki tajriba natijalarini matematik hisoblashlar natijasida olingan bo'lishi mumkin.



85-chizma.

d) Grafik usulda:

Bu usul asosan, funksiyalarni analitik usulda berish qiyin bo'lgan hollarida uchraydi. Ko'pincha tabiatda ro'y beradigan hodisalarni o'rganish jarayonida apparaturalar yordamida egrilar olinib, ularni o'rganishga to'g'ri keladi. Masalan, ostsilografni, elektrokardiogrammalarni ko'rsatishlari funksiyani grafik usulida berilishiga misol bo'la oladi.

e) funksiya nuqtalar yordamida berilishi mumkin (bunday berilish eksperiment natijasida olinadi, 85-chizma).

Bu yerda $x \in X$ element o'zaro kesishgan chiziqlar bilan belgilanadi.

1.3. Funksiyalarni monotonligi, juft-toqligi va davriyligi.

$y = f(x)$ funksiya biror $D(f) = [a,b]$ sohada aniqlangan bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiyada har bir x uchun shunday M soni mavjud bo'lib,

$$f(x) \leq M \tag{1}$$

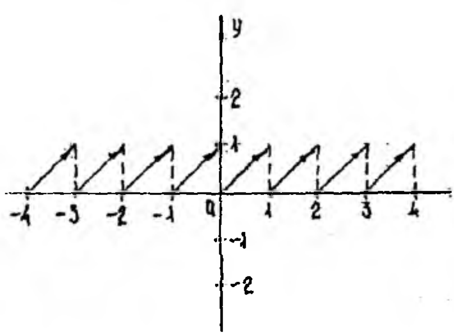
tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya chegaralangan deyiladi. (1) tengsizlik geometrik nuqtai nazaridan chegaralangan funksiyani grafigi koordinata tekisligida $-M \leq y \leq M$ gorizontal polasada joylashishini bildiradi.

Masalan, $y = x - |x|$, $x \in R$ funksiyaning grafigi butunicha $0 \leq y \leq 1$ polosada joylashgan. Shuning uchun bu funksiya chegaralangan. $y = x^3$ funksiya chegaralanmagan. (86,87-chizmalar)

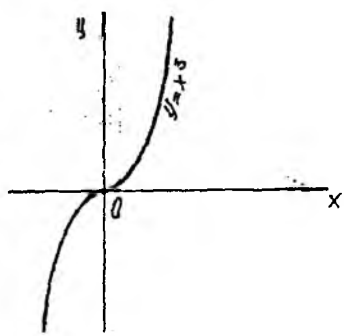
2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya argumentining ixtiyoriy ikkita $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ shartda $f(x_1) < f(x_2)$ (yoki $f(x_1) > f(x_2)$) tengsizlik bajarilsa $f(x)$ funksiya D sohada o'suvchi (yoki kamayuvchi) deyiladi.

3-ta'rif. Agar funksiya argumentining ixtiyoriy ikkita $x_1 \in D$, $x_2 \in D$ qiymatlari uchun $x_1 < x_2$ shartda $f(x_1) \leq f(x_2)$ (yoki $f(x_1) \geq f(x_2)$) tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya D sohada kamaymaydigan (o'smaydigan) deyiladi.

4-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiyaning D sohadagi ixtiyoriy x qiymati uchun $f(-x) = f(x)$ tenglik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiya juft funksiya



86-chizma.



87-chizma.

deyiladi. Agar D sohadagi ixtiyoriy x qiymati uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa, $y=f(x)$ funksiya toq funksiya deyiladi. $y=x^2$, $x\in R$ funksiya juft funksiya, chunki $y=(-x)^2=x^2$; $y=x^3$, $x\in R$ funksiya toq funksiya, chunki $y=(-x)^3=-x^3$.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya uchun shunday $T>0$ son mavjud bo'lib funksiyaning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy $x\in D(f)$ va $x\pm T\in D(f)$ uchun $f(x\pm T)=f(x)$ tenglik bajarilsa, u holda $y=f(x)$ davriy funksiya deyiladi. T ning eng kichik musbat qiymati T_0 mavjud bo'lsa unga $f(x)$ funksiyaning davri deyiladi. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$ funksiyalar davriy funksiyalar.

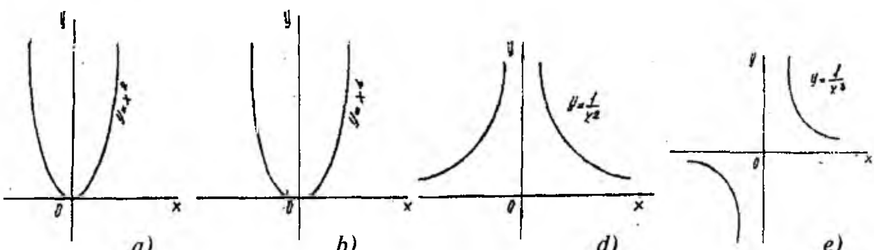
1.4. Sodda elementar funksiyalar.

Sodda elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalarga aytiladi: Darajali funksiya, $y=x^\alpha$ bunda $\alpha\in R$; ko'rsatkichli funksiya: $y=a^x$ bunda $a\neq 1$, musbat son; logarifmik funksiya: $y=\log_a x$ bunda $a\neq 1$ musbat son; trigonometrik funksiyalar, $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=tgx$, $y=ctgx$, $y=\sec x$, $y=\cos ecx$ va teskari trigonometrik funksiyalar $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=arctgx$, $y=arcctgx$, $y=arc\sec x$, $y=\arccos ecx$. Bu asosiy elementar funksiyalar o'rta maktab kursida o'tilgan bo'lsa-da, ularni ustida qisqacha to'xtalib o'tamiz.

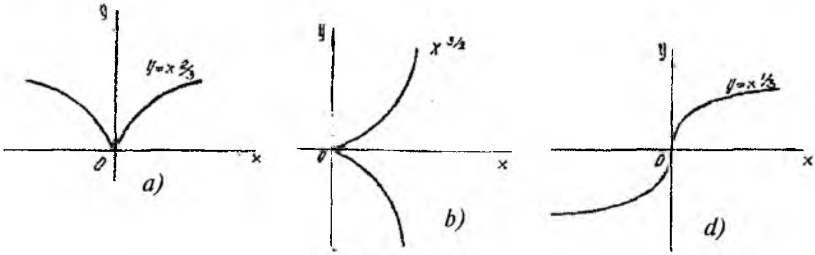
1) Darajali funksiya.

$y=x^\alpha$ (α -haqiqiy son) α -darajali funksiyaning ko'rsatkichi. Umuman darajali funksiya R_+ da to'la aniqlangan. α -irratsional son bo'lganda funksiya logarifmlash va potensirlash yo'li bilan hisoblanadi, bu yerda $x>0$. Shuning uchun funksiyani aniqlanish sohasi $(0;+\infty)$ deb olamiz. $x>0$ da $\alpha=0$ bo'lsa, $x^\alpha=1$ bo'ladi. $\alpha\neq 0$ bo'lsa, darajali funksiyaning qiymatlar to'plami haqiqiy sonlar $(0;+\infty)$ intervaldan iborat bo'ladi. 88, 89-chizmalarda darajali funksiyaning $\alpha>1$ va $\alpha<0$ qiymatlaridagi tasvirlari berilgan.

88-chizmadan ko'rinadiki, darajali funksiya musbat ko'rsatkichlarda o'suvchi, manfiy ko'rsatkichlarda kamayuvchidir. Shuning bilan birga darajali funksiya α ning qiymatlariga qarab aniqlanish sohalari har xil bo'lishini eslatish kerak:



88-chizma.



89-chizma.

a) α-butun musbat son bo‘lsa, funksiya $(-\infty;+\infty.)$ intervalda aniqlangan;

b) α-butun manfiy son bo‘lsa, funksiya x ning $x=0$ dan boshqa hamma qiymatlarida aniqlangan;

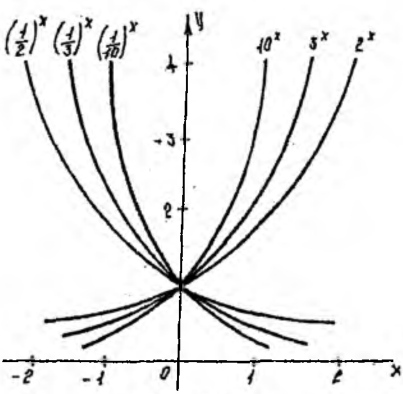
88 a,b-chizmalarda α-ning butun musbat son qiymatlarida grafiklar tasvirlangan;

88 v,g- chizmalarda α ning butun manfiy son qiymatlari uchun grafiklar tasvirlangan;

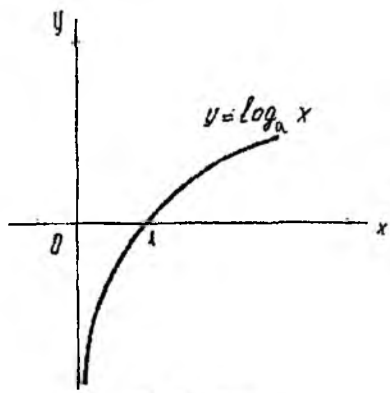
89 a,b,v chizmalarda α ning ratsional kasr qiymatlari uchun grafiklar tasvirlangan.

2) Ko‘rsatkichli funksiya $y=a^x$, $a>0$ va $a\neq 1$. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi barcha haqiqiy sonlar to‘plami R dan iborat. Bu funksiya $a>1$ da o‘suvchi, $0<a<1$ da kamayuvchi. Ikkala holda funksiya chegaralanmagan (90-chizma).

3) Logarifmik funksiya. $y=\log_a x$, $a>0$ va $a\neq 1$. Bu funksiya musbat sonlar to‘plami ya’ni, R_+ da aniqlangan. Bu funksiyaning qiymatlar to‘plami esa haqiqiy sonlar to‘plamidan iborat (91-chizma). Ko‘rsatkichli va logarifmik funksiyalar o‘zaro teskari funksiyalar.

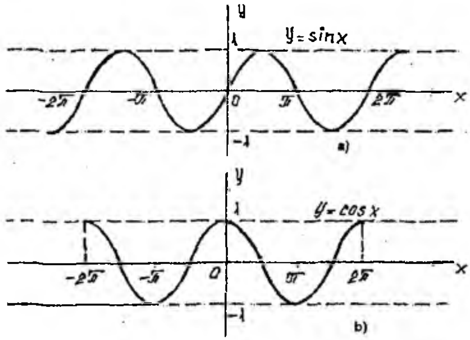


90-chizma.



91-chizma.

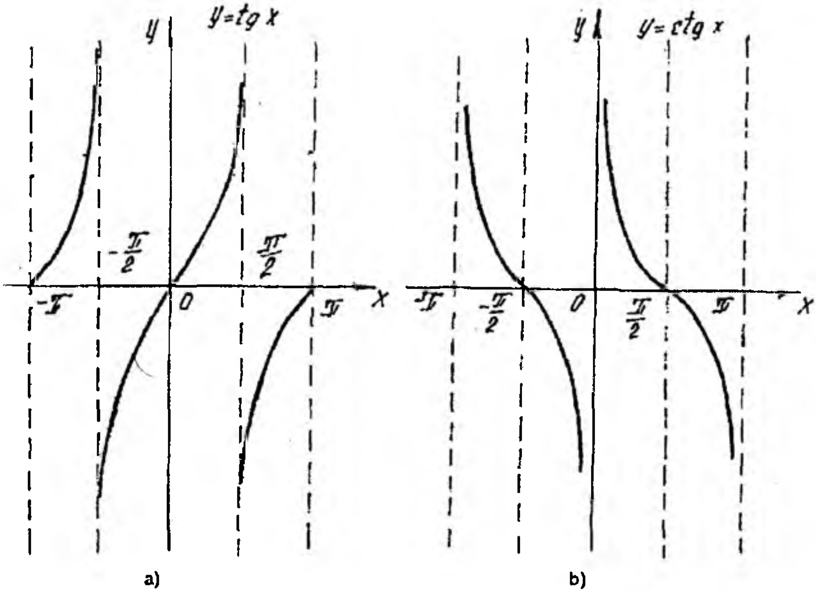
4) Trigonometrik funksiyalar. Trigonometrik funksiyalar barchasi davriydir. $y=\sin x$, $y=\cos x$, $x \in R$ funksiyalarining davri 2π ga teng; sinx funksiyasi toq, cosx funksiyasi juft funksiyadir. Bu funksiyalar x ning barcha qiymatlarida aniqlangan. Bu funksiyalarning grafiklari chegaralangan bo'lgani uchun $-1 \le y \le 1$ polosada joylashadi (92-chizma).



92-chizma.

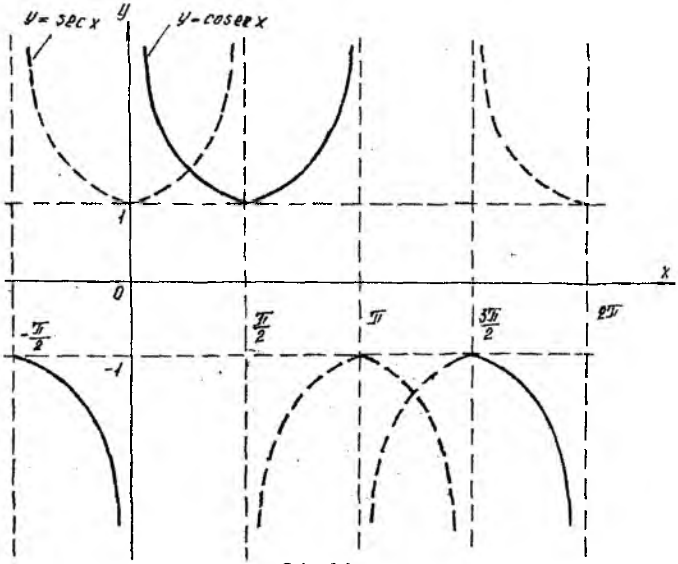
$$y=tgx; \quad x \in R, \quad x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k, \quad k \in Z$$

$$y=ctgx; \quad x \in R, \quad x \neq \pi k, \quad k \in Z$$



93-chizma.

Tangens va kotangens funksiyalari toq, chegaralanmagan, davriy bo'lib davri π ga teng (93-chizma) $y=\sec x$ funksiya $x \in R$, $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi k$, $k \in Z$, $y=\operatorname{cosec} x$, $x \in R$, $x \neq \pi k$, $k \in Z$, (94-chizma).

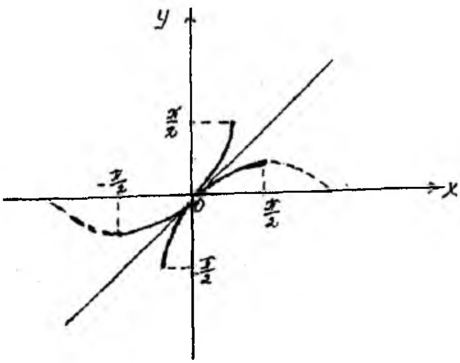


94-chizma.

1.5. Teskari funksiya.

Bizga $y = f(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasi A to‘plamdan, funksiyaning qiymatlar to‘plami B to‘plamdan iborat bo‘lsin. Agar $f(x)$ funksiya o‘suvchi bo‘lsa, A to‘plamidan olingan x_1 va x_2 qiymatlarni qarasak, o‘suvchi funksiya ta’rifiga ko‘ra $x_1 < x_2$ ($y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$) bo‘lsa, u vaqtda $y_1 < y_2$ bo‘ladi.

Demak, ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlariga funksiyaning ikkita y_1 va y_2 qiymatlari mos keladi. Buni teskarisi ham to‘g‘ri, ya’ni agar $y_1 < y_2$ ($y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$) bo‘lsa, o‘suvchi funksiya ta’rifidan $x_1 < x_2$ kelib chiqadi. Shunday qilib x ning qiymatlari bilan y ning ularga mos qiymatlari orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatiladi. y ning bu qiymatlarini argumentning qiymatlari deb x ning qiymatlarini esa funksiyaning qiymatlari deb qarab, x ni y ni funksiyasi sifatida olamiz. $x = \varphi(y)$ bu funksiya $y = f(x)$ funksiya uchun teskari funksiya deyiladi. Shunga o‘xshash kamayuvchi funksiya uchun ham teskari funksiya



95-chizma.

mavjudligini ko'rsatish mumkin. Agar $x=\varphi(y)$ va $y=f(x)$ funksiyalarni grafiklarini yasasak, bitta chiziqdan iborat bo'ladi. $x=\varphi(y)$ teskari funksiya $y=f(x)$ tenglamani x ga nisbatan yechish yo'li bilan topiladi. Odatda, teskari funksiyaning argumentini, ya'ni x bilan, funksiyani esa y bilan belgilab, grafik chizilsa, u holda ikkita har xil grafik hosil bo'ladi. Grafiklar birinchi koordinata burchaginning bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'lishini ko'ramiz.

Masalan, $y=\sin x$ funksiyasiga teskari $y=\arcsin x$ funksiyasini grafigini qaraylik (95-chizma).

1.6. Grafikni o'zgartirish (almashtirish).

Aytaylik,

$$y=f(x). \tag{1}$$

funksiya grafigi ma'lum bo'lsin

1-da'vo:

$$y=f(x+a) \text{ (bu yerda } a>0\text{)} \tag{2}$$

funksiyaning grafigi (1) funksiya grafigini Ox o'qi bo'yicha a birlik chapga surish natijasida hosil bo'ladi.

Isbot.

$$f(x+a)=f_1(x) \tag{3}$$

deb belgilaymiz. Aytaylik, (x_0, y_0) nuqta (1) funksiya grafigiga tegishli bo'lsin. U holda funksiya grafigiga asosan $y_0=f(x_0)$ bo'lib, (x_0-a, y_0) nuqta $y=f(x+a)$ funksiya grafigiga tegishli bo'ladi. Haqiqatan ham (2) dan $f_1(x_0-a)=f(x_0-a+a)=f(x_0)=y_0$ bo'ladi, demak da'vo o'rinli.

2-da'vo:

$$y=f(x)+b,\ b>0 \tag{4}$$

funksiya grafigi (1) funksiya grafigini Oy o'qi bo'yicha b birlik yuqoriga surish natijasida hosil bo'ladi.

3-da'vo:

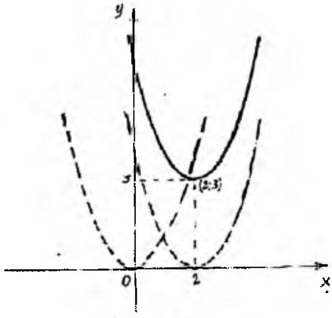
$$y=f(kx) \tag{5}$$

funksiya grafigi (1) funksiya grafigini Ox o'qiga k marta siqish, natijasida hosil bo'ladi.

4-da'vo:

$$y=kf(x) \tag{6}$$

funksiya grafigi (1) funksiya grafigining Oy o'qi bo'yicha k marta cho'zish, natijasida hosil bo'ladi.



96-chizma.

2,3,4 da'volarni to'g'riligi 1-da'vo isbotiga o'xshash tarzda isbot qilinadi.

Izoh. (1) funksiya grafigini (2) formula yordamida o'zgartirishda, uning shakli saqlanib grafigini joylashish holati o'zgaradi.

Misol. $y=(x-2)^2+3$ parabolani grafigi $y=x^2$ parabola grafigini 2 birlik o'ngga va 3 birlik yuqoriga siljitish natijasida hosil bo'ladi (96-chizma).

1.7. Murakkab funksiya, algebraik va trantsendent funksiyalar.

Murakkab funksiyalar. Bizga ikkita $y=F(u)$ va $u=\varphi(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. Boshqacha aytganda y u ning funksiyasi bo'lib u esa o'z navbatida x o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, y ham x ga bog'liq bo'ladi, ya'ni $y=F[\varphi(x)]$ funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya murakkab funksiya deyiladi.

$y=F[\varphi(x)]$ funksiyaning aniqlanish sohasi $u=\varphi(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi yoki u ning $F(u)$ funksiya aniqlanish sohasidan tashqari chiqmaydigan qiymatlarida aniqlanadigan qismi bo'ladi:

Misol. $u=1-x^2$, $y=\sqrt{u}$ bo'lsin u holda murakkab funksiya $y=\sqrt{1-x^2}$, bo'ladi. Bu funksiyani aniqlanish sohasi [-1;1] kesmadan iborat.

Ko'phadlar: $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+...+a_{n-1}x+a_n$ $x\in R$, $a\neq 0$ ko'rinishidagi funksiya n-darajali ko'phad yoki butun ratsional funksiya deyiladi.

Bu yerda $a_0,a_1,a_2,...,a_n$ koeffitsientlar deb ataladigan o'zgarmas sonlar, $n\in N$; n- ko'phadning darajasi deyiladi. Ko'phadlar alfavitning bosh harflari *P, R, Q*... bilan belgilanib, uning pastida indeks bilan ko'phadning darajasi ko'rsatiladi.

Masalan, uchinchi darajali ko'phad $P_3(x)=a_0x^3+5x$; Birinchi darajali ko'phad. $P_1(x)=a_0x+a$. Ikkinchi darajali ko'phad esa kvadrat uchhad deb ataladi. $P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$; ko'phadlar chegaralanmagan davriymas funksiyalar bo'ladi. Ayrim ko'phadlargina toq va monoton funksiyalar bo'lishi mumkin.

Ratsional funksiyalar.

Bu funksiya ikkita ko'phadning nisbati kabi aniqlanadi.

$$y=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_{m-1}x+b_m}.$$

Bu funksiya aniqlanish sohasi sonlar o'qining kasrni maxrajini nolga aylantiradigan nuqtalaridan boshqa barcha nuqtalar to'plamidan iborat. Agar ratsional kasrning suratidagi ko'phadning ko'rsatkichi maxrajidagi ko'phadning ko'rsatkichidan kichik bo'lsa , to'g'ri ratsional kasr, aks holda noto'g'ri ratsional kasr deyiladi. Noto'g'ri ratsional kasrni to'g'ri ratsional kasr bilan ko'phadning yig'indisi shaklida ifodalash mumkin.

Masalan, $y=\frac{x^4+3x^3+3x+1}{x^2+1}$ suratni maxrajga bo'lamiz. Natijada

$$y=\frac{x^4+3x^3+3x+1}{x^2+1}=(x^2+3x-1)+\frac{2}{x^2+1}$$

ga ega bo'lamiz.

Algebraik funksiyalar. Transendent funksiyalar.

1-ta'rif. Funksiyani aniqlovchi formuladagi argument x ustida faqat algebraik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish) bajarilgan bo'lsa, u funksiyaga algebraik funksiya deyiladi. Algebraik funksiyaga ko'phadlar va ratsional kasrlar misol bo'ladi.

2-ta'rif. Algebraik funksiyada ildiz chiqarish amali ham qatnashsa u irratsional funksiya deyiladi.

Masalan,

$$y=\frac{2x^4+x^3}{4\sqrt{x}+\sqrt{3x^3}}$$

3-ta'rif. Algebraik bo'lmagan boshqa barcha funksiyalar transsendent funksiyalar deyiladi.

$$10^x,\ \log_a x,\ \sin x,\ \cos x \text{ va hokazo.}$$

Elementar funksiyalar.

Ta'rif. Elementar funksiya deb $y=f(x)$ ko'rinishidagi birgina formula bilan berilishi mumkin bo'lgan funksiyaga aytiladiki, bunda o'ng tomonda turuvchi ifoda chekli sonda qo'shish, ayirish ko'paytirish, bo'lish va murakkab funksiya elementlari yordamida asosiy elementar funksiyalardan va o'zgarmaslardan tuzilgan.

Masalan,

$$y=x^3+5\sin 4x;\quad y=5\cos x;\quad x\in R.$$

$$y=\log_3(\cos x);\quad y=\cos(5^x);\quad x\in R.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Sonli funksiya deganda qanday funksiyani tushunasiz?
2. Funksiya nima?
3. Funksiyaning juft-toqligi, davriyligi qanday aniqlanadi?
4. Funksiyaning o'suvchi, kamayuvchiligi, chegaralanganligi, monotonligi qanday aniqlanadi?
5. Sodda elementar funksiyalarga qaysi funksiyalar kiradi?
6. Ko'phad deb nimaga aytiladi?
7. To'g'ri va noto'g'ri ratsional kasrlarni ta'riflang?
8. Algebraik va transsendent funksiyalar deganda qanday funksiyalarni tushunasiz?

2-§. Funksiyaning limiti, uzluksizligi, elementar funksiyalarning uzluksizligi, ajoyib limitlar

2.1. Sonli ketma-ketliklar. Chegaralangan monoton ketma-ketliklar.

1-ta'rif. Natural sonlar to'plami N da aniqlangan $\alpha = f(n)$ funksiya sonli ketma-ketlik deyiladi.

Sonli ketma-ketlik $\{x\}$ yoki $\{f(n)\}$ $n \in N$ ko'rinishida belgilanadi. Agar n ga $1,2,3,...$ va hokazo qiymatlar bersak, funksiyaning xususiy qiymatlarini olamiz.

$$x_1 = f(1), x_2 = f(2), ..., x_n = f(n).$$

Bu qiymatlarga sonli ketma-ketlikning hadlari yoki elementlari deyiladi. Ketma-ketlikning n-hadi uning umumiy hadi deb ataladi. Umumiy had ma'lum bo'lsa, ketma-ketlik berilgan hisoblanadi.

1-misol. $x_n = 3^n$ $n \in N$ funksiya quyidagi sonlar ketma-ketligini beradi:

$$\{x_n\} = \{3^n\} = \{3, 9, 27, ..., 3^n, ...\}.$$

2-misol. $x_n = \dfrac{1+(-1)^n}{2}$, $n \in N$ funksiya quyidagi sonli ketma-ketligini beradi:

$$\{x_n\} = \left\{\frac{1+(-1)^n}{2}\right\} = \{0, 1, 0, 1, ...\}.$$

Misollardan ko'rinadiki, barcha ketma-ketliklar cheksiz ketma-ketliklar bo'lib, ularning har birida ohirgi had mavjud emas.

Barcha hadlari bir xil qiymat qabul qiladigan $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'zgarmas ketma-ketlik deb ataladi.

Agar ketma-ketlikning n-hadi ya'ni umumiy hadi ma'lum bo'lsa uning hadlarini hisoblash mumkin.

3-misol. $x_n = \frac{(-1)^n}{n^3}$ berilgan. Bu ketma-ketlikning birinchi 7 ta hadini hisoblang.

$$x_1 = \frac{(-1)^1}{1^3} = -1; \quad x_2 = \frac{(-1)^2}{2^3} = \frac{1}{8}; \quad x_3 = \frac{(-1)^3}{3^3} = -\frac{1}{27};$$

$$x_4 = \frac{(-1)^4}{4^3} = \frac{1}{64}; \quad x_5 = \frac{(-1)^5}{5^3} = -\frac{1}{125}; \quad x_6 = \frac{(-1)^6}{6^3} = \frac{1}{196}; \quad x_7 = \frac{(-1)^7}{7^3} = -\frac{1}{343}.$$

Ketma-ketlik berilishini rekurrent usuli ham mavjud. Bu usulda ketma-ketlikning umumiy hadini, oldingi hadlardan foydalanib hisoblash qoidasi beriladi.Ketma-ketlikning umumiy hadini oldingi hadlari orqali hisoblash formulasi rekurrent munosabat deyiladi. Rekurrent munosabatga misol qilib quyidagi formulani ko'rsatish mumkin.

$$x_n = x_{n-1} + 3x_{n-2}.$$

Bu formula $n=1$ va $n=2$ qiymatlarda ma'noga ega emas,chunki bu qiymatlarda x_0, x_1 hadlar hosil bo'ladi, ketma-ketlikda esa $0, -1$ nomerli hadlar yo'q. Shuning uchun berilgan ketma-ketlikda x_1 va x_2 hadlarni boshlang'ich hadlar deymiz. Shularga asosan keyingi hadlarni x_3 dan boshlab topamiz. Aytaylik, $x_1 = 1, \; x_2 = 2$:

$$x_3 = x_2 + 3x_1 = 5; \qquad x_4 = x_3 + 3x_2 = 5 + 6 = 11;$$

$$x_5 = x_4 + 3x_3 = 11 + 15 = 26; \qquad x_6 = x_5 + 3x_4 = 26 + 33 = 59.$$

Shunday qilib 5, 11, 26, 59, ... ko'rinishdagi ketma-ketlikga ega bo'ldik.

2-ta'rif. Shunday musbat M soni mavjud bo'lib, barcha $n \in N$ uchun $|x_n| < M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ket chegaralangan deyiladi. Aks holda chegaralanmagan deyiladi.

4-misol. $x_n = \frac{1}{n^3}$ ketma-ketlik chegaralangan, chunki $0 < \left|\frac{1}{n^3}\right| < 1$.

3-ta'rif. Agar istalgan $n \in N$ uchun $x_n \le x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o'suvchi deyiladi. Agar $x_n < x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton o'suvchi ketma-ketlik deyiladi.

$x_n = \frac{2n-1}{n}; \;\; n \in N$ kamaymaydigan, chunki

$$x_{n+1} - x_n = \frac{2n+1}{n+1} - \frac{2n-1}{n} = \frac{1}{n(n-1)} > 0.$$

4-ta'rif. Agar istalgan $n \in N$ uchun $x_n \ge x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa,

$\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi deyiladi. Agar $x_n > x_{n+1}$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik monoton kamayuvchi ketma-ketlik deyiladi.

$x_n = \frac{1}{n^5}$ ketma-ketlik o'smaydigan, chunki $\frac{1}{(n+1)^5} < \frac{1}{n^5}$.

2.2 Ketma-ketlikning limiti.

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \quad n \in N \tag{1}$$

$$x_n' = 1 + \frac{1}{n} \quad n \in N \tag{2}$$

ketma-ketliklarni qaraylik. Bunda (1) ketma-ketlik n ning o'sib borishi bilan o'suvchi bo'lib, (2) ketma-ketlik esa n ning o'sib borishi bilan kamayuvchi ketma-ketlik bo'lib 1 ga yaqinlashadi. Buni matematik nuqtai nazaridan ta'riflash uchun quyidagi savolga javob izlaymiz. n ning qiymati qanday bo'lganda $x_n - 1$ ayirmaning absolut qiymati 0,001 dan kichik bo'ladi?

$$|x_n - 1| = \frac{1}{n}$$

bo'lganidan $|x_n - 1| < 0,001$ tengsizlik ixtiyoriy $n > N = 1000$ da bajariladi.

U holda ixtiyoriy musbat ε soni uchun (3) tengsizlik ixtiyoriy $n > N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ uchun bajariladi.

Mana shunday bo'lganda (1) va (2) ko'rinishidagi ketma-ketliklarning limiti 1 ga teng deyiladi va tubandagicha yoziladi.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 \quad \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

Endi ketma-ketlik limitiga ta'rif beramiz. a o'zgarmas son va $\{x_n\}$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

Ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N = N(\varepsilon)$ son mavjud bo'lsaki, barcha $n \geq N$ lar uchun $|x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, a o'zgarmas son $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a.$$

Yuqoridagi misollardan ko'rinadiki, N natural sonini tanlanishi oldindan berilgan musbat ε soniga bog'liq. Bu bog'lanish $N = N(\varepsilon)$

yoki $N = N\varepsilon$ ko'rinishida yoziladi. Agar ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi, limitga ega bo'lmasa, uzoqlashuvchi deyiladi.

2.3. Cheksiz kichik va cheksiz katta sonli ketma-ketliklar.

1-ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat A soni uchun (A ni qancha katta qilib tanlamaylik) shunday N nomer mavjud bo'lib, $n > N$ qiymatlarida $|x_n| > A$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta deyiladi.

Masalan, $\{n^2\}$ ketma-ketlik cheksiz katta. Shuning bilan birga chegaralanmagan ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'lmasligi ham mumkin.

Masalan, $1, 2, 1, 3, 1, 4, ..., 1, n, 1, n+1, ...$ ketma-ketlik cheksiz katta emas, chunki $A > 1$ qiymatida $|x_n| > A$ tengsizlik n ning toq qiymatlarida ma'noga ega emas.

2-ta'rif. Agar ixtiyoriy musbat ε soni uchun (ε-etarlicha qilib tanlanganda ham) shunday N nomer mavjud bo'lib, $n > N$ qiymatlarida $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi.

Masalan $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketlik $|x_n| = \left|\frac{1}{n}\right| < \varepsilon$ tengsizlikdan $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ga ega bo'lamiz. Agar $N = \left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $n > N$ uchun $|x_n| < \varepsilon$ bajariladi ($\varepsilon = \frac{1}{10}$ uchun $N = [10] = 10$ ni olamiz).

Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar orasidagi bog'lanishni quyidagi teorema aniqlab beradi:

Teorema. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari noldan farqli bo'lib, ya'ni x_n cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa $(\alpha_n) = \left(\frac{1}{x_n}\right)$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi va aksincha.

Cheksiz kichik ketma-ketliklar quyidagi xossalarga ega:

1) Ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklar yig'indisi va ayirmasi cheksiz kichik ketma-ketlik.

$$|\alpha_n \pm \beta_n| < \varepsilon .$$

2) Ikkita cheksiz kichik ketma-ketliklar ko'paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik

$$|\alpha_n \cdot \beta_n| < \varepsilon .$$

3) Cheklangan ketma-ketlikni cheksiz kichikka ko'paytmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik

$$|x_n \cdot \beta_n| < \varepsilon .$$

Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,uning limiti a ga teng bo'lsa, u holda $|x_n - a| = \{x_n\}$ ayirma cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi, chunki ixtiyoriy $\{a_n\}$ son uchun shunday $\{b_n\}$ nomer topiladi-ki, $|x_n| = |x_n - a| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Bundan esa yaqinlashuvchi ketma-ketlik biror a limitga ega bo'lsa, uning ixtiyoriy elementini $x_n = a + \alpha_n$ ko'rinishida yozish mumkin degan natijaga kelamiz.

Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning limitlarini hisoblashda yig'indini, ayirmani, ko'paytmani va bo'linmani limitlari to'g'risidagi quyidagi teoremalardan foydalanishga to'g'ri keladi (bu teoremalar arifmetik xossalar deb ham yuritiladi).

1-teorema. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa,ularning yig'indisi bo'lgan $\{a_n + b_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi va yig'indining limiti qo'shiluvchilarning limitlari yig'indisiga teng bo'ladi.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n .$$

Isboti. Aytaylik $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ bo'lsin. U holda $a_n = a + \alpha_n$, $b_n = b + \beta_n$ deb yozamiz. Bu yerda α_n va β_n lar $n \to \infty$ da nolga intiladi. $a_n + b_n = (a+b) + (\alpha_n + \beta_n)$; $n \to \infty$ da $\alpha_n \to 0$, $\beta_n \to 0$ ga intiladi, bundan

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = (a+b) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n .$$

2-teorema. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, ularning ko'paytmasi ham yaqinlashadi va ko'paytmaning limiti, ko'payuvchilar limitlari ko'paytmasiga teng.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = (\lim_{n\to\infty} a_n)(\lim_{n\to\infty} b_n) .$$

1-natija. O'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

2-natija. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, ularning ayirmasi $\{a_n - b_n\}$ ham yaqinlashadi va ayirmani limiti limitlar ayirmasiga teng bo'ladi.

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n .$$

3-teorema. Agar $\{a_n\}$ va $\{b_n\}$ ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lsa, va $b_n \neq 0$ bo'lsa, ularning bo'linmasi $\{a_n / b_n\}$ ketma-ketlik ham yaqinlashadi va uning limiti, limitlar bo‘linmasiga teng bo‘ladi.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}.$$

Misol. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{8-3n}{7-4n}=\dfrac{3}{4}$.

Monoton ketma-ketlik ta’rifi.

Agar $x_1<x_2<x_3<...<x_n<x_{n+1}<...$ bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘suvchi, agar $x_1\le x_2\le x_3\le...\le x_n\le x_{n+1}\le...$ bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamaymovchi, agar $x_1>x_2>x_3>...>x_n>x_{n+1}>...$ bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamayuvchi, agar $x_1\ge x_2\ge x_3\ge...\ge x_n\ge x_{n+1}\ge...$ bo‘lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik o‘smovchi deyiladi.

Bu ketma-ketliklarning barchasi birlashtirilib, monoton deyiladi. O‘suvchi va kamayuvchi ketma-ketliklar qat’iy monoton deyiladi.

Berilgan ketma-ketlikni monotonlikka tekshirishda $x_{n+1}>x_n$ ni bajarilishi yoki $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ ga nisbati 1 ga taqqoslanadi.

1-misol. $x_n=\dfrac{n}{3n+1}$ umumiy hadga ega bo‘lgan ketma-ketlik monoton o‘suvchi ekanligini isbotlang.

Yechish. Ixtiyoriy n uchun $x_{n+1}>x_n$ ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun n ni $n+1$ ga almashtiramiz.

$x_{n+1}=\dfrac{n+1}{3n+4}$ taqqoslash uchun bitta umumiy maxrajga keltiramiz.

$$x_{n+1}=\frac{3n^2+4n+1}{(3n+4)(3n+1)};\quad x_n=\frac{3n^2+4n}{(3n+4)(3n+1)}.$$

$3n^2+4n+1>3n^2+4n$ bo‘lgani uchun $x_{n+1}>x_n$.

2-misol. Umumiy hadi $x_n=n/5^n$ ga teng bo‘lgan ketma-ketlik monoton kamayuvchi.

Yechish. n uchun $\dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ nisbatini tekshiramiz. Quyidagi nisbatni olamiz.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{n+1}{6^{n+1}}:\frac{n}{6^n}=\frac{(n+1)\cdot 6^n}{6^{n+1}\cdot n}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1+\frac{1}{n}}{6}\le\frac{2}{6}<1.$$

Monoton ketma-ketliklar hech bo'lmaganda bir tomondan cheklangan bo'lishini eslatish kifoya.

Teorema (isbotsiz keltiramiz). Monoton chegaralangan ketma-ketlik limitga ega.

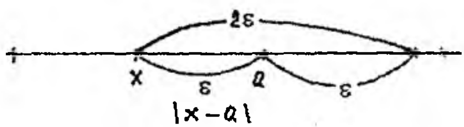
2.5. O'zgaruvchi miqdorning limiti. Cheksiz katta o'zgaruvchi miqdor.

Biz tartiblangan o'zgaruvchi miqdorlarni tekshiramiz. Bundan keyin o'zgaruvchan miqdorni o'zgaruvchi x ning deb ishlatamiz.

1-ta'rif. Agar har bir oldindan berilgan kichik $\varepsilon > 0$ son uchun x ning shunday qiymatini topish mumkin bo'lsa-ki, x ning keyingi qiymatlarida $x - a < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, o'zgarmas «a» son o'zgaruvchi x ning limiti (oxirgi marrasi) deyiladi. («lim» - qisqartirilgani, lotincha limes so'zidan olingan bo'lib, marra (chek) degan so'zdir).

Agar a son o'zgaruvchi x ning limiti bo'lsa, u holda x o'zgaruvchi a ga intiladi deyiladi va $\lim x = a$ ko'rinishda yoziladi.

Geometrik nuqtayi nazardan limit ta'rifini quyidagicha ifodalash mumkin: Markazi a nuqtada va radiusi ε bo'lgan oldindan berilgan ixtiyoriy har qancha kichik atrof uchun x ning shunday qiymati topilsaki, o'zgaruvchining keyingi qiymatlariga tegishli barcha nuqtalar shu atrofda bo'lsa, o'zgarmas a son o'zgaruvchi x ning limiti bo'ladi (97-chizma).



97-chizma.

Misol. O'zgaruvchi miqdor x ketma-ket quyidagi qiymatlarni qabul qiladi:

$$x_1 = 3 + \frac{1}{2},\ x_2 = 3 + \frac{1}{2^2},\ x_3 = 3 + \frac{1}{2^3}, \ldots,\ x_n = 3 + \frac{1}{2^n}.$$

Bu o'zgaruvchi miqdorning limiti 3 ga tengligini isbotlaymiz. Quyidagi tenglikni yozamiz:

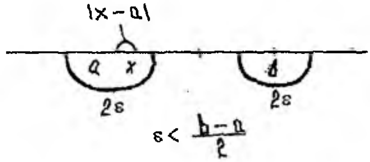
$$|x_n - 3| = \left|\left(3 + \frac{1}{2^n}\right) - 3\right| = \frac{1}{2^n}.$$

Har qanday ε uchun o'zgaruvchining n nomeridan boshlanadigan barcha keyingi qiymatlari (bu yerda $\frac{1}{n^2} < \varepsilon$ yoki $n > \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$) $|x_n - 3| < \varepsilon$

tengsizlikni qanoatlantiradi. Bu esa talab qilingan isbotdir, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{1}{2^n}\right)=3.$$

O'zgarmas miqdorning limiti shu o'zgarmas miqdorning o'ziga teng, chunki ε har qanday bo'lganda ham $|x-s|=|s-s|=0<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Limitning ta'rifidan o'zgaruvchi x ikkita limitga ega bo'la olmasligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar $\lim x=a$, $\lim x=b$ $(a<b)$ bo'lsa, u holda ε ixtiyoriy kichik bo'lgan holda x birdaniga ushbu ikkita tengsizlikni qanoatlantirishi lozim: $|x-a|<\varepsilon$ va $|x-b|<\varepsilon$ bu esa $\varepsilon<\dfrac{b-a}{2}$ bo'lgan holda bo'lishi mumkin, bu esa mumkin emas (98-chizma).



98-chizma.

2-ta'rif. Agar oldindan berilgan har bir $M>0$ son uchun x ning shunday qiymatini topish mumkin bo'lsaki, o'zgaruvchining shu qiymatidan boshlab, barcha keyingi qiymatlari uchun $|x|>M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa o'zgaruvchi x cheksizlikga intiladi deyiladi.

Agar o'zgaruvchi x cheksizlikga intilsa, u cheksiz katta o'zgaruvchi miqdor deyiladi va $x\to\infty$ ko'rinishida yoziladi. Misol, o'zgaruvchi miqdor x

$$x_1=-1;\ x_2=4;\ x_3=-9;\ x_4=16,\dots,x_n=(-1)^n n^2,\dots,$$

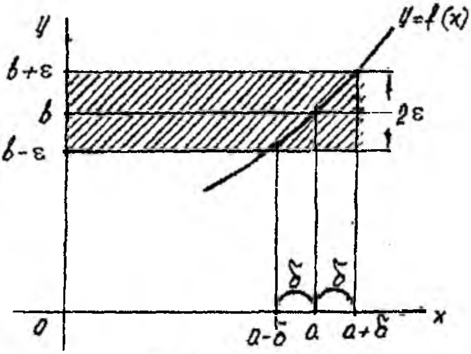
qiymatlarni qabul qilsin. Bu cheksiz katta o'zgaruvchi miqdor, chunki ixtiyoriy $M>0$ da o'zgaruvchining biror qiymatidan boshlab, hamma keyingi qiymatlari absolut miqdor bo'yicha M dan katta bo'ladi.

2.6. Funksiyaning nuqtadagi limiti.

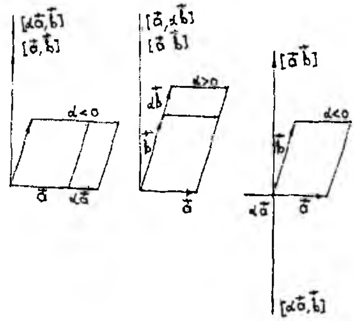
Endi x argument biror a limitga yoki cheksizlikga intilganda funksiya o'zgarishini qaraymiz.

1-ta'rif. Agar, $y=f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan bo'lib, ($x=a$ nuqtaning o'zida aniqlanmagan bo'lishi mumkin) musbat ε son uchun shunday musbat b sonni ko'rsatish mumkin bo'lsa-ki, x ning a dan farqli va $|x-a|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha $x\neq a$ nuqtalar uchun $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, x argument a ga intilganda $(x\to a)$, $y=f(x)$ funksiya b limitga intiladi $(y \to b)$ va b son funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti deyiladi.

Agar b son funksiyaning a nuqtadagi limiti bo‘lsa, quyidagicha: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ yoki $x \to a$ da $f(x)\to b$ deb yoziladi. Agar $x \to a$ da $f(x)\to b$ bo‘lsa, u holda $y=f(x)$ funksiyaning grafigida bu quyidagicha tasvirlanadi (99-chizma). $|x-a|<\delta$ tengsizlikdan $|f(x)-b|<\varepsilon$ tengsizlik chiqar ekan, u holda bu, a nuqtadan δ yiroq bo‘lgan masofada turuvchi barcha x nuqtalar uchun $y=f(x)$ funksiya grafigining M nuqtalari $y=b-\varepsilon$ va $y=b+\varepsilon$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan, eni 2ε bo‘lgan yo‘l (polosa) ichida yotadi (99-chizma).



99-chizma.


100-chizma.

1-eslatma. Agar x biror a sondan kichik qiymatlarnigina qabul qilib, shu a songa intilganda $f(x)$ funksiya b_1 ga limitga intilsa, u holda $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=b_1$ deb yoziladi va b_1 ga $f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap limiti deyiladi. Agar x funksiya a dan katta qiymatlarnigina qabul qilsa, u holda $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=b_2$ deb yoziladi va b_2 funksiyaning a nuqtadagi o‘ng limiti deyiladi.

Agar o‘ng va chap limitlar mavjud bo‘lib $b_1=b_2=b$ bo‘lsa, u holda limitning ta’rifiga ko‘ra a nuqtada limitning o‘zi bo‘ladi (100-chizma).

Misol. $\lim\limits_{x\to 2}(2x+1)=5$ ekanini isbotlaymiz. Haqiqatan ixtiyoriy $\varepsilon>0$ berilgan bo‘lsin; ushbu $|(2x+1)-5|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilishi uchun quyidagi tengsizliklarning bajarilishi zarur:

$$|2x-4|<\varepsilon,\ |(x-2)|<\frac{\varepsilon}{2},\ -\frac{\varepsilon}{2}<x-2<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Shunday qilib, istalgan ε da x ning $|x-2|<\frac{\varepsilon}{2}=\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun $2x+1$ funksiya qiymatining 5 dan farqi ε dan kichik bo'ladi. Bu esa $x\to 2$ da intilganda funksiyaning limiti 5 demakdir.

2-eslatma. Funksiyaning limiti $x\to a$ da mavjud bo'lishi uchun funksiya $x=a$ nuqtada aniqlangan bo'lishi talab qilinmaydi. Limitni topishda a nuqtaning a dan farqli atrofida funksiyaning qiymatlari qaraladi.

Misol. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-2x}=2$ ekanini isbotlaymiz.

Bu yerda funksiya $x=2$ da aniqlanmagan. Ixtiyoriy ε da δ shunday topiladiki, agar $|x-2|<\delta$ bo'lsa,

$$\left|\frac{x^2-4}{x^2-2x}-2\right|<\varepsilon; \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilishini isbotlash kerak. Ammo $x\neq 2$ da (1) tengsizlik

$$\left|\frac{(x-2)(x+2)}{x(x-2)}-2\right|=\left|\frac{(x+2)}{x}-2\right|=\frac{x-2}{x};$$

yoki $|x-2|<\varepsilon$ (2) tengsizlikga ekvivalentdir.

Shunday qilib, ixtiyoriy ε da (2) tengsizlik bajarilsa, (1) tengsizlik bajariladi (bunda $\varepsilon=\delta$). Buning o'zi berilgan funksiya $x\to 2$ da 2 sonidan iborat limitga ega demakdir.

2.7. Cheksizlikka intiluvchi funksiyalar.

Endi argument o'zgarganda $y=f(x)$ funksiya cheksizlikka intilgan holni qaraymiz.

1-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya a nuqtaning biror atrofida aniqlangan va istalgan $M>0$ son uchun shunday son topish mumkin bo'lsa-ki, x ning $|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiradigan barcha $x\neq a$ lar uchun $|f(x)|>M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $x\to a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intiladi deyiladi (ya'ni $x\to a$ da funksiya cheksiz katta miqdor bo'ladi).

Agar $x\to a$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intilsa va bunda faqat musbat yoki manfiy qiymatlar qabul qilsa, mos ravishda bunday yoziladi:

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty.$$

Misol. $\lim_{x\to -1}\frac{1}{1+x} = \infty$ ekanligini isbotlang.

Yechish. $f(x)=\frac{1}{1+x}$ funksiyani qaraymiz. Ixtiyoriy $M>0$ sonini olamiz. $|f(x)|>M$ ni almashtiramiz. $\left|\frac{1}{1+x}\right|>M$ bo'lsin. Bundan $|x+1|<\frac{1}{M}$ bo'lishi kelib chiqadi. Agar $\delta=\frac{1}{M}$ deb olinsa, $|x+1|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiradigan x lar uchun quyidagi tengsizlik bajariladi:

$$\left|\frac{1}{1+x}\right|>\frac{1}{\delta}=M \quad \text{yoki} \quad \left|\frac{1}{1+x}\right|>M.$$

Bundan esa $x\to -1$ da $f(x)=\frac{1}{1+x}\to\infty$ bo'lishi kelib chiqadi.
Agar $x\to\infty$ da $f(x)$ funksiya cheksizlikka intilsa, u holda bunday yoziladi: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$ va jumladan, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$ bo'lishi mumkin.

Masalan, $\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ va shunga o'xshash.

Eslatma. $x\to a$ da yoki $x\to\infty$ da $y=f(x)$ funksiya chekli limitga yoki cheksizlikka intilmasligi ham mumkin.

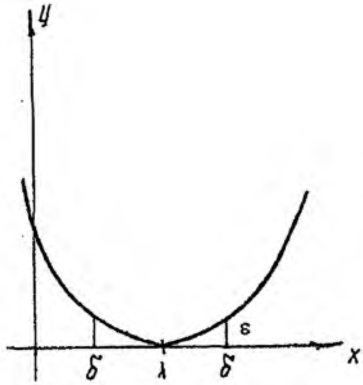
2.8. Cheksiz kichik funksiyalar.

Endi argumentning biror o'zgarishida nolga intiluvchi funksiyalarni tekshiramiz.

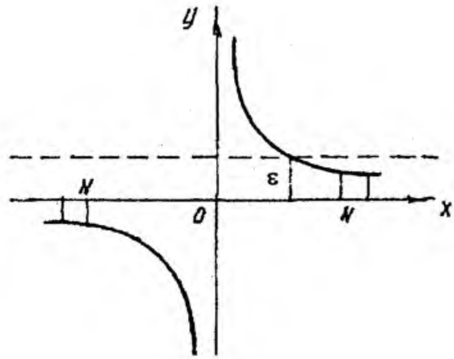
Ta'rif. Agar $\lim_{x\to a} f(x)=0$ yoki $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$ bo'lsa, $x\to a$ da yoki $x\to\infty$ da $f(x)$ funksiya cheksiz kichik funksiya deyiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, ya'ni $\lim_{x\to a} f(x)=0$ bo'lsa, bu oldindan berilgan har qanday ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son topiladi-ki, x ning $|x-a|<\delta$ shartni qanoatlantiruvchi x ning barcha qiymatlari uchun $|f(x)|<\varepsilon$ sharti o'rinli bo'ladi.

Misol. 1. $f(x)=(x-1)^2$ funksiya $x\to 1$ da cheksiz kichikdir, chunki $\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}(x-1)^2=0$ (101-chizma).



101-chizma.



102-chizma.

2. $\alpha = \frac{1}{x}$ funksiya $x \to \infty$ da cheksiz kichikdir (102-chizma).

1-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya o‘zgarmas son b bilan cheksiz kichik funksiya $\alpha(x)$ ning yig‘indisi

$$y = b + \alpha(x). \tag{1}$$

ko‘rinishda berilsa u holda, $x \to a$ yoki $x \to \infty$ da $\lim y = b$ bo‘ladi.

Aksincha, agar $\lim y = b$ bo‘lsa, $y = b + \alpha(x)$ deb yozish mumkin, bu yerda $\alpha(x)$ cheksiz kichik funksiya.

Isboti. (1) tenglikdan: $|y - b| = |\alpha(x)|$ kelib chiqadi. Ammo ixtiyoriy ε da, biror qiymatdan boshlab, x ning barcha qiymatlari $|\alpha(x)| < \varepsilon$ munosabatni qanoatlantiradi, demak, biror qiymatdan boshlab, y ning barcha qiymatlari uchun $|y - b| < \varepsilon$ tengsizlik qanoatlantiriladi. Buning o‘zi $\lim y = b$ demakdir.

Misol. $y = 1 + \frac{1}{x}$ funksiya berilgan bo‘lsin, u holda $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$ va aksincha, $\lim\limits_{x \to \infty} y = 1$ bo‘lgani uchun o‘zgaruvchi y ni 1 bilan cheksiz kichik funksiyaning yig‘indisi ya’ni $y = 1 + \alpha(x)$ ko‘rinishda yozish mumkin.

2-teorema. Agar $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$ da) $\alpha = \alpha(x)$ nolga intilsa-yu, lekin nolga aylanmasa, u holda $y = \frac{1}{\alpha(x)}$ cheksizlikka intiladi.

3-teorema. Ikki, uch va umuman ma’lum sondagi cheksiz kichik funksiyalarning algebraik yig‘indisi cheksiz kichik funksiyadir.

4-teorema. Cheksiz kichik $\alpha = \alpha(x)$ funksiyaning cheklangan $z = z(x)$ funksiya bilan ko‘paytmasi $x \to a$ da (yoki $x \to \infty$ da) cheksiz kichik miqdordir.

2.9 Limitlar haqida asosiy teoremalar.

1-teorema. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig'indisining limiti bu funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng.

$$\lim(U_1+U_2+....+U_n)=\lim U_1+\lim U_2+.....+\lim U_n.$$

Isboti. Isbotni ikki qo'shiluvchi uchun keltiramiz, qo'shiluvchilar soni har qancha bo'lganda ham isbot o'z kuchida qoladi.

Aytaylik, $\lim U_1=b_1$; $\lim U_2=b_2$ bo'lsin. U holda 2.8 mavzudagi 1-teoremaga asosan, $U_1=b_1+\alpha_1(x)$, $U_2=b_2+\alpha_2(x)$; $\alpha_1(x)$, $\alpha_2(x)$ lar cheksiz kichik miqdorlar. Demak, $U_1+U_2=(b_1+b_2)+(\alpha_1+\alpha_2)$; (b_1+b_2) – o'zgarmas miqdor, $(\alpha_1+\alpha_2)$ esa cheksiz kichik miqdor.

$$\lim(U_1+U_2)=b_1+b_2=\lim U_1+\lim U_2.$$

Misol.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^3}{x^4}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}1+\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x}=1+0=1.$$

2-teorema. Chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti bu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng.

$$\lim U_1U_2....U_n=\lim U_1.\lim U_2....\lim U_n.$$

Isboti.

$$\lim U_1=b_1 \qquad \lim U_2=b_2$$

$$U_1=b_1+\alpha_1 \qquad U_2=b_2+\alpha_2$$

$$U_1U_2=(b_1+\alpha_1)(b_2+\alpha_2)=b_1b_1+b_1\alpha_2+b_2\alpha_1+\alpha_1\alpha_2$$

bo'lsin. b_1b_2 ko'paytma o'zgarmas miqdor.

Demak, $\lim U_1U_2=\lim U_1\lim U_2$.

Natija. O'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin. $\lim cU_1=c\lim U_1$. Agar $\lim U_1=b_1$, c –o'zgarmas. $\lim c=c$,

$$\lim(cb_1)=\lim c\cdot\lim b_1=c\lim b_1$$

3-teorema. Ikkita funksiya bo'linmasining limiti, maxraj limiti noldan farqli bo'lsa, bu funksiyalar limitlarining bo'linmasiga teng.

Agar $\lim V\neq 0$ bo'lsa, $\lim\frac{U}{V}=\frac{\lim U}{\lim V}$.

Isboti. $\lim U=a$, $\lim V\neq 0$.

Demak, $U=a+\alpha$, $V=b+\beta$, bu yerda α va β cheksiz kichik miqdorlar.

$$\frac{U}{V}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{a}{b}+\left(\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{\alpha b-a\beta}{b(b+\beta)}$$

$$\lim\frac{U}{V}=\frac{a}{b}=\frac{\lim U}{\lim V}.$$

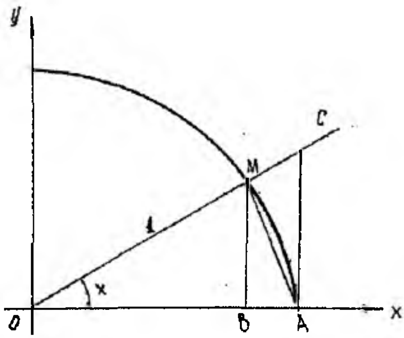
4-teorema (teorema isbotsiz keltiriladi). Agar uchta $f_1(x)$, $f_2(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarning qiymatlari orasida $f_1(x)\le\varphi(x)\le f_2(x)$) tengsizliklar bajarilsa, bunda $x\to\alpha$ da (yoki $x\to\infty$ da) $f_1(x)$, va $f_2(x)$ birgina b limitga intilsa, u holda $x\to\alpha$ da (yoki $x\to\infty$ da) $\varphi(x)$ ham shu limitga intiladi, ya'ni $\lim\varphi(x)=b$ bo'ladi.

Bu teorema oraliq funksiyaning limiti haqida teorema deyiladi.

2.10. $x\to 0$ da $\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning limiti.

Teorema. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x\to 0$ da 1 ga teng limitga ega.

Isboti. $\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ da aniqlanmagan, chunki kasrning surat va maxraji nolga aylanadi. Bu funksiyaning $x\to 0$ limitini topamiz. Radiusi 1 bo'lgan aylanani qaraymiz (103-chizma).



103-chizma.

Markaziy burchakni x bilan belgilaymiz.

Bunda $0<x<\frac{\pi}{2}$ chizmadan quyidagilar chiqadi:

ΔMOA yuzi <MOA sektor yuzi $<\Delta COA$ yuzi;

ΔMOA yuzi $S=\frac{1}{2}OA\cdot MB=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin x=\frac{1}{2}\sin x$;

MOA sektor yuzi $S=\frac{1}{2}OA\cdot\breve{MA}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x=\frac{1}{2}x$;

ΔCOA yuzi $S=\frac{1}{2}OA\cdot AC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx=\frac{1}{2}tgx$.

Demak, $\sin x<x<tgx$.

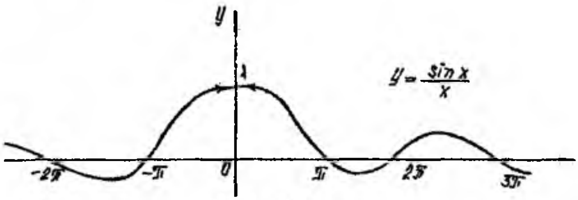
Hamma hadlarni $\sin x$ ga bo'lamiz.

$1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ yoki $1>\frac{x}{\sin x}>\frac{1}{\cos x}$. Bu tengsizliklarni $x>0$ deb chiqardik.

$\frac{\sin(-x)}{-x}=\frac{\sin x}{x}$. $\cos(-x)=\cos x$ ekanini e'tiborga olsak, $x<0$ bo'lsa ham tengsizlik to'g'ri bo'lib chiqadi.

$$\lim_{x\to 0}\cos x=1 \qquad \lim_{x\to 0}1=1.$$

Demak, $\frac{\sin x}{x}$ funksiya shunday ikki funksiya oraliqidaki, ularning ikkalasi ham birgina limitga intiladi va u limit 1 ga teng (104-chizma).



104-chizma.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg3x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x}\frac{1}{\cos 3x}=3\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos 3x}=3\frac{1}{1}=3.$

2.11. e – soni.

Teorema. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ – o'zgaruvchi $n\to\infty$ da 2 bilan 3 orasida yotuvchi limitga ega, yani $\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$.

Ta'rif. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ o'zgaruvchini $n\to\infty$ dagi limiti e soni deyiladi

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n;$$

e soni irratsional son. e=2.71828184..

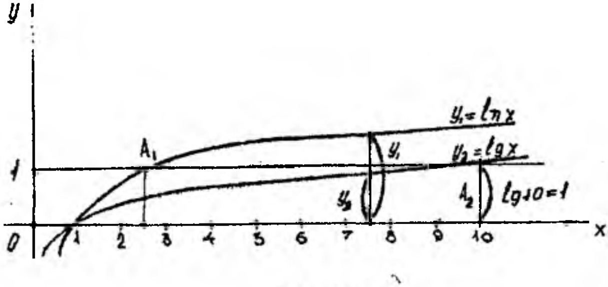
Misol.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)^5=e\cdot 1=e.$$

Izoh. Asosi e bo'lgan ko'rsatkichli funksiya $y=e^x$ matematika kursida juda ko'p qo'llaniladi. Bu funksiyani ko'pincha eksponental funksiya deb yuritishadi.

2.12. Natural logarifmlar.

Asosi $e=2,7182818284...$ sondan iborat logarifmlar natural logarifmlar deyiladi. U ln N bilan belgilanadi. Demak, $e^y=x$ bo'lsa, y ga x ning natural logarifmi deyiladi va $y=\log_e x$ o'rniga $y=\ln x$ bilan yoziladi (105-chizma).



105-chizma.

Endi biror x sonning o'nli va natural logarifmlari orasidagi munosabatni aniqlaymiz. $y=\lg x$ yoki $x=10^y$ bo'lsin. Bu tenglikning o'ng va chap tomonlarini e asosga ko'ra logarifmlaymiz.

$$\ln x = y\ln 10.$$

Bundan $y=\dfrac{\ln x}{\ln 10}$ yoki y ning qiymatini o'rniga qo'yib

$$\lg x=\frac{1}{\ln 10}\ln x; \qquad M=\frac{1}{\ln 10}\approx 0,434294;$$

M – soni natural logarifmdan o'nli logarifmga o'tish moduli deyiladi.

$\lg x = M\cdot \ln x$; $x=e$ deb faraz qilsak $\lg e = M$ $(\ln e = 1)$

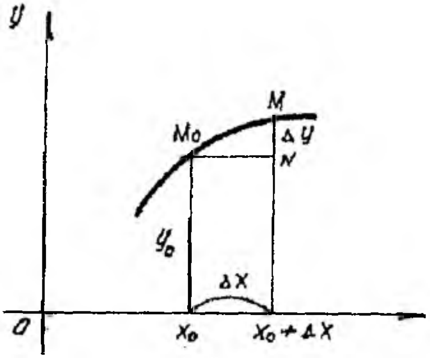
$$\ln x=\frac{1}{M}\lg x \quad \frac{1}{M}\approx 2.3025;$$

Shunday qilib, $\ln x\approx 2,3025\lg x$.

2.13. Funksiyalarning uzluksizligi.

1. Funksiyalarning uzluksizligi.

$y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin. $x_0\in(a,b)$ nuqtada, unga funksiyaning $y_0=f(x_0)$ qiymati to'g'ri kelsin. Boshqa



106-chizma.

biror $x \in (a,b)$ nuqtani olaylik. Agar x biror musbat yoki manfiy (farqi yo'q) Δx orttirma olsa $x = x_0 + \Delta x$ qiymatga ega bo'lib qolsa, u holda y funksiya ham biror Δy orttirma oladi.

Funksiyaning yangi orttirilgan qiymati $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ bo'ladi (106-chizma) $\Delta x = x - x_0$ argument orttirmasi, funksiyaning orttirmasi esa $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ formula bilan ifodalanadi.

Ta'rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada va uning atrofida aniqlangan bo'lib, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ yoki $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \right] = 0$ bo'lsa, $x = x_0$ qiymatda (yoki x_0 nuqtada) funksiya uzluksiz deyiladi. Uzluksizlik shartini bunday yozish mumkin.

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \tag{1}$$

yoki $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ ammo $x_0 = \lim x$ yoki (1) tenglikni tubandagicha yozish mumkin. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(\lim\limits_{x \to x_0} x)$ ya'ni $x \to x_0$ da uzluksiz funksiyaning limitini topish uchun funksiyaning ifodasida argument x o'rniga uning x_0 qiymatini qo'yish kifoya.

Berilgan nuqtada funksiya uzluksizligining geometrik tasviri shuni bildiradiki, agar faqat $|\Delta x|$ yetarli kichik bo'lsa $x_0 + \Delta x$ va x_0 nuqtalarda funksiya grafigi ordinatalarining ayirmasi absolut qiymat bo'yicha ixtiyoriy kichik bo'ladi.

Misol. $y = x^2$ funksiyaning ixtiyoriy x_0 va $x_0 = 2$, nuqtada uzluksizligini ko'rsating.

Yechish.

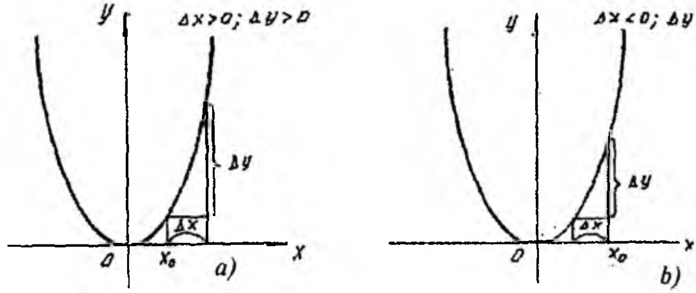
a) $y_0 = x_0^2$; $y_0 + \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2$; $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \Delta x + \Delta x^2$;
x istalgan usul bilan nolga intilganda (107-*a*, b chizmalar).

$$\lim_{\Delta x \to o} \Delta y = \lim_{\Delta x \to o} \left(2x_0 \Delta x + \Delta x^2\right) = 2x_0 \lim_{\Delta x \to o} \Delta x + \lim_{\Delta x \to o} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to o} \Delta x = 0\,;$$

$$y_0 = 2^2 = 4; \quad \Delta y = (2 + \Delta x)^2 - 4;$$

b) $\Delta y = 4 + 4\Delta x + (\Delta x)^2 - 4 = 4\Delta x + (\Delta x)^2$;

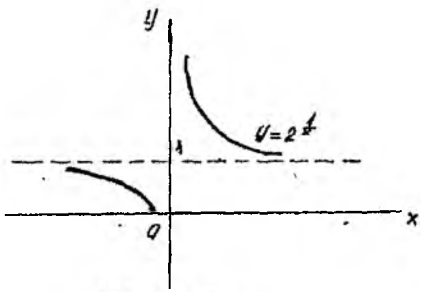
$$\lim_{\Delta x \to o} \Delta y = \lim_{\Delta x \to o} \left(4\Delta x + (\Delta x)^2\right) = 4 \lim_{\Delta x \to o} \Delta x + \lim_{\Delta x \to o} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to o} \Delta x = 0.$$



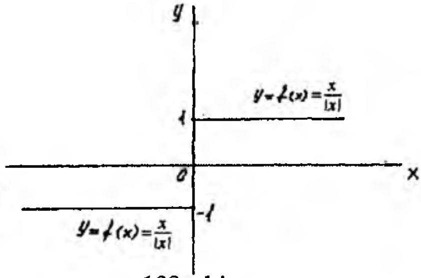
107-chizma.

1-teorema. Chekli sondagi funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa unda ularning yig'indisi ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-teorema. Har qanday elementar funksiya o'zi aniqlangan har bir nuqtada uzluksizdir.



108-chizma.



109-chizma.

1-misol. $y=\dfrac{1}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uziluvchidir. Haqiqatan ham $x=0$ da funksiya aniqlanmagan.

$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{x}=+\infty,\quad \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{x}=-\infty.$$

Bu funksiya $x\neq 0$ qiymatda uzluksiz ekanligini ko'rsatish oson.

2) $y=2^{\frac{1}{x}}$ funksiya $x=0$ nuqtada uziluvchi. Haqiqatan ham

$\lim\limits_{x\to 0+0}2^{\frac{1}{x}}=\infty$ $\lim\limits_{x\to 0-0}2^{\frac{1}{x}}=0$; $x=0$ da funksiya aniqlanmagan (108-chizma).

3) $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ funksiyani uzluksizlikga tekshiramiz.

$x<0$ da $\dfrac{x}{|x|}=-1$ bo‘ladi.

$x>0$ da $\dfrac{x}{|x|}=1$ bo‘ladi.

Demak, $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-0}\dfrac{x}{|x|}=-1$ $\lim\limits_{x\to 0+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+0}\dfrac{x}{|x|}=1$

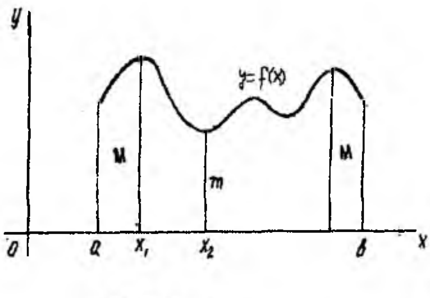
$x=0$ da funksiya aniqlanmagan. $x=0$ da funksiya uziluvchi (109-chizma).

2.14. Uzluksiz funksiyalarning ba’zi xossalari.

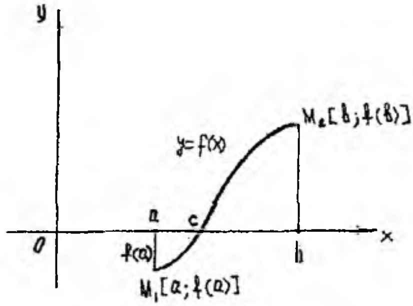
Xossalar quyidagi teoremalar bilan ifodalanadi.

1-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda $[a,b]$ kesmada funksiya o‘zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya’ni shunday $x_1,x_2\in(a,b)$ nuqtalar mavjudki, barcha $x\in(a,b)$ lar uchun $f(x_1)\geq f(x)$ va $f(x_2)\leq f(x)$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi.

Funksiyani $f(x_1)$ qiymatini $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ kesmadagi eng katta qiymati deb, $f(x_2)$ ni esa eng kichik qiymati deb ataymiz. Bu teorema qisqacha bunday ifodalanadi. Kesmada uzluksiz funksiya hech bo‘lmaganda bir marta eng katta M qiymatga va eng kichik m qiymatga erishadi (110-chizma).



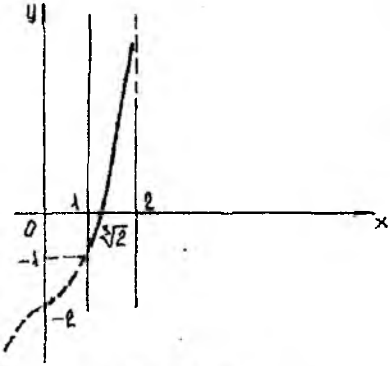
110-chizma.



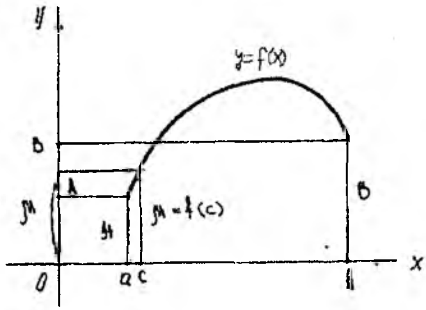
111-chizma.

2-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz bo‘lib, bu kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda $[a,b]$ kesmada hech bo‘lmaganda shunday bir $x=c$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya nolga aylanadi $f(c)=0$; $a<c<b$ (111-chizma).

Misol. $y=x^3-2$ funksiya berilgan. Bu funksiya $[1,2]$ kesmada uzluksiz. Demak, bu kesmada $y=x^3-2$ nolga aylanadigan nuqta mavjud. Haqiqatan ham $x=\sqrt[3]{2}$ da $y=0$ (112-chizma).



112-chizma.



113-chizma.

3-teorema. $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar kesmaning uchlarida funksiya teng bo'lmagan $f(a)=A$, $f(b)=B$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda funksiya A va B sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi. U holda $A<\mu<B$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy μ son uchun kamida bitta $c\in[a,b]$ nuqta mavjudki, unda $f(c)=\mu$ tenglik to'g'ri bo'ladi (113-chizma). 2-teorema bu teoremani xususiy holi, chunki A va B lar turli ishoralarga ega bo'lsa, u holda μ ni o'rnida O ni olish mumkin.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Sonli ketma-ketliklar deb nimaga aytiladi?
2. Ketma-ketliklarning berilish usullarini ayting va misollar keltiring.
3. Qanday ketma-ketliklar yuqoridan (quyidan) chegaralangan deb ataladi? Misollar keltiring.
4. Qanday ketma-ketliklar monoton o'suvchi (kamayuvchi, o'smaydigan, kamaymaydigan) deb ataladi?
5. Ketma-ketliklarning limiti ta'rifini aytib bering.Yaqinlashuvchi ketma-ketlikka misol keltiring.
6. Yaqinlashuvchi sonli ketma-ketliklarning limitlari haqidagi teoremalarni aytib, isbotlab bering.
7. O'zgaruvchi miqdorning limiti ta'rifini tengsizlik yordamida ifodalang va uni geometrik nuqtayi nazardan tushuntiring.
8. Funksiyaning $x\to a$ dagi limiti ta'rifini tengsizlik yordamida ifodalang va uni geometrik nuqtayi nazardan tushuntiring.
9. Qanday holatda o'zgaruvchi x miqdor cheksizlikka intiladi deyiladi?
10. Funksiyaning o'ng va chap limitlari nima?
11. Cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar orasida qanday bog'lanish bor?
12. Limitga ega bo'lgan funksiya bilan cheksiz kichik funksiya orasida qanday bog'lanish bor?
13. Funksiyalar yig'indisining, ko'paytmasining limiti haqidagi teoremalarni isbotlang.

14. Bo'linmaning limiti haqidagi teoremani isbotlang.
15. Oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremani aytib bering.

16. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin}{x}=1$ formulani isbotlang.

17. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ formulani isbotlang.

18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ formulani isbotlang.

19. Natural logarifm ta'rifini ayting. Natural sistemadan o'nli sistemaga va aksincha, qanday o'tiladi?

20. $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi uzluksizligi ta'rifini keltiring va geometrik talqin eting.
21. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalarini ta'riflab bering.

3-§. Hosila

3.1 Hosila tushunchasiga olib keladigan masala.

Hosila tushunchasiga olib keladigan masalalar jumlasiga qattiq jismni to'g'ri chiziqli harakatini, yuqoriga vertikal holda otilgan jismning harakatini yoki dvigatel silindridagi porshen harakatini tekshirish kabi masalalarni kiritish mumkin. Bunday harakatlarni tekshirganda jismning konkret o'lchamlarini va shaklini e'tiborga olmay, uni harakat qiluvchi moddiy nuqta shaklida tasavvur qilamiz.

Harakat tezligi masalasi. Aytaylik, M moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakat qonuniga ko'ra uning $t=t_0$ paytdagi tezligini (oniy tezligini) topish talab qilinsin. Nuqtaning t_0 va $t_0+\Delta t$ $(\Delta t\neq 0)$ vaqtlar orasidagi bosib o'tgan yo'li $\Delta S=f(t_0+\Delta t)-f(t_0)$ bo'ladi. Uning shu vaqtdagi o'rtacha tezligi $\frac{\Delta S}{\Delta t}=\frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$ ga teng.

Ma'lumki, Δt qanchalik kichik bo'lsa, $\frac{\Delta S}{\Delta t}$ o'rtacha tezlik nuqtaning t_0 paytdagi tezligiga shunchalik yaqin bo'ladi. Shuning uchun nuqtaning t_0 paytdagi tezligi quyidagi limitdan iborat. $V(t_0)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}$.

3.2. Funksiyaning hosilasi.

$y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda aniqlangan bo'lsin. (a,b) intervalga tegishli x_0 va $x_0+\Delta x$ nuqtalarni olamiz.

Argument biror (musbat yoki manfiy – bari bir) Δx orttirmasini olsin, u vaqtda y funksiya biror Δy orttirmani oladi. Shunday qilib argumentning x_0 qiymatida $y_0 = f(x_0)$ ga, argumentning $x_0 + \Delta x$ qiymatda $y_0 + \Delta y = f(x_0 + \Delta x)$ ga ega bo‘lamiz. Funksiya orttirmasi Δy ni topamiz.

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0). \tag{1}$$

Funksiya orttirmasini argument orttirmasiga nisbatini tuzamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{2}$$

Bu – nisbatning $\Delta x \to 0$ dagi limitini topamiz.

Agar bu limit mavjud bo‘lsa, u berilgan $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi deyiladi va $f'(x_0)$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta’rifga ko‘ra

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \quad \text{yoki} \quad f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Demak, berilgan $y = f(x)$ funksiyaning argument x bo‘yicha hosilasi deb, argument orttirmasi Δx ixtiyoriy ravishda nolga intilganda funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining limitiga aytiladi.

Umumiy holda x ning har bir qiymati uchun $f'(x)$ hosila ma’lum qiymatga ega, ya’ni hosila ham x ning funksiyasi bo‘lishini qayd qilamiz. Hosilada $f'(x)$ belgi bilan birga boshqacha belgilar ham ishlatiladi. y'; y'_x, $\frac{dy}{dx}$; Bular birinchi tartibli hosilalar. Agar birinchi tartibli hosiladan yana bir marta hosila olinsa ikkinchi tartibli hosila topiladi. Ikkinchi tartibli hosila y'', y_x'', $\frac{d^2y}{dx^2}$ ko‘rinishda belgilanadi.

Hosilaning $x = a$ dagi konkret qiymati $f'(a)$ yoki $y'\big|_{x=a}$ bilan belgilanadi.

Berilgan $f(x)$ funksiyadan hosila topish amali shu funksiyani differensiallash deyiladi. Funksiya hosilasini hosila ta’rifiga ko‘ra hisoblashni ko‘rsatamiz.

Misol. $y = x^3$ funksiya berilgan, uning:

1) ixtiyoriy x nuqtadagi va 2) $x = 3$ nuqtadagi hosilasi y' topilsin.

Yechish.

1) argumentning x ga teng qiymatida $y = x^3$ ga teng. Argument $x + \Delta x$ qiymatida $y + \Delta y = (x + \Delta x)^3$ ga ega bo‘lamiz.

$\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3x^2(\Delta x)+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3}{\Delta x}=3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2.$$

Limitga o‘tib, berilgan funksiyadan hosila topamiz.

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x^2+3x(\Delta x)+(\Delta x)^2).$$

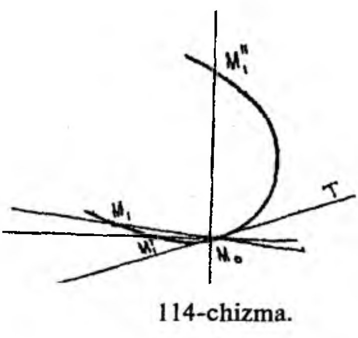
Demak, $y=x^3$ funksiyaning ixtiyoriy nuqtadagi hosilasi $y'=3x^2$

2) $x=3$ da $y'\Big|_{x=3}=3\cdot 3^2=27$.

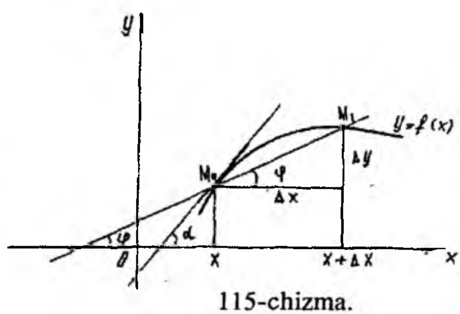
3.3. Hosilaning geometrik ma’nosi.

Harakat qiluvchi jismning tezligini tekshirish natijasida, ya’ni mexanik tasavvurlardan chiqib borib, hosila tushunchasiga keldik. Endi hosilaning geometrik ma’nosini beramiz. Buning uchun avval egri chiziqga uning berilgan nuqtasida o‘tkazilgan urinmani ta’riflab berishimiz kerak. Biror egri chiziq va unda tayin M_0 nuqta berilgan bo‘lsin. Egri chiziqda bir M_1 nuqtani olamiz va M_0M_1, kesuvchini o‘tkazamiz. Agar M_1 nuqta egri chiziq bo‘yicha M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlasha borsa, u holda M_0M_1, kesuvchi M_0M_1', M_0M_1'' va hokazo turli vaziyatlarni oladi.

Agar nuqta egri chiziq bo‘yicha istalgan tomondan M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlasha borganda kesuvchi ma’lum M_0T to‘g‘ri chiziq vaziyatini egallashga intilsa, u holda bu to‘g‘ri chiziq M_0 nuqtada egri chiziqqa urinma deyiladi (114-chizma).



114-chizma.



115-chizma.

To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida $y=f(x)$ ga mos egri chiziqni qaraylik, x ning biror qiymatida funksiya $y=f(x)$ qiymatga ega. Egri chiziqda x va y ni bu qiymatlariga $M_0(x,y)$ nuqta to‘g‘ri keladi. Argument x ga orttirma beramiz. Argumentning yangi $x+\Delta x$ orttirilgan qiymatiga funksiyaning orttirilgan $y+\Delta y=f(x+\Delta x)$ qiymati to‘g‘ri keladi.

Egri chiziqning bunga mos nuqtasi $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$ nuqta bo‘ladi. $M_0 M_1$ kesuvchini o‘tkazamiz va uni Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchagini φ bilan belgilaymiz. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbatni tuzamiz. Shakldan: $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\operatorname{tg}\varphi$ ekanligi ko‘rinadi. Agar Δx nolga intilsa, u holda kesuvchi M_0 nuqta atrofida aylanadi (115-chizma).

Agar $\Delta x \to 0$ *da* φ burchak biror α limitga intilsa, u holda M_0 nuqtadan o‘tuvchi va abssissalar o‘qining musbat yo‘nalishi bilan α burchak tashkil qiluvchi to‘g‘ri chiziq izlangan urinma bo‘ladi. Uni burchak koeffitsientini topish qiyin emas.

Demak, $tg\alpha = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \; tg\varphi = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$ ya’ni argument x ning berilgan qiymatida $f'(x)$ hosilaning qiymati $f(x)$ funksiyaning grafigiga uning $M_0(x,y)$ nuqtasidagi urinmaning OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsientiga teng ekan.

3.4. Funksiyaning differensiallanuvchanligi.

Ta’rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada chekli hosilaga ega bo‘lsa, ya’ni $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ mavjud bo‘lsa, u holda berilgan $x=x_0$ qiymatda funksiya differensiallanuvchi yoki hosilaga ega deyiladi. Agar funksiya biror [a,b] kesmaning yoki (a,b) intervalining har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya kesmada yoki intervalda differensiallanuvchi deyiladi.

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya biror $x=x_0$ nuqtada differensial-lanuvchi bo‘lsa, u holda funksiya shu nuqtada uzluksizdir.

Isboti. $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo‘lgani uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) -$ chekli son.

Limitga ega bo‘lgan funksiya o‘zgarmas va cheksiz kichik funksiya yig‘indisiga teng bo‘lgani uchun quyidagicha yoza olamiz:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)+\gamma$ bu yerda $\Delta x \to 0$ da γ nolga intiluvchi funksiya, u holda $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \gamma\Delta x$ bo‘ladi. Bundan $\Delta x\to 0$ da $\Delta y \to 0$, bu esa x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya uzluksiz demakdir.

Shunday qilib, uzilish nuqtasida funksiya hosilaga ega bo‘la olmaydi. Teskari xulosa to‘g‘ri emas, ya’ni biror $x=x_0$ nuqtada $y=f(x)$ funksiya uzluksiz bo‘lishidan bu nuqtada u differensiallanuvchi ham bo'ladi degan xulosa chiqmaydi, x_0 nuqtada funksiya hosilaga ega bo'lmasligi ham mumkin.

3.5. O'zgarmas miqdorning hosilasi. O'zgarmas miqdor bilan funksiya ko'paytmasining hosilasi, yig'indining, ko'paytmaning, bo'linmaning hosilasi.

1.,O'zgarmas miqdorning hosilasi nolga teng, ya'ni agar $y=c$ bo'lsa (c=const) $y'=0$ bo'ladi.

2. O'zgarmas ko'paytuvchini hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin $y=cu(x)$ bo'lsa $y'=cu'(x)$ bo'ladi.

3. Chekli sondagi differensiallanuvchi funksiyalar yig'indisining hosilasi shu funksiyalar hosilalarining yig'indisiga teng.

$$y=U(x)+V(x)+W(x);\quad y'=U'(x)+V'(x)+W'(x)$$

4. Ikkita differensiallanuvchi funksiyalar ko'paytmasining hosilasi birinchi funksiya hosilasining ikkinchi funksiya bilan ko'paytmasi plyus birinchi funksiyaning ikkinchi funksiya hosilasi bilan ko'paytmasiga teng.

$$y=u\vartheta \text{ bo'lsa } y'=u'\vartheta+u\vartheta'.$$

5. Kasrning hosilasi kasrga teng bo'lib, uning maxraji berilgan kasr maxrajining kvadratidan, surati esa maxrajining surat hosilasi bilan va suratning maxraj hosilasi bilan ko'paytmalari orasidagi ayirmadan iborat. Agar $y=\dfrac{u}{\vartheta}$ bo'lsa $y=\dfrac{u'\vartheta-u\vartheta'}{\vartheta^2}$

3.6. Oshkormas funksiya va uni differensiallash.

Ikkita x va y o'zgaruvchilarning qiymatlari o'zaro biror tenglama bilan bog'langan bo'lsa, uni tubandagicha belgilaymiz.

$$F(x,\ y)=0. \qquad (1)$$

Agar $y=f(x)$ funksiya biror $(a,\ b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, (1) tenglamada y o'rniga $f(x)$ ifoda qo'yilganda tenglama x ga nisbatan ayniyatga aylansa, u holda $y=f(x)$ funksiya (1) tenglama bilan aniqlangan oshkormas funksiya bo'ladi.

Masalan, $x^2+y^2-a^2=0$ tenglama quyidagi

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\ ;y=-\sqrt{a^2-x^2}$$

elementar funksiyalarni oshkormas tarzda aniqlaydi. Oshkormas funksiyalarni oshkor tarzda, ya'ni $y=f(x)$ ko'rinishida ifodalab bo'lavermaydi.

Masalan, $y^9-y^2-x^3=0$.

Endi shu oshkormas funksiyalardan hosila olishni ko'rsatamiz.

1-misol. $x^2+y^2-a^2=0$ funksiyani xosilasini toping.

Buni ikki tomonini x bo‘yicha differensiallab, (murakkab funksiyani differensiallash qoidasidan foydalanib) shuni topamiz.

$$2x+2yy'=0 \quad y'=-\frac{x}{y};$$

2-misol. $y^9-y^2-x^3=0$.

Buni x bo‘yicha differentsiallaymiz.

$$9y^8y'-2yy'-3x^2=0;$$

$$y'\left(9y^8-2y\right)=3x^2;$$

$$y'=\frac{3x^2}{9y^8-2y}.$$

3.7. Murakkab funksiyaning hosilasi.

Aytaylik, $y=F(u)$ murakkab funksiya bo‘lsin, ya’ni $y=F(u)$, $u=\varphi(x)$ yoki $y=F\left[\varphi(x)\right]$, u–o‘zgaruvchi, oraliq argumenti deyiladi. y=F(u) va $u=\varphi(x)$ differensiallanuvchi funksiyalar bo‘lsin.

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasini keltirib chiqaramiz.

Teorema. Murakkab *F(u)* funksiyaning erkli o‘zgaruvchi *x* bo‘yicha hosilasi bu funksiyaning oraliq argumenti bo‘yicha hosilasining oraliq argumentining erkli o‘zgaruvchi *x* bo‘yicha hosilasiga ko‘paytmasiga teng, ya’ni

$$y'_x=F'_u(u)\cdot u'_x(x). \tag{1}$$

Misol. $y=\left(x^7+3x^3+5x^2+4\right)^6$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. berilgan funksiyani murakkab funksiya deb qaraymiz ya’ni $y=u^6$; $u=x^7+3x^3+5x^2+4$ (1) formulaga asosan

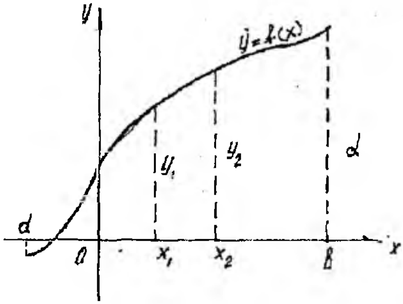
$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\left((x^7+3x^3+5x^2+4)^6\right)'=6\left(x^7+3x^3+5x^2+4\right)^5\cdot\left(7x^6+9x^2+10x\right)$$

3.8. Teskari funksiya va uni differensiallash.

Aytaylik biror [a,b] kesmada aniqlangan o‘suvchi yoki kamayuvchi

$$y=f(x) \tag{1}$$

funksiya berilgan bo‘lsin. Shu bilan birga f(a)=c; f(b)=d bo‘lsin (116-chizma).



116-chizma.

Aniqlik uchun ya'ni o'suvchi funksiyani tekshiraylik. $[a, b]$ kesmaga tegishli ikkita har xil x_1 va x_2 qiymatlarni qaraymiz.

O'suvchi funksiya ta'rifidan, agar $x_1 < x_2$ va $y_1 = f(x_1)$ $y_2 = f(x_2)$ bo'lsa u vaqtda $y_1 < y_2$ bo'lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, x ning qiymatlari bilan y ning ularga mos qiymatlari orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik aniqlanadi.

y ning qiymatlarini argumentning qiymatlari deb, x ning qiymatlarini esa funksiyaning qiymatlari deb qarab, x ni y ning funksiyasi sifatida olamiz.

$$x = \varphi(y). \qquad (2)$$

Bu funksiya $y=f(x)$ funksiya uchun teskari funksiya deyiladi. $y=f(x)$ funksiya ham $x = \varphi(y)$ funksiya uchun teskari funksiya ekanligi ravshan. Xuddi shuningdek, kamayuvchi funksiya ham teskari funksiyaga ega ekanligini ko'rsatish mumkin.

Teskari funksiya $y=f(x)$ tenglamani x ga nisbatan yechish yo'li bilan topiladi. Bu funksiyaning grafiklari ustma-ust tushadi. Agar teskari funksiya argumentini yana x bilan, funksiyani esa y bilan belgilasak va ularni bir koordinata sistemasida chizsak, u holda ikkita har xil grafik yechim bo'ladi. Grafiklar birinchi koordinata burchagining bissektrisasiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Endi teskari funksiyaning hosilasini bilgan holda $y=f(x)$ funksiya hosilasini topishga imkon beruvchi teoremani ko'rib o'tamiz.

Teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya uchun tekshiriladigan y nuqtada noldan farqli $\varphi'(y)$ hosilaga ega bo'lgan $x = \varphi(y)$ teskari funksiya mavjud bo'lsa, u holda tegishli x nuqtada y=f(x) funksiya $y' = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$ ga teng bo'lgan $f'(x)$ hosilaga ega bo'ladi. ya'ni $f'(x) = \dfrac{1}{\varphi'(y)}$

Isboti. Δy orttirmani olganimizda $\Delta x = \varphi(y + \Delta y) - \varphi(y)$ (2) ga asosan $\varphi(y)$- monoton funksiya bo'lgani uchun $\Delta x \neq 0$

Ushbu ayniyatni yozamiz. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}$ uzluksiz funksiya bo'lgani uchun

$\Delta y \to 0$ da $\Delta x \to 0$ $\Delta y \to 0$ da limitga o'tamiz. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$ yoki

$f'(x) = \frac{1}{\varphi'(y)}$

3.9. Ba'zi bir elementar funksiyalarning hosilalari.

1) Logarifmik funksiyaning hosilasi.

1-teorema. $y = \log_a x$ funksiyaning hosilasi $\frac{1}{x}\log_a e$ ga teng ya'ni agar $y = \log_a x$ bo'lsa, $y' = \frac{1}{x}\log_a e$ bo'ladi.

Isboti. x ga Δx ga orttirma beramiz, u holda y ham Δy orttirma oladi; ya'ni $y + \Delta y = \log_a(x + \Delta x)$;

$$\Delta y = \log_a(x + \Delta x) - \log_a x = \log_a\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right).$$

Tenglikning har ikkala tomonini Δx ga bo'lamiz.

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right); \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x}\frac{x}{\Delta x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot \log_a\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

$\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ bilan belgilaymiz. $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{x} \cdot \log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$

$\frac{\Delta x}{x} = \alpha$ bo'lgani uchun, $y' = \lim\limits_{\alpha \to 0}\frac{1}{x} \cdot \log_a(1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{x}\log_a e$ bo'ladi.

$\log_a e = \frac{1}{\ln a}$ $y' = \frac{1}{x}\frac{1}{\ln a}$.

Agar y=lnx bo'lsa $y' = \frac{1}{x}$ bo'ladi. $y' = \frac{1}{x}$

2) n butun va musbat bo'lganda $y = x^n$ funksiyaning hosilasi.

2-teorema. $y = x^n$ funksiyaning hosilasi (bunda n butun musbat) nx^{n-1} ga teng, ya'ni $y = x^n$ bo'lsa $y' = n \cdot x^{n-1}$ ga teng.

1) $y + \Delta y = (x + \Delta x)^n$.

2) $\Delta y=(x+\Delta x)^n-x^n=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}\Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}(\Delta x)^2+....+(\Delta x)^n-x^n$

yoki $\Delta y=nx^{n-1}\ \Delta x+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\ (\Delta x)^2+.....+(\Delta x)^n$

3) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+.....+(\Delta x)^{n-1}$

4) $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left[nx^{n-1}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}\Delta x+.....+(\Delta x)^{n-1}\right]=nx^{n-1}$

Demak, $y'=nx^{n-1}$. Bu formulani n kasr va manfiy bo‘lgan holda ham to‘g‘riligini ko‘rsatish mumkin.

3) y=sin$x$, y=cos$x$ funksiyaning hosilalari.

3-teorema. $\cos x$ ning hosilasi $-\sin x$, ya’ni agar $y=\cos x$ bo‘lsa $y'=-\sin x$ ga teng.

Isboti.

$$y+\Delta y=\cos(x+\Delta x)$$

$$\Delta y=\cos(x+\Delta x)-\cos x=2\sin\frac{x+\Delta x+x}{2}\cdot\sin\frac{x-\Delta x-x}{2}=$$

$$=2\sin\frac{2x+\Delta x}{2}\sin\left(-\frac{\Delta x}{2}\right)=-2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\frac{2\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=-\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)$$

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1$ bo‘lgani uchun $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sin\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=-\sin x$.

4-teorema. $\sin x$ ning hosilasi $(\sin x)'=\cos x$ ga teng.

Isboti. (Yuqoridagiga o‘xshash isbot qilinadi, isbot qilish talabalarni o‘zlariga topshiriladi).

5-teorema. tg x ning hosilasi $(\mathrm{tg}\,x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ ga teng.

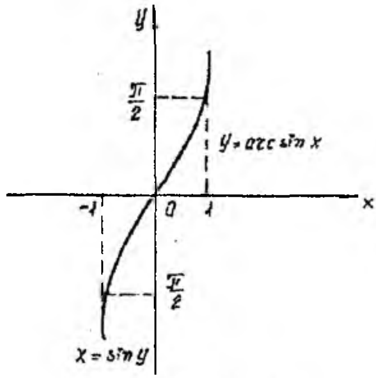
6-teorema. ctgx ning hosilasi $(\mathrm{ctg}\,x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$ ga teng.

Bu teoremalarni mustaqil isbot qilish ham talabalarning o‘zlariga topshiriladi.

3.10. Teskari trigonometrik funksiyalar va ularning hosilalari.

1) y=arcsin$x$ funksiyasini qaraylik. Buning uchun ushbu $x=\sin y$ funksiyani olamiz. Bu funksiya $-\infty < y < +\infty$ intervalda aniqlangan (117-chizma).

$-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ kesmada funksiya o‘suvchi, uning qiymatlari $-1 \le x \le 1$ kesmani to‘ldiradi. x=siny funksiyaga teskari funksiya mavjud. Bu funksiya $-1 \le x \le 1$ kesmada aniqlangan, uning qiymatlari $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ kesmani to‘ldiradi.



117-chizma.

1-teorema. arcsinx funksiyaning hosilasi $y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Isbot. $x=\sin y$, $x'_y = \cos y$ Teskari funksiyani differensiallash qoidasiga binoan $y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y}$; $\cos y = \sqrt{1-\sin^2 y} = \sqrt{1-x^2}$ bo‘lganidan $y'_x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

Ildiz oldida plyus ishora olinadi, chunki y=arcsinx funksiya $-\frac{\pi}{2} \le y \le \frac{\pi}{2}$ kesmada qiymatlar qabul qiladi. Demak, cosy≥ 0.

Misol. $y = \arcsin e^x$; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-(e^x)^2}} \cdot (e^x)' = \frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.

2-teorema. arc cosx ; $y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ga teng.

3-teorema. arc tgx ; $y' = \frac{1}{1+x^2}$ ga teng.

4-teorema. arc ctgx ; $y' = -\frac{1}{1+x^2}$ ga teng.

Yuqoridagi teoremalarni mustaqil isbot qilish talabalarga topshiriladi.

3.11. Differentsiallashning asosiy formulalari jadvali.

Oldingi mavzularda chiqarilgan barcha formulalar va qoidalarni tubandagicha jadval qilamiz.

1) y=const ; $y' = 0$.

2) $y = x^{\alpha}$; $y = \alpha x^{\alpha-1}$.

3) $y = \sqrt{x}$; $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

4) $y = \frac{1}{x}$; $y = -\frac{1}{x^2}$.

5) $y = a^x$; $y' = a^x \ln a$.

6) $y = e^x$; $y' = e^x$.

7) $y = \log_a x$; $y' = \frac{1}{x}\log_a e$.

8) $y = \ln x$; $y' = \frac{1}{x}$.

9) $y = \sin x$; $y' = \cos x$.

10) $y = \cos x$; $y' = -\sin x$.

11) $y = tgx$; $y' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

12) $y = ctgx$; $y' = -\frac{1}{\sin^2 x}$.

13) $y = arctgx$; $y' = \frac{1}{1+x^2}$.

14) $y = arcctgx;\quad y' = -\dfrac{1}{1+x^2}.$

15) $y = \arcsin x;\quad y' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

16) $y = \arccos x;\quad y' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Differentsiallashning umumiy qoidalari.

1) $y = cu(x)\,; y' = cu'x,\ (c = const).$

2) $y = u + v + w\,;\ y' = u' + v' + w'.$

3) $y = u \cdot v;\ y' = u' \cdot v + u \cdot v'.$

4) $y = \dfrac{u}{v};\ y' = \dfrac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}.$

5) $\left.\begin{matrix} y = f(u) \\ u = f(x) \end{matrix}\right\};y' = f_y'(u) \cdot u_x'(x).$

6) $y = u^v\ ;\ y' = vu^{v-1}u' + uv' \ln u.$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasi ta'rifini bering.
2. Funksiyaning berilgan nuqtadagi hosilasining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Hosilaning mexanik ma'nosi nimadan iborat?
4. Funksiya differensiallanuvchanligini zaruriy sharti nimadan iborat?
5. O'zgarmas sonning hosilasini keltirib chiqaring.
6. Yig'indi, ko'paytma va bo'linmaning hosilasini hisoblash formulalarini keltirib chiqaring.
7. Oshkormas funksiyani differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
8. Murakkab funksiyani differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
9. Qanday funksiya teskari funksiya deyiladi?
10. Teskari funksiyani differensiallash formulasini keltirib chiqaring.
11. Logarifmik funksiya hosilasining formulasini keltirib chiqaring.
12. Ko'rsatkichli, trigonometrik funksiyalar hosilalari uchun formulalar chiqaring.
13. Teskari trigonometrik funksiyalar hosilalari uchun formulalar chiqaring.

4-§. Hosilani funksiyalarni tekshirishga tatbiqi

4.1. Funksiyaning o'sishi va kamayishi.

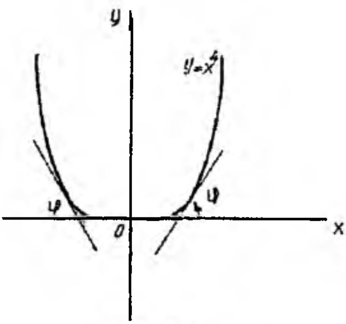
Hosila tushunchasini funksiyani o'sishi va kamayishini tekshirishga tadbiq etamiz.

1-teorema. 1) agar [a; b] kesmada hosilaga ega bo'lgan f(x) funksiya shu kesmada o'suvchi bo'lsa, uning hosilasi [a; b] kesmada manfiy bo'lmaydi ya'ni $f'(x)\geq 0$.

2) agar f(x) funksiya [a; b] kesmada uzluksiz (a,b) oraliqda differensiallanuvchi bo'lsa va $a<x<b$ uchun $f'(x)>0$ bo'lsa, bu funksiya [a; b] kesmada o'sadi.

Isboti. Teoremaning birinchi qismini isbotlaymiz.

f(x) funksiya [a; b] kesmada o'sadi deb faraz qilamiz x ga Δx orttirma beramiz $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ nisbatini tuzamiz.



118-chizma.

f(x) o'suvchi funksiya shunga ko'ra

$\Delta x>0$ bo'lganda $f(x+\Delta x)>f(x)$.

$\Delta x<0$ bo'lganda $f(x+\Delta x)<f(x)$.

Ikkita holda ham $\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}>0$.

Demak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0$. Endi ikkinchi qismini isbotlaymiz. [a; b] oraliqda f'(x)>0 deb faraz qilamiz. [a; b] kesmaga tegishli ikkita ixtiyoriy x_1 va x_2 ($x_1<x_2$) qiymatini ifodalaymiz. Lagranjning chekli orttirmalar haqidagi teoremasiga ko'ra

$$f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1) \qquad x_1<\xi<x_2.$$

Shartga ko'ra, $f'(\xi)>0$ demak, $f(x_2)-f(x_1)>0$ bu esa f(x) o'suvchi funksiya demakdir. Agar f(x) funksiya [a;b]kesmada kamaysa shu kesmada $f'(x)\leq 0$ bo'ladi. Agar (a,b) oraliqda $f'(x)<0$ bo'lsa [a;b] kesmada f(x) kamayadi.

Funksiya faqat kamayuvchi yoki faqat o'suvchi bo'ladigan intervallar monotonik intervallar deyiladi.

Misol. $y=x^4$ funksiyaning o'sish va kamayish sohalari topilsin. Hosilani topamiz. x>0 bo'lsa $y'>0$ funksiya o'sadi. x<0 bo'lsa $y'<0$ funksiya kamayadi (118-chizma).

4.2. Funksiyaning maksimumi va minimumi.

1-ta'rif. Agar *f(x)* funksiyaning x_1 nuqtasidagi qiymati x_1 ni o'z ichiga olgan bironta intervalning hamma nuqtalardagi qiymatlaridan katta bo'lsa *f(x)* funksiya x_1 nuqtada maksimum (max) ga ega bo'ladi. Boshqacha aytganda, agar absolut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan har qanday musbat (yoki manfiy) Δx uchun $f(x_1+\Delta x)<f(x_1)$ bo'lsa, *f(x)* funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi. 119-chizmada $y=f(x)$ funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga ega.

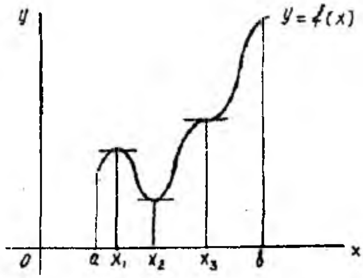
2-ta'rif. Agar absolut miqdori bo'yicha yetarli darajada kichik bo'lgan har qanday Δx uchun $f(x_2+\Delta x)>f(x_2)$ bo'lsa $f(x)$ funksiya $x=x_2$ nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Masalan, $y=x^4$ funksiya $x=0$ da minimumga ega.

Maksimum va minimum ta'riflari munosabati bilan quyidagi hollarga e'tibor berish kerak.

1) kesmada aniqlangan funksiya x ning faqat qaralayotgan kesmaning ichidagi qiymatlarida maksimal va minimal qiymatlariga yetishi mumkin;

2) funksiyaning maksimumi va minimumini qaralayotgan kesmada uning eng katta va eng kichik qiymatlari deb qarash xato bo'ladi. Funksiyaning maksimum va minimumlari funksiyaning ekstremumlari yoki ekstremal qiymatlari deyiladi. Ekstremal qiymatlar topish usuli quyidagicha:



119-chizma.

1-teorema. (Ekstremum mavjudligining zaruriy sharti). Agar differensiallanuvchi $y=f(x)$ funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga yoki minimumga ega bo'lsa uning hosilasi shu nuqtada nolga aylanadi, ya'ni $f'(x_1)=0$ bo'ladi. Agar *f(x)* funksiya maksimum va minimum nuqtalarda hosilaga ega bo'lsa, $y=f(x)$ egri chiziqning shu nuqtalariga o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi.

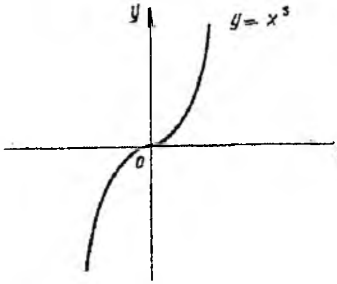
Haqiqatan ham, $f'(x_1)=tg\varphi=0$ tenglikdan, (bu yerda φ urinma bilan *Ox* o'qi orasidagi burchak) $\varphi=0$ ekanligi kelib chiqadi. 1-teoremadan bevosita ushbu natija kelib chiqadi.

Natija: agar argument *x* ning qaralayotgan hamma qiymatlarida f(x) funksiya hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya *x* ning faqat hosilani nolga aylantiradigan qiymatlarida ekstremumga ega bo'ladi.

Bunga teskari fikr to'g'ri emas. Hosilani nolga aylantiradigan har qanday qiymatda ham maksimum yoki minimum bo'lavermaydi.

Masalan, $y=x^3$.

$$y'=3x^2;\quad x=0.$$



120-chizma.

Funksiya hosilasi $x=0$ nuqtada nolga teng bo'ladi, ammo bu nuqtada funksiya maksimumga yoki minimumga ega emas (120-chizma).

Funksiya hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalarda ham funksiya ekstremumga ega bo'lishi mumkin.

Agar biror nuqtada hosila mavjud bo'lmasa, shu nuqtada hosila uzilishini ko'ramiz. Argumentning hosila nolga aylanadigan yoki uziladigan qiymatlari kritik qiymatlar deyiladi.

Har qanday kritik qiymatda funksiya maksimum yoki minimumga ega bo'lavermasligi mumkin. Funksiyaning ekstremumini topish uchun, hamma kritik nuqtalar topiladi, so'ngra har bir kritik nuqtani ayrim tekshirib, u nuqtada funksiya maksimum yoki minimumga ega bo'lishi, yoki bo'lmasligi aniqlanadi.

2-teorema. (Ekstremum mavjudligini yetarli sharti.)

f(x) funksiya kritik nuqta x ni o'z ichiga olgan bironta intervalda uzluksiz va shu intervalning hamma nuqtalarida differensiallanuvchi bo'lsin, agar shu nuqtaning chap tomonidan o'ng tomoniga o'tishda hosilaning ishorasi musbatdan manfiyga o'zgarsa funksiya $x=x_1$ nuqtada maksimumga ega bo'ladi, ya'ni

agar $\begin{cases} x < x_1 & f'(x) > 0 \\ x > x_1 & f'(x) < 0 \end{cases}$ bo'lsa funksiya x_1 nuqtada maksimumga ega

agar $\begin{cases} x < x_1 & f'(x) < 0 \\ x > x_1 & f'(x) > 0 \end{cases}$ bo'lsa x_1 nuqtada minimumga ega bo'ladi.

Agar funksiya hosilasi ishorasini o'zgartirmasa u maksimumga ham minimumga ham ega bo'lmaydi, u o'sadi yoki kamayadi.

4.3. Differentsiallanuvchi funksiyani birinchi va ikkinchi hosila yordamida ekstremumga tekshirish.

1. Funksiyaning birinchi hosilasini, ya'ni $f'(x)$ ni topamiz.
2. Argument x ning kritik qiymatlarini topamiz. Buning uchun:

a) birinchi tartibli hosilani nolga tenglaymiz va haqiqiy ildizlarini topamiz.

b) x ning $f'(x)$ hosila uzilishiga duchor bo'ladigan qiymatlarini topamiz.

3. Hosilaning kritik nuqtadan chapdagi va o'ngdagi ishorasini tekshiramiz. Ikkita kritik nuqta orasidagi intervalda hosilaning ishorasi

o'zgarmaydi. Shunga ko'ra, masalan: x_2 kritik nuqtaning chap va o'ng tomonidagi hosila ishorasini tekshirish uchun, hosilaning α va β nuqtalardagi ishorasini aniqlash kerak. $\begin{pmatrix} x_1 < \alpha < x_2 \\ x_2 < \beta < x_3 \end{pmatrix}$.

4) Argumentning kritik qiymati $x=x_1$ da funksiyaning qiymatini hisoblaymiz.

kritik nuqta x_1 dan o'tishda f '(x) hosilaning ishorasi			kritik nuqtaning xarakteri
$x<x_1$	$x=x_1$	$x>x_1$	
+	$f'(x_1)=0$ yoki uziluvchi	–	maksimum nuqtasi
–	$f'(x_1)=0$	+	minimum nuqtasi
+	$f'(x_1)=0$	+	funksiya o'sadi
–	$f'(x_1)=0$	–	funksiya kamayadi

Funksiyani ekstremumini ikkinchi hosila yordamida tekshirish.

$y=f(x)$ funksiyaning hosilasi $x=x_1$ nuqtada nolga aylanadi, bundan tashqari f''(x) mavjud va x nuqtaning biror atrofida uzluksiz bo'lsin.

Teorema. $f'(x_1)=0$ bo'lsin, u vaqtda $f''(x_1)<0$ bo'lsa, funksiya x_1 nuqtada maksimumga ega bo'ladi, $f''(x_1)>0$ bo'lsa, funksiya x_1 nuqtada minimumga ega bo'ladi. Agar kritik nuqtada $f''(x_1)=0$ bo'lsa, $x=x_1$ nuqtada yo maksimum yoki minimum bo'lishi yoki bo'lmasligi ham mumkin.

Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.

1) funksiyaning kesmada hamma maksimum va minimumlari topiladi;

2) kesmaning boshi va oxirgi nuqtalarida funksiyaning qiymatlari aniqlanadi:

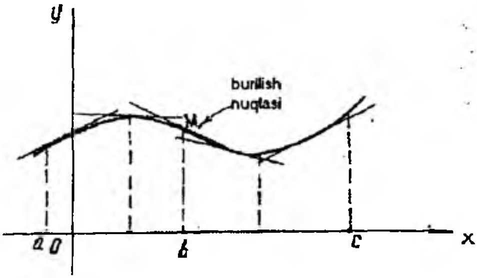
$$f(a);\ f(b);$$

3) funksiyaning yuqorida topilgan hamma qiymatlari orasidagi eng kattasi tanlab olinadi, ana shu qiymat funksiyaning berilagan kesmadagi eng katta qiymati bo'ladi.

4.4. Egri chiziqning qavariqligi va botiqligi.

Differentsiallanuvchi $f(x)$ funksiya grafigini qaraymiz.

1-ta'rif. Agar (a,b) intervalda egri chiziqning hamma nuqtalari uning har qanday urinmasidan yuqorida bo'lsa, egri chiziq qavariqligi bilan pastga yo'nalgan, shu intervalda egri chiziqning hamma nuqtalari

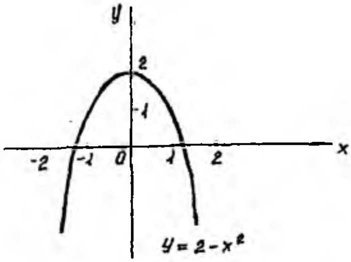


121-chizma.

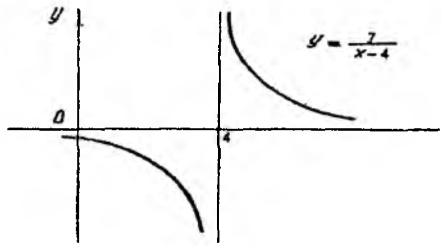
uning har qanday urinmasidan pastda bo‘lsa, egri chiziq qavariqligi bilan yuqoriga yo‘nalgan deyiladi (121-chizma).

1-teorema. Agar (a; b) intervalning hamma nuqtalarida $f(x)$ funksiyani ikkinchi hosilasi manfiy ya’ni $f'(x)<0$ bo‘lsa shu intervalda $y=f(x)$ egri chiziqning qavariqligi yuqoriga qaragan bo‘ladi (egri chiziq qavariq bo‘ladi).

2-teorema. Agar (b, c) intervalning hamma nuqtalarida $f(x)$ funksiyani ikkinchi hosilasi musbat ya’ni $f'(x)>0$ bo‘lsa shu intervalda $y=f(x)$ egri chiziqning qavariqligi pastga yo‘nalgan (botiq) bo‘ladi. (121-chizma).



122-chizma.



123-chizma.

2-Ta’rif. Uzluksiz egri chiziq qavariq qismini botiq qismidan ajratgan nuqta egri chiziqning burilish nuqtasi deb ataladi (121-chizma).

3-teorema. Egri chiziq $y=f(x)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Agar $f''(a)=0$ bo‘lsa yoki $f''(x)$ mavjud bo‘lmasa va $x=a$ nuqtadan o‘tishda $f''(x)$ ning ishorasi o‘zgarsa, egri chiziqning abssissasi $x=a$ bo‘lgan nuqtasi burilishi nuqtasi bo‘ladi.

4.6 Asimptotalar.

Ko‘pincha $y=f(x)$ egri chiziqning shaklini tekshirishga to‘g‘ri keladi. Buning uchun esa o‘zgaruvchi nuqta abssissasi yoki ordinatasi bir vaqtda cheksiz o‘sganda tegishli funksiyaning o‘zgarish xarakterini tekshirishga to‘g‘ri keladi.

Ta’rif. Agar egri chiziqning nuqtasi cheksiz uzoqlashganda uning biror l to‘g‘ri chiziqdan masofasi s nolga intilsa l to‘g‘ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

Vertikal (ordinata o‘qiga parallel) va og‘ma asimptotalarni bir-biridan farq qilamiz.

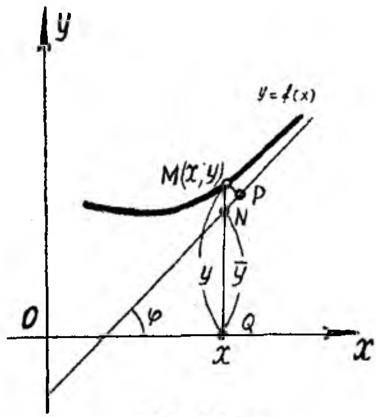
Vertikal asimptota ta'rifidan, agar $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ bo'lsa, u holda *x=a* to'g'ri chiziq *y=f(x)* egri chiziqning vertikal asimptotasi deyiladi.

Demak, vertikal asimptotani topish uchun abssissaning shunday *x=a* qiymatlarini topish kerakki, *x* shu sonlarga yaqinlashganda *y=f(x)* funksiya cheksizlikka intilsin. Bu holda *x=a* to'g'ri chiziq berilgan egri chiziqning vertikal asimptotasi bo'ladi.

Misol. $y=\dfrac{7}{x-4}$ egri chiziq $x=4$ vertikal asimptotaga ega, chunki $x\to 4$ bo'lganda y=∞ bo'ladi (123-chizma).

4.7. Og'ma asimptotalar.

Og'ma asimptota tenglamasi $y=kx+b$ bo'lsin, *k* va *b* sonlarni aniqlaymiz. MP – M nuqtadan asimptotagacha bo'lgan masofa $\lim\limits_{x\to-\infty} MP=0$ *Ox* o'qqa og'ish burchagi φ bo'lsa NMP uchburchakdan $MN=\dfrac{MP}{\cos\varphi}$ φ o'zgarmas ($\dfrac{\pi}{2}$ ga teng bo'lmagan) burchak shuning uchun $\lim NM=0$ (124-chizma).



124-chizma.

$NM=(QM-QN)=|y-\bar{y}|=|f(x)-(kx+b))|$

$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx-b]=0$

$$\lim_{x\to+\infty} x\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0.$$

Birinchi ko'paytuvchi x cheksizlikka intiladi.Shuning uchun ushbu tenglik bajarilishi kerak. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-k-\dfrac{b}{x}\right]=0$ b o'zgarmas bo'lgan holda $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{b}{x}=0$

Demak, $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{f(x)}{x}-k\right]=0$ $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Misol. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$ funksiya grafigini yasang.

Yechish. 1) Funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz.

$$D'(y) = (-\infty, 2) \cup (2, +\infty).$$

2) Berilgan funksiya juft ham, toq ham davriy ham emas.

3) $x=0$ da $y=0$, ya'ni grafik koordinatalar boshidan o'tadi.

4) $\lim\limits_{x \to 2 \pm 0} f(x) = \pm\infty$ bo'lgani uchun $x=2$ to'g'ri chiziq grafigini vertikal asimptotasi bo'ladi. Endi quyidagilarni topamiz.

$$k = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{x(x-2)} = 1.$$

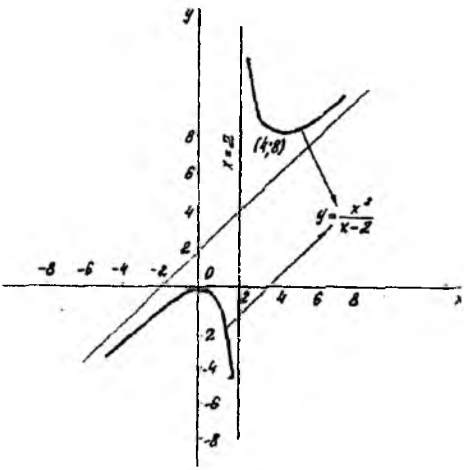
$$b = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x \to \pm\infty} \left[\frac{x^2}{x-2} - x \right] = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{2x}{x-2} = 2.$$

Demak, $y = x + 2$ to'g'ri chiziq funksiyaning og'ma asimptotasi bo'ladi.

5) Hosilani topamiz.

$$y = \frac{2x(x-2) - x^2}{(x-2)^2} = \frac{x(x-4)}{(x-2)^2}.$$

y' hosila $x=0$ va $x=4$ nuqtalarda nolga aylanadi. $x=2$ da uzilishga ega. Bu nuqtalar son o'qini 4 ta oraliqqa ajratadi: $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;4)$ va $(4;+\infty)$.



125-chizma.

Har qaysi oraliqda y' ning ishorasini tekshiramiz. Hosila $y'(-\infty;0)$ va $(4;+\infty)$ oraliqdagi musbat (funksiya o'sadi), $(0,2)$ va $(2,4)$ oraliqlarda manfiy (funksiya kamayadi). $x=0$ nuqtadan o'tishda hosila ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartiradi, yani bu nuqta maksimum nuqtasidir.

$x=4$ nuqtadan o'tishda esa hosila ishorasini manfiydan musbatga o'zgartiradi, ya'ni bu nuqta minimum nuqtasidir.

$y_{max} = y(0) = 0;\qquad y_{min} = y(4) = 8$

6) Ikkinchi tartibli hosilani topamiz.

$$y'' = \frac{(2x-4)(x-2)^2 - 2(x-2)(x^2-4x)}{(x-2)^4} = \frac{8}{(x-2)^3}$$

Ikkinchi tartibli hosila hech qayerda nolga aylanmaydi va $x=2$ da uzilishga ega bo'ladi. $(-\infty;2.)$ oraliqda $y''<0$, ya'ni bu oraliqda egri chiziq pastga qavariq. Burilish nuqtalari yo'q.

7) Topilganlarga asosan funksiya grafigini yasaymiz (125-chizma).

4.8. Funksiyaning differensiali

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada differensiallanuvchi bo'lsin. Shu funksiyaning $[a,b]$ kesmaga tegishli biror x nuqtasidagi hosilasi $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ bo'lsin, $\Delta x\to 0$ da nisbat ma'lum songa intiladi. Bundan ko'rinadiki, $\Delta y\to 0$ nisbat $f'(x)$ hosiladan cheksiz kichik miqdorga farq qiladi, ya'ni $\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha$ buni ikkala tomonini Δx ga ko'paytirsak

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\alpha\Delta x; \tag{1}$$

Bunda, $f'(x)\Delta x, \Delta x$ ga nisbatan birinchi tartibli cheksiz kichik miqdor, $\alpha\cdot\Delta x, \Delta x$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor, chunki

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\alpha=0.$$

Demak, Δy orttirma ikki qismdan iborat. Birinchisi bosh qismi, $f'(x)\cdot\Delta x\left(f'(x)\neq 0\right)$ ko'paytma funksiyaning differensiali deyiladi va u dy bilan belgilanadi.

$$dy=f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

Bundan foydalanib yuqoridagi ifodani quyidagicha yozish mumkin.

$$\Delta y=dy+\alpha\Delta x. \tag{3}$$

Funksiyaning orttirmasi funksiya differensialidan Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdorga farq qiladi.

Agar $f'(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda $\alpha\cdot\Delta x$ ko'paytma dy ga nisbatan ham yuqori tartibli cheksiz kichik miqdordir.

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{dy}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{f'(x)\Delta x}=1+\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{f'(x)}=1. \qquad 4)$$

Shuning uchun taqribiy hisoblarda $\Delta y=dy$ deb olinadi.

Misol. $y=x^3$ funksiyaning dy differentsiali va Δy orttirmasi topilsin. 1) x va Δx qiymatlarda; 2) $x=10$, $\Delta x=0{,}1$ qiymatlarida;

Yechish. 1) $\Delta y=(x+\Delta x)^3-x^3=3x^2\Delta x+3x(\Delta x)^2+(\Delta x)^3$.

$$dy=(x^3)'\Delta x=3x^2\Delta x.$$

2) agar $x=10, \Delta x=0{,}1$ bo'lsa,

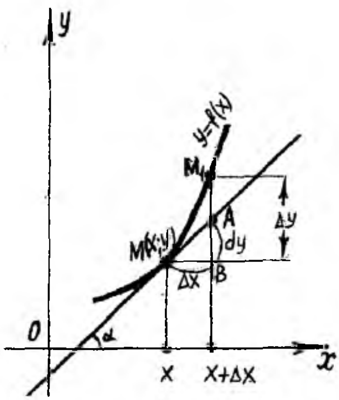
$$\Delta y=3\cdot 10^2\cdot 0{,}1+3\cdot 10\cdot(0{,}1)^2+(0{,}1)^3=30{,}301$$

$$dy=3\cdot 10^2\cdot 0{,}1=30.$$

Δy ni dy ga almashtirganda natija 0,301 ga farq qiladi. Hosilaga tegishli teoremalar va formulalar differensiallar uchun ham o'z kuchini saqlaydi.

Misol. $y=\operatorname{ctg}^2 x$; $dy=-2\operatorname{ctg}x\dfrac{1}{\sin^2 x}dx$.

Differensialning geometrik ma'nosi.



126-chizma.

$y=f(x)$ funksiya va unga xos egri chiziqni qaraylik. Egri chiziqni ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqtasini olib, unga shu nuqtada urinma o'tkazaylik, urinmaning Ox o'qining musbat yo'nalishi bilan hosil qilgan burchagini α bilan belgilaymiz. x ga Δx orttirma beramiz, u holda $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)$ bo'ladi. 126-chizmada $\Delta y=M_1B$; A nuqta esa $A(x+\Delta x\,; f(x+\Delta x))$ yoki $A(x+\Delta x; y+\Delta y)$ ΔMBA dan: $AB=MBtg\alpha$; $tg\alpha=f'(x)$; $MB=\Delta x$; $BA=f'(x)\Delta x$ bo'lganidan differensial ta'rifiga asosan $dy=f'(x)\Delta x$. Shunday qilib $BA=dy$ (126-chizma).

Bundan ko'rinadiki, $f(x)$ funksiyaning x va Δx ning berilgan qiymatlariga mos keluvchi differensiali $y=f(x)$ egri chiziqqa x nuqtada o'tkazilgan urinmaning ordinatasi orttirmasiga teng ekan.

4.9. Funksiyaning differensialini taqribiy hisoblashlarga tatbiqi.

Oldingi mavzudagi (3), (4) formulalarga asosan taqribiy hisoblashlarda

$$f(x+\Delta x)-f(x)\approx f'(x)\Delta x \tag{1}$$

tenglikdan foydalaniladi. (1) formulani quyidagicha yozamiz.

$$f(x+\Delta x)\approx f(x)+f'(x)\Delta x. \tag{2}$$

1-misol. $\sqrt{4,325}$ ni hisoblang.

Yechish. (2)-formuladan foydalanamiz.

$$\sqrt{4,325} \approx \sqrt{4} + \frac{1}{2\sqrt{4}} \cdot (4,325 - 4) = 2 + \frac{0,325}{4} = 2 + 0,081 = 2,081.$$

2-misol. $\cos 48^0$ ni hisoblang.

Yechish. $f(x) = \cos x$ bo'lsin, u holda $f'(x) = -\sin x$ (2) formulaga asosan $\cos(x + \Delta x) \approx \cos x - \sin x \Delta x$. $x = \frac{\pi}{4}$ deb olamiz.

$$\Delta x = 3^0 = \frac{\pi}{180} \cdot 3 \quad ; \quad x + \Delta x = \frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{180} \quad ;$$

$$\cos 48^0 = \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\pi}{180}\right) \approx \cos\frac{\pi}{4} - \frac{3\pi}{180} \cdot \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{3\pi}{180} =$$

$$= 0,7071 + 0,7071 \cdot 0,052 = 0,7071 + 0,037 = 0,7441.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Kesmada o'suvchi va kamayuvchi funksiya ta'rifini izohlab bering.
2. Funksiyaning o'suvchi va kamayuvchi bo'lishining zaruriy va yetarlik shartlarini isbotlab bering.
3. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini, funksiyaning ekstremal qiymatlarini ta'riflang.
4. Ekstremumning zaruriy va yetarlik shartlarini isbotlang.
5. $y=f(x)$ funksiya grafigining qavariqlik va botiqlik ta'rifini hamda burilish nuqtalarini ta'riflab bering.
6. $y=f(x)$ funksiya grafigining qavariqli va botiqli intervallari va burilish nuqtalari qanday topiladi?
7. Vertikal va og'ma asimptotalarning mavjudlik sharti qanday va ular qanday topiladi?
8. Funksiyani umumiy tekshirish va grafigini yasash sxemasini bayon qiling.
9. Funksiya differensiali deb nimaga aytiladi?
10. Funksiyaning differensiali uning hosilasi orqali qanday ifodalanadi?
11. Funksiya differensialining geometrik ma'nosi nimadan iborat?
12. Qanday funksiyalar uchun differensial aynan orttirmaga teng bo'ladi?

5-§. Aniqmas integral va uning xossalari

5.1. Boshlang'ich funksiya tushunchasi.

Biz F(x) funksiya berilganda uning hosilasini yoki differensiali $f(x)=F'(x)$ ni topishni ko'rdik. Endi esa teskari masalani qaraymiz. f(x) funksiya berilgan: shunday F(x) funksiyani topish kerakki, uning hosilasi f(x) ga teng bo'lsin, ya'ni F'(x) = f(x) (1) bo'lsin.

Ta'rif. Agar [a,b] kesmada aniqlangan f(x) funksiya uchun bu kesmaning barcha nuqtalarida F'(x)=f(x) tenglik bajarilsa, F(x) funksiya shu kesmada f(x) funksiyaga nisbatan boshlang'ich funksiya deb ataladi.

Misol. f(x)=x^4 funksiyaga nisbatan boshlang'ich funksiya topilsin.

Boshlang'ich funksiya ta'rifiga asosan F(x)=$\frac{x^5}{5}$ funksiya boshlang'ich ekani kelib chiqadi, chunki $\left(\frac{x^5}{5}\right)'=x^4$

Agar f(x) funksiya uchun boshlang'ich funksiya mavjud bo'lsa, u boshlang'ich yagona bo'lmasligini ko'rish oson.

Masalan,

$$F(x)=\frac{x^5}{5}+8; F(x)=\frac{x^5}{5}+9.$$

$F(x)=\frac{x^5}{5}+c$ lar ham $f(x)=x^4$ funksiya uchun boshlang'ich funksiyalardir.

Agar F$_1$(x) va F$_2$(x) funksiya f(x) funksiyadan [a,b] kesmada boshlang'ich funksiyalar bo'lsa, ular orasida ayirma o'zgarmas songa teng bo'ladi. Agar berilgan f(x) funksiya uchun qanday bo'lmasin birgina F(x) boshlang'ich funksiya topilgan bo'lsa, f(x) funksiya uchun har qanday boshlang'ich funksiya F(x)+C ko'rinishga ega bo'ladi.

5.2. Aniqmas integral va uning xossalari.

Ta'rif. Agar F(x) funksiya biror kesmada f(x) funksiya uchun boshlang'ich bo'lsa, F(x)+C ifoda F(x) funksiyadan aniqmas integral deb ataladi va ushbu $\int f(x)dx$ ko'rinishda belgilanadi. Ta'rifga ko'ra F'(x)=f(x) bo'lsa, $\int f(x)dx=F(x)+c$ bo'ladi.

Bunda f(x) funksiya integral ostidagi funksiya, f(x)dx integral ostidagi ifoda, $\int$ – belgi integral belgisi deb ataladi.

Shunday qilib, aniqmas integral $y=F(x)+C$ funksiyalar to‘plamidan iborat. Geometrik nuqtayi nazaridan qaraganda aniqmas integral egri chiziqlar to‘plamidan (oilasidan) iborat bo‘lib, ularning har biri egri chiziqlardan bittasini o‘z-o‘ziga parallel holda yuqoriga yoki pastga, ya’ni Oy o‘q bo‘ylab siljitish yo‘li bilan hosil bo‘ladi. Har qanday $f(x)$ funksiya uchun ham boshlang‘ich funksiya mavjud bo‘laveradimi? Tekshirishlar har qanday funksiya uchun ham boshlang‘ich funksiya mavjud bo‘lavermasligini ko‘rsatadi. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, bu funksiya uchun boshlang‘ich funksiya mavjud bo‘ladi. Berilgan $f(x)$ funksiya bo‘yicha uning boshlang‘ich funksiyasini topish f(x) funksiyani integrallash deyiladi.

Aniqmas integral quyidagi xossalarga ega:

1. Aniqmas integralning hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng, ya’ni $F'(x)=f(x)$ bo‘lsa, u holda:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(F(x)+c\right)' = f(x).$$

2. Aniqmas integralning differensiali integral ostidagi ifodaga teng.

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx.$$

3. Biror funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiya bilan ixtiyoriy o‘zgarmas sonining yig‘indisiga teng.

$$\int dF(x) = F(x)+c.$$

4. Biror funksiyaning hosilasidan olingan aniqmas integral shu funksiya bilan ixtiyoriy o‘zgarmasning yig‘indisiga teng, ya’ni

$$\int F'(x)dx = F(x)+c.$$

5. Chekli sondagi funksiyalar algebraik yig‘indisining aniqmas integrali, shu funksiyalar aniqmas integrallarining algebraik yig‘indisiga teng.

$$\int [f_1(x)+f_2(x)]dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

Haqiqatan ham bu tenglikning chap va o‘ng tomonlarining hosilalarini topsak.

$$\left(\int [f_1(x)+f_2(x)]dx\right)' = f_1(x)+f_2(x)$$

$$\left(\int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx\right)' = \left(\int f_1(x)dx\right)' + \left(\int f_2(x)dx\right)' = f_1(x)+f_2(x).$$

ga ega bo‘lamiz. Demak, tenglikning chap, o‘ng tomonlarining hosilalari o‘zaro teng, ya’ni chap tomonda turgan har qanday boshlang‘ich funksiyaning hosilasi o‘ng tomonda turgan har qanday funksiyaning hosilasiga teng.

6. O‘zgarmas ko‘paytuvchini integral ishorasi ostidan chiqarish mumkin, ya’ni a=const bo‘lsa, $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$

Buni isbotlash uchun ham hosila olamiz. $\left(\int af(x)dx\right)' = af(x)$

$$\left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = af(x).$$

Aniqmas integrallarni hisoblaganda quyidagi qoidalarni nazarda tutish foydali:

1. Agar $\int f(x)dx = F(x)+c$ bo‘lsa $\int f(ax)dx = \frac{1}{a}F(ax)+c$ bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\left(\int f(ax)dx\right)' = f(ax);$$

$$\left(\frac{1}{a}F(ax)\right)' = \frac{1}{a}\left(F(ax)\right)' = \frac{1}{a}F'(ax)a; \quad F'(ax) = f(ax).$$

2. Agar $\int f(x)dx = F(x)+c$ bo‘lsa $\int f(x+b)dx = F(x+b)+c.$

3. Agar $\int f(x)dx = F(x)+c$ bo‘lsa $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+c.$

Misol.

1) $$\int\left(5x^4 - 3\cos x + 4\sqrt{x}\right)dx = \int 5x^4dx - \int 3\cos x dx + \int 4\sqrt{x}dx =$$

$$= 5\frac{x^{4+1}}{4+1} - 3\sin x + 4\frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + c = x^5 - 3\sin x + \frac{8}{3}x\sqrt{x} + c;$$

2) $\int \frac{dx}{2x+5} = \frac{1}{2}\ln(2x+5)+c;$ 3) $\int \sin 8x dx = -\frac{1}{8}\cos 8x + c;$

4) $\int \cos(3x-5)dx = \frac{1}{3}\sin(3x-5)+c.$

Asosiy formulalar jadvali.

Aniqmas integralning ta’rifi, xossalari, shuningdek differensiallashning asosiy formulalaridan foydalanib, eng sodda elementar funksiyalarning integrallarini jadvalini tuzamiz:

1) $\int dx = x + c$;

2) $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \ (\alpha \neq -1)$;

3) $\int \dfrac{dx}{x^2} = -\dfrac{1}{x} + c$;

4) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + c$;

5) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln(x) + c$;

6) $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + c$;

7) $\int e^x dx = e^x + c$;

8) $\int \sin x dx = -\cos x + c$;

9) $\int \cos x dx = \sin x + c$;

10) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + c$;

11) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$;

12) $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + c$;

13) $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + c$;

14) $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + c$;

15) $\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a} arctg \dfrac{x}{a} + c$;

16) $\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{a+x}{a-x}\right| + c$;

17) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$;

18) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + c$;

19) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + c$.

Yuqoridagi formulalarning to'g'riligi differensiallash yo'li bilan isbotlanadi.

5.3. Integrallash metodlari.

1) O'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan yoki o'rniga qo'yish usuli bilan integrallash.

$\int f(x)dx$ ni hisoblash talab qilinsin. Ayrim hollarda x o'zgaruvchini yangi o'zgaruvchiga almashtirish yordamida, ya'ni $x = \varphi(t)$ deb olib, integral ostidagi ifodani soddalashtirish mumkin.

$$dx = \varphi'(t)dt;$$

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.$$

Integrallashdan so'ng t o'rniga uning x orqali ifodasi qo'yiladi.

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x).$$

O‘ng tomonini x bo‘yicha murakkab funksiya kabi differensiallaymiz. t oraliq argument $\frac{dx}{dt} = \varphi'(t)$ teskari funksiya differensialiga asosan

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\varphi'(t)}$$

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \frac{dt}{dx} = f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x)$$

integrallashda o‘zgaruvchini almashtirish ba’zan $x = \varphi(t)$ ko‘rinishda emas, balki $t = \psi(x)$ ko‘rinishda qulayroq bo‘ladi.

Agar integral $\int \frac{\psi'(x)dx}{\psi(x)}$ ko‘rinishda bo‘lsa, quyidagi ko‘rinishda almashtirish bajaramiz.

$$\psi(x) = t;\ \psi'(x)dx = dt.$$

$$\int \frac{\psi'(t)dx}{\psi(x)} = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|\psi(x)| + c.$$

Misol. $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} dx$ integral hisoblansin.

Yechish. $x = \frac{1}{t}$ deb olamiz. U holda $dx = -\frac{1}{t^2}dt$;

$$\int t^2 e^t \left(-\frac{1}{t^2}\right) dt = -\int e^t dt = -e^t + c = -e^{\frac{1}{x}} + c.$$

2) bo‘laklab integrallash.

Ko‘paytmaning differentsiali formulasiga ko‘ra:

$$d(u\vartheta) = ud\vartheta + \vartheta du;\quad u\vartheta = \int ud\vartheta + \int \vartheta du;$$

$$\int ud\vartheta = u\vartheta - \int \vartheta du;$$

bu formula bo‘laklab integrallash formulasi deb ataladi.

Misol. $\int x\sin xdx$ integral hisoblansin.

Yechish.

$$u = x;\ du = dx;\ d\vartheta = \sin xdx;\ \vartheta = -\cos x.$$

$$\int x\sin xdx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + c.;$$

$$\int x^k \sin axdx,\ \int x^k \cos axdx,\ \int x^k e^{ax} dx,\ \int x^k \ln xdx,$$

kabi va teskari trigonometrik funksiyalar ishtirok qilgan ba'zi integrallar bo'laklab integrallash yordami bilan hisoblanadi.

Misol. $\int \operatorname{arcctg} x dx$ integral hisoblansin

$$u = \operatorname{arcctg} x; \quad du = -\frac{dx}{1+x^2}; \quad d\vartheta = dx; \quad \vartheta = x.$$

$$\int \operatorname{arcctg} x dx = x \operatorname{arcctg} x + \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2} \ln\left|1+x^2\right| + c.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

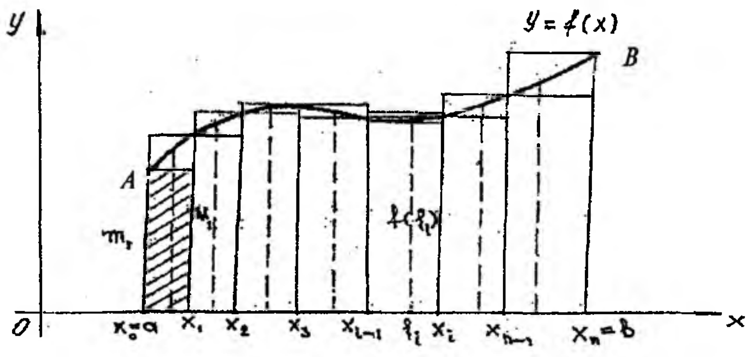
1. Boshlang'ich funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Berilgan funksiyaning aniqmas integrali deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning xossalarini aytib bering.
4. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirish usuli nimadan iborat?
5. Aniqmas integralda bo'laklab integrallash formulasini keltirib chiqaring.

6-§. Aniq integral

6.1. Aniq integral va uning xossalari.

Aniq integral matematik analizning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, matematika, fizika, mexanika va boshqa fanlarda tekshirishning eng kuchli quroli hisoblanadi.

Egri chiziqlar bilan chegaralangan yuzalarni, egri chiziq yoylari uzunliklarini, hajmlarni, ishlarni, tezliklarni, yo'llarni, inersiya momentlarini va hokazolarni hisoblash ishlarining hammasi aniq integralni hisoblashga keltiriladi.



127-chizma.

Aniq integral tushunchasiga olib keluvchi masala. $[a, b]$ kesmada $y=f(x)$ uzluksiz funksiya berilgan bo'lsin (127-chizma). Berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigi, abssissa o'qi, $x=a$ va $x=b$ vertikal to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan $aABb$ tekis figura egri chiziqli trapetsiya deyiladi. Shu egri chiziqli trapetsiya yuzini topamiz. Buning uchun $y=f(x)$ funksiyaning kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlarini mos ravishda M va m bilan belgilaymiz. $[a; b]$ kesmani $x_i = a + \frac{b-a}{n} i,\ i = 0, 1, ..., n$ nuqtalar bilan n ta kesmachalarga ajratamiz, bunda $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ deb hisoblaymiz va $x_1 - x_0 = \Delta x_1$ $x_2 - x_1 = \Delta x_2$, $x_n - x_{n-1} = \Delta x_n$ deb faraz qilamiz, so'ngra $f(x)$ funksiyaning eng kichik va eng katta qiymatlarini:

$[x_0; x_1]$ kesmada m_1 va M_1 bilan;

$[x_1; x_2]$ kesmada m_2 va M_2 bilan;

....

$[x_{n-1}; x_n]$ kesmada m_n va M_n bilan belgilaymiz.

Endi quyidagi yig'indilarni tuzamiz:

$$\underline{s_n} = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + \ldots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i ;$$

$$\overline{s_n} = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + \ldots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i .$$

Bu yig'indilar integral yig'indi deyilib, mos ravishda ichki va tashqi chizilgan zinasimon shaklni siniq chiziq bilan chegaralangan yuziga teng bo'ladi. Bundan esa $\underline{s_n} \le S_{aABb} \le \overline{s_n}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar [a;b] kesmalarni yana ham kichiklashtirib bo'laklarga ajratsak, n yetarlik darajada bo'lganda $\underline{s_n}$ va $\overline{s_n}$ lar bir-biridan kam farq qiladi va egri chiziqli trapetsiyaning yuzini aniqlaydi.

Ta'rif. Aytaylik, $y=f(x)$ $x \in [a; b]$ manfiy bo'lmagan, uzluksiz funksiya bo'lsin. Bu holda, agar $\{\underline{s_n}\}$ va $\{\overline{s_n}\}$ ketma-ketliklar limitlari mavjud bo'lib, bir-biriga teng bo'lsa, limitning qiymati egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deyiladi.

6.2. Integral yig'indi, aniq integralning ta'rifi.

Endi $[x_0; x_1]$, $[x_1; x_2]$, ..., $[x_{n-1}, x_n]$ kesmalarning har birida bittadan nuqta olamiz. Bu nuqtalarni $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ bilan belgilaymiz.

Bu nuqtalarni har birida $f(\xi_1), f(\xi_2), ..., f(\xi_n)$ qiymatlarni hisoblaymiz.

$$s_n = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

yig'indini tuzamiz.

Bu yig'indi [a; b] kesmada $f(x)$ funksiyaning integral yig'indisi deb ataladi.

[x_{i-1}; x_i] kesmaga tegishli bo'lgan har qanday ξ_i nuqta uchun $m_i \le f(\xi_i) \le M_i$ va barcha $\Delta x_i > 0$ bo'lganda $m_i\Delta x_i \le f(\xi_i)\Delta x_i \le M_i\Delta x_i$

demak, $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ yoki $\underline{s_n} \le s_n \le \overline{s_n}$.

Bundan ko'rinadiki, yuzi s_n ga teng bo'lgan shakl ichki va tashqi chizilgan siniq chiziq bilan chegaralangan yuzalar orasida yotadi. s_n yig'indining qiymati [a; b] kesmani [x_{i-1}; x_i] kesmalarga ajratish usuliga hamda hosil qilingan kesmani ichida ξ_i nuqtalarni tanlab olishga bog'liq. Endi max[x_{i-1}; x_i] bilan kesmalarni eng uzunini belgilaymiz va max[x_{i-1}; x_i] nolga intiladigan holni qaraymiz. Har bir ajratish uchun ξ_i ning mos qiymatini tanlab $s_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ integral yig'indisini tuzamiz.

$n \to \infty$ intilganda $\max \Delta x_i \to 0$ bo'ladigan s_n ketma-ketlikni qaraymiz va u biror limitga ega bo'lsin.

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} s_n = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = s.$$

1-ta'rif. Agar [a; b] kesma $\max \Delta x_i \to 0$ shartni qanoatlantiradigan har qanday bo'laklarga ajratilganda va [x_{i-1}; x_i] kesmada ξ_i ni istalgancha tanlab olganda $S_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ integral yig'indi birgina limitga intilsa, u holda,bu limit [a; b] kesmada $f(x)$ funksiyaning aniq integrali deb ataladi va $\int_a^b f(x)dx$ bilan belgilanadi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra:

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

a – son integralning quyi chegarasi, b – son esa integralning yuqori chegarasi deyiladi. [a; b] integrallash kesmasi, x esa integrallash o'zgaruvchisi deyiladi.

2-ta'rif. Agar *f(x)* funksiya uchun yuqoridagi limit mavjud bo'lsa, u holda funksiya [*a*; *b*] kesmada integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Agar integral ostidagi *y=f(x)* funksiyaning grafigini chizsak $f(x)\geq 0$ bo'lgan holda $\int_a^b f(x)dx$ integralning son qiymati *y=f(x)* egri chiziq, *x=a, x=b* to'g'ri chiziqlar hamda *Ox* o'qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng.

6.3. Integralning mavjudligi haqidagi teorema.

Teorema. (isbotsiz keltiramiz). Agar *f(x)* funksiya [*a*; *b*] kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya shu kesmada integrallanuvchidir. Uziluvchan funksiyalar orasida integrallanuvchi funksiyalar va integrallanmovchi funksiyalar ham bo'lishi mumkin.

Eslatma. 1. aniq integral faqat f(x) funksiyaning turiga va integralning chegarasiga bog'liq, ammo har qanday harf bilan belgilanishi mumkin bo'lgan integrallash o'zgaruvchisiga bog'liq emas.

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(t)dt=...=\int_a^b f(z)dz.$$

2. $\int_a^b f(x)dx$ aniq integral tushunchasini berishda $a<b$ deb faraz qildik. Agar $b<a$ bo'lsa, ta'rifga ko'ra :

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx;\ \text{Misol}\ \int_6^0 x^3\,dx=-\int_0^6 x^3dx.$$

3. Agar $a=b$ bo'lsa, ta'riflarga ko'ra, har qanday funksiya uchun tubandagi tenglik o'rinli bo'ladi.

$$\int_a^a f(x)dx=0.$$

6.4. Aniq integralning asosiy xossalari.

y=f(x) funksiya [*a*; *b*] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin.

U holda $\int_a^b f(x)dx$ mavjud va quyidagi xossalar o'rinli.

1-xossa. O'zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisining tashqarisiga chiqarish mumkin, agar *C*=const bo'lsa, u holda

$$\int_a^b Cf(x)dx=C\int_a^b f(x)dx.$$

Isboti.

$$\int_a^b Cf(x)dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} Cf(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= C \cdot \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = C\int_a^b f(x)dx.$$

2-xossa. Bir necha funksiyalar algebraik yig'indisining aniq integrali qo'shiluvchilar aniq integrallarining algebraik yig'indisiga teng. Masalan, ikkita qo'shiluvchi bo'lgan hol uchun yozib isbotlaymiz.

$$\int_a^b [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Isboti. $\int [f_1(x) + f_2(x)]dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [f_1(\xi_i) + f_2(\xi_i)]\Delta x_i =$

$$= \lim_{\max \Delta x \to 0} \left[\sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i \right] = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_1(\xi_i)\Delta x_i +$$

$$+ \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f_1(x)dx + \int_a^b f_2(x)dx.$$

Qo'shiluvchilar soni har qancha bo'lganda ham shunday isbot qilinadi.

3-xossa. (Bu xossa $a \geq b$ bo'lgandagina bajariladi). Agar $[a, b]$ ($a<b$) kesmada $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalar $f(x) \leq \varphi(x)$ shartni qanoatlantirsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$ o'rinli.

Isboti. Tubandagi ayirmani qaraymiz:

$$\int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} [\varphi(\xi_i) - f(\xi_i)]\Delta x_i;$$

bunda: $\varphi(\xi_i) - f(\xi_i) \geq 0 \quad \Delta x_i \geq 0;$

demak, butun yig'indi manfiy emas va uning limiti ham manfiy emas, ya'ni

$$\int_a^b [\varphi(x) - f(x)]dx \geq 0 \ \ yoki \ \int_a^b \varphi(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

4-xossa. Agar M va m sonlar f(x) funksiyaning [a;b] kesmadagi eng katta va eng kichik qiymatlari bo'lib, $a \le b$ bo'lsa, u holda

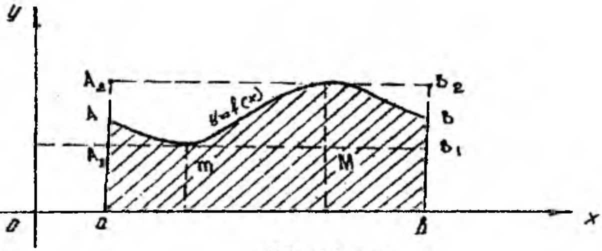
$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a) \text{ bo'ladi.}$$

Isboti. Teoremaning shartiga ko'ra:

$$m \le f(x) \le M.$$

3-xossaga ko'ra $\int_a^b mdx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b Mdx$ bunda $\int_a^b mdx$, $\int_a^b Mdx$ ning qiymatlari mos ravishda $\int_a^b mdx = m(b-a)$ va $\int_a^b Mdx = M(b-a)$ ga teng.

Agar $f(x) \ge 0$ bo'lsa, u holda bu xossani geometrik usulda tasvirlasak, egri chiziqli $aABb$ trapetsiyaning yuzi, aA_1B_1b va aA_2B_2b to'g'ri to'rtburchaklar orasida yotadi (128-chizma).



128-chizma.

5-xossa. (O'rta qiymat haqida teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a; b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda bu kesmada shunday bir c nuqta topiladiki, bu nuqta uchun $\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c)$ tenglik o'rinlidir.

Isbot. Aniqlik uchun $a<b$ bo'lgan holni qaraymiz. Agar m va M lar f(x) ning $[a; b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari bo'lsa, u holda oldingi xossaga ko'ra $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b (f(x)dx \le M$ bundan $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = \mu$ bo'ladi. $m \le \mu \le M$ bunda f(x) uzluksiz funksiya bo'lgani uchun m va M orasidagi hamma oraliq qiymatlarni qabul qiladi. Demak, biror c $(a \le c \le b)$ qiymatda $\mu = f(c)$ bo'ladi, ya'ni $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

6-xossa. Agar quyidagi uchta integralning har biri mavjud bo'lsa, u holda har qanday uchta a, b, c son uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx;$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

6.5. Yuqori chegarasi o'zgaruvchi bo'lgan aniq integral.

$\int_a^b f(x)dx$ aniq integralning quyi chegarasi a yuqori chegarasi b o'zgaruvchan bo'lsin. U holda integral yuqori chegarasining funksiyasi bo'ladi. $\int_a^x f(t)dt$ ko'rinishdagi integralni hosil qilamiz. a o'zgarmas son bo'lganda bu integral yuqori x chegarasining funksiyasi bo'ladi. Bu funksiyani $\Phi(x)$ bilan belgilaymiz.

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt. \qquad (1)$$

Agar $f(t) \geq 0$ bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ funksiyaning son qiymati egri chiziqli $aAXx$ trapetsiyaning yuziga teng (129-chizma).

Bu yuz x o'zgarishi bilan o'zgarib boradi. (1) aniq integraldan yuqori chegaraga nisbatan hosila olamiz.

Teorema. Agar f(x) funksiya [a; b] kesmada uzluksiz funksiya va

$\Phi(x)= \int_a^x f(t)dt$ bo'lsa, u holda $\Phi'(x) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Boshqacha aytganda, aniq integraldan yuqori chegarasi bo'yicha olingan hosila integral ostidagi funksiyaga teng bo'lib, unda integrallash o'zgaruvchisini o'rniga yuqori chegaraning qiymati qo'yilgan.

Isbot. x argumentga musbat yoki manfiy orttirma beramiz, u holda

$$\Phi(x+\Delta x)= \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$$

$\Phi(x)$ funksiyaning orttirmasi.

$$\Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt;$$

ya'ni $\Delta\Phi = \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt.$

Oxirgi integralga o'rta qiymat haqidagi teoremani tatbiq etamiz.

$$\Delta\Phi = f(\xi)(x + \Delta x - x) = f(\xi)\Delta x;$$

bunda ξ ning qiymati x bilan x+Δx orasida yotadi.

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\frac{f(\xi)\Delta x}{\Delta x}=f(\xi).$$

Demak, $\Phi'(x)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)$.

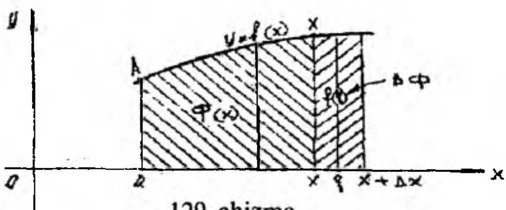
Ammo, Δx→0 bo‘lganda $\xi\to x$ bo‘lgani uchun bu holda $\lim\limits_{\Delta x\to 0}f(\xi)=\lim\limits_{\xi\to x}f(\xi)$ lekin f(x) funksiya uzluksiz bo‘lgani uchun

$$\lim_{\xi\to x}f(\xi)=f(x).$$

Shunday qilib, $\Phi'(x)=f(x)$ teorema isbotlandi.

Teorema geometrik jihatdan quyidagini ifodalaydi:

$$\Delta\Phi=f(\xi)\Delta x$$



129-chizma.

orttirma bir asosi Δx bo‘lgan egri chiziqli trapetsiyaning yuziga teng bo‘lib, $\Phi'(x)=f(x)$ hosila x kesmaning uzunligiga teng (129-chizma).

Izoh. Isbot etilgan teoremadan, xususiy holda har qanday uzluksiz funksiya boshlang‘ich funksiyaga ega degan natija kelib chiqadi.

6.6. Nyuton-Leybnits formulasi.

Teorema. Agar *f(x)* funksiya [*a*; *b*] kesmada uzluksiz va *F(x)* uzluksiz *f(x)* funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsa, u holda,

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a);$$

formula o‘rinlidir. Bu formula Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi.

Isbot. *F(x)* funksiya *f(x)* funksiyaning biror boshlang‘ich funksiyasi bo‘lsin, 6.5-mavzudagi teoremaga muvofiq $\int_a^x f(t)dt$ funksiya ham *f(x)* funksiyaning boshlang‘ich funksiyasi bo‘ladi. Ammo, berilgan funksiyaning har qanday 2 ta boshlang‘ich funksiyasi bir-biridan o‘zgarmas C^* qo‘shiluvchi bilan farq qiladi. $\int_a^x f(t)dt=F(x)+C^*$.

O'zgarmas C^* ni aniqlash uchun $x=a$ deb olamiz.

$\int_a^a f(t)dt = F(a)+C^*$; $\quad 0=F(a)+C^*$; $\quad C^*=-F(a)$; demak,

$\int_a^x f(t)dt = F(x)-F(a)$ $\;x=b$ deb olsak, Nyuton-Leybnits formulasi hosil bo'ladi. $\int_a^b f(t)dt = F(b)-F(a)$ $\;t$ ni x bilan almashtirsak

$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$; $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b)-F(a).$

Integral ostidagi funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ma'lum bo'lsa, u holda Nyuton-Leybnits formulasi aniq integralni hisoblash uchun juda qulay.

6.7. Aniq integralni hisoblash metodlari.

1) Aniq integralda o'zgaruvchini almashtirish.

Aniq integralni hisoblashda ham aniqmas integralni hisoblashdagidek o'rniga qo'yish metodi yoki o'zgaruvchini almashtirish metodidan keng foydalaniladi.

Teorema. $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada berilgan va uzluksiz bo'lsin. $\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblash talab qilinsin. $x=\varphi(t)$ o'zgaruvchini kiritamiz. U holda, agar $\varphi(t)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz;

2) $\varphi(\alpha)=a$; $\varphi(\beta)=b$;

3) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha;\beta]$ kesmada uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \ldots \qquad (1)$$

bo'ladi.

Isbot. Agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, quyidagi tenglikni yozish mumkin:

$$\int f(x)dx = F(x)+C; \qquad (2)$$

$$\int f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F\left[\varphi(t)\right] + C. \qquad (3)$$

Keyingi tenglikni to'g'riligi uni 2 tomonini t bo'yicha differentsiyallash bilan tekshiriladi. Nyuton-Leybnits formulasiga ko'ra:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Bunga asosan:

$$(3) \Rightarrow \int_\alpha^\beta f\left[\varphi(t)\right]\varphi'(t)dt = F\left[\varphi(t)\right]\Big|_\alpha^\beta =$$

$$= F\left[\varphi(\beta)\right] - F\left[\varphi(\alpha)\right] = F(b) - F(a);$$

ekani kelib chiqadi. Keyingi ifodalarning o'ng tomoni teng bo'lgani uchun chap tomoni ham teng. Aniq integralni birinchi formula bilan hisoblagandan keyin eski o'zgaruvchiga o'tish zaruriyati yo'q.

Misol. $\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx$ integral hisoblansin.

Yechish. o'zgaruvchini almashtiramiz. $x = r\sin t, dx = r\cos t dt$ integrallashning yangi chegaralarini topamiz. $x = 0$ bo'lganda $t = 0$, $x = r$ bo'lganda $t = \frac{\pi}{2}$. Demak,

$$\int_0^r \sqrt{r^2 - x^2}dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{r^2 - r^2\sin^2 t}\, r\cos t dt =$$

$$= r^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2t\right)dt = r^2\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi r^2}{4}$$

2) Bo'laklab integrallash.

Aytaylik, $u = u(x)$ va $\vartheta = \vartheta(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz $u'(x)$ va $\vartheta'(x)$ hosilalarga ega bo'lsin.

U holda $\left[u(x)\vartheta(x)\right]' = u'(x)\vartheta(x) + u(x)\vartheta'(x)$ bo'ladi.

Bu yerda, $u(x)\vartheta(x)$ funksiya $u'(x)\vartheta(x) + u(x)\vartheta'(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi. Nyuton-Leybnits formulasiga asosan bu ayniyatning ikkala tomonini a dan b gacha chegaralarda integrallaymiz.

$$\int_a^b (u\vartheta)' dx = \int_a^b u'\vartheta dx + \int_a^b u\vartheta' dx.$$

Lekin, $\int (u\vartheta)' dx = u\vartheta + C$ bo‘lgani sababli $\int\limits_a^b (u\vartheta)' dx = u\vartheta \Big|_a^b$ o‘rinli.

Demak, $u\vartheta \Big|_a^b = \int\limits_a^b \vartheta du + \int\limits_a^b u d\vartheta$ yoki $\int\limits_a^b u d\vartheta = u\vartheta \Big|_a^b - \int\limits_a^b \vartheta du.$

Bu tenglik aniq integralni bo‘laklab integrallash formulasi deyiladi.

Misol. $\int\limits_0^1 xe^x dx$ integralni hisoblang.

Yechish. Belgilashlar kiritamiz $u = x$, $d\vartheta = e^x dx$, $du = dx$; $\vartheta = e^x$; u holda bo‘laklab integrallash formulasiga ko‘ra

$\int\limits_0^1 xe^x dx = xe^x \Big|_0^1 + \int\limits_0^1 e^x dx = e + e^x \Big|_0^1 = 2e + 1$ ga ega bo‘lamiz.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Integral yig‘indi deganda nimani tushunasiz?
2. Aniq integralga ta’rif bering.
3. Aniq integral xossalarini aytib bering.
4. Aniq integralni hisoblash metodlarini aytib bering.
5. Nyuton-Leybnits formulasini keltirib chiqaring.

7-§. Aniq integralni geometriyaga va mexanikaga tatbiqi

7.1. Tekis figura yuzasini hisoblash.

1) To‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida yuzlarni hisoblash.

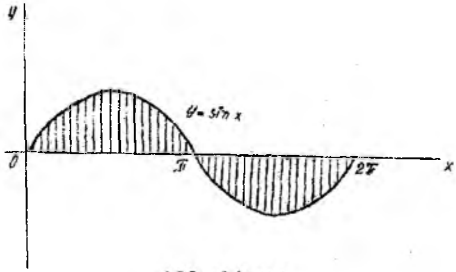
Bizga ma’lumki, musbat uzluksiz $y=f(x)$ funksiyadan olingan aniq integral $y=f(x)$ egri chiziq, Ox o‘q, $x=a$ va $x=b$ $(a<b)$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini ifodalaydi.

$$s = \int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (1)$$

Agar $[a, b]$ kesmada $f(x) \le 0$ bo‘lsa, u holda $\int\limits_a^b f(x)dx$ aniq integral ham manfiy bo‘ladi. Absolut qiymatga ko‘ra bu integral tegishli egri chiziqli trapetsiyaning S yuziga teng.

$$s = -\int\limits_a^b f(x)dx. \qquad (2)$$

Agar f(x) funksiya [a,b] kesmada ishorasini chekli son marta o'zgartirsa, u holda integralni butun [a,b] kesmada qismiy kesmachalar bo'yicha integrallar yig'indisiga ajratamiz. Qayerda $f(x)\geq 0$ bo'lsa, shu kesmada integral musbat, qayerda $f(x)\leq 0$ bo'lsa, shu kesmada integral manfiy bo'ladi va yuza (1) va (2) formulalarga ko'ra;



130-chizma.

$$s=\int_a^b |f(x)|dx. \qquad (3)$$

Misol. $0\leq x\leq 2\pi$ bo'lganda. y=sin$x$ sinusoida va Ox o'q bilan chegaralangan S yuza hisoblansin (130-chizma).

Yechish. $0\leq x\leq \pi$ bo'lganda $\sin x\geq 0$, $\pi<x<2\pi$ bo'lganda esa $\sin x\leq 0$ bo'lgani sababli

$$s=\int_0^{\pi}\sin xdx+\left|\int_{\pi}^{2\pi}\sin xdx\right|=\int_0^{\pi}|\sin x|dx;$$

$$\int_0^{\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-(\cos\pi-\cos 0)=-1(-1-1)=2;$$

$$\int_0^{2\pi}\sin xdx=-\cos x\Big|_0^{2\pi}=-|\cos 2\pi-\cos\pi|=-2.$$

Demak, $s=2+|-2|=4$. Agar murakkabroq, ya'ni egri chiziqli trapetsiyadan murakkabroq tekis figuraning yuzini hisoblash talab qilinsa, uni bir qancha egri chiziqli trapetsiyalar yig'indisi ko'rinishida bo'laklarga ajratamiz. Keyinchalik yuzani ana shu egri chiziqli trapetsiyalar yuzalarini yig'indisi ko'rinishida hisoblaymiz:

$$s=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^c f_2(x)dx+\int_a^b f_3(x)dx. \qquad (4)$$

Misol. $y=\sqrt{x}$ va $y=x^2$ egri chiziqlar bilan chegaralangan yuza hisoblansin (131-chizma).

Yechish. Egrilarni kesishgan nuqtalarni topamiz:

Ular $\sqrt{x}=x^2 \Rightarrow x=x^4$ tenglamadan topildi. $x_1=0$; $x_2=1$;

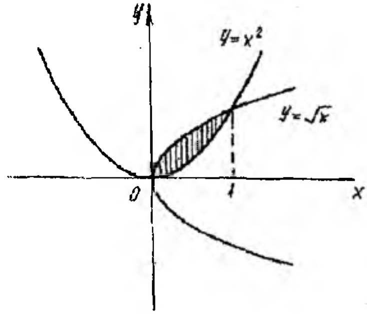
$$s=\int_0^1\sqrt{x}dx-\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

Misol. $y=2x^2-4x+3$, $x=-1$, $x=2$ chiziqlar hamda abssissa o‘qining $[-1;\ 2]$ kesmasi bilan chegaralan tekis shakl yuzasi hisoblansin (132-chizma).

Yechish. (3)−formulaga ko‘ra bu yuza:

$$S=\int_{-1}^{2}(2x^2-4x+3)dx=$$

$$=\frac{2x^3}{3}\Big|_{-1}^{2}-2x^2\Big|_{-1}^{2}+3x\Big|_{-1}^{2}=12\frac{1}{2}.$$

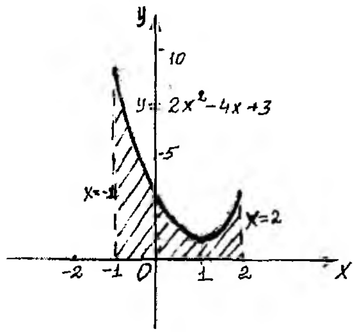


131-chizma.

Endi egri chiziq tenglamalari parametrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsin:

$$y=\varphi(t),\ y=\psi(t)\quad \alpha\le t\le\beta \quad \text{va}$$

$\varphi(\beta)=b$ egri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuzasini hisoblaymiz. Yuqoridagi parametrik tenglamalar biror $[a,\ b]$ kesmada, $y=f(x)$ funksiyani aniqlaydi deb faraz qilamiz. U holda egri chiziqli trapetsiyaning yuzasi:



132-chizma.

$s=\int_a^b f(x)dx=\int_a^b ydx$ ga teng. Bu integralda o‘zgaruvchini almashtiramiz.

$$x=\varphi(t);\ dx=\varphi'(t)dt;$$

$$y=f(x)=f\left[\varphi(t)\right]=\psi(t).$$

Demak,

$$s=\int_a^b\psi(t)\varphi'(t)dt.$$

Bu tenglamalari parametrik ko‘rinishda berilgan egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzasini hisoblash formulasidir.

Misol. $x=a\cos t$; $y=b\sin t$ ellips bilan chegaralangan sohaning yuzasi hisoblansin.

Yechish. x ning qiymati $-a$ dan $+a$ gacha t ning qiymati π dan 0 gacha o‘zgaradi.

$$S=2\int_{\pi}^{0}(b\sin t)(-a\sin tdt)=-2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2tdt=2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2tdt=$$

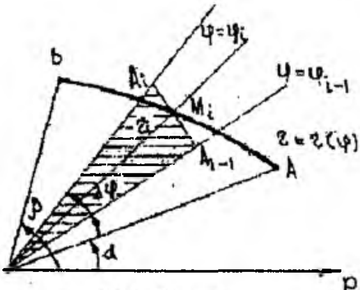
$$=2ab\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2t}{2}dt=2ab[\frac{t}{2}-\frac{\sin 2t}{4}]=\pi ab.$$

2) Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziqli sektorning yuzi.

Qutb koordinata sistemasida egri chiziq $r = f(\varphi)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Bu yerda $f(\varphi)$ funksiya $\alpha \le \varphi \le \beta$ kesmada uzluksiz.

$r = f(\varphi)$ egri chiziq $\varphi = a$ va $\varphi = b$ radius vektorlar bilan chegaralangan egri chiziqli OAB sektor yuzini topamiz. $[a;\ b]$ kesmani

$$\varphi_i = \alpha + \frac{\beta - \alpha}{n} i; \ (i = 0,1,2,\ldots,n)$$



133-chizma.

nuqtalar yordamida $[\alpha,\varphi_1],[\varphi_1,\varphi_2],\ldots,[\varphi_{n-1};\beta]$ bo‘laklarga bo‘lamiz. O‘tkazilgan radius vektorlar oralaridagi burchaklarni $\Delta\varphi_1, \Delta\varphi_2 \ldots \Delta\varphi_n$ deb belgilaymiz (133-chizma).

φ_{i-1} bilan φ_i orasidagi $\overline{\varphi_i}$ burchakka mos radius vektor uzunligini $\bar{r}_i$ orqali belgilaymiz. Radiusi $\bar{r}_i$ va markaziy burchagi $\Delta\varphi_i$ bo‘lgan doiraviy sektorni qaraymiz, uning yuzi $\Delta s = \frac{1}{2} r_i^2 \Delta\varphi_i$ ga teng. Ushbu yig‘indi $S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r_i^2 \Delta\varphi_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} [f(\varphi_i)]^2 \Delta\varphi_i$ «Zinapoyasimon» sektorning yuzini beradi. Bu yig‘indi $\alpha \le \varphi \le \beta$ kesmada $r^2 = [f(x)]^2$ funksiyaning integral yig‘indisi bo‘lgani sababli qiymati $\max\Delta\varphi_i \to 0$ da $\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi$ aniq integralga teng. Bu burchak ichida r_i qanday vektorni olishimizga bog‘liq emas. Bu limit shaklning izlangan yuzi uchun qabul qilinishi tabiiydir. Shu sababli OAB sektorning yuzi:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\varphi \quad yoki \quad S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f[(\varphi)]^2 d\varphi .$$

Misol. $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ lemniskata bilan chegaralangan yuza hisoblansin.

Yechish. Agar φ burchak 0 dan $\frac{\pi}{4}$ gacha o‘zgarsa, chegaralangan yuza izlanayotgan yuzaning choragini chizadi.

$$\frac{1}{4}S = \frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} r^2 d\varphi = \frac{1}{2}a^2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\varphi d\varphi = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{\sin 2\varphi}{2}\Bigg|_{0}^{\frac{\pi}{4}} = \frac{a^2}{4}.$$

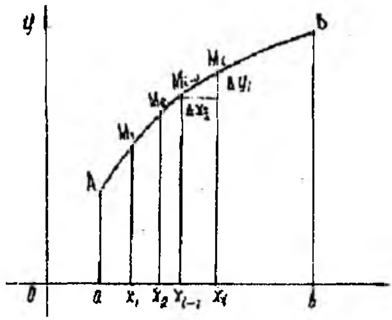
Demak, leminskata bilan chegaralangan yuza $S = a^2$ ga teng.

7.2. Tekis egri chiziq yoyining uzunligini hisoblash.

Tekislikda to‘g‘ri burchakli koordinatalar sistemasida egri chiziq $y=f(x)$ tenglama bilan berilgan bo‘lsin. Bu funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi.

Bu egri chiziqning $x=a$ va $x=b$ vertikal to‘g‘ri chiziqlar orasidagi yoyining uzunligini topamiz. Buning uchun $[a, b]$ kesmani $x_i = a + \frac{b-a}{n} i$ $(i = 0,1,2....,n)$ nuqtalar yordamida n ta bo‘lakka bo‘lamiz.

Bo‘linish nuqtalaridan ordinata o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz va ularni egri chiziq bilan kesishish nuqtalarini M_i bilan belgilaymiz. M_1 nuqtalarni vatarlar bilan tutashtiramiz. U holda AB yoy ichida $A\ M_1,\ M_1\ M_2, \ldots, M_{n-1}B$ siniq chiziq hosil bo‘ladi (134-chizma).



134-chizma.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalanib siniq chiziq perimetrini hisoblaymiz:

$$L = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (f(x_1) - f(x_0))^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (f(x_2) - f(x_1))^2} + \ldots$$

$$\ldots + \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2} + \ldots$$

$$+ \sqrt{(x_n - x_{n-1})^2 + (f(x_n) - f(x_{n-1}))^2}$$

Bundan AB yoyiga chizilgan siniq chiziq perimetri $L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$ ga teng. Bunda $x_0 = a$; $x_n = b$, Δx_i bo‘laklarning eng katta uzunligini $\max\Delta x_i$ deb belgilaymiz.

Ta’rif. AB yoyga ichki chizilgan siniq chiziq perimetri $L = \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{((x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$ $\max \Delta x_i \to 0$ da chekli limitga ega bo‘lsa, $\breve{AB}$ uzunlikka ega deyiladi va bu limit

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} L = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} \sqrt{(x_{k+1} - x_k)^2 + (f(x_{k+1}) - f(x_k))^2}$$

$\breve{AB}$ yoyning uzunligi deyiladi.

Biz $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va $f'(x)$ hosilaga ega degan edik. Shu sababli $f(x)$ funksiya har bir $[x_k, x_{k+1}]$ oraliqda Lagranj teoremasini shartlarini qanoatlantiradi.

Lagranj teoremasiga ko‘ra: $f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)$ bu yerda $x_k<\xi_k<x_{k+1}$ o‘zgaradi.

Bularga asosan, AB yoyga chizilgan siniq chiziq perimetri

$$L=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+f'^2(\xi)(x_{k+1}-x_k)^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2\cdot\left[1+f'^2(\xi_k)\right]}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\cdot\Delta x_k;$$

f(x) funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz $f'(x)$ hosilaga ega bo‘lganligi sababli quyidagi $\sqrt{1+f'^2(x)}$ funksiya ham uzluksiz bo‘ladi. Shuning uchun $\sqrt{1+f'^2(x)}$ funksiyaning integral yig‘indisi $\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k$ $\max\Delta x_i\to 0$ da $\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx$ ga intiladi, ya’ni

$$\lim_{\max\Delta x\to 0}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{1+f'^2(\xi_k)}\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Natijada $\breve{AB}=l$ uzunligi uchun tubandagi formulaga ega bo‘lamiz:

$$l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}dx.$$

Misol. $x^2+y^2=r^2$ aylana uzunligi hisoblansin.

Yechish. Dastlab, aylananing bir chorakda yotgan chizig‘ining uzunligini hisoblaymiz. U holda $\breve{AB}$ ning tenglamasi $y=\sqrt{r^2-x^2}$ bo‘ladi.

Demak,

$$\frac{1}{4}l=\int_0^r\sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}dx=\int_0^r\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}dx=r\arcsin\frac{x}{r}\Big|_0^r=r\frac{\pi}{2}=\frac{\pi r}{2}.$$

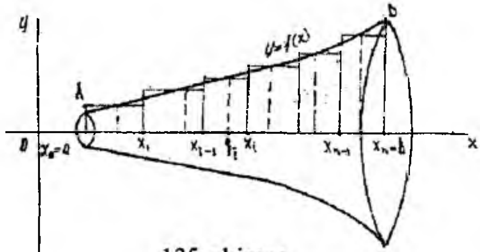
Butun aylana uzunligi $l=2\pi r$.

7.3. Aylanish jismining hajmini hisoblash.

Uzluksiz manfiy bo'lmagan $y=f(x)$, $x\in[a,b]$ funksiya, (Ox) abssissa o'qi. $x=a$ va $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan *aABb* egri chiziqli trapetsiyaning (Ox) o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini aniqlaymiz. Buning uchun $[a,b]$ kesmani

$$x_i=a+\frac{b-a}{n}i\ ;\ i=0,1,2,...,n$$

nuqtalar yordamida bir xil uzunlikdagi kesmachalarga bo'lamiz. Har bir $[x_{i-1};x_i]$ kesmachada $\xi_i\in[x_{i-1};x_i]$ nuqta tanlaymiz (135-chizma).



135-chizma.

Integral yig'indi tuzamiz

$$\pi f^2(\xi_1)\Delta x_1+\pi f^2(\xi_2)\Delta x_2+...+\pi f(\xi_n)\Delta x_n=\pi\sum_{i=1}^{n}f^2(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

bu yerda $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ (1) ni har bir qo'shiluvchisi doiraviy silindr hajmiga teng.

Butun yig'indi esa zinapoyasimon jismga mos hajmni beradi. Uzluksiz f(x), $x\in[a,b]$ funksiya uchun $n\to\infty$ da (1) integral yig'indi aylanma jismning hajmini beradi.

$$V=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f^2(\xi_i)\Delta x_i=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Misol. $y=x^2$ egrini $x=0$ dan $x=2$ gacha kesmada abssissa o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism hajmini hisoblang.

$$V=\pi\int_0^2 x^4dx=\pi\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^2=\frac{32\pi}{5}.$$

7.4. Aylanish jismning sirtini hisoblash.

Oldingi mavzudagi chizmada aylanish jismi berilgan. AB egrini abssissa o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzini hisoblash talab qilinsin. $y=f(x)$, $x\in[a;b]$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lsin. $[a;b]$ kesmani $x_i=a+\frac{b-a}{n}i$ $i=0,1,...n$ nuqtalar yordamida n ta bo'lakga bo'lamiz. Bu nuqtalardan ordinatalar o'tkazib, uni egri chiziq bilan kesishgan nuqtalarini M_i bilan belgilaymiz. M_i nuqtalarni vatarlar bilan tutashtirib $AM_1M_2...M_{n-1}B$ siniq chiziq hosil qilamiz. Bu siniq chiziqni abssissa o'qi atrofida aylanishidan kesik konus yon sirtlari hosil bo'ladi. Bu sirtlarning yuzasini S_n bilan belgilaymiz. U holda $\{S_n\}$ ketma-ketlikni limiti aylanish jismi sirtini yuzasini beradi. $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$ $AM_1M_2...M_{n-1}B$ siniq chiziq aylanishidan hosil bo'ladigan sirt yuzasi

$$S_n=\sum_{i=1}^{n}2\pi\frac{f(x_{i-1})+f(x_i)}{2}l_i=\pi\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\Delta x_i \qquad (1)$$

yig'indini $n\to\infty$ da limiti esa aylanish jismi sirtining yuzasini beradi.

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(x_{i-1})+f(x_i)\right]\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\Delta x_i=$$

$$=2\pi\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[f(\xi_i)\right]\sqrt{1+\left(f'(\xi)\right)^2}\Delta x_i=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx.$$

Demak,

$$S=2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}dx. \qquad (2)$$

Misol. $x^2+y^2=R^2$ aylanani abssissa o'qi atrofida aylanishidan hosil bo'lgan jism sirtining yuzini hisoblang.

Yechish. Sirt yuzini $S=2\pi\int\limits_a^b f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}dx$ formula bo'yicha hisoblaymiz. $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ ga teng. To'la sirtni hisoblashda $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$ egrini koordinatalar sistemasining birinchi choragidagi qismini aylanishidan hosil bo'lgan sirt yuzini hisoblab ikkiga ko'paytiramiz.

$$\frac{S}{2}=2\pi\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{1+\frac{x^2}{R^2-x^2}}dx=2\pi\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-x^2}}dx=$$

$$=2\pi\int_0^R Rdx=2\pi Rx\Big|_0^R=2\pi R^2; \qquad S=4\pi R^2.$$

7.5. Ishni aniq integral yordamida hisoblash.

F kuch ta'siri ostida M moddiy nuqta to'g'ri chiziq bo'yicha harakat qilsin, bunda kuchning yo'nalishi harakat yo'nalishi bilan bir xil bo'lsin. M nuqta $S=a$ holatidan $S=b$ holatga ko'chganda F kuchning bajargan ishini topish talab qilinsin.

Bunda ikki hol bo'lishi mumkin:

1) agar F kuch o'zgarmas bo'lsa, u holda A ish F kuch bilan o'tilgan yo'l uzunligi ko'paytmasiga teng bo'ladi, ya'ni:

$$A = F(b-a).$$

2) F kuch moddiy nuqtaning olgan o'rniga qarab uzluksiz o'zgaradi, ya'ni $0 \le S \le b$ kesmada $F(S)$ uzluksiz funksiyani ifodalaydi deb faraz qilamiz. [a,b] kesmaning uzunliklari $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ bo'lgan n ta ixtiyoriy bo'lakga bo'lamiz. Keyin har bir qismiy kesmada ixtiyoriy ξ_i nuqta tanlab olamiz va $F(s)$ kuchning $\Delta s_i = (i = 1,2,..,n)$ yo'lda bajargan ishini $F(\xi_i)\Delta s_i$ ko'paytma bilan almashtiramiz.

Bu esa bir qism kesmada F kuchni o'zgarmas miqdor deb qabul qilishimizni bildiradi.

Bunday holda $F(\xi_i)\Delta s_i$ ifoda Δs_i etarli kichik bo'lganda F kuchning Δs_i yo'lda bajargan ishining taqribiy qiymatini beradi, yig'indi $A_n = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i)\Delta s_i$ esa F kuchning butun $[a, b]$ kesmada bajargan ishining taqribiy qiymati bo'ladi.

A_n yig'indi $[a, b]$ kesmada $F=F(s)$ kuch uchun tuzilgan integral yig'indi. Bu yig'indining $\max \Delta s_i \to 0$ dagi limiti mavjud va u F(s) kuchning $S=a$ nuqtadan $S=b$ nuqtagacha bo'lgan yo'lda bajargan ishini ifodalaydi. $A = \int_a^b F(s)ds$.

Misol. Vint prujinasining S qisilishi unga ta'sir etuvchi kuchga proporsional. Agar prujinani 1 sm qisish uchun 3 kg kuch kerak bo'lsa, F kuch prujinani 20 sm qisish uchun qancha ish bajarish kerak bo'lishi hisoblansin.

Yechish. Shartga ko'ra F kuch va S siljish $F=kS$ munosabat orqali bog'langan, bunda k o'zgarmas son. S ni metr bilan F ni kg bilan ifodalaymiz. S=0,01, F=3 bo'lganda 3=K 0,01 bo'ladi. K=300; F=300 S.

$$A = \int_0^{0,2} 300sds = 300\frac{s^2}{2}\Bigg|_0^{0,2} = 6 \text{ kgm}.$$

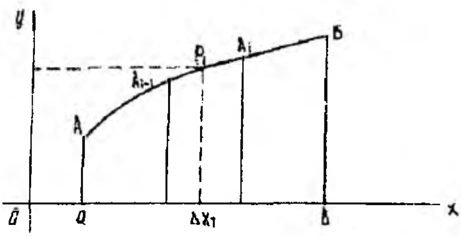
7.6. Egri chiziq va tekis shaklning statik momentlari.

Biror l o'qdan r masofada bo'lgan m massali moddiy nuqtaning l o'qiga nisbatan statik momenti deb, $M_l = mr$ miqdorga aytiladi. Tekislikdagi l o'qdan $r_1, r_2, ..., r_n$ masofada bo'lgan mos ravishda $m_1, m_2, ..., m_n$ massali n ta moddiy nuqtalarning l o'qqa nisbatan statik momenti deb,

$$M_l = \sum_{i=1}^{n} m_i r_i; \qquad (1)$$

miqdorga aytiladi. (1) formuladan ko'rinadiki, statik moment additiv miqdor, ya'ni uni qismlarga ajratib yig'indisini hisoblasak ham miqdor o'zgarmaydi. Shu sababli statik momentni hisoblashda aniq integraldan foydalansa bo'ladi.

a) Egri chiziqning statik momenti.



136-chizma.

Aytaylik, AB moddiy egri chiziq xOy tekisligida $y = f(x)\ (a \le x \le b)$ tenglama bilan berilgan bo'lsin. Egri chiziqning har bir nuqtasidagi chiziqli zichlik $\gamma = \gamma(x)$ning uzluksiz funksiyasi bo'lsin. Berilgan egri chiziqning Ox o'qiga nisbatan statik momenti M_x ni hisoblash uchun uni n ta kichik bo'lakchalarga bo'lamiz: $\Delta l_1, \Delta l_2, .., \Delta l_n$ har bir kichik $\Delta l_i (i = \overline{1,n})$ bo'lakchada ixtiyoriy $P_i(x_i,\ y_i)$ nuqta tanlaymiz (136-chizma). Har bir kichik Δl_i bo'lakchada zichlikni o'zgarmas va uning P_i nuqtadagi qiymatiga teng deb, massasi Δm_i bo'lgan Δl_i bo'lakcha uchun quyidagi taqribiy ifodani yozamiz: $\Delta m_i \approx \gamma(x_i)\Delta l_i$. U holda AB egri chiziqning massasi m uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$m \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\, \Delta x_i\ .$$

Bu tenglikning o'ng tomonida $\gamma(x) \cdot \sqrt{1 + y'^2(x)}$ funksiya uchun integral yig'indi turibdi. Shuning uchun $\max \Delta x_i \to 0$ da limitga o'tib moddiy AB egri chiziq massasining aniq qiymatini hosil qilamiz:

$$m=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n}\gamma(x_i)\Delta l_i=\int_a^b\gamma(x)dl;$$

yoki

$$m=\int_a^b\gamma(x)dl=\int_a^b\gamma(x)\cdot\sqrt{1+y'^2(x)dx}.$$

Endi egri chiziqning statik momentini topamiz. Har bir Δl_i bo'lakchaning massasi Δm_i bo'lgan moddiy P_i nuqta bilan almashtiramiz. Bu P_i nuqtaning Ox o'qiga nisbatan statik momenti Δl_i bo'lakchalarning statik momentining taqribiy qiymatini beradi:

$$\left(M_x\right)_i\approx y_i\ \ \Delta m_i\approx y_i\gamma(x_i)\cdot\Delta l_i.$$

AB egri chiziqning M_x statik momenti Δl_i bo'lakchalarning statik momentlarining yig'indisiga teng bo'lgani sababli M_x uchun quyidagi taqribiy tenglikni yozamiz:

$$M_x\approx\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)y_i\Delta l_i=\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)y_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\Delta x_i;$$

Hosil qilingan tenglikning o'ng tomonida $\gamma(x)y\cdot\sqrt{1+y'^2(x)}$ funksiya uchun integral yig'indi turibdi. $\max\Delta x_i\to 0$ da limitga o'tsak, egri chiziqning Ox o'qiga nisbatan statik momentini hosil qilamiz:

$$M_x=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)y_i\sqrt{1+\left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2}\cdot\Delta x_i;$$

yoki

$$M_x=\int_a^b\gamma(x)\cdot y\cdot\sqrt{1+y'^2}dx.$$

Bu formulani qisqacha quyidagicha yozish mumkin:

$$M_x=\int_a^b\gamma(x)ydl; \tag{2}$$

bu yerda *dl AB* egri chiziqning uzunligi, $dl=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=$ $=\sqrt{1+y'^2}dx\quad a\le x\le b$. Yuqoridagi kabi mulohazalar asosida *AB* egri chiziqning *Oy* o'qiga nisbatan statik momenti

$$M_y=\int_a^b\gamma(x)xdl; \tag{3}$$

bo'lishini ko'rish qiyin emas. Agar moddiy egri chiziq bir jinsli bo'lsa, uning zichligi o'zgarmas son bo'ladi, ya'ni $\gamma(x)=\gamma$ shu sababli statik momentlar uchun (2) va (3) formulalar quyidagi ko'rinishni oladi:

$$M_x=\gamma\int_a^b ydl;\ M_y=\gamma\int_a^b xdl.$$

b) Tekis shaklning statik momenti.

To'g'ri burchakli koordinata sistemasida $y=f(x)$ egri chiziq, Ox o'qi va $x=a$, $x=b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya berilgan bo'lsin. Bu tekis shaklning zichligi har bir nuqtada $\gamma(x)$ bo'lsin (uzluksiz funksiya). Berilgan shaklning *Ox* o'qiga nisbatan M_x statik momentini topish uchun uni *Oy* o'qiga parallel chiziqlar bilan n ta kichik $\Delta s_1,\Delta s_2,...,\Delta s_n$ yuzchalarga bo'lamiz (yuzchalarning kengligi mos ravishda $\Delta x_1,\Delta x_2,...,\Delta x_n$).

Har bir Δs_i yuzchaning zichligi o'zgarmas va u berilgan zichlikning $p_i\left(x_i,\frac{y_i}{2}\right)$ nuqtadagi qiymatiga teng deb hisoblasak, Δs_i yuzchaning massasi uchun quyidagini hosil qilamiz: $\Delta m_i\approx\gamma(x_i)\Delta s_i$ bunda $\Delta s_i\approx y_i\Delta x_i$. U holda egri chiziqli trapetsiyaning massasi m quyidagicha bo'ladi: $m\approx\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)\Delta S_i\approx\sum_{i=1}^{n}\gamma(x_i)y_i\Delta x_i$

Bu yerda tenglikning o'ng tomonida $\gamma(x)$ y² funksiya uchun integral yig'indi mavjud. Shuning uchun $\max\Delta x_i\to 0$ da limitga o'tib, egri chiziqli trapetsiya massasi uchun aniq qiymatini hosil qilamiz:

$$m=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n}\gamma(x_i)\Delta S_i=\lim_{\max\Delta x_i\to 0}\sum_{i=0}^{n}\gamma(x_i)y_ix_i \quad \text{yoki} \quad m=\int_a^b\gamma(x)ydx.$$

Endi egri chiziqli trapetsiyaning statik momentini hisoblashga o'tamiz. Har bir ΔS_i yuzchani massasi Δm_i bo'lgan moddiy $p_i\left(x_i;\frac{y_i}{2}\right)$ nuqta bilan almashtiramiz.

Bu nuqtaning *Ox* o'qiga nisbatan simmetrik statik momenti ΔS_i yuzchaning statik momentining taqribiy qiymatini beradi:

$(M_x)_i\approx\frac{y_i}{2}\Delta m_i\approx\gamma(x_i)\frac{y_i}{2}\Delta S_i\approx\gamma(x_i)\frac{y_i^2}{2}\Delta x_i$. Egri chiziqli trapetsiyaning M_x statik momenti ΔS_i yuzchalarning statik momentlarining yig'indisiga teng bo'lgani uchun quyidagini hosil qilamiz: $M_x \approx \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) \cdot \frac{y_i^2}{2} \Delta x_i$. Bu yerda tenglikning o'ng tomonida $\frac{1}{2}\gamma(x)y^2$ funksiya uchun integral yig'indi mavjud. Shuning uchun $\max \Delta x_i \to 0$ da limitga o'tib egri chiziqli trapetsiyaning Ox o'qiga nisbatan statik momentini hosil qilamiz:

$$M_x = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \gamma(x_i) \cdot \frac{y_i^2}{2} \Delta x_i \quad \text{yoki} \quad M_x = \frac{1}{2}\int_a^b \gamma(x) \cdot y^2. \tag{4}$$

Yuqoridagi kabi fikr yuritib, egri chiziqli trapetsiyaning Oy o'qiga nisbatan statik momentini hisoblash uchun quyidagi:

$$M_y = \int_a^b \gamma(x) x \cdot y dx; \tag{5}$$

formulani hosil qilish mumkin. Agar egri chiziqli trapetsiya bir jinsli bo'lsa, zichlik $\gamma(x) = \gamma$ o'zgarmas son bo'lsa (4) va (5) formulalar tubandagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$M_x = \frac{1}{2}\gamma \int_a^b \cdot y^2 dx \qquad M_y = \gamma \int_a^b \cdot xy dx.$$

Masala. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1$ ellipsninig abssissa o'qi yuqorisidagi yoyining abssissa o'qiga nisbatan statik momenti topilsin.

Yechsh.

$$M_x = \gamma \int_a^b ydl = \gamma \int_a^b y\sqrt{1 + y^2 dx}; \tag{*}$$

formuladan foydalanamiz, bu holda $\gamma = 1$;

$$ydl = y\sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{y^2 + (yy'^2)} dx.$$

Ellips tenglamasidan quyidagilarni topamiz:

$$y = b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}), \quad yy' = -\frac{b^2}{a^2}x \text{ u holda}$$

$$ydl = \sqrt{b^2(1 - \frac{x^2}{a^2}) + \frac{b^4}{a^4}x^2 dx} = \sqrt{\frac{b^2}{a^2}(a^2 - x^2 + \frac{b^2}{a^2}x^2) dx} =$$

$$=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-\frac{a^2-b^2}{a^2}x^2}dx=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}dx;$$

bu yerda e — ellips ekstsentrisiteti:

$$e=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\frac{c}{a};$$

(*) formulaga asosan:

$$M_x=\int_{-a}^{a}ydl=\frac{b}{a}\int_{-a}^{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}dx.$$

Integralni hisoblash uchun quyidagi almashtirishlarni bajaramiz.

$$ex=a\sin t,\quad edx=a\cos t\,dt;$$

$$x=0 \text{ da } t=0;$$

$$x=a \text{ da } t=\arcsin e;$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2-e^2x^2}dx=\frac{2b}{a}\int_0^{\arcsin e}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot\frac{a}{e}\cos tdt=\frac{2ab}{e}(t+\frac{1}{2}\sin 2t\ \Big|_0^{\arcsin e}=$$

$$=\frac{ab}{e}(\arcsin e+e\sqrt{1-e^2})=\frac{ab}{e}\arcsin e+b^2=b(b+\frac{a}{e}\arcsin e).$$

7.7. Og'irlik markazining koordinatalari.

To'g'ri burchakli xOy koordinatalar tekisligida massalari m_1, m_2, .., m_n bo'lgan $P_1(x_1,y_1);P_2(x_2,y_2);...;P_n(x_n,y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi berilgan bo'lsin. x_c va y_c orqali berilgan sistemaning og'irlik markazi koordinatalarni belgilaymiz. $x_i m_i$; $y_i m_i$ ko'paytmalar m_i massaning Ox va Oy o'qlarga nisbatan olingan statik momentlari deyiladi. Bu holda moddiy sistema markazining koordinatalari

$$x_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}; \tag{1}$$

$$y_c=\frac{\sum_{i=1}^{n}y_i m_i}{\sum_{i=1}^{n}m_i}; \tag{2}$$

formulalar bilan aniqlanishi mexanikadan ma'lum. Bu formuladan turli shakl va jismlarning og'irlik markazlarini topishda foydalanamiz.

a) tekislikdagi chiziqning og'irlik markazi.

AB egri chiziq $y=f(x)$ tenglama bilan berilgan $(a \le x \le b)$ va bu egri chiziq moddiy chiziq bo'lsin. Bu moddiy egri chiziqning chiziqli zichligi γ deb faraz qilamiz. Chiziqni uzunliklari $\Delta S_1, \Delta S_2, ..., \Delta S_n$ bo'lgan n ta bo'lakka bo'lamiz. Bu bo'laklarning massalari ularning uzunliklari bilan zichlik ko'paytmasiga teng. $\Delta m_i = \gamma \Delta S_i$; ΔS_i yoyning har bir bo'lagida abssissasi ξ_i bo'lgan ixtiyoriy nuqta olamiz.

Endi ΔS_i yoyning har bir bo'lagini massasi $\gamma \Delta S_i$; bo'lgan $P_i[\xi_i; f(\xi_i)]$ moddiy nuqta deb qarab (1) va (2) formulada x_i o'rniga ξ_i qiymatni y_i o'rniga $f(\xi_i)$ qiymatni m_i o'rniga (ΔS bo'laklar massasi) $\gamma \Delta S_i$ qiymatni qo'ysak, yoyning og'irlik markazini aniqlash uchun taqribiy formulalar hosil qilamiz:

$$x_c \approx \frac{\sum \xi_i \gamma \, \Delta S_i}{\sum \gamma \, \Delta S_i}; \qquad y_c \approx \frac{\sum f(\xi_i) \gamma \, \Delta S_i}{\sum \gamma \, \Delta S_i}.$$

Agar $y=f(x)$ uzluksiz funksiya bo'lsa va uzluksiz hosilaga ega bo'lsa, u holda har bir kasrning suratidagi va maxrajidagi yig'indilar $\max \Delta S_i \to 0$ mos integral yig'indilarining limitiga teng bo'lgan limitlarga ega bo'ladi. Yoy og'irlik markazining koordinatalari tubandagi aniq integrallar bilan ifodalanadi.

$$x_c = \frac{\int_a^b x\,ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}; \quad y_c = \frac{\int_a^b f(x)\,ds}{\int_a^b ds} = \frac{\int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx}{\int_a^b \sqrt{1+f'^2(x)}\,dx};$$

1-misol. *Ox* o'qning yuqorisiga joylashgan yarim aylana $x^2+y^2=R^2$; $(-R \le x \le R)$ og'irlik markazining koordinatalari topilsin.

$$y=\sqrt{R^2-x^2}; \ \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{R^2-x^2}}; ds = \sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx;$$

$$y_c = \frac{\int_{-R}^{R} \sqrt{R^2-x^2} \cdot \frac{R}{\sqrt{R^2-x^2}}\,dx}{\pi a} = \frac{R\int_{-R}^{R} dx}{\pi a} = \frac{2R^2}{\pi R} = \frac{2R}{\pi}.$$

Yarim aylana Ox o'qiga nisbatan simmetrik bo'lgani uchun $x_c = 0$,;

b) Tekis shaklning og'irlik markazi.

Berilgan shakl $y=f_1(x)$, $y=f_2(x)$, $x=a$, $x=b$ chiziqlar bilan chegaralangan bo'lib, moddiy tekis shakldan iborat bo'lsin, sirt zichligini, ya'ni sirt birlik yuzining massasi shaklning hamma bo'laklari uchun o'zgarmas va δ ga teng deb hisoblaymiz.

Berilgan shaklni $x = x_i = a + \frac{b-a}{n} i \ (i = 0, 1, ..., n)$ to'g'ri chiziqlar bilan kengligi $\Delta x_1, \Delta x_2, ..., \Delta x_n$ bo'lgan polosalarga ajratamiz.

Har bir polosa massasi polosa yuzi bilan zichlik ko'paytmasiga teng bo'ladi. Agar har bir polosaning asosi Δx_i va balandligi $f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)$ bo'lgan (bunda $\xi_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$) to'g'ri to'rtburchak bilan almashtirsak, u holda polosaning massasi taqriban $\Delta m_i = \delta\left[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)\right]\Delta x_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ teng bo'ladi.

Bu polosaning og'irlik markazi taxminan tegishli to'g'ri to'rtburchakning markazida bo'lsa, $(x_i)_c = \xi_i \quad (y_i)_c = \frac{f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)}{2}$ bo'ladi.

Endi har bir polosaning massasi tegishli polosaning massasiga teng bo'lgan va polosaning og'irlik markaziga to'plangan nuqta bilan almashtirib,butun shakl og'irlik markazi koordinatalarini hisoblash uchun taqribiy formulani olamiz:

$$x_c = \frac{\sum \xi_i \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i};$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\sum [f_2(\xi_i) + f_1(\xi_i)] \cdot \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}{\sum \delta[f_2(\xi_i) - f_1(\xi_i)]\Delta x_i}.$$

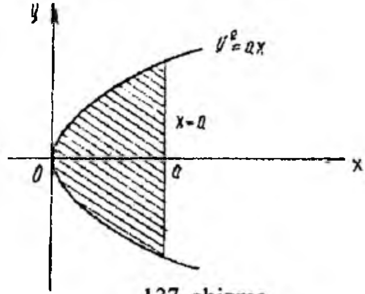
$\Delta x_i \to 0$ da limitga o'tib, berilgan shakl og'irlik markazining koordinatalarini topamiz:

$$x_c = \frac{\int_a^b x[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx};$$

$$y_c = \frac{\frac{1}{2}\int_a^b [f_2(x) + f_1(x)] \cdot \delta[f_2(x) - f_1(x)]dx}{\int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx}.$$

Bu formulalar har qanday bir jinsli tekis shakllar uchun o‘rinli bo‘ladi.

Misol. $y^2=2px$ parabolaning $x=a$ to‘g‘ri chiziq bilan kesishishidan hosil bo‘lgan segment og‘irlik markazining koordinatalari aniqlansin (137-chizma).



137-chizma.

Yechish. Berilgan holda:

$$f_2(x)=\sqrt{2px};\ f_1(x)=-\sqrt{2px};$$

$$x_c=\frac{2\int\limits_0^a x\sqrt{2px}\,dx}{2\int\limits_0^a \sqrt{2px}\,dx}=\frac{2\sqrt{2p}\,\frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}}\Big|_0^a}{2\sqrt{2p}\,\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\Big|_0^a}=\frac{\frac{2}{5}a^2\sqrt{a}}{\frac{2}{3}a\sqrt{a}}=\frac{3}{5}a;$$

$y_c=0$ (chunki segment (Ox) o‘qqa nisbatan simmetrik).

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. $y=f(x)$ egri chiziq Ox o‘qi, $x=a$ va $x=b$ $(a<b)$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan tekis shakl yuzi qanday hisoblanadi?
2. Egri chiziq tenglamalari parametrik ko‘rinishda berilgan tekis shaklning yuzi Dekart koordinatalarda qanday hisoblanadi?
3. Qutb koordinatalar sistemasida egri chiziq bilan chegaralangan egri chiziqli sektorning yuzini hisoblash formulasini yozing.
4. Tekis egri chiziq yoy uzunligini Dekart koordinatalar sistemasida hisoblash formulasini yozing.
5. Aylanish jismining hajmini hisoblash formulasini keltirib chiqaring.
6. Aylanish jismining sirtini hisoblash formulasini keltirib chiqaring.
7. Egri chiziqning koordinata o‘qlariga nisbatan statik momentini hisoblash formulasini yozing.
8. Egri chiziqli trapetsiyaning abssissa o‘qiga nisbatan statik momentini hisoblash formulasini yozing.
9. Tekislikda moddiy nuqtalar sistemasining og‘irlik markazi koordinatalarini hisoblash formulasini yozing.

VIII BOB
DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

1-§. Differensial tenglama tushunchasi va uning xossalari. Ba'zi bir birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechish metodlari

1.1. Differensial tenglamaga olib keluvchi masalalar.

Atrofimizda sodir bo'layotgan ko'pgina hodisalar va jarayonlar hodisa yoki jarayonni tavsiflaydigan noma'lum funksiya va uning hosilasi qatnashgan tenglamalar orqali ifodalanadi.

Bu tenglamadan noma'lum funksiyani topish masalasi qo'yiladi. Misollar keltiramiz.

1-masala. Massasi m bo'lgan jism biror balandlikdan yerga tashlab yuborilgan. Bu jismning tushish tezligi ϑ qanday qonun bilan o'zgaradi? $\vartheta=\vartheta(t)$ munosabatni topish talab qilinadi.

Yechish. Nyutonning ikkinchi qonuniga ko'ra.

$$ma=F; \qquad (*)$$

bu yerda m — jism massasi; a — jism tezlanishi; F — ta'sir etuvchi kuch. Bunda ikki hol bo'lishi mumkin:

a) jismga havoning qarshiligi hisobga olinmagan hol;

Jismga havoning qarshiligi hisobga olinmasa, jism faqat og'irlik kuchi ta'sirida harakatlanadi, ya'ni $F=mg$ ga teng bo'ladi.

U holda (*) dan quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz.

$$m\frac{d\vartheta}{dt}=mg \text{ yoki } \frac{d\vartheta}{dt}=g; \qquad (**)$$

(**) — tezlikga nisbatan birinchi tartibli differensial tenglama.

b) jismga havoning tezligiga proportsional bo'lgan qarshilik kuchi ta'sir etgan hol.

Bunda $F_{qarshilik}=\rho\vartheta$ bo'ladi. Bu yerda — ρ proportsionallik koeffitsienti, ϑ — jismning tezligi.

Bu holda jismga $F = mg - F_{qarshilik}$ *kuch ta'sir etadi. U holda (*) dan:*

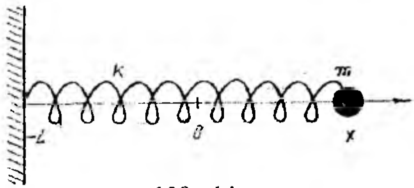
$$m\frac{d\vartheta}{dt} = mg - \rho\vartheta;$$

yoki

$$\frac{d\vartheta}{dt} = g - \frac{\rho}{m}\vartheta \quad (***) \text{ ga ega bo‘lamiz.}$$

Biz yana birinchi tartibli differensial tenglamaga ega bo‘ldik.

2-masala. Massasi m ga teng bo‘lgan yukni k bikirlikka ega prujinadagi to‘g‘ri chiziqli tebranma harakatidagi holati x (uning koordinatasi x ga bog‘liq, boshqacha aytganda $x = x(t)$), ya'ni $x = x(t)$ funksiya aniqlansin.



138-chizma.

Yechish. Prujina erkin (cho‘zilmasdan turgan) holatdagi yukning turgan nuqtasini koordinata boshi 0 deb belgilab olamiz (138-chizma). U holda prujina cho‘zilganda uzunligi l bo‘lsa, prujinaning mahkamlangan ikkinchi uchining koordinatasi l bo‘ladi. Shunday qilib yukning koordinatasi son jihatidan prujina uzunligining o‘zgarishiga teng bo‘ladi. Prujinaning uncha katta bo‘lmagan cho‘zilishida prujinaning yukga ta'sir kuchi Guk qonuniga ko‘ra tubandagicha ifodalanadi:

$$F = -kx;$$

bu yerda "–" ishorasini olinishiga sabab, kuch yo‘nalishi prujinaning cho‘zilishi (qisilishi) yo‘nalishiga qarama-qarshi, tezlik ta'rifiga ko‘ra:

$$\vartheta = \frac{dx}{dt}.$$

Bu holat uchun Nyutonning ikkinchi qonuniga ko‘ra tubandagi tenglamani yoza olamiz:

$$F = ma\,; \quad a = \frac{d^2x}{dt^2}; \quad m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \quad \text{yoki} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0\,;$$

bu esa ikkinchi tartibli differensial tenglama.

1.2. Differensial tenglamaning ta'rifi va uning umumiy yechimi.

1-ta'rif. Erkli o‘zgaruvchi x, noma'lum funksiya $y = f(x)$ va uning $y', y'', ..., y^{(n)}$ hosilalari qatnashgan tenglamaga differensial tenglama deyiladi.

Differensial tenglama simvolik ravishda tubandagicha yoziladi:

$$F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0;$$

yoki

$$F\left(x, y \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, ..., \frac{d^{(n)}y}{dx^n}\right) = 0.$$

Agar izlangan funksiya $y = f(x)$ bitta erkli o'zgaruvchining funksiyasi bo'lsa, u holda differensial tenglama oddiy deyiladi. Agar izlangan funksiya $y = f(x)$ ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

2-ta'rif. Differensial tenglamaning tartibi deb, tenglamaga kirgan hosilaning eng yuqori tartibiga aytiladi.

$y' - 5xy^2 + y + 3 = 0 -$ birinchi darajali,

$y'' + ky' - sy - \cos x = 0$ – ikkinchi darajali differensial tenglama.

3-ta'rif. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb differensial tenglamaga $y, y', y''...$ larning o'rniga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Misol. $\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$ differensial tenglamaning yechimlari $y = \sin x$ va $y = \cos x$ funksiyalari bo'ladi.

Bularni tenglamaga qo'yamiz. $y' = \cos x$; $y'' = -\sin x$; $-\sin x + \sin x = 0$ xuddi shuningdek, $y' = -\sin x$; $y'' = -\cos x$; $-\cos x + \cos x = 0$.

1.3. Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Ushbu $F(x, y, y') = 0$ tenglama birinchi tartibli differensial tenglama deyiladi.

Agar uni y' ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa uni $y' = f(x, y)$ ko'rinishda yozish mumkin. Bu holda differensial tenglama hosilaga nisbatan yechilgan deyiladi.

Differensial tenglamaning yechimiga oldingi mavzuda ta'rif berdik. Ammo, misollardan ko'rinadiki, differensial tenglamaning yechimi bitta funksiya bo'lmasdan funksiyalarning bir butun to'plami bo'lishi mumkin. Shuning uchun umumiy yechim to'g'risida so'z yuritamiz.

Teorema. Agar $y' = f(x, y)$ tenglamada $y = f(x)$ funksiya va undan y bo'yicha olingan $\frac{df'}{dy}$ xususiy hosila xOy tekislikdagi nuqtani o'z ichiga oluvchi biror sohada uzluksiz funksiyalar bo'lsa,u holda berilgan tenglamaning $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ shartni qanoatlantiruvchi birgina yechimi mavjuddir. $x = x_0$ bo'lganda y funksiya berilgan x_0 songa teng bo'lishi kerak degan shart boshlang'ich shart deyiladi. Bu shart ko'pincha $y_{x=x_0} = y_0$ ko'rinishda yoziladi.

1-ta'rif. $y' = f(x,y)$ tenglamaning boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Koshi masalasi deyiladi.

2-ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb qo'yilgan shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x,c)$ funksiyaga aytiladi: bunda $-c$ ixtiyoriy o'zgarmas son.

a) bu funksiya c o'zgarmas miqdorning har qanday konkret qiymatida ham differensial tenglamani qanoatlantiradi;

b) $x = x_0$ bo'lganda $y = y_0$ boshlang'ich shart har qanday bo'lganda ham, ixtiyoriy o'zgarmas c ning shunday c_0 qiymatini topish mumkinki $y = \varphi(x,c)$ funksiya boshlang'ich shartni qanoatlanlantiradi, ya'ni $y_0 = \varphi(x_0, c_0)$.

Biz differensial tenglamaning umumiy yechimini izlashda ko'pincha y ga nisbatan yechilmagan $F(x,y,c) = 0$ ko'rinishidagi munosabatga duch kelamiz.

Umumiy yechimni oshkormas holda ifodalovchi $F(x,y,c) = 0$ ko'rinishidagi tenglik differensial tenglamaning umumiy integrali deyiladi.

3-ta'rif. Ixtiyoriy c o'zgarmas miqdorga ma'lum $c = c_0$ qiymat berish natijasida $y = \varphi(x, c_0)$ umumiy yechimdan hosil bo'ladigan har qanday funksiya xususiy yechim deb ataladi. Bu holda $F(x,y,c_0) = 0$ munosabat tenglamaning xususiy integrali deyiladi.

Umumiy integral geometrik nuqtayi nazardan koordinatalar tekisligida bir ixtiyoriy o'zgarmas c miqdorga bog'liq bo'lgan egri chiziqlar oilasini ifodalaydi. Bu egri chiziqlar berilgan differensial tenglamaning integral egri chiziqlari deyiladi. Xususiy integralga bu oilaning tekislikda berilgan biror nuqta orqali o'tuvchi bitta egri chizig'i mos keladi.

Tenglamaning yechimi deb, faqat tenglamani qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, c_0)$ funksiyanigina tushunmasdan, balki unga mos integral egri chiziqni ham tushunish kerak.

Differensial tenglamalarni yechishning yagona usuli mavjud bo'lmaganligidan differensial tenglamalarning ayrim turlarini va ularning yechimlarini topish usullarini qaraymiz.

1.4. O'zgaruvchilari ajralgan va ajraladigan tenglamalar.

1. Eng sodda birinchi tartibli differensial tenglama quyidagi ko'rinishda bo'lib, bunga o'zgaruvchalari ajralgan differensial tenglama deyiladi.

$$Mdx + Ndy = 0. \tag{1}$$

Bu tenglamaning umumiy integralini hadlab integrallash orqali topamiz: $\int Mdx + \int Ndy = c.$

Misol. $xdx + ydy = 0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin.

Yechish. $xdx + ydy = 0$ tenglama o'zgaruvchilari ajralgan birinchi tartibli differensial tenglama. Uni integrallab, umumiy integralni topamiz:

$\int xdx + \int ydy = 0$; $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = \overline{c}$; $2\overline{c} = c^2$ deb belgilab, $x^2 + y^2 = c^2$ ga ega bo'lamiz.

Bu markazi koordinatalar boshida, radiusi c ga teng bo'lgan konsentrik aylanalar oilasidan iborat.

2.

$$M_1(x) \times N_1(y)dx + M_2(x) \times N_2(y)dy = 0; \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x) \times f_2(y); \tag{3}$$

ko'rinishidagi tenglamalar ham o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamalar deyiladi.

(2) tenglamani $M_1(x) \cdot N_1(y) \neq 0$ ga bo'lib, uni o'zgaruvchilari ajralgan tenglamaga keltiramiz.

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)} dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)} dy = 0.$$

Buni integrallab, umumiy integralni topamiz. (3)–ko'rinishidagi tenglamani o'ziga xos tomoni, tenglamaning o'ng tomoni har biri bitta x yoki y o'zgaruvchiga bog'liq bo'lgan ko'paytuvchilarga ajralgan.

(3) – tenglamani quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$dy = f_1(x) \times f_2(y)dx;$$

bundan $f_2(x) \neq 0$ deb quyidagi ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lamiz.

$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$. Bu ifodani integrallab, umumiy integralini topamiz.

$$\int \frac{1}{f_2(y)} dy = \int f_1(x)dx + c.$$

Misol. $y' = xy^2$ tenglamaning umumiy integrali topilsin.

Yechish. y' ni $\dfrac{dy}{dx}$ ga almashtiramiz;

$\dfrac{dy}{dx} = xy^2$; bundan $dy = xy^2 dx$ $y \neq 0$ deb quyidagini hosil qilamiz;

$\dfrac{dy}{y^2} = xdx$; buni integrallaymiz;

$\displaystyle\int \frac{dy}{y^2} = \int xdx;$ $-\dfrac{1}{y} = \dfrac{x^2}{2} + c$ bundan

$y = -\dfrac{2}{x^2} + 2c;$ $2c_1$ ni c deb belgilasak, umumiy integral quyidagi ko'rinishni oladi.

$$y = -\frac{2}{x^2} + c.$$

1.5. Birinchi tartibli bir jinsli tenglamalar.

1-ta'rif. Agar μ ning har qanday qiymatida $f(\mu x, \mu y) = \mu^n f(x, y)$ ayniyat to'g'ri bo'lsa, $f(x, y)$ funksiya x va y o'zgaruvchilarga nisbatan $n-$o'lchovli bir jinsli funksiya deb ataladi.

1-misol. $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$ funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiya

$$f(\mu x, \mu y) = \sqrt{(\mu x)^2 - (\mu y)^2} = \mu\sqrt{x^2 - y^2} = \mu f(x, y).$$

2-misol. $f(x, y) = x^2 \cdot y^2 - y^4$ funksiya to'rt o'lchovli bir jinsli funksiya

$$f(\mu x, \mu y) = (\mu x)^2 (\mu y)^2 - (\mu x)^4 = \mu^4 (x^2 y^2 - y^4).$$

3-misol. $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ funksiya nol o'lchovli bir jinsli funksiya.

2-ta'rif. Agar birinchi tartibli differensial tenglamada ya'ni

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y); \tag{4}$$

da $f(x, y)$ funksiya x va y ga nisbatan nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, (4) o'zgaruvchilarga nisbatan bir jinsli tenglama deyiladi.

Bir jinsli tenglamani yechish.

Agar tenglamaning o'ng tomonida $f(x, y)$ funksiya nol o'lchovli bir jinsli funksiya bo'lsa, unda $\mu=\frac{1}{x}$ desak $f(x,y)=f(1,\frac{y}{x})$ ga ega bo'lamiz. Bu holda (4) tenglama

$$\frac{dy}{dx}=f(1,\frac{y}{x}); \qquad (4')$$

ko'rinishda bo'ladi.

O'zgaruvchilarni almashtiramiz. $z=\frac{y}{x}$ yoki $y=zx$, u holda,

$$\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dx}x;$$

Hosilaning ifodasini $(4')$ ga qo'ysak o'zgaruvchilarga ajraladigan $z+x\frac{dz}{dx}=f(1,z)$ tenglama hosil bo'ladi. O'zgaruvchilarni ajratib yozamiz:

$$x\frac{dz}{dx}=f(1,z)-z \quad \text{yoki} \quad \frac{dz}{f(1,z)-z}=\frac{dx}{x}.$$

Buni integrallaymiz.

$$\int\frac{dz}{f(1,z)-z}=\int\frac{dx}{x}+c \quad \text{yoki} \quad \ln|x|=\int\frac{dz}{f(1,z)-z}+c.$$

Integrallagandan keyin z o'rniga $\frac{y}{x}$ nisbatni qo'ysak $(4')$ tenglamaning umumiy integrali hosil bo'ladi.

Misol: $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{x^2+y^2}$ tenglamani umumiy integralini toping.

Yechish. $y=zx$ almashtirishni bajaramiz.

$\frac{dy}{dx}=z+\frac{dz}{dx}x$, buni yuqoridagi tenglamaga qo'yamiz. U holda tenglama

$$-\frac{(1-z^2)dz}{z^3}=\frac{dx}{x};$$

yoki

$$\left(-\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z}\right)dz=\frac{dx}{x};$$

ko'rinishga keladi.

Tenglamani integrallaymiz

$$\frac{1}{2z^2}+\ln|z|=\ln|x|+\ln|c|.$$

Z ni o‘rniga $z=\frac{y}{x}$ ni qo‘yib, berilgan tenglamani umumiy echimini topamiz.

$$\frac{x^2}{2y^2}=\ln\left|\frac{cx^2}{y}\right|.$$

1.6. Bir jinsli tenglamaga keltiriladigan tenglamalar

Quyidagi

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}; \tag{5}$$

ko‘rinishdagi tenglama bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Agar $c=c_1=0$ bo‘lsa, (5) tenglama bir jinsli tenglama. Endi c va c_1 (yoki bulardan bittasi) noldan farqli bo‘lsin.

O‘zgaruvchilarni almashtiramiz. $x=x_1+h,\ y=y_1+k$ u holda

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy_1}{dx_1}; \tag{6}$$

x, y va $\frac{dy}{dx}$ larning ifodalarini (5) tenglamaga qo‘ysak

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1+ah+bk+c}{a_1x_1+b_1y_1+a_1h+b_1k+c_1}; \tag{7}$$

h va k ni

$$\begin{cases} ah+bk+c=0; \\ a_1h+b_1k+c_1=0; \end{cases} \tag{8}$$

tenglamalar o‘rinli bo‘ladigan qilib tanlaymiz. Bu shartda (3) tenglama

$$\frac{dy_1}{dx_1}=\frac{ax_1+by_1}{a_1x_1+b_1y_1};$$

bir jinsli tenglamaga aylanadi.

Bu tenglamani yechib, so‘ngra (6) formulaga ko‘ra x va y larga o‘tsak (5) tenglamaning yechimini hosil qilamiz.

Agar $ab_1-a_1b=0$ bo‘lsa (8) sistemani yechimi yo‘q. Ammo bu holda $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}$, ya’ni $a_1=\mu a;\ b_1=\mu b$ desak (5)–tenglama:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(ax+by)+c}{\mu(ax+by)+c_1}; \tag{9}$$

ko‘rinishga keladi.

Bundan:

$$z = ax + by; \tag{10}$$

almashtirish yordamida tenglama o'zgaruvchilarga ajraladigan tenglamaga keltiriladi, ya'ni:

$$\frac{dz}{dx} = a + b\frac{dy}{dx}; \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{b}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b}; \tag{11}$$

(9) tenglamaga (10) va (11) ifodalarni qo'ysak:

$$\frac{1}{b}\cdot\frac{dz}{dx} - \frac{a}{b} = \frac{z+c}{\lambda z + c_1};$$

tenglamani hosil qilamiz.

Bu esa o'zgaruvchilarga ajraladigan tenglama (5) ni integrallashga o'xshash holda tubandagi tenglamani integrallaymiz.

$$\frac{dy}{dx} = b\left|\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right|.$$

Misol. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+y-3}{x-2y-4}$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Yechish. Buni bir jinsli tenglamaga keltirish uchun o'zgaruvchilarni almashtiramiz. $x = x_1 + h;\ y = y_1 + k.$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x_1 + y_1 + 2h + k - 3}{x_1 - 2y_1 + h - 2k - 4} \quad \begin{cases} 2h + k - 3 = 0 \\ h - 2k - 4 = 0 \end{cases} \quad h = 2, \quad k = -1.$$

$$\frac{dy_1}{dx_1} = \frac{2x_1 + y_1}{x_1 - 2y_1}; \quad u = \frac{y_1}{x_1}; \quad y_1 = ux_1; \quad \frac{1-2u}{2(1+u^2)}du = \frac{dx_1}{x_1};$$

$$\frac{1}{2}arctgu - \frac{1}{2}\ln\left|1+u^2\right| = \ln(x_1) + \ln|c|; \quad \mathrm{arctg}\,u = 2\ln\left|cx_1\sqrt{1+u^2}\right|$$

$$cx_1\sqrt{1+u^2} = e^{\frac{1}{2}arctgu};$$

bu yerda u o'rniga $\dfrac{y_1}{x_1}$ ni qo'yib:

$$c\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = e^{\frac{1}{2}arctg\frac{y_1}{x_1}};$$

ni hosil qilamiz.

Nihoyat x va y o'zgaruvchilarga o'tib, natijada

$c\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = e^{\frac{1}{2}arctg\frac{y+1}{x-2}}$ umumiy integralni hosil qilamiz.

1.7. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.

Ta'rif. Noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli bo'lgan quyidagi tenglamaga birinchi tartibli chiziqli tenglama deyiladi.

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x); \tag{12}$$

bunda $P(x)$ va $Q(x)$ lar x ning berilgan uzluksiz funksiyalari (yoki o'zgarmas sonlar). (12) chiziqli tenglamaning yechimini ikki funksiya ko'paytmasi shaklida izlaymiz. $y=u(x)\,\vartheta(x)$;

$$y'=(u\times\vartheta)'=u'\vartheta+u\vartheta'; \tag{13}$$

yoki

$$y'=\frac{du}{dx}\vartheta+\frac{d\vartheta}{dx}u;$$

buni (12) ga qo'yamiz.

$$\vartheta\frac{du}{dx}+\frac{d\vartheta}{dx}u+pu\vartheta=Q;$$

yoki

$$u(\frac{d\vartheta}{dx}+p\vartheta)+\vartheta\frac{du}{dx}=Q; \tag{14}$$

Endi ϑ ni shunday tanlaymizki,

$$\frac{d\vartheta}{dx}+p\vartheta=0; \tag{15}$$

tenglama o'rinli bo'lsin.

$$\frac{d\vartheta}{\vartheta}=-\rho dx;$$

$$-\ln|c_1|+\ln|\vartheta|=-\int pdx;$$

yoki

$$\vartheta=c_1e^{-\int pdx}.$$

(15) tenglamaning noldan farqli biror yechimini topish yetarlik bo'lgani uchun

$$\vartheta(x)=e^{-\int pdx}; \tag{16}$$

deb olamiz.

Bu topilgan ϑ ni qiymatini (14) ga qo'yib hosil bo'lgan tenglamani yechamiz:

$$\frac{d\vartheta}{dx}+p\vartheta=0\,;\ \vartheta(x)\frac{du}{dx}=Q(x);\quad \frac{du}{dx}=\frac{Q(x)}{\vartheta(x)}\,;$$

tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglamani yechamiz: $u=\int\frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx+c$; u va ϑ ni qiymatini (13) ga qo‘ysak

$$y=\vartheta(x)\left[\int\frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx+c\right]\ \text{yoki}\ \ y=\vartheta(x)\int\frac{Q(x)}{\vartheta(x)}dx+c\vartheta(x); \qquad (17)$$

hosil bo‘ladi. Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi.

Misol. $y'+yx=\sin x$ tenglamani eching.

Yechish. Berilgan tenglama chiziqli. Bu tenglamani yechish uchun, yechimni $y=u\cdot v$ ko‘rinishda izlaymiz. Agar $y=u\cdot v$ bo‘lsa, u holda $y'=u'v+uv'$ bo‘lib berilgan tenglama quyidagi ko‘rinishni oladi.

$$u'v+uv'+uvx=\sin x\ \ \text{yoki}\ \ (u'+ux)v+uv'=\sin x. \qquad \text{(a)}$$

Bu erda u funksiyani

$$u'+ux=0; \qquad \text{(b)}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladigan qilib tanlaymiz. U holda (a) tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$uv'=\sin x; \qquad \text{(d)}$$

(b) tenglamani echamiz.

$$\frac{du}{dx}=-ux;\qquad \frac{du}{u}=-xdx;$$

$$\int\frac{du}{u}=-xdx;\quad \ln u=-\frac{x^2}{2};$$

$$u=e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

(bu yechim $c=0$ bo‘lgan holga mos xususiy yechim hisoblanadi) $u=e^{-\frac{x^2}{2}}$ ni (d) tenglamaga olib borib qo‘ysak $e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{dv}{dx}=\sin x$ ga ega bo‘ladi.

Bundan esa $dv=e^{\frac{x^2}{2}}\sin xdx$, $v=c+\int e^{\frac{x^2}{2}}\sin xdx.$

Demak $y=uv=e^{-\frac{x^2}{2}}\left(\int e^{\frac{x^2}{2}}\sin xdx+c\right)=ce^{-\frac{x^2}{2}}+e^{-\frac{x^2}{2}}\int e^{\frac{x^2}{2}}\sin xdx.$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Qanday tenglama differensial tenglama deyiladi?
2. Differensial tenglama tartibi deganda nimani tushunasiz?
3. Differensial tenglamani umumiy va xususiy yechimlari deb qanday yechimlarga aytiladi?
4. Birinchi tartibli differensial tenglama yechimi mavjudligi va yagonaligi to'g'risidagi teoremani ifodalang.
5. Umumiy va xususiy yechimlarni geometrik nuqtayi nazardan talqin qilib bering.
6. Birinchi tartibli differensial tenglamalarni yechish usullarini ko'rsating:

a) o'zgaruvchilarga ajralgan va ajraladigan tenglamalar uchun;

b) chiziqli tenglamalar uchun;

d) bir jinsli tenglamalar uchun.

2-§. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

2.1. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarni yechish metodlari. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama uchun Koshi masalasi.

Tubandagi ko'rinishdagi tenglamaga ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deyiladi.

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = f(x). \qquad (1)$$

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani birinchi tartibli differensial tenglamani umumiy yechimini ko'rsatgandek, umumiy yechimini ko'rsatib bo'lmaydi. Shuning uchun ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani tatbiq uchun zarur hisoblangan xususiy hollarini ko'rib o'tamiz. Jumladan, o'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani qaraymiz. Uning umumiy ko'rinishi tubandagicha:

$$y'' + Py' + qy = f(x); \qquad (2)$$

bu yerda p, q—lar o'zgarmas kattaliklar.

Agar $f(x) \neq 0$ bo'lsa (2) tenglama ikkinchi tartibli bir jinslimas chiziqli differensial tenglama deyiladi.

Agar $f(x) = 0$ bo'lsa, bir jinsli chiziqli tenglama deyiladi.

$$y'' + Py' + qy = 0; \qquad (3)$$

(2) va (3) differensial tenglamalarni yechishni o'rganishdan oldin chiziqli bog'liq hamda chiziqli bog'liq bo'lmagan (erkli) funksiyalar tushunchasi bilan tanishamiz.

$y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada berilgan bo'lsin. Agar shunday o'zgarmas α_1 va α_2 sonlar uchun (ulardan hech bo'lmaganda bittasi noldan farqli).

$$\alpha_1 y_1(x) + \alpha_2 y_2(x) = 0; \tag{4}$$
ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u holda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘liq funksiyalar deyiladi.

Agar (4) ayniyat faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo‘lganda o‘rinli bo‘lsa, u holda $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘lmagan erkli funksiyalar deyiladi.

Boshqacha aytganda, ikkita $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar $\frac{y_1(x)}{y_2(x)} \neq \alpha;$ ya’ni ularning nisbati o‘zgarmas songa teng bo‘lmaganda chiziqli erkli bo‘ladi.

Misol. $y_1(x) = \sin x$, $y_2(x) = \cos x$ funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar bo‘ladi, chunki $\alpha_1 \cdot \sin x + \alpha_2 \cdot \cos x = 0$ ayniyat faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi.

Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar chiziqli erkli funksiyalar bo‘lsa, ulardan hech biri aynan nolga teng bo‘lmaydi.

Endi (2) va (3) differensial tenglamalarni yechish bilan shugullanamiz. Dastlab:
$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0; \tag{3}$$
ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli differensial tenglamani qaraymiz.

1-teorema. Agar $y_1(x)$ va $y_2(x)$ funksiyalar (3) tenglamaning chiziqli erkli xususiy yechimlari bo‘lsa,u holda (3) tenglamaning umumiy yechimi
$$y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{4}$$
bo‘ladi, bunda c_1, c_2 – ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.

Isboti. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ (3) tenglamaning xususiy yechimlari bo‘lsa, u holda bu funksiyalar (3) tenglamani qanoatlantiradi.
$$\begin{aligned} &y_1''(x) + P(x) \cdot y_1'(x) + q(x) \cdot y_1(x) = 0. \\ &y_2''(x) + P(x) \cdot y_2'(x) + q(x) \cdot y_2(x) = 0. \end{aligned} \tag{5}$$

Tubandagi $c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$ funksiya ham (3) tenglamaning yechimi bo‘ladi. Haqiqatan ham, bu funksiya hamda uning hosilalari:
$$y_1'(x) = \left[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right]' = c_1 y_1'(x) + c_2 y_2'(x);$$
$$y_1''(x) = \left[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right]'' = c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x);$$ Bular va (3) dan:
$$c_1 y_1''(x) + c_2 y_2''(x) + P(x)\left[c_1 y'_1(x) + c_2 y'_2(x)\right]' + q(x)\left[c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)\right] =$$

$$=c_1y_1''(x)+P(x)c_1y_1'(x)+q(x)c_1y_1(x)+c_2y_2''(x)+P(x)c_2y_2'(x)+q(x)c_2y_2(x)=$$
$$=c_1\left[y_1''(x)+P(x)y_1'(x)+q(x)y_1(x)\right]+c_2\left[y_2''(x)+P(x)y_2'(x)+q(x)y_2(x)\right];$$
ga ega bo'lamiz, (5) munosabatga asosan,

$$\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]''+P(x)\cdot\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]'+q(x)\left[c_1y_1(x)+c_2y_2(x)\right]=0;$$
bo'ladi.

Bu esa $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ ning (3) tenglamaning yechimi ekanini bildiradi. Demak, $y(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)$ yechim berilgan:

$$y''+P(x)y'+q(x)y=0,$$
tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi. Ikkinchi tartibli

$$y''+P(x)y'+q(x)y=f(x), \tag{6}$$
tenglamaning umumiy yechimi haqida ushbu teorema o'rinli.

2-teorema. (6) tenglamaning umumiy yechimi, shu tenglama xususiy yechimi bilan (3) tenglamaning umumiy yechimi yig'indisiga teng bo'ladi.

$$y_{umum}=y_{um.birjins}+\overline{y};$$

bu yerda $\overline{y}$ — (6) tenglamaning xususiy yechimi $y''+P(x)y'+q(x)y=f(x)$ tenglamani $y_{x=x_0}=y_0$, $y'(x_0)=\vartheta_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini izlash masalasi Koshi masalasi deyiladi.

2.2. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglamalar.

Ikkinchi tartibli bir jinsli chiziqli tenglama

$$y''+Py'+qy=0; \tag{7}$$
berilgan bo'lsin, bunda P va q o'zgarmas haqiqiy sonlar.

Oldingi temadagi isbot qilingan teoremaga asosan, bu tenglamaning umumiy integralini topish uchun uning ikkita chiziqli erkli xususiy yechimini topamiz.

Xususiy yechimlarini

$$y=e^{kx} \tag{8}$$
(bunda $k=const$) ko'rinishida izlaymiz, bu holda $y'=ke^{kx}, y''=k^2e^{kx}$.

Bularni (7) tenglamaga qo'ysak, tenglama $e^{kx}(k^2+pk+q)=0$ ko'rinishni oladi. Ammo $e^{kx}\neq 0$ bo'lgani uchun

$$k^2+pk+q=0. \tag{9}$$

Demak, k (9) tenglamani qanoatlantirsa, u holda e^{kx} (7) tenglamaning yechimi bo'ladi. (9) tenglama (7) tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Xarakteristik tenglama ikkita ildizi bo'lgan kvadrat tenglamadir, bu ildizlarni k_1 va k_2 bilan belgilaymiz.

$$k_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ ; \quad k_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}\ ;$$

Bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin:

a) k_1 va k_2 – haqiqiy bir-biriga teng bo'lmagan sonlar ($k_1 \neq k_2$);

b) k_1 va k_2 – kompleks sonlar;

d) k_1 va k_2 – haqiqiy va bir-biriga teng sonlar ($k_1 = k_2$).

Bu hollarni ayrim-ayrim qaraymiz.

a) xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil ($k_1 \neq k_2$) bo'lgan hol:

Bu holda $y_1 = e^{k_1 x}$; $y_2 = e^{k_2 x}$; funksiyalar xususiy yechimlar bo'ladi.

Bu yechimlar $\frac{y_2}{y_1} = \frac{e^{k_2 x}}{e^{k_1 x}} = e^{(k_2 - k_1)x} \neq const$ bo'lgani uchun chiziqli erkli bo'ladi.

Demak, umumiy integral

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x} \tag{10}$$

ko'rinishda bo'ladi.

Misol. $y'' + 3y' + 2y = 0$ tenglamaning umumiy integrali topilsin. Tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzib ildizlarini topamiz.

$k^2 + 3k + 2 = 0$ $k_1 = -2$, $k_2 = -1$. Ildizlar haqiqiy har xil demak, umumiy integral

$$y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{-x}$$

b) xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks, qo'shma

$$k_1 = \alpha + i\beta; \quad k_2 = \alpha - i\beta.$$

Bu yerda

$$\alpha = -\frac{p}{2}; \qquad \beta = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}\ ;$$

Xususiy yechimlarni quyidagi shaklda yozish mumkin:

$$y_1 = e^{k_1 x} = e^{(\alpha + i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{i\beta x};$$

$$y_2 = e^{k_2 x} = e^{(\alpha - i\beta)x} = e^{\alpha x} \cdot e^{-i\beta x}.$$

Bu ifodaga ushbu $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Eyler formulasini tadbiq qilib, uni quyidagicha yozamiz:

$$y_1=e^{\alpha x}\cos\beta x+ie^{\alpha x}\sin\beta x;\quad y_2=e^{\alpha x}\cos\beta x-ie^{\alpha x}\sin\beta x;$$

Ma'lumki, bir jinsli tenglama yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi ham tenglamaning yechimi bo'ladi. Shuning uchun quyidagi

$$\overline{y}_1=\frac{y_1+y_2}{2}=e^{\alpha x}\cos\beta x;\quad \overline{y}_2=\frac{y_1-y_2}{2}=e^{\alpha x}\sin\beta x;$$

funksiyalar ham tenglamaning yechimlari bo'ladi. Ular chiziqli erkli, chunki

$$\frac{\overline{y}_1}{\overline{y}_2}=ctg\beta x\neq const.$$

Demak, $\overline{y}_1,\overline{y}_2$ funksiyalar (7) tenglamaning yechimlarining fundamental sistemasini tashkil etadi. Shunday qilib, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi

$$y=e^{\alpha x}(c_1\cdot\cos\beta x+c_2\cdot\sin\beta x);\tag{11}$$

berilgan tenglamaning umumiy yechimini beradi.

Misol. Ushbu $y''+4y'+5y=0$ tenglamani umumiy yechimini toping.

Yechish. $y''+4y'+5y=0$ differensial tenglama uchun xarakteristik tenglama $k^2+4k+5=0$ bo'ladi.

Uning ildizlari $k_1=-2-i;\ k_2=-2+i;\ \alpha=-2;\ \beta=1$.

Yechimlarning fundamental sistemasi: $y_1=e^{-2x}\cdot\cos x;\ y_2=e^{-2x}\sin x$

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y_1=e^{-2x}(c_1\cdot\cos x+c_2\cdot\sin x);$$

(11) yechimning muhim xususiy holi xarakteristik tenglama ildizlarining sof mavhum sonlardan iborat bo'lgan holidir.

Bu (7) tenglama $p=0$ bo'lgan holda o'rinli.

$$y''+qy=0;\tag{12}$$

xarakteristik tenglamasini tuzamiz.

$$k^2+q=0;\quad q>0;$$

$k_{1,2}=\pm i\sqrt{q}=\pm\beta$, $\alpha=0$ bo'lsa (11) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$y=c_1\cdot\cos\beta x+c_2\cdot\sin\beta x.\tag{13}$$

d) xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va teng (karrali)

$k_1=k_2=-\dfrac{p}{2}$; *bitta xususiy yechim* $y_1=e^{k_1x}$ *yuqoridagi mulohazalar asosida hosil qilinadi.*

e^{k_2x} funksiya ikkinchi xususiy yechim sifatida qaralishi mumkin emas, chunki $e^{k_2x}=e^{k_1x}$.

Shunday xususiy yechim topish kerakki, u birinchi yechim $y_1=e^{k_1x}$ bilan chiziqli erkli bo'lsin. Ikkinchi yechim $y_2=xe^{k_1x}$ funksiya bo'lishi mumkinligini ko'rsataylik.

u y_1 bilan chiziqli erkli, chunki $\frac{y_1}{y_2}=\frac{xe^{k_1x}}{e^{k_1x}}=x\neq const$.

Endi $y=xe^{k_1x}$ funksiya (7) tenglamani qanoatlantirishini tekshirish qoldi. Uni ikki marta differensiallaymiz:

$$y_2'=e^{k_1x}(1+k_1x);\quad y_2''=e^{k_1x}(k_1^2x+2k_1);$$

y_2, y_2', y_2'' *–larni berilgan (7) tenglamaga qo'yamiz:*

$$e^{k_1x}\left[(k_1^2x+2k_1)+p(1+k_1x)+qx\right]=0.$$

Qo'shiluvchilarni qayta guruhlaymiz va $e^{k_1x}\neq 0$ qisqartiramiz:

$$x(k_1^2+pk_1+q)+(2k_1+p)=0; \tag{14}$$

k_1 – xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lgani uchun birinchi qavs aynan nolga teng, ya'ni

$$k_1^2x+pk_1+q=0;$$

k_1 –karrali ildiz, ya'ni $k_1=k_2=-\frac{p}{2}$ yoki $2k_1=-p$ bo'lgani uchun (14) dagi ikkinchi qavs ham aynan nolga teng, ya'ni $2k_1+p=0$.

Demak, $y_2=xe^{k_2x}$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'ladi va $y_1=e^{k_1x}$ bilan chiziqli erkli. Shunday qilib, $y_1=e^{k_1x}$ va $y_2=xe^{k_2x}$ yechimlar (7) tenglama yechimlarining fundamental sistemasini tashkil etadi.

Demak, bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasini tashkil etadi.

$$y=c_1y_1+c_2y_2=e^{k_1x}(c_1+c_2x); \tag{15}$$

(1) tenglamaning umumiy yechimini beradi.

Misol. Ushbu $y''+4y'+4y=0$ tenglamaning umumiy integrali topilsin. Berilgan tenglamaning xarakteristik tenglamasini tuzamiz. Xarakteristik tenglama $k^2+4k+4=0$ ko'rinishda bo'ladi. Uning ildizlari: $k_1=k_2=-2$.

Fundamental yechimlar sistemasi $y_1 = e^{-2x}$ va $y_2 = xe^{-2x}$;

Differensial tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y = e^{-2x}(c_1 + c_2 x).$$

2.3. Bir jinslimas tenglamani kvazi ko‘phad hol uchun xususiy yechimi.

Bizga oldingi 2.1-mavzudagi 2-teoremadan ma’lumki,

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = f(x); \tag{16}$$

bir jinslimas tenglamaning yechimi (16) tenglamaga mos

$$y'' + P(x)y' + q(x)y = 0; \tag{17}$$

bir jinsli tenglama umumiy yechimi bilan bir jinslimas tenglamaning bitta xususiy yechimi yig‘indisidan iborat. Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topishni ko‘rib o‘tdik. (16) tenglamaning xususiy yechimini topishni qaraymiz.

Biz differensial tenglamani texnikada ko‘p qo‘llaniladigan ya’ni o‘ng tomoni kvazi ko‘phad bo‘lgan bir jinslimas tenglamani xususiy yechimini topishni ko‘ramiz.

Aytaylik, $f(x) = P_n(x)e^{\gamma x}$ bo‘lsin. Bu holda (16) tenglamaning xususiy yechimini quyidagi uchta ko‘rinishdan biri shaklida izlaymiz:

a) agar γ xarakteristik tenglama ildizlari k_1 va k_2 larni bittasiga ham teng bo‘lmasa,xususiy yechim $y_1(x) = Q_m(x)ye^{\gamma x}$ ko‘rinishda izlanadi; bu yerda $Q_m(x)$ – noma’lum koeffitsientli m – tartibli ko‘phad.

b) agar γ xarakteristik tenglama ildizlari k_1 va k_2 lardan biriga teng bo‘lsa, u holda yechimni $y_1(x) = xQ_m(x)ye^{\gamma x}$ ko‘rinishda izlaymiz.

d) agar γ xarakteristik tenglamaning karrali ildizi k ga teng bo‘lsa, u holda yechimni $y_1(x) = x^2 Q_m(x)ye^{\gamma x}$ ko‘rinishda izlaymiz;

Bularga misollar keltirib, $Q_m(x)$ ko‘phadni noma’lum koeffitsientlarini topishni ko‘rsatamiz.

1-misol. $y'' + 5y' - 6y = 13$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. $k^2 + 5k - 6 = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = -6; k_2 = 1$. Bu holda bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $y = c_1 e^x + c_2 e^{-6x}$ bo‘ladi. Berilgan bir jinslimas tenglamani o‘ng tomonini nol ko‘rsatkichli kvazi ko‘phad deb qarash mumkin, ya’ni $R_0(x)\, e^{ox} = 13e^{ox} = 13$.

Shu sababli xususiy yechimni $\overline{y}(x) = Q_0(x) = A_0$ ko‘rinishda izlaymiz. A_0 -noma’lum koeffitsient. Bu yechimni berilgan tenglamaga qo‘yamiz:

$$-6A_0 = 13.$$

Bundan $A_0 = -\frac{13}{6}$. Shunday qilib, berilgan tenglamani umumiy yechimi $y=y+\bar{y}$ ya'ni $y=c_1e^{x}+c_2e^{-6x}-\frac{13}{6}$ bo'ladi.

2-misol. $y''-y'-2y=14x^2-3x+1$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Dastlab berilgan tenglamaga mos bir jinsli $y''-y'-2y=0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2-k-2=0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1=-1$ va $k_2=2$ bo'lgani uchun umumiy yechim

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x} \quad \text{bo'ladi.}$$

Berilgan tenglamaning o'ng tomoni ikkinchi darajali ko'phad bo'lgani uchun, uning xususiy yechimini ikkinchi darajali ko'phad shaklida izlaymiz, ya'ni

$$\bar{y}=Ax^2+Bx+C.$$

Bu ifodani differensiallab quyidagilarni topamiz va berilgan tenglamaga qo'yamiz. $\bar{y}'=2Ax+B;\ \bar{y}''=2A;$

$2A-2Ax-B-2Ax^2-2Bx-2C=14x^2-3x+1.$

yoki $-2Ax^2-(2A+2B)x+(2A-B-2C)=14x^2-3x+1.$

Bundan A,B,C koeffitsientlarni topish uchun tubandagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{aligned} -2A&=14;\\ -(2A+2B)&=-3;\\ 2A-B-2C&=1. \end{aligned}$$

Bu sistemani yechsak: $A=-7;\ B=\frac{-17}{2};\ C=-3\frac{1}{4}$.

Demak, $\bar{y}=-7x^2-\frac{17}{2}x-3\frac{1}{4}$.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi quyidagicha bo'ladi.

$$y=c_1e^{-x}+c_2e^{2x}-7x^2-\frac{17}{2}x-3\frac{1}{2}.$$

3-misol. $y''+y'=3x^2-5$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Dastlab berilgan tenglamaga mos bir jinsli $y''+y'=0$ tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2+k=0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1=0$ va $k_2=-1$ bo'lgani uchun umumiy yechim $y=c_1+c_2e^{-x}$ ko'rinishda bo'ladi.

Berilgan tenglamaning o'ng tomoni ikkinchi darajali ko'phad. Xarakteristik tenglamani bitta ildizi nol bo'lganligi sababli bir jinslimas tenglamaning xususiy yechimini $\bar{y}=x(Ax^2+Bx+C)$ ko'rinishda izlaymiz.

Bu ifodani differensiallab berilgan tenglamaga qo'yamiz:

$$\bar{y}' = 3Ax^2 + 2Bx + C, \quad \bar{y}'' = 6Ax + 2B;$$

$$6Ax + 2B + 3Ax^2 + 2Bx + C = 3x^2 - 5;$$

yoki

$$3Ax^2 + (6A + 2B)x + (2B + C) = 3x^2 - 5.$$

x o'zgaruvchining bir xil ko'rsatkichlari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib quyidagi sistemaga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} 3A = 3; \\ 6A + 2B = 0; \\ 2B + C = -5. \end{cases}$$

Sistemani yechib A, B, C larni topamiz. $A=1$, $B=-3$, $C=1$; shunday qilib xususiy yechim $\bar{y} = x(x^2 - 3x + 1)$ ko'rinishda bo'ladi.

Berilgan tenglamaning umumiy yechimi $y = c_1 + c_2 e^{-x} + x(x^2 - 3x + 1)$.

4-misol. $y'' - 5y' - 6y = 7e^{3x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Dastlab $y'' - 5y' - 6y = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2 - 5k - 6 = 0$ xarakteristik tenglamaning ildizlari $k_1 = -1$ va $k_2 = 6$ bo'lganligi sababli uning umumiy yechimi $y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{6x}$ bo'ladi.

Berilgan bir jinslimas tenglamani o'ng tomoni ko'rsatkichli funksiya $\gamma = 3$ ga teng bo'lib, xarakteristik tenglama ildizlarini bittasi ham unga teng emas. Shuning uchun uni $\bar{y} = Ae^{3x}$ ko'rinishda izlaymiz. Bu ifodani differensiallab, y, y', y'' larni berilgan tenglamaga qo'yib A koeffitsientni hisoblaymiz:

$$9Ae^{3x} - 15Ae^{3x} - 6Ae^{3x} = 7Ae^{3x}; \ -12A = 7; \ A = -\frac{7}{12}.$$

Bundan xususiy yechim $\bar{y} = -\frac{7}{12}e^{3x}$ ga teng. Berilgan tenglamaning umumiy yechimi esa tubandagi ko'rinishida bo'ladi:

$$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{6x} - \frac{7}{12}e^{3x}.$$

5-misol. $y'' - y' - 2y = 9e^{2x}$ tenglamaning umumiy yechimini toping.

Yechish. Dastlab $y'' - y' - 2y = 0$ bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz. $k^2 - k - 2 = 0$ xarakteristik tenglama $k_1 = -1$ va $k_2 = 2$ ildizlarga ega. U holda umumiy yechim $y = c_1 e^{-x} + c_1 e^{2x}$ bo'ladi.

Berilgan tenglamani o'ng tomoni ko'rsatkichli funksiya. Bu holda $\gamma = 2$ ko'rsatkich xarakteristik tenglamani bitta ildiziga teng. Shu sababli xususiy yechimni $\bar{y} = Ae^{2x}$ ko'rinishda izlaymiz. Bu ifodani ikki marta differensiallaymiz:

$\bar{y}' = Ae^{2x} + 2Ae^{2x}$; $\bar{y}'' = 2Ae^{2x} + 2Ae^{2x} + 4Axe^{2x}$;

$\bar{y}, \bar{y}'\ \bar{y}''$ larni berilgan tenglamaga qo'yib A koeffitsientni aniqlaymiz.

$4Ae^{2x} + 4Axe^{2x} - Ae^{2x} - 2Axe^{2x} - 2Axe^{2x} = 9e^{2x}$ $3A=9$; $A=3$.

Xususiy yechim $\bar{y} = 3xe^{2x}$. Berilgan tenglamani umumiy yechimi $y = c_1 e^{-x} + c_1 e^{2x} + 3xe^{2x}$ ga teng.

6-misol. $y'' - 7y' + 10y = 4e^{3x}$ tenglamani $y(0)=2$; $y'(0)=13$; boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimi topilsin.

Yechish. $y'' - 7y' + 10y = 4e^{3x}$ tenglamani umumiy yechimi quyidagi ko'rinishda:

$$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{5x} - 2e^{3x}. \qquad (*)$$

Boshlang'ich shartlardan foydalanib c_1 va c_2 ixtiyoriy o'zgarmaslarni qiymatlarini topamiz. Umumiy yechimni differensiallaymiz:

$$y' = 2c_1 e^{2x} + 5c_2 e^{5x} - 6e^{3x}; \qquad (**)$$

(*) tenglamaga $x=0$ va $y=2$ larni qo'yamiz:

$2 = c_1 e^{2\cdot 0} + c_2 e^{5\cdot 0} - 2e^{3\cdot 0} = c_1 + c_2 - 2c_1 + c_2 = 4$ ga ega bo'lamiz.

(**) ga $x=0$ va $y'=13$ ni qo'yamiz. $13 = 2c_1 e^{2\cdot 0} + 5c_2 e^{5\cdot 0} - 6e^{3\cdot 0} = 2c_1 + 5c_2 - 6$;

$2c_1 + 5c_2 = 19$; c_1 va c_2 larni topish uchun tubandagi sistemani tuzamiz:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 4 \\ 2c_1 + 5c_2 = 19 \end{cases}$$

sistemani yechib s_1 va s_2 larni topamiz:

$$c_1 = \frac{1}{3}; \quad c_2 = \frac{11}{3}.$$

Demak, boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechim quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan:

$$y = \frac{1}{3} e^{2x} + \frac{11}{3} e^{5x} - 2e^{3x}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasi nimadan iborat?
2. Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun boshlang'ich shartni geometrik ma'nosi nimadan iborat?
3. Ikkinchi tartibli differensial tenglamaga ta'rif bering.
4. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish usulini tushuntirib bering.
5. O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli bir jinsli differensial tenglama umumiy yechimining uning xarakteristik tenglamasi ildizlariga bog'liq bo'lgan hollari formulalarini yozing.

IX BOB
EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

1-§. Tasodifiy hodisalar. Hodisaning ehtimoli

1.1. Tasodifiy hodisalar va ular ustida amallar.

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalarning qonuniyatlarini o'rganuvchi fandir.

Ma'lum shartlar to'plami (majmuasi) bajarilganda ro'y berishi (kelib chiqishi) yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lgan har qanday hodisa (voqea) tasodifiy hodisa deb ataladi. Shartlar to'plamini har gal amalga oshirilishi sinov (yoki tajriba) deyiladi.

Masalan, agar tajriba detal tayyorlashdan iborat bo'lsa, detalning standartga mos kelishi – hodisadir; agar tajriba tangani tashlashdan iborat bo'lsa, uning gerbli tomonining tushishi – hodisadir; agar tajriba o'yin soqqasini (yoqlariga 1 dan 6 gacha raqamlar yozilgan kubik) tashlashdan iborat bo'lsa, u holda to'rtlik tushishi – hodisadir.

Hodisalar alfavitning bosh harflari bilan belgilanadi: ya'ni $A, B, C, \ldots$

A hodisaning nisbiy chastotasi yoki chastotasi deb, berilgan hodisaning ro'y berish soni m ning berilgan hodisa har birida ro'y berish yoki ro'y bermasligi mumkin bo'lgan bir xil sharoitda o'tkazilgan tajribalarning umumiy n soniga nisbatiga aytiladi va $P^*(A)$ bilan belgilanadi.

$$P^*(A) = \frac{m}{n}.$$

Kuzatishlar, tajribalar ko'p marta takrorlanganda tasodifiy hodisaning $P^*(A)$ chastotasi barqaror ekanini ko'rsatadi. Masalan, tanga tashlash bir xil sharoitda 3 seriyada amalga oshirilgan. Birinchi seriya 6(oltita) tashlashdan iborat bo'lib, unda tanganing gerbli tomoni tushishi 4 marta sodir bo'lgan. Ikkinchi seriya 250 tashlashdan iborat bo'lib, unda gerbli tomoni tushishi 139 ta marta sodir bo'lgan. Uchinchi seriya

302 tashlashdan iborat bo'lib, unda gerbli tomoni tushishi 155 marta sodir bo'lgan. A hodisa tanganing gerbli tomoni tushishi. Seriyalarda tanganing gerbli tomoni tushishi nisbiy chastotasi quyidagicha bo'ladi.

$$\text{I} - \text{seriyada } P^*(A) = 0{,}66;$$
$$\text{II} - \text{seriyada } P^*(A) = 0{,}55;$$
$$\text{III} - \text{seriyada } P^*(A) = 0{,}51.$$

Bundan ko'rinadiki, seriyalarda tashlash soni qancha katta bo'lsa, tushish chastotasi barqaror bo'lib, 0,5 sonidan kam farq qiladi. Tajribalarning ko'rsatishicha chastotaning 0,5 sonidan bu chetlanishi sinovlar sonining ortishi bilan kamayadi. Ko'pgina hollarda shunday P son mavjudki, A hodisaning ro'y berishining nisbiy chastotasi, juda kam uchraydigan hollardan tashqari, sinovlar soni katta bo'lganda shu P sonidan kam farq qiladi. Bu son hodisaning ehtimoli deyiladi.

Hodisaning ehtimoli qanchalik katta bo'lsa, uning ro'y berishi shunchalik mumkin bo'ladi. P hodisaning ehtimolini $P(A)$ bilan belgilaymiz (bu inglizcha probability so'zidan olingan bo'lib, «ehtimol» degan ma'noni beradi). Tajribalar soni n cheksiz oshib borganda A hodisaning nisbiy chastotasi, shu hodisaning ro'y berish ehtimoli P ga yaqinlashadi.

1.2. Hodisalar yig'indisi, ko'paytmasi.

A va B hodisalar yig'indisi deb, A yoki B hodisalardan kamida bittasi ro'y beradigan $A+B$ hodisaga aytiladi.

A va B hodisalar ko'paytmasi deb, A va B hodisalar bir tajribada bir vaqtda yuz beradigan AB hodisaga aytiladi. Masalan, ikkita o'yin soqqasi tashlanadi. Birinchi soqqa tashlanganda 6 sonining chiqishi A hodisa, ikkinchi soqqa tashlanganda 6 sonining chiqishi B hodisa bo'lsin. U holda $A+B$ hodisa ikkita soqqa tashlanganda uning kamida bittasida 6 sonining chiqishini ifodalaydi. AB — hodisa esa ikkala soqqada ham 6 sonini chiqish hodisasidir.

1.3. Muqarrar, mumkin bo'lmagan, teng ehtimolli, birgalikda bo'lmagan hodisalar.

Tajriba natijasida biror shartlar to'plami bajarilganda, albatta, ro'y beradigan hodisa muqarrar hodisa deyiladi. Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng va u E bilan belgilanadi. Tajriba natijasida shartlar to'plami bajarilganda mutlaqo ro'y bermaydigan hodisa mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi. Bu hodisani ehtimoli nolga teng va 0 bilan belgilaymiz.

Tajribaning har bir natijasini ifodalovchi hodisa elementar hodisa deb ataladi. Elementar hodisalarga ajratish mumkin bo'lgan hodisa murakkab hodisa deyiladi. Agar bir necha hodisalardan istalgan birini tajriba natijasida ro'y berishi boshqalariga qaraganda kattaroq imkoniyatga ega deyishga asos bo'lmasa, bunday hodisalar teng imkoniyatli hodisalar deyiladi. Masalan, soqqa (yoqlari 1 dan 6 gacha turli sonlar yozilgan bir jinsli qub) tashlanganda uning yuqori yog'ida $\ell(1 \le \ell \le 6)$ sonning paydo bo'lishi tasodifiy hodisasini qaraylik. Soqqamiz simmetrik bo'lgani uchun 1 dan 6 gacha bo'lgan sonlarning istalgan birining kelib chiqishi hodisalarining ro'y berishi—bir xil imkoniyatli hodisalar deyiladi.

Tashlash soni n katta bo'lganda ℓ—sonini—1 dan 6 gacha har qanday sonlarning har birini ham soqqaning yuqori yog'ida paydo bo'lishi taqriban $\frac{n}{6}$ holda ko'rish mumkin. Bu tajriba bilan tasdiqlangan. Nisbiy chastota soni $P^* = \frac{1}{6}$ ga yaqin bo'ladi. Shuning uchun ℓ— sonining, shuningdek, 1 dan 6 gacha har qanday boshqa sonning ham yuqori yoqda paydo bo'lish ehtimoli $\frac{1}{6}$ ga teng deb hisoblanadi.

Agar A va B hodisalar bir paytda ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisalar bo'lsa, ular birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi. Masalan, tangani tashlaganda bir vaqtda gerbli va raqamli tomonlarini tushish hodisalari birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'ladi.

A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning ro'y bermasligidan iborat $\bar{A}$ hodisaga aytiladi. A va $\bar{A}$ hodisalar birgalikda bo'lmasligi o'z-o'zidan ravshan.

Agar tajribada tasodifiy hodisalarning istalgan birining ro'y berishi mumkin bo'lib, bu hodisa bilan birgalikda emas, biror boshqa hodisaning ro'y berishi mumkin bo'lmasa, bu holda tasodifiy hodisalar to'liq gruppasini tashkil qiladi deb ataymiz. Teng imkoniyatli birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini qaraylik. Bunday hodisalarni hollar (yoki imkonlar) deb ataymiz. Bunday gruppaning hodisasi, agar uning ro'y berishi natijasida A hodisaning ro'y berishi kelib chiqadigan bo'lsa, A hodisaning ro'y berishiga qulaylik tug'diruvchi hodisalar deb ataladi.

Masalan, qutida 8 ta shar bo'lib ularning har biriga bittadan 1 dan 8 gacha bo'lgan raqam yozilgan. 1,2,3,4 raqamli sharlar qizil, qolgan sharlar esa qora rangda. 1 raqamli sharning paydo bo'lishi (shuningdek, 2, 3 va 4 raqamli sharning paydo bo'lishi ham) qizil sharning paydo bo'lishiga qulaylik tug'diruvchi hodisadir. Qaralayotgan hol uchun ehtimolga boshqacha ta'rif berish mumkin.

Ta'rif. A hodisaning ehtimolli deb, A hodisaga qulaylik tug'diruvchi hollar m sonining teng imkoniyatli, birgalikda bo'lmagan hodisalar to'liq gruppasini tashkil qiluvchi barcha mumkin bo'lgan hollar n soniga nisbatiga aytiladi va simvolik ravishda quyidagicha yoziladi:

$$P(A) = P = \frac{m}{n}. \tag{1}$$

Bu ta'rif ehtimolning klassik ta'rifi deb ham yuritiladi. Ehtimolning ta'rifidan uning ushbu $0 \le P \le 1$ munosabatni qanoatlantirishi kelib chiqadi.

1-misol. Qutida 36 ta olma bo'lib, undan bitta olma olindi. 36 ta olmadan 9 tasi qizil olma. Qizil olmaning kelib chiqish ehtimolini toping.

Yechish. Agar qulaylik tug'diruvchi hollar soni $m=9$ bo'lsa, u holda qizil olma olib chiqish ehtimoli

$$P = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} \text{ ga teng.}$$

2-misol. Otishmada birinchi to'pdan nishonga tegish ehtimoli $\frac{8}{10}$ ga, ikkinchi to'pdan nishonga tegish ehtimoli esa $\frac{7}{10}$ ga teng. Ikkala to'pdan bir vaqtda o'q uzganda nishonga tegishi ehtimolini toping. (To'pdan o'q uzganda hech bo'lmaganda bitta o'qning nishonga tegishi, nishonning shikastlanganligi hisoblanadi.)

Yechish. Ehtimollar nazariyasining ko'pgina masalalarini yechish «Qutilar sxemasi» masalasiga keltiriladi. Shuning uchun qutidan shar olish masalasiga umumlashgan masala deb qaraladi. Berilgan masala ham quyidagicha modellashtiriladi.

Ikki qutida 10 tadan shar bo'lib, ular 1 dan 10 gacha nomerlangan. Birinchi quti ichida 8 ta qizil va ikkita qora shar bo'lib, ikkinchida esa 7 ta qizil va uchta qora shar bor.

Har bir qutidan bittadan shar olinadi. Olingan ikkita shar ichida kamida bittasi qizil shar bo'lishi ehtimoli qanday?

Birinchi qutida har bir shar ikkinchi qutidagi ixtiyoriy shar bilan birga olinishi mumkin bo'lgani uchun barcha hollar soni 100 ta, ya'ni $n = 100$. Qulaylik tug'diruvchi hollarni hisoblaymiz. Ikkinchi qutidagi ixtiyoriy shar bilan birgalikda birinchi qutidagi 8 ta qizil sharni ixtiyoriy olganda, olingan sharlar ichida eng kamida bitta qizil shar bo'ladi. Bunday hollar $10 \times 8 = 80$ ta.

Birinchi qutidan ikkita qora sharning har birini ikkinchi qutidagi 7 ta qizil sharning har biri bilan birgalikda olinganda olingan sharlar orasida bitta qizil shar bo'ladi. Bunday imkonlar $2 \times 7 = 14$ ga teng. Shunday qilib, hammasi bo'lib qulaylik tug'diruvchi hollar $m = 80 + 14 = 94$ ta. Olingan sharlar orasida kamida bitta qizil shar bo'lish ehtimoli $P = \frac{m}{n} = \frac{94}{100}$ ga teng.

Nishonga shikast yetkazish ehtimoli ham shunga teng.

1.4. Hodisa ehtimolining geometrik ta'rifi.

Faraz qilaylik, tekislikda biror D soha berilgan bo'lsin. D soha boshqa biror G sohani o'z ichiga olgan bo'lsin, ya'ni $G \subset D$.

D sohaga tavakkaliga biror nuqta tashlansin. Bu nuqtaning G sohaga tushish ehtimolini qaraymiz. Bunda barcha elementar hodisalar D sohadan iborat. D – cheksiz to'plam. Bunda biz klassik ta'rifdan foydalanamiz. D sohaga tashlangan nuqta sohaning istalgan qismiga tushishi mumkin. Bu nuqtaning G sohaga tushish ehtimoli G sohaning o'lchoviga (uzunligi, hajmi) proporsional bo'lib, G ning shakliga, uning D sohaning qaerda joylashishiga bog'liq bo'lmasin. Soha o'lchamini mes orqali belgilasak, tavakkaliga tashlangan nuqtaning G sohaga tushish ehtimolligi

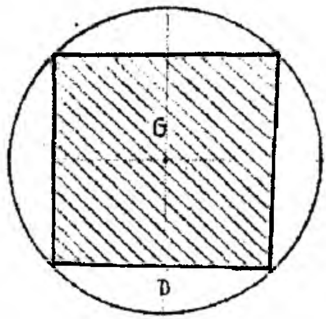
$$P = \frac{mesG}{mesD} \text{ ga teng bo'ladi.}$$

1-misol. R radiusli doiraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Tashlangan A nuqtaning doiraga ichki chizilgan kvadrat ichiga tushishi ehtimolligini toping.

Yechish. $S(G)$ – kvadratning yuzi, $S(D)$ – doiraning yuzi bo'lsin (139-chizma). A – nuqtaning kvatdratga tushish hodisasi. U holda

$$P(A) = \frac{S(G)}{S(D)} = \frac{2R^2}{\pi R^2} = \frac{2}{\pi} \approx 0,636;$$

$$P(A) = 0,636.$$



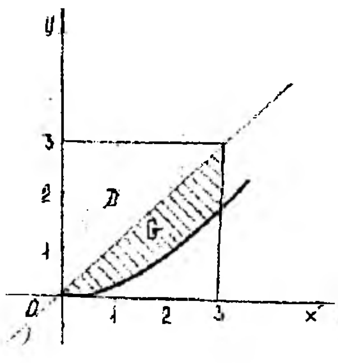
139-chizma.

2-misol. $[0;3]$ kesmada tavakkaliga ikkita x va y sonlari tanlangan. Bu sonlar $x^2 \leq 6y \leq 6x$ tengsizlikni qanoatlantirishi ehtimolligini toping.

Yechish. (x, y) nuqtaning koordinatalari:

$$\begin{cases} 0 \leq x \leq 3 \\ 0 \leq y \leq 3 \end{cases}$$

tengsiziklar sistemasini qanoatlantiradi. Bu – (x, y) nuqta tomoni 3 ga teng kvadrat nuqtalari to'plamidan tavakkaliga tanlanishini bildiradi. Bizni qiziqtirayotgan A hodisa tanlanadigan (x, y) nuqta shtrixlangan figuraga tegishli bo'lgan holda ro'y beradi (140-chizma). Bu figura koordinatalari $x^2 \leq 6y \leq 6x$ tengsizlikni qanoatlantiradigan



140-chizma.

nuqtalarning to‘plami izlanayotgan ehtimollik shtrixlangan figura yuzining kvadrat yuziga nisbatiga teng, ya’ni

$$P(A)=\frac{\int_0^3\left(x-\frac{1}{6}x^2\right)dx}{9}=\frac{\left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{6}\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^3}{9}=\frac{\frac{9}{2}-\frac{27}{18}}{9}=\frac{\frac{54}{18}}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}.$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ehtimol nima?
2. Hodisa ehtimolining klassik ta’rifini keltiring.
3. Muqarrar, mumkin bo‘lmagan, teng ehtimolli hodisalar deganda nimani tushunasiz?
4. Hodisalar yig‘indisi va ko‘paytmasining ta’rifmi keltiring.
5. Birgalikda va birgalikda bo‘lmagan hodisalarni misollar yordamida tushuntiring.
6. *A* hodisaga qarama-qarshi hodisa deganda nimani tushunasiz?
7. Hodisa ehtimolining geometrik ta’rifini misollar yordamida tushuntirib bering.

2-§. Ehtimollar nazariyasining asosiy teoremasi

2.1. Ehtimollarni qo‘shish teoremasi.

Ta’rif. A va B hodisalar yig‘indisi deb bu hodisalardan kamida bittasining ro‘y berishidan iborat bo‘lgan C hodisaga aytiladi. Biz birgalikda bo‘lmagan A va B hodisalar yig‘indisining ehtimolini qaraymiz. $P(A)$ va $P(B)$ mos ravishda ularning ehtimollari bo‘lsin.

1-teorema. Ikkita birgalikda bo‘lmagan A va B hodisalar yig‘indisining ehtimoli shu hodisalar ehtimollarining yig‘indisiga teng:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Isboti: Hodisa ehtimolining klassik ta’rifiga ko‘ra, aytaylik, tajribalar natijasi n ta elementar hodisalar bo‘lib, bulardan m_1 tasi A hodisaga, m_2 tasi esa B hodisani ro‘y berishiga qulaylik tug‘dirsin. U holda

$$P(A)=\frac{m_1}{n};\qquad P(B)=\frac{m_2}{n}; \tag{1}$$

bo‘ladi.

Teorema shartiga ko‘ra A va B hodisalar birgalikda emas. Shunga ko‘ra yo A hodisa, yoki B hodisa ro‘y berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar soni m_1+m_2 ga teng.

Demak $A+B$ hodisaning ehtimoli $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}$ bo‘ladi.

Agar $P(A+B)=\frac{m_1+m_2}{n}=\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}$ bo‘lsa, u holda (1) ga asosan tubandagiga ega bo‘lamiz.

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Natija. A hodisaga qarama-qarshi $\overline{A}$ hodisaning ehtimoli

$$P(\overline{A})=1-P(A). \qquad (2)$$

ga teng.

1-misol. Qutida 25 ta shar bor. Ulardan 8 tasi qizil, 6 tasi oq, 11 tasi sariq. Tavakkaliga olingan sharni rangli shar bo‘lish ehtimolini toping. (Rangli shar chiqishi deganda yo qizil shar yoki sariq shar chiqishi tushuniladi).

Yechish. Qizil shar chiqish hodisasini A, sariq shar chiqish hodisasini B bilan belgilaylik. U holda ehtimolning klassik ta’rifiga asosan $P(A)=\frac{8}{25}$; $P(B)=\frac{11}{25}$; bo‘ladi. $A+B$ hodisa rangli shar chiqishi hodisasi A va B hodisalar birgalikda emas. Shuning uchun 1-teoremaga ko‘ra

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Demak, izlangan ehtimol: $P(A+B)=\frac{8}{25}+\frac{11}{25}=\frac{19}{25}$.

2-teorema. Juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar uchun

$$P(A_1+A_2+\ldots+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)$$

munosabat o‘rinli.

Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar, hodisalarning to‘la gruppasini tashkil qilsa, u holda $P(A_1)+P(A_2)+\ldots+P(A_n)=1$ bo‘ladi.

End birgalikda bo‘lgan hodisalar uchun qo‘shish teoremasini qaraymiz (ikkita hodisaning birini ro‘y berishi ikkinchisini ro‘y berishini inkor etmaydigan hodisalar).

3-teorema. Ikkita birgalikda bo‘lgan A va B hodisadan hech bo‘lmaganda birining ro‘y berish ehtimoli hodisalar ehtimollari yig‘indisdan ularning birgalikda ro‘y berish hodisasi ehtimolining ayirmasiga teng bo‘ladi.

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

Bu teorema ikkitadan ortiq hodisalar uchun ham o‘rinli. (Teoremani isbot qilish talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi.)

2-misol. Ikki mergan bittadan o‘q uzdi. Birinchi merganni nishonga tekkizish A hodisa) ehtimoli 0,8 ga, ikkinchisiniki (B hodisa) 0,9 ga teng bo‘lsa, merganlardan aqalli bittasining nishonga tekkizganligi ehtimoli topilsin.

Yechih. Masala shartiga asosan $P(A)=0{,}8$, $P(B)=0{,}9$. Birgalikda bo‘lgan hodisalar uchun ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan,

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A)\cdot P(B)=0{,}8+0{,}9-0{,}8\cdot 0{,}9=1{,}7-0{,}72=0{,}98.$$

2.2. Erkli hodisalar. Ehtimollarni ko'paytirish teoremasi.

Agar ikkita A va B hodisalardan birining ro'y berishi ikkinchisining ehtimolini o'zgartirmasa, boshqacha aytganda, ikkinchisining ro'y berish yoki bermasligiga bog'liq bo'lmasa, u holda bu hodisalar erkli hodisalar deyiladi. Bu mavzuda faqatgina birgalikda bo'lgan hodisalar haqida fikr yuritiladi, chunki birgalikda bo'lmagan hodisalarning birgalikda ro'y berish (ko'paytmasini) ehtimoli nolga teng.

A va B hodisalar erkli hodisalar bo'lib, ularning mos ehtimollari $P(A)$ va $P(B)$ bo'lsin.

Teorema. Ikkita erkli A va B hodisaning birgalikda ro'y berish ehtimoli shu hodisalarning ehtimollari ko'paytmasiga teng:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B). \qquad (1)$$

Isboti. Teorema shartiga ko'ra A va B erkli hodisalar. Shu sababli har bir hodisani sodir bo'lishida alohida tajribalar o'tkazilgan bo'lsin. Tajriba natijasida n ta elementar hodisaga ega bo'laylik. Bulardan n_1 tasi A hodisaga qulaylik tug'dirsin.

Tajriba natijasida m ta elementar hodisaga ega bo'laylik. Bulardan m_1 tasi B hodisaga qulaylik tug'dirsin. U holda,

$$P(A) = \frac{n_1}{n}; \qquad P(B) = \frac{m_1}{m}. \qquad (2)$$

Tajriba natijasida ro'y beradigan barcha elementar hodisalar soni nm ta bo'ladi. Bulardan $n_1 m_1$ tasi A va B hodisalarning birgalikda ro'y berishiga qulaylik tug'diradi.

Demak,

$$P(AB) = \frac{n_1 m_1}{nm}; \qquad (3)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \quad P(A \cdot B) = \frac{n_1}{n} \cdot \frac{m_1}{m} = P(A) \cdot P(B); \qquad (4)$$

bo'ladi. Bu teorema erkli hodisalar soni n ta bo'lganda ham to'g'ri, aytaylik, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ birgalikda bog'liq bo'lmagan hodisalar bo'lsin. U holda (4) ga asosan:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n); \qquad (5)$$

bo'ladi.

1-misol. Ikki qutining har birida 20 tadan detal bor. Birinchi qutida 16 ta, ikkinchi qutida 15 ta standart detal bor. Har bir qutidan tavakkaliga bittadan detal olinadi. Olingan detalning standart bo'lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Birinchi qutidan olingan detal standart detal bo'lih hodisasini A, ikkinchi qutidan olingani standart detal bo'lish hodisasini B deylik. U holda

$$P(A) = \frac{16}{20} = 0{,}8; \quad P(B) = \frac{15}{20} = 0{,}75; \text{ bo'ladi.}$$

Olingan ikkala detalning standart detal bo'lishi hodisasi esa AB hodisa bo'ladi. A, B birgalikda bo'lmagan hodisalardir. Shuning uchun teoremaga ko'ra

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0,8 \cdot 0,75 = 0,6;$$

teng bo'ladi.

2-misol. Tangani o'n marta tashlaganda gerbli tomon 10 marta tushish ehtimoli qancha?

Yechish. A_i hodisa i-tashlashda gerb tushishi bo'lsin. Izlanayotgan ehtimol barcha A_i $(i = 1,2,3,\ldots 10)$ hodisalar ko'paytmasining ehtimolidir. A_i hodisalar esa birgalikda erkli bo'lgani uchun, (4) formulani qo'llab, quyidagiga egamiz:

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{10}) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_{10}).$$

Biroq istalgan i uchun $P(A_i) = 1/2$ shu sababli

$$P(A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_{10}) = (1/2)^{10} = 1/1024 \approx 0,001.$$

3-misol. Ishchi bir-biriga bog'liq bo'lmagan holda ishlaydigan uchta stanokni boshqaradi. Bir soat mobaynida ishchining stanokka qarashi kerak bo'lmaslik ehtimoli birinchi stanok uchun 0,7 ga, ikkinchi stanok uchun 0,9 ga, uchinchi stanok uchun esa 0,8 ga teng.

1. Bir soat mobaynida uchta stanokdan hech qaysisiga ishchining e'tibori kerak bo'lmasligi ehtimoli P ni toping.

2. Bir soat mobaynida kamida bitta stanokka ishchining e'tibori zarur bo'lmaslik ehtimolini toping.

Yechish. 1. Izlanayotgan ehtimolni (4) formula bo'yicha topamiz:

$$P = 0,9 \cdot 0,8 \cdot 0,7 = 0,504.$$

2. Bir soat mobaynida uchala stanokka ishchining e'tibor berishi zarur bo'lish ehtimoli birinchi stanok uchun $1 - 0,7 = 0,3$ ga, ikkinchi va uchinchi stanoklar uchun u mos ravishda $1 - 0,9 = 0,1$ va $1 - 0,8 = 0,2$ ga teng. U holda bir soat mobaynida uchala stanokka ishchining e'tibor berishi zarur bo'lish ehtimoli (4) formulaga asosan $0,3 \cdot 0,1 \cdot 0,2 = 0,006$.

Bir soat mobaynida uchala stanokka ishchining e'tibor berishi zarur bo'lishidan iborat A hodisa, kamida bitta stanokka ishchining e'tibor berishi zarur bo'lmasligidan iborat hodisa $\overline{A}$ ga qarama – qarshidir. Shuning uchun 2.1 dagi (2) formulaga ko'ra topamiz:

$$P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - 0,006 = 0,994.$$

2.3. Shartli ehtimol.

A va B hodisalar bog'liq hodisalar bo'lsin. U holda hodisalardan birining ro'y berish ehtimoli ikkinchisining ro'y berish yoki bermasligiga bog'liq bo'ladi. Shuning uchun bizni bir hodisaning ehtimoli qiziqtirayotgan bo'lsa, u holda ikkinchi hodisaning ro'y bergan yoki bermasligini bilishimiz muhimdir. Quyidagi misolni qaraymiz. Ikkita tanga tashlangan bo'lsin. Ikkita gerb tushish ehtimolini topamiz.

Biz to'liq gruppa tashkil etuvchi 4 ta teng ehtimolli juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan ushbu natijalarga egamiz:

	1-tanga	2-tanga
1-natija	gerb	gerb
2-natija	gerb	raqam
3-natija	raqam	gerb
4-natija	raqam	raqam

Shunday qilib, P(gerb,gerb)=1/4. Endi birinchi tangada gerb tushgani ma'lum deb faraz qilaylik. Shundan so'ng gerb ikkala tangada tushish ehtimoli qanday o'zgaradi?

Birinchi tangada gerb tushgani uchun endi to'liq gruppa ikkita teng ehtimolli birgalikda bo'lmagan natijalardan iborat bo'ladi:

	1-tanga	2-tanga
1-natija	gerb	gerb
2-natija	gerb	raqam

Bunda natijalardan faqat bittasi (gerb,gerb) hodisaga imkon yaratadi. Shuning uchun qilingan farazlarda P(gerb,gerb)=1/2.

Endi A orqali ikkita gerbning tushishini, B orqali esa gerbning birinchi tangada tushishini belgilaymiz.

B hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lganda A hodisa ehtimoli o'zgarishini qaraymiz.

A hodisaning B hodisa ro'y berdi degan shart ostidagi yangi ehtimolini $P_B(A)$ orqali belgilaymiz. Shunday qilib,

$$P(A)=1/4, \quad P_B(A)=1/2.$$

A hodisaning B hodisa ro'y beradi degan shart ostidagi ehtimoli A hodisaning shartli ehtimoli deyiladi.

2.4. Bog'liq hodisalar. Ehtimollarni ko'paytirish teoremasi.

Ayrim masalalarni yechishda A va B hodisalarning ehtimollari ma'lum bo'lsa, bu hodisalar ko'paytmasining ehtimolini topishga to'g'ri keladi.

Teorema: A va B hodisalar ko'paytmasining ehtimoli ulardan birining ehtimoli ikkinchisining birinchi hodisa ro'y berdi deb hisoblangan shartli ehtimoli ko'paytmasiga teng, ya'ni:

$$P(AB)=P(A)\cdot P_A(B). \tag{1}$$

Isboti. Bu munosabatning to'g'riligini ehtimolning klassik ta'rifiga asoslanib isbotlaymiz. Tajribalarning mumkin bo'lgan $E_1, E_2, \ldots, E_N$ natijalari teng ehtimolli, juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalarning to'liq gruppasini tashkil qilsin va ulardan A hodisaga K ta natija qulaylik tug'dirsin hamda ana shu K ta natijadan L tasi B hodisaga qulaylik tug'dirsin. U holda, A va B hodisalarning ko'paytmasiga tajribalarning mumkin bo'lgan K ta natijasidan L tasi qulaylik tug'diradi.

Bundan esa quyidagiga egamiz:

$$P(A)=\frac{K}{N};\ P(AB)=\frac{L}{N};\ P_A(B)=\frac{L}{K}.$$

Shunday qilib,

$$P(AB)=\frac{L}{N}=\frac{K}{N}\cdot\frac{L}{K}=P(A)\cdot P_A(B).$$

Shunga o'xshash, A va B ning o'rinlarini almashtirib, quyidagi munosabatga ega bo'lamiz:

$$P(AB)=P(B)\cdot P_B(A). \qquad (2)$$

(1) va (2) munosabatlardan

$$P(A)\cdot P_A(B)=P(B)\cdot P_B(A); \qquad (3)$$

kelib chiqadi.

Ehtimollarni ko'paytirish teoremasi istalgan chekli sondagi hodisalar uchun umumlashtiriladi. Masalan, uchta A_1, A_2, A_3 hodisa uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$P(A_1A_2A_3)=P[(A_1A_2)A_3]=P(A_1A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)=$$
$$=P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1A_2}(A_3).$$

Umumiy holda

$$P(A_1A_2\dots A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1A_2}(A_3)\cdot\ldots\cdot P_{A_1A_2\dots A_{n-1}}(A_n). \qquad (4)$$

Misol. 4 ta oq va 9 ta qora shar bo'lgan qutidan ikkita shar olinadi. Olingan ikkala shar oq bo'lish ehtimoli qancha?

Yechish. Bu masalani (1) formulani qo'llab yechamiz. Ikkita sharni olish ularni ketma-ket olishga teng kuchlidir. Ikkita oq shar chiqishidan iborat hodisa A va B hodi: ılarni ko'paytmasidan iborat bo'ladi. (1) formulaga ko'ra quyidagiga ega bo'lamiz:

$P(AB)=P(A)P_A(B)$. Biroq, birinchi oq shar chiqqandan so'ng qutida uchtasi oq bo'lgan 12 ta shar qolgani uchun $P(A)=\frac{4}{13}$, $P_A(B)=\frac{3}{12}$. Demak, $P(AB)=(4/13)\cdot(3/12)=3/40$;

2.5. To‘liq ehtimol formulasi.

Aytaylik, A hodisa to‘liq gruppa tashkil etuvchi n ta juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $H_1, H_2, \dots H_n$ hodisalarning bittasi va faqat bittasi bilan birgalikda ro‘y berishi mumkin bo‘lsin. U holda, agar A hodisa ro‘y bergan bo‘lsa, bu juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $H_1, H_2, \dots H_n$ hodisalarning birortasi ro‘y berganini bildiradi. Demak,

$$A = AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n.$$

U holda, ehtimollarni qo‘shish teoremasiga asosan tubandagiga ega bo‘lamiz:

$$P(A) = P(AH_1 + AH_2 + \dots + AH_n) = P(AH_1) + P(AH_2) + \dots + P(AH_n).$$

Biroq $P(AH_i) = P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)$ $(i = 1, 2, \dots n)$; shuning uchun:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A). \quad (1)$$

Bu formula to‘liq ehtimol formulasi deyiladi. $H_1, H_2, \dots H_n$ hodisalar ko‘pincha «gipotezalar» deyiladi. Bu formuladan murakkab hodisalarning ehtimollarini hisoblashda foydalaniladi.

Misol. Omborga 360 ta mahsulot keltirildi. Bulardan: 300 tasi bir korxonada tayyorlangan bo‘lib, 250 tasi – yaroqli mahsulot, 40 tasi ikkinchi korxonada tayyorlangan bo‘lib, 30 tasi – yaroqli mahsulot, 20 tasi uchinchi korxonada tayyorlangan bo‘lib, 10 tasi – yaroqli mahsulot. Ombordan tavakkaliga olingan mahsulotning yaroqli bo‘lish ehtimoli topilsin.

Yechish. Tavakkaliga olingan mahsulot uchun quyidagi gipotezalar o‘rinli bo‘ladi:

H_1 – mahsulotning 1-korxonada tayyorlangan bo‘lishi;
H_2 – mahsulotning 2-korxonada tayyorlangan bo‘lishi;
H_3 – mahsulotning 3-korxonada tayyorlangan bo‘lishi.

Ularning ehtimollari mos ravishda quyidagicha bo‘ladi:

$$P(H_1) = \frac{300}{360} = \frac{5}{6}; \quad P(H_2) = \frac{40}{360} = \frac{1}{9}; \quad P(H_3) = \frac{20}{360} = \frac{1}{18}.$$

Agar olingan mahsulotning yaroqli bo‘lishini A hodisa deb belgilasak, u holda bu hodisaning turli gipotezalar shartlari ostidagi ehtimollari quyidagicha bo‘ladi:

$$P_{H_1}(A) = \frac{5}{6}; \quad P_{H_2}(A) = \frac{3}{4}; \quad P_{H_3}(A) = \frac{1}{2}.$$

Yuqorida topilganlarni to‘liq ehtimol formulasiga qo‘yamiz:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A) =$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{5}{6} + \frac{1}{9} \cdot \frac{3}{4} + \frac{1}{18} \cdot \frac{1}{2} = \frac{29}{36}.$$

2.6. Bayes formulasi.

Biror tajriba o'tkazilmoqda va uning o'tish shartlari to'g'risida to'liq gruppa tashkil etuvchi juft-juft bo'lib, birgalikda bo'lmagan n ta $H_1, H_2, \dots H_n$ gipotezalarni aytish mumkin bo'lsin.

Gipotezalarning ehtimoli $P(H_i)$ ga teng. Tajriba natijasida A hodisa ro'y berishi ham, ro'y bermasligi ham mumkin bo'lsin, shuning bilan birga agar tajriba gipoteza bajarilganda o'tayotgan bo'lsa,

$$P_{H_i}(A) = P_i \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

ekani ma'lum bo'lsin.

U holda, agar A hodisa ro'y berganligi ma'lum bo'lib qolsa, — gipotezalarning ehtimollari qanday o'zgaradi? degan savol paydo bo'lishi mumkin. Boshqacha aytganda, bizni $P_A(H_i)$ ehtimollarning qiymatlari qiziqtiradi.

2.4 dagi (1) va (2) munosabatlar asosida quyidagiga egamiz:

$$P(H_i A) = P_A(H_i) \cdot P(A) = P_{H_i}(A) \cdot P(H_i) \quad (i = 1, 2, \dots, n);$$

bu yerdan:

$$P_A(H_i) = \frac{P_{H_i}(A) \cdot P(H_i)}{P(A)}.$$

Biroq to'liq ehtimol formulsiga ko'ra:

$$P(A) = P(H_1)P_{H_1}(A) + P(H_2)P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n)P_{H_n}(A) = \sum_{k=1}^{n} P(H_k) \cdot P_k.$$

Shuning uchun

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)P_i}{\sum_{k=1}^{n} P(H_k)P_k} \quad (i = 1, 2, \dots, n); \tag{1}$$

(1) formula Bayes formulasi deyiladi.

Misol. Omborxonaga 1600 dona tranzistor keltirildi. Ulardan birinchi zavodda 300 tasi, ikkinchi zavodda 560 tasi, uchinchi zavodda 740 tasi tayyorlangan. Tranzistorlarning yaroqsiz bo'lib chiqishi, 1-zavod uchun 0,03 ga, 2-zavod uchun 0,02 ga va 3-zavod uchun 0,01 ga teng. Tavakkaliga olingan tranzistor yaroqsiz bo'lib chiqdi. 1-zavodda tayyorlanganlik ehtimoli qancha?

Yechish. Tavakkaliga olingan tranzistor yaroqsiz bo'lib chiqish hodisasi A bo'lsin. H_1, H_2, H_3 esa tranzistor mos ravishda 1,2,3-zavodda tayyorlangan, degan gipotezalar bo'lsin. Bu gipotezalarning ehtimollari tubandagicha:

$$P(H_1) = 300/1600 = 0{,}19; \quad P(H_2) = 560/1600 = 0{,}35;$$

$$P(H_3) = 740/1600 = 0{,}46.$$

Masala shartidan quyidagilar kelib chiqadi:

$$P_1 = P_{H_1}(A) = 0,03; \quad P_2 = P_{H_2}(A) = 0,02; \quad P_3 = P_{H_3}(A) = 0,01.$$

$P_A(H_1)$ ni, ya'ni yaroqsiz tranzistorning 1-zavodda tayyorlanganlik ehtimolini topamiz. Bayes formulasiga ko'ra quyidagiga egamiz:

$$P_A(H_1) = \frac{P(H_1)\cdot P_1}{P(H_1)\cdot P_1 + P(H_2)\cdot P_2 + P(H_3)\cdot P_3} =$$

$$= \frac{0,19\cdot 0,03}{0,19\cdot 0,03 + 0,35\cdot 0,02 + 0,46\cdot 0,01} \approx 0,329.$$

Shunday qilib, tranzistor 1-zavodda tayyorlangan degan gipotezaning ehtimoli u yaroqsiz ekanligi ma'lum bo'lib qolganidan keyin o'zgartiriladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Ikkita birgalikda bo'lgan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasini aytib, isbotlab bering.
2. Ikkita birgalikda bo'lmagan hodisalar ehtimollarini qo'shish teoremasini aytib, isbotlab bering.
3. Erkli hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasini ta'riflang va isbotlab bering.
4. Hodisaning shartli ehtimolini misollar yordamida tushuntiring.
5. Bog'liq hodisalar ehtimollarini ko'paytirish teoremasini ta'riflang va isbotlab bering.
6. To'liq ehtimol formulasini keltirib, misollar bilan tushuntiring.
7. Bayes formulasini yozib, misollar bilan tushuntiring.

3-§. Erkli tajribalar seriyasi

Ya.Bernulli formulasi.

Biz ayrim yakka tartibda o'tkaziladigan tajribalar bilan bog'liq bo'lgan tasodifiy hodisalarni o'rganib keldik. Ammo, amaliyotda, ehtimollar nazariyasida bir-biridan erkli ravishda o'tkaziladigan bir xil tajribalar seriyasini o'rganish katta ahamiyatga ega. Masalan, tangani tashlash, nishonga qarata o'q uzish, mahsulotni nazorat uchun tanlash tajribalarini ko'p marta va bir xil sharoitlarda o'tkazish hollari erkli tajribalar seriyalariga misol bo'la oladi. Bunday hollarda masala quyidagicha qo'yiladi.

A tasodifiy hodisa biror tajribada P ehtimol bilan ro'y bersin. Tajriba n marta takrorlanganda A hodisaning k marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k)$ qanday bo'ladi? Bu savolga javob berish uchun, dastlab xususiy holdan boshlaymiz.

Aytaylik, $n=6$ va $k=3$ bo'lsin, ya'ni har birida A hodisa P ehtimol bilan ro'y beradigan 6 ta tajribadan iborat seriyani qaraymiz. Bu olti tajribada A hodisaning uch marta ro'y berish ehtimoli $P_6(3)$ ni aniqlaymiz.

A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 va A_6 lar bilan A hodisaning mos ravishda ro'y berishidan iborat hodisalarni belgilaymiz. U holda A hodisaning uch marta ro'y berishidan iborat hodisa quyidagi birgalikda bo'lmagan hodisalarning yig'indisi kabi yozilishi mumkin:

$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \overline{A}_4 \cap \overline{A}_5 \cap \overline{A}_6$ (A hodisa dastlabki 3 tajribada ro'y berdi),

....

....

$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap A_4 \cap A_5 \cap A_6$ (A hodisa oxirgi 3ta tajribada ro'y berdi).

Bu erda C_6^3 ta hodisa yozilgan, chunki A hodisaning olti tajribada uch marta ro'y berishining ana shuncha usuli mavjuddir. Bu hodisalardan har birining ehtimoli ko'paytirish teoremasiga ko'ra $p^3(1-p)^3$ ga teng, ya'ni bir xildir.

Birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasiga ko'ra

$$P_6(3)=C_6^3 p^3(1-p)^3; \qquad (1)$$

ni hosil qilamiz.

Endi umumiy holni qaraymiz. $A_i (i=1,\ 2,\ ...,\ n)$ lar bilan A hodisaning mos ravishda i-tajribada ro'y berishidan iborat hodisalarni belgilaymiz. U holda A hodisaning k marta ro'y berishidan iborat hodisa quyidagi birgalikda bo'lmagan hodisalarning yig'indisi ko'rinishida ifoda qilinadi:

$A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_k \cap \overline{A}_{k+1} ... \cap \overline{A}_n$ – (A hodisa dastlabki k ta tajribada ro'y berdi),

....

....

$\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap ... \cap \overline{A}_{n-k} \cap A_{n-k+1} \cap ... \cap A_n$ (A hodisa oxirgi k ta tajribada ro'y berdi)

Bu erda C_n^k ta hodisa yozilishi kerak, chunki A hodisaning n ta tajribada k marta ro'y berish usullari soni shunchadir.

Ko'paytirish teoremasiga ko'ra bu har bir hodisaning ehtimoli

$$p^k(1-p)^{n-k};$$

ga teng.

Birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasini qo'llab, ushbu formulani hosil qilamiz:

$$P_n(k)=C_n^k p^k(1-p)^{n-k}; \qquad (2)$$

(2) formulaga Ya. Bernulli formulasi deyiladi.

1-misol. Nishonga qarata to'rtta o'q otishdi, bunda har bir o'q otishda nishonga tegish ehtimoli 0,85 ga teng. Nishonning ikkita o'q bilan shikastlanish ehtimoli qancha?

(2)-formulaga ko'ra $n=4, k=2, p=0{,}85$ deb quyidagini topamiz:

$$P_4(2)=C_4^2\,0{,}85^2\cdot 0{,}15^2=0{,}0975\approx 0{,}1.$$

2-misol. Radiopriyomnikda 6 ta lampa bor. O'n yil davomida lampalarning ishga yaroqsiz bo'lib qolish ehtimoli har qaysi lampa uchun $\frac{1}{7}$ ga teng. O'n yil davomida barcha lampalarning kamida yarmisini almashtirilish ehtimoli qancha?

(2) formulani tadbiq etib, o'n yil davomida mos ravishda uchta, to'rtta, beshta va oltita lampaning ishdan chiqish ehtimolini topamiz:

$$C_6^3\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^3,\quad C_6^4\left(\frac{1}{7}\right)^4\left(\frac{6}{7}\right)^2,\quad C_6^5\left(\frac{1}{7}\right)^5\left(\frac{6}{7}\right)^1 \text{ va } C_6^6\left(\frac{1}{7}\right)^6\left(\frac{6}{7}\right)^0$$

Birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasiga ko'ra izlanayotgan ehtimol quyidagiga teng bo'ladi:

$$C_6^3\left(\frac{1}{7}\right)^3\left(\frac{6}{7}\right)^3+C_6^4\left(\frac{1}{7}\right)^4\left(\frac{6}{7}\right)^2+C_6^5\left(\frac{1}{7}\right)^5\left(\frac{6}{7}\right)^1+C_6^6\left(\frac{1}{7}\right)^6\left(\frac{6}{7}\right)^0=\frac{4320+540+36+1}{117649}\approx 0{,}042.$$

(2) formulada $1-p=q$ deb olinsa, u quyidagi ko'rinishni oladi.

$$P_n(k)=C_n^k q^{n-k}p^k. \tag{3}$$

(3) formuladagi $C_n^k q^{n-k}$ $(q+px)^n$ ko'phadning koeffitsientlarini ifodalaydi.

$(q+px)^n$ ko'phadni Nyuton formulasini qo'llab, x ning darajalari o'sib borish tartibida joylashtirsak: $C_n^k q^{n-k}$ – koeffitsientlarga ega bo'lamiz. Boshqacha aytganda

$$(q+px)^n=\sum_{k=0}^{n}(C_n^k q^{n-k}p^k)x^k. \tag{4}$$

ko'rinishdagi ayniyatga ega bo'lamiz. Bu ayniyatga asosan $(q+px)^n$ ko'phadni A hodisaning n ta erkli tajribadan iborat seriyada k marta ro'y berishining ehtimollari uchun hosil qiluvchi ko'phad deyiladi.

Barcha $P_n(k)(k=0,1,...,n)$ ehtimollarni topish zarur bo'lgan hollarda hosil qiluvchi ko'phadni yozib olish va uni Nyuton formulasi bo'yicha yoyib chiqish qulaydir. Ko'phadning koeffitsientlari izlanayotgan ehtimollarni beradi.

3-misol. A hodisa tajriba bir marta o'tkazilganda $\frac{3}{4}$ ehtimol bilan ro'y beradi. Tajriba 10 marta o'tkaziladi. Bu tajribaning qanday natijasi eng katta ehtimolga ega bo'ladi? U nimaga teng?

Yechish. Bu holda hosil qiluvchi ko‘phad $(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}x)^{10}$ ko‘rinishga ega. Shunday qilib, eng katta ehtimolga tajribaning quyidagi natijasi ega bo‘ladi: A hodisa 8 marta ro‘y beradi. Bunday natijaning ehtimoli:

$$P_{10}(8)=C_{10}^{8}(\frac{1}{4})^{2}(\frac{3}{4})^{8}\approx 0,28.$$

Tajribaning qolgan 10 natijasining har biri bundan kichik ehtimolga ega.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Ya.Bernulli formulasini keltirib chiqaring.

4-§. Tasodifiy miqdorlar

4.1. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

Biz tasodifiy hodisalar bo‘limida o‘yin soqqasini tashlaganda 1,2,3,4,5 va 6 sonlarini chiqishi, nishonga qarata beshta o‘q uzganda 0,1,2,3,4,5 qiymatlarni qabul qila oladigan tasodifiy hodisalarni qaradik. Bu tasodifiy hodisalarda chiqqan qiymatlarni oldindan aytib bo‘lmaydi, chunki u inobatga olib bo‘lmaydigan ko‘p tasodifiy sabablarga bog‘liqdir. Shu sababli yuqorida ko‘rsatilgan qiymatlar tasodifiy miqdorlardir.

1-ta’rif. Tasodifiy miqdor deb, avvaldan noma’lum bo‘lgan va oldindan inobatga olib bo‘lmaydigan tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan hamda tajriba natijasida bitta mumkin bo‘lgan qiymat qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Misollar:

a) ma’lum partiyadagi brak qilingan mahsulotlar miqdori;

b) to‘pdan otilgan snaryadning uchib o‘tgan masofasi;

d) tug‘ilgan 100 ta chaqaloq ichida qiz bolalar soni;

e) yil davomida bitta sigirdan sog’ib olingan sut miqdori va boshqalar.

To‘pdan otilgan snaryadning uchib o‘tgan masofasini tasodifiy miqdor sifatida qarasak, bu masofa faqat nishonga oluvchi asbobning o‘rnatilishiga bog‘liq bo‘lmasdan, avvaldan hisobga olib bo‘lmaydigan bir qancha boshqa sabablarga (shamolning kuchi va yo‘nalishi, harorat va boshqalarga) ham bog‘liq.

Tasodifiy miqdor ikki xil bo‘ladi: diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar.

2-ta’rif. Diskret(uzlukli) tasodifiy miqdor deb, ayrim ajratilgan qiymatlarni ma’lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Masalan, yuqoridagi a), b) misollarni diskret tasodifiy miqdorlar desa bo‘ladi. Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin.

3-ta’rif. Uzluksiz tasodifiy miqdor deb, chekli yoki cheksiz oraliqlardagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan miqdorga aytiladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlar soni cheksizdir.

4.2. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni.

Tasodifiy miqdorni to'la tavsiflash uchun, eng avvalo, u qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarni bilish kerak. Ammo bu yetarli emas. Bundan tashqari, tasodifiy miqdor u, yoki bu qiymatni qanday ehtimol bilan qabul qilishini ham bilish kerak.

Tasodifiy miqdorni X harfi bilan, uning qiymatlarini

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

harflari bilan, bu qiymatlar qabul qiladigan ehtimollarni mos ravishda

$$p_1, p_2, ..., p_n$$

harflari bilan belgilaymiz.

Agar X tasodifiy miqdor uchun u qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha, $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlar va bu qiymatlar qabul qilinadigan barcha $p_1, p_2, ..., p_n$ ehtimollar ma'lum bo'lsa, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni yoki, oddiy qilib, X miqdorning taqsimoti berilgan deyiladi.

Odatda, taqsimot qonuni quyidagi jadval ko'rinishida yoziladi:

X	x_1	x_2	x_3	...	x_k	...	x_n
P	p_1	p_2	p_3	...	p_k	...	p_n

Jadvalning birinchi satrida tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari, uning ostiga, ikkinchi satrga esa mos ehtimollar yoziladi.

Quyidagi n ta tasodifiy hodisani qaraymiz:

A_1 – tasodifiy miqdor X x_1 qiymatni qabul qildi,

A_2 – tasodifiy miqdor X x_2 qiymatni qabul qildi,

....

A_n – tasodifiy miqdor X x_n qiymatni qabul qildi,

$A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar birgalikda emas, chunki tasodifiy miqdor tajriba bir marta o'tkazilganda $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlardan faqat birini qabul qilishi mumkin. Shuningdek, $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalarning yig'indisi muqarrar hodisadir, ya'ni

$$A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n = E;$$

chunki tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlardan birini albatta qabul qiladi.

Shu sababli birgalikda bo'lmagan hodisalar uchun qo'shish teoremasiga ko'ra quyidagini hosil qilamiz:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) = P(E) = 1;$$

$$P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_n) = 1;$$

$$p_1 + p_2 + ... + p_n = 1.$$

yoki qisqacha yozsak,

$$\sum_{k=1}^{n} p_k = 1; \tag{2}$$

ya'ni X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini beradigan (1) jadvalning ikkinchi satrida turgan barcha sonlarning yig'indisi birga teng bo'lishi kerak.

1-misol. X tasodifiy miqdor o'yin soqqasini tashlaganda tushgan ochkolar soni bo'lsin. Taqsimot qonunini toping.

Yechish. X tasodifiy miqdor

$$x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ ...,\ x_6 = 6;$$

qiymatlarni

$$p_1 = p_2 = ... = p_6 = \frac{1}{6};$$

ehtimollar bilan qabul qiladi. Shuning uchun taqsimot qonuni ushbu jadval bilan beriladi:

X	1	2	3	4	5	6
P	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

2-misol. Nishonga qarata ikkita o'q uzilyapti, bunda har bir o'q uzishda o'qning nishonga tegish ehtimoli 0,8 ga teng. X tasodifiy miqdor sifatida – nishonga tekkan o'qlar soni qaraladi. Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechish. X tasodifiy miqdor quyidagi qiymatlarni qabul qilishi mumkin:

$$x_1 = 0,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2\,.$$

Tegishli ehtimollarni topish uchun hosil qiluvchi ko'phad $(0,2 + 0,8x)^2$ ni tuzamiz va yoyilmasini topamiz:

$$0,2^2 + 2 \cdot 0,2 \cdot 0,8\ x + 0,8^2 x^2\,.$$

Ma'lumki, $x^k\,(k = 0,1,2)$ning oldidagi koeffitsient nishonga k ta o'q tegish ehtimolini, ya'ni X tasodifiy miqdorning k ga teng qiymatni qabul qilish ehtimolini beradi.

$$p_1 = 0,2^2 = 0,04;$$

$$p_2 = 2 \cdot 0,2\ \cdot 0,8 = 0,32;$$

$$p_3 = 0,8^2 = 0,64.$$

Shunday qilib, X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

0	1	2
0,04	0,32	0,64

Umumiy holda quyidagi misolni qaraylik.

X tasodifiy miqdorni – har birida A hodisa P ehtimol bilan ro'y beradigan n ta erkli tajribadan iborat seriyada A hodisaning ro'y berish sonini qaraylik. X tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini toping.

Yechish. X tasodifiy miqdor quyidagi qiymatlardan birini qabul qilishi mumkinligi ravshandir:

$$0, 1, 2, ..., k, ..., n.$$

X tasodifiy miqdor k ga teng qiymatni qabul qilishidan iborat hodisaning ehtimoli Ya. Bernulli formulasiga ko'ra aniqlanishini bilamiz:

$$P(X=k)=C_n^k p^k q^{n-k};$$

bu yerda $q=1-p$.

Binobarin, X tasodifiy miqdorning taqsimoti quyidagicha yozilishi mumkin:

0	1	...	k	...	n
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

(3)

(3) jadval yordamida tavsiflanadigan taqsimot Ya. Bernulli taqsimoti yoki binomial taqsimot deyiladi. Ya. Bernulli taqsimoti uchun (2) shart quyidagi ko"rinishni oladi:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k p^k q^{n-k} = 1. \tag{4}$$

Bu tenglikning to'g'riligini isbotlash uchun

$$(q+px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k;$$

ayniyatda $x=1$ deb olish etarli.

Ya.Bernulli taqsimoti ikkita parametr: barcha tajribalar soni n va hodisaning har bir ayrim tajribada ro'y berish ehtimoli p bilan to'la beriladi.

4.3. Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi.

Ta'rif. Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb tasodifiy miqdorning barcha qiymatlarini bu qiymatlarning ehtimollariga ko'paytmalari yig'indisiga aytiladi.

X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi MX orqali belgilanadi. Agar X tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymatlari mos ravishda $p_1, p_2, ..., p_n$ ehtimollarga ega bo'lsa, u holda ta'rifga ko'ra:

$$MX = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k. \tag{1}$$

Matematik kutilish tasodifiy miqdorning eng muhim son tavsifidir. Ko'pincha matematik kutilishni tasodifiy miqdorning o'rtacha qiymati deb ham yuritiladi, chunki u biror «o'rtacha son» ni ifodalab, bu son atrofida tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari qiymatlanadi.

1-misol. O'yin soqqasini tashlaganda tushadigan ochkolar sonining matematik kutilishini toping.

Bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni 4.2 ning 1-misolida topilgan edi (1) formulaga ko'ra matematik kutilishni topamiz:

$$MX = \sum_{k=1}^{0} x_k p_k = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{1}{6}\cdot\frac{6\cdot 7}{2} = 3,5.$$

Umumiy holda quyidagi misolni qaraylik.

2-misol. Har birida A hodisa p ehtimol bilan ro'y beradigan n ta erkli tajriba seriyasida A hodisa ro'y berish sonining matematik kutilishini toping.

X tasodifiy miqdorning k qiymatni qabul qilish ehtimoli $C_n^k q^{n-k} p^k$ ga teng. Demak, (1) formulaga ko'ra;

$$MX = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k.$$

Hosil qilingan ifodani soddalashtirish uchun ushbu munosabatdan foydalanamiz:

$$(q + px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k q^{n-k} p^k x^k.$$

Bu ayniyatning ikkala tomonini x o'zgaruvchi bo'yicha differensiallaymiz, u holda:

$$n(q + px)^{n-1} p = \sum_{k=0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k x^{k-1}.$$

Bu yerdan $p + q = 1$ ekanligini nazarda tutib, $x = 1$ da

$$np = \sum_{k-0}^{n} kC_n^k q^{n-k} p^k;$$

ni topamiz. Demak,

$$MX = np. \tag{2}$$

Shunday qilib, har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ga teng bo'lgan n ta erkli tajribadan iborat seriyada A hodisa ro'y berish sonining matematik kutilishi barcha tajribalar soni n ning hodisaning alohida tajribada ro'y berish ehtimoli p ga ko'paytmasiga teng ekan.

Boshqacha aytganda, n va p parametrli binomial qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi np ko'paytmasiga tengdir.

3-misol. Agar 1000 ta buyumdan iborat to'plamdagi har bir buyum 0,05 ehtimol bilan yaroqsiz chiqishi mumkin bo'lsa, shu to'plamdagi yaroqsiz buyumlar sonining matematik kutilishini toping.

Yaroqsiz buyumlar soni – bu binomial qonun bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdordir. Shuning uchun (2) formulaga ko'ra ushbuni topamiz:

$$MX = 1000 \cdot 0{,}05 = 50.$$

Aytaylik, X tasodifiy miqdor, MX uning matematik kutilishi bo'lsin. $X-MX$ ayirmani qaraylik.

Tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutilishi orasidagi farqga kutilisdan chetlanich deyiladi.

4-misol. X – o'yin soqqasini tashlaganda tushgan ochkolar soni bo'lsin. X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishi kvadratidan iborat Y tasodifiy miqdorni qaraylik. Y ning matematik kutilishini toping.

X tasodifiy miqdorning matematik kutilishi 1-misolda hisoblangan bo'lib, u $MX = 3{,}5$ ga teng edi.

X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanish kvadrati

$$y_1 = (1-3{,}5)^2;\; y_2 = (2-3{,}5)^2;\; y_3 = (3-3{,}5)^2.$$
$$y_4 = (4-3{,}5)^2;\; y_5 = (5-3{,}5)^2;\; y_6 = (6-3{,}5)^2.$$

qiymatlarni qabul qiluvchi tasodifiy miqdordir, bunda har bir qiymat $\frac{1}{6}$ ehtimol bilan qabul qilinishi ravshandir. Shuning uchun

$$MY = \sum_{k=1}^{6} y_k p_k = \sum_{k=1}^{6} (k-3{,}5)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{2.5^2 + 1{,}5^2 + 0.5^2 + 0{,}5^2 + 1.5^2 + 2{,}5^2}{6} = \frac{35}{12}.$$

4.4. Tasodifiy miqdorning dispersiyasi.

X tasodifiy miqdorning boshqa bir muhim tavsifi uning dispersiyasidir. X ning dispersiyasi DX orqali belgilanadi va u quyidagicha aniqlanadi.

Ta'rif. X tasodifiy miqdorning dispersiyasi deb X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishi kvadratining matematik kutilishiga aytiladi, ya'ni $DX = M(X-MX)^2$.

4.3-moddadagi 4-misolda o'yin soqqasini tashlaganda tushgan ochkolar sonidan iborat X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanish kvadratining matematik kutilishi topilgan, ya'ni aslida X miqdorning dispersiyasi hisoblangan edi. Shunday qilib, 4-misoldan agar X soqqani tashlaganda tushgan ochkolar soni bo'lsa, u holda $DX = \frac{35}{12}$ bo'lishi kelib chiqadi.

Aytaylik, X tasodifiy miqdor

$$x_1, x_2, ..., x_n;$$

qiymatlarni mos ravishda

$$p_1, p_2, ..., p_n;$$

ehtimollar bilan qabul qilsin. U holda X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishi kvadrati tasodifiy miqdor bo'lib, u

$$(x_1 - MX)^2, (x_2 - MX)^2, ..., (x_k - MX)^2, ...;$$
$$(x_n - MX)^2.$$

qiymatlarni mos ravishda

$$p_1, p_2, ..., p_k, ..., p_n;$$

ehtimollar bilan qabul qiladi. Shuning uchun bunday taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishini, ya'ni X ning dispersiyasini quyidagicha yozish mumkin:

$$DX = \sum_{k-1}^{n} (x_k - MX)^2 p_k. \tag{1}$$

Tasodifiy miqdorning dispersiyasi bu tasodifiy miqdorning o'zining matematik kutilishiga (o'rtacha qiymatiga) nisbatan tarqoqlik, sochilish darajasini xarakterlaydi. «Dispersiya» so'zining o'zi «sochilish»ni anglatadi.

1-misol. X va Y tasodifiy miqdorlar quyidagi taqsimot qonunlariga ega:

-1	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

va

-2	2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

DX va DY ni toping.

Dastlab matematik kutilishlarni hisoblaymiz:

$$MX = (-1) \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 0, \quad MY = (-2) \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{2} = 0.$$

Endi (1) formulani qo'llab, dispersiyalarni topamiz:

$$DX = 1 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = 1, \quad DY = 4 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

X va Y tasodifiy miqdorlar bu erda bir xil qiymatlarni qabul qilyapti, bir xil matematik kutilishga ega, biroq Y tasodifiy miqdor qiymatlarining tarqoqligi X tasodifiy miqdornikiga qaraganda ko'proq. Matematik kutilishdan ancha uzoqdagi ± 2 qiymatlarni Y tasodifiy miqdor X tasodifiy miqdorga nisbatan kattaroq ehtimol bilan qabul qiladi, matematik kutilishdan kamroq uzoqlikdagi ± 1 qiymatlarni esa Y tasodifiy miqdor

X tasodifiy miqdorga nisbatan kichikroq ehtimol bilan qabul qiladi. $DX < DY$ tengsizlik xuddi ana shuni ko'rsatadi.

Yuqoridagi misollarda tasodifiy miqdorlarning dispersiyalari (1) formula bo'yicha hisoblanadi. Biroq, odatda, dispersiyani boshqa formula yordamida hisoblash ancha qulay bo'ladi. Bu formulani hosil qilish uchun dastlab (1) formulaning o'ng qismini quyidagicha o'zgartiramiz:

$$DX = \sum_{k=1}^{n}(x_k - MX)^2 p_k = \sum_{k=1}^{n}(x_k^2 - 2(MX)x_k + (MX)^2)p_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - 2(MX)\sum_{k=1}^{n} x_k p_k + (MX)^2 \sum_{k=1}^{n} p_k .$$

Endi $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$, $\sum_{k=1}^{n} x_k p_k = MX$ ekaninini e'tiborga olsak,

$DX = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 p_k - (MX)^2$ formulani hosil qilamiz.

Bu yerda yig'indi ushbu

x_1^2	x_2^2	...	x_k^2	...	x_n^2
p_1	p_2	...	p_k	...	p_n

qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishidir.

Bunday tasodifiy miqdorni X tasodifiy miqdorning kvadrati deb ataladi va X^2 orqali belgilanadi.

Shunday qilib, dispersiya uchun

$$DX = M(X^2) - (MX)^2; \tag{2}$$

formula o'rinlidir.

Bu formula bunday o'qiladi: tasodifiy miqdorning dispersiyasi bu miqdor kvadratining matematik kutilishidan uning matematik kutilishi kvadratini ayirilganiga teng.

2-misol. n va p parametrli binomial qonun bo'yicha taqsimlangan X tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. Bizga oldingi mavzulardan $MX = np$ ekanligi ma'lum. Dispersiyani (2) formuladan foydalanib, hisoblash maqsadida X^2 tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini yozamiz:

0	1	...	k^2	...	n^2
$C_n^0 p^0 q^n$	$C_n^1 p^1 q^{n-1}$	...	$C_n^k p^k q^{n-k}$	...	$C_n^n p^n q^0$

X^2 tasodifiy miqdorning matematik kutilishi uchun quyidagiga egamiz:

$$M(X^2) = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Hosil qilingan yig'indini soddalashtirish uchun yana bizga ma'lum bo'lgan quyidagi ayniyatdan foydalanamiz:

$$(q+px)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^K q^{n-k} p^k x^k.$$

Ayniyatning har ikkala qismini x o'zgaruvchi bo'yicha ikki marta differensiallaymiz. U holda quyidagini hosil qilamiz:

$$n(n-1)(q+px)^{n-2} p^2 = \sum_{k-0}^{n} q^{n=k} p^k k)k-1)x^{k-2}.$$

Bu ayniyatda $x=1$ deb, ushbu tenglikni hosil qilamiz:

$$n(n-1)p^2 = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)C_n^k q^{n-k} p^k;$$

yoki

$$n(n-1)p^2 = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k q^{n-k} p^k - \sum_{k=1}^{n} k C_n^k q^{n-k} p^k;$$

bu yerdan $\sum_{k=1}^{n} k C_n^k q^{n-k} p^k = MX = np$ ekanligini nazarga olib,

$$M(X^2) = \sum_{k=1}^{n} k^2 C_n^k q^{n-k} p^k = n(n-1)p^2 + np = n^2p^2 - np^2 + np;$$

$$DX = M(X^2) - (MX)^2 = n^2p^2 - np^2 + np - n^2p^2 = np(1-p);$$

ya'ni

$$DX = npq. \tag{3}$$

4.5. Chebishev tengsizligi.

X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishining absolut qiymatini, ya'ni $|X-MX|$ tasodifiy miqdorni qaraylik. $|X-MX|$ tasodifiy miqdorning birorta ε musbat sondan kichik bo'lmagan qiymatni qabul qilish ehtimolini $P(|X-MX| \geq \varepsilon)$ orqali belgilaylik.

Teorema. Ixtiyoriy X tasodifiy miqdor va istalgan ε son uchun

$$P(|X-MX| \geq \varepsilon) \leq \frac{DX}{\varepsilon^2}.$$

tengsizlik o'rinlidir, ya'ni X tasodifiy miqdorning uning matematik kutilishidan chetlanishi absolyut miqdorning istalgan ε musbat sondan kichik bo'lmaslik ehtimoli X ning dispersiyasini ε^2 ga bo'linganidan katta bo'la olmaydi.

Bu mashhur Chebishev tengsizligidir, bu tengsizlik yordamida ehtimollar nazariyasida ko'pgina muhim teoremalar isbot qilinadi.

Isboti. X ushbu qonun bo'yicha taqsimlangan ixtiyoriy tasodifiy miqdor bo'lsin:

x_1	...	x_l	x_{l+1}	...	x_n
p_1	...	p_l	p_{l+1}	...	p_n

Ixtiyoriy ε musbat sonni olamiz. U holda X tasodifiy miqdorning barcha qiymatlari $x_k (k=1,2,...,n)$ larni ikkita to'plamga bunday ajratish mumkin: birinchi to'plamga

$$|x_k - MX| \geq \varepsilon; \qquad (1)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan x_k qiymatlarni kiritamiz, qolgan qiymatlarni, ya'ni qarama-qarshi

$$|x_k - MX| < \varepsilon; \qquad (2)$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlarni ikkinchi to'plamga kiritamiz.

Bu to'plamlardan biri bo'sh to'plam bo'lib qolishi istisno qilinmasligini qayd qilib o'tamiz.

Umumiylikka ziyon keltirmasdan, biz tasodifiy miqdorning qiymatlarini shunday nomerladikki, (1) tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlar 1 dan ℓ gacha, qolgan qiymatlar, ya'ni (2) tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatlar esa $\ell+1$ dan n gacha nomerlarni oldilar deb hisoblashimiz mumkin.

Endi X tasodifiy miqdorning

$$DX = \sum_{k=1}^{n} (x_k - MX)^2 p_k;$$

dispersiyasini qarab chiqaylik.

Bu yig'indining barcha qo'shiluvchilari manfiy bo'lmagani uchun oxirgi $n-\ell$ ta hadni tashlab yuborib, yig'indini faqat kamaytirishimiz mumkin, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{n} (x_k - MX)^2 p_k \geq \sum_{k=1}^{\ell} (x_k - MX)^2 p_k;$$

dispersiyasini qarab chiqaylik.

Biroq endi yig'indi belgisi ostida nomerlari $k \leq \ell$ bo'lgan x_k lar qoldi, bunday barcha qiymatlar uchun esa

$$|x_k - MX| \geq \varepsilon;$$

tengsizlik, binobarin, unga teng kuchli

$$(x_k - MX)^2 \geq \varepsilon^2;$$

tengsizlik o‘rinlidir. Shning uchun

$$\sum_{k=1}^{\ell}(x_k - MX)^2 p_k \geq \sum_{k=1}^{\ell}\varepsilon^2 p_k = \varepsilon^2\sum_{k=1}^{\ell} p_k.$$

So‘nggi $\sum_{k=1}^{\ell} p_k$ yig‘indi X tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_l$ qiymatlardan birini qabul qilish ehtimolidir, ya’ni $\sum_{k=1}^{\ell} p_k$ yig‘indi X miqdor

$$|x_k - MX| \geq \varepsilon;$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatni qabul qilish ehtimolidir.

Bu ehtimolni

$$P(|X - MX| \geq \varepsilon);$$

bilan belgilashga kelishgan edik, shuning uchun

$$\sum_{k=1}^{\ell} p_k = P(|X - MX| \geq \varepsilon).$$

Shunday qilib, dispersiya uchun

$$DX \geq \varepsilon^2 P(|X - MX| \geq \varepsilon);$$

bahoni hosil qildik. Bu yerdan Chebishev tengsizligi kelib chiqadi.

4.6. Katta sonlar qonuni.

Har birida A hodisa p ehtimol bilan ro‘y beradigan n ta erkli tajribadan iborat seriyada A hodisaning ro‘y berish sonini ifodalovchi X tasodifiy miqdorga qaytaylik. X tasodifiy miqdor $k(k = 0, 1, ..., n)$ qiymatlarni qabul qiladi. Ilgariroq (oldingi punktlarga qarang) X miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi hisoblangan edi:

$$MX = np; \quad DX = npq.$$

Ixtiyoriy ε_1 musbat sonni olamiz va X tasodifiy miqdor uchun Chebishev tengsizligini yozamiz:

$$P(|k - np| \geq \varepsilon_1) \leq \frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

Ushbu

$$|k - hp| \geq \varepsilon_1;$$

tengsizlik

$$\left| \frac{k}{n} - p \right| \geq \frac{\varepsilon_1}{n};$$

tengsizlikka teng kuchli ekanligi ravshan, shuning uchun quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$P\left(\left| \frac{k}{n} - p \right| \geq \frac{\varepsilon_1}{n}\right) \leq \frac{npq}{\varepsilon_1^2}.$$

ε_1 ixtiyoriy musbat son bo'lgani uchun $\frac{\varepsilon_1}{n}=\varepsilon$ deb A hodisaning n ta tajribadan iborat seriyada ro'y berish chastotasi $\frac{k}{n}$ ning A hodisaning alohida tajribada ro'y berish ehtimoli p dan chetlanishining birorta ixtiyoriy ε sondan kichik bo'lmasligining ehtimoli uchun quyidagi bahoni hosil qilamiz:

$$P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)\leq\frac{pq}{n\varepsilon^2}.$$

Hosil qilingan bu bahodan $n\to\infty$ da $\frac{pq}{n\varepsilon^2}\to 0$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon\right)=0;$$

kelib chiqadi.

Bu natija birinchi marta Ya.Bernulli tomonidan hosil qilingan bo'lib, Ya. Bernulli teoremasi yoki Ya.Bernulli formasidagi katta sonlar qonuni deyiladi.

Katta sonlar qonuni quyidagi da'voni ifodalaydi: har qanday ε musbat son uchun A hodisaning n ta tajribadan iborat seriyada ro'y berish ehtimoli p dan chetlanishining ε dan kichik bo'lmaslik ehtimoli n o'sishi bilan nolga intiladi.

Boshqacha aytganda, ε qanchalik kichik bo'lmasin yetarlicha katta n larda

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|\geq\varepsilon;$$

tengsizlikning ehtimoli nolga istalgancha yaqin bo'ladi, binobarin, qarama-qarshi

$$\left|\frac{k}{n}-p\right|<\varepsilon;$$

tengsizlikning ehtimoli birga istalgancha yaqin bo'ladi.

Shunday qilib, erkli tajribalar soni yetarlicha katta bo'lganda hodisaning ro'y berish chastotasi hodisaning ayrim tajribada ro'y berish ehtimolidan istalgancha yaqin ehtimollik bilan ro'y berishini aytish mumkin.

Shunday qilib, Ya.Bernulli formasidagi katta sonlar qonunidan har birida hodisa bir xil ehtimol bilan ro'y beradigan n ta erkli tajriba seriyasida hodisa ro'y berishi chastotasining statistik turg'unligi kelib chiqadi. Hodisaning ehtimoli noma'lum bo'lgan hollarda katta sonlar qonuni hodisa ehtimoli uchun uning tajribalar soni yetarlicha katta bo'lgandagi chastotasini qabul qilish imkonini beradi. Masalan, tugilishlarni kuzatishlar soni yetarlicha katta bo'lganda o'g'il bolalrning tug'ilish chastotasi 0,511 soniga yaqin bo'lganligidan xuddi ana shu son o'g'il bola tug'ilishining ehtimoli uchun qabul qilinadi. Bu ehtimolni bilish jiddiy demografik prognozlar qilish imkonini beradi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Diskret va uzluksiz tasodifiy miqdorlar deganda qanday miqdorlarni tushunasiz?
2. Diskret tasodifiy miqdorni taqsimot qonunini misollar yordamida tushuntiring.
3. Matematik kutilishni ta'riflang.
4. Tasodifiy miqdorning dispersiyasini tushuntiring.
5. Chebishev tengsizligi nima haqda?
6. Katta sonlar qonunining ma'nosini aytib bering.

5-§. Tanlanma metod

5.1. Matematik statistikaning vazifasi.

Ommaviy (yalpi) tasodifiy hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarni aniqlash statistik ma'lumotlarni kuzatish natijalarini o'rganishga asoslanadi. Matematik statistikaning birinchi vazifasi (masalasi) — statistik ma'lumotlarni to'plash va (agar ma'lumotlar juda ko'p bo'lsa) gruppalash usullarini ko'rsatishdan, ikkinchi vazifasi (masalasi) — statistik ma'lumotlarni tahlil qilish metodlarini tadqiqot masalalariga muvofiq ishlab chiqishdan iboratdir.

U yoki bu hodisalarni matematik statistika metodlari bilan o'rganish fan va amaliyotda uchraydigan ko'p masalalarni (texnologik jarayonlarni to'g'ri tashkil etish, maqsadga muvofiq qilib rejalashtirish va h.k.) hal etishda vosita bo'lib xizmat qiladi.

Shunday qilib, matematik statistikaning vazifasi (masalasi) ilmiy va nazariy xulosalar hosil qilish maqsadida statistik ma'lumotlarni to'plash va ishlab chiqish metodlarini yaratishdan iborat.

5.2. Bosh va tanlanma to'plamlar.

Bir jinsli obyektlar to'plamini bu obyektlarni tavsiflovchi biror sifat yoki son belgiga nisbatan o'rganish talab qilinsin. Masalan, agar biror xil detallar to'plami bo'lsa, u holda detalning sifat belgisi bo'lib, uning standartga mosligi son belgisi, detalning o'lchami xizmat qilishi mumkin.

Ayrim hollarda yalpi tekshirish o'tkazishga to'g'ri keladi, ya'ni to'plamdagi obyektlarning har birini o'rganilayotgan belgiga nisbatan tekshiriladi. Lekin, yalpi tekshirish amalda nisbatan kam qo'llaniladi, chunki yalpi tekshirish to'plami juda ko'p (katta sondagi) obyektlarni o'z ichiga olgan bo'lsa, u holda yalpi tekshirish o'tkazish jismonan mumkin bo'lmay qoladi. Bunday hollarda to'plamdan chekli sondagi obyektlar tasodifiy ravishda olinadi va ular o'rganiladi.

Tanlanma to'plam, yoki oddiy qilib, tanlanma deb tasodifiy ravishda tanlab olingan obyektlar to'plamiga aytiladi.

Bosh to'plam deb tanlanma ajratiladigan obyektlar to'plamiga aytiladi.

To‘plam (bosh yoki tanlanma to‘plami) hajmi deb, bu to‘plamdagi obyektlar soniga aytiladi. Masalan, 5000 ta detaldan tekshirish uchun 500 ta detal olingan bo‘lsa, u holda bosh to‘plam hajmi 5000, tanlanma hajmi esa $n = 500$.

Eslatma: Bosh to‘plam ko‘pincha chekli sondagi elementlarni o‘z ichiga oladi. Ammo, bu son ancha katta bo‘lsa, u holda hisoblashlarni soddalashtirish yoki nazariy xulosalarni ixchamlash maqsadini ko‘zda tutib, ba’zan bosh to‘prlam cheksiz ko‘p sondagi obyektlardan iborat deb faraz qilinadi, chunki bosh to‘plam hajmini orttirish tanlanma ma’lumotlarini ishlab chiqish natijalariga amalda ta’sir etmaydi.

5.3. Takror va notakror tanlanmalar. Reprezentativ tanlanma.

Tanlanmani tuzishda ikki xil yo‘l tutish mumkin: obyekt tanlanib va uning ustida kuzatish o‘tkazilgandan so‘ng, u bosh to‘plamga qaytarilishi yoki qaytarilmasligi mumkin. Bunga muvofiq ravishda tanlanmalar takror va notakror tanlanmalarga ajratiladi.

Takror tanlanma deb shunday tanlanmaga aytiladiki, bunda olingan obyekt bosh to‘plamga qaytariladi.

Notakror tanlanma deb, tanlangan obyekt yana bosh to‘plamga qaytarilmaydigan tanlanmaga aytiladi.

Katta sonlar qonuniga asosan, aytish mumkinki, agar tanlash tasodifiy ravishda amalga oshiriladigan bo‘lsa, tanlanma reprezentativ tanlanma deyiladi. Agar bosh to‘plam barcha obyektlarining tanlanmaga tushish ehtimollari bir xil bo‘lsa, tanlanmaning har bir obyekti tasodifiy tanlangan bo‘ladi.

Agar bosh to‘plamning hajmi yetarli katta bo‘lib, tanlanma bu to‘plamning uncha katta bo‘lmagan qismini tashkil qilsa, u holda takror va notakror tanlanmalar orasidagi farq yo‘qolib boradi: limit holda, cheksiz bosh to‘plam qaralib, tanlanmaning hajmi esa chekli bo‘lsa, u holda bu farq yo‘qoladi.

5.4. Tanlash usullari.

Amaliyotda tanlashning turli usullari qo‘llaniladi. Bu usullarni prinsip jihatdan ikki turga bo‘lish mumkin:

I. Bosh to‘plamni qismlarga ajratishni talab qilmaydigan tanlash, bunga quyidagilar kiradi:

a) oddiy qaytarilmaydigan tasodifiy tanlash;

b) oddiy qaytariladigan tasodifiy tanlash.

II.Bosh to‘plamni qismlarga ajratilgandan keyin tanlash, bunga quyidagilar kiradi:

a) tipik tanlash;

b) mexanik tanlash;

d) seriyali tanlash.

Bosh to‘plamdan elementlar bittalab olinadigan tanlash, oddiy tasodifiy tanlash deyiladi. Oddiy tanlashni turli usullar bilan amalga oshirish mumkin. Masalan, N hajmli bosh to'plamdan n ta obyekt tanlashni quyidagicha amalga oshirish mumkin. Kartochkalar olib, ularni 1 dan N gacha nomerlaymiz, keyinchalik yaxshilab aralashtirib, tavakkaliga bitta kartochka olamiz, shu olingan kartochka bilan bir xil nomerli obyekt tekshiriladi. Keyin kartochkalar to'plamiga qaytariladi va jarayon takrorlanadi, ya'ni kartochkalar aralashtirilib, ulardan biri tavakkaliga olinadi va h.k. n marta shunday qilinadi, natijada n hajmli oddiy takror tasodifiy tanlanma hosil qilinadi.

Agar olingan kartochkalar qaytarilmasa, u holda tanlanma oddiy notakror tasodifiy tanlanma bo'ladi.

Bosh tanlanmaning hajmi katta bo'lganda tasvirlangan bu jarayon ko'p vaqt va mehnat talab qiladi. Bunday holda «tasodifiy sonlarning» tayyor jadvalidan foydalaniladi, ularda sonlar tasodifiy tartibda joylashgan bo'ladi.

Tipik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda obyektlar butun bosh to'plamdan emas, balki uning «tipik» qismlaridan olinadi. Masalan, detallar bir nechta stanokda tayyorlanayotgan bo'lsa, u holda tanlash barcha detallar to'plamdan emas, balki har bir stanok mahsulotidan ayrim olinadi. Tipik tanlashdan tekshirilayotgan belgi bosh to'plamning turli tipik qismlarida sezilarli o'zgarib turganda foydalaniladi. Masalan, detallar bir nechta stanoklarda tayyorlanayotgan bo'lib, stanoklar orasida eskirganlari bo'lsa, u holda tipik tanlashdan foydalanish maqsadga muvofiqdir.

Mexanik tanlash deb, shunday tanlashga aytiladiki, bunda bosh to'plam tanlanmaga nechta obyekt kirishi lozim bo'lsa, shuncha gruppaga mexanik ravishda ajratiladi va har bir gruppadan bittadan obyekt tanlanadi.

Masalan, stanokda tayyorlangan detallarning 10% ini ajratib olish zarur bo'lsa, u holda har bir o'ninchi detal olinadi; agar 5% detallarni olish talab qilinsa, u holda har bir yigirmanchi detal olinadi va h.k.

Seriyali tanlash deb shunday tanlashga aytiladiki, bunda obyektlar bosh to'plamdan bittalab emas, balki, «seriyalab» olinadi va ular yalpisiga tekshiriladi. Masalan, buyumlar katta gruppa stanok-avtomatlar tomonidan tayyorlanayotgan bo'lsa, u holda faqat bir nechta stanokning buyumlari yalpisiga tekshiriladi. Seriyali tanlashdan tekshirilayotgan belgi turli seriyalarda uncha o'zgarmagan holda foydalaniladi.

Amaliyotda ko'pincha aralash tanlashdan foydalanilishini ta'kidlab o'tamiz, bunda yuqorida ko'rsatilgan usullardan birgalikda foydalaniladi.

Masalan, bosh to'plamni ba'zan bir xil hajmli seriyalarga ajratiladi, keyin oddiy tasodifiy tanlash bilan bir necha seriya tanlanadi va nihoyat, oddiy tasodifiy tanlash bilan ayrim obyektlar olinadi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Matematik statistikaning vazifasini aytib bering.
2. Bosh va tanlanma to'plamlar deganda qanday to'plamni tushunasiz?
3. Takror va notakror, reprezentativ tanlanmalarni misollar yordamida tushuntiring.
4. Tanlash usullarini misollar yordamida aytib bering.

6-§. Tanlanmaning statistik taqsimoti

Bosh to'plamdan tanlanma olingan. Bunda x_1 qiymat n_1 marta, x_2 qiymat n_2 marta kuzatilgan va $\sum n_i = n$ bo'lsin. Kuzatilgan x_i qiymatlar variantalar, variantalarning ortib borishi tartibida yozilgan ketma-ketligi esa variatsion qator deyiladi. Kuzatishlar soni chastotalar, ularning tanlanma hajmiga nisbati $\frac{n_i}{n} = W_i$ esa nisbiy chastotalar deyiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalar ro'yxatiga aytiladi. Statistik taqsimotni yana intervalllar va ularga tegishli chastotalar ketma-ketligi ko'rinishida ham berish mumkin (intervalga mos chastota sifatida bu intervalga tushgan chastotalar yig'indisi qabul qilinadi). Ehtimollar nazariyasidagi taqsimot bilan matematik statistikadagi taqsimotni farq qilish kerak.

Taqsimot deyilganda ehtimollar nazariyasida tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari va ularning ehtimollari orasidagi moslik, matematik statistikada esa kuzatilgan variantalar va ularning chastotalari yoki nisbiy chastotalari orasidagi moslik tushuniladi.

Misol. Hajmi 30 bo'lgan tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan.

x_i	7	11	12
n_i	6	15	9

Nisbiy chastotalar taqsimotini yozing.

Yechish. Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo'lamiz:

$$W_1 = \frac{6}{30} = 0,2; \quad W_2 = \frac{15}{30} = 0,5; \quad W_3 = \frac{9}{30} = 0,3.$$

Nisbiy chastotalar taqsimotini yozamiz:

x_i	7	11	12
W_i	0,2	0,5	0,3

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Nisbiy chastotani ta'riflang.
2. Nisbiy chastotalar taqsimotini yozib ko'rsating.

7-§. Taqsimotning empirik funksiyasi

Aytaylik, X son belgi chastotalarining statistik taqsimoti berilgan bo'lsin. Belgilashlar kiritamiz: n_x — belgining x dan kichik qiymati kuzatilgan kuzatishlar soni; n — kuzatishlarning umumiy soni (tanlanma hajmi).

Ma'lumki, $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasi $\frac{n_x}{n}$ ga teng. Agar x o'zgaradigan bo'lsa, u holda umuman aytganda, nisbiy chastotasi ham o'zgaradi, ya'ni $\frac{n_x}{n}$ nisbiy chastota x ning funksiyasidir. Bu funksiya empirik (tajriba yo'li) bilan topiladigan bo'lgani uchun u empirik funksiya deyiladi.

Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb har bir X qiymat uchun $X<x$ hodisaning ehtimolini aniqlaydigan $F^*(x)$ funksiyasiga aytiladi. Shunday qilib, ta'rifga ko'ra,

$$F^*(x)=\frac{n_x}{n}.$$

Bunda n – x dan kichik variantalar soni, n – tanlanma hajmi.

Masalan, $F^*(X_2)$ ni topish uchun X_2 dan kichik variantalar sonini tanlanma hajmiga bo'lish kerak:

$$F^*(x_2)=\frac{n_{x_2}}{n}.$$

Bosh to'plam taqsimotining $F(x)$ integral funksiyasini, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan farq qilib taqsimotning nazariy funksiyasi deyiladi.

Empirik va nazariy funksiyalar orasidagi farq shundaki, $F(x)$ nazariy funksiya $X<x$ hodisa ehtimolini, $F^*(x)$ empirik funksiya esa shu hodisaning o'zining nisbiy chastotasini aniqlaydi. Bernulli teoremasiga ko'ra, $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasi, ya'ni $F^*(x)$ shu hodisaning $F(x)$ ehtimoliga ehtimol bo'yicha yaqinlashadi. Boshqacha aytganda, $F^*(x)$ va $F(x)$ sonlar bir-biridan kam farq qiladi. Bundan esa bo'sh to'plam taqsimotining taqribiy tasvirlashda tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'lishi kelib chiqadi.

Bu xulosa esa $F^*(x)$ funksiya $F(x)$ ning barcha xossalariga ega bo'lishidan kelib chiqadi. Haqiqatan ham $F^*(x)$ funksiyaning ta'rifidan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) empirik funksiyaning qiymatlari $[0;1]$ kesmaga tegishli;

2) $F^*(x)$ – kamaymaydigan funksiya;

3) agar x_1 – eng kichik varianta bo'lsa, u holda $x \leq x_1$ da $F^*(x)=0$; x_k – eng katta varianta bo'lsa, u holda $x>x_k$ da $F^*(x)=1$.

Shunday qilib, tanlanma taqsimotining empirik funksiyasi bosh to'plam taqsimotining nazariy funksiyasini baholash uchun xizmat qiladi.

Misol. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo'yicha uning empirik funksiyasini tuzing.

variantalar	x_i	3	7	10
chastotalar	n_i	15	21	24

Yechilishi. Tanlanma hajmini topamiz: 15+21+24=60. Eng kichik varianta 3 ga teng. Demak,

$$x \leq 3 \text{ da } F^*(x) = 0.$$

$x < 7$ qiymat, xususan, $x_1 = 3$ qiymat 15 marta kuzatilgan, demak,

$$3 < x \leq 7 \text{ da } F^*(x) = \frac{15}{60} = 0,25.$$

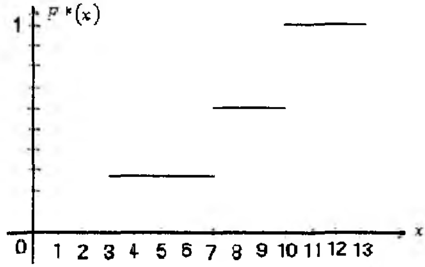
$x < 10$ qiymatlar; jumladan, $x_1 = 3$ va $x_2 = 7$ qiymatlar 15+21=36 marta kuzatilgan;

Demak,

$$7 < x \leq 10 \text{ da } F^*(x) = \frac{36}{60} = 0,6.$$

$x = 10$ eng katta variant bo'lgani uchun $x > 10$ da $F^*(x) = 1$.

Izlanayotgan empirik funksiya:



141-chizma.

$$F^*(x) = \begin{cases} x \leq 3 & \text{da} \quad 0; \\ 3 < x \leq 7 & \text{da} \quad 0,25; \\ 7 < x \leq 10 & \text{da} \quad 0,6; \\ x > 10 & \text{da} \quad 1. \end{cases}$$

Bu funksiyaning grafigi 141-chizmada tasvirlangan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar.

1. Taqsimotning empirik funksiyasini ta'riflang.
2. Empirik funksiyaga misol keltirib, grafigini chizib ko'rsating.

8-§. Poligon va gistogramma

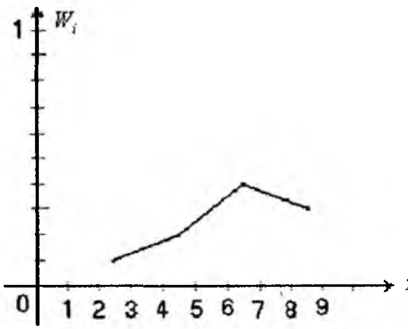
Ko'rgazmalilik maqsadida statistik taqsimotning turli grafiklari, jumladan, poligoni va gistogrammasi yasaladi.

Chastotalar poligoni deb, kesmalari $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_r, n_r)$ nuqtalarni tutashtiradigan aniq chiziqqa aytiladi. Poligonni yasash uchun abssissalar o'qiga x_i variantalarni, ordinatalar o'qiga esa ularga mos n_i chastotalari qo'yib chiqiladi. So'ngra (x_i, n_i) nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, chastotalar poligoni hosil qilinadi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb kesmalari $(x_1,W_1),(x_2,W_2),...,(x_r,W_r)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi. Nisbiy chastotalar poligonini yasash uchun abssissalar o'qiga x_i variantalarni, ordinatalar o'qiga esa ularga mos W_i chastotalarni qo'yib chiqiladi. So'ngra hosil bo'lgan nuqtalarni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, nisbiy chastotalar poligoni hosil qilinadi. 142-chizmada ushbu

x_i	2,5	4,5	6,5	8,5;
W_i	0,1	0,2	0,4	0,3;

taqsimotning nisbiy chastotalari poligoni tasvirlangan.

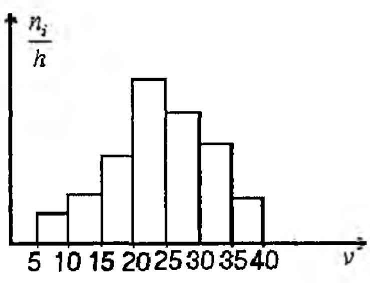


142-chizma.

Uzluksiz belgi bo'lgan holda gistogramma yasash maqsadga muvofiqdir. Buning uchun belgining kuzatiladigan qiymatlarini o'z ichiga olgan intervalni uzunligi h bo'lgan bir nechta qismiy intervallarga bo'linadi va har bir i- qismiy interval uchun n_i – i – intervalga tushgan variantalar chastotalari yig'indisi topiladi. Chastotalar gistogrammasi deb asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{n}$ nisbatlarga (chastota zichligi) teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan iborat pog'onaviy figuraga aytiladi.

Chastotalar gistogrammasini yasash uchun abssissalar o'qida qismiy intervallar, ularning ustiga esa $\frac{n_i}{n}$ masofada abssissalar o'qiga parallel kesmalar o'tkaziladi.

i – qismiy to'g'ri to'rtburchakning yuzi $h\cdot\frac{n_i}{h}=n_i$ga, ya'ni intervaldagi variantalarning chastotalari yig'indisiga teng, binobarin, chastotalar gistogrammasining yuzi barcha chastotalar yig'indisiga, ya'ni tanlanma hajmiga teng.



143-chizma.

143-chizma jadvalda keltirilgan $n=100$ hajmli taqsimot chastotalari gistogrammasi tasvirlangan.

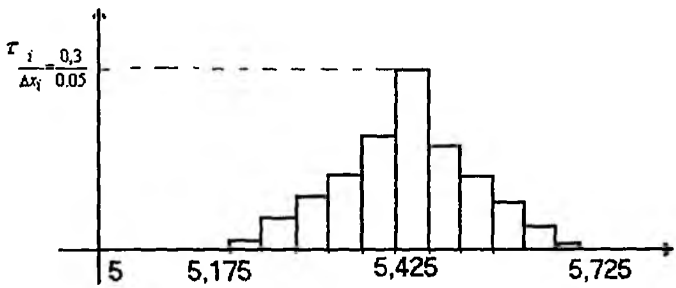
Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari *h* uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{W_i}{n}$ nisbatga (nisbiy chastota zichligiga) teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figuraga aytiladi.

Misol. Bug‘doy donining 100 marta o‘lchash natijalari berilgan bo‘lib, don uzunligining eng kichik uzunligi 5,18 mm, eng katta uzunligi 5,69 mm. [5,175; 5,725] oraliqda barcha tanlovlar variatsiyalarini olib, bug‘doy doni uzunliklari taqsimoti gistogrammasini chizing.

Yechish. Misolni yechish uchun [5,175; 5,725] oraliqni 11 ta qismiy oraliqga bo‘lamiz. Bunda har bir qismiy oraliqga kamida 9 ta o‘lchash natijasi to‘g‘ri keladi. Har bir qismiy oraliq uzunligi $\Delta x_i = 0,05$ ga teng. Shunday qilib kuzatish natijalariga ko‘ra nisbiy chastota hisoblangan tubandagi jadvalga ega bo‘lamiz.

Qismiy oraliq chegaralari	Chastota	Nisbiy chastota
5,175–5,225	1	0,01
5,225–5,275	4	0,04
5,275–5,325	7	0,07
5,325–5,375	11	0,11
5,375–5,425	16	0,16
5,425–5,575	30	0,30
5,575–5,525	14	0,14
5,525–5,575	8	0,08
5,575–5,625	6	0,06
5,625–5,675	2	0,02
5,675–5,725	1	0,01

Jadvalga asosan, bug‘doy doni uzunligi taqsimoti gistogrammasini chizamiz (144-chizma).



144-chizma.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar.

1. Poligon deganda nimani tushunasiz?
2. Chastotalar gistogrammasini ta’riflab bering.
3. Poligon va gistogrammani misollar yordamida chizib ko‘rsating.

ADABIYOTLAR

1. *T. Azlarov, X. Mansurov.* «Matematik analiz» II qism, Toshkent, «O'qituvchi», 1989.
2. *T. Azlarov* va boshqalar. «Matematikadan qo'llanma» I, II qism, Toshkent, «O'qituvchi», 1990.
3. *Архипов Г.И., Садовничий В.А., Чубариков В.Н.* «Лекция по математическому анализу», Москва, Высшая школа, 2000.
4. *B.Ye. Gmurman.* «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika», Toshkent, «O'qituvchi», 1977.
5. *B.Ye. Gmurman.* «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar yechish uchun qo'llanma», Toshkent, «O'qituvchi», 1980.
6. *Дмитрий Письменный.* Конспект лекций по высшей математике, I, II часть, М. Айрис Пресс Рольф, Москва, 2000.
7. *T. Jo'rayev, A. Sa'dullayev, G. Xudoyberganov, X. Mansurov, A. Vorisov.* «Oliy matematika asoslari», I qism, Toshkent, O'zbekiston, 1995.
8. *T. Jo'rayev, A. Sa'dullayev, G. Xudoyberganov, X. Mansurov, A. Vorisov.* «Oliy matematika asoslari», II qism, Toshkent, O'zbekiston, 1998.
9. *Ильин В.А., Позняк Э.Г.* «Аналитическая геометрия», Москва, «Наука» – физмат. лит. 1999.
10. *Луканкин Г., Мартынов, Шадринг Г.А.* «Курс высшей математики» Москва, «Просвещение», 1988.
11. *X. Latipov, Ш. Tojiev, R. Rustamov.* «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent, «O'qituvchi», 1995.
12. *V.P. Minorskiy.* «Matematikadan masalalar to'plami», Toshkent, «O'qituvchi», 1988.
13. *Петрова В.Т.* «Лекции по алгебре и геометрии» I, II часть, Москва, Владос, 1999.
14. *N.S. Piskunov.* «Differentsial va integral hisob», I, II tom, Toshkent, «O'qituvchi», 1979.
15. *R.N. Nazarov, B.T. Toshpulatov.* «Algebra va sonlar nazariyasi», Toshkent, «O'qituvchi», 1990.
16. *F.R. Rajabov, A.N. Nurmetov.* «Analitik geometriya va chiziqli algebra», Toshkent. «O'qituvchi», 1990.
17. *F. Rajabov, S. Masharipova, R. Madrahimov.* «Oliy matematika», Toshkent, «Turon-Iqbol», 2007.
18. *Ye.U. Soatov.* «Oliy matematika», Toshkent, «O'qituvchi», 1992.
19. *Яковлев Г. Н.* /Под ред./ «Высшая математика», Москва, «Просвещение», 1989.

MUNDARIJA

V bob. ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI

VI bob. FAZODA TEKISLIK, TO'G'RI CHIZIQ VA IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

VII bob. DIFFERENSIAL VA INTEGRAL HISOBI

VIII bob. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

IX bob. EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA ELEMENTLARI

FARXOD RAJABOV

MATEMATIKA

O'quv qo'llanma

O'zbekiston faylasuflari milliy jamiyati nashriyoti.
100083, Toshkent shahri, Buyuk Turon ko'chasi, 41-uy.
Tel: 136-55-79; faks: 139-88-61.

Nashr uchun mas'ul *M. Tursunova*
Muharrir *I. Karimov*
Texnik muharrir *A. Berdiyeva*
Musahhih *N. Zokirova*
Sahifalovchi *Z. Boltayev*

Bosishga ruxsat etildi: 30.07.2007. «Tayms» garniturasi. Ofset usulida chop etildi. Qog'oz bichimi 60x90 $^1/_{16}$. Shartli bosma tabog'i 17,0. Nashr bosma tabog'i 17,5. Adadi 500 nusxa. Buyurtma № 44. Bahosi shartnoma asosida.

«AVTO-NASHR» SHK bosmaxonasida chop etildi.
Manzil: Toshkent sh., 8-mart ko'chasi, 57-uy.

978-9943-319-42-4

9 789943 319424