O`ZBEKISTON RESPUBLIKASI

OLIY VA O`RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

BUXORO DAVLAT UNIVERSITETI

MAMUROV BOBOXON JO’RAYEVICH

OLIY MATEMATIKA

(Matematik analiz elementlari)

O`quv qo’llanma

Oliy o`quv yutlari 5140600-Geografiya, 5140700-Gidrometrologiya ta`lim yo`nalish talabalari uchun tayyorlangan

Бухоро -2020

OLIY MATEMATIKA

(Matematik analiz elementlari)

MAMUROV B.J.

Ushbu o`quv qo’llanma oliy ta`lim muassalarning “Oliy matematika” fani o`qitiladigan barcha mutaxasisliklari fan dasturini qamrab olingan bo`lib, u ma`ruza va amaliy mashg`lotlarni olib borishga mo`ljallangan. Har bir mavzu oxirida nazorat savollari, o`quv xonasida va mustaqil bajarish uchun misol va masalalar (javoblari bilan), talabalar bilimlarini tekshirish uchun bitta yoki bir necha to`g`ri javobli testlar berilgan.

O`quv qo’llanma 5140600-Geografiya, 5140700-Gidrometrologiya ta`lim yo`nalish talabalari foydalanishiga to`liq mos, undan umumtalim maktablarining yuqori sinf o’quvchilar va o’qituvchilar ham foydalanishlari mumkin.

Taqrizchilar:

T.H.Rasulov - dotsent, fizika- matematika fanlari nomzodi.

G`.G`.Yunisov-BuxMTI “Oliy matematika”kafedrasi mudiri, dotsent.

SO’Z BOSHI

Yuqori malakali, raqobatbardosh, zamon talablarga javob bera oladigan kadrlar tayyorlashda ularga chuqur matematik bilimlar berish va bu bilimlarni masalalar yechishga tatbiq eta olishga o‘rgatish katta ahamiyatga ega.

Oliy matematika fani tabiiy yo’nalishlar bo’yicha tahsil olayotgan talabalarga o’qitiladigan deyarli barcha fanlar bilan bevositabog’liq bo’lib, ko’pgina fanlar uchun asos bo’lib hisoblanadi va ularni o’rganishda matematik usullar muhim o’rin tutadi.

Oliy matematika fani fizika, kimyo,geogafiya, geologiya va boshqa ko’plab sohalarni o’ganishda, ularning tuli masalalarini yechishda, ayniqsa, turli ob`ektlar jarayonlarning matematik modellarini tadqiq qilishda muhim ahamiyatga ega. Qo’llanma “Oliy matematika” fani o’quv dasturi -asosiy tushunchalar, funksiya tushunchasi, funksiyaning limiti va uzluksizligi, funksiyaning hosilasi, aniqmas integral, aniq integral, sonli qatorlar va ko’p o’zgaruvchili funksiyalar bo’limlarini qamrab olgan, bundan tashqari hosila va differensialning tatbiqlariga alohida e`tibor qaratilgan.

Qo’llanma nazariy va amaliy mashg’ulotlarni olib borishga mo’lljallangan.

Har bir tushuncha, formula misollar bilan mustahkamlangan,imkon darajasida ularning turli yo’nalishlarga mos ma’nolari ochib berilgan,namuna sifatida misol va masalalar yechib ko’rsatilgan.

Dars jarayonida va mustaqil ravishda bajarish uchun misol va masalalar keltirilib, ularning javoblari ham berilgan. Bulardan tashqari qo’llanmada har bir mavzu oxirida talabalar bilimlarini tekshirish uchun bitta yoki bir necha to’g’ri javobli testlar ham berilgan.

Qo’llanmani takomillashtirish va sifatini oshirish bo‘yicha taklif va mulohazalarini muallif mamnuniyat bilan qabul qiladi.

Asosiy tushunchalar

Matematik belgilashlar

Matematikada ayrim hollarda yozuvni qisqartirish maqsadida tez-tez uchraydigan so'z va birikmalar o'rniga maxsus belgilardan foydalaniladi. Bu belgilarni quyidagi jadvalda keltiramiz.

№	Matematik belgilar	Matematik belgilarning ishlatilish mazmuni
1	$\in$	tegishlilik belgisi. a element A to'plamning elementi bo'lsa, a$\in$ A kabi yoziladi.
2	$\bar{\in}$ ($\notin$)	tegishli emaslik belgisi. b element B to'plamga tegishli bo'lmasa, b$\bar{\in}$ B kabi yoziladi.
3	$\subset$	qism belgisi. A to'plam B to'plamning qismi bo'lsa, uni A $\subset$B kabi yozadi.
4	$\forall$	umumiylik kbantori belgisi. "Har qanday", "ixtiyoriy", "barchasi uchun"so'zlari va so'z birikmalari o'rnida ishlatiladi.
5	$\exists$	mavjudlik kvantori belgisi. "Mavjudki" , "topiladiki" ,o'rnida ishlatiladi.
6	$\Rightarrow$	implikatsiya (kelib chiqadi) belgisi. "…bo'lsa, …bo'ladi" ,"…kelib chiqadi", o'rnida ishlatiladi.
7	$\Leftrightarrow$	ekvivalentlik(teng kuchlilik) belgisi.

To'plamlar va ular ustida amallar

To'plam tushunchasi matematikaning boshlang'ich tushunchalaridan biri bo'lib, odatda bu tushuncha ta'rifsiz qabul qilinadi va uni misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan, ma`lum bir o'quv guruhidagi talabalar,o'zbek alifbosining barcha harflari , Buxoro shahridagi hamma tarixiy yodigorliklar, hamma natural sonlar va boshqalar to'plami haqida gapirish mumkin. Bunday misollarni juda ko'p keltirish mumkin. To'lamlar nazariya asoslari 1879–1884 yillarda nemis matematigi G. Kantor tomonidan chop etilgan bir qator maqolalarda yoritib berilgan.

Umuman, to'plam bu biror bir xususiyati bo'yicha umumiylikga ega bo'lganturli narsalar majmuasidir.

1-ta'rif. Berilgan to'lamni hosil qilgan narsalarni to'plamning elementlari deyiladi.

2-ta'rif. Agar to'plamning birorta ham elementi bo'lmasa unga bo'sh to'plam deyiladi va $\varnothing$ kabi belgilanadi.

Odatda to'plamlarni lotin yoki grek alifbosining bosh harflari bilan,uning elementlari esa kichik harflari bilan belgilanadi.

Masalan, $A, B, C, \ldots, X, Y, Z$ lar bilan to'plamni, $a, b, c, \ldots, x, y, z$ lari bilan to'plamning elementi belgilaymiz.

Biror a element A to'plamning elementi ekanligi $a \in A$ kabi, tegishli emasligi esa $a \overline{\in} A$ yoki $a \notin A$ kabi yoziladi.

Chekli sondagi elementlaridan tashkil topgan to'plam chekli to'plam deb ataladi.

Matematikada ko'pincha chekli bo'lmagan to'plamlarni – cheksiz to'plamlarni qarashga to'g'ri keladi. Masalan, barcha to'g'ri kasrlar, barcha natural sonlar, berilgan nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami cheksiz to'plamlarga misol bo'la oladi.

3-ta'rif. Agar A to'plamning har bir elementi B to'plamning ham elementi bo'lsa, A to'plam B to'plamning qismi, ba'zan qism to'plami deyiladi va $A \subset B$ kabi yoziladi.

Ta'rifdan har qanday A to'plam o'zining qismi, ya'ni $A \subset A$ ekani bevosita kelib chiqadi. $\varnothing$ bo'sh to'plam har qanday to'plamning qismidir, ya'ni $\varnothing \subset A$.

A va $\varnothing$ to'plamlar A to'plamning xos bo'lmagan qismlari deyiladi, A to'plamning boshqa hamma qismlari esa uning xos qismlari deyiladi.

Misollar.

1. $A=\{1,2\}$, $B=\{1,2,3,4\}$ A to'plam B to'plamning xos qismi bo'ladi.
2. $A=\{1,2,5,6\}$, $B=\{1,2,3,4,5\}$ to'plamlarning hech biri ikkinchisining qismi emas.

4-ta'rif. X ixtiyoriy to'plam bo'lib, A to'plam uning biror qismi to'plami bo'lsin. X to'plamning A ga kirmagan barcha elementlaridan iborat to'plamni A ning X ga qadar to'ldiruvchi to'plami deyiladi va u $C_x(A)$ kabi belgilanadi:

$$C_x(A)=X\setminus A$$

Masalan, agar $A=\{1,2\}, X=\{1,2,3,4,5\}$ bo'lsa u holda $C_x(A)=\{3,4,5\}$

5- ta'tif. Agar A to'plam B to'plamning qismi va B to'plam A to'plamning qismi bo'lsa, A to'plam B to'plamga teng deyiladi va bu munosabat $A=B$ kabi yoziladi.

Agar shunday $a\in A$ topilsaki, $a\overline{\in} B$ bo'lsa, yoki shunday $b\in B$ topilsaki, $b\overline{\in} A$ bo'lsa, u holda A va B to'plamlar teng emas deyiladi va $A\neq B$ kabi yoziladi.

6-ta'tif. A va B ixtiyoriy to'plamlar bo'lsin. Agar C to'plam faqatgina A va B to'plamlarning elementlaridan iborat bo'lsa, u holda C to'plam A va B to'plamlarning yig'indisi deyiladi va $A\cup B=C$ kabi belgilanadi. Bunda $\cup$ amal to'plarni qo'shish amali deyiladi, ba'zida yig'indisi yoki birlashmasi deb ham ataladi(1-rasm).

Agar biror element A to'plamga ham B to'plamga ham kirsa, bu element C to'plamda bir marta hisoblanadi.

Agar $A\subset B$ bo'lsa,u holda $A\cup B=B$; xususiy holda $A\cup A=A$ bo'ladi.

Misol. $A=\{1,2,4,5\}, B=\{0,1,2,3,6\}$ bo'lsa $A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6\}$ bo'ladi.

7- ta'rif. A va B to'plamlarning umumiy elementlaridan tuzilgan C to'plam A va B to'plamlarning kesishmasi deyiladi va $C=A\cap B$ kabi belgilanadi(2-rasm).

Misol. $A=\{1,2,3,4,5,6\}, B=\{0,2,4,6,8,10\}$ $A\cap B\{2,4,6\}$

Xususiy holda $A\cap A=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$; agar $A\subset B$ bo'lsa,u holda $A\cap B=A$ bo'ladi.

Agar A va B to'plamlarning umumiy elementlari bo'lmasa, u holda $A\cap B=\varnothing$ bo'ladi.

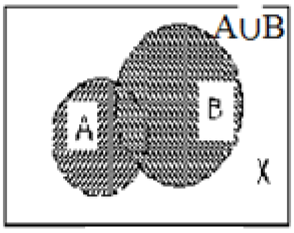
8-ta'rif. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tuzilgan C to'plam A to'plamdan B to'plamning ayirmasi deyiladi va $C = A \setminus B$ kabi yoziladi(3-rasm).

Misol. $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{4,5,6,7,8\}$ $A \setminus B=\{1,2,3\}$.

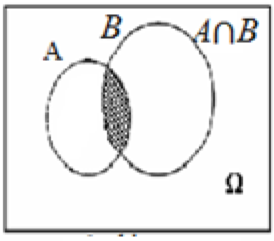
9- ta'rif. Ushbu $C=(A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ to'plamga A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi deyiladi va $C = A \Delta B$ kabi belgilanadi.

Misol. $A=\{1,2,3,4,5\}, B=\{4,5,6,7,8\}$ $A \Delta B=\{1,2,3\} \cup \{6,7,8\}=\{1,2,3,6,7,8\}$

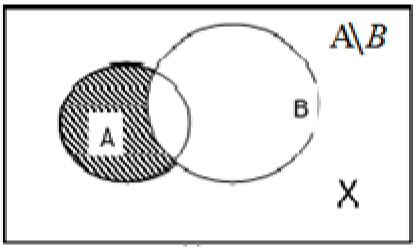
To'plamlar va ular ustidagi amallarni Eyler-Venn diarammalari yordamida tushuntirish(tasavvur qilish) qulay.To'plamlar ustidagi amallarni 1-5 rasmlardagi shakllar kabi tasvirlash mumkin.



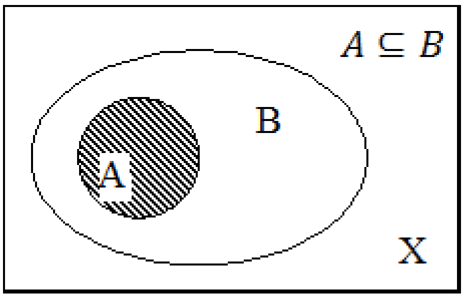
1-chizma



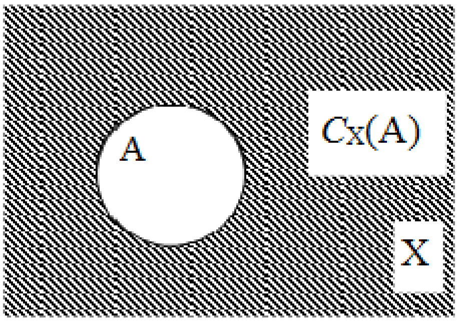
2-chizma



3-chizma



4-chizma



5-chizma

10-ta'rif. A va B to'plamlarning Dekart yoki to'g'ri ko'paytmasi deb $\{(x,y): x \in A, y \in B\}$ to'plamga aytiladi va u $A \times B$ kabi bilan belgilanadi.

Odatda A×A to'plamni A^2deb belgilanadi, ya`niA×A=A^2 .

Misol. $A=\{1,2\}, B=\{1,3,5\}$ $A \times B=\{(1,1),(1,3),(1,5),(2,1),(2,3),(2,5)\}$

Umuman aytganda $A \times B \neq B \times A$.

To'plamlar ustida kiritilgan amallar quyidagi xossalarga ega.

Kommutativlik xossasi:

1^0. $A \cup B = B \cup A$ $\qquad$ 2^0. $A \cap B = B \cap A$

Assostiativlik xossasi:

3^0. $(A\cup B)\cup C = A\cup(B\cup C)$ 4^0. $(A\cap B)\cap C = A\cap(B\cap C)$

5^0. $(A\cup B)\cap C = (A\cap C)\cup(B\cap C)$

Distributivlik xossasi.

6^0. $(A\setminus B)\cap C = (A\cap C)\setminus(B\cap C$ 7^0. $A\cap(B\Delta C) = (A\cap B)\Delta(A\cap C)$

5- xossasini isbotlaymiz: Buning uchun

$(A\cup B)\cap C \subset (A\cap C)\cup(B\cap C)$ va $(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$

ekanligini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy $a\in(A\cup B)\cap C$ bo'lsin. U holda kesishma ta'rifiga ko'ra $a\in A\cup B$ va $a\in C$ bo'ladi.

$a\in A\cup B$ ekanligidan esa $a\in A$ yoki $a\in B$ munosabatlarning kamida bittasi o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Agar $a\in A$ bo'lsa, $a\in A\cap C$ bo'ladi, agar $a\in B$ bo'lsa, u holda $a\in B\cap C$ bo'ladi. Demak, har ikkala holda ham $a\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$ munosabat o'rinlidir.Teskari munosabat ham xuddi shunga o'xshash isbotlanadi.

Qolgan xossalar ham shunga o'xshash isbotlanadi.

Biror A to'plam berilgan bo'lib, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar uning qismiy to'plamlari bo'lsin: $A_k \subset A$ $(k = 1,2,3,\ldots,n)$.

Agar $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ qismiy to'plamlar sistemasi uchun

1^0. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n = A$,

2^0. $A_k \cap A_i = \varnothing$ $(k \neq i;\quad k, i = 1,2,3,\ldots,n)$

shartlar bajarilsa, $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ sistema A da bo'laklash bajargan yoki A to'plam $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlarga bo'laklangan deyiladi.

Ko'p hollarda qandaydir E asosiy to'plamning qism to'plamlarini qarashga to'g'ri keladi. Masalan, sonlar o'qidagi turli nuqtalar to'plamlari. Bu holda $E\setminus A$ ayirma A to'plamning to'ldiruvchi to'plami deyiladi va A' yoki CA shaklda baelgilanadi.

To'plamlar nazariyasi va uning tadbiqlarida muhim o'rin tutadigan ikkilik prinsipi (qonuni) deb nomlanuvchi quyidagi ikki munosabatni keltiramiz:

1.*Yig'indining to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar kesishmasiga teng:*

$$E \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcap_{\alpha}(E \setminus A_{\alpha}) \qquad (1)$$

2. *Kesishmaning to'ldiruvchisi to'ldiruvchilar yig'indisiga teng:*

$$E \setminus \bigcap_{\alpha} A_{\alpha} = \bigcup_{\alpha}(E \setminus A_{\alpha}) \qquad (2)$$

Ikkilik prinsipi shundan iboratki, ixtiyoriy tenglikdan, agar bu tenglik qandaydir universal E to'plamning qism to'plamlari ustida bo'lsa, ikkinchi ikkilik tenglikka o'tish mumkin, buning uchun barcha qaralayotgan to'plamlar ularning to'ldiruvchilari bilan, to'plamlar kesishmasi-birlashma bilan birlashmasi-kesishma bilan almashtiriladi.

Biz namuna tariqasida (1) tenglikning isbotini keltiramiz. (2) tenglik shunga o'xshash isbotlanadi.

Isbot. $x \in E \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ ixtiyoriy element bo'lsin. U holda $x \in E$ va $x \notin \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ bo'ladi. Bundan ixtiyoriy α uchun x ning A_{α} to'plamga tegishli emasligiga kelamiz. Demak, x element A_{α} to'plamlarning to'ldiruvchilarida yotadi.shunday qilib, ixtiyoriy α uchun $x \in E \setminus A_{\alpha}$ munosabat o'rinli, bundan biz $x \in \bigcap_{\alpha}(E \setminus A_{\alpha})$ ga ega bo'lamiz. Bu esa

$$E \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \subset \bigcap_{\alpha}(E \setminus A_{\alpha}) \qquad (3)$$

munosabatni keltirib chiqaradi. Endi teskari munosabatni isbotlaymiz. Agar $x \in \bigcap_{\alpha}(E \setminus A_{\alpha})$ bo'lsa, u holda barcha α larda $x \in E \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ bo'ladi va x element A_{α} to'plamlarning birortasiga ham tegishli bo'lmaydi, bu esa $x \notin \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ ekanligini bildiradi. Demak, $x \in E \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ ekan. Bundan biz

$$E \setminus \bigcup_{\alpha} A_{\alpha} \supset \bigcap_{\alpha}(E \setminus A_{\alpha}) \qquad (4)$$

munosabatga kelamiz. (3)-(4) munosabatlardan (1) tengligkning isboti kelib chiqadi.

Haqiqiy sonlar. Haqiqiy sonlar to’plami

1-ta`rif. Elementlari sonlardan iborat bo’lgan to‘plam ***sonli*** **(sonlar)** ***to‘plam*** deb ataladi.

Bizga maktab kursidan tanish bo’lgan muhim to’plamlar ustida qisqacha to’xtalamiz.

Sanash uchun ishlatiladigan sonlarga **natural sonlar** deyiladi va bu sonlar to’plami $N=\{1,\ 2,\ ...,\ n,\ ...\}$ kabi belgilanadi.

. . . ,-3,-2,-1,0,1,2,3,... – sonlariga **butun sonlar** deyiladi va bu sonlar to’plami $Z=\{. . . ,-3,-2,-1,0,1,2,3,...\}$ kabi belgilanadi.

$\frac{p}{q}$ $(p\in Z,\ q\in N)$ ko‘rinishdagi sonlarga **ratsional sonlar** deyiladi va $Q=\left\{\frac{p}{q},\ p\in Z,\ q\in N\right\}$ kabi belgilanadi.

$\frac{p}{q}$ $(p\in Z,\ q\in N)$ ko‘rinishda ifodalab bo’lmaydigan sonlarga **irratsional** sonlar deyiladi va I kabi belgilanadi.

Bunday sonlar mavjud va I bo‘sh to‘plam emas.

Masalan, $\sqrt{2}$ irratsional son .Buni ko’rsatish uchun teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $\sqrt{2}$ ratsional son deb faraz qilamiz. Bu esa uni $\sqrt{2}=\frac{p}{q}$ ko‘rinishda ifodalash mumkinligini ko’rsatadi. Bunda p butun q natural sonlarni o‘zaro tub, ya’ni umumiy ko‘paytuvchilarga ega emas deb olish mumkin.

Agar bunday ko‘paytuvchilar mavjud bo‘lsa, ularni o‘zaro qisqartirish orqali ko‘rilayotgan holga keltirish mumkin. Yuqoridagi tenglikni kvadratga oshirib, $p^2=2q^2$ tenglikni hosil qilamiz. Undan p juft son ekanligi va shu uni $p=2k$ ko‘rinishda yozish mumkinligi kelib chiqadi. Bundan esa

$$p^2=2q^2\Rightarrow(2k)^2=2q^2\Rightarrow q^2=2k^2\Rightarrow q=2r,$$

ya’ni n ham juft son ekanligi kelib chiqadi. U holda pva q sonlari 2 sonidan iborat umumiy ko‘paytuvchiga ega ekanligi kelib chiqadi. Bu esa qilgan farazga zid. Demak, farazimiz noto‘g‘ri va $\sqrt{2}$ ratsional son emas.

2-ta`rif. Ratsional va irratsional sonlar birgalikda **haqiqiy sonlar** sonlar deb ataladi va u R kabi belgilanadi.

Haqiqiy sonlar to’plami ratsional va irratsional sonlar to‘plamlarining birlashmasidan iborat, ya’ni $R = Q \cup I$.

Yuqorida keltirilgan sonlar to‘plamlar uchun $N \subset Z \subset Q \subset R, I \subset R$ munosabatlar o‘rinli bo‘ladi.

Har bir haqiqiy songa sonlar o’qidan bitta nuqta va sonlar o’qidagi har bir nuqtaga bitta haqiqiy son mos qo’yiladi, “x soni” va “x nuqta” yozuvlari bir xil ma’noda tushuniladi.

Chekli a va b ($a < b$) sonlari uchun $a < x < b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar to‘plamini ***interval yoki oraliq*** deb ataladi va u (a, b) kabi belgilanadi.

$a \le x \le b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar to‘plami ***segment yoki kesma*** deyiladi va $[a, b]$ kabi belgilanadi.

$a < x \le b$ yoki $a \le x < b$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x sonlar to‘plami ***yarim interval yoki yarim oraliqlar*** deb ataladi va mos ravishda $(a, b]$ yoki $[a, b)$ ko‘rinishda ifodalanadi. Bunda a va b sonlari (a, b) oraliq yoki [a,b] kesma yoki (a,b], [a,b) yarim oraliqlarning mos ravishda ***chap va o‘ng chegaralari*** , d=b−a soni esa oraliqning ***uzunligi*** deyiladi.

Masalan, (−5,8) oraliq, [−5,8] kesma, (−5,8] va [−5,8) yarim oraliq chegaralari a=−5 va b=8, uzunligi esa d=8−(−5)=13.

Endi a va b chegaralardan birortasi cheksiz (∞ yoki −∞) bo‘lgan hollarni qaraymiz. Bunda (−∞, b) yoki (a, ∞), (−∞,b] yoki [a, ∞) ***yarim cheksiz oraliqlar***, (−∞, ∞) esa ***cheksiz oraliq*** deyiladi.

Chegaralari o‘ziga tegishli bo‘lmagan $(a,\ b)$ oraliq ***ochiq***, chegaralaridan faqat bittasi o‘ziga tegishli bo‘lgan $[a,\ b)$, $(a,\ b]$ yarim oraliqlar ***yarim ochiq***, ikkala chegarasi ham o‘ziga tegishli $[a,\ b]$ kesma ***yopiq to‘plam*** deyiladi.

Qaralayotgan c nuqtani o‘z ichiga olgan har qanday $(a,\ b)$ oraliq ($a < c < b$) *c**nuqtaning atrofi*** deb ataladi. Har qanday $\varepsilon > 0$ soni uchun $(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$ oraliq esa *c**nuqtaning ε atrofi*** deb ataladi.

Masalan, (1.8, 2.2) oraliq $c = 2$ nuqtaning $\varepsilon = 0{,}2$ atrofi bo‘ladi.

3-ta`rif. Berilgan X sonli to‘plam uchun shunday M (yoki m) soni mavjud bo‘lib, ixtiyoriy $x \in X$ uchun $x \le M$ (yoki $x \ge m$) shart bajarilsa, X ***yuqoridan (quyidan) chegaralanganto‘plam*** deyiladi. Agar X ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan ($m \le x \le M$) bo‘lsa, u ***chegaralangan to‘plam*** deb ataladi.

Masalan, $(-\infty,\ 1]$ yuqoridan chegaralangan $(x \le 1)$, $(-3,\infty)$ quyidan chegaralangan $(x > -3)$, $[-2,6)$ chegaralangan $(x \ge -2,\ x < 6)$to‘plam bo‘ladi.

4-ta`rif. Berilgan X sonli to‘plam uchun har qanday $M > 0$ soni uchun shunday $x_0 \in M$ element mavjud bo‘lsaki, uning uchun $x_0 > M$ yoki $-x_0 < M$ shart bajarilsa, X ***chegaralanmagan to‘plam*** deyiladi.

Masalan, $(-\infty,\ b)$, $(a,\ -\infty)$, $(-\infty,\ b]$, $[a,\ \infty)$ va $(-\infty,\ \infty)$ chegaralanmagan sonli to‘plamlardir.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati (yoki moduli) tushunchasi bilan bog’liq va maktab matematikasidan ma’lum bo’lgan ma`limotlarni eslatib o’tamiz.

5-ta`rif. Har qanday $x \in R$ sonining ***absolut qiymati*** (***yoki moduli***) deb $x \ge 0$ bo’lsa x ga, agar $x < 0$ bo’lsa, $-x$ ga teng bo‘lgan songa aytiladi.

Berilgan $x \in R$ sonining absolut qiymati $|x|$ kabi belgilanadi va ta’rifga asosan,

$$|x| = \begin{cases} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

formula bilan aniqlanadi.

Geometrik talqinda, absolyut qiymat – sonlar o’qida sanoq boshidan songacha bo’lgan masofani ifodalaydi.

Masalan, |5|=5, |–7|=7, |0|=0 bo‘ladi.

Absolyut qiymat quyidagi xossalarga ega:

$$|x| \ge 0; \ |x+y| \le |x| + |y|; \ |xy| = |x||y|; \ |x-y| \ge |x| - |y|; \ \left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \ (y \ne 0).$$

Biz namuna tariqasida $|x+y| \le |x| + |y|$ tengsizlikning isbotini keltiramiz. Absolyut qiymat ta'rifidan $|x| \ge x$ va $x \ge -|x|$ tengsizliklar kelib chiqadi. Ularga asosan $-|x| \le x \le |x|$ va $-|y| \le y \le |y|$ tengsizliklarni yozish mumkin. Bu tengsizliklarni hadma-had qo'shsak,

$$-(|x| + |y|) \le x + y \le |x| + |y| .$$

Bu yerda ikki hol bo'lishi mumkin.

1-hol. $x + y \ge 0$ bo'lsin. Bu holda $x + y = |x + y|$ bo'ladi va oldingi qo'sh tengsizlikning o'ng tomonidan foydalanib, isbotlash talab qilingan $|x+y| \le |x|+|y|$ tengsizlikni hosil qilamiz.

2-hol. $x + y < 0$ bo'lsin. Unda $-(x+y) = |x+y|$ bo'ladi va oldingi qo'sh tengsizlikning chap tomonidan foydalansak, $-(|x|+|y|) \le x+y$ yoki $|x|+|y| \ge -(x+y)$ tengsizlikka, bundan esa isbotlanishi kerak bo'lgan $|x|+|y| \ge |x+y|$ tengsizlikka kelamiz. x ni $x = (x-y)+y$ ko'rinishda ifodalab, isbotlangan xossadan foydalanib, $|x| = |(x-y)+y| \le |x-y| + |y|$ munosabatni olamiz, bundan esa, $|x-y| \ge |x| - |y|$ tengsizligi kelib chiqadi.

Mavzuga doir nazorat savollari va topshiriqlar

1. Matematik belgilar nima maqsadda ishlatiladi?
2. "Tegishlilik" va "tegishlimaslik" belgilarini yozing va ularni misollar bilan tushunting?
3. "Mavjudlik" va "topiladiki" belgilarini yozing va ularni misollar bilan tushunting?
4. "Qism" belgisini yozing va uni misollar bilan tushunting?
5. "Kelib chiqadi" va " teng kuchlilik" belgilarini yozing va ularni misollar bilan tushunting?
6. To'plam tushunchasiga izoh bering va misollar keltiring?

7. Bo’sh to’plam ta`rifini keltiring?

8. Qachon A to’plam B to’plamning qismi deyiladi?

9. Qachon ikkita to‘plam teng deyiladi?

10. To‘plamlar birlashmasi ta’rifini keltiring va uni misollar bilan tushuntiring?

11. Ikki to’plam kesishmasi ta’rifini va unga misollar keltiring?

12. Ikki to‘plam ayirmasi qanday aniqlanadi?

13. To’plamlar ustida amallar qanday xossalarga ega?

14.To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi qanday aniqlanadi?

15. Ikkilik qoidasini tushuntirib bering ?

16. Sonli to’plamlar ta`rifini keltiring?

17. Natural, butun, rarsional sonlar ta`riflarini ayting va bu sonlar to’plamlarining belgilanishlarini yozing?

18. Irrarsional sonlarga ta`rif bering va bu sonlar to’lamining bo’sh emasligini isbotlang?

19. Haqiqiy sonlar deb qanday sonlarga aytiladi va bu sonlar to’plami qanday belgilanadi?

20. Qanday sonli to‘plam oraliq deb ataladi?

21. Kesma deb qanday sonli to‘plamga aytiladi?

22. Nuqtaning atrofi deb nimaga aytiladi?

23. Qachon sonli to‘plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi?

24. Qanday sonli to‘plam chegaralangan deyiladi?

25. Sonning absolut qiymati ta`rifini va xossalarini keltiring?

26. Berilgan A va B to‘plamlar uchun $A\cup B,\ A\cap B,\ A\setminus B,\ A\Delta B$ to‘plamlarni toping [1-7].

1. A={Barcha teng yonli uchburchaklar to’plami}, B={Barcha to’g’ri burchakli uchburchaklar to’plami} .

2. $A=[0,1],\quad B=(0,1).$

3. $A=\{2,\ 4,\ 6,\ k,\ 2n,\ k\},\ B=\{3,\ 6,\ 9,\ k,\ 3n,\ k\}$

4. $A=Q,\ B=R\setminus Q$

5. $A=[0,1]\setminus\mathbf{Q},\quad B=[0,1]\cap\mathbf{Q}$.

6. $A=\{x\in R:\sin 4x=0\},\ B=\{x\in R:\cos 2x=0\}$

7. $A=\{(x,y):4\le x\le 4,\ -4\le y\prec 4\},\ B=\{(x,y):x^2+y^2\le 25\}$

27. Quyidagi tengliklar isbotlansin [8-12].

1. $A\setminus B=A\cap\overline{B}$

2. $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$.

3. $\overline{(A\cup B)}=\bar{A}\cap\ \bar{B}$.

4. $\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$.

5. $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

Mavzuga doir testlar

1. **“**Tegishlilik” belgisi: A) ∈ B) ∉ C) ⋿ D) ∃

2. “Tegishlimaslik belgisi”: A) ∉ B) ∈ C) ∀ D) ∃

3. “Topiladiki” belgisi: A) ∃ B) ∉ C) ⋿ D) ∈

4. “Ixtiyoriy” belgisi: A) ∀ B) ∈ C) ∉ D) ∃

5. Qism belgisi : A) ⊂ B) ∈ C) ∉ D) ∃

6. “Kelib chiqadi” belgisi : A) ⟹ B) ⟺ C) ∀ D) ⋿

7. “Teng kuchlilik” belgisi: A) ⟺ B) ⟹ C) ∀ D) ⋿

8. To’plamlar nazariyasi asoslari dastlab qaysi olimning ishlarida yoritib berilgan:

A) Leybinis B) Kontor C) Eyler D) Teylor.

9. Agar A={2,6,9}, B={4,6,10} bo’lsa, A∪ B=

A) {2,4,6,9,10} B) {6} C) {2,9} D) {6,10}

10. Agar A={2,6,9}, B={4,6,10} bo’lsa, $A\setminus B=$

A) {2,4,6,9,10} B) {6} C) {2,9} D) {6,10}

11. Agar A={2,6,9}, B={4,6,10} bo’lsa, A∩ B=

A) {2,4,6,9,10} B) {6} C) {2,9} D) {6,10}

12. A={1,2,3}, B={3,4} bo’lsa, $A\times B$ nechata elementdan iborat bo’ladi.

A) 5 B) 6 C) 4 D) 1

13. To’plam sonli deb ataladi, agar uning elementlari …iborat bo’lsa.

A) faqat natural sonlardan B) faqat butun sonlardan

C) faqat ratsional sonlardan D) haqiqiy sonlardan

14. Natural (N), butun (Z), ratsional (Q) sonlar toplamlari orasida:

A) $N \subset Z \subset Q$ B) $Z \subset N \subset Q$ C) $Q \subset Z \subset N$ D) $N \subset Q \subset Z$

14. Ratsional (Q), irratsionai (I), haqiqiy (R) sonlar to'plamlari orasida:

A) $Q \cup I = R$ B) $Q \cap I = R$ C) $R \setminus Q = I$ D) $Q \setminus I = R$

15. Quyidagilardan qaysi biri natural sonlar to'plamiga tegishli?

A) $\sin 0$ B) $\cos\frac{\pi}{4}$ C) $\sin\frac{\pi}{2}$ D) $\cos\pi$

16. Quyidagilardan qaysi biri ratsional sonlar to'plamiga tegishli?

A) $\sin\frac{\pi}{6}$ B) $\sin\frac{\pi}{4}$ C) $\cos\frac{\pi}{4}$ D) $\cos\frac{\pi}{6}$

17. Quyidagilardan qaysi biri irratsional son?

A) e soni B) $\cos\pi$ C) $\sqrt{0.25}$ D) $\sin 0$

18. Quyidagi sonli to'plamlardan qaysi biri kesmani bildiradi ?

A) (a, b) B) $[a, b)$ C) $(a, b]$ D) $[a,b]$

19. Absolut qiymat uchun quyidagilarning qaysilari to'g'ri ?

A) $|x| \geq 0$ B) $|x| = |-x|$ C) $|xy| = |x||y|$ D) A, B, C

20. Quyidagilardan qaysi biri noto'g'ri ?

A) $|x| \geq x$ B) $|x-y| \geq |x|-|y|$ C) $|x+y| = |x|+|y|$ D) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

Funksiya tushunchasi

Funksiya, o'zgarmas va o'zgaruvchi kattaliklar haqida tushuncha

Hayotimizning turli javhalarida o'zgarmas va o'zgaruvchi kattaliklar bilan ishlashga to'g'ri keladi. Masalan, fizikada – harorat, bosim, kuch; geometriyada - hajm, yuza; tibbiyot va biologiyada - bemorning harorati, bosimi, tomirdagi qonning oqish tezligi va hokazo

O'zgarmas kattaliklar. Ma'lum bir sharoitda aynan bir xil son qiymatni qabul qiluvchi kattaliklarni o'zgarmas kattaliklar deyiladi. Masalan, jismning massasi, tekis harakatda tezlik va hokazo.

O'zgaruvchi kattaliklar. Ma'lum bir sharoitda bir necha turli son qiymatlarini qabul qila oladigan kattaliklarga o'zgaruvchi kattaliklar deyiladi.

Masalan, tekis harakatda o'zgaruvchi kattalik vaqt va masofa; yuqoriga ko'tarila borsak balandlik va bosim; harakatdagi(dinamikada) odam organizimida yurak urishi va aortaga otilib chiqqan qonning zarb hajmi va hokazo. O'zgaruvchi kattaliklarni odatda lotin alibosi harflari $x, y, z,...$ lar bilan belgilanadi.

X va Y bo'sh bo'lmagan to'plamlar berilgan bo'lsin.

1-ta`rif. Agar X to'plamning har bir x elementiga Y to'plamning to'la aniqlangan y elementi mos qo'yilgan bo'lasa, X to'plamda $y = f(x)$ funksiya berilgan deyiladi.

x - erkli o'zgaruvchi(argument), y - erksiz o'zgaruvchi(funksiya) deyiladi, f esa moslik qonunini bildiradi.

X to'plam fuksiyaning aniqlanish(mavjudlik) sohasi, $y = f(x)$ tenglik bilan aniqlanuvchi barcha sonlar to'plami funksiyaning o'zgarish (qiymatlar) sohasi deyiladi va ular mos ravishda $D(f)$ va $E(f)$ kabi belgilanadilar.

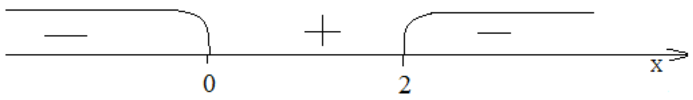
Umuman olganda, funksiyaning aniglanish sohasi deyilganda, $y = f(x)$ funksiya ma`noga ega bo'ladigan barcha x lar to'plami tushuniladi.

1-misol. $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-x}{x}}$ funksiyaning aniqlanish sohasini toping.

*Yechish.*1) $f(x)=\dfrac{2-x}{x}$ funksiyani qaraymiz, bu funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz: $x\in(-\infty;\,0)\cup(0;\,\infty)$.

2) $f(x)$ funksiyaning ildizini aniqlaymiz: $\dfrac{2-x}{x}=0$, bundan $x-2=0,\ x=2$.

3) $x=2$ ildizni aniqlanish sohasida belgilab, funksiyaning oraliqlardagi ishoralarini aniqlaymiz:



4) Demak, $\dfrac{2-x}{x}\geq 0$ tengsizlikni yechimi $x\in(0;\,2]$ ya'ni $D(f)=(0;\,2]$ ga ega bo'lamiz.

2-misol. $f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x$ funksiyaning qiymatlar sohasini toping.

Yechish. Berilgan funksiyani quyidagi ko'rinishda yozib olamiz.

$$f(x)=\cos x+\sqrt{3}\sin x=2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)=2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)=2\sin\left(\frac{\pi}{6}+x\right),$$

$\left|\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+x\right)\right|\leq 1$ bo'lgani uchun, $|f(x)|\leq 2$. Demak, $E(f)=[-2,\,2]$.

Funksiyaning berilish usullari

Funksiya ta`rifidagi har bir x ga bitta y ni mos qo'yadigan qoida yoki qonun turli usulda berilishi mumkin.

1) Analitik usul. Ko'pincha x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bunda argument x ning har bir qiymatiga mos keladigan y funksiyaning qiymatini x ustida analitik amallar – qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish, darajaga ko'tarish, ildiz chiqarish, logarifmlash va hokazo amallarni bajarish natijasida topiladi. Odatda bunday usul funksiyaning analitik usulda berilishi deyiladi. Masalan:

$$y=kx+b;\ y=\sqrt{1-x^2};\ y=ax^2+bx+c$$

2) Jadval usuli – funksiyaning jadval ko'rinishida berilishi.

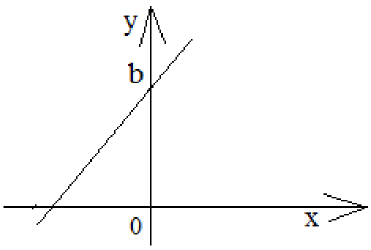
Funksiyaning jadval ko'rinishida berilishi ko'pincha tajriba natijalarini yozishda qo'llaniladi. Masalan, bemor tanasi haroratining o'zgarishi, vaqt moboynida aniqlanib jadval ko'rinishida yoilishi mumkin.

t,soat (vaqt)	9	10	11	12
$T,^0C$(harorat)	37,0	37,3	37,8	39,0

3) Grafik (geometrik) usul – funksiyani uning grafik orqali berish.

Koordinatalar tekisligining barcha $(x, f(x))$ nuqtalari to'plami $y = f(x)$ funksiyaning grafigi deyladi, bunda $y = f(x)$, x esa funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli barcha qiymatlarni qabul qiladi.

Masalan: $y = kx + b$ tenglik, shu grafikning tenglamasi deyiladi.



7-chizma

Bu grafik yopdamida x argumentning har bir qiymati uchun, y funksiyaning qiymatini topish mumkin.

4) So'z bilan berilishi.

Bu usulda funksiya uni tuzish qoidasi bilan beriladi.

Masalan: Direxli funksiyasi: x-ratsional bo'lsa, $f(x) = 1$, x-irratsional bo'lsa, $f(x) = 0$.

Endi funksiyaning asosiy xossalarini qarab chiqamiz.

2-ta`rif. $y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lib, ixtiyoiy $x \in X$ uchun $-x \in X$ bo'lganda $f(-x) = f(x)$ bo'lsa, funksiya juft, $f(-x) = -f(x)$ bo'lsa, toq, aks holda umumiy ko'rinishdagi funksiya deyiladi.

Juft funksiyaning grafigi koordinata o’qiganisbatan, toq funksiyaning grafigi esa koordinata boshiga nisbatan simmetirik bo’ladi. Masalan: $(-\infty, +\infty)$ oraliqda $f(x) = \sin x$ toq, $f(x) = \cos x$ juft funksiya.

3-misol. $f(x) = x^4 \cos 4x$ funksiyani juft (toq)likka tekshiring.

Yechish. $f(-x) = (-x)^4 \cos(4(-x)) = x^4 \cos 4x = f(x)$.

Demak, $f(x) = x^4 \cos 4x$ juft funksiya.

4-misol. $y = \dfrac{16^x - 1}{4^x}$ funksiya juft (toq)likka tekshirilsin.

Yechish. $f(-x) = \dfrac{16^{-x} - 1}{4^{-x}} = \dfrac{\dfrac{1}{16^x} - 1}{\dfrac{1}{4^x}} = \dfrac{4^x(1 - 16^x)}{4^{2x}} = \dfrac{1 - 16^x}{4^x} = -\dfrac{16^x - 1}{4^x} = -f(x)$

Demak, $y = \dfrac{16^x - 1}{4^x}$ toq funksiya.

5-misol. $y = (x-1)^2 \cos^2 x$ funksiya juft (toq)likka tekshirilsin.

Yechish. $f(-x) = (-x-1)^2 \cos^2(-x) = \left(-(x+1)\right)^2 \cos^2(x) = (x+1)^2 \cos^2(x)$

$f(-x) \neq f(x)$ va $f(-x) \neq -f(x)$ bo’lganligi uchun, berilgan funksiya umumiy ko’rinishdagi funksiya ya`ni, juft ham emas, toq ham emas.

Agar shunday o’zgarmas T $(T \neq 0)$ soni topilib, ixtiyoriy $x \in X$ da $x - T \in X$ va $x + T \in X$ bo’lib, $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$ bo’lsa, $y = f(x)$ funksiya davri T ($T \neq 0$) bo’lgan davriy funksiya deyiladi.

Funksiyaning davri deganda uning eng kichik musbat davri tushiniladi.

Masalan, $y = \sin x$, $y = \cos x$ funksiyalarning eng kichik musbat davri 2π, $y = tgx$, $y = ctgx$ funksiyalarning eng kichik musbat davri π ga teng.

Agar $f(x)$ funksiyaning davri T ga teng bo’lsa, $Af(kx+b)$ funksiya ham davriy va shu bilan birga uning davri $\dfrac{T}{|k|}$ ga teng bo’ladi, bunda A, k va b lar o’zgarmaslar, $k \neq 0$.

6-misol. $y = \sin 4x$ funksiyaning eng kichik musbat davri topilsin.

Yechish. Bizga ma`lumki, $y = \sin 4x$ funksiyaning eng kichik musbat davri $2\pi$ ga teng, ya`ni $T = 2\pi$. $y = \sin 4x$ bo’lganligi uchun $k = 4$.

Demak, $y=\sin 4x$ funksiyaning eng kichik musbat davri $\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$ teng bo'ladi.

7-misol. $y=\sin 8x+tg6x$ funksiyaning eng kichik musbat davri topilsin.

Yechish. Funksbatiya ifodasidagi birinchi qo'shiluvchi $\sin 8x$ funksiyaning, eng kichik musbat davri $\frac{2\pi}{8}=\frac{\pi}{4}$ ga teng, ikkinchi qo'shiluvchi $tg6x$ funksiyaning eng kichik musbat davri esa, $\frac{\pi}{6}$ ga teng.

Berilgan funksiyaning eng kichik musbat davri $\frac{\pi}{4}$ va $\frac{\pi}{6}$ larning eng kichik umumiy karralisi $\frac{\pi}{2}$ ga teng bo'ladi.

Eng kichik davri T ga teng funksiya grafigini yasash uchun, yasashni T ga teng kesma uchun bajarib, so'ngra hosil bo'lgan grafikni Ox o'qi bo'ylab o'nga va chapga T masofa qadar parallel ko'chirish etarli.

$y=mf(x)$ $(m\neq 0)$ funksiya grafigini yasash uchun agar $m>1$ bo'lsa, $y=f(x)$ funksiyaning grafigi ordinata o'qi bo'ylab m marta cho'zishin, $0<m<1$ bo'lsa, m marta qisish kerak.

$-\infty<m<0$ bo'lganda $y=mf(x)$ funksiya grafigi $y=-mf(x)$ funksiya grafigining Ox o'qidan oynadagi tasviri bo'ladi.

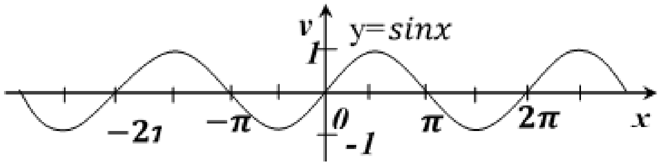
$y=f(x+a)$ funksiya grafigini yasash uchun $y=f(x)$ funksiya grafigini $a>0$ bo'lganda chahga, $a<0$ bo'lsa, o'nga $|a|$ birlik Ox o'qiga parallel siljitish zarur. $y=f(x)+b$ funksiyaning grafigini yasash uchun $y=f(x)$ funksiyaning grafigini $b>0$ bo'lganda yuqoriga, $b<0$ bo'lganda chapga $|b|$ birlikga Oy o'qiga parallel siljitish yetarli.

$y=f(kx)$ $(k\neq 0)$ funksiya grafigi $y=f(x)$ funksiya grafigining $k>1$ bo'lganda, k marta Ox o'qi bo'ylab qisilgani, $0<k<1$ bo'lganda k marta cho'zilgani bo'ladi.

8-misol. $y=-2\sin 2x$ funksiyaning grafigi yasalsin.

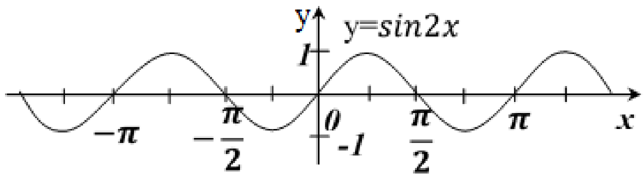
Yechish. $y=-2\sin 2x$ funksiyaning grafigini quyidagi ketma-ketlikda yasaymiz:

1. $y = \sin x$ funksiyaning grafigini yasaymiz.



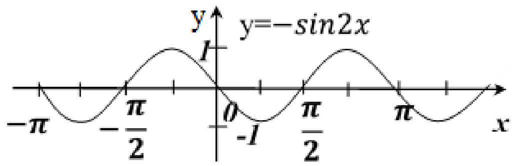
8-chizma

2. $y = \sin x$ funksiya grafigini Ox o'qi bo'ylab ikki marta qisib, $y = \sin 2x$ funksiya grafigini hosil qilamiz.



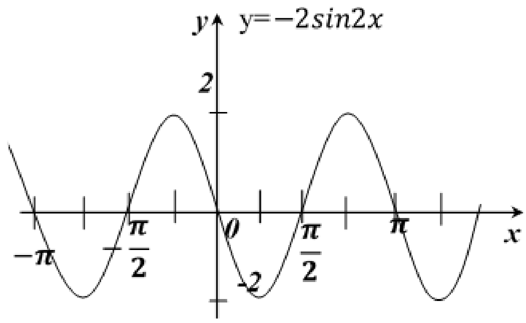
9-chizma

3. $y = \sin 2x$ funksiya grafigini OX o'qidan oynada akslantirib, $y = -\sin 2x$ funksiya grafigini olamiz .



10-chizma

4. $y = -\sin 2x$ funksiya grafigini Oy o'qi bo'ylab ikki marta cho'zib, $y = -2\sin 2x$ funksiya grafigiga ega bo'lamiz.



11-chizma

3-ta`rif. Agar argument x ning X to'plamdan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymamatlari uchun $x_1 < x_2$ bo'lishidan $f(x_1) \le f(x_2)$ $(f(x_1) < f(x_2))$ tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda o'suvchi (qat'iy o'suvchi) deb ataladi.

Misol. $f(x) = x^3$ funksiya $X = R$ da qat'iy o'suvchi. Bunga ishonch hosil qilish uchun $\forall x_1 \in R$, $\forall x_2 \in R$ nuqtalar olib, $x_1 < x_2$ bo'lsin deb qaraymiz. U holda

$$f(x_1)-f(x_2)=x_2^3-x_1^3=(x_2-x_1)(x_2^2+x_2x_1+x_1^2)=(x_2-x_1)\left[\left(x_2+\frac{1}{2}x_1\right)^2+\frac{3}{4}x_1^2\right]>0$$

Demak, $x_1<x_2$ tengsizlik bajarilganda $f(x_1)<f(x_2)$ tengsizlik ham bajariladi.

4-ta`rif. Agar argument x ning X to'plamdan olingan ixtiyoriy x_1 va x_2 qiymamatlari uchun $x_1<x_2$ bo'lishidan $f(x_1)\geq f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$) tengsizlik kelib chiqsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deb ataladi.

5-ta`rif. O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar monoton funksiyalar deb ataladi.

Masalan, $y=x^2$ funksiya $x\in(-\infty;\,0]$ bo'lganda kamayadi va $x\in[0;\,\infty)$ bo'lganda o'sadi.

6-ta`rif. $y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar shunday o'zgarmas M (o'zgarmas m) soni topilsaki, ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(x)\leq M$ ($f(x)\geq m$) tengsizlik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya X to'plamda *yuqoridan* (*quyudan*) *chegaralangan* deb ataladi, aks holda esa funksiya *yuqoridan* (*quyudan*) *chegaralanmagan* deyiladi.

Agar $f(x)$ funksiya X to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa, funksiya shu to'plamda *chegaralangan* deyiladi.

Masalan, $y=\sin x$ funksiya $X=R$ da chegaralangan, chunki ixtiyoriy $x\in R$ uchun $|\sin x|\leq 1$, $y=\dfrac{1}{x}$ funksiya esa, $X=(0,\,1)$ to'plamda quyidan chegaralangan, ammo yuqoridan chegaralanmagan.

Murakkab va teskari funksiyalar

Faraz qilaylik, $y=f(x)$ funksiya X sohada aniqlangan bo'lib, Y esa funksiya qiymatlar to'plami bo'lsin, so'ngra Y to'plamda o'z navbatida biror $z=\varphi(y)$ funksiya berilgan bo'lsin. Natijada X to'plamdan olingan har bir x ga Y to'plamda bitta y soni va Y to'plamdan olingan bunday y soniga bitta z soni mos qo'yiladi. Demak, X to'plamdan olingan har bir x ga bitta z soni mos qo'yiladi. Bunday holda

f va φ funksiyalarning *murakkab funksiyasi berilgan* deyiladi va u $z=\varphi(f(x))$ kabi belgilanadi.

Murakkab funksiyaning aniqlanish sohasi- bu $x \in X$ lar to'plamiki, qaysiki, mos $y=f(x)$ ning qiymatlari $z=\varphi(y)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'ladi.

1-misol. $z=\sqrt{x^2-2x-3}$ funksiya murakkab.

Bu funksiya $z=\sqrt{y}$ va $y=x^2-2x-3$ funksiyalari yordamida hosil bo'lgan. $y=x^2-2x-3$ funksiya $R=(-\infty;\ \infty)$ da aniqlangan bo'lib, z funksiyaning aniqlanish sahosi, ildiz ostidagi ifoda manfiy bo'lmaydigan x lar to'plamidan iborat bo'ladi, ya`ni $x^2-2x-3\geq 0$ bo'lishi kerak. Bu tengsizlik esa, $x\leq -1$ va $x\geq 3$ bo'lgandagina bajariladi.

Demak, murakkab funksiyaning aniqlanish sohasi $D=(-\infty;\ -1]\cup[3;\ +\infty)$. (-1; 3) oraliqda esa, berilgan murakkab funksiya aniqlanmagan (mavjud emas).

Endi teskari funksiya tushunchasini kiritamiz.

1-ta`rif. Agar y funksiya y ga nisbatan yechilmagan $f(x,y)=0$ tenglama ko'rinishda berilgan bo'lsa, unga x argumentning oshkormas funksiyasi deyiladi.

Faraz qilaylik, X to'plamda $y=f(x)$ funksiya aniqlangan bo'lib, Y esa funksiyaning qiymatlari to'plami bo'lsin va Y to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamda faqat bitta x mos kelsin.

Bu holda Y to'plamdan olingan har bir y ga X to'plamda bitta x mos qo'yilishini ifodalaydigan funksiyaga ega bo'lamiz.

Bu funksiyaga $y=f(x)$ ga nisbatan ***teskari funksiya*** deyiladi va u $x=f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi. Agar $x=f^{-1}(y)$ funksiya $y=f(x)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'lsa, $y=f(x)$ funksiya $x=f^{-1}(y)$ funksiyaga nisbatan teskari funksiya bo'ladi. Shuning uchun ham $y=f(x)$, $x=f^{-1}(y)$ funksiyalarga ***o'zaro teskari funksiyalar*** deyiladi.

Quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$f(f^{-1}(y))=y,\ f^{-1}(f(x))=x.$$

Agar y funksiya x argumentning oshkormas funksiyasi ($f(x,y)=0$) bo'lsa, u holda $f(x,y)=0$ tenglamani x ga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya ifodasini olish mumkin.

Masalan, $[0;+\infty)$ oraliqda $y=x^2$ funksiyaga teskari funksiya $x=\sqrt{y}$, $y\in[0;+\infty)$, $(-\infty;+\infty)$ oraliqda $y=x^2$ funksiyaga teskari funksiya mavjudemas.

Bitta $y=f(x)$ chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigi va $x=f^{-1}(y)$ teskari funksiya (agar, oxirgi funksiya mavjud bo'lsa) grafigini ifodalaydi, faqat oxirgi holda argument qiymatlarini Oy o'qida, funksiya qiymatlarini, esa Ox o'qida qarash kerak. O'zaro teskari funksiyalarning grafiklari I va II choraklarning bissektrisalari $y=x$ to'g'ri chizog'iga nisbatan simmetrik bo'ladi. O'zaro teskari funksiyalar uchun quyidagi munosabatlar o'rinli:

$$D(f)=E(f^{-1}(y)),\ E(f)=D(f^{-1}(y)).$$

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi, teskari funksiyaning qiymatlar sohasi bilan ustma-ust tushadi va aksincha.

2-misol. $y=f(x)=2x-3$ funksiyaga $[0;\ 2]$ oraliqda teskari funksiya topilsin.

Bu funksiyaning o'zgarish sohasi $E(f)=[3;\ 1]$. Berilgan tenglamani x ga nisbatan yechib $x=\dfrac{y+3}{2}$ ga ega bo'lamiz. Oxirgi tenglamada x ni y ga, y ni x ga almashtirib, $y=\dfrac{x+3}{2}$ funksiyani olamiz, bu yerda $x\in[-3;\ 1]$, $y\in[0;\ 2]$. Bu misoldagi o'zaro teskari funksiyalar grafiklari $y=x$ to'g'ri chiziq grafigiga nisbatat simmetikligiga grafiklarini chizib ishonch hosil qilish mumkin.

3-misol. $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$ funksiyaning qiymatlar sohasi topilsin.

Berilgan funksiyaning qiymatlar sohasini topishda teskari fuksiya $x=\varphi(y)$ ning aniqlanish sohasi $y=f(x)$ funksiyaning o'zgarish sohasi bo'lishligidan foydalanamiz. $y=\dfrac{6x}{1+x^2}$ tenglikda x ni y orqali ifodalab, $x^2y-6x+y=0$ kvadrat tenglamaga kelamiz.

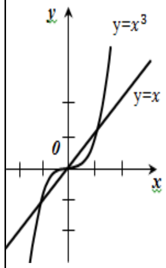
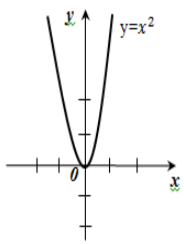
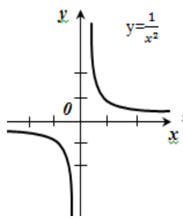
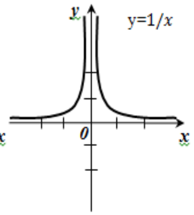
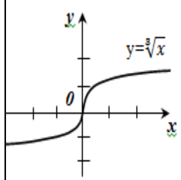
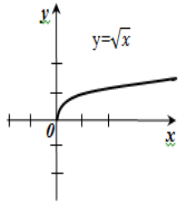
Bu funksiyaning aniqlanish sohasi kvadrat tenglamaning diskriminanti manfiy bo'lmaslik shartini tekshirish yordamida topiladi.

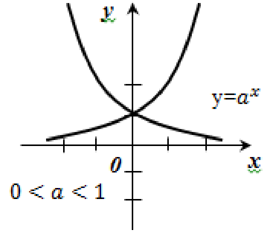
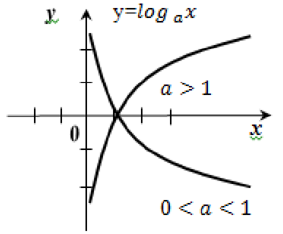
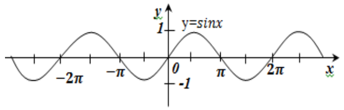
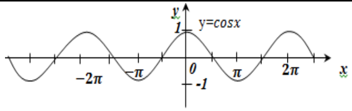
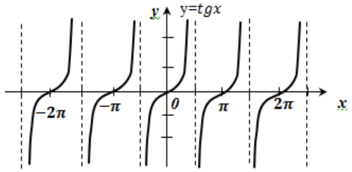
$$6^2 - 4y^2 \geq 0 \text{ yoki } y^2 \leq 9,\ |y| \leq 3 \text{ va } -3 \leq y \leq 3$$

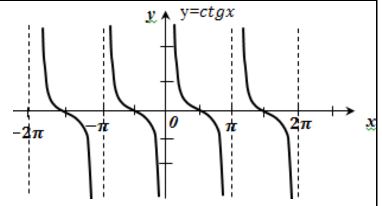
Demak, $E(f) = [-3;\ 3]$.

Asosiy elementar funksiyalar

Asosiy elementar funksiyalarning muhim xossalari va grafiklarini quyidagi jadvalda keltiramiz.

№	Funksiyaning belgilanishi.	Aniqlanish sohasi(X)	Qiymatlar sohasi(Y)	Juft, toqligi	Monotonligi	Davriyligi	Funksiya grafigi
1		(-∞, ∞)	agar n toq bo’lsa, (-∞, ∞) ,agar n juft bo’lsa, $[0, \infty)$	n toq bo’lsa,toq, n juft bo’sa,juft.	agar n toq bo’lsa, (-∞, ∞) da o’suvchi,n juft bo’lsa, (-∞, 0] da kamayuvchi, (0, ∞) da o’suvchi	davriy emas	 
2	$y = x^{-n}, n \in N$	$(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, agar n-toq; $[0, +\infty)$, agar n-juft;					 
3	$y = \sqrt[n]{x}$, ($n \in N, n > 1$)						 

4	$y = a^x$, $(a > 0, a \neq 1)$	$(-\infty; \infty)$	$(0; \infty)$				
5	$y = log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$	$(0; \infty)$	$(-\infty; \infty)$				
6	$y = sinx$	$(-\infty; \infty)$	$[-1; 1]$	Toq	$\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi n; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right] n \in Z$	$T = 2\pi$	
7	$y = cosx$	$(-\infty; \infty)$	$[-1; 1]$	Juft		$T = 2\pi$	
8	$y = tgx$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n) n \in Z$	$(-\infty; \infty)$	Toq	O'suvchi $(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n) n \in Z$	$T = \pi$	

	$y = ctgx$	$(\pi n; \pi + \pi n) n \in Z$	$(-\infty; \infty)$	Toq	Kamayuvchi $(\pi n; \pi + \pi n) n \in Z$	$T = \pi$	

Asosiy elementar funksiyalardan ikki yo’l bilan: a) algebraik amallar; b) murakkab funksiya hosil qilish amali yordamidayangi funksiyalarni tuzish mumkin.

1-ta`rif. Asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi algebrauk amallar va chekli sondagi murakkab funksiyalar tuzish amali yordamida tuzilgan funksiyalar elementar funksiyalar deyiladi.

Misol. $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}\cos^2 x}{\sqrt{x}+3^x}-\sqrt{\ln^2 x+2}$ funksiya elementar funksiya bo’ladi, bu yerda qo’shish, ayirish, ko’paytirish, bo’lish va murakkab funksiya tuzish amallarining soni chekli.

Elementar bo’lmagan funksiyalarga $y=|x|$, $y=[x]$ (x ning butun qismi) fuksiyalari misol bo’ladi.

Elementar funksiyalar algebraik va algebraik bo’lmagan (transtsendent) funksiyalarga bo’linadi.

2-ta`rif. Argument ustida chekli sondagi algebraik amallar orqali hosil qilingan funksiyalar algebiraik funksiyalar deyiladi.

Algebraik funksiyalarga quyidagi funksiyalar kiradi.

1. Butun ratsional funksiyalar (ko’phad yoki polinom):

$$y=a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_{n-1}x+a_n .$$

2. Kasr- ratsional funksiyalar (ikkita ko’phadning nisbati).

3. Irratsional funksiyalar (agar argument ustidagi amallar tarkibida, ildiz chiqarish bo’lsa).

Barcha algebraik bo’lmagan funksiyalar transtsendent funksiyalar deyiladi.

Transtsendent funksiyalarga ko’rsatkichli, logarifmik, trigonometrik, teskari trigonometrik funksiyalar kiradi.

Funksiyaning ba`zi tatbiqlari

Funksiya turli jarayonlarning jumladan, iqtisodiy jarajonlarning nazariyasi va amaliyotida keng tatbiq qilinadi.

Iqtisodiyotdda oddiyiy chiqli funksiyalardan, toki o'rganilayotgan ob`ektlarning vaqtning turli davrlardagi holotlarini bog'lovchi rekurrent munosabat yordamida, maxsus algoritm bo'yicha olinadigan funksiyalargacha bo'lgan keng funksiyanlar sinfidan foydalaniladi.

Chiziqli funksiyalar bilan bir qatorda chiqli bo'lmagan funksiyalar, jumladan, kasr – ratsional (giperbolik), darajali (kvadratik, kubik va h.k), ko'rsatkichli (eksponentsial), logarifimik va boshqa fuksiyalar iqtisodiy va boshqa jarayonlarni o'rganishda qollaniladi.

Iqtisodiyotdda ko'p qo'llaniladigan funksiyalar quyidagilar:

1. Foydalilik funksiyasi-qandaydir faoliyat natijasining bu faoliyatning darajasiga (intensivligiga) bog'liqligi.

2. Ishlab chiqarish funksiyasi - ishlab chiqarish faoliyati natijasining unga ta`sir qiluvchi (aniqlovchi) omillarga bog'liqliligi.

3. Chiqarish funksiyasi (ishlab chiqarish funksiyasining xususiy holi) – ishlab chiqarish hajmining mavjud yoki istimol qilingan resuruslarga bogqliqligi.

4. Xarajatlar funksiyasi (ishlab chiqarish funksiyasining xuxusiy holi) – ishlab chiqarish xarajatlarining ishlab chiqarish hajmidan bogqliqligi.

5. Talab, iste'mol va taklif funksiyalari – alohida tavar yoki xizmatlarga talab, istemol yoki takliflar hajmlarining turli omillarga (masalan, narx, daromat va h.k) bog'liqliligi.

Jarayonlarga, jumladan, iqtisodiy jarayonlarga ta'sir qiluvchi omillar turlicha bo'lishi mumkinligi uchun ularni o'rganishda ko'p o'zgaruvchli funksiyalar ham qo'llaniladi.

Iqtisodiyotda funksiyalarning qo'llanishining yana bir sohasi - bu funksiyaga jadvalning qo'llanilishi.

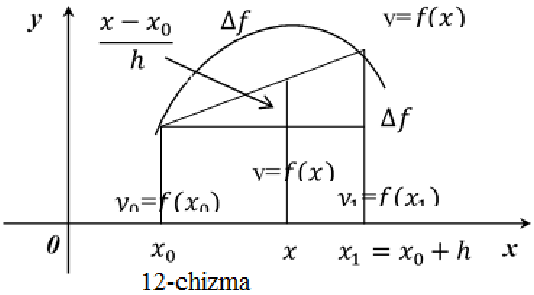
Bu turli mumkin bo'lgan hisoblashlarni olib borish, murakkab hisoblashlarni chiqarib tashlash yoki soddalashtirish imkonini beradi. Jadval yordamida hisoblashlarda, biz argumentning qiymatlari jadval imkoniyatidan yuqori aniglikda bo'lgan holga duch kelamiz.

Bu holda funksiyanig berilgan nuqtadagi ma`lum qiymati bo'yicha uning noma`lum qiymatini taqribiy topamiz ya`ni interpolydatsiyalaymiz.

Eng sodda interpolydatsiyalash bu- chiziqli interpolydatsiyalash bo'lib, bunda funksiya orttirmasi argument orttirmasiga proportsional qilib olinadi. Agar x berilgan qiymati jadvalda berilgan x_0 va x_0+h orasida joylashgan, $y_0=f(x_0)$ va $y_1=f(x_0)+\Delta f$ bo'lsa, u holda

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{x-x_0}{h}\Delta f$$

deb olish mumkin.



12-chizma

$\frac{x-x_0}{h}\Delta f$ miqdorga interpolyatsiya tuzatmasi deyiladi.

Misol. $y=f(x)$ funksiya quyidagi jadval bilan berilgan:

X	3	3,05	3,10
Y	3,42	3,88	4,38

Chiqli interpolyatsiyadan foudalanib, f(3,008) ni toping.

Yechish. Jadvaldan $x_0=3;\ f(x_0)=3{,}42;\ x_1=3{,}05;\ x_1=3{,}05;\ f(x_1)=3{,}88$

$$h=x_1-x_0=3{,}05-3=0{,}05;\ \Delta f=f(x_1)-f(x_0)=3{,}88-3{,}42=0{,}46$$

Yuqoridagi formulaga ko'ra:

$$Y=f(3{,}008)\approx 3{,}42+\frac{3{,}008-3}{0{,}05}\cdot 0{,}46=3{,}4936$$

Mavzuga doir nazorat savollari va topshiriqlar

1. O’zgarmasva o’zgaruvchi miqdorlar ta`riflarini keltiring?

2. Funksiya ta`rifini keltiring?

3. Funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohalari ta`riflarini va ularga doir misollar ko’ring?

4. Funksiyaning berilish usullari haqida ma`lumot bering?

5. Juft, toq, davriy funksiyalar ta`riflarini keltiring?

6. Chegaralangan funksiya ta`riflarini va unga misollar keltiring?

7. Chegaralanmagan funksiya ta`rifini va unga misollar keltiring?

8. $y = f(x)$ funksiyaning grafigi asosida $y = kf(x)$ funksiyaning grafigi qanday chiziladi?

9. Murakkab funksiya qanday aniqlanadi?

10. Berilgan funksiyaga teskari funksiya ta`rifini keltiring?

11. Berilgan funksiya va unga teskari funksiya aniqlanish va qiymatlar sohalari orasida qanday munosabat o’rinli bo’ladi?

12.Asosiy elementar funksiyalar qanday yo’llar bilan hosil qilinadi?

13. Asosiy elementar funksiyalarni yozib chiqing va ularning xossalarini keltiring?

14. Elementar funksiyalar qanday ta`riflanadi?

15. Allgebraik bo’lmagan funksiyalarga misollar keltiring?

16. Foydalilik funksiyasi qanday ta`riflanadi?

17. Ishlab chiqarish funksiyasini tushuntirib bering?

18. Talab, iste`mol va taklif funksiyalari qanday ta`riflanadi?

19. Funksiyaga jadvalning qo’llanilishi tushuntirib bering?

20. Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalarini toping [1- 3].

1. $y = \frac{x}{\sqrt{x-2}}$. [(2 ;+∞).]

2. $y = \frac{1}{\ln(2-x)}$. [(-∞ ;1)∪(1 ;2) .]

3. $y = \arcsin(2x-1)$. [[0 ;1] .]

Quyidagi funksiyalarning qiymatlar sohalarini toping [4- 6].

4. $y = \sqrt[3]{2x-1}$. [(-∞; +∞).]

5. $y=-x^2+8x-13$. [[-29 ;+ ∞].]

6. $y=\sqrt{3}\sin x+\cos x$. [[-2 ;2].]

Quyidagi funksiyalarni juft (toq) likka tekshirilsing [7- 9].

7. $y=x\sin x$. [juft.]

8. $y=3|x|+\sqrt[3]{x^2}$. [juft.]

9. $y=x^3+\cos x$. [umumiy ko'rinishdagi funksiya.]

Quyidagi funksiyalarning eng kichik davri topilsin [10- 11**].**

10. $y=tgx+ctgx$ [T=π .]

11. $y=\cos^2\frac{x}{2}$ **.** **[T**=2π .]

Quyidagi funksiyalarning grafiklari qurilsin [12-18]

12. $y=-2x^2$**;** 13. $y=-2(x+3)^2$**;** 14. $y=-2x^2+5x-2$; 15. $y=2^{x-2}$;

16. $y=\log_2(x-2)$**;** **17.** $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$**;** **18.** $y=\sin x+\cos x$**.**

Mavzuga doir testlar

1. $f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi kabi … belgilanadi:

A) $D(f)$ B) $E(f)$ C) $B(f)$ D) $G(f)$

2. $f(x)$ funksiyaning o'zgarish (qiymatlar) sohasi kabi … belgilanadi:

A) $E(f)$ B) $D(f)$ C) $B(f)$ D) $G(f)$.

3. $y=\ln(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi:

A) (0,∞) B) (-1,0) C) [0, ∞) D) (-∞,0).

4. $y=x^2$ funksiyaning o'zgarish sohasi:

A) [0, ∞) B) (-∞,0) C) (-1,1) D) (0, ∞).

5. $y=f(x)$ funksiya juft funksiya agar:

A) $f(-x)=f(x)$ B) $f(-x)=-f(x)$ C) $f(-x)=2f(x)$ D) $f(x)=-f(x)$

6. $y=f(x)$ funksiya toq funksiya agar:

A) $f(-x)=-f(x)$ B) $f(-x)=f(x)$ C) $f(-x)=2f(x)$ D) $f(x)=-f(x)$

7. Juft funksiyalarni aniqlang.

A) $y = x^2$ B) $y = x^3$ C) $y = \sin x$ D) $y = \cos x$

8. Toq funksiyalarni aniqlang.

A) $y = x^3$ B) $y = x^2$ C) $y = \sin x$ D) $y = \cos x$

9. Funksiyaning berilish usullari.

A) Analitik B) Jadval C) Geometrik (Grafikaviy) D) A, B, C

10. Agar $f(x)$ funksiyaning davri T ga teng bo'lsa, $Af(kx+b)$ funksiyaning davri:

A) $\frac{T}{|k|}$ B) $\frac{T}{|k|}$ C) kT D) $\frac{k}{T}$

11. $f(x)$ funksiya X oraliqda chegaralangan deyiladi, $M > 0$ soni mavjud bo'lib:

A) $|f(x)| \leq M$ B) $f(x) \leq M$ C) $f(x) \leq -M$ D) $f(x) \geq M$

12. f va φ funksiyalarning murakkab funksiyasi . . . kabi belgilanadi.

A) $z = \varphi(f(x))$ B) $z = f(\varphi(x))$ C) $f = z(\varphi(x))$ D) $\varphi = z(f(x))$

13. $y = f(x)$ funksiyaga teskari funksiya . . . kabi belgilanadi.

A) $x = f^{-1}(y)$ B) $x = f(y)$ C) $y = f^{-1}(x)$ D) $x = f(y^{-1})$

14. O'zaro teskari funksiyalar uchun o'rinli:

A) $D(f) = E(f^{-1}(y))$ б $E(f) = D(f^{-1}(y))$ B) faqat $D(f) = E(f^{-1}(y))$

C) faqat $E(f) = D(f^{-1}(y))$ D) $D(f) = E(f(y^{-1}))$

15. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari o'zaro teskari:

A) $y = a^x,\ y = \log_a x\ (a > 1)$ B) $y = \sin x,\ y = \cos x$

C) $y = \ln x,\ y = e^x$ D) $y = \sin x,\ y = \arccos x$

16. Quyidagi funksiyalardan qaysi birlari elementar funksiyalar:

A) $\cos^2 x$ B) $\ln^3(x+1)$ C) $[x]$ D) $|x|$

17. Quyidagi funksiyalardan qaysi biri elementar funksiya emas:

A) $\sin^2 x$ B) $\ln^3(x+1)$ C) $[x]$ D) 3^{x+1}

18. Algebraik funksiyalarga kiradi:

A) ko'p hadlar B) kasr-ratsional funksiyalar

C) irratsional funksiyalar D) keltirilganlarning barchasi.

19. Transtsendent funksiyalar bo1ladi:

A) ko'rsatkichli funksiyalar B) logarifmik funksiyalar,

C) trigonometrik funksiyalar D) keltirilganlarning barchasi.

20. Funksiyaning jadvalda bo'lmagan nuqtalardagi qiymatlarini topishda qanday taqribiy formuladan foydalaniladi:

A) $f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{h} \Delta f$ B) $f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}$

C) $f(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) \Delta f$ D) $f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{\Delta f}$

Funksiyaning limiti va uzluksizligi

Sonlar ketma-ketligi va uning limiti

1-ta`rif. Agar $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi natural sonlar to'plamidan iborat bo'lsa, yani $D(y) = N = \{1, 2, 3, ...\}$, bu holda bunday funksiyani **natural argumentli funksiya** deb ataladi va u quyidagicha yoziladi $y = f(n)$ yoki $y = f(N)$.

2-ta`rif. Natural argumentli funksiya $y = f(n)$ ning xususiy qiymatlarining $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, ... , $f(n)$,…ketma-ketligiga **cheksiz sonlar ketma-ketligi** deb ataladi.

$$f(1) = x_1,\ f(2) = x_2,\ f(3) = x_3, ...,\ f(n) = x_n, ...$$

Bu ta'rifdan ko'rinadiki, cheksiz sonlar ketma-ketligining har bir hadi ma'lum bir tartib raqamigaiga ega bo'lar ekan. Umuman olganda sonlar ketma-ketligi $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$, $\{x_n\} = x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ ko'rinishlarda belgilanadi. Ketma-ketlikni tashkil qilgan sonlar shu ketma- ketlikning hadlari deyiladi.

x_1- ketma-ketlikning birinchi hadi, x_2- ikkinchi hadi va hakozo, x_n-ketma-ketlikning n-hadi yoki umumiy hadi deb yuritiladi. Agar ketma-ketlikning n- hadi berilgan bo'lsa, shu umumiy hadga ega bo'lgan ketma-ketlikni tuzish mumkin.

Masalan, 1) $x_n = n^2 + 1,\ n \in N$ bo'lsa, ketma-ketlikning hadlari: 2,5,10,…

2) $x_n = aq^{n-1}$ bo'lsa, ketma-ketlikning hadlari: $a, aq, aq^2, ..., aq^{n-1}, ...$

3-ta`rif. Tartib raqamga ega bo'lgan sonlar to'plami **sonlar ketma-ketligi** deyiladi.

Sonlar ketma-ketligi uch xil bo'ladi.

O'suvchi ketma-ketlik.

Kamayuvchi ketma-ketlik.

Tebranuvchi (Ishoralari almashinuvchi) ketma-ketlik.

4-ta`rif. Agar ketma-ketlikning har bir hadi o'zidan oldingi hadiga nisbatan qiymat jihatidan kamaymasa ($x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le ...$), u holda bunday ketma-ketliklar **o'suvchi ketma-ketlik** deyiladi.

Agar $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik qa`tiy o'suvchi deyiladi.

Masalan, 2,5,10,…- ketma-ketlik o'suvchi (qa`tiyo'suvchi) ketma-ketlik.

5-ta`rif. Agar ketma-ketlikning har bir hadi o'zidan oldingi hadiga nisbatan qiymat jihatidan oshmasa ($x_1 \ge x_2 \ge ... \ge x_n \ge ...$), u holda bunday ketma-ketliklar **kamayuvchi ketma-ketlik** deyiladi

Agar $x_1 > x_2 > ... > x_n > ...$ bo'lsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik qa`tiy kamayuvchi deyiladi.

Masalan, umumiy hadi $x_n = \frac{1}{n+1}$ bo'lgan ketma-ketlik kamayuvchi ketma-ketlik.

6-ta`rif. O'smaydigan va kamaymaydigan ketma-ketliklar **tebranuvchi (ishoralari almashinuvchi) ketma-ketliklar** deyiladi.

Masalan, umumiy hadi $x_n = (-1)^n$ bo'lgan ketma-ketlik tebranuvchi(ishorasi almashinuvchi) , chunki, $x_1 = -1,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1,\ x_4 = 1, ...$

Biror $\{x_n\}: x_1,\ x_2,\ x_3, ...,\ x_n, ...$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

7-ta`rif. Agar shunday o'zgarmas M son mavjud bo'lsaki, $\{x_n\}$ ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo'lmasa, ya'ni $\forall n \in N$ uchun $x_n \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ **yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik** deyiladi.

8-ta`rif. Agar shunday o'zgarmas m son mavjud bo'lsaki, ya'ni $\forall n \in N$ uchun $x_n \ge m$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ **quyidan chegaralangan ketma-ketlik** deyiladi.

9-ta`rif. Agar ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, ya'ni shunday o'zgarmas m va M sonlar topilsaki, $\forall n \in N$ uchun $m \le x_n \le M$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, $\{x_n\}$ **chegaralangan ketma-ketlik** deyiladi.

Misollar. 1. Umumiy hadi $x_n = 1 + \frac{1}{n}$ bo'lgan $1+1, 1+\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{3}, ..., 1+\frac{1}{n}, ...$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan, chunki $\forall n$ uchun $x_n \le 2$ ($M = 2$) tengsizlik o'rinli

2. Umumiy hadi $x_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$ bo'lgan $1, -\frac{1}{4}, \frac{1}{9}, ..., \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}, ...$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan, chunki $\forall n$ uchun $x_n \geq -\frac{1}{4}\left(m = -\frac{1}{4}\right)$ tengsizlik o'rinli.

3. Umumiy hadi $x_n = \frac{n^2 - 1}{n^2}$ bo'lgan $0, \frac{3}{4}, \frac{8}{9}, ..., \frac{n^2-1}{n^2}, ...$ ketma-ketlik ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan, yani chegaralangan, chunki $\forall n$ uchun $0 \leq x_n \leq 1$.

Bizga $\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, ..., x_n, ...$ va $\{y_n\}: y_1, y_2, y_3, ..., y_n, ...$ ketma-ketliklar berilganbo'lsin.

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, ..., x_n + y_n, ...$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, ..., x_n - y_n, ...$$

ketma-ketliklarga $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning mos ravishda yig'indisi va ayirmasi deyiladi va mos ravishda $\{x_n + y_n\}$ va $\{x_n - y_n\}$ kabi belgilanadi.

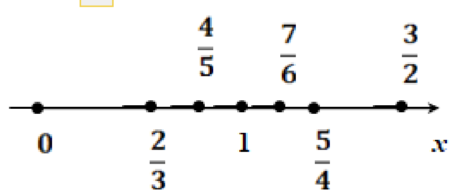
Ushbu $x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, ..., x_n \cdot y_n, ...$ ketma-ketlikga $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning ko'paytmasi deyiladi va $\{x_n \cdot y_n\}$ kabi belgilanadi.

$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, ..., \frac{x_n}{y_n}, ...$ $(y_k \neq 0, k = 1, 2, ...)$ ketma-ketlikga $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning nisbati deyiladi va $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ kabi belgilanadi.

Endi sonlar ketma-ketligi limitiga to'xtalamiz.

Biz umumiy hadi $x_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ bo'lgan sonlar ketma-ketligini qaraymiz.

Uning hadlarining qiymatlarini sonlar o'qining nuqtalari bilan tasvirlaymiz.



n o'sishi bilan $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari 1 ga yetarlicha yaqinlashib borishini ko'rish mumkin.Jumladan $|x_n - 1|$ ayirma n ortishi bilan kichrayib borishini kuzatish mumkin:

$|x_1 - 1| = 1$, $|x_2 - 1| = \frac{1}{2}$, $|x_3 - 1| = \frac{1}{3}$, $|x_4 - 1| = \frac{1}{4}, \ldots, |x_n - 1| = \frac{1}{n}, \ldots,$

ya`niy, n ortishi bilan $|x_n - 1|$ yetarlicha kichik har qanday musbat sondan kichik bo'ladi.

10-ta`rif. Agar har qanday yetarlicha kichik ε musbat soni uchun $N=N(\varepsilon)>0$ soni topilib, $n>N$ bo'lganda $|x_n - A| < \varepsilon$ bo'lsa, **A soni {x_n} ketma-ketlikning limiti** deyiladi, va $\lim_{n\to\infty} x_n = A$ kabi yoziladi.

Limitga ega bo'lgan ketma-ketlik yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ketma-ketlik limiti ta'rifi matematik belgilar orqali $(A=\lim_{n\to\infty} x_n) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists N = N(\varepsilon) > 0)(\forall n > N)|x_n - A| < \varepsilon$ kabi yoziladi.

Misol. $x_n=1+\frac{(-1)^n}{n}$ bo`lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ ekanligini isbotlang.

Yechish. Faraz qilaylik, $\varepsilon=0{,}1$ bo'lsin. U holda $|x_n - 1| < 0{,}1$ yoki $\left|1 + \frac{(-1)^n}{n} - 1\right| < \varepsilon$, ya`niy $\frac{1}{n} < \varepsilon$ tengsizligi n >10 bo'lganda bajariladi.Agar ε =0,01 bo'lsa, $|x_n - 1| < 0{,}01$ tengsizligi n >100 bo'lganda o'rinli bo'ladi.

Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $|x_n - 1| < \varepsilon$, yoki $\frac{1}{n} < \varepsilon$ tengsizligi n $>\frac{1}{\varepsilon}$ bo'lganda bajariladi.

Demak , har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday N=[$\frac{1}{\varepsilon}$] tartib raqami mavjud bo'lib, barcha n> N (ε =0,1 uchun n >10 , ε =0,01 uchun n >100 va hakozo) lar uchun $|x_n - 1| < \varepsilon$ tengsizligi bajarilsadi, bu esa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ ekanligini isbotlaydi.

Bir o'zgaruvchili funksiyaning limiti

$x_n=f(n)$ ketma-ketlikning limiti tushunchasi $y=f(x)$ funksiyaning cheksizlikdagi limiti tushunchasi bilan uzviy bog'liq. Birinchi holda n o'zgaruvchi o'sib borib, faqat butun qiymatlarni qabul qilsa, ikkinchi holda x o'zgaruvchi ixtiyoriy qiymatlarni qabul qilaoladi.

1-ta`rif. Agar har qanday yetarlicha kichik ε musbat soni uchun shunday S=S(ε)>0 soni topilib, $|x| > S$ bo'lgan barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ bo'lsa, ***A***

soni $f(x)$ **funksiyaning x cheksizlikga intilgandagi limiti** deyiladi, va $\lim_{n\to\infty} \mathrm{f(x)} = A$ kabi yoziladi.

$y=f(x)$ funksiyaning cheksizlikdagi limiti ta'rifi ni matematik belgilar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

$(A=\lim_{x\to\infty} f(x)) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists S = S(\varepsilon) > 0)(\forall x: |x| > S)|f(x) - A| < \varepsilon$.

Misol. $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x} = 3$, ekanligini isbotlang.

Yechish. Har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $\left|\frac{3x+1}{x} - 3\right| < \varepsilon$ yoki $\frac{1}{|x|}<\varepsilon$ tengsizlik $|x|>\frac{1}{\varepsilon}$ bo'lganda bajariladi. Demak, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun $S=\frac{1}{\varepsilon}>0$ soni mavjud bo'lib, $|x| > S$ bo'ladigan barcha x lar uchun $\left|\frac{3x+1}{x} - 3\right| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu esa $\lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{x} = 3$ ni isbotlaydi.

$f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ limiti ta`rifini matematik belgilar orqali keltiramiz:

$$\left(A = \lim_{x\to x_0} f(x)\right) \Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)\,|f(x) - A| < \varepsilon .$$

Agar x$< x_0$ va x$\to x_0$ bo'lsa, u holda x$\to x_0 - 0$, agar, $x > x_0$ va $x \to x_0$ bo'lsa u holda $x \to x_0 + 0$ kabi yoziladi.

2-ta`rif. $\mathrm{f}(x_0 - 0) = \lim_{x\to x_0-0} f(x)$va $f(x_0 + 0) = \lim_{x\to x_0+0} f(x)$ larga mos ravishda f(x) ning x_0 nuqtadagi **chap** va **o'ng limitlari** deyiladi.

$x\to x_0$ da f(x) ning limiti mavjud bo'lishi uchun $f(x_0-0)=f(x_0+0)$ bo'lishi zarur va yetarlidir.

Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar

1-ta`rif. Agar har qanday yetarlicha kichik ε musbat soni uchun shunday $\delta = \delta(\varepsilon)>0$ soni topilib,x_0 ga teng bo'lmagan va$|x - x_0| < \delta$ bo'ladigan barcha x lar uchun $|\alpha(x)| < \varepsilon$ (yoki $\lim_{x\to x_0}\alpha(x) = 0$) bo'lsa, $\alpha(x)$ funksiyaga $x \to x_0$ da **cheksiz kichik** miqdor deyiladi.

Bu ta`rifni matematik belgilar orqali:

$$\{\ \alpha(x) - x \to x_0 \text{ da cheksiz kichik yoki, } \lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0\ \}$$

$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta = \delta(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < \delta)|\alpha(x)| < \varepsilon .$$

$x \to \infty$ da cheksiz kichik miqdor ta`rifini qisqa ko'rinishda yozamiz.

$$\{\ \alpha(x) - x \to \infty \text{ da cheksiz kichik yoki, } \lim_{x\to \infty} \alpha(x) = 0\ \}$$

$$\Leftrightarrow (\forall\varepsilon > 0)(\exists S = S(\varepsilon) > 0)(\forall x \neq x_0 : |x - x_0| < S)|\alpha(x)| < \varepsilon .$$

Masalan, *y=sinx* funksiya $x \to 0$ cheksiz kichik miqdor va *y*=$\frac{5}{2x-4}$ funksiya $x \to \infty$ da cheksiz kichik miqdor, chunki, bu funksiyalarnig ko'rsatilgan nuqtalardagi limitlari nolga teng.

Cheksiz kichik miqdor bilan funksiya limiti orasida munosabatni quyidagi teorema orqali ifodalaydi.

1-teorema. Agar *A* soni *f*(*x*) funksiyaning $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ dagi limiti bo'sa, uni shu *A* soni va $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ da cheksiz kichik miqdor bo'lgan $\alpha(x)$ funksiyaning yig'indisi ko'rinishda ifodalash mumkin,yan`i *f*(*x*)=A+ $\alpha(x)$.

Isboti. Teoremani $x \to x_0$ hol uchun isbotlaymiz. Teorema shartiga ko'ra, $\lim_{x\to x_0} \alpha(x) = 0$, bu esa, har qanday $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $\delta > 0$ soni topilib, x≠x_0 bo'lgan va $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$, yoki $\alpha(x) = f(x) - A$ belgilasak, $|\alpha(x)| < \varepsilon$ tengsizlik o'rinliligini bildiradi. Demak, $x \to x_0$ da $\alpha(x)$ funksiya cheksiz kichik miqdor.

Teskari teorema ham o'rinli.

2-teorema. Agar $f(x)$ funksiyani *A* soni va $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ da cheksiz kichik bo'lgan $\alpha(x)$ funksiyaning yig'indisi kabi ifodalash mumkin bo'lsa, u holda *A* soni $f(x)$ funksiyaning $x \to x_0$ $(x \to \infty)$

Endi cheksiz kichik miqdorlarning ayrim xossalariga to'xtalamiz.

1. Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlarning algebraik yig'indisi yana cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

2. Cheksiz kichik miqdorning chegaralangan funksiyaga ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

3. Cheksiz kichik miqdorning limiti noldan farqli funksiyaga nisbati cheksiz

Biz namuna tariqasida 1- xossaning isbotini keltiramiz.

$x \to x_0$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar cheksiz kichik miqdorlar bo'lsalar $\alpha(x)+\beta(x)$ ning ham cheksiz kichik miqdor bo'lishligili ko'rsatamiz.

$x \to x_0$ da $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar cheksiz kichik miqdorlar bo'lganliklari uchun har qanday $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ uchun $\delta_1 > 0, \delta_2 > 0$ sonlar topilib, barcha $x \neq x_0$ va $|x - x_0| < \delta_1$ va $|x - x_0| < \delta_2$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi x lar uchun $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ va $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bajariladi

Agar δ sifatida δ_1 va δ_2 sonlarning kichigini olsak, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ uchun $|x - x_0| < \delta_2$ munosabat bajariladi va $|\alpha(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi

$$|\alpha(x)| + |\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon .$$

Absolyut qiymatning xossasiga kora, $|\alpha(x)+\beta(x)| \le |\alpha(x)| + |\beta(x)|$ bo'lganligidan $|\alpha(x)+\beta(x)| < \varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Demak, har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ mavjud bo'lib, $x \neq x_0$ bo'lgan va $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|\alpha(x)+\beta(x)| < \varepsilon$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Bu esa $\alpha(x)+\beta(x)$ ning cheksiz kichikligini ko'rsatadi.

Masalan, $\alpha(x) = 2x - 6$, $\beta(x) = \ln(x-2)$ funksiyalar $x \to 3$ bo'lganda cheksiz kichik miqdorlar ($\lim\limits_{x\to 3} \alpha(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 3} \beta(x) = 0$) va $f(x) = \cos x$, $x \to 3$ da chegaralangan funksiya ($|\cos x| \le 1$, $\varphi x = x^2 - 10$ funksiyaning $x \to 3$ dagi limiti -1 ga teng. 1-xossaga asosan $\alpha(x) \pm \beta(x) = 2x - 6 \pm \ln(x-2)$, 2-xossaga ko'ra $\alpha(x) f(x) = (2x-6)\cos x$, $5\alpha(x) = 10x - 30$, $\alpha(x)\beta(x) = (2x-6)\ln(x-2)$, 3-xossaga asosan $\frac{\alpha(x)}{\varphi(x)} = \frac{2x-6}{x^2-10}$ lar $x \to 3$ da cheksizi kichik miqdorlar bo'ladilar.

Ta’rif. Agar $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar $x \to x_0$ da cheksiz kichik miqdorlar bo’lib, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ bo’lsa, $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ga qaraganda yuqori tartibli **cheksiz kichik miqdor** deyiladi va $\alpha(x)=o(\beta(x))$ kabi yoziladi.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$ bo’lsa, $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ cheksiz kichik miqdorlar $x \to x_0$ da **ekvivalent deyiladi** va $\alpha(x)\approx\beta(x)$ kabi yoziladi.

3-ta`rif. Agar har qanday, hatto yetarlicha $M>0$ musbat soni uchun $\delta=\delta(M)>0$ soni topilib, x_0 teng bo’lmagan va $|x-x_0|<\delta$ shartni qaoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|f(x)|>M$ bo’lsa, $f(x)$ funksiya $x\to x_0$ da cheksiz katta miqdor deyiladi va $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ kabi yoziladi.

Matematik belgilar orqali bu ta`rif quyidagi ko’rinishda yoziladi:

$$\{\, f(x)-x\to x_0 \text{ da cheksiz katta yoki, } \lim_{x\to x_0} f(x)=\infty \,\}$$

$$\Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists\delta=\delta(M)>0)(\forall x\neq x_0 : |x-x_0|<\delta)\,|f(x)|<Mx\to\infty\,.$$

da cheksiz katta miqdor ta`rifi:

$$\{\, f(x)-x\to\infty \text{ da cheksiz katta yoki, } \lim_{x-\infty} f(x)=\infty \,\}$$

$$\Leftrightarrow (\forall M>0)(\exists S=S(M)>0)(\forall x : |x|<S)\,|f(x)|>M\,.$$

Masalan, $x\to\frac{\pi}{2}$ da $y=tgx$, $x\to\infty$ da y=$\sqrt{3x-4}$ funksiyalar cheksiz katta miqdorlar bo’ladilar. $x\to x_0$ ($x\to\infty$) da cheksiz katta bo’lgan fuksiya chegaralanmagan funksiya bo’ladis, teskarisi umumiy holda o’rinli bo’lmaydi.

Masalan, $y=x\cos x$ funksiya chegaralanmagan, uning qiymatlari yetarlicha katta bo’lishi mumkin, ammo u cheksiz katta miqdor emas, chunki uning qiymatlari x optishi bilan musbatdan manfiyga va aksincha o’zgarib turadi.

Cheksiz katta miqdorlarning ba`zi muhim xossalarini keltiramiz:

1. Cheksiz katta miqdorning limiti holdan farqli funksiyaga ko’paytmasi cheksiz katta miqdor bo’ladi.

2. Cheksiz katta miqdorning chegaralangan funksiya bilan yig'indisi cheksiz katta miqdor bo'ladi.

3. Cheksiz katta miqdorning x_0 nuqtada limitga ega bo'lgan funksiyaga nisbatan ham cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Cheksiz katta va cheksiz kichik miqdorlar o'rtasida munosabatni qyuyidagi teorema ifodalaydi.

3-teorema. Agar $\alpha(x)$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz kichik miqdor bo'lsa, $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz katta miqdor va aksincha $f(x)$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz katta miqdor bo'lsa, $\alpha(x)=\dfrac{1}{f(x)}$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz kichik mqdor bo'ladi.

Isboti. Biz $\alpha(x)$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz kichik miqdor bo'lsa, $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ funksiyada tasdiq $x \to x_0$ da cheksiz katta miqdor bo'lishligini ko'rsatamiz.

$\alpha(x)$ funksiya $x \to x_0$ da cheksiz kichik miqdor bo'lganligi uchun har qanday $\varepsilon > 0$ uchun shunday $\delta > 0$ topilib, $x \neq x_0$ va $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun $|\alpha(x)|<\varepsilon$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu esa, $\left|\dfrac{1}{\alpha(x)}\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ yoki $|f(x)| > M$ ga teng kuchli, bu yerda $f(x)=\dfrac{1}{\alpha(x)}$ va $M=\dfrac{1}{\varepsilon}$.

Bu esa, $x \to x_0$ da $f(x)$ cheksiz kattta miqdor ekanligini ko'rsatadi.

Masalan, $x \to \dfrac{\pi}{2}$ da $y=\cos x$ funksiya va $x \to \infty$ da $y=\dfrac{3}{2x-5}$ funksiya cheksiz kichik miqdorlar bo'salar, $y=\dfrac{1}{\cos x}$ funksiya $x \to \dfrac{\pi}{2}$ da va $y=\dfrac{2x-5}{3}$ funksiya $x \to \infty$ da cheksiz katta miqdorlar bo'ladilar.

Limitlar haqidagi teoremalar. Ajoyib limitlar

Faraz qilaylik, $f(x)$ va $\varphi(x)$ funksiyalarining $x \to x_0$ $(x \to \infty)$ da limitlari mavjud bo'lsin. $\lim\limits_{x\to x_{0(\infty)}} f(x)$= A , $\lim\limits_{x\to x_{0}(\infty)} \varphi(x)$ =B .

Limitlar haqidagi asosiy teoremalarni keltiramiz.

1-teorema. Finksiya bittadan ortiq limitga ega bo'lishi mumkin emas.

Isboti. Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya ikkita *A* va *D* (*A≠D*) limitlarga ega bo'lsin.

U holda cheksiz kichik va funksiya limiti o'rtasidagi munosabatni ifodalovchi teoremaga asosan $f(x)=A+\alpha(x)$, $f(x)=D+\beta(x)$, bu yerda $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ –lar $x \to x_0(\infty)$ da cheksiz kichik miqdorlar. Oxirgi ikkita tenglikni hadma-had ayirsak, $A-D=\alpha(x)+\beta(x)=0$, bundan $\alpha(x) - \beta(x) = D$-*A*.

Buning esa, bo'lishi mumkin emas, chunki cheksiz kichik miqdorning xossasiga asosan $\alpha(x) - \beta(x)$ cheksiz kichik miqdor. Bu ikkinchi limit mavjudligi haqidagi farazimiz noto'g'ri ekanligini tasdiqlaydi.

2-teorema. Chekli sondagi funksiyalar yig'indisining limiti qo'shiluvchilar limitlari yig'indisiga teng. $\lim\limits_{x\to x_{0(\infty)}} (f(x)+\varphi(x))$= *A* +*B.*

3-teorema. Chekli sondagi funksiyalar ko'paytmasining limiti ko'paytuvchilar limitlari ko'paytmasiga teng. $\lim\limits_{x\to x_{0(\infty)}} (f(x)\cdot\varphi(x))$= *A* ·*B* .

Jumladan, o'zgarmas ko'paytuvchini limit belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

$$\lim_{x\to x_{0(\infty)}} (cf(x)) = cA.$$

4-teorema. Agar bo'luvchining limiti nolga teng bo'lmasa, ikkita funksiya bo'linmasining limiti, bu funksiyalar limitlarining bo'linmasiga teng.

$$\lim_{x\to x_{0(\infty)}} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{A}{B} \quad (B\neq 0)\ .$$

5-teorema. Agar $\lim_{u\to u_0} f(u)$ =*A*, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)$= u_0 bo'lsa, murakkab funksiyaning limiti $\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = A$ bo'ladi.

6-teorema. Agar $x_0$nuqtaning qandaydir atrofida(yoki yetarlicha katta x lar uchun) $f(x)$<$\varphi(x)$ bo'lsa, $\lim\limits_{x\to x_{0(\infty)}} f(x) \leq \lim\limits_{x\to x_{0}(\infty)} \varphi(x)$ o'rinli bo'ladi.

Namuna tariqasida 3-teoremaning isbotini keltiramiz.

Teorema shartiga kora, $\lim\limits_{x\to x_{0}(\infty)} f(x)$= A , $\lim\limits_{x\to x_{0}(\infty)} \varphi(x)$ =B .

Cheksiz kichik miqdorlar va funksiya limiti o'rtasidagi munosabat haqidagi teoremaga asosan $f(x)$= A +$\alpha(x)$, $\varphi(x)$ =B +$\beta(x)$ bo'ladi, bu yerda (x) , $\beta(x)$ lar $x\to x_0 (x\to\infty)$ da cheksiz kichik miqdorlar.

Ikkala tenglikni hadma-had ko'paytirib:

$$f(x)\ \varphi(x) = AB + B\,\alpha(x) + \mathrm{A}\,\beta(\mathrm{x}) + \alpha(x)\beta(\mathrm{x})$$

ni olamiz.

Cheksiz kichik miqdorlarning xossalariga ko'ra, bu tenglikning o'ng tomonidagi oxirgi uchta qo'shiluvchilar $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ da cheksiz kichik miqdorlar bo'ladilar va ularning yig'indisini $\gamma(\mathrm{x})$ bilan belgilasak, $f(x)\ \varphi(x) = AB + \gamma(\mathrm{x})$ ga ega bo'lamiz. Cheksiz kichik miqdorlar va funksiya limiti o'rtasidagi munosabat haqidagi teskari teoremaga asosan $\lim\limits_{x\to x_{0}(\infty)} (f(x)\cdot\varphi(x))= A\cdot B$.

Limitlar haqidagi teoremalarda f(x) va $\varphi(x)$ funksiyalarning limitlari mavjud deb faraz qilinib, yig'indi, ko'paytma yoki bo'linmaning limiti haqida xulosa qilinadi.

Lekin, yig'indi, ko'paytma yoki bo'linmaning limiti mavjudligidan qo'shiluvchilar, ko'paytuvchilar yoki bo'linuvchi va bo'luvchilarning limitlari mavjudligi kelib chiqavermaydi.

Masalan, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(tg\cdot ctgx) = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} 1 = 1$ limit mavjudligidan $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} tgx$ limitning mavjudligi kelib chiqmaydi.

Sonlar ketma-ketligining limiti mavjudlik alomatihaqidagi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

6-teorema. Agar $\{x_n\}$ sonlar ketma-ketligi monoton va chegaralangan bo'lsa, u limitga ega bo'ladi.

Quyidagi teorema esa, funksiya limitini aniqlashda muhim o'rin tutadi.

7-teorema. Agar x_0 nuqtaning qandaydir atrofida (yoki x ning yetarlicha katta qiymatlarida) $f(x)$ funksiya $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ da bir xil A limitga ega bo'lgan $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalari orasida joylashgan bo'lsa, $f(x)$ ham A limitga ega bo'ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A$, $\lim_{x\to x_0}\psi(x)=A$.

Bu esa,har qanday $\varepsilon>0$ uchun shunday $\delta>0$ mavjud bo'lib, $x\neq x_0$ bo'lgan va $|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar uchun bi r vaqtda $|\varphi(x)-A|<\varepsilon$, $|\psi(x)-A|<\varepsilon$ yoki $A-\varepsilon<\varphi(x)<A+\varepsilon$, $A-\varepsilon<\psi(x)<A+\varepsilon$ tengsizlikri o'rinliligini bildiradi.

Teorema shartiga ko'ra, $\varphi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ bo'lganligi uchun oxirgi ikkita tengsizlikdan $A-\varepsilon<f(x)<A+\varepsilon$ yan`i $|f(x)-A|<\varepsilon$ tengsizlikni olamiz.

Bu $\lim_{x\to x_0} f(x)=A$ ekanligini isbotlaydi.

1. Quyidagilar munosabatlar limitlarni topishda muhim o'rin tutadi:

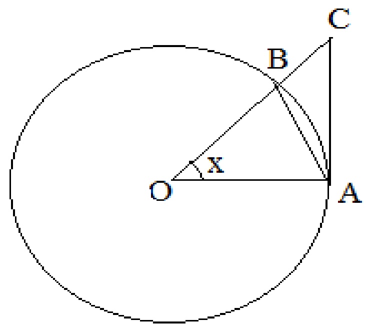
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (***birinchi ajoyib limit***);

2. $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e=2{,}71828...$ (**ikkinchi ajoyib limit**);

3. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$;

4. $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$;

5. $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^m-1}{x}=m$.



13-chizma

Biz birinchi ajoyib limitni ifodalovchi tenglikning isbotini keltiramiz.

$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ munosabatni isbotlash uchun tekislikda markazi O nuqtada va radiusi R ga teng bo'lgan doirani qaraymiz:

OB, *OX* o'qi bilan x $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$ burchak tashkil qiluvchi qo'zg'aluvchi radius bo'lsin. Shakldan ko'rinadiki, *AOB* uchburchakning yuzi, *AOB* sektorning yuzidan kichik, bu esa o'z navbatida *AOC* uchburchakning yuzidan kichik , ya`ni

$S_{\Delta AOB}<S_{sektor\,AOB}<S_{\Delta AOC}$.

$$S_{\Delta AOB}=\frac{1}{2}R\cdot R\cdot\sin x=\frac{1}{2}R^2\sin x,\quad S_{sektor\ AOB}=\frac{1}{2}R^2x,\quad S_{\Delta AOC}=\frac{1}{2}AO\cdot AC=\frac{1}{2}AO(AO\cdot tgx)=\frac{1}{2}R^2tgx,$$

bularga asosan quyidagi tengsizlikga ega bo'lamiz:

$$\frac{1}{2}R^2 sinx<\frac{1}{2}R^2x<\frac{1}{2}R^2\ tgx\ .$$

Oxirgi qo'sh tengsizlikni $\frac{1}{2}R^2 sinx>0$ bo'lib,

$1<\frac{x}{six}<\frac{1}{cox}$ yoki $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ tengsizlikni olamiz.

cosx va $\frac{\sin x}{x}$ funksiyalar juft bo'lganliklari uchun oxirgi tengsizlik $\left(-\frac{\pi}{2};\ 0\right)$ oraliqdagi *x* lar uchun ham o'rinli bo'ladi.

$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$ tengsizlikda $x\to 0$ da limitga o'tib, $\lim\limits_{x\to 0}1=1,\ \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$ larga ega bo'lamiz. Bundan esa limitlar haqidagi teoremalarga asosan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ kelib chiqadi.

Ikkinchi ajoyib limit haqida to'xtalish uchun $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sonlar ketma-ketligini qaraymiz. Bu ketma-ketlik hadlarining son qiymatlari:

a_1 =2,0 ,a_2 =2,25 ,a_3 =2,37, a_4 =2,441, a_5 =2,488, … va $\{a_n\}$ ketma-ketlikni o'suvchi deb hisoblash mumkin. Bunga $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ifoda uchun Nyutonning binom formulasidan foydalanib va sodda almashtirish bajarib, $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=2+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot ...\left(1-\frac{n-1}{n}\right)+...$ ga ega bo'lish orqali ham ishonch hosil qilsa, bo'ladi ($a_1< a_2<\dots<a_n \dots$).

Oxirgi tenglikdan $a_n<2+\frac{1}{1\cdot 2}+...+\frac{1}{1\cdot 2\cdot ...\cdot n}<2+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...$ tengsizlikga kelamiz. $\frac{1}{2}+...+\frac{1}{2^{n-1}}+...$ yig'indi esa, birinchi hadi $a=\frac{1}{2}$ va maxraji $q=\frac{1}{2}$ bo'lgan geometrik progressiya hadlarining S_{n-1} yig'ndisini ifodalaydi

$$s_{n-1}=\frac{\frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-1\right)}{\frac{1}{2}-1}=1-\frac{1}{2^{n-1}}<1.$$

Bundan esa, $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<2+1<3$.

Demak,$\{a_n\}$ chegaralangan ekan. Sonli ketma-ketlikning limiti mavjudligi alomatiga asosan, $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlik limitga ega.

Ta`rif. $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ sonlar ketma-ketligining limitiga *e* soni deyiladi.

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Biz yuqorida 2<*e*<3 bo'lishliligini ko'rsatdik.

Aniqrog'i $e\approx2{,}718281\ldots$, *e* soni irratsional son.

$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiya $x\to+\infty$ va $x\to-\infty$ da *e* soniga teng limitga ega bo'lishligini ko'rsatish mumkin. $e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$.

$y=\frac{1}{x}$ deb belgilab, *x* ni topsak, $x=\frac{1}{y}$ bo'ladi va $x\to\infty$ da $y\to 0$.

Natijada *e* soning yana bir yozilishiga ega bo'lamiz:

$$e=\lim_{y\to\infty}(1+y)^{\frac{1}{y}}$$

e soni (**Eyler soni**) matematik tahlilda muhim o'rin tutadi.

Statistika, fizika, biologiya, ximiya va boshqa sohalarning ko'pgina amaliy masalalarining yechimlari e soniga keltiriladi.

Biz *e* sonining tadbiqi sifatida foizlarni uzluksiz hisoblash masalasini qaraymiz.

Masala. Faraz qilaylik, bankdagi dastlabki omonat Q_0 pul birligidan iborat bo'lsin. Bank yiliga *p*% ystama to'laydi. *T* yildan keyingi omonat miqdori Q_t ni topish talab qilinadi.

Yechish. Yiliga p% ustama bo'lganligi uchun omonat yiliga $\left(1+\frac{p}{100}\right)$ marta oshadi, ya`ni $Q=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$, $Q_2=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$, …, $Q_t=Q_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^t$. Agar omonat bo'yicha foiz yilida bir marta emas, n marta to'lansa, yiliga p% ustama bo'lganda yilning $\frac{1}{n}$ qismi uchun ustama $\frac{p}{n}$% ni, t yildan keyingi omonat miqdori $Q_t=Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}$ bo'ladi.

Agar omonat bo'yicha ustama yarim yilda to'lansa, n=2, har kvartal (chorak)da to'lansa, n=4, har oyda to'lansa, n=12, har kuni to'lansa, n=365, har soatda to'lansa, n=8760, va hakozo ($n\to\infty$).

U holda t yildan keyingi omonat miqdori:

$$Q_t=\lim_{n\to\infty}\left[Q_0\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{nt}\right]=Q_0\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{p}{100n}\right)^{\frac{100n}{p}}\right]^{\frac{pt}{100}}$$ yoki $x=\frac{100n}{p}\to\infty$ da $Q_t = Q_0 e^{\frac{pt}{100}}$

formulaga ega bo'lamiz. Bu formula $p>0$ bo'lganda ko'rsatkichli (eksponensial) o'sish yoki $p<0$ bo'lganda kamayish qonunini ifodalaydi. Undan foyizlarni uzluksiz hisoblashlarda foydalanish mumkin.

1-misol. $\lim_{x\to 3}\frac{4x+3}{3x+5}$ topilsin.

Yechish. Kasrning surati $x\to 3$ da 4·3+3=15 ga intiladi, maxraji esa 3·3+5=14 ga intiladi. Shuning uchun ham,

$$\lim_{x\to 3}\frac{4x+3}{3x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to 3}(4x+3)}{\lim\limits_{x\to 3}(3x+5)}=\frac{15}{14}=1\frac{1}{14}$$

2-misol. $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}$ topilsin.

Yechish: Cheksiz kichik miqdor x($x\to 0$) ning chegaralangan funksiya $\sin\frac{1}{x}\left(\left|\sin\frac{1}{x}\right|\le 1\right)$ ga ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun $\lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{x}=0$

3-misol. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+4x}$ topilsin.

Yechish: $\dfrac{x^2-16}{x^2+4x}=\dfrac{(x-4)(x+4)}{x(x+4)}=\dfrac{x-4}{x}$.

Agar $x\neq -4$ bo’lsa, $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^2-16}{x^2+4x}=\left[\dfrac{0}{0}\right]=\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x-4}{x}=\dfrac{-4-4}{-4}=2$.

4-misol. $\lim_{x\to\infty}\frac{2x-7}{x-8}$ ni hisoblang.

Yechish. Bu $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ko’rinishdagi aniqmaslik bo’lib, uni yechish uchun kasrning surat va maxrajini x ga bo’lamiz.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x-7}{x-8}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{7}{x}}{1-\frac{8}{x}}=\frac{2-0}{1-0}.$$

Umuman olganda,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_1x+a_2x^{n-1}\ldots\ldots\ldots.+a_nx+\gamma_1}{b_1x^m+b_2x^{m-1}\ldots\ldots+b_mx+k}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\left\{\begin{matrix} n<m,\text{bo'lsa, 0 ga teng} \\ n=m,\text{bo'lsa,}\quad \dfrac{a_1}{b_1}\text{ga teng} \\ n>m,\text{bo'lsa,}\qquad \infty\text{ ga teng}\end{matrix}\right\}$$

5-misol. $\lim_{x\to\infty}\frac{-3+\sqrt{x^2+9}}{x^2}$ ni toping.

Yechish. Surat va maxrajni $3+\sqrt{x^2+9}$ ga ko’paytirsak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x^2+9}-3\right)\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2+9-9}{x^2\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+9}+3\right)}=\frac{1}{6}.$$

6-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)$ ni topilsin.

Yechish. $[\infty-\infty]$ ko’rinishdagi aniqmaslikni yechish uchun $\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}$ ga ham ko’paytirib, ham bo’lamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(\sqrt{x^3+2}-\sqrt{x^3-2}\right)\left(\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^3-2}\right)}{\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^3-2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4}{\sqrt{x^3+2}+\sqrt{x^3-2}}=0.$$

7-misol. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{mx}$ ni toping.

Yechish. Birinchi ajoyib limitdan foydalansak, $\frac{\sin kx}{mx}=\frac{k}{m}\lim_{x\to 0}\frac{\sin kx}{kx}=\frac{k}{m}$.

8-misol. $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}\right)$ ni toping.

Yechish. Limit ostidagi kasr suratni maxrajiga bo'lsak, $\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}=1+\frac{4x+1}{x^2-2x+3}$.

Ikkinchi ajoyib limitdan foydalanishga moslab almashtiramiz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x+4}{x^2-2x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x+1}{x^2-2x+3}\right)^x=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{4x+1}{x^2-2x+3}\right)^{\frac{x^2-2x+3}{4x+1}}\right]^{\frac{x(4x+1)}{x^2-2x+3}}==$$

$$e^{\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^2}}}=e^4.$$

Bir o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi

1-ta`rif. Agar 1) $f(x)$ funksiya x_0 nuqta aniqlangan:

2) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ chekli limit mavjud bo'lsa:

3) $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo'lsa, $y=f(x)$ x_0 **nuqtada uzluksiz** deyiladi.

Misol. $y=ax^2+bx+c$ funksiya $(a,b,c\in R)$ $\forall x_0\in R$ nuqda uzluksizlikka tekshirilsin.

Ta`rifda keltirilgan shartlarni tekshiramiz.

1. $y=ax^2+bx+c$ funksiya $\forall x_0\in R$ nuqtada aniqlangan va $D(y)=R$.
2. $\lim_{x\to x_0} y=\lim_{x\to x_0}\left(ax^2+bx+c\right)=ax_0+bx_0+c$, chekli limit mavjud.
3. $f(x_0)=ax_0+bx_0+c$, ya`ni $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Demak, $y=ax^2+bx+c$ funksiya $(a,b,c\in R)$ $\forall x_0\in R$ nuqda uzluksiz.

Funksiyaning nuqtada uzluksizligining orttirmalar tilidagi ta'rifini keltiramiz.

Argumentga x_0 nuqtada Δx orttirma bersak, funksiya $y=f(x),\ \Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirmani oladi.

2-ta`rif. Agar x_0 nuqtada argumentning cheksiz kichik orttirmasiga $f(x)$ funksiyaning cheksiz kichik orttirmasi mos kelsa, ya'ni $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Uzluksizlikning bu ikkala ta`riflari teng kuchliligini ko'rsatamiz.

1-ta`rifning 3-shartidan $x = x_0 + \Delta x$ bo'lganda, $x \to x_0$ va $\Delta x \to 0$ lar teng kuchliligidan $\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$ kelib chiqadi.

Cheksiz kichik va funksiya limiti orasidagi munosabatga asosan:

$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \alpha(\Delta x)$ va $\alpha(\Delta x) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$, $\Delta x \to 0$ *da* cheksiz kichik miqdor, ya`ni $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Misol. y= x^2 funksiya uzluksizlikka tekshirilsin.

Yechish. $y + \Delta y = (x + \Delta x)^2$, $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$ $= 2x\Delta x + (\Delta x)^2$, $\Delta y = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0} (2x\Delta x + (\Delta x)^2) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x(2x + \Delta x) = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} (2x + \Delta x) = 0 .$$

Demak, y= x^2 fuksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda uzluksiz.

Endi uzluksizlikning "$\varepsilon - \delta$" tilidagi ta`rifini keltiramiz.

3-ta`rif (Koshi). Agar ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun , shunday $\delta > 0$ soni mavjud bo'lib, $|x - x_0| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha *x* lar uchun $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ tengsizligi o'rinli bo'lsa, *y*=*f*(*x*) funksiya x_0 nuqdada uzluksiz deyiladi va quyidagicha yoziladi $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Bu ta`rifni matematik belgilar orqali:

$$\{ f(x) \text{ funksiya } x_0 \text{ nuqtada uzluksiz yoki } \lim_{\Delta x \to 0} f(x) = f(x_0) \}$$

$$\Leftrightarrow \{(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x : |x - x_0| < \delta) |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon\}$$

Misol. y=$\sqrt{x+2}$ funksiya x_0=2 nuqtada uzluksizlikka"$\varepsilon - \delta$" tilidagi ta`rif orqali tekshirilsin.

Yechish. $\forall \varepsilon > 0$ sonini olib, bu ε songa ko'ra$\delta > 0$ sonini $\delta = 2\,\varepsilon$ bo'lsin deb qaralsa, u holda$|x - 2| < \delta$ bo`lganda

$$|f(x) - f(2)| = \left|\sqrt{x+2}) - 2\right| = \frac{|x-2|}{\sqrt{x+2})+2} < \frac{|x-2|}{2} < \frac{\delta}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi. Bu esa ta`rifga ko'ra, y=$\sqrt{x+2}$ funksiyaning x_0=2 nuqtada uzluksiz bo'lishini bildiradi.

4-ta`rif. Funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, u bu nuqtada ***uzilishga ega*** deyiladi.

5-ta`rif.Agar $x \to x_0$ da char va o'ng limitlar mavjud bo'lib, ular teng bo'lmasalar, x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya I tur uzulishga ega deyiladi.

Masalan, $f(x) = [x]$ (x ning butun qismi) funksiya $x = p$ (p-tub son) nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki:$\lim_{x\to p-0} f(x) = \lim_{x\to p-0}[x] =$ p-1 ,
$\lim_{x\to p+0} f(x) = \lim_{x\to p+0}[x] =$ p.

6-ta`rif. Agar $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$ bo'lsa, x_0 nuqta **bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzulish nuqtasi**deyiladi

Bu holda $x \to x_0$ da $f(x)$ funksiya limitini funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi qiymati deb olish bilan x_0 nuqtadagi uzilish bartaraf qilinadi.

Masalan, $f(x) = \begin{cases} \text{agar x} \neq 0 \text{ bo`lsa}, & x^2 \\ \text{x} = 0 \text{ bo`lsa}, & 1 \end{cases}$

funksiya uchun $\lim_{x\to 0} f(x)$ =0 $\neq f(x_0)$ munosabat o'rinli.

Demak, bu funksiya x=0 nuqtada bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilishga ega.

7-ta`rif. $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ bo'lsa, x_0 nuqta sakrash nuqtasi, $f(x_0 + 0) - f(x_0)$ ga funksiyaning x_0 nuqtasidagi **sakrashi** deyiladi.

8-ta`rif. Agar $f(x_0 - 0)$ va $f(x_0 + 0)$ lardan hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmasa, x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya **II** tur uzulishga ega deyiladi.

Masalan, $f(x) = tgx$ funksiyaning $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-0} tgx = +\infty \text{ , } \lim_{x\to \frac{\pi}{2}+0} tgx = \infty$$

bo'ladi. Demak, $y = tgx$ funksiya $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega.

Endi nuqtada uzluksiz funksiyalarnig muhim xossalari bilan tanishib chiqamiz.

1. Agar $f(x)$ va φ(x) funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsalar, ularning yig'ndisi $f(x) + \varphi(x)$, ko'paytmasi $f(x)\cdot\varphi(x)$, bo'linmasi $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ $(\varphi(x) \neq 0)$ ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Xossaning isboti uzluksizlik ta`rifidan va funksiya limitinig mos xossasidan kelib chiqadi.

2. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz va $f(x_0) > 0$ bo'lsa, x_0 nuqtaning $f(x) > 0$ bo'ladigan atrofi mavjud bo'ladi.

Isboti. Uzluksizlikning orttirmalar tilidagi ta`rifiga ko'ra, argumentning $\Delta x \to 0$ cheksiz kichik orttirmasida funksiyaning $\Delta y \to 0$ yetarlicha orttirmasini ega bo'lish mumkin. Bu esa, x_0 nuqtaning $(x_0 - \Delta x,\ x_0 + \Delta x)$ atrofida funksiya ishorasi o'zgarmasligini bildiradi.

3. Aga $y=f(u)$ funksiya u_0 nuqtada, $u=\varphi(x)$ funksiya esa, $u_0 = \varphi(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, $y=f[\varphi(x)]$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Bu xossani $\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)]$ham yozish mumkin ya`ni uzluksiz funksiya ostida limitga o'tish mumkin.

$y = f(x)$ funksiya X oraliqning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa X oraliqda **uzluksiz** deyiladi.

Elementar funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz funksiyalar bo'ladilar.

Namuna tariqasida $y=sinx$ funksiyaning $\forall x_0 \in R$ nuqtada uzluksizligini ko'rsatamiz. $\forall x_0 \in R$ nuqtani olib, unga Δx orttirma beramiz.

Natijada $y=sinx$ funksiya ham $\Delta y = \sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0$

orttirmaga ega bo'lib, $\pi < \Delta x < \pi$ bo'lganda

$$|\Delta y| = |\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0| = \left|2 \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x_0 + \frac{\Delta x}{2}\right)\right| \leq 2 \cdot \frac{|\Delta x|}{2} = |\Delta x|$$

tengsizlikka ega bo'lamiz.

Bundan $\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ bo'lishi kelib chiqadi. Demak, y=sinx funksiya $\forall x_0 \in R$ nuqtada uzluksiz.

Aniqlanish sohasining ixtiyoriy nuqtasida uzluksiz bo'lishlik, faqat elementar funksiyalarga xos bo'lib, boshqa funksiyalar uchun o'rinli bo'lmasligi mumkin.

Masalan, elementar bo'lmagan y=[x] (x ning butun qismi) funksiya x=p (p-tub son) nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'lishligini ko'rsatgan edik.

Kesmada uzluksiz funksiyalar quyidagi xossalarga ega.

1. Agar $y = f(x)$ funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada chegaralangan.

2. Agar $y = f(x)$ funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo'lsa, u shu kesmada, o'zining eng kichik qiymati m va eng katta qiymati M ga erishadi.

3. Agar $y = f(x)$ funksiya [a,b] kesmada uzluksiz va kesmaning chekkalardagi f(a) va f(b) qiymatlari turli ishorali bo'lsalar, kesmaning ichkarisida $\xi \in (a,b)$ nuqta topiladi va $f(\xi) = 0$ bo'ladi.

Misol. a) $y=\frac{x^2-16}{x-4}$ funksiya x=4 nuqtada; b) $y=2^{1/x}$ funksiya x=0 nuqtada uzluksizlikka tekshirilsin.

Yechish. a) x=4 nuqtada funksiya aniqlanmagan, boshqa nuqtalarda esa kasrni x-4 ga qisqartirib, y=x+4 ga ega bo'lamiz ($x \neq 4$) va

$$\lim_{x\to 4-0} y = \lim_{x\to 4+0} y = 8.$$

Demak x=4 nuqtada berilgan funksiya bartaraf qilinadigan uzilishga ega. Agar x=4 da y=8 deb olsak, uning uzilishi bartaraf qilinadi.

b) $x = 0$ nuqtada $y = 2^{\frac{1}{x}}$ funksiya aniqlanmagan va $\lim\limits_{x\to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = \infty$, $\lim\limits_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = 0$. Bir tomonlama limitlardan bir cheksiz bo'lganligi uchun x=0 nuqtada berilgan funksiya II tur uzilishga ega.

Mavzuga doir nazorat savollari va topshiriqlar

1. Sonlar ketma-ketligi tarifini keltiring?
2. O'suvchi, kamayuvchi sonlar ketma-ketligiga misollar keltiring?
3. Ishoralari almashinuvchi sonlar ketma-ketligiga misol keltiring?
4. Chegaralangan va chegaralanmagan sonli ketma-ketliklar haqida bilganlaringizni yozib chiqing?
5.Qachon sonli ketma-ketlik limtga ega deyiladi?
6. Sonli ketma-ketlik limiti ta`rifini matemik belgilar orqali yozing?
7.Funksiyaning cheksizlikdagi limiti ta`rifini matematik belgilar orgali yozing?
8. Funksiyaning nuqtadagi chap va o'ng limitlari ta`rifini yozing?
9. Cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar deganda qanday miqdorlarni tushunasiz?

10. Cheksiz kichik miqdorlar qanday xossalarga ega?

11. Limitlar haqidagi teoremalarni keltiring va ayrimlarini isbotlang?

10. Birinchi va ikkinchi ajoyib limitlarni ifodalovchi tengliklarni yozing?

12. Birinchi ajoyib limitni ifodalovchi tenglikni isbotlang?

13. e sonining tadbiqiga misollar keltiring?

14. Funksiyaning nuqtadagi uzluksizlik ta`rifini uch ko'rinishda yozing?

15.Funksiyaning sakrashi deganda nimani tushunasiz?

16. Uzilish nuqtalari va ularning turlar haqidagi ma`lumotlarni keltiring?

17. Uzluksiz funksiyalar haqidagi teoremalarni keltiring?

18. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalarini ifodalovchi teoremalarni tushuntirib bering?

Limit ta'rifidan foydalanib isbotlansin [1-3].

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2n-1}{n+3}=2$

2. $\lim\limits_{x\to 5}(3x-4)=11$

3. $\lim\limits_{x\to 2}(x^2-3)=1$

Limitlar topilsin [4-40].

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left[x(x+1)^2-\dfrac{1}{x+3}\right].$ [-1/3.]

5. $\lim\limits_{x\to 5}(x-5)\sin\dfrac{1}{x-5}.$ [0.]

6. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-6x+8}{x^2-8x+12}.$ [0,5.]

7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-12x+20}{x^2-5x+6}.$ [8.].

8. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{4-x}{\sqrt{x}-2}.$ [-4]

9. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+3}-2\sqrt{x}}{x-1}.$ [-3/4.]

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2-16}-4}$. [4.]

11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$. [3.]

12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+x-3x^3}{1+x^2+x^3}$. [-1.]

13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-2}{x^4-1}$. [0.]

14. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+2}-\sqrt{x}\right)$. [0.]

15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x}}{\sqrt{x^3+x}-x}$. [-1.]

16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2^x-3^x}{2^x+3^x}$. [1.]

17. $\lim\limits_{x\to\infty}x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)$. [0,5.]

18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{2x}$. [0,5.]

19. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{3x}$. [5/3].

20. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x^2}$. [8.]

21. $\lim\limits_{x\to\infty}(x-5)\sin\dfrac{1}{x-5}$. [1.]

22. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{\sqrt{x+1}-1}$. [8.]

23. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x\,\mathrm{tg}\,x-\frac{\pi}{\cos x})$. [2.]

24. $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+1}{x^2})^{x^2+1}$. [e.]

25. $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^x$. [e^3.]

26. $\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+1}{x^2-3})^{x^3-5}$. [∞ .]

27. $\lim_{x\to 0}(1+tg^2\sqrt{x})^{\frac{1}{2x}}$. [$\sqrt{e}$.]

28. $\lim_{x\to 0}\frac{5^x-4^x}{x^2-x}$. [ln(5/4).]

29. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x\ln x}$. [1.]

30. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1-3x)}{x}$. [3.]

31. $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+8}{x-2})^x$. [e^{10}.]

32. $\lim_{x\to 2}(\frac{x}{2})^{\frac{1}{x-2}}$. [$\sqrt{e}$.]

33. $y=\frac{1}{1-e^{1-x}}$ funksiya $x=1$ nuqtada uzluksizlikka tekshirilsin.

[Ikkinchi tur uzilishga ega .]

34. $y=\frac{\sin x}{x}$ funksiya $x=0$ nuqtada uzluksizlikka tekshirilsin.

[Bartaraf qilish mumkin bo'lgan uzilish nuqtasi .]

35. $y=\begin{cases} x=1\ bo'ls, & \frac{x^2-1}{x-1}\ ga\,teng \\ x=1\ bo'lsa, & 2\ ga\,teng \end{cases}$

funksiya $x=1$ nuqtada uzluksizlikka tekshirilsin. [Uzluksiz.]

Mavzuga doir testlar

1. $\{x_n\}$ ketma-ketlik qa`tiy o'suvchi deyiladi, agar:

A) $x_1 < x_2 < ... < x_n < ...$ B) $x_1 \le x_2 \le ... \le x_n \le ...$

C) $x_1 < x_2 < ... < x_n > ...$ D) $x_1 > x_2 > ... > x_n > ...$

2. $y=f(x)$ funksiyaning x0 nuqtadagi chap limiti :

A) $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ B) $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

C) $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ D) $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$.

3. $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng limiti:

A) $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ B) $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$

C) $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ D) $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$

4. $a_n=\frac{n}{n+1}$ sonli ketma-ketlikning quyi va yuqori chegaralarini ko'rsating.

A) $\frac{1}{2}$, 10 B) $\frac{1}{2}$, 1 C) $\frac{1}{2}$, 3 D) 0, 1.

5. Qaysi sonli ketma-ketlik chegaralangan?

A) $\{n^3+3\}$ B) $\{(-1)^n \cdot n\}$ C) $\left\{\frac{(-1)^n}{3}\right\}$ D) $\left\{\frac{n^2-1}{n}\right\}$.

6. Sonli ketma-ketlik limitga ega, agar, u …bo'lsa.

A) faqat chegaralangan, B) faqat monoton,

C) monoton va chegaralangan, D) faqat o'suvchi.

7. Birinchi ajoyib limit :

A) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$, B) $\lim_{x\to 1}\frac{\sin x}{x}=1$,

C) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=0$, D) $\lim_{x\to\infty,}\frac{\sin x}{x}=1$,

8. $\lim_{x\to 0}\frac{sin3x}{4x}$=?

A) $\frac{3}{4}$, B) $\frac{1}{4}$, C) $\frac{4}{3}$, D) 0.

9. Ikkinchi ajoyib limit:

A) $\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$, B) $\lim_{x\to\infty}(1-\frac{1}{x})^x=e$,

C) $\lim_{y\to\infty}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$, D) $\lim_{x\to 0}(1-\frac{1}{x})^x=e$.

10. Ikkinchi ajoyib limit:

A) $\lim_{y\to 0}(1-y)^{\frac{1}{y}}=e$, B) $\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e$,

C) $\lim_{y\to\infty}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e$, D) $\lim_{x\to 0}(1-\frac{1}{x})^x=e$

11.$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{3}{x})^{4x}$=?

A) e^{12}, B) e^4 , C) $e^{0,75}$, D) $e^{3/4}$.

12. $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agar :

A) $\lim_{\Delta x\to -1}\Delta y=0$, B) $\lim_{\Delta x\to 1}\Delta y$ =0 ,

C) $\lim_{\Delta x\to\infty}\Delta y=0$, D) $\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=1$

13 $\alpha(x)$va $\beta(x)$ lar x→ x_0 da cheksiz kichik miqdorlar bo'lib, $\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0$ bo'lsa:

A) $\alpha(x)$, $\beta(x)$ga qaraganda yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor deyiladi.

B) $\alpha(x)$, $\beta(x)$ ga qaraganda past tartibli cheksiz kichik miqdor deyiladi.

C) ularni taqqoslab bo'lmaydi.

D) $\alpha(x)$ va $\beta(x)$ lar ekvivalent deyiladi.

14. f(x) funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi, agar.

A) f(x) funksiya x_0 nuqta aniqlangan, B) $\lim_{x\to x_0} f(x)$ chekli limit mavjud bo'lsa,

C) $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa, D) keltirilgan shartlarning barchasi bajarilganda.

15. y=f(x) funksiya uzluksiz deyiladi,agar …

A) $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 0$, B) $\Delta x \to 0$ da $\Delta y \to 1$,

C) $\Delta y \to 0$ da $\Delta x \to 0$, D) $\lim_{\Delta x\to\infty} \Delta y = 0$.

16. Agar $x \to x_0$ da char va o'ng limitlar mavjud bo'lib, ular teng bo'lmasalar, x_0 nuqta f(x) uchun …nuqta:

A) I tur uzilish, B) bartaraf qilinadigan, C) II tur uzilish, D) uzluksizlik.

17. Agar $x \to x_0$ da char va o'ng limitlardan hech bo'lmaganda bittasi mavjud bo'lmasa, x_0 nuqta f(x) uchun …nuqta:

A) II tur uzilish, B) bartaraf qilinadigan, C) I tur uzilish, D) uzluksizlik.

18. Funksiyaning x_0 nuqtadagi sakrashi:

A) $f(x_0 +0)-f(x_0)$, B) $f(x_0 +0)+f(x_0)$, C) $f(x_0) - f(x_0 +0)$, D) $f(x_0 +0)$.

19. Qanday funksiyalar o'zlarining aniqlanish sohalarida uzluksiz bo'ladilar.

A) asosiy elemehtar funksiyalar, B) faqat trigonometrik funksiyalar,

C) itiyoriy funksiya, D) faqat chiziqli funksiyalar.

20. y=f(x) funksiya [a,b] kesmada uzluksiz bo'lsa,. . .

A) [a,b] kesmada chegaralangan,

B) [a,b] kesmada o'zining eng katta va eng kichik qiymatiga erishadi,

C) [a,b] kesmaning chekkalardagi f(a) va f(b) qiymatlari turli ishorali bo'lsalar, kesmaning ichkarisida $\xi \in (a,b)$ nuqta topiladi va $f(\xi) = 0$ bo'ladi,

D) keltirilganlarning barchasi o'rinli bo'ladi.

Funksiyaning hosilasi

Bir o’zgaruvchining funksiyasining hosilasi

Ba`zi hayotiy jarayonlarni va hodisalarnio’rganishda,bu jarayonning tezligini yoki boshqa kattaliklarini aniqlashga to’g’ri keladi.

Bunda matematikaning qator tushincha va usullaridan foydalanish mumkin.

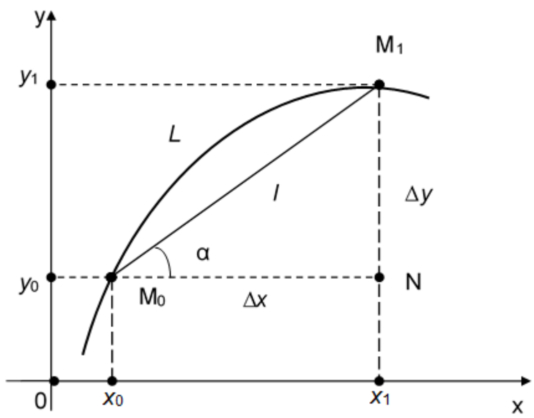
Jumladan,funksiya grafigiga berilgan nuqtadan o’tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti, ma`lum harakat qonuni bilan harakatlanayotgan nuqtaning tezligi, organizmga kiritilgan doriga nisbatan uning reaksiyasi,oziqlantiruvchi muhitga kiritilgan bakteriyalarning maksimal o’isush soni, mehnat unumdaorligi va boshqalarni hosila yordamida aniqlash muunkin.

Biz dastlab, shunday masalardan biri bo’lgan funksiya grafigiga urinma masalasiga to’talamiz.

Faraz qilaylik, L chiziq tekislikda y=f(x) funksiya grafigini ifodalasin.

Tushunarli bo’lishi uchun tekislikda berilgan *L* chiziqning $M_0(x_0,\ y_0)$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma ta`rifini eslatib o’tamiz.

Berilgan *L* chiziqda yotuvchi ikkita M_0 va M_1 nuqtalarni tutashtiruvchi M_0M_1 kesma ***vatar*** deb ataladi.



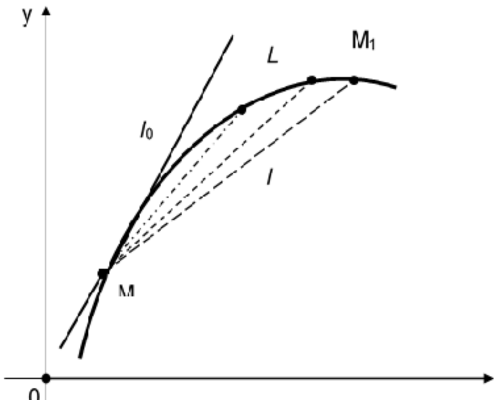
14-chizma

Bu vatar yotgan to‘g‘ri chiziq M_0 nuqtadan o‘tgani uchun uning tenglamasi:

$$y - y_0 = k(x - x_0)\,, \quad k = tg\alpha = \frac{|NM_1|}{|NM_0|} = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{\Delta y}{\Delta x^{y_1}}\,.$$

1-ta`rif. Agar L chiziqning M_0M_1 vatari yotgan l to‘g‘ri chiziq M_1 nuqta L chiziq bo‘ylab M_0 nuqtaga cheksiz yaqinlashib borganda ($M_1 \to M_0$) biror l_0 to‘g‘ri chiziqqa cheksiz yaqinlashib borsa ($l \to l_0$), $l_0$to‘g‘ri chiziq berilgan L chiziqning M_0 nuqtadagi ***urinmasi*** deyiladi.

Egri chiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadagi urinmasi shu nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq bo‘lgani uchun uning ham tenglamasi vatar tenglamasi kabi $y-y_0=k_0(x-x_0)$ ko‘rinishda bo‘ladi. Bu tenglamadagi k_0 burchak koeffitsiyentini topish uchun L chiziq tenglamasi y=f(x) ekanligini eslash yetarli.



15-chizma

$$M_1 \to M_0 \Rightarrow x_1 \to x_0 \, , \, y_1 \to y_0 \Rightarrow \Delta x \to 0 \, , \, \Delta y \to 0$$

bo‘lgani uchun M_0M_1 vatarning k burchak koeffitsiyenti uchun yuqorida keltirilgan formulaga asosan

$$k_0 = \lim_{M_1 \to M_0} k = \lim_{M_1 \to M_0} tg\alpha = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} \quad (1)$$

bo’ladi.

Bunday masalalar sirasiga tezlanish hagidagi masalani ham kiritish mumkin. Faraz qilaylik, nuqta to’g’ri chiziq bo’ylab, s=s(t) qonun bo’yicha harakatlanayotgan bo’lsin, bu yerda s- bosib o’tiladigan yo’l, t-vaqt.

t_0- momentdagi tezlanishni topish talab qilinsin.

t_0- momentgacha bosib o’tiladigan yo’l $s_0=s(t_0)$, $t_0+\Delta t$ momentgacha bosib o’tiladigan yo’l $s_0+\Delta s = s(t_0+\Delta t)$ bo’ladi. Bu holda Δt vaqt oralig’idagi o’rtacha tezlik $\bar{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ bo’ladi. t_0 momentdagi tezlik deganda, t_0 dan $t_0+\Delta t$ gacha bo’lgan vaqt oralig’i o’rtacha tezlikning $\Delta t \to 0$ dagi limiti tushuniladi:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{v} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}. \quad (2)$$

Mehnat unumdorligi hagidagi masalani ham shunday masalalar sirasiga kiritish mumkin.

Faraz qilaylik, ishchining ish kuni boshlangandan t vaqt davomida ishlab chiqargan mahsulot hajmini $u=u(t)$ funksiya bilan, shu vaqt davomidagi mehnat unumdorligi z=z(t) funksiya bilan ifodalansin. Ish kunining biror t_0 dan $t_1=t_0+\Delta t$ gacha bo'lgan vaqt oralig'ini qaraymiz.

Bu vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi u($t_0+\Delta t$)– u(t_0)=Δu, Δt vaqt oralig'idagi ishchining o'rtacha mehnat unumdorligi $\bar{z}(\Delta t) = \Delta u / \Delta t$ nisbatga teng bo'ladi. Ishchining $t=t_0$ vaqtdagi $z_0=z(t_0)$ mehnat unumdorligini topish uchun $\Delta t \to 0$ da limitga o'tib ,

$$z(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \bar{z}(\Delta t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta t} \tag{3}$$

ifodaga ega bo'lamiz.

Yuqorida qaralgan uchala masala mazmunan turlicha bo'lsa ham, ularni yechilishi bir xil matematik usulda amalga oshirilib, natijada bir xil tipdagi limitik nisbatlarga ega bo'lindi. Endi masalani umumiy holda qaraymiz.

Biror $y=f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Bu funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli x_0 va $x=x_0+\Delta x$ argumentning qiymatlarini qaraymiz (x_0 nuqtada argumentga Δx orttirma beramiz). Argumentning Δx orttirmasiga mos keluvchi $y=f(x)$ funksiyaning orttirmasi $\Delta y=\Delta f= f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ bo'lsin.

2-ta`rif. Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning Δf orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x \to 0$ bo'lganda chekli limitga ega bo'lsa, bu limit qiymati funksiyaning x_0 nuqtadagi ***hosilasi*** deb ataladi.

Berilgan $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ yoki $y'(x_0)$ kabi belgilanadi va ta'rifga asosan,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \tag{4}$$

tenglik orqali aniqlanadi.

Endi ko'rilgan masalalarning (1)–(3) natijalarini kiritilgan hosila tushunchasi orqali ifodalaymiz.

y=f(x) funksiya orqali berilgan L chiziqning $M_0(x_0,y_0)= M_0(x_0, \varphi(x_0))$ nuqtasiga o'tkazilgan l_0 urinmaning k burchak koeffitsiyenti ifodalovchi (1) formuladan

$$k=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta x}=f'(x_0) \qquad (1')$$

natijaga kelamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadfagi hosilasi uning grafigining $M_0(x_0,y_0)= M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentini ifodalaydi va bu ***hosilani geometrik ma’nosi*** ifodalaydi.

Bundan, $y=f(x)$ funksiya grafigining $M_0(x_0,y_0)= M_0(x_0, f(x_0))$ nuqtasiga o‘tkazilgan urinma tenglamasi

$$y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)\ yoki\ y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

ko‘rinishda bo’lishligiga kelamiz.

Harakat tenglamasi s=s(t) funksiya bilan ifodalanadigan notekis harakatda t_0 momentdagi tezlik uchun topilgan (2) formuladan

$$v(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=s'(x_0) \qquad \mathbf{(2')}$$

formulani hosil qilamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi uning o‘zgarish tezligini ifodalaydi va bu ***hosilani mexanik ma’nosi*** ifodalaydi.

I.Nyuton hosila tushunchasiga mana shu yo‘nalishdagi tadqiqotlari orqali kelgan va uni “flyuktsiya” deb atagan.

Mehnat unumdorligi to‘g‘risidagi masalaning yechimi sifatida olingan (3) formulani

$$z(t_0)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t_0) \qquad (3')$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Demak, $y=f(x)$ funksiya x vaqtgacha ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ifodalasa, uning hosilasi $f'(x)$ shu x vaqtdagi mehnat unumdorligini ifodalaydi va u ***hosilaning iqtisodiy ma’nosini*** fodalaydi.

Ta`rif. Funksiya hosilasini topish berilgan funksiyani diffrensiallash, x_0 nuqtada chekli hosilaga ega bo’lgan funksiyaga bu nuqtada **diffrensiallanuvchi** deyiladi.

Quyidagi teorema funksiyaning uzluksizligi va diffrensiallanuvchanligi orasidagi bog'lanishni ifodalaydi.

Teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada diffrensiallanuvchi bo'lsa, u bu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Isboti. Teorema shartiga ko'ra $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada diffrensiallanuvchi, ya`ni $\lim\limits_{\Delta X \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ chekli limit mavjud, bu yerda $f'(x_0)\Delta x$ ga bog'liq bo'lmagan o'zgarmas miqdor.

Bundan: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$, bu yerda (Δx) , $\Delta x \to 0$ da cheksiz kichik miqdor, yoki

$\Delta y = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x$.

Oxirgi tengliknig ikkala tomonidan $\Delta x \to 0$ da limitga o'tsak, $\Delta y \to 0$ ni olamiz, bu x_0 nuqtada $y = f(x)$ funksiyaning uzluksizligini ko'rsatadi.

$y = f(x)$ funksiyaning hosilasini quyidagi sxema (ketma-ketlik) bo'yicha topilish mumkin.

1. Argumentga orttirma berib, unga mos funksiya orttirilganini topamiz.
2. Funksiya orttirmasini topamiz.
3. Funksiya orttipmasining argument orttipmasiga nisbatini topamiz.
4. Funksiya orttipmasining argument orttipmasiga nisbatining limitini topamiz.

Endi bu keltirilgan sxema bo'yicha ba`zi elementar funksiyalarning hosilalari uchun formullar keltirib chiqaramiz.

1-misol. $y=f(x)=x^3$ funksiyaning $x=x_0$ dagi hosilasi hosila ta`rifidan foydalanib topilsin.

Yechish. 1. Funksiyaning orttirilgan qiymati: $y+\Delta y = (x_0+\Delta x)^3$.

2. Funksiyaning**x₀**nuqtadagi orttirmasi:

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = (x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3 = 3x_0^2\Delta x + 3x_0(\Delta x)^2 + (\Delta x)^3 .$$

3. Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbati:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3x_0^2 + 3x_0\Delta x + (\Delta x)^2 .$$

4. Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining limiti:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(3x_0^2+3x_0\Delta x+(\Delta x)^2\right)=3x_0^2 .$$

Demak, $f'(x_0)=3x_0^2$.

Umumiy holda ixtiyoriy p uchun $(x^p)'=px^{p-1}$ o'rinli ekanligini ham ko'rsatish mumkin.

2-misol. $y=\ln x$ funksiya hosilasi uchun formula topilsin.

Yechish. Funksiya hosilasini topish uchun yuqorida keltirilgan sxemadan foydalanamiz:

1. $y+\Delta y=\ln(x+\Delta x)$.

2. $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x=\ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right)=\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$.

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$.

4. $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$.

$\frac{\Delta x}{x}=y$ deb olsak, $\Delta x=xy$ va $y'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{1}{xy}\ln(1+y)=\frac{1}{x}\lim_{y\to 0}\ln(1+y)^{\frac{1}{y}}$.

Logarifmik funksiyaning uzluksizligidan foydalanib, limit va logarifm belgilarining o'rinlarini almashtirib, ikkinchi ajoyib limitdan foydalansak, quyidagiga ega bo'lamiz :

$$y'=\frac{1}{x}\ln[\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}]=\frac{1}{x}\ln e=\frac{1}{x}.$$

Demak, $(\ln x)'=\frac{1}{x}$.

3-misol. $y=\sin x$ funksiya hosilasi uchun formula keltirib chiqarilsin.

Yechish. 1. $y+\Delta y=\sin(x+\Delta x)$.

2. $\Delta y=\sin(x+\Delta x)-\sin x$, ikki burchak sinuslar ayirmasini ko'paytmaga almashtirish formulasiga asosan :

$$\Delta y=2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right).$$

3. $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}$.

4. $y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\ \frac{\Delta x}{2}\right)$.

Birinchi ajoyib limit ifodasi va cosx funksiyaning uzluksizligidan:

$$y' = \cos x \text{ , ya`ni } (\sin x)' = \cos x .$$

Murakkab va teskari funksiyalarning hosilalari

y o'zraruvchi *u* o'zgaruvchining funksiyasi, ya`ni $y=f(u)$, *u* esa o'z navbatida erkli *x* o'zgaruvchining funksiyasi $u=\varphi(x)$ bo'lsin, ya`ni $y=f(\varphi(x))$ **murakkab funksiya** berilgan bo'ladi.

1-teorema. Agar $y=f(u)$ va $u=\varphi(x)$ funksiyalar o'z argumentlari bo'yicha diffrensiallanuvchi funksiyalar bo'lsalar, murakkab funksiya $y=f(u)$ ning hosilasi mavjud va $y' = f'(u)\cdot u'_x$ o'rinli bo'ladi.

Isboti. *X* erkli o'zgaruvchiga $\Delta x \neq 0$ orttirma beramiz, u holda $u=\varphi(x)$ va $y=f(u)$ funksiyalar mos Δu va Δy orttirmalarga ega bo'ladilar.

Faraz qilaylik, $\Delta u \neq 0$, $y=f(u)$ funksiya differensiallanuvchi bo'lganligi uchun $\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u)$, bu yerda $f'(u)$ - Δu ga bog'liq bo'lmagan miqdor, va $\frac{\Delta y}{\Delta u} = f'(u) + \alpha(\Delta u)$ bo'ladi (bu yerda $\alpha(\Delta u)$, $\Delta u \to 0$ da cheksiz kichik miqdor).

Oxirgi tenglikdan $\Delta y = f'(u)\,\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u$ va ikkala tomonini Δx ga bo'lib, $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}$ ni olamiz.

$u=\varphi(x)$ funksiya diffrensiallanuvchi bo'lgani uchun, $\Delta x \to 0$ da limitga o'tsak, $y' = f'(u)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x} = f'(u)\cdot u'_x$.

Bu teoremaga asosan agar $y= u^p$ va $u=u(x)$ bo'lsa,

$$(u^p)' = p\,u^{p-1}u'_x$$

bo'ladi.

1-misol. Ushbu $y = \sin\sqrt[3]{x}$ funksiyaning hosilasi topilsin.

Yechish. Bu funksiya murakkab funksiya bo'lib, unda

$$y = f(u) = \sin u,\ u = \varphi(x) = \sqrt[3]{x}.$$

$$y' = (\sin(u))'_{u=\sqrt[3]{x}} \cdot (\sqrt[3]{x})' = \cos(\sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{x})' = \frac{\cos(\sqrt[3]{x})}{3\sqrt[3]{x^2}}.$$

Endi teskari funksiyaning hosilasiga to'xtalamiz.

y=f(x) funksiya qandaydir *X* oraliqda diffrensiallanuvchi va qa`tiy monoton bo'lsin. Agar y o'zgaruvchini argument , x ozgaruvchini esa,funksiya cifatida qarasak, berilgan funksiyaga **teskari** bo'lgan x=f^{-1}(y) funksiyani aniqlaymiz.

2-teorema. Agar y =f (x) funksiyax_0 nuqtada $f'(x_0) \neq 0$ hosilaga ega bo'lsa, bu funksiyaga teskari x = f^{-1}(y) funksiya x_0 nuqtaga mos bo'lgan y_0(y_0 = f (x_0)) nuqtada hosilaga ega va

$$(f^{-1}(y))'_{y=y_0} = \frac{1}{f'_x(x_0)}$$

bo'ladi.

2–misol. Ushbu y=arcsinx funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Ma`lumki, *y=arcsinx* funksiya *x = siny* funksiyaga $\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ teskari funksiyadir. Shuning chun ham, yuqoridagi formulaga asosan, $y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{(\sin y)'}$ bo'ladi.

$(\sin y)' = \cos y$ bo'lgani uchun,

$$y' = (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (-1 < x < 1).$$

Xuddi shunga o'xshash quyidagi formulalar ham isbotlanadi:

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (-1 < x < 1),$$

$$(\text{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(\text{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Elementar funksiyalarning hosilalari

Hosila ta`rifidan foydalanib elementar funksiyalarning hosilalari uchun quyidagi (ayrimlari yuqorida ko'rsatildi) formulalarga (hosilalar jadvalga) ega bo'lish mumkin:

№	Funksiya (y)	Hosilasi (y')	№	Funksiya (y)	Hosilasi (y')
1	c (c-const)	0	12	lnu (u>0)	$\frac{1}{u}\cdot$ u'
2	X	1	13	$\log_a u$ (u>0, a>0, a$\neq 1$)	$\frac{1}{u\ln a}\cdot$ u'
3	Cu	cu$'$	14	sinu	cosu$\cdot$ u'
4	$\frac{u}{c}$	$\frac{u'}{c}$	15	cosu	-sinu$\cdot$ u'
5	$\frac{c}{v}$ $(v \neq 0)$	$-\frac{c}{v^2}$	16	tgu (u$\neq \frac{\pi}{2}$+kπ; k=0, $\pm$1,. . .)	$\frac{1}{\cos^2 u}\cdot$ u'
6	f(u) , u=$\varphi(x)$	f' $(u)\cdot u'$	17	ctgu (u$\neq$+kπ; k=0, $\pm$1,. . .)	$-\frac{1}{\sin^2 u}\cdot$ u'
7	u^p (u>0)	$nu^{p-1}u'$	18	arcsinu (-1<u<1)	$\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot$ u'
8	$\sqrt{u}$(u>0)	$\frac{1}{2\sqrt{u}}$ u'	19	arccosu (-1<u<1)	$-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\cdot$ u'
9	$\frac{1}{u}$ (u$\neq 0$)	$-\frac{1}{u^2}\cdot$ u'	20	arctgu	$\frac{1}{1+u^2}\cdot$ u'
10	e^u	e^uu$'$	21	arcctgu	$-\frac{1}{1+u^2}\cdot$ u'
11	a^u (a>0, a$\neq 1$)	a^ulnu$\cdot u'$			

Hosilani hisoblashning sodda qoidalari

f(x) va g(x) funksiyalar x$\in$(a,b) nuqtada f $'$(x) vag $'$(x) hosilalarga ega bo'lsin.

U holda f (x) ± g (x), f(x)·g (x), $\frac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x) \neq 0)$ funksiyalar ham shu nuqtada hosilaga ega va

1) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

2) $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

3) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, (g(x) \neq 0)$

bo'ladi (diffrensiallash qoidalari).

Biz namuna sifatida $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ tenglikni, ya`ni ikkita differensiallanuvchi funksiya ko'paytmasi hosilasini topish qoidasini isbotlaymiz. Shartga asosan f(x) va g(x) funksiyalar differensiallanuvchi funksiyalar. y=f(x)·g(x) funksiyaning hosilasini topish sxemasidan foydalanib topamiz.u=f(x) va v=g(x) deb olamiz.

2. x argumentga $\Delta x \neq 0$ orttirma beramiz. U holda $u=f(x)$ va $v=g(x)$ funksiyalar mos pavishda u+Δu va +Δv orttirilganlarga, y=u·v funksiya, esa y+Δy = (u+Δu)(v+Δv) orttirilganga ega bo'ladi.

1. Funksiya orttirmasini topamiz:

$\Delta y = (u+\Delta u)(v+\Delta v) - uv = uv + v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v - uv = v\Delta u + u\Delta v + \Delta u\Delta v$.

2. $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ni quyidagi ko'rinishda ifodalaymiz :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v + u\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x} + \frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}\Delta x\ .$$

3. Limitlar haqidagi teoremalardan foydalanib, $\Delta x \to 0$ da limitga o'tsak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot v + u\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x} + \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\Delta x.$$

Hosila ta`rifiga asosan: $y' = u'v + uv' + u'v'\cdot 0$ yoki $y' = u'v + uv'$.

Demak, $(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

Differentsiyallash qoidalarini quyidagi jadvalda keltiramiz.

2	$(C\cdot f(x))' = C\cdot f'(x)$	6	$[f(u)]'_x = f'_u(u)\cdot u'\ ,\quad u = u(x)$
3	$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$	7	$\{f^{-1}(y)\}' = \frac{1}{f'(x)}\ ,\quad x'_y = \frac{1}{y'_x}$

4	$(f(x)\cdot g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$	8	$(f(x)^{g(x)})' = f(x)^{g(x)} g'(x)\ln f(x) + g(x)(f(x))^{g(x)-1} f'(x)$

1-misol. $y = 4x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}x^{-2}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Bu funksiyaning hosilasini topish uchun 1-qoidadan hamda hosilalar jadvalidan foydalanamiz.

$$y' = 4\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1} + \frac{1}{2}\cdot(-2)x^{-2-1} = 6x^{\frac{1}{2}} - x^{-3}.$$

2-misol. Ushbu $y= x^3 lnx$ funksiyaning x=1 bo'lgandagi hosilasini toping.

Yechish. Bu funksiyaning hosilasini topishda yuqoridagi 2-qoidadan hamda hosilalar jadvalidan foydalanamiz.

$$y' = \left(x^3\ln x\right)' = (x^3)'\ln x + x^3(\ln x)' = 3x^2\ln x + x^3\frac{1}{x} = 3x^2\ln x + x^2 = x^2(3\ln x + 1),$$

$$y'(1) = 3\ln 1 + 1 = 1\ .$$

3-misol. $y = \frac{x+\ln x}{sinx}$ funksiyaning hosilasini toping.

Yechish. Hosilani topish uchun 3 va 1-qoidalar hamda hosilalar jadbalidan foydalanish lozim.

$$y' = \left(\frac{1+\ln x}{x}\right)' = \frac{(1+lnx)'\,x-(1+lnx)x'}{x^2} = -x^{-2}\ln x.$$

Differensiallanuvchi funksiyalar haqidagi asosiy teoremalar

Biz differensial hisobning amaliy tadbiqlarini uchun zarur bo'ladigan teoremalardan Ferma, Roll , Lagranj va Koshi teoremalariniqarab chiqamiz.

1-teorema.(Ferma teoremasi): Agar *X* oraliqda uzluksiz bo'lgan $y = f(x)$ funksiya shu oraliqning ichkarisidagi x_0 nuqtada eng katta yoki eng kichik qiymatiga erishsa, u holda, bu x_0 nuqtada funksiya hosilasi nolga teng bo'ladi, ya`ni $f'(x_0) = 0$

.

Isboti. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya X oraliqda differentsiyallanuvchi va $x_0 \in X$ nuqtada eng kichik qiymatini qabul qilsin. Biz teoremaning shu holdagi isbotini keltirish bilan kifoyalanamiz.

Bu holda, agar $x_0+\Delta x \in X$ bo'lsa, $f(x_0+\Delta x) \geq f(x_0)$ va Δx ningishorasiga bog`liq bo`lmagan holda yetarlicha kichik Δx lar uchun $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \geq 0$ bo'ladi. Bundan esa, $\Delta x \geq 0$ bo'lganda, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ va $\Delta x \leq 0$ bo'lganda, $\frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ ni olamiz. $\Delta x \to 0_+$ (o'ng) va $\Delta x \to 0_-$ (chap) limitlarga o'tib, $\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$ va $\lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$.

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lganligi uchun, uning $\Delta x \to 0$ dagi limiti Δx ning nolga o'ngdan yoki chardan intilishiga bog'liq bo'lmaydi.

$\lim_{\Delta x \to 0+} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0-} \frac{\Delta y}{\Delta x}$, bundan esa, $f'(x)=0$, ya`ni teoremaning isboti kelib chiqadi.

Ferma teoremasining geometrik ma`nosi quyidagicha:

X oraliqning ichkarisidagi funksiyaning eng katta yoki eng kichik qiymatiga erishadigan nuqtasidan funksiya grafigiga o'tkazilagan urinma absissalar o'qiga parallel bo'ladi.

2-teorema (Roll teoremasi). $y = f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qaoatlantirsin:

1) $[a,b]$ kesmada uzluksiz;

2) (a,b) oraliqda differentsiallanuvchi;

3) $[a,b]$ kesmaning chekkalarida teng qiymatlar qabul qilsin, ya`ni $f(a)=f(b)$.

Bu holda shu kesma ichida kamida bitta shunday "c" nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning hosilasi nolga teng, ya'ni $f'(c)=0$ bo'ladi.

Isbot: Kesmada uzluksiz funksiyaning xossasiga asosan, kesmada uzluksiz bo'lgan funksiya shu kesmada o'zining eng kichik m va eng katta M qiymatlariga erishadi.

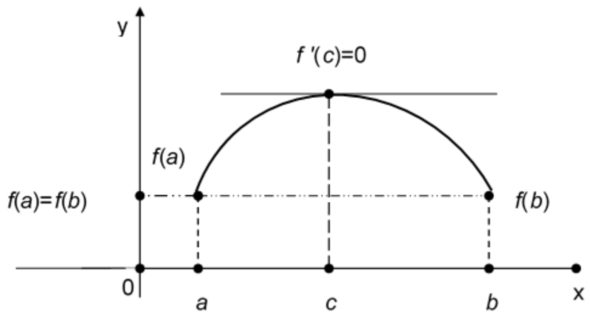
Agar bu qiymatlarga kesmaning chekkalarida erishilsa, teorema shartiga ko’ra, ular teng, ya`n $m=M$ bo‘ladi, bu esa $[a,b]$ kesmada $f(x)=C$ (C-const) ekanligini bildiradi va $f'(x)=0$, $[a,b]$ kesmaning barcha nuqtalarida bajariladi.

Agar maksimal yoki minimal qiymatlardan hech bo’lmaganda biriga kesma ichkarisidagi nuqtada erishilsa (ya`niy m<M), u holda Ferma teoremasiga asosan, bu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng bo’ladi.

Agar f(a)=f(b) =0 bo’lsa, Roll teoremasi quyidagi ko’rinishda bo’ladi:

Differentsiallanuvchi funksiyaning ketma-ket ikkita noli orasida, hosilaning hech bo’lmaganda bitta noli bo’ladi.

Roll teoremasi quyidagi geometrik talqinga ega: (a,b) oraliqda differensiallanuvchi (ya’ni oraliqning har bir nuqtasida urinmaga ega) funksiya bu oraliq chegaralarida bir xil qiymatlar qabul etsa, u holda urinmalar orasida kamida bittasi Ox o‘qiga parallel va uning burchak koeffitsiyenti $k=f'(c)=0$ bo‘ladi.



16-chizma

Masalan, $f(x)=(x-2)\cdot(x-4)= x^2-6x+8$ funksiya [2,4] kesmada Roll teoremasini barcha shartlarini qanoatlantiradi. Bu funksiyaning hosilasi $f'(x)=2x-6$ bo‘lib, haqiqatan ham u [2,4] kesmaning ichki $c=3$ nuqtasida nolga aylanadi.

3-teorema (Lagranj teoremasi): Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va kesmaning ichida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda (a,b) oraliqda kamida bitta shunday “c” nuqta topiladiki, unda

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{1}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: Teorema shartini qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ funksiya orqali ushbu yordamchi funksiyani kiritamiz:

$$g(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a).$$

Teorema shartiga asosan bu funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz, (a,b) oraliqda differentsiallanuvchi va chekkalarida teng qiymatlar qabul qabul qiladi:

$$g(a)=f(a),\quad g(b)=f(b)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(b-a)=f(a).$$

Shung uchun ham, Roll teoremasiga asosan, kamida bitta shunday $c\in(a,b)$ nuqta mavjudki, $g'(c)=0$ yoki $g'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$ ni olamiz.

Bundan, $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ ga, ya`ni teorema isbotiga kelamiz.

Lagranj teoremasini $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$ ko'rinishda ham yozish mumkin.

Natija. Agar qandaydir X oraliqda $f(x)$ funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lsa, bu oraliqda funksiya aynan o'zgarmas bo'ladi.

Haqiqatdan ham, $X=[a,x]$ deb olsak, Lagranj teoremasiga asosan

$$f(x)-f(a)=f'(c)(x-a)$$

bo'ladi, bu yerda $a<c<x$. Shartga ko'ra, $f'(c)=0$.

Demak, $f(x)-f(a)=0$, ya`ni $f(x)=f(a)=const$.

4-*teorema (Koshi teoremasi).* $y=f(x)$ va $y=g(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'sin. Agar bu funksiyalar (a,b) oraliqda chekli f'(x) va g'(x) hosilalarga ega bo'lib, $\forall x\in(a,b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ bo'lsa,u holda shunday $c\in(a,b)$ nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)} \qquad (2)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot: Teorema shartiga ko'ra ixtiyoriy $x\in(a,b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ ekanligidan $g(b)\neq g(a)$ xulosa kelib chiqadi. Agar $g(b)=g(a)$ bo'lsa,Roll teoremasiga asosan, kamida bitta $c\in(a,b)$ nuqtada $g'(c)=0$ bo'lardi, bu esa teorema shartiga zid.

Demak, quyidagi yordamchi funksiyani kiritish mumkin:

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\left[g(x) - g(a)\right].$$

Teorema shartlarida bu funksiya [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib,

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(x)$$

hosilaga ega. Bulardan tashqari $F(x)$ funksiya uchun$F(a)=F(b)=0$ shartni ham bajariladi. Bu esa, $F(x)$ funksiya [a,b] kesmada Roll teoremasining shartlarini qanoatlantirishini ko’rsatadi. Shu sababli [a,b] kesma ichida kamida bitta shunday c nuqta ($a<c<b$) topilib,$F'(c)=0$, ya’ni

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(c) = 0$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Bu tenglikdan teoremaning isboti kelib chiqadi.

Hayotiy jarayonlarning, jumladan iqtisodiy jarayonlarning asosiy qonunlari biz yuqorida keltirgan matematik teoremalarning natijalari hisoblanadi.

Namuna sifatida, buni Ferma teoremasining iqtisodiy talqini orqali ko’rsatamiz.

Ishlab chiqarish nazariyasining asosiy qonunlaridan biri bu – ishlab chiqaruvchi uchun optimal ishlab chiqarish darajasi limitik xarajat va limitik daromatlarning tengligi bilan aniqlanishligidir.

Biz ishlab chiqarishning limitik xarajatlari tushunchasini aniqlashtirib olamiz.

Ishlab chiqarisish xarajatlarini ishlab chiqarish hajmining funksiyasi sifatida qaraymiz. Agar Δx- ishlab chiqarish hajmi oshishi, Δy- ishlab chiqarish xarajatlari orttirmasi bo’lsa,$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – bir birlik mahsulotga ishlab chiqarish xarajatlari o’rtacha orttirmasi bo’ladi. Bu holda $y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ ishlab chiqarishning limitik xarajatlarini ifodalaydi va u bir birlik qo’shimcha mahsulot ishlab chiqarishga taqribiy qo’shimcha sarflarni ifodalaydi.

Yuqoridagi qonun, agar *MS*-limitik xarajat, *MD*- limitik daromat bo'lsa, x_0-ishlab chiqarish darajasi, ishlab chiqaruvchi uchun optimalligi $MS(x_0)=MD(x_0)$ tenglik bajarilganda bo'lishligini anglatadi.

Haqiqatan ham, $C(x)$ bilan foyda funksiyasini belgilasak, $C(x)=D(x)-S(x)$.

Bundan ko'rinadiki, foyda maksimal bo'ladigan ishlab chiqarish darajasi optimal bo'ladi. Demak, ishlab chiqarish darajasi $C(x)$ foyda funksiyasi maksimumga erishadigan x_0 ga teng bo'lishi kerak ekan.

Ferma teoremasiga ko'ra, $C(x)$ funksiyaning bu nuqtadagi hosilasi $C'(x)=0$. $C'(x)=D'(x)-S'(x)$ bo'lganligi, uchun $D'(x_0)=S'(x_0)$, bundan $MS(x_0)=MD(x_0)$.

Funksiyaning differensiali

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning ($x_0 \in R$) biror atrofida aniqlangan bo'lsin. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

ni qaraymiz. Bu orttirma Δx ga bog'liq·

1-ta`rif. Agar $y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasi Δy ni

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+a(\Delta x)$$

ko'rinishdaifodalashmumkinbo'lsa (bundaA –o'zgarmas,

$a=a(\Delta x)$ bo'lib, $\Delta x\to 0$ da $a(\Delta x)\to 0$), $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi deb ataladi.

Bu holda Δy ni

$$\Delta y=\Delta f(x_0)=A\Delta x+0(\Delta x)$$

ko'rinishda ham yozish mumkin.

$A\cdot\Delta x$ ga funksiyaning differensiali deyiladi. Funksiya differensiali $dy = df(x_0)$ kabi belgilanadi: $df(x_0)=A\cdot\Delta x$ bo'lib, $\Delta x=dx$ ni e'tiborga olsak, $df(x_0) = Adx$ bo'ladi.

1– misol. Ushbu $f(x)=x^2+1$ funksiyaning $x_0(\forall x_0 \in R)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lishini ko'rsating.

Yechish. Bu funksiyaning x_0 nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = (x_0+\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 + 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2 + 1 - x_0^2 - 1 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$$

Agar A = $2x_0$, a = a(Δx) =$(\Delta x)^2$ deb olinsa,

$$\Delta f(x_0) = A\Delta x + a(\Delta x)$$

o’rinli bo’lishi kelib chiqadi.

Bu esa berilgan funksiyaning x_0 nuqtada differensiallanuvchi ekanligini bildiradi.

Yuqori tartibli hosila va differensiallar

1-ta`rif. Agar $f(x)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)$ differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, uning hosilasi $y = f(x)$ ***funksiyaning II- tartibli hosilasi*** deyiladi.

Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning II tartibli hosilasi $f''(x)$, y'' yoki $f^{(2)}(x)$, $y^{(2)}$ kabi belgilanadi. Ta’rifga asosan, $f''(x) = [f'(x)]'$.

Masalan, $f(x) = x^3$ funksiya uchun $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = (3x^2)' = 6x$.

Agar moddiy nuqta to‘g‘ri chiziq bo‘ylab $S = S(t)$ qonun bilan harakatlanayotgan bo‘lsa, unda $S'(t)$ uning t vaqtdagi $\vartheta(t)$ oniy tezligini ifodalashiniga ishonch hosil qilgan edik. Unda $S''(t)$ nuqtaning harakat davomidagi tezligining o‘zgarish tezligini, ya’ni $a(t)$ tezlanishini ifodalaydi.

Differensiallanuvchi II tartibli $f''(x)$ hosila funksiyadan olingan hosila $\left([f''(x)]'\right)$, ***III- tartibli hosilani*** aniqlanadi va $f'''(x)$ yoki $f^{(3)}(x)$ kabi belgilanadi. Bu jarayonni davom ettirilib, $f^{(n)}(x)$ ***n–tartibli hosila*** tushunchasi quyidagi rekkurent formula orqali kiritiladi:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]', \; n = 2, 3, 4, ... \qquad (1)$$

2-ta`rif. Agar $y = f(x)$ funksiya uchun n–tartibli hosila mavjud bo‘lsa, u n ***marta differensiallanuvchi*** funksiya deb ataladi.

n–tartibli hosila ta’rifini ifodalovchi (1) formuladan ko‘rinadiki, umuman olganda $f^{(n)}(x)$ berilgan funksiyadan ketma-ket n marta hosila olish orqali birin-ketin topiladi.

Ammo ba’zi funksiyalar uchun n–tartibli hosila ifodasini birdaniga yozish mumkin. Masalan, $\left(e^x\right)^{(n)} = e^x$, $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x \ln^n a$, $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$, $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{\pi n}{2}\right)$.

(1) formula va hosila olish qoidalaridan foydalanib, n marta differensiallanuvchi $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar uchun

$$(C)^{(n)} = 0 \ (C\text{-const}),\ \ (C \cdot u)^{(n)} = C \cdot u^{(n)},\ \ (u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)}$$

formulalar o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilish mumkin.

Ammo $y = uv$ ko‘paytmaning n–tartibli hosilasi uchun formula, quyidagi ko‘rinishda bo’ladi:

$$(uv)^{(n)} = u^{(n)} + nu^{(n-1)}v' + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}u^{(n-2)}v'' + \cdots + nu'v^{(n-1)} + v^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$$

Bu tenglik ***Leybnits formulasi*** deyiladi va unda qatnashadigan binomial koeffitsiyentlar

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}, \quad n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n$$

formula bilan hisoblanadi.

Bizga ma`lumki, $y = f(x)$ funksiya differensiallanuvchi bo‘lsa, uning differensiali $df = f'(x)dx$ ko‘rinishda bo‘ladi. Demak, df differensialning qiymati x argument va $dx = \Delta x$ argument orttirmasiga (differensialiga) bog‘liq bo‘ladi. Biz argument differensiali dx ixtiyoriy, ammo o‘zgarmas va x argumentning qiymatiga bog‘liq bo‘lmagan son deb qaraymiz. Bu holda df differensial x argumentning funksiyasidan iborat bo‘ladi.

3-ta`rif. Berilgan $y = f(x)$ funksiyaning differensiali df o‘z navbatida differensiallanuvchi funksiya bo‘lsa, uning differensiali $y = f(x)$ funksiyaning ***ikkinchi tartibli differensial*** deb ataladi.

$y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali $d^2 f$ kabi belgilanadi va ta'rifga asosan, quyidagi formula bilan topiladi:

$$d^2 f = d(df) = d\left(f'(x)dx\right) = \left[f'(x)dx\right]' dx = \left[f'(x)\right]' dxdx = f''(x)(dx)^2 = f''(x)dx^2.$$

Demak, $y=f(x)$ funksiyaning II tartibli differensiali uning II tartibli hosilasi orqali

$$d^2 f = f''(x)dx^2,\ dx^2 = (dx)^2,$$

formula yordamida topiladi. Xuddi shunday, $y=f(x)$ funksiyaning ***n–tartibli differensiali*** $d^n f$

$$d^n f = d\left(d^{n-1} f\right) = f^{(n)}(x)(dx)^n = f^{(n)}(x)dx^n,\ n=2,\ 3,\ 4,\ .... \qquad (2)$$

kabi aniqlanadi va hisoblanadi.

Masalan, $f(x)=x^4$ funksiya uchun $df = 4x^3 dx$, $d^2 f = 12x^2 dx^2$, $d^3 f = 24x dx^3$, $d^4 f = 24dx^4$ va $n \geq 5$ holda $d^n f = 0$ bo'ladi.

Yuqori tartibli differensiallardan foydalanib, yuqori tartibli hosilalarni

$$f''(x) = \frac{d^2 f}{dx^2},\quad f'''(x) = \frac{d^3 f}{dx^3},\cdots,\ f^{(n)}(x) = \frac{d^n f}{dx^n}$$

kabi yozish mumkin.

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differensiallash

1-ta`rif. Agar x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish bevosita emas, balkim uchinchi bir t o'zgaruvchi yordamida $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, funksiyalar orqali berilgan bo'lsa, unda x argumentning y funksiyasi ***parametrik*** ko'rinishda berilgan, t esa ***parametr*** deyiladi.

Masalan, $x=t^2=\varphi(t)$, $y=t^6=\psi(t)$, $t\in(-\infty,\ \infty)$, parametrik ko'rinishda bavosita berilgan funksiya $y=f(x)=x^3$, $x\in(-\infty,\ \infty)$, ko'rinishdagi berilgan funksiyani ifodalaydi.

Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning x bo‘yicha hosilasini topish uchun dastlab uni $y=f(x)$ ko‘rinishda yozib, so‘ngra uning hosilasini hisoblab topish mumkin. Masalan, yuqoridagi misolda parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi $y'=f'(x)=3x$. Ammo har doim ham bu usul qulay bo‘lmaydi, chunki parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyani $y=f(x)$ ko‘rinishda yozish qiyin yoki $y=f(x)$ funksiya ko‘rinishi juda murakkab bo‘lib, undan hosila olish noqulay bo‘lishi mumkin. Shu sababli parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasini to‘g‘ridan-to‘g‘ri $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar orqali topish masalasini qarash zaruriyati tug’iladi. Faraz qilaylik,$y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalar orqali parametrik ko‘rinishda berilgan va $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ funksiyalar keraklicha marta differensiallanuvchi bo‘lsinlar.

U holda hosilani differensiallar orqali ifodasi va differensiallash qoidalaridan foydalanib,

$$y'_x=\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}, \tag{1}$$

$$y''_x=(y'_x)'_x=\frac{d(y'_x)}{dx}=\frac{\frac{d(y'_x)}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{[\psi'(t)/\varphi'(t)]'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3} \tag{2}$$

formulalargaega bo’lamiz. Bu formulalar parametrik ko‘rinishda berilgan funksiya hosilalarini topishni ifodalaydi.

Masalan, $x=3\cos t$ va $y=2\sin t,\ t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ funksiyalar orqali parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyani qaraymiz.

$$\frac{x}{3}=\cos t,\quad \frac{y}{2}=\sin t,$$

bo’lganligidan

$$\left(\frac{x}{3}\right)^2+\left(\frac{y}{2}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1\,va\,\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

tenglik o‘rinli va shu sababli bu funksiya yarim o‘qlari $a=3$ va $b=2$ bo‘lgan ellipsni I chorakdagi bo‘lagini ifodalaydi. Bu funksiya uchun $y'(x)$ va $y''(x)$ hosilalarni (1) va (2) formulalardan topsak:

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{2\cos t}{-3\sin t}=-\frac{2}{3}\operatorname{ctg} t\,,\quad y''_x=\frac{y''x'-y'x''}{[x']^3}=\frac{6\sin^2 t+6\cos^2 t}{-9\sin^3 t}=-\frac{2}{3\sin^3 t}\ .$$

Mavzuga doir nazorat savollari va topshiriqlar

1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi qanday masalalarni bilasiz?
2. Funksiya hosilasi ta'rifini tushintirib bering?
3. Hosilaning geometrik ma'nosi?
4. Hosilaning mexanik ma'nosi?
4. Yigindi, ayirma, ko’paytma, bo’linma shaklidagi fuksiyalardan hosila olish qoyidalari?
5. Murakkab funksiyaning hosilasi qanday topiladi ?
6. Teskari funksiyaning hosilasini topish formulasini yozing ?
7. Funksiya hosilasi topish ketma-ketligini yozing va misollar qarang ?
8. Hosila jadvalini yozib chiqishga urinib ko’ring ?
9. Differensiallashning qanday qoidalarni bilasiz ?
10. Quyidagi jadval bo’yicha funksiya va uning hosilasi orasidagi moslikni aniqlang.

1. C	2. $\sqrt{x}$	3. X	4. $-\frac{1}{\sin^2 x}$	5. $-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	6. $\frac{1}{1+x^2}$
7. e^x	8. $\arcsin x$	9. a^x	10. $\sin x$	11. $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	12. $a^x \ln a$
13.	14.	15.	16. $\cos x$	17.	18. $\arccos x$

x^n	tgx	$\lg x$		$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	
19. 1	20. $\frac{1}{x\ln 10}$	21. $\frac{1}{x}=x^{-1}$	22. nx^{n-1}	23. $\log_a x$	24. $-\sin x$
25. $arcctgx$	26. $-\frac{1}{1+x^2}$	27. 0	28. $\frac{1}{\cos^2 x}$	29. $arctgx$	30. $\frac{1}{x}$
31. $\cos x$	32. $\ln x$	33. $ctgx$	34. $\frac{1}{x\ln a}$	35. e^x	36. $-\frac{1}{x^2}$

11. Funksiya differentsialini tushintirib bering?

12. Yuqori tartibli hosilalar hosilalar va differentsiallar ta`riflarini bering va ularga misollar yeching?

13. Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalarni differentsiallash qanday amalga oshiriladi?

14. Defferentsial hisobning asosiy teoremalarini keltiring ?

15. Ba`zi hayotiy qonunlar Ferma teoremasining natijasi bo'lishligini tushuntirib bering?

16. Hosila ta`rifidan foydalanib quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping[1- 3].

1. y=5x . [5.]

2. y= 7-x^2 . [-2x .]

3. y=$(3x+2)^2$. [18x+12 .]

Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping [4- 34].

4. y=2-3x^2 . [-6x .]

5. y=$\frac{x+3}{x}$. [-3x^{-2}.]

6. y=$\frac{2}{x^2-1}$. [-4x$(x^2-1)^{-2}$.]

7. $y=\frac{x^2}{x-1}$. $\left[\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}.\right]$

8. $y=2\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt[3]{x}}+1$, $y'(1)=?$. $\left[\frac{2}{3}.\right]$

9. $y=\frac{3}{4}x\sqrt[3]{x}$. $[\sqrt[3]{x}.]$

10. $y=\frac{x^3}{3}+\frac{3}{x^3}$. $\left[x^2-\frac{9}{x^4}.\right]$

11. $y=x^2(2x-1)$. $[6x^2-2x.]$

12. $y=(x^3+3)(4x^2-3)$. $[20x^4-15x^2+24x.]$

13. $y=2x^2\ln x-x^2$. $[4x\ln x.]$

14. $y=\sqrt[3]{x}\,(e^{2x}+2)$, $y'(1)=?$ $\left[\frac{7e^2+2}{3}.\right]$

15. $y=(x-1)\sqrt{x}$. $\left[\frac{3x-1}{2\sqrt{x}}.\right]$

16. $y=\frac{x^3-3}{5-x^2}$. $\left[-\frac{x^4-15x^2+6x}{(5-x^2)^2}.\right]$

17. $y=\ln\frac{x(1+x^2)}{\sqrt{1-x^2}}$. $\left[\frac{2x^4-3x-1}{x(x^4-1)}.\right]$

18. $y=\frac{3x}{(3-2x)^3}$, $y'(0)=?$. $[21.]$

19. $y=\sqrt[3]{4x^2+5}$. $\left[\frac{8x}{3\sqrt[3]{(4x^2+5)^2}}.\right]$

20. $y=\sqrt[3]{(2+3x)^2}$. $\left[\frac{2}{\sqrt[3]{2+3x}}.\right]$

21. $y=(xe^{2x}+3)^5$. $[5e^{2x}(e^{2x}+3)^4(2x+1).]$

22. $y=\sin^3x$, $y'(\frac{\pi}{6})=?$. $\left[\frac{3\sqrt{3}}{8}.\right]$

23. $y=\cos^2\frac{x}{2}$. $\left[-\frac{\sin x}{2}.\right]$

24. $y=x^3\sin^2x$. $[x^2(3\sin^2x+x\sin 2x.]$

25. $y=\frac{\cos 3x}{\sin 3x}$. $\left[-3(\frac{1}{\sin 3x}+\mathrm{ctg}^2 3x.\right]$

26. $y=x^3\ln^2x$. $[x^2\ln x(3\ln x+2).]$

27. $y=(x^2+2)\cos x+3x\sin x$. $[5x\cos x+(1-x^2)\sin x.]$

28. $y=\frac{\cos x-\sin x}{\sin x+\cos x}$. $\left[-\frac{2(\sin^2x+\cos^2x)}{(\sin x+\cos x)^2}.\right]$

29. y=tg^2(x^3+1) . [$\frac{6xtg(x^3+1)}{cos^2(x^3+1)}$.]

30. y=$\sqrt[3]{1+sin^2x}$. [$\frac{\sin 2x}{3\sqrt[3]{(1+sin^2x)^2}}$.]

31. y=$(xe^{2x}+2)^4$. [4e^{2x}(e^{2x}+2)^3(2x+1) .]

32. y=cos(x^3+3x^2) . [-(3x^2+6x)sin(x^3+3x^2) .]

33. y=$\frac{lncosx}{cosx}$. [$\frac{\sin x(\ln cosx-1)}{\cos^2 x}$.]

34. y=arccos(e^x) . [- $\frac{e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}$.]

Parametrik ko'rinishda berilgan funksiyaning hosilasi topilsin [35-37].

35. x=t^2 +2t+2, y=2t^4-4t^2+1. [4t(t-1).]

36. x=acost , y=asint. [-ctgt.]

37. x= e^{-t}sint, y=e^t cost. [e^{2t} .]

Mavzuga doir testlar

1. $y=f(x)$ funksiya hosilasi … ning Δ*x*→0 dagi limiti.

A) $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, B) $\frac{\Delta x}{\Delta y}$, C) $\Delta y+\Delta x$, D) $\Delta y\cdot\Delta x$.

2. O'zgarmas miqdor C ning hosilasi. A) 0, B) 1, C) C-1, D) C.

3. $y=x^3$ funksiyaning x=2 nuqtadagi hosilasi ...ga teng.

A) 12, B) 8, C) 4, D) 6.

4. $y=e^x$ funksiyaning hosilasi …ga teng.

A) e^x, B) $x\cdot e$, C) 1-e, D) x.

5. y=ln$x$ funksiyaning x=1 nuqtadagi hosilasi.

A) 1, B) 0, C) 0,5, D) 2.

6. $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $x=g(y)$ bo'lsa, $g(y)$ funksiyaning hosilasi…ga teng.

A) 1/f'_x , b) 1- f'_x , C) 2 f'_x ,D) f'_x/2.

7. $y=cosx$ funksiyaning hosilasi …ga teng.

A) –*sinx*, B) *sinx* , C) *tgx*, D) –*cosx*.

8. Tengliklardan qaysi biri to'g'ri:

A) $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$, B) $(f(x) + g(x))' = f'(x) - g'(x)$,

C) $(f(x) - g(x))' = f'(x) + g'(x)$, D) $(f(x) + g(x))' = f'(x) + g(x)$.

9. $y=2x+sinx$ funksiyaning hosilasi teng.

A) 2+$cosx$,B) 2+$sinx$, C) x-$sinx$, D) x+$cosx$.

10. Tengliklardan qaysi biri to'g'ri:

A) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$, B) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)-f(x)g'(x)$,

C) $(f(x)\cdot g(x))'=f(x)g(x)+f(x)g'(x)$, D) $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)g(x)-f(x)g(x)$.

11. $y=x^2\ln x$ funksiya hosilasi teng ….

A) 2xlnx+x, B) xlnx+1, C) 2xlnx, D) 2.

12. Tengliklardan qaysi biri to'g'ri:

A) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},(g(x)\neq 0)$, B) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$,

C) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},(g(x)\neq 1)$, D) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)},(g(x)\neq 0)$

13. y=(lnx)/x funksiya hosilasining x=1nuqtadagi hosilasi teng.

A) 1, B) 0, C) 0,5 , D) 2.

14. y=f(u), u=g(x) bo'lsa, y' =?

A) $f'(u)\, u'_x$, B) $f'(u)$, C) $f''(u)$, D) $f''(u)\, u'_x$.

15. y=ln2x funksiya hosilasiing x=1 nuqtadagi qiymati teng ….

A) 1, B) 2, C) ln2, D) 1,5.

16. y=f(x) funksiyaning diffrensiali teng.

A) $f'(x)dx$, B) $f'(x)$, C) 2 $f'(x)$, D) f(x)dx.

17. y= xlnx funksiyaning differensiali:

A) (lnx+1)dx, B) lnx dx, C) xlnxdx, D) (lnx-1)dx.

18. Funksiyaning n-tartibli differensiali:

A) $f^{(n)}(x)= [f^{(n-1)}(x)]'$, n=2,3,4, … . , B) $f^{(n)}(x)= f^{(n-1)}(x)$, n=2,3,4, … .,

C) $f^{(n)}(x)= [f^{(n-1)}(x)])'/n$, n=2,3,4, … .,

D) $f^{(n)}(x)= [f^{(n-1)}(x)/(n-1)]'$, n=2,3,4, … . .

19. Ferma teoremasi: Agar X oraliqda uzluksiz bo'lgan y=f(x) funksiya shu oraliqning ichkarisidagi x_0 nuqtada eng katta yoki eng kichik qiymatiga erishsa, u holda A) $f'(x_0)=0$, B) $f'(x_0)\neq 0$, C) $f(x_0)=0$, D) $f(x_0)\neq 0$.

20. Roll teoremasi shartlarida f(x) funksiyz:

A) [a,b] kesmada uzluksiz, B) (a,b) oraliqda differentsiallanuvchi,

C) [a,b] kesmaning chekkalarida teng qiymatlar qabul qilsin,

D) keltirilganlarning barchasi.

21. Lagranj teoremasini ifodalovchi tenglik(a<c<b):

A) f(b)-f(a) = $f'(c)(b-a)$,B) f(b)-f(a) = $f(c)(b-a)$,

C) f(b)-f(a) = $f'(c)(a-b)$, D) f(b)-f(a) = $f(c)(a-b)$,

Hosila va differensialning ba`zi tatbiqlari

Lopital qoidasi

Biz dastlab, hosilaning aniqmasliklarni ochishga tadbiqini qarab chiqamiz.

Berilgan funksiyalarning hosilalarining mavjud bo'lishligi, berilgan aniqmasliklarni ochishni engillashtiradi. Hosilalardan foydalanib aniqmasliklarni ochish Lapital qoudalar deb ataladi.

Teorema. Ikkita cheksiz kichik yoki cheksiz kattalarning nisbatlarining limiti, ularning hosilalari nisbatlarining limitiga (agar bu limit mavjud bo'lsa) teng. Demak, agar $\left[\frac{0}{0}\right]$ yoki $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ko'rinishdagi aniqmasliklar bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Isboti. Teoremaning isbotini $x \to x_0$ da $\left[\frac{0}{0}\right]$ ko'rinishdagi aniqmaslik uchun keltirish bilan kifoyalanamiz.

Soddalik uchun $f(x)$, $g(x)$ funksiyalar va ularning hosilalari x_0 nuqtada uzluksiz, jumladan, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = 0$ va $\lim_{x \to x_0} g(x) = g(x_0) = 0$ bo'lsin.

Bu holda $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)}$ munosabat o'rinli bo'ladi.

$[x, x_0]$ kesmada $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun Lagranj teoremasini qo'llab, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_1)(x - x_0)}{g'(c_2)(x - x_0)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(c_1)}{g'(c_2)},$$

Bu yerda $x < c_1 < x_0$, $x < c_2 < x_0$.

$f'(x)$ va $g'(x)$ hosilalar uzluksiz bo'lganliklari uchun $x \to x_0$ da $f'(c_1) \to f'(x_0)$ va $g'(c_1) \to g'(x_0)$ o'rinli bo'ladi.

Ikki funksiya nisbatining limiti haqidagi teoremadan foydalansak, teorema isbotiga kelamiz.

1-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2^x}$ ni toping.

Yechish. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2^x}=\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x'}{\left(2^x\right)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{2^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2^x\ln 2}=0$.

2-misol. $\lim_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}$ ni toping.

Yechish.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x^2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x+e^{-x}-2)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}.$$

$\left[\frac{0}{0}\right]$ aniqmaslik saqlanayotganligi uchun Lopital qoidasini yana bir marta qo'llaymiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})'}{(2x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{2}=1.$$

3-misol. $\lim\limits_{x\to 0}x\ln x$ ni toping.

Yechish. Bu holda $[0\cdot\infty]$ ko'rinishdagi aniqmaslikka ega bo'lamiz. Berilgan ifodani quyidagicha yozib olib, $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ ko'rinishdagi aniqmaslikka olib kelamiz va Lopital qoidasini qo'llaymiz:

$$\lim_{x\to 0+}x\ln x=\lim_{x\to 0+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}(-x)=0.$$

Lopital qoidasi aniqmasliklarni ochishning qulay vositasi bo'lsada, uning qo'llanilishi hamma vaqt ham kerakli natijaga olib kelavermaydi.

4-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}$ ni toping.

Yechish. Agar Lopital qoidasini qo'llasak:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Ya'ni $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ aniqmaslik saqlanadi.

Agar Lopital qoidasini yana bir marta qo'llasak, yana limit ostidagi dastlabki funksiyaga kelamiz. Bu holda Lopital qoidasini qo'llash aniqmaslikning ochilishiga olib kelmaydi.

Lekin $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{\sqrt{1-\frac{1}{x}}}=1$, ekanligiga osongina erishish mumkin.

Teylor formulasi

Matematik analizning asosiy formullaridan biri bo'lgan ingliz matematigi B.Teylor (1685-1731) nomi bilan atalubchi Teylor formulasini ko'rib chiqamiz.

Teorema (Teylor teoremasi). $f(x)$ funksiya birir a nuqtaning atrofida $(n+1)$ -tartibli hosilaga ega bo'lsin, x argumentning ko'rsatilgan atrofdagi ixtiyoriy qiymati, p - ixtiyoriy musbat son bo'lsin. U holda a va x nuqtalari orasida shunday ξ nuqta topiladiki, quyidagi formula o'rinli bo'ladi:

$$f(x)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+R_{n+1}(x), \qquad (1)$$

bunda

$$R_{n+1}(x)=\left(\frac{x-a}{x-\xi}\right)^p\cdot\frac{(x-\xi)^{n+1}}{n!\,p}f^{(n+1)}(\xi). \qquad (2)$$

(1) formulaga (markazi a nuqtada) Teylor formulasi, $R_{n+1}(x)$ ifodaga esa uning qoldiq hadi deyiladi. Qoldiq hadni (2) ko'rinishdan boshqa ko'rinishda ham yozish mumkin.(2) ga qoldiq handing umumiy ko'rinishi deyiladi.

Isboti. (1) tenglikning o'ng tomonodagi x nisbatan n-tartibli ko'p hadni $\varphi(x,\,a)$ bilan belgilaymiz:

$$\varphi(x,\,a)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(x-a)+\frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n. \qquad (3)$$

Bundan tashgari $R_{n+1}(x)$ bilan $f(x)-\varphi(x,\,a)$ ayirmani belgilaymiz:

$$R_{n+1}(x)=f(x)-\varphi(x,\,a). \qquad (4)$$

Teoremani isbotlash uchun $R_{n+1}(x)$ ning (2) formula bilan aniqlanishini yetarli. Aniqlik uchun $x > a$ bo'lsin. O'zgarish sohasi $[a, x]$ kesmadan iborat bo'lgan o'zgaruvchini t bilan belgilab, yordamchi

$$\psi(t) = f(x) - \varphi(x, a) - (x-t)^t Q(x) \tag{5}$$

funksiyani qaraymiz. Bunda

$$Q(x) = \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^p}. \tag{6}$$

$\psi(t)$ ni quyidagicha yozish mumkin:

$$\psi(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n - (x-t)^p Q(x) \tag{7}$$

$\psi(t)$ funksiyaning *x*oss*a*laridan foydalanib, $Q(x)$ uchun ifoda topamiz. Dastlab, $\psi(t)$ funksiyaning $[a,x]$ kesmada Roll teoremasi shartlarini qanoatlantirishini ko'rsatamiz.

(7) tenglikdan va teorema shartida $f(x)$ funksiyaga qo'yilgan shartlarga ko'ra $\psi(t)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz va differentsiallanuvchi bo'ladi.

(5) da $t = a$ deb olib, (6) ni hisobga olsak:

$$\psi(a) = f(x) - \varphi(x, a) - R_{n+1}(x)$$

ni olamiz.

Bundan (4) ga asosan $\psi(a) = 0$. $\psi(x) = 0$ ekanligi esa (7) formuladan kelib chiqadi. Demak, $\psi(t)$ funksiya uchun $[a, x]$ kesmada Roll teoremasi shartlarini qanoatlantiradi. Shu teoremaga ko'ra, $[a, x]$ kesma ichida shungay ξ nuqta topiladiki, ξ uchun

$$\psi'(\xi) = 0 \tag{8}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. (7) differentsiyallab, $\psi'(\xi)$ ni topamiz.

$$\begin{aligned}\psi'(t) = -f'(t) + \frac{f'(t)}{1!} - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) + \frac{f''(t)}{2!}2(x-t) - \ldots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}n(x-t)^{n+1} - \\ - \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x)\end{aligned} \tag{9}$$

Hosil qilingan (9) tenglikning o'ng tomonida oxirgi ikki haddan tashqari hamma hadlai o'zaro bir-birini yo'qatadi.

Shunday qilib,

$$\psi(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n + p(x-t)^{p-1}Q(x). \tag{10}$$

(10) formulada $t=\xi$ deb olib, (8) ni e`tibopga olsak,

$$Q(x) = \frac{(x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{n+1}(\xi). \tag{11}$$

ni hosil qilamiz.

(11) va (6) ni taqqoslab,

$$R_{n+1}(x) = (x-t)^p Q(x) = \frac{(x-a)^p (x-\xi)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{n+1}(\xi).$$

Teorema isbotlandi.

ξ nuqta a va x orasida yotganligi uchun shunday $0<\theta<1$ soni topiladiki, $\xi - a = \theta(x-a)$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu holda (2) formulani quyidagicha yozish mumkin:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}(1-\theta)^{n-p+1}}{n!\,p} f^{n+1}\left[a+\theta(x-a)\right]. \tag{12}$$

Agar (12) da $p=n+1$ deb olsak, ushbu Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadni olamiz:

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{n+1}\left[a+\theta(x-a)\right]. \tag{13}$$

Bundan tashqari qoldiq handing Koshi va Peano ko'rinishlari ham mavjud. Markazi $a=0$ nuqta bo'lgan Teylor formulasi (1) ni Makloren formulasi deb atash qabul qilingan.

Ixtiyoriy $f(x)$ funksiya uchun qoldiq hadi Lagranj ko'rinishda bo'lgan Makloren formulasi quyidagicha yoziladi:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_{n+1}(x), \tag{14}$$

bunda

$$R_{n+1}(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad (0<\theta<1). \tag{15}$$

Endi namuna tariqasida ba`zi elementar funksiyalarning Makloren formulasi bo'yicha yoyilmalarini keltiramiz.

1. $f(x)=e^x$. Ixtiyoriy n uchun $f^{(n)}(x)=e^x$, $f^{(n)}(0)=1$ bo'lgani uchun Makloren formulasi

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x) \tag{16}$$

ko`rinishga ega bo'ladi, bunda Lagranj ko'rinishdagi qoldiq had quyidagiga

$$R_{n+1}(x)=\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x}, \quad (0<\theta<1)$$

teng. Ixtiyoriy $[-r,r]$ ($r>0$) kesmada $\left|e^{\theta x}\right|<e^r$ bo'lgani uchun qoldiq hadni baholash uchun quyidagi formullani hosil qilamiz:

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{r^{n+1}}{(n+1)!}e^r. \tag{17}$$

2. $f(x)=\sin x$. Bu holda $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{\pi n}{2}\right)$,

$$f^{(n)}(0)=\sin n\frac{\pi}{2}=\begin{cases} n-\textit{juft bo'lganda},\ 0\\ n-\textit{toq bo'lganda},\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}\end{cases}$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

Shuning uchun qaralayotgan $\sin x$ funksiya uchun Makloren formilasi

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{\frac{n-1}{2}}\frac{x^n}{n!}+R_{n+2}(x) \tag{18}$$

ko'rinishda iborat bo'lib (bunda n toq son), Lagranj ko'rinishdagi qoldiq had esa,

$$R_{n+2}(x)=\frac{x^{n+2}}{(n+2)!}\sin(\theta x+n\frac{\pi}{2}+\pi),\ (0<\theta<1)$$

ga teng bo'ladi. Ixtiyoriy $[-r,r]$ ($r>0$) kesmada qoldiq had uchun quyidagi baho o'rinli:

$$|R_{n+2}(x)|<\frac{r^{n+2}}{(n+2)!}. \tag{19}$$

3. $f(x)=\ln(1+x)$. Bu funksiya uchun $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$, $f(0)=0$ va $f^{(n)}(0)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Shuning uchun $\ln(1+x)$ funksiya uchun Makloren formulasi

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x) \tag{20}$$

ko'rinishga ega bo'ladi.

Qoldiq handing Lagranj ko'rinishi:

$$R_{n+1}(x)=\frac{(-1)^{n-1}x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}. \quad (21)$$

Bu formuladan x ning $0\leq x \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlari uchun

$$|R_{n+1}(x)|<\frac{1}{n+1} \quad (22)$$

ni hosil qilamiz.

(22) dan k o'rinadiki, x ning $0\leq x \leq 1$ shartni qanoatlantiruvchi qiymatlari uchun $\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x)=0$ bo'ladi.

1-misol. $\sqrt[3]{29}$ ning 0,001 aniqlikgacha aniqlikdagi taqribiy qiymati topilsin.

Yechish. $\sqrt[3]{29}$ ni $\sqrt[3]{29}=\sqrt[3]{27+2}=3\left(1+\frac{2}{27}\right)^{\frac{1}{3}}$ ko'rinishda yozib olamiz.

$$(1+x)^m=1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{n!}x^n+R_n$$

binom yoyilmadan

$$(1+x)^m\cong 1+\frac{m}{1!}x+\frac{m(m-1)}{2!}x^2+\ldots+\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(n-m+1)}{n!}x^n, \quad (23)$$

taqribiy formulaga ega bo'lamiz, xatolik

$$R_n=\frac{m(m-1)\cdot\ldots\cdot(n-m)}{n!}x^{n+1}(1+\theta x)^{m-n-1},$$

esa $|x|<1$ va yetarlicha katta n larda yetarlicha kichik bo'ladi.

(23) da $x=\frac{2}{27}$ va $m=\frac{1}{3}$ deb olsak,

$$\sqrt[3]{29}\cong 3+\left(1+\frac{1}{81}-\frac{2\cdot 2}{81\cdot 81}+\frac{2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}-\frac{2^5\cdot 5}{81^4}+\ldots+R_n\right)$$

ga bo'lamiz.

Endi $3|R_n|$ xatolikni ketma-ket baholaymiz:

$$3|R_1|<\frac{3\cdot 2\cdot 2}{81^2}<0{,}002,\ 3|R_2|<\frac{3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 5}{81^3}<0{,}0003 .$$

Demak, talab qilingan aniqlikda hisoblash uchun uchta hadni olish kerak ekan, ya`ni $\sqrt[3]{29}\cong 3+(1+0{,}024-0{,}0006)=3{,}072$.

Funksiyaning monotonligi va ekstremumlari. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Biz o‘suvchi va kamayuvchi funksiyalar ta’riflarini va ularga misollar ko’rgan edik. Endi funksiya hosilasining o’sish va kamayish oraliqlarini toppish,hamda ekstremumga tekshirishga tatbiqlarini o’rganamiz.

1-teorema (Funksiya monotonliginig yetarli sharti). Agar differensiallanuvchi $y = f(x)$ funksiya biror X oraliqning ichkarisidagi hosilasi $f'(x) > 0$ [$f'(x) < 0$] shartni qanoatlantirsa, unda bu X oraliqda funksiya o‘suvchi [kamayuvchi] bo‘ladi.

Isboti. Teoremaning isbotini $f'(x) > 0$ hol uchun keltiramiz. Berilgan X oraliqdan $\forall x_1, x_2 \in X$ qiymatlarni olamiz.

Faraz qilaylik $x_1 < x_2$ bo’lsin, $f(x_2) > f(x_1)$ bo’lishligini ko’rsatamiz. $f(x)$ funksiya uchun $[x_1, x_2]$ kesmada Lagranj teoremasi shartlari bajariladi va

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1). \qquad (1)$$

bu yerda $x_1 < c < x_2$ ya`ni c oraliqning ichki nuqtasi.

Shuning uchun ham teorema shartiga ko’ra $f'(c) > 0$, bu esa (1) tengliknig o’ng tomoni musbatligini ko’rsatadi. Demak $f(x_2) - f(x_1) > 0 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$.

1-misol. $y = x^2 - 2x - 1$ funksiyaning monotonlik oraliqlari topilsin.

Yechish. Berilgan funksiyaning hosilasi $y' = 2x - 2$ va x>1 bo’lganda y'>0 va x<1 bo’lganda y'<0. Demak $(-\infty, 1)$ oraliqda funksiya kamayadi va $(1, \infty)$ oraliqda esa, funksiya o’sadi. $x_0 = 1$ –funksiya grafigini ifodalovchi parabolaning uchi bo’ladi.

Monotonlikning zaruriy sharti kuchsizroq ekanligini aytib o’tish lozim:

Agar qandaydir X oraliqda funksiya o’ssa (kamaysa), u holda bu oraliqda funksiya hosilasi manfiy (musbat) bo’lmasliginigina tasdiqlash mumkin.

Bu esa, monoton funksiyaning hosilasi ayrim nuqtalarda nolga teng bo’lishi mumkinligini ko’rsatadi.

2-misol. $y = x^3$ funksiyaning monotonlik oraliqlari topilsin.

Yechish. Fuksiyaning hosilasi $y' = 3x^2$, bundan $x \neq 0$ bo’lsa, $y' > 0$. $x = 0$ bo’lsa, $y' = 0$. $y = x^3$ funksiya esa, $(-\infty, \infty)$ oraliqda monoton o’sadi.

1-ta`rif. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqta va uning biror atrofida aniqlangan bo‘lib, bu atrofdagi ixtiyoriy x nuqta uchun $f(x_0) \geq f(x)$ $[\, f(x_0) \leq f(x)\,]$ shartni qanoatlantirsa, u shu x_0 nuqtada ***maksimumga (minimumga)*** erishadi deyiladi va $f_{\max}(x_0)$ $[\, f_{\min}(x_0)\,]$ kabi belgilanadi.

Funksiyaning maksimum va minumumlari umumiy nom bilan uning e***kstremumlari*** deyiladi.

Ekstremum tushunchasi x_0 nuqtaning yetarlicha atrofi bilan bog’liq bo’lganligi uchun uni ko’p hollarda lokal ekstremum ham deb ataladi.

Masalan, $f(x) = \cos x$ funksiya $x = 0$ nuqtada $\cos(0) = 1$ maksimumga, $x = \pi$ nuqtada esa $\cos(\pi) = -1$ minimumga ega bo‘ladi.

Ekstremumning zaruriy sharti quyidagi teorema orqali ifodalanadi.

2-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi va maksimumga(minimumga) ega bo‘lsin. U holda $f'(x_0)=0$ bo’ladi.

Isboti. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada maksimumga(minimumga) erishganligi uchun x_0 nuqtaning atrofidagi barcha x lar uchun

$$f(x) \leq f(x_0) \quad [f(x) \geq f(x_0)]$$

bo’ladi. Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning atrofida o’zining eng katta (eng kichik) qiymati $f(x_0)$ ga erishadi. Teorema shartiga ko’ra $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada chekli $f'(x_0)$ hosilaga ega. U holda Ferma teoremasiga ko’ra $f'(x_0) = 0$ bo’ladi.

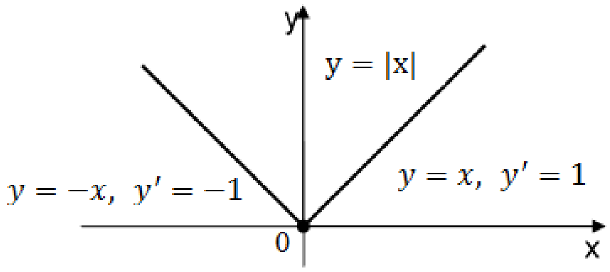
Biroq funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtada berilgan funksiya har doim ham ekstremuymga erishavermaydi.

Masalan, $f(x_0)=x^3$ funksiyaning hosilasi $f'(x_0)=3x^2$ bo'lib, $f'(0)=0$. Lekin bu funksiya uchun $f'(x)=3x^2\geq 0$ bo'lib u o'suvchi bo'lganligi uchun funksiya $x=0$ nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Demak, funksiya hosilasining nolga aylanishi funksiya ekstremumga erishishining zaruriy sharti ekan.

Funksiya hosilaga ega bo'lmagan nuqtada ham ekstremumga bo'lishi mumkin.

Masalan, $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas. Biroq bu funksiya $x=0$ nuqtada munumumga erishadi.



17-chizma

Yuqoridagilardan, funksiya ekstremumga ega bo'lgan nuqtada uning hosilasi nolga teng yoki mavjud bo'lmaydi, degan xulosaga kelish mumkin.

1-ta`rif. Funksiyanig hosilasi nolga teng yoki mavjud bo'lmagan nuqtalar shu funksiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deyiladi.

Kritik yoki statsionar nuqtalari funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lishi lozim. Agar funksiya qandaydir nuqta ekstremum nuqtasi bo'lsa,u albatta kritik nuqta bo'ladi. Lekin har qanday kritik nuqta ham ekstremum nuqtasi bo'lavermaydi.

Masalan, $y = x^3 + 1$ funksiya Ox son o'qida o'sadi va $y' = 3x^2$ hosila $x = 0$ da nolga teng, biroq $x = 0$ nugtada funksiya ekstremumga ega emas, chunki $x < 0$ bo'lganda $f(x) < 0 = f(0)$ va $x > 0$ bo'lganda $f(x) > 0 = f(0)$.

Demak, funksiyaning ekstremumlarini topish uchun kritik nuqtalar ustida qo'shimcha tekshirishlar olib borish, ya`ni ekstremumning yetarli shartini bilish talab qilinadi.

3-teorema (***Ekstremumning I- yetarli sharti)*****.** Agar x_0 nuqtadan o'tishda differentsiallanuvchi $y = f(x)$ funksiyaning hosilasi o'z ishorasini musbat (+) dan manfiy (-) ga o'zgartirsa, bu holda x_0 kritik nuqta $y = f(x)$ funksiya uchun maksimum, manfiy (-) dan musbat (+) ga o'zgartirsa, minimum nuqta bo'ladi.

Isboti. Teoremaning isbotini hosila ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirgan hol uchun keltiramiz. Bu holda qandaydir $(a,\, x_0)$ oraliqda hosila musbat ($f'(x) > 0$) va qandaydir $(x_0,\, b)$ oraliqda, esa manfiy ($f'(x) < 0$). Monotonliknig yetarli shartiga ko'ra $(a,\, x_0)$ oraliqda funksiya o'sadi va $(x_0,\, b)$ orqliqda kamayadi.

O'suvchi funksiya ta`rifiga ko'ra $\forall x \in (a,\, x_0)$ lar uchun $f(x_0) \geq f(x)$, kamayuvchi funksiya ta`rifiga ko'ra, esa $\forall x \in (x_0,\, b)$ lar uchun $f(x) \leq f(x_0)$. Bundan, $\forall x \in (a,\, b)$ lar uchun $f(x_0) \geq f(x)$. Demak, x_0 –nuqta $y = f(x)$ funksiyaning maksimum nuqtasi ekan.

Ikkinchi hol ham xuddi shungay yo'l bilan isbotlanadi.

Agar x_0 nuqtadan o'tishda funksiya hosilasining ishorasi o'zgarishsiz qolsa, bu nuqtada ekstremum bo'lmaydi.

Masalan, $y = f(x)$ funksiyani ekstremumga quyidagi ketma-ketlikda tekshirish mumkin:

1. $y' = f'(x)$ hosilsni topish.

2. Hosila $f'(x) = 0$ yoki mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlab, funksiyaning kritik nuqtalarini topish.

3. Har bir kritik nuqtaning chap va o'ng tomohlarida funksiya hosilasining ishoralarini tekshirish va ekstremum bor yoki yo'qligi hagida xulosa chiqarih.

4. Funksiyaning ekstremumlarini (qiymatlarini) topish.

3-misol. $y = x(x-1)^2$ funksiya ekstremumga tekshirilsin.

*Yechish.*1. Funksiyaning hosilasi

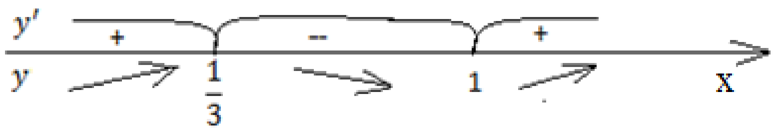
$$y' = (x-1)^2 + 2x(x-1) = (x-1)(x-1+2x) = (x-1)(3x-1).$$

2. $D(y') = (-\infty, +\infty)$ bo'lganligi uchun, funksiya hosilasini nolga tenglashtirib, $x_1 = \frac{1}{3}$ va x_2=1 kritik nuqtalarga ega bo'lamiz.

3. Kritik nuqtalarni sonlar o'qida belgilab olamiz.

$x = \frac{1}{3}$ kritik nuqtaning chap tomonida masalan, x=0 da $f'(0)$=1>0, o'ng tomonida masalan, $x_1 = \frac{1}{2}$ da $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$, bundan $\forall x < \frac{1}{3}$ uchun $f'(x) > 0$ va $\forall x \in \left(\frac{1}{3}, 1\right)$ uchun esa $f'(x) < 0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Endi $x = 1$ kritik nuqta atrofida hosila ishorasini tekshiramiz.



$x = 1$ nuqtaning char tomonida masalan, $x = \frac{1}{2}$da $f'\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4} < 0$, o'ng tomonidsa masalan, $x = \frac{3}{2}$ da $f'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{7}{4} > 0$.

Ekstremumning yetarli shartiga kora $x = \frac{3}{2}$–nuqta berilgan funksiya uchun maksimum nuqta, $x = 1$ nuqta esa, mimimum nuqta bo'ladi.

4. $f_{\max}\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 = \frac{4}{27}$, $f_{\min}(1) = 1(1-1)^2 = 0$.

Masalan, $f(x)=\ln(x^3+1)$ funksiyaning hosilasi $f'(x)=\dfrac{3x^2}{x^3+1}$ bo‘lgani uchun $x=0$ kritik nuqta bo’ladi. Bu kritik nuqta atrofida $f'(x)>0$ bo’lganligi uchun $x=0$ nuqtada funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi.

4-teorem (*Ekstremumning* II-*yetarli sharti*). Agar ikki marta differentsiallanuvchi $f(x)$ funksiyaning birinchi tartibli hosilasi biror x_0 nuqtada nolga teng, bu nuqtada ikkinchi tartibli hosila $f''(x_0)$ esa musbat bo’lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun minumum, agar $f''(x_0)$ manfiy bo’lsa, maksimum nuqta bo’ladi.

Isboti. Faraz qilaylik, $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0)>0$ bo’lsin. Bu x_0 nuqtaning qandaydir atrofida $f''(x)=(f'(x))'>0$, ya`ni x_0 nuqtani o’z ichiga oluvchi (a,b) oraliqda $f'(x)$ o’suvchi ekanligini anglatadi. $f'(x_0)=0$ bo’lganligi uchun esa (a, x_0) oraliqda $f'(x)<0$, (x_0 ,b) oraliqda $f'(x)>0$ bo’ladi.

Bu esa, x_0 nuqtadan o’tishda $f'(x)$ hosila o’z ishorasini manfiydan musbatga o’zgartirishini va x_0 nuqta minimum nuqta bo’lishligini ko’rsatadi.

Shunga o’xshash mulohazalar bilan $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0)<0$ bo’lganda, x_0 nuqta maksimum nuqta bo’lishligini ko’rsatish mumkin.

1-izoh. Agar $f'(x_0)=f''(x_0)=0$ bo’lsa, ekstremumga tekshirishda II-yetarli shartdan foydalanib bo’lmaydi, bu holda ekstremumning I-yetarli shartidan foydalanish lozim.

2-izoh. Aga kritik nuqtada funksiyaning birinchi tartibli hosilasi mavjud bo’lmasa, ham ekstremumga tekshirishda II-yetarli shartdan foydalanib bo’lmaydi, bu holda ekstremumning I- yetarli shartidan foydalanish kerak.

4-misol. $y=\dfrac{x^3}{3}-x^2$ funksiya ekstremumga tekshirilsin.

Yechish. Berilgan funksiyaning 1-tartibli hosilasi $f'(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$ va $D(f'(x)) = (-\infty, +\infty)$. Bu esa funksiyani ekstremumga tekshirishda II-yetarli shartdan foydalanish mumkinligini ko'rsatadi.

Funksiya uchun x_1=0 va x_2=2 nuqtalar kritik nuqtalar bo'ladilar.

$$f''(x) = (x^2 - 2x)' = 2x - 2 = 2(x-1), \quad f''(0) = -2 < 0 \quad \text{va} \quad f''(2) > 0.$$

Demak, II-yetarli shartga ko'ra x=0 nuqta maksimum, x=2 nuqta minimum nuqta bo'lar ekan: $f_{\min}(2) = \frac{2^3}{3} - 2^2 = -\frac{4}{3} = -1\frac{1}{3}$, $f_{\max}(0) = 0$.

Endi funksiyaning [a,b] kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlarini topish haqida qisqacha to'xtalamiz.

Agar $f(x)$ funksiya [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda kesmada uzluksiz funksiyaning xossasiga ko'ra shu kesmada o'zinig eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Bu qiymatlarga funksiya ekstremum nuqtalarida yoki kesmaning chekkalarida erishishi mumkin.

Bu qiymatlar quyidagicha topiladi:

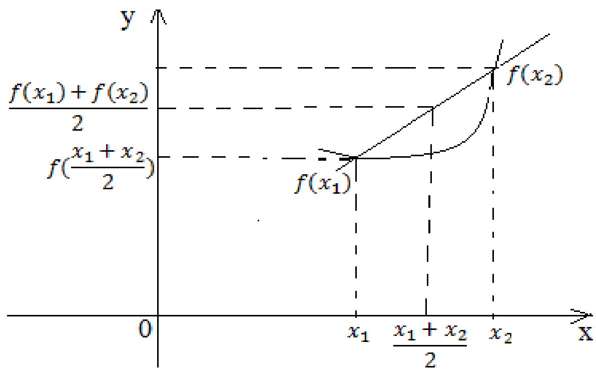
1) funksiyaning (a,b) oraliqdagi barcha maksimum va minimum qiymatlari topiladi;

2) funksiyaning [a,b] kesmaning chetki a va b nuqtalardagi qiymatlari $f(a)$ va $f(b)$ topiladi.

Topilgan barcha maksimum va minimum qiymatlari bilan $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlar birgalikda olinib, taqqosalanadi. Bu qiymatlar orasidan eng kattasi $f(x)$ funksiyaning [a,b] kesmadagi eng katta qiymati, eng kichigi esa $f(x)$ funksiyaning [a,b] kesmadagi eng kichik qiymati bo'ladi.

Funksiya grafigining qavariqligi, botiqligi va asimptotalari

Funksiyalarning muhim xususiyatlaridan biri ularning qavariqligi (yuqoriga qabariqligi) va botiqligi (pastga qabariqligi) hisoblanadi.



18-chizma

1-ta`rif. Agar $\forall x_1,\ x_2 \in X$ uchun

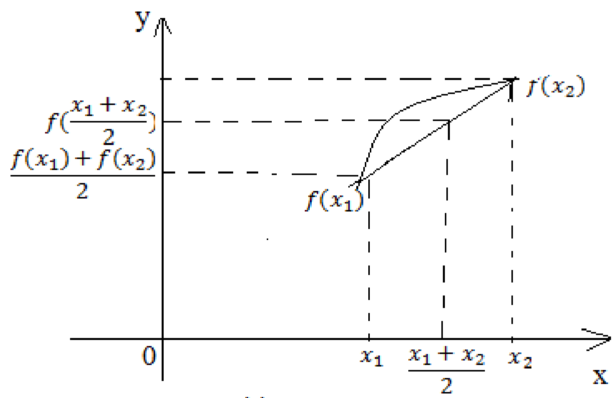
$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (1)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y = f(x)$ funlsiya X oraliqda pastga qabariq (botiq) deyiladi.

2-ta`rif. Agar $\forall x_1,\ x_2 \in X$ uchun

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} \qquad (2)$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, $y = f(x)$ funlsiya X oraliqda yuqoriga qabariq (qabariq) deyiladi.



19-chizma

Biz bundan keyin pastga qabariq va yuqoriga qabariq tushunchalari o'rniga botiq va qabariq tushunchalarini ishlatamiz.

Grafiklardan ko'rinadiki, agar funksiya botiq bo'lsa, uning grafigining ixtiyoriy ikki nuqtasini tutashtiruvchi kesma to'laligicha, funksiya grafigidan yuqorida, agar funksiya qavariq bo'lsa, to'laligicha pastda yotadi.

Quyidagi teorema funksiya botiqligini (qavariqligini) uning 1-tartibli hosilasi monotonligi bilan bog'laydi.

1-teorema. Funksiya X oraliqda botiq (qavariq) bo'ladi, faqat va faqat bu oraliqda funksiyaning birinchi tartibli hosilasi monoton o'ssa (kamaysa).

Monotonlik shartidan foydalanib, funksiya botiqligi (qavariqligi) yetarli shartini ifodalovchi quyidagi teoremaga kelamiz.

2-teorema. Agar ikki marta differentsiallanuvchi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi biror X oraliq ichkarisida musbat (manfiy) bo'lsa, funksiya bu oraliqda botiq (qavariq) bo'ladi.

Isboti. Agar $\forall x \in X$ uchun $f''(x) = (f'(x))' > 0$ bo'lsa, undan $f'(x)$ ning X oaliqda o'sishi va 1-teoremaga asosan funksiyaning X oraliqda qavariqligi kelib chiqadi. Agar $\forall x \in X$ uchun $f''(x) < 0$ bo'lsa, $f'(x)$ ning X oaliqda kamayuvchi bo'ladi va 1-teoremaga asosan funksiyaning X oraliqda botiq degan xulosaga kelamiz.

3-ta`rif. Uzluksiz funksiyaning botiqlik va qavariqlik oraliqlarini ajratib turuvchi nuqtaga funksiya grafigining bukilish nuqtasi deyiladi.

Yuqorida keltirilganlardan bikilish nuqtasi - bu funksiya hosilasining ekstremum nuqtalari ekanligi kelib chiqadi.

3-teorema (bukilishning zaruriy sharti). Ikki marta differentsiallanuvchi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilaning x_0 burilish nuqtasidagi qiymati nolga teng, ya`ni $f''(x_0) = 0$.

4-teorema (bukilishning yetarli sharti). Agar qandaydir x_0 nuqtadan o'tishda ikki marta differentsiallanuvchi funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi o'z ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta bu funksiya grafigining birilish nuqtasi bo'ladi.

Keltirilgan ta`rif va teoremalardan, agar differentsiakkanuvchi funksiyaning kritik nuqtasi ekstremum nuqtasi bo'lmasa, bu nuqta builish nuqtasi bo'lishligi kelib chiqadi.

Funksiyani qavariqlikka va bukilish nuqtasiga tekshiishni quyidagi ketma-ketlikda (sxemada) olib borish mumkin:

1. Funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi $f''(x)$ topiladi.

2. Ikkinchi tartibli hosila $f''(x)=0$ yoki mavjud bo'lmagan nuqtalar topiladi.

3. Topilgan nuqtalarning chap va o'ng tomonlarida ikkinchi tartibli hosilaning ishoralari aniqlanib, qavariqlik oraliqlari va bukilish nuqtalari mavjudligi haqida xulosalar chiqariladi.

4. Bukilish nuqtalarida funksiyaning qiymatlari topiladi.

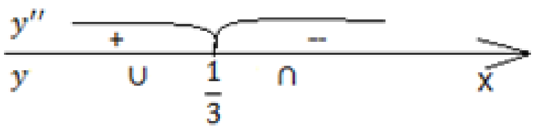
1-misol. $y=x(x-1)^2$ funksiyaning qavariqlik oraliqlari va uning gafigining bukilish nuqtalari topilsin.

Yechish. 1. $y'=(x-1)^2+2x(x-1)=(x-1)(x-1+2x)=(x-1)(3x-1)$, $y''=3x-1+3(x-1)=6x-2=2(3x-1)$.

2. $y''=2(3x-1)=0$, bundan $x=\frac{1}{3}$.

3. $y''=2(3x-1)>0$ tengsizlikni yechib, $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$ oraliqni, $y''<0$ tengsizlikni yechib,esa $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ oraliqni hosil qilamiz.

Demak, $\left(\frac{1}{3},\infty\right)$ oraliq funksiya grafigilik qavariqlik oralig'i, $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right)$ oraliq botiqlik oralig'i, $x=\frac{1}{3}$ bukilish nuqtasi bo'ladi.

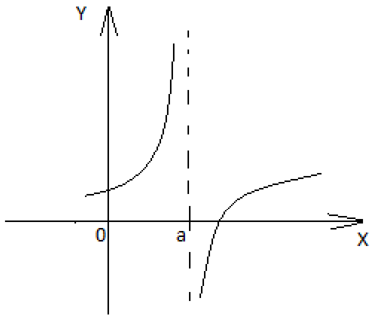


1. Bukilish nuqtasida funksiyaning qiymati $f\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{27}$.

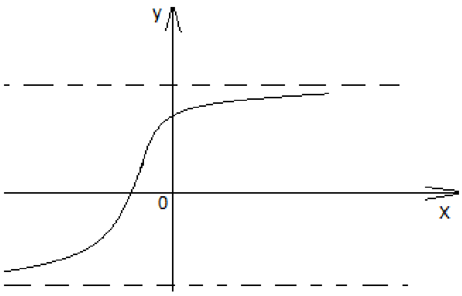
Biz funksiyaning ma`lum xususiyatga ega bo'lgan nuqtalarini ko'rib chiqdik. Endi uning ma`lum xususiyatga ega bo'lgan chiziqlaridan muhimi asimptotalarini qarab chiqamiz.

4-ta`rif. Agar $f(x)$ funksiya grafigi koordinatalar boshidan cheksiz uzoqlashganda $(x,\ f(x))$ dan tog'ri chiziqqacha bo'lgan masofa nolga intilsa, bu to'g'ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigiga **asimptota** deyiladi.

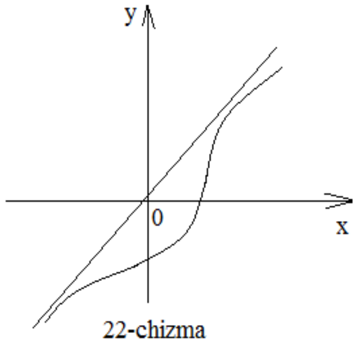
Asimptotalar vertikal, gorizantal, og'ma bo'lishlari mumkin.



20-chizma



21-chizma



22-chizma

Funksiya grafigiga asimptotani topish quyidagi tasdiqlarga asoslanadi.

5-teorema. $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning atrofida (x_0 nuqtadan tashqari) aniqlangan va $\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \infty$, $\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = \infty$ lardan hech bo'lmaganda bittasi o'rinli bo'lsa, $x = x_0$ to'g'ri $y = f(x)$ funksiya grafigiga vertikal asimptota bo'ladi.

Agar $x = x_0$ funksiyaning uzluksizlik nuqtasi bo'lsa, $x = x_0$ vertikal asimptota bo'lamaydi, chunku bu holda $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'ladi.

Vertikal asimptotani funksiyaning uzilish nuqtalaridan yoki *a*, *b* lar chekli bo'lsa, (*a*,*b*) aniqlanish sohasining chekkalaridan izlash kerak.

6-teorema. $y = f(x)$ funksiya yetarlicha katta x lar uchun aniqlangan va $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ bo'lsin. U holda $y = b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigiga gorizantal asimptota bo'ladi.

7-teorema. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya yetarlicha kata x lar uchun aniqlangan va $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x} = k$ va $\lim\limits_{x \to \infty} [f(x) - kx] = b$ limitlar mavjud bo'lsin.

U holda $y = kx + b$ to'g'ri chiziq $y = f(x)$ funksiya grafigiga og'ma asimptota bo'ladi.

Isboti. Agar $y = kx + b$ og'ma asimptota bo'lsa, $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx+b)\right] = 0$ va $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{x} - k - \frac{b}{x}\right) = 0$ bo'ladi.

Shuning uchun ham, $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - (kx+b)\right] = 0$ tenglikda, *k*-chekli son bo'lganligi uchun $k = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$.

2-misol. $y = \frac{3x^5}{2x^4}$ funksiya grafigiga asimptotalarni toping.

Yechish. Berilgan funksiya grafigi vertikal asimptotaga ega emas, chunki funksiyaning uzlush nuqtasi yo'q ($D(y) = (-\infty,\ \infty)$) .

Gorizontal asimptotasi ham yo'q, chunki $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^5}{2+x^4} = \infty$.

Endi og'ma asimptotani izlaymiz:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^5}{2+x^4} : x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^4}{2+x^4} = 3;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left[f(x) - 3x\right] = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^5}{2+x^4} - 3x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{3x^5 - 6x - 3x^5}{2+x^4} = \lim_{x\to\infty}\left(-\frac{6x}{2+x^4}\right) = 0.$$

Demak, $y = 3x$ to'g'ri chiziq berilgan funksiya grafigiga og'ma asimptota bo'ladi.

Funksiyani tekshirish va uning grafigini chizishning umumiy sxemasi

Funksiyani tekshirish va uning grafigini chizishda quyidagi sxemadan foydalanish tavsiya qilinadi.

1. Funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz ;
2. Funksiyani juft-toqlikka tekshiramiz.
3. Vertikal asimptotalarni topamiz.

4. Funksiyaning cheksizlikdagi tabiatini o’rganamiz,gorizontal yoki og’ma asimptotasini topamiz.
5. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini va ekstremumlarini topamiz.
6. Funksiyaning qavaqiqlik oraliqlarini va burilish nuqtalarini topamiz.
7. Koordinata o’qlari bilan kesishish nuqtalari va zarur bo’sa, funksiya grafigini aniqlovchi qo’shimcha nuqtalarni topamiz.
8. Aniqlangan ma’lumotlar asosida funksiya grafigini chizamiz .

3-misol. $y = x^2 + x$ funksiya tekshirilsin va grafigi qurilsin.

*Yechish.*1. Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(y) = (-\infty, \infty)$.

2. Funlsiya juft ham emas,toq ham emas(umumiy ko’rinishda).

3. Berilgan funksiya grafigi vertikal asimptotaga ega emas, chunki funksiyaning uzlush nuqtasi yo’q ($D(y) = (-\infty, \infty)$).

4. Gorizontal asimptotasi ham yo’q, chunki $\lim\limits_{x\to\infty}(x^2 + x) = \infty$.

Og’ma asimptotaga tekshiramiz:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}(x+1) = \infty.$$

Demak, og’ma asimptota ham yo’q.

1. $y' = 2x + 1 > 0$, $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ oraliqda funksiya kamayadi, $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ oraliqda o’sadi. $y' = 0$ tenglamaning yechimi $x_1 = -\frac{1}{2}$ funksiyaning kritik nuqtasi bo’ladi.

Agar $x < -\frac{1}{2}$ bo’lsa, $y' < 0$ va $x > -\frac{1}{2}$ bo’lsa, $y' > 0$.

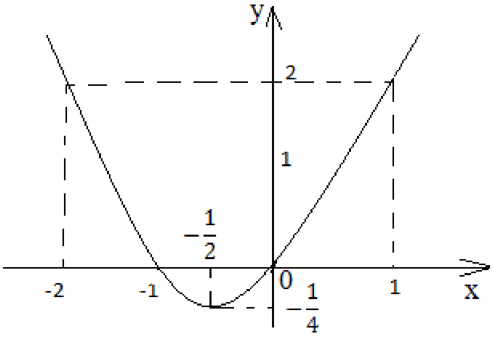
Demak, $x_1 = -\frac{1}{2}$ nuqta berilgan funksiya uchun minimum nuqta bo’ladi:

$$f_{\min}\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{4}.$$

2. $y''=2>0$ bo'lganligi uchun funksiya grafigi botiq. Bukilish nuqtalari yo'q.

3. $x=0$ bo'sa, $y=0$ va $x^2+x=0$, $x(x+1)=0,\ x=0,\ x=-1$.

Demak, funksiya grafigi koordinatalar boshidan o'tadi va *Ox* o'qini $x=-1$ va $x=0$ nuqtalarda kesib o'tadi.



23-chizma

4. Aniqlangan ma`lumotlarga asoslanib, funksiya grafigini chizamiz.

Hosilaning funksiya grafigiga urinma masalasiga tatbiqi

Faraz qilaylik, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsin.

U holda $f(x)$ funksiya grafigiga $M_0(x_0,\ f(x_0))$ nuqtada o'tkazilgan urunma mavjud bo'ladi. Funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi $f'(x_0)$ esa, bu urinmaning burchak koeffitsientini ifodalashini hosilaning geometrik ma`nosidan bilamiz.

Urinmaning tenglamasi

$$y=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)$$

ko'rinishdabo'ladi.

1–misol. $f(x)=\sin x$ funksiya grafigiga $M_0\left(\frac{\pi}{3},\ f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasi topilsin.

Yechish. Berilgan funksiyaning hosilasi $f'(x)=\cos x$ ga teng.

Agar

$$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2},\ f^1\left(\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

bo’lishinie’tiborgaolsak,uholda $M_0\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$ nuqtadano’tuvchiurinmatenglamasi

$y=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ bo’lishliginitopamiz.

Agar $f(x_0)=\pm\infty$ bo’lsa, $f(x)$ funksiya grafigiga $(x_0,\ f(x_0))$ nuqtadan o’tkazilagan urinma *Ox* o’qigaperpendikulyar bo’ladi.

Hosilaning fizik, iqtisodiy va biologik jarayonlarga tatbiqlari haqida

1. Moddiy nuqtaning to’g’ri chiziqli harakati $s=f(t)$ funksiya bilan ifodalangan bo’lsin, bunda *t* –vaqt, *s*- shu vaqt ichida o’tilgan yo’l (masofa) bo’lsin.

$s=f(t)$ funksiyaning t_0 nuqtadagi hosilasi $f'(t_0)$ harakat qilayotgan moddiy nuqtaning t_0 paytdagi oniy tezligini bildirishi bizga hosilaning mexanik ma`nosidan ma`lum.

2. Hosilaning iqtisodiy jarayonlarni o’rganishga qo’llanishiga doir hollardan namunalar keltiramiz.

Mehnat unumdorligi masalasi

$u=u(t)$ t vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorini ifodalasa, t_0 momentdagi mehnat unumdorligini topish talab qilinsin.

t_0 dan $t_0+\Delta t$ gacha vaqt oralig’ida ishlab chiqariladigan mahsulot miqdori $u_0=u(t_0)$ dan $u_0+\Delta u=u(t_0+\Delta t)$ gacha o’zgaradi va bu davrdagi o’rtacha mehnat unumdorligi

$$z_{o'rt}=\frac{\Delta u}{\Delta t}$$

ga teng bo’ladi.

t_0 momentdagi mehnat unumdorligi $\Delta t\to 0$ dagi o’rtacha mehnat unumdorligining limitiga teng bo’ladi.

$$z=\lim_{\Delta t\to 0} z_{o`rt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'(t_0)\ .$$

Funksiyaning elastikligi

Ta`rif. $y=f(x)$ funksiyaning elastikligi deb, y funksiya nisbiy orttirmasining $\left(\frac{\Delta y}{y}\right)$, x o'zgaruvchi nisbiy orttirmasiga nisbatining $\left(\frac{\Delta x}{x}\right)$, $\Delta x\to 0$ dagi limitiga aytiladi va $E_x(y)$ kabi belgilanadi:

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}:\frac{\Delta x}{x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}\cdot y'\ .$$

Funksiya elastikligi - erkli o'zgaruvchi x 1% o'zgarishiga $y=f(x)$ funksiyaning taqriban necha o'zgarishini ko'rsatadi.

Funksiya elastikligi quyidagi xossalarga ega.

1°. Funksiya elastikligi erkli o'zgaruvchi x ning funksiya o'zgarish tempi $T_y=(\ln y)'=\frac{y'}{y}$ ning ko'paytmasiga teng:

$$E_x(y)=xT_y\ .$$

2°. Ikkita funksiya ko'paytmasi (bo'linmasi) ning elastikligi, bu funksiyalar elastiklarining yig'indisi(ayirmasi)ga teng:

$$E_x(u\cdot v)=E_x(u)+E_x(v)\ ,$$

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right)=E_x(u)-E_x(v)\ .$$

Funksiya elastikligi talab va taklif tahlilida qo'llanilishi mumkin. Masalan, talab y ning, baho (yoki foyida) x ga nisbatan elastikligi, bu baho (yoki foyida) 1% o'zgarganda, talab (iste`mol hajmi)ning taqriban necha foyiz ozgarishini ko'rsatadi.

3°. Agar populyatsiya o'lchami $p(t)$ funksiya bilan berilgan bo'lsa, bundan oldingi hollar kabi $p(t)$ funksiyadan t baqt bo'yicha olingan hosila populyatsiya o'sish tezligini berishiga ishonch hosil qilish mumkin.

Diffrensial tushunchasining taqribiy hisoblashlarda qo'llanilishi haqida

$y=f(x)$ funksiya (a,b) oraliqda berilgan bo'lib, $x_0 \in (a,b)$ nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Bunda,

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\Delta x + a\Delta x$$

bo'ladi. x yetarlicha kichik bo'lganda

$$f(x_0+\Delta x) - f(x_0) \approx f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

ya'ni

$$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x,$$

taqribiy formula o'rinli bo'ladi.

1– misol. $\sqrt{1{,}04}$ miqorning taqribiy qiymatini toping.

Yechish. $f(x)=\sqrt{1+x}$ funksiyani qaraymiz.

Bu funksiyaning hosilasi:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}, (x \neq -1).$$

$f(x_0+\Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x,$ formullaga asosan:

$$\sqrt{1+(x_0+\Delta x)} \approx \sqrt{1+x_0} + \frac{\Delta x}{2\sqrt{1+x_0}}.$$

Agar $x_0=0,\ \Delta x = 0{,}4$ deb olsak,

$$\sqrt{1+0{,}4} \approx 1 + \frac{1}{2}\cdot 0{,}4$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, $\sqrt{1{,}4} \approx 1{,}2.$

2– misol. $\sin 30°6'$ miqdorning taqribiy qiymatini toping.

Yechish. Oldingi misolda foydalanilgan formulaga ko'ra:

$$\sin(x_0+\Delta x) \approx \sin(x_0) + \cos(x_0)\Delta x,\ x_0 = \frac{\pi}{6},\ \Delta x = \frac{\pi}{1800}$$

deb olsak,

$$\sin 30°6' = \sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{1800}\right) = \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6}\cdot\frac{\pi}{1800} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\pi}{1800} \approx 05151146\ .$$

Demak, $\sin 30°6' \approx 05151146$.

Mavzuga doir nazorat savollari va topshiriqlar

1. Lopital qoidasini tushuntirib bering?

2. Lopital qoidasini qo'llash hamma vaqt ham natija bermasligiga misol keltiring?

3. Teylor teoremsini isbotlang?

4. Teylor formulasi qoldiq hadining qanday ko'rinishlarni bilasiz?

5. Teylor formulasi qachon Makloren formilasi deyiladi?

6. Ayrim funksiyalar uchun Makloren formilasi yozing?

7. Funksiyaning o'sish(kamayish) oraliqlari ta`riflarini yozing?

8. Funksiya monotonligining yetarli sharti haqidagi teoremani keltiring va isbotlang?

9. Maksimum, minimum va ekstremum nuqtalari ta`riflarini ayting?

10. Ekstremumning I- yetarli shartini ifodalovchi teoremani yozing va isbotlang?

11. Ekstremumning II- yetarli shartini ifodalovchi teoremani yozing va isbotlang?

12. Kritik(stattsionar) nuqta deb qanday nuqtaga aytiladi?

13. Funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

14. Bukilish nuqtalari deb qanday nuqtalarga aytiladi?

15. Funksiya graginining qavariqlik(botiqlik) orqliqlari qanday topiladi?

16. Funksiya grafigiga asimptota deb qanday to'g'ri chiziqqa aytiladi?

17. Funksiya grafigiga vertikal, gorizantal, og'ma asimptotalar mavjudligini aniqlashda qo'llaniladigan teoremalarni keltiring?

18. Funksiyani tekshirishning umumiy sxemasini mustaqil yozib chiqing?

19. $f(x)$ funksiya grafigiga (x_0,f(x_0)) nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasini yozing ?

20. Harakat qonuni s(t) dan t vaqt bo'yicha olingan hosila nimaga teng?

21. Mahsulot hajmidan vaqt bo'yicha olingan hosila nimaga teng?

22. Funksiya elastikligining ma`nosini tushuntirib bering?

23. Populyatsiya hajmidan vaqt bo'yicha olingan hosila nimani beradi?

24. Diffrensial tushunchasining taqribiy hisoblashlarda qo'llanilishidagi formulani yozing?

26. Quyidagi limitlar Lapital qoidasini qo'llab topilsin [1-6].

1. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-5x+3}{x^3-4x^2+5x-2}$. [-4.]

2. $\lim_{x\to 0}\frac{e^{3x}-1}{x}$. [3.]

3. $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{lnx}$. [3.]

4. $\lim_{x\to \infty}\frac{x^2+1}{e^x}$. [0 .]

5. $\lim_{x\to \infty} x^2e^{-3x}$. [0 .]

6. $\lim_{x\to 0},(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1})$. [$\frac{1}{2}$.]

27. Teylor formulasidan foydalanib, f(x)= $\sqrt[4]{x}$ funksiyani x-1 ga nisbatan to'rtinchi darajali ko'p had ko'rinishida ifodalang.

28. Makloren formulasidan foydalanib, f(x)= 2^x funksiyani x ga nisbatan uchinchi darajali ko'p had ko'rinishida ifodalang.

29. Quyidagilarni 0,001 aniqlikgacha hisoblang [29- 31].

$cos41^{\circ}$. [0,754 .]

30. $\sqrt[4]{e}$. [1,395 .]

31. $\sqrt[3]{121}$. [4,946 .]

32. Ekstremumga tekshiring [1-5].

1. y=4x-x^2 . [y_{max}(2)=4.]

2. y= $2x^2$+8x-1. [y_{min}(-2)=-9.]

3. $y=\frac{x^3}{1+x^2}$. [Ekstremum nuqtalari yo'q.]

4. y=xlnx . [$y_{max}(e^{-2})=4/e^2$,$y_{min}(1)=0$.]

5. $y=\frac{e^x}{x}$. [$y_{min}(1)=e$.]

33. Funksiyaning X oraliqdagi eng katta va eng kichik qiymatlari topilsin [1- 3].

1. $y= x^4-8x^2+3$, X= [-3,3]. [$y_{eng\ kat.}=y(-3)=y(3)=12$, $y_{eng\ kich.}=y(-2)=y(2)=-13$.]

2. $y=x+\sqrt{x}$, X=[0,4] . [$y_{eng\ kat.}=y(4)=6$, $y_{eng\ kich.}=y(0)= 0$.]

3. $y=\sqrt{\frac{1+x}{lnx}}$, X=(1, e) . [$y_{eng\ kat}$ –mavjud emas, $y_{eng\ kich.}=\sqrt{1+e}$ 19.

34. *r* radusli doiraga ichki chizilgan to'g'ri to'rtburchak eng katta yuzaga ega bo'lishi uchun uning tomonlari qanday bo'lishi kerak.

[Tomoni $r\sqrt{2}$ ga teng bo'lgan kvadrat.]

35. Funksiya grafigining bukilish nuqtalari va qavariqlik oqaliqlari topilsin [1-3].

1. $y=2x^3-3x^2+15$. [Bukilish nuqtasi (1/2,29/2), ($-\infty$,1/2) oraliqda qavariq, (1/2, ∞) oraliqda botiq .]

2. $y=x^3-6x^2$. [Bukilish nuqtasi (2,-16), ($-\infty$, 2) oraliqda qavariq, (2, ∞) oraliqda botiq .]

3. $y=xe^x$. [Bukilish nuqtasi ($-2,-2e^{-2}$), ($-\infty$,-2) oraliqda qavariq, (-2, ∞) oraliqda botiq .]

36. Funksiya grafigining asimptotalari topilsin [1-4].

1. $y=\frac{2x}{x-1}$. [Gorizontal asimptota y=2 , vertical asimptota x=1 .]

2. $y=2x+\frac{2}{x+1}$. [Vertical asimptota x=-1, og'ma asimptota y=2x .]

3. $y=\frac{3x}{2+x^4}$. [Og'ma asimptota y=3x .].

4. $y=\frac{2x^3\ lnx}{x^2+1}$. [Asimptotalari yo'q .]

37. Funksiyani tekshiring va grafigini yasang [1-4].

1. $y=x^3-12x^2+36x$.

2. $y=x^2+\frac{1}{x^2}$.

3. $y=x+\frac{x}{x^3}$.

4. $y=\frac{x}{lnx}$.

38. $x^2/9+ y^2/8=1$ giperbola grafigiga M(-9;-8) nuqtadan o'tkazilgan urinma tenglamasi tuzilsin. [x-y+1=0 .]

39. Masofaning vaqtga bog'liqligi s=tln(t+1) (t-sekuntlarda, s-metrlarda) tenglama bilan berilgan. Ikkinchi sekunt oxiridagi tezligi topilsin. [1,76 m/s .]

40. Hashoratlarning tmomentda (vaqt kunlarda ifodalanadi) populyatsiya o'lchami $p(t)=1000-9000(1+t)^{-1}$formula bilan aniqlanadi.

t momentdagi o'sish tezligi $p'(t)$ ni toping. [$\frac{9000}{(1+t)^2}$.]

41.Bakteriyaning t momentda populatsiya o'lchami (vaqt soatlarda ifodalanadi) $p(t)=10^6+10^4t-10^3t^2$ formula bilan aniqlanadi. t=1 soat bo'lganda populyatsiya o'sish tezligi topilsin.

[Soatiga 8000 bakteriya.]

42. Diffrensial yordamida quyidagi ifodalarning taqribiy qiymatlari topilsin [1-3].

1. $\sqrt[3]{1,1}$. [1,003.]

2. $Cos61^0$. [0,4849.]

3. ln1,007 . [0,007.]

Mavzuga doir testlar

1. Lopital qoidasini ifodalovchi munosabat:

A) $\lim_{x\to x_{0(\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_{0(\infty)}}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, B) $\lim_{x\to x_{0(\infty)}}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_{0(\infty)}}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$,

C) $\lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f'(x)}{g(x)}$, D) $\lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0(\infty)} \frac{f(x)}{g'(x)}$.

2.Lopital qoidasini isbotlashda . . . teoremasidan foydalaniladi:

A) Roll , B) Lagranj , C) Ferma , D) Gul`den.

3. Agar X oraliqning ichkarisida $f'(x)>0$ bo'lsa, funksiya bu oraliqda:

A) o'suvchi , B) kamayuvchi , C) o'zgarmas , D) toq .

4. Agar X oraliqning ichkarisida $f'(x)<0$ bo'lsa, funksiya bu oraliqda:

A) o'suvchi , B) kamayuvchi , C) o'zgarmas , D) juft .

5. $f(x)=x^2-2x$ funksiyaning o'sish oralig'ini ko'rsating.

A) $(1;\infty)$, B) $(0; \infty)$, C) $(-\infty; 1)$, D) $(-1;0)$.

6. $f(x)= x^4-8x$ funksiyaning kamayish oralig'ini ko'rsating.

A) $(-\infty; \sqrt[3]{2})$, B) $(\sqrt[3]{2}; \infty)$,C) $(1; \sqrt[3]{2})$, D) $(\sqrt[3]{2};2)$.

7. Kritik nuqtada funksiya hosilasi:

A) nolga teng yoki mavjud emas, B) faqat nolga teng ,

C) faqat mavjud emas, D) musbat .

8. $y=x^3-3x$ funksiyaning kritik nuqtalari :

A) $\{-1;1\}$, B) $\{-1;0\}$, C) $\{0;1\}$, D) $\{0 ;2\}$.

9. $y=\sqrt[3]{x-1}$ funksiyaning kritik nuqtalari:

A) $\{1\}$, B) $\{0\}$, C) $\{-1\}$, D) $\{2\}$.

10. x_0 nuqta funksiyaning maksimum nuqtasi deyiladi, agar bu nuqtaning atrofida:

A) $f(x)\geq f(x_0)$, B) $f(x)\leq f(x_0)$, C) $f(x)=f(x_0)$, D) $f(x)= -f(x_0)$.

11. x_0 nuqta funksiyaning minimum nuqtasi deyiladi, agar bu nuqtaning atrofida:

A) $f(x)\geq f(x_0)$, B) $f(x)\leq f(x_0)$, C) $f(x)=f(x_0)$, D) $f(x)= -f(x_0)$.

12. Agar f(x) funksiya x_0 nuqtada ekstremumga ega bo'lsa:

A) $f'(x_0)=0$, B) $f'(x_0)>0$, C) $f'(x_0)<0$, D) $f'(x_0)=0$.

13. Ekstremumning ikkinchi yetarli shartiga ko'ra $f(x_0)$maksimum bo'ladi:

A) $f''(x_0)<0$, B) $f''(x_0)>0$, C) $f''(x_0)=0$, D) $f''(x_0)>1$.

14. Ekstremumning ikkinchi yetarli shartiga ko'ra $f(x_0)$ minimum bo'ladi:

A) $f''(x_0)>0$, B) $f''(x_0)<0$, C) $f''(x_0)=0$, D) $f'(x_0)=0$.

15. $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi x_0 kritik nuqtadan chap va o‘ng tomonda qanday ishoraga ega bo‘lganda $f(x_0)$ maksimum bo‘ladi?

A) musbat, manfiy, B) musbat, musbat, C) manfiy, manfiy,

D) manfiy, musbat .

16. $y=f(x)$ funksiyaning hosilasi x_0 kritik nuqtadan chap va o‘ng tomonda qanday ishoraga ega bo‘lganda $f(x_0)$ minimum bo‘ladi?

A) manfiy, musbat, B) musbat, musbat, C) manfiy, manfiy,

D) musbat, manfiy .

17. $y=x^2$-1funksiyani ekstremumga tekshiring.

A) x=0 da minimumga, B) x=0 da maksimumga ,

C) x=1 da minimumga, D) x=1 da maksimumga erishadi.

18. y=$\sqrt[3]{x-1}$ funksiyani ekstremumga tekshiring.

A) ekstremumga erishmaydi, B) x=0 da minimumga,

C) x=0 da maksimumga , D) x=1 da maksimumga erishadi.

19. y= f(x) funksiya X oraliqda qavariq deyiladi, agar $\forall$ x_1,$x_2$$\in X$

uchun . . .bo’lsa:

A) f($\frac{x_1+x_1}{2}$)$\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, B) f($\frac{x_1+x_1}{2}$)$\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

C) f($\frac{x_1+x_1}{2}$)$=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, D) f($\frac{x_1+x_1}{2}$)$\leq\frac{f(x_1)-f(x_2)}{2}$.

20. y= f(x) funksiya X oraliqda botiq deyiladi, agar $\forall$ x_1,$x_2$$\in X$

uchun . . .bo’lsa:

A) f($\frac{x_1+x_1}{2}$)$\leq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, B) f($\frac{x_1+x_1}{2}$)$\geq\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$,

C)f($\frac{x_1+x_1}{2}$)$=\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, D) f($\frac{x_1+x_1}{2}$)$\leq\frac{f(x_1)-f(x_2)}{2}$.

21. Bukilish nuqtasi x_0 da:

A) $f''(x_0)=0$, B) $f''(x_0)>0$, C) $f''(x_0)<0$, D) $f'(x_0)=0$.

22. Ikkinchi tartibli hosila x_0 nuqtadan o’tganda ishorasini . . . x_0 nuqta bukilish nuqtasi bo’ladi:

A) o’zgartirsa , B) o’zgartirmasa , C) mavjud bo’lmasa , D) $f'(x_0)>0$.

23. y=f(x) funksiya grafigiga y=b to’g’ri chiziq gorizontal asimptota bo’ladi, agar:

A) $\lim_{x\to\infty} f(x)$=b-chekli , B) $\lim_{x\to\infty} f(x)$=b-cheksiz ,

C) $\lim_{x\to 0} f(x)$=b-chekli , D) $\lim_{x\to b} f(x)$=0 .

24. Vertikal asimptota . . . parallel bo'ladi:

A) Oy o'qiga , B) Ox o'qiga , D) har doim koordinata bosidan o'tadi,

D) birorta o'qga ham parallel bo1lmaydi .

25. Asimptotaga ega bo'lmagan funksiyalar mavjudmi?

A) ha , B) har qanday funksiya gorizontal asimptotaga ega ,

C) har qanday funksiya vertikal asimptotaga ega ,

D) har qanday funksiya og'ma asimptotaga ega .

26. Funksiyani tekshirish sxemasiga . . . kiradi.

A) funksiyaning aniqlanish sohasini topish ,

B) jift-toqlikka tekshirish,

C) vertikal asimptotalarini topish,

D) keltirilganlarning barchasi.

27. Funksiyani tekshirish sxemasiga . . . kiradi.

A) funksiyaning cheksizlikdagi xususiyatlarini o'rganish,

B) ekstremumga tekshirish, C) qavariq va botiqlikga tekshirish,

D) keltirilganlarning barchasi.

28. Funksiyaning elastikligi . . . bildiradi.

A) argumenning 1% o'zgarishiga funksiyaning qanday o'zgarishi mos kelishini,

B) argumenning 1% o’sishiga funksiyaning necha foiz o’sishi mos kelishini,

C) funksiyaning 1% o’sishiga argumentning necha foiz o’sishi mos kelishini,

D) funksiyaning 1% o’zgarishiga argumenning qanday o’zgarishi mos kelishini .

29. s=f(t) harakat qonunidan t vaqt bo’yicha olingan hosila:

A) tezlik, B) tezlanish, C) jism massasi,D) jism zichligi.

30. Populyatsiya o’lchamini ifodalovchi p(t) funksiyadan t vaqt bo’yicha olingan hosila populyatsiya:

A) tezligi, B) tezlanishi, C) soni, D) massasi.

Aniqmas integral

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral ta`riflari

Faraz qilaylik $f(x)$ funksiya biror (a, b) (chekli yoki cheksiz) oraliqda aniqlangan bo'lsin.

Ta`rif. Agar (a, b) oraliqda $f(x)$ funksiya, shuoraliqda differensiallanuvchi va $F(x)$ funksiyaning hosilasiga (differentsialiga) teng bo'lsa, ya'ni ushbu

$$F'(x) = f(x) \ \left(dF(x) = f(x)\right),\ x \in (a, b)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a, b) oraliqda $f(x)$ funksiyaning **boshlangich funksiyasi** deyiladi.

1-misol. $f(x) = x^3$ finksiyaning (-∞;+∞) oralig'idagi boshlang'ich funksiyasi

$F(x) = \dfrac{x^4}{4}$ ga teng,chunki, $\left(\dfrac{x^4}{4}\right)' = \dfrac{1}{4}(x^4)' = \dfrac{1}{4} \cdot x^{4-1} = x^3$.

2– misol. $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ funksiyaning(-∞;+∞) oraliqda boshlangich funksiyasi

$$F(x) = \ln(1+x^2)$$

bo'ladi, chunki, $F'(x) = \left[\ln\left(1+x^2\right)\right]' = \dfrac{1}{1+x^2} \cdot 2x = f(x).$

Agar $f(x)$ funksiya uchun ikkita $F(x)$ va $\Phi(x)$ funksiyalar boshlangich funksiyasi bo'lsalar, yani:

$$F'(x) = f(x),\ \Phi'(x) = f(x),\ x \in (a, b).$$

Bu munosabatdan:

$$F'(x) = \Phi'(x)\ .$$

Oxirgi tenglikdan:

$$F(x) = \Phi(x) + C,\ \text{(C - const)}$$

tenglik kelib chiqadi.

Demak, (a, b) oraliqda berilgan $f(x)$ funksiyaning boshlangich funksiyalari bir-biridan o'zgarmas songa farq qilar ekan, ya'ni bu funksiyaning (a, b) oraliqda biror boshlangich funksiyasi $F(x)$ bo'lsa, uning istalgan boshlangich funksiyasi ushbu

$$F(x)+C, \ (C \text{ - const})$$

ko'rinishda ifodalanadi.

Ta`rif. $f(x)$ funksiyaning barcha boshlang'ich funksiyalar oilasiga uning anigmas integrali deyiladi va

$$\int f(x)dx$$

kabi belgilanadi.

$f(x)$ ga integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ ga integral ostidagi ifoda deyiladi.

Demak,

$$\int f(x)dx = \int F'(x)dx = F(x)+C \ .$$

3 – misol. Ushbu $\int 3x^2 \ dx$ integralni toping.

Yechish. Bizga ma`lumki, $f(x)=3x^2$ funksiyaning boshlangich funksiyasi $F(x) = x^3$ bo'ladi.

Aniqmas integral ta'rifidan $\int 3x^2dx = x^3 + C$ bo'lishini topamiz.

Aniqmas integralning sodda xossalari

1. $d\left[\int f(x)\, dx\right] = f(x)dx$

2. $\int dF(x) = F(x)+C, (C - const).$

3.Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalarning boshlangich funksiyalari mavjud bo'lsa, $f(x) \pm g(x)$ funksiyalar ham boshlangich funksiyaga ega va

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

4. Agar $f(x)$ funksiya boshlangich funksiyaga ega bo'lsa, u holda $Cf(x)$ (C - const) funksiyaham boshlangich funksiyaga ega va

$$\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Elementar funksiyalarning aniqmas integrallari

Elementar funksiyaning hosilalari jadvalidan hamda boshlangich funksiya ta'rifidan foydalanib, elementar funksiyalar uchun quyidagi aniqmas integrallar jadvaliniga ega bo'lish mumkin.

1. $\int 0dx = C, C - const.$
2. $\int 1dx = x + C.$
3. $\int x^{\alpha}dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, (\alpha \neq -1).$
4. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C(x \neq 0).$
5. $\int \alpha^{x}dx = \dfrac{\alpha^{x}}{\ln \alpha} + C, (a > 0, \alpha \neq 1).$
6. $\int e^{x}dx = e^{x} + C.$
7. $\int \sin xdx = -\cos x + C.$
8. $\int \cos xdx = \sin x + C.$
9. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi, n \in z$
10. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C, x \neq n\pi, n \in Z.$
11. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ =arcsin$\dfrac{x}{a}$+c
12. $\int \dfrac{dx}{a^2 + x^2} = \dfrac{1}{a} arctg\dfrac{x}{a}$+c
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 + a}} = ln|x + \sqrt{x^2 + a}|$ +c, $a \neq 0$.

1-misol. Ushbu $\int\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)dx$ integralni toping.

Yechish. Aniqmas integralning 3,4-xossasi va jadvalidan foydalansak,

$$\int\left(3x^2+\frac{1}{x}\right)dx=\int 3x^2dx+\int\frac{1}{x}dx=3\int x^2dx+\int\frac{1}{x}dx=$$
$$=\ 3\cdot\left(\frac{x^3}{3}+C_1\right)+\ln|x|+C_2=x^3+\ln|x|+C,\ C=3C_1+C_2$$

2 – misol. $\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx$ integralni toping.

Yechish. Integral ostidagi funksiyani

$$\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}=x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

ko'rinishda yozib olamiz.

Natijada:

$$\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx=\int\left(x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

tenglikka kelamiz.

Aniqmas integralning sodda xossalari va yuqorida keltirilgan jadvaldan foydalansak,

$$\int\frac{x^2+x+1}{\sqrt{x}}dx=\int x^{\frac{3}{2}}dx+\int x^{-\frac{1}{2}}dx+C=2\sqrt{x}\left(\frac{x^2}{5}+\frac{x}{3}+1\right)+C\,.$$

Integrallashning ba'zi usullari

1. O'zgaruvchini almashtirish usuli.

$x=\varphi(t)$ funksiya qaralayotgan oraliqdadiffrensiallanuvchi funksiya bo'lsin,u holda

$$\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$$

bo’ladi.

Bu formulaga aniqmas integralda o’zgaruvchilarni almashtirish formulasi deyiladi.

1-misol. $\int \frac{\ln^2 x}{x} dx$ integralni toping.

Yechish. $\ln x = t$ deb olsak, $\frac{dx}{x} = dt$ bo’ladi.

Shuning uchun ham,

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \int t^2 dt = \frac{t^3}{3} + C = \frac{\ln^3 x}{3} + C .$$

2-misol. Ushbu $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}$ integralni toping.

Yechish.

$$I = \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \int \frac{\frac{1}{x^2}}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} dx = -\int \frac{d\left(\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}} .$$

Oxirgi integraldan ko’rinadiki, o’zgaruvchini $\frac{1}{x} = t$ deb almashtirish maqsadga muvofiqdir.

Yangi o’zgaruvchi orqali integral quyidagi ko’rinishga keladi: $I = -\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}}$.

$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ ayniyatni hisobga olib, $t = \sin z$ almashtirishni bajaramiz. U holda $dt = \cos z dz$,

$1+t^2=1+\sin^2 z=\cos^2 z$, $\sqrt{1+t^2} = cosz$ bo’lib, I=$-\int \frac{cosz}{cosz}$dz =$-\int dz = -z + c$

Berilgan integralning *x* o’zgaruvchi orqali ifodasi

$$I = -\arcsin t + C = -\arcsin \frac{1}{x} + C .$$

2. Bo’laklab integrallash usuli.

Faraz qilaylik, $u(x)$ va $\upsilon(x)$ funksiyalar (a, b) oraliqda differentsiallanuvchi bo'lib, $\upsilon(x)\cdot u'(x)$ funksiya bu oraliqda boshlangich funksiyaga ega bo'lsin.
U holda $u(x)\upsilon(x)$ funksiya ham boshlangich funksiyaga ega va

$$\int u(x)\upsilon(x)dx = u(x)\upsilon(x) - \int \upsilon(x)u'(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.
Bu tenglik bo'laklab integrallash formulasi deyiladi.
Bo'laklab integrallash formulasini

$$\int u(x)d\upsilon(x) = u(x)\upsilon(x) - \int \upsilon(x)du(x)$$

ko'rinishda yozish ham mumkin.

1-misol. $\int \ln x dx$ integralni toping.

Yechish. Integral ostidagi ifodada $u = \ln x$, $d\upsilon = dx$ deb olamiz.

U holda $du = \frac{dx}{x}$, $\upsilon = x$ bo'ladi.

Bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra:

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int \frac{xdx}{x} = x\ln x - x + C$$

2-misol. $I = \int x \cos x dx$ integralni toping.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u = x, dv = \cos dx$ lar ko'paytmasi ko'rinishida yozib olamiz.
U holda $du = dx$, $v = \sin x$ bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra:

$$I = \int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

3– misol. $\int arctg\sqrt{x}\, dx$ integralni toping.

Yechish. Integral ostidagi ifodani $u = arctg\sqrt{x},\ d\upsilon = dx$ lar ko'paytmasi deb olamiz.

U holda $du = \frac{1}{1+x}\cdot\frac{dx}{2\sqrt{x}}$, $\upsilon = x$ bo'ladi. Bo'laklab integrallash formulasiga ko'ra:

$$I = \int arctg\sqrt{x}\, dx = xarctg\sqrt{x} - \int \frac{x\, d\, x}{2\sqrt{x}(1+x)} = x\cdot arctg\sqrt{x} - \frac{1}{2}\int\frac{\sqrt{x}\, d\, x}{1+x}.$$

$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}$ integralda $\sqrt{x}=t$ deb olamiz.

Natijada $x=t^2$, $dx=2tdt$ bo'lib,

$$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{1+x}=\int \frac{t\cdot 2t}{1+t^2}dt=2\int \frac{t^2dt}{1+t^2}=2\left[\int dt-\int \frac{dt}{1+t^2}\right]=2t-2arctg+C=2\sqrt{x}-arctg\sqrt{x}+C.$$

Shunday qilib, berilgan integral quyidagiga teng bo'ladi:

$$I=x\cdot arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+arc\ tg\sqrt{x}+C=(x+1)arctg\sqrt{x}-\sqrt{x}+C.$$

Ratsional funksiyalarni integrallash

Har qanday ratsional funksiyani quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin:

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+...+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...a_n}.$$

1-ta`rif. Agar suratdagi ko'p hadning darajasi maxrajdagi ko'p hadning darajasidan kichik ($m<n$) bo'lsa, berilgan kasrga **to'g'ri kasr to ratsional funksiya** deyiladi.

2-ta`rif. Agar suratdagi ko'p hadning darajasi , maxrajdagi ko'p had darajasidan katta ($m\geq n$) bo'lsa, **noto'g'ri kasr ratsional funksiya deyiladi.**

Kasr noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lsa, suratini maxrajiga bo'lib, butun qismini ajratiub, uni butun va to'g'ri kasr yig'indisi ko'rinishida yozish mumlin. Masalan, $\frac{x^4+3x^3+3x+1}{x^3-x}$ noto'g'ri kasr ratsional funksiyani,

$$\frac{x^4+3x^3+3x+1}{x^3-x}=x+3-\frac{x^2+1}{x^3-x}$$

ko'rinishda yozish mumkin.

Umumiy holda, $\frac{Q(x)}{P(x)}$ noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lsa, uni

$$\frac{Q(x)}{P(x)}=T(x)+\frac{R(x)}{P(x)} \tag{1}$$

ko’rinishda yozish mumlin, bu yerda $T(x)$ butun ratsional funksiya, $\dfrac{R(x)}{P(x)}$ esa, to’g’ri ratsional kasr funksiyadan iborat.

Demak, noto’g’ri kasr ratsional fuksiyani integrallash $\dfrac{R(x)}{P(x)}$ to’g’ri kasr ratsional funksiyani integrallashga olib keltiriilar ekan.

To’g’ri kasr ratsional funksiyalarni soda kasr ko’rinishida ifodalash va ularni integrallash

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k>1 \ \ butun \ \ son)$; 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; $(\dfrac{p^2}{4}-q<0$ ya’ni kvadrat uchhad haqiqiy ildizga ega emas);

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $(n>1$ butun son, $\dfrac{p^2}{4}-q<0)$ ratsional to’g’ri kasrlarga ***<u>sodda kasr ratsional funksiyalar</u>*** deyiladi. (A, B, p, q, a - haqiqiy sonlar).

To’g’ri kasr ratsional funksiyalarnisodda kasrla yig’indisi orqali ifodalash.

Quyidagi:

1) $\dfrac{A}{x-a}$; 2) $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ $(k>1$ butun son$)$; 3) $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}$; $(\dfrac{p^2}{4}-q<0$) ;

4) $\dfrac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $(n>1$ butun son, $\dfrac{p^2}{4}-q<0)$

ratsional to’g’ri kasrlarga sodda kasr ratsional funksiyalar deyiladi.(bu yerda A, B, p, q, a lar haqiqiy sonlar).

1) va 2) ko’rinishdagi funksiyalarni osongina integrallash mumkin:

1) $\int \frac{A}{x-a}dx = A\ln|x-a| + C,$

2) $\int \frac{A}{(x-a)^k} = A\int (x-a)^{-k} d(x-a) = A\frac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1} + C = \frac{A}{1-k}\cdot\frac{1}{(x-a)^{k-1}} + C.$

Shuning uchun ham

3) $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$

integaralni hisoblashga to'xtalamiz.

Buning uchun dastlab , $\int \frac{1}{x^2+px+q}dx$ integralni qaraymiz.

x^2+px+q uch hadni to'la kvadratga ajratib, $x+\frac{p}{2}=t$ almashtirishdan keyin quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \int \frac{1}{(x+\frac{p}{2})^2+q-\frac{p^2}{4}}dx = \left| \begin{array}{c} x+\frac{p}{2}=t \\ dx=dt \end{array} \right| = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)},$$

bu yerda $a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$.

Integrallash jadvaliga ko'ra:

$$\int \frac{1}{x^2+px+q}dx = \frac{1}{a}arctg\,\frac{t}{a} + C = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}}arctg\,\frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C \qquad (2)$$

natijaga kelamiz.

Endi $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx$ integralni hisoblashga o'tamiz.

Agar $Ax+B=(2x+p)\frac{A}{2}-\frac{Ap}{2}+B$

shakl almashtirishdan foydalansak, yuqoridagi integralni quyidagicha yozish mumkin:

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{(2x+p)\frac{A}{2} - \frac{Ap}{2} + B}{x^2+px+q}dx =$$

$$= \frac{A}{2}\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)\int \frac{1}{x^2+px+q}dx.$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi birinchi integral

$$\int \frac{2x+p}{x^2+px+q}dx = \int \frac{d(x^2+px+q)}{x^2+px+q} = \ln\left|x^2+px+q\right| + C_1$$

ga teng, ikkinchi integral esa, (2) formulaga ko'ra

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q} = \frac{2}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C_2 .$$

Demak,

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\ln\left|x^2+px+q\right| + \frac{2B-Ap}{\sqrt{4q-p^2}} arctg \frac{2x+p}{\sqrt{4q-p^2}} + C$$

ekanligi haqidagi oxirgi natijaga kelamiz..

1-misol. $\int \frac{x^5}{x^2-9}dx$ integral topilsin.

Yechish. Integral ostidagi funksiya noto'g'ri kasr ratsional funksiya bo'lganligi uchun, uni butun va to'g'ri ratsional funksiyalar yig'indisi ko'rinishda ifodalaymiz:

$\frac{x^5}{x^2-9} = x^3 + 9x + \frac{81x}{x^2-9}$, $\int \frac{x^5}{x^2-9}dx = \int x^3 dx + 9\int x dx + \frac{81}{2}\int \frac{d(x^2-9)}{x^2-9} = \frac{x^4}{4} + 9\frac{x^2}{2} +$

$+ \frac{81}{2}\ln|x^2-9| + c.$

$\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $(n>1$ butun son, $\frac{p^2}{4} - q < 0)$ kasrning integralini topish uchun x^2+px+q kvadrat uch hadni $\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4}$ ko'rinishda ifodalab, $x+\frac{p}{2} = t$ almashtirish va $a^2 = q - \frac{p^2}{4}$ belgilashni bajaramiz va quyidagilarni olamiz:

$$\int \frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}dx = \int \frac{Ax+B}{\left(\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}\right)^n}dx = \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{(t^2+a^2)^n}dt = A\int \frac{t}{(t^2+a^2)^n}dx +$$

$$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} = \frac{A}{2}\int \frac{d(t^2+a^2)}{(t^2+a^2)^n} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n} =$$

$$= \frac{A}{2}\frac{1}{(1-n)(t^2+a^2)^{n-1}} + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot I_n$$

$I_n = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^n}$ integralni I_1 ni bilgan holda, $I_{n+1} = \frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2}\cdot I_n$ rekurrent formiladan foydalanib topish mumkin.

$I_1 = \int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\int \frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{1}{a}arctg\frac{x}{a}+C$ ekanligi esa bizga ma`lum.

Agar $\frac{R(x)}{P(x)}$ to’g’ri kasr ratsional funksiyaning maxrajini

$$P(x) = (x-a)^r\cdot(x-b)^s.....(x^2+2px+q)^t\cdot(x^2+2kx+\ell)^m.....,$$

ko’rinishda ifodalash mumkin bo’lsa, bu funksiyani

$$\frac{R(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{(x-a)} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + ... + \frac{A_r}{(x-a)^r} + \frac{B_1}{(x-b)} + ... + \frac{B_s}{(x-b)^s} + ... + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2px+q} + ... +$$
$$+\frac{M_tx+N_t}{(x^2+2px+q)^t} + \frac{F_1x+E_1}{\left(x^2+2kx+\ell\right)} + ... + \frac{F_mx+E_m}{\left(x^2+2kx+\ell\right)^m} + ... \qquad (3)$$

ko’rinishda yagona usul bilan yozish mumkin. Bunda $r, s,....t, m,\ldots$ lar musbat sonlar, $a,\ b,\ p,\ q,\ k,\ \ell,\ldots,\ A_1,\ A_2,....\ A_r,\ B_1,...,B_s,\ M_1,\ N_1,.....,\ M_t,\ N_t,....$ lar esa haqiqiy sonlar.

(3) tenglikka to’g’ri ratsional funksiyaninig ***sodda kasrlar orqali yoyilmasi deyiladi***.

(3) yoyilmadagi $A_1,\ A_2,....\ A_r,\ M_1,\ N_1,.....,\ M_t,\ N_t,....$ koeffitsentlarni odatda **noma`lum koeffitsentlar usuli** deb ataluvchi usuldan foydalaniladi. Namuna uchun quyidagi misolni qaraymiz.

2-misol. $\frac{3x-1}{x^2-7x+6}$ ratsional funksiyani sodda kasrlar yoyilmasi ko'rinishida yozing.

Yechish. Maxrajni ko'paytuvchilarga ajratib

$$x^2-7x+6=(x-1)(x-6)$$

ni va (3) formulaga ko'ra

$$\frac{3x-1}{x^2-7x+6}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{x-6}$$

tenglikni olamiz.

Bundan $3x-1=A_1(x-6)+A_2(x-1)$ *yoki* $3x-1=(A_1+A_2)x-6A_1-A_2$.

Tenglikning ikkala tomonidagi x oldidagi koeffitsentlarni va ozod hadlarni mos ravishda tenglashtirib quyidagi tenglamalar sistemasiga kelamiz:

$$\begin{cases} A_1+A_2=3 \\ -6A_1-A_2=-1 \end{cases}$$

Bu tenglamalar sistemasining yechimi: $A_1=-\frac{2}{5}$ va $A_2=\frac{17}{5}$.

Demak, $\frac{3x-1}{x^2-7x+6}=-\frac{\frac{2}{5}}{x-1}+\frac{\frac{17}{5}}{x-6}$.

Ba`zi irratsional funksiyalarni integrallash

Ushbu

$$\int R\,(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \ldots.)dx \tag{1}$$

ko'rinishdagi integallarni qaraymiz.

Bunda $R(x, x^{\alpha}, x^{\beta}, \ldots.)$ funksiya x, x^{α}, x^{β}, ...larning ratsional funksiyasi.

Bu yerda $\alpha=\frac{m_1}{n_1}$, $\beta=\frac{m_2}{n_2}$,. . . ratsional sonlar bo'lib, k ularning umumiy maxraji bo'lsa, $x=t^k$ almashtirish yordamida (1) integral ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi.

$$\int R\left(x,\ (ax+b)^{\alpha},(ax+b)^{\beta},\ \ldots\right)dx,$$

$$\int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \dots\right)dx$$

integrallar esa , mos ravisda

$$ax+b=t^k, \ \frac{ax+b}{cx+d}=t^k$$

almashtirishlar yordamida ratsional funksiyalarning integrallariga keltiriladi.

Agar m, n, p ratsional sonlar va a,b lar noldan farqli o'zgamaslar bo'lganda integralni $\int x^m(a+bx^n)^p$ topish, talab qilinsa , u holda

1) p butun son bo'lsa, N`yuton binomi bo'yicha yoyib integallanadi;
2) $\frac{m+1}{n}$ butun son bo'lsa, $a+bx^n=t^s$ almashtirish oqali ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi, bunda s p kasrning maxaji;
3) $\frac{m+1}{n}+p$ butun son bo'lsa, $a+bx^{-n}=t^s$ almashtirish oqali ratsional funksiyaning integraliga keltiriladi.

1-misol. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}dx$ integral topilsin.

Yechish. $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}{\sqrt[3]{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}dx$ ko'rinishda yozib olsak,

$m=-\frac{1}{3}, \ n=\frac{2}{3}, \ p=\frac{1}{2}$ bo'lganligidan $\frac{m+1}{n}=1$ bo'ladi va $1+x^{\frac{2}{3}}$=t^2 almashtirish olsak,

$\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=tdt, \ x^{-\frac{1}{3}}=3tdt\ \frac{2}{3}$ va

$$\int x^{-\frac{1}{3}}(1+x^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}dx = 3\int t^2 dt = t^3 + C = \sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}} + C.$$

$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$ ko'rinishdagi integralni topishda maxrajdagi kvadat uch hadni to'la kvadratga ajratilib, jadval integralga kelinadi.

2-misol. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}}$ integral topilsin.

Yechish. $x^2+6x+10$= (x+3)^2+1 bo'gani uchun x+3 =t deb olsak,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+10}} = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2+1}} = \ln\left|t+\sqrt{t^2+1}\right| + C = \ln\left|\, x+3+\sqrt{(x+3)^2+1}\right| + C.$$

Trigonometrik funksiyalarni integrallash

Biz $\int R(sinx$,cosx)dx ko'rinishdagi integrallarni qaraymiz.

Bunday integrallar t=tg$\frac{x}{2}$ (-π < x<) almashtirish yordamida ratsional funksiyaning integraliga olib kelinadi.

sin$x$ va cos$x$ ni tg$\frac{x}{2}$ orqali ifodalaymiz:

$$\sin x = \frac{2\mathrm{tg}\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \ x=2\mathrm{arctg}t, \ dx = \frac{2dt}{1+t^2}.$$

Bularga asosan

$$\int R(sinx, \cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2dt}{1+t^2} = \int R_1(t)dt.$$

1-misol. $\int \frac{dx}{cosx}$ integral topilsin .

Yechish. t=tg$\frac{x}{2}$ almashtirish va yuqorida topilganlarga asosan

$$\int \frac{dx}{cosx} = \int \frac{1+t^2}{1-t^2}\cdot\frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = -2\int \frac{dt}{t^2-1} = -\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right| + c = -\ln\left|\frac{\mathrm{tg}\frac{x}{2}-1}{\mathrm{tg}\frac{x}{2}+1}\right| + c.$$

Agar R(u,v) funksiya u yoki v o'zgaruvchilar bo'yicha juft yoki toqligiga bog'liq holda integralni ratsional funksiya integraliga kelirishda boshqa almashtirishlardan ham foydalanish mumkin.

$R(u,v)$ - surat va maxraji ko'p had bo'lgan kasr ifoda bo'lsa, va

$R(-u,v) = -R(u,v)$ bo'lsa, $\int R(\sin x, \cos x)dx$ integral $t = \cos x$ almashtirish yordamida ratsional funksiya integraliga olib kelinadi.

2-misol. $\int \frac{sin^3 x}{cos^2 x}$dx integralni toping.

Yechish. Bu holda $R(u,v) = \frac{u^3}{v^2}$ va $R(-u,v) = -R(u,v)$ bo'ganligii uchun $t = \cos x$ almashtirish olamiz: $dt = -\sin x dx$ va $\sin^2 x = 1 - t^2$ bo'lgan uchun

$$\int\frac{\sin^3 x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{\sin^2 x\sin xdx}{\cos^2 x}=\int\frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}\sin xdx=\int\frac{1-t^2}{t^2}(-dt)=$$
$$=-\int\frac{1}{t^2}dt+\int dt=\frac{1}{t}+t+C=\frac{1}{\cos x}+\cos x+C.$$

$\int\sin^m x\cos^n xdx$ korinishdagi integrallarni topish masalasiga to'xtalamiz. m va n sonlardan biri toq bo'lsa, yuqoridagi integral ratsional funksiya integraliga keltiriladi.

3-misol. $\int\sin^3 x\cos^4 xdx$ integral topilsin.

Yechish. $t=\sin x$ almashtirish va $\sin xdx=-d(\cos x)$, $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ ekanligidan

$$\int\sin^3 x\cos^4 xdx=\int\sin^2 x\cos^4 x\sin xdx=\int(1-\cos^2 x)\cos^4 x(-d\cos x)=$$
$$=-\int(1-t^2)t^4dt=-\int(t^4-t^6)dt=-\frac{t^5}{5}+\frac{t^7}{7}+C=-\frac{\cos^5 x}{5}+\frac{\cos^7 x}{7}+C.$$

Mavzuga doir nazorat savollari va topshiriqlar

1.Boshlang'ich funksiyaning ta`rifini keltiring?

2.Aniqmas integralning xossalarini sanab o'ting?

3.Integral jadvalini yozib chiqing?

4.Aniqmas integralda o'zgaruvchlarni almashtirish va bo'laklab integrallasl fomullarini yozing va ularga misollar yechib ko'ring?

5. Qanday kasr funksiyalarga to'g'ri kasr to ratsional funksiya deyiladi?

6. Noto'g'ri kasr ratsional funksiyalarni integrallash, to'g'ri kasr ratsional funksiyalarni integrallashga qanday keltiriladi ?

7. Sodda kasr ratsional funksiya deb qanday funksiyaga aytiladi ?

8. Sodda kasr ratsional funksiya qanday integrallanadi ?

9. Aniqmas koeffitsentlar usulini tushuntirib bering ?

10. Qanday ko'rinishdagi funksiyalar sinfiga irratsional funksiyalar deyiladi ?

11. Irratsional funksiyalal qanday integrallanadi ?

12. Qanday ko'rinishdagi funksiyalar sinfiga trigonometrik funksiyalar deyiladi ?

13.Trigonometrik funksiyalal qanday integrallanadi ?

Quyidagi integrallar topilsin [1-8].

1. $\int \sqrt[3]{x}$dx. [$\frac{3x^{4/3}}{4}$+C .]

2. $\int \frac{dx}{x^5}$. [$-\frac{1}{6\sqrt[6]{x}}$ +C.]

3. $\int (x^5 - 4x^3 + x - 1)dx$. [$\frac{x^6}{6}$ - x^4+ $\frac{x^2}{2}$-x+C .]

4. $\int \frac{x^2+3}{x^2-1}$dx. [x+2ln|$\frac{x-1}{x+1}$|+C .]

5. $\int \frac{(2\sqrt{x}-3x)^2}{5x}$dx. [0,8x-1,6x$\sqrt{x}$ +0,9x^2+C.]

6. $\int x^2(1+2x)dx$. [$x^3(\frac{x}{2}+\frac{1}{3})$ +C .]

7. $\int \frac{cosx}{\sqrt{sinx}}$dx . [2$\sqrt{\text{sinx}}$ +C .]

8. $\int \frac{dx}{x^2+9x-35}$. [$\frac{1}{15}$ ln|$\frac{x-3}{x+12}$|.]

Quyidagi integrallar o'zgaruvchilarni almashtirish usuli bilan topilsin [9- 13].

9. $\int \frac{x}{2-3x}$dx . [$\frac{1}{9}$(2-3x-2ln|2-3x|)+C .]

10. $\int \frac{xdx}{x^2+1}$. [$\frac{1}{2}$ ln|x^2+1|+C .]

11. $\int x\sqrt{3-5x}$dx . [$\frac{2}{125}$ (5x+2)(5x+3)$\sqrt{3-5x}$ +C .]

12. $\int \frac{e^x}{2+e^x}$dx . [ln(2+e^x) +C .]

13. $\int \frac{cosx}{\sqrt{1+sin^2x}}$dx . [ln(sinx+$\sqrt{1+sin^2x}$)+ C .]

Quyidagi integrallar bo'laklab integrallash usuli bilan topilsin [14- 17].

14. $\int$ xlnxdx . [$\frac{x^2}{2}$ lnx - $\frac{x^2}{4}$ +C .]

15. $\int$ xcosxdx . [x sinx +cosx +C .]

16. $\int x\,2^{-x}dx$. [$-\frac{x\ln 2+1}{2^x \ln^2 2}$ +C .]

17. $\int x\ln\frac{1+x}{1-x}dx$. [x-$\frac{1-x^2}{2}\ln(\frac{1+x}{1-x})$ +C .]

Quyidagi kasr-ratsional funksiyalarning integrallari topilsin [18- 20].

18. $\int \frac{dx}{x^2+x-2}$dx . [$\frac{1}{3}\ln\left|\frac{x-1}{x+2}\right|$+C.]

19. $\int \frac{dx}{5x^2-7}$. [$\frac{1}{2\sqrt{35}}\ln\left|\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}x}{\sqrt{7}+\sqrt{5}x}\right|$+C.]

20. $\int \frac{x^2-5x+9}{(x-2)(x-3)}$dx. [x+3ln|x-3|-3ln|x-2|+C.]

Mavzuga doir testlar

1. f(x) funksiya uchun F(x) funksiya boshlang'ich funksiya deyiladi,agar:

A) $F'(x)=f(x)$, B) $f'(x)=F(x)$, C) F(x)=2f(x), D) f(x)=F(x)/2.

2. Agar f(x) funksiya F(x) funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, … ham boshlang'ich funksiya bo'ladi.

A) F(x)+C, B) F(x)-C, C) 2F(x), D) $\frac{1}{2}$ F(x) .

3. $y=3x^2$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya:

A) x^3 +C, B) 6x+C, C) $3x^3$+C, D) x^2+C .

4. $y=4x^3$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya:

A) x^4+C, B) $12x^2$+C, C) $4x^4$+C, D) x^3+C.

5. ln|x|+C,(x≠0) qanday funksiyaning boshlang'ich funksiyasi:

A) 1/x, B) C/x, C) Cx, D)x/C.

6. sinx funksiyaning boshlang'ichfunksiyasi:

A)-cosx+C, B) cosx+C, C) 2cosx+C, D) Ccosx.

7. cosx funksiyaning boshlang'ich funksiyasi:

A) sinx+C, B) -sinx+C, C) cosx+C, D) Csinx.

8. $1/\cos^2(x)$ +C qanday funksiyaning boshlang'ich funksiyasi?

A) tgx, B)ctgx, C) 1/cosx, D) 1/tgx.

9. $1/\sin^2 x + C$ qanday funksiyaning boshlang'ich funksiyasi?

A) –ctgx, B) ctgx , C) tgx, D) –tgx .

10. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ =?

A) arcsin$\frac{x}{a}$ +C, B) $\frac{1}{a}$arcsin$\frac{x}{a}$ +C, C) $\frac{1}{a}$arcsinx +C, D) $\frac{1}{a}$arcsin(ax) +C.

11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2}$ =?

A) $\frac{1}{a}$arctg$\frac{x}{a}$ +C, B) $\mathrm{arctg}\frac{x}{a} + C$, C) $\frac{1}{a}$arctgx +C, D) arctgx +C.

12.Quyidagilardan qaysilari to'g'ri:

A) $\int Cf(x)dx = C\int f(x)dx$, $B)\ \int (f(x) + g(x))dx = f(x)dx + \int g(x)dx,$

$C) \int Cf(x)\,dx \ = 2C\int f(x)dx$, D) $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx.$

13. Quyidagilardan qaysilari to'g'ri:

A) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)dx$,B) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$, C) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = df(x)$,

D) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f'(x)$

14. To'g'ri tenglikni aniqlang: $\int dF(x) = F(x) + C, (C - const).$

A) $\int dF(x) = F(x) + C, (C - const)$, B) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f'(x)$,

C) $\int dF(x) = F'(x) + C, (C - const)$, D) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)$.

15. Quyidagilardan qaysilari to'g'ri:

A) $(\int f(x)dx)' = f(x)dx$, $B)\ \int \left(f(x) - g(x)\right)dx = f(x)dx - \int g(x)dx,$

$C) \int Cf(x)\,dx \ = C^2\int f(x)dx$, D) $\int f(x)g(x)dx = \int f(x)dx \int g(x)dx.$

16. Agar $x=\varphi(t)$ bo'lsa, $\int f(x)dx$ =?

A) $\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$, B) $\int f(t)\varphi'(t)dt$,

C) $\int f[\varphi(t)]\,\varphi(t)dt$, D) $\int f[\varphi(t)]dt$.

17. Quyidagilardan qaysilari to'g'ri:

A) $\int u(x)d\upsilon(x) = u(x)\upsilon(x) - \int \upsilon(x)du(x)$

B) $\int v(x)du(x) = u(x)v(x) - \int u(x)dv(x)$,

C) $\int v(x)du(x) = \int u(x)dv(x)$,

D) $\int u(x)dv(x)=u(x)-\int v(x)dx$.

18. $\int x^m(a+bx^n)^p$ integralni topishda, agar $\frac{m+1}{n}$ butun son bo'lsa,. . . almashtirish olinadi:

A) $a+bx^n= t^s$ (s p kasrning maxaji), B) $a+bx^n= t^n$,

C) $a+bx^n= t^{s+1}$, D) $a+bx^p= t^s$ (s p kasrning maxaji).

19. $\int R(sinx$,cosx)dx ko'rinishdagi integrallarni topishda . . . almashtirish olinadi:

A) $t=tg\frac{x}{2}$ $(-\pi < x< \pi)$, B) $t=\sin\frac{x}{2}$ $(-\pi < x< \pi)$,

C) $t=\cos\frac{x}{2}$ $(-\pi < x< \pi)$, D) t=tgx $(0 < x< \pi/2)$.

20. $\int \sin^3 x \cos^4 x dx$ integralni topishda . . . almashtirish olinadi:

A) t=sinx, B) t=cosx, C) t= tgx, D) x=sint .

Aniq integral

Aniq integralning ta'rifi

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan bo'lsin. Bu kesmani $x_0, x_1, ..., x_n$ $(a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b)$ nuqtalar yordamida n ta bo'laklarga bo'lamiz. Har bir $[x_{k-1}, x_k]$ $(k = 1, 2, ..., n)$ bo'lakchalardan ixtiyoriy ξ_k nuqtalarni tanlab olamiz va har bir bunday bo'lakchalarning uzunliklari

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

$(k = 1, 2, ..., n)$ bo'ladi.

Quyidagi yig'dini tuzib olamiz:

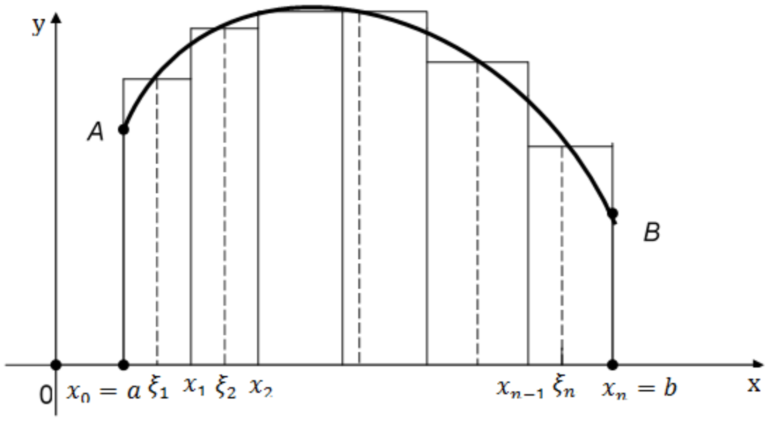
$$f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + ... + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k \, . \qquad (1)$$

Bu yig'indiga $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesma bo'yicha **integral yig'indisi** deyiladi.

(1) integral yigindining geometrik ma`nosi ustida to'xtalamiz.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada manfiy bo'lmasin.

Bu holda, (1) integral yig'indining har bir $f(\xi_i)\Delta x_i$ qo'shiluvchisi tomonlari $f(\xi_i)$ va Δx_i bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning yuzi S_i ga teng bo'ladi $(i = 1, 2, ..., n)$. Boshqacha qilib, aytganda $S_i - [x_{k-1}, x_k]$ kesmada $y = f(\xi_i)$ to'g'ri chiziq ostidagi yuza bo'ladi.



24-chizma

Shuning ham, (1) yig'indining qiymati $S_1 + S_2 + ... + S_n$ yuzalar yig'indisiga teng bo'ladi.

$\max_k \Delta x_k$ bilan $[x_{k-1}, x_k]$ kesmalardan eng kattasining uzunligini belgilaymiz.

Ta'rif. Agar $x_0, x_1, ..., x_n$ va $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ nuqtalarni tanlashga bog'liq bo'lmagan holda(1) integral yig'ndining $\max_k \Delta x_k \to 0$ da chekli limiti mavjud bo'lsa,bu limitga $y = f(x)$ funksiyaning $[a, b]$ kesmadagi **aniq integrali** deyiladi va $\int_a^b f(x)dx$ kabi belgilanadi. $x_n = b$ y

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max_k \Delta x_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

Bu holda $f(x)$ funksiya integrallanuvchi funksiya, a-integralning quyi chegarasi, b -yuqori chegarasi, $f(x)$- integral ostidagi fuvksiya, $f(x)dx$ -integral ostidagi ifoda deyiladi.

Aniq integralning xossalari

1. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

2. $\int_a^a f(x)dx = 0$.

3. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u istalgan$[\alpha, \beta] \subset [a,b]$ oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi.

4. Agar $f(x)$ funksiya $[a, c]$ ва $[c, b]$ oraliqlarda integrallanuvchi bo'lsa, u holda funksiya $[a, b]$ oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi va

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

formula o’rinli bo’ladi.

5. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo’lsa, u holda $C \cdot f(x)$ (C - const)funksiyaham shu oraliqda integrallanuvchi bo’ladi va

$$\int_a^b Cf(x)dx = C\int_a^b f(x)dx$$

formula o’rinli bo’ladi.

6. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo’lsa, u holda $f(x) \pm g(x)$ funksiyaham shu oraliqda integrallanuvchi bo’ladi va

$$\int_a^b \left[f(x) \pm g(x) \right] dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

formula o’rinli bo’ladi

1–natija. Agar $f_1(x),\ f_2(x), ...,\ f_n(n)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo’lsa, uholda

$$C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ...,+C_n f_n(x), (C_i = const, i = 1,2,..., n)$$

funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi va

$$\int_a^b [C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + ... + C_n f_n(x)]dx = C_1\int_a^b f_1(x)dx + C_2\int_a^b f_2(x)dx + ... + C_n\int_a^b f_n(x)dx$$

formulaga o’rinli bo’ladi.

7. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo’lsa, u holda $f(x) \cdot g(x)$ funksiyaham shu oraliqda integrallanuvchi bo’ladi.

2–natija. Agar $f(x)$ функция $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo’lsa, ixtiyoriy natural n uchun $[f(x)]^n$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo’ladi.

8. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo’lib, $\forall x \in [a, b]$ lar uchun $f(x) \geq 0$ bo’lsa, u holda $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, $(b > a)$ bo’ladi.

3–natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, $x \in [a, b]$ lar uchun $f(x) \leq g(x)$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda ushbu $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

9. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda $|f(x)|$ funksiya ham shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi va $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

10. Agar $[a, b]$ kesmada m≤ f(x)≤M bo'lsa,

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

11.(O'rta qiymat haqidagi teorema)

Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda berilgan va uzluksiz bo'lsa, u holda a va b orasida shunday ξ (a<ξ<b) nuqta topiladiki,

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lganligi uchun, bu oraliqdan olingan ixtiyoriy x uchun m≤ f(x) ≤ M o'rinli bo'ladi, bu yerda m va M lar funksiyaning mos ravishda $[a, b]$ kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari.

U holda 10-xossaga asosan $m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \leq M$ tengsizlikni olamiz. Funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lganligi uchun , ozining bu kesmadagi eng kichik va eng katta qiymatlari orasidagi itiyoriy qiymatni qabul qilishi mumkin.

Shuning uchun ham, jumladan, qandaydir $\xi \in [a, b]$ nuqta topiladuki,

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(\xi)$$

bo'ladi.

Bu esa teoremani isbotlaydi.

Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada integrallanuvchi bo'lsa, u itiyoriy $[a, x] \in [a, b]$ kesmada ham integrallanuvchi bo'ladi.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt .$$

12. Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'lsa, $\Phi(x)$ funksiya ham $[a, b]$ kesmada uzluksiz bo'ladi va

$$\Phi'(x) = \left(\int_a^x f(t)dt \right)' = f(x)$$

bo'ladi.

Teorema (Aniq integralning mavjudligi haqidagi teorema). Agar $y = f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, uning shu kesmada aniq integrali mavjud bo'ladi.

Nyuton – Leybnits formulasi

Teorema. $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz, $F(x)$ uning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda,

$$\int_\alpha^b f(x)dx = F(x)\Big|_\alpha^b = F(b) - F(\alpha)$$

o'rinli bo'ladi.

Bu formulaga Nyuton-Leybnits formulasi deyiladi va u aniq integralni hisoblashda asosiy vosita hisoblanadi.

Isboti. Faraz qilaylik, $F(x)$ – $f(x)$ funksiyaning qandaydir boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. U holda aniq integralning yuqorida keltirilgan 12-xossasiga aniqlangan $\Phi(x)$ ham $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi va shunday C soni topiladiki, $F(x) = \Phi(x) + C$ bo'ladi.

Boshlang'ich funksiyalar orttirmalar uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$F(b)-F(a)=(\Phi(b)+C)-(\Phi(a)+C)=\int_a^b f(x)dx-\int_a^a f(x)dx.$$

$\int_a^a f(x)dx=0$, ekanligini hisobga olsak, oxirgi tenglikdan Nyuton-Leybnits formulasining isboti kelib chiqadi.

1-misol. $\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$ integral hisoblansin.

Yechish. Aniq integralning xossalari va Nyuton –Leybnits formulasiga asosan:

$$\int_1^2 \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx=\int_1^2\left(\frac{1}{x^2}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx=\int_1^2 x^{-2}dx+\int_1^2 x^{-\frac{3}{2}}dx=x^{-1}\Big|_1^2+\frac{1}{\sqrt{x}}\Big|_1^2=\frac{1}{2}-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\frac{1}{\sqrt{2}}-1{,}5$$

2-misol. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$ integralni hisobsin.

Yechish.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}=\ln(x+\sqrt{1+x^2})\Big|_0^1=\ln(1+\sqrt{2})-ln1=\ln(1+\sqrt{2}).$$

Aniq integralni hisoblashning ba`zi usullari

1. O’zgaruvchining almashtirish usuli.

$\int_a^b f(x)dx$ integralda $x=\varphi(t)$ bo’lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

a) $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz, t o’zgaruvchi $[\alpha,\beta]$ kesmada o’zgarganda funksiya qiymatlari $[a,b]$ oraliqda o’zgaradi.

b) $\varphi(a)=a,\ \varphi(\beta)=b$ va $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega.

U holda,

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Bu formulaga aniq integralda o'zgaruvchilarni almashtirib integrallash formulasi deyiladi.

1-misol. $\int_1^3 (x+2)^4 dx$ integralni hisobsin.

Yechish. $x+2=t$ almashtirish olamiz.

U holda, $dx=dt,\ t_1=1+2=3,\ t_2=3+2=5$.

$$\int_1^3 (x+2)^4 dx=\int_3^5 t^4 dt=\frac{t^5}{5}\Big|_3^5=\frac{5^5}{5}-\frac{3^5}{5}=5^4-\frac{3^5}{5}=576.4.$$

2–misol. $\int_0^{\alpha} x^2\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx$ integralni hisoblang.

Yechish. $x=\alpha\sin t$ almashtirish olamiz.

Bu holda, $0=\alpha\sin t,\ t_1=0$, $\alpha=\alpha\sin t, t_2=\frac{\pi}{2}$.

$$\int_0^{\alpha} x^2\sqrt{\alpha^2-x^2}\,dx=\alpha^4\int_0^{\pi/2}\sin^2 t\cos^2 t\,dt=\frac{\alpha^4}{4}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\,dt=$$

$$\frac{\alpha^4}{4}\int_0^{\pi/2}\frac{1-\cos 4t}{2}dt=\frac{\alpha^4}{8}\left(t-\frac{\sin 4t}{4}\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi\alpha^4}{16}.$$

2. Bo'laklab integrallash usuli.

u(x) va υ(x) funksiyalar [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz u'(x) va υ'(x), hosilalarga ega bo'lsa,

$$\int_{\alpha}^{b} u(x)d\upsilon(x)=(u(x)\upsilon(x))\Big|_{\alpha}^{b}-\int_{\alpha}^{b}\upsilon(x)du(x)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Bu formulaga aniq integralda bo'laklab integrallash formulasi deb ataladi.

Bu formulaning qo'llanilishga doir quyidagi sodda misollarni qarab chiqamiz.

3-misol. $\int_1^2 \ln x\,dx$ integralni hisoblang.

Integral ostidagi ifodada u=lnx,dv=dx deb olamiz.

U holda $du = \frac{1}{x}dx,\ v = x$ bo’ladi.

Bo’1aklab integrallash formulasiga asosan :

$$\int_1^2 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{x}\cdot x dx = 2\ln 2 - x\Big|_1^2 = 2\ln 2 - 1 = \ln 4 - 1$$

4-misol. $\int_0^1 xe^x dx$ integralni hisobsin.

Yechish. Integral ostidagi ifodani *u*=*x*, *dv*= $e^x dx$ deb almashtiramiz.
U holda *du*=*dx*,*v*=e^x bo’ladi.
Bo’laklab integrallash formulasiga ko’ra:

$$\int_0^1 xe^x dx = xe^x\,|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = e - e + 1 = 1.$$

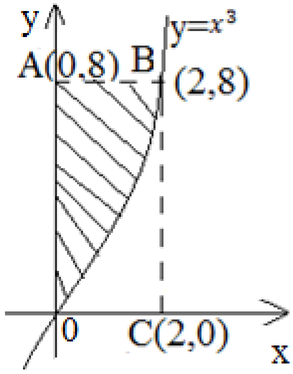
Aniq integralning yuzalarni hisoblashga tatbiqlari

Aniq integraldan foydalanish figuralarning yuzlarini hisoblashni ancha osonlashtiradi.

1. Agar y=f(x) funksiya [a,b] kesmada uzluksiz va f(x)>0 bo’lsa, u holda aniq integralning geometrik ma`nosiga ko’ra y=f(x),x=a,x=b,y=0 chiziqlari bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi S=$\int_a^b f(x)dx$ aniq integralga teng

bo’ladi.

1-misol. y= x^3 , x=0, y=8 chiziqlari bilan chegaralangan figuraning yuzi topilsin.



25-chizma

Chizmadan ko'rinadiki, topish talab qilingan egri chiziqli *OAB* uchburchakning yuzi:

$$S = S_{OABC} - S_{OBC}$$

ayirmaga teng bo'ladi va har bir yuza aniq integralning geometrik ma`nosiga asoslanib topiladi.

$$\begin{cases} y = 8 \\ y = x^3 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib, $y=8$ va $y=x^3$ chiziqlarining kesishish nuqtasi (2; 8) ni topamiz.

U holda $S_{OABC}=2\cdot 8=16$ yoki $S_{OABC}=\int_0^2 8dx = 8\Big|_0^2 = 16$

$$S_{OBC} = \int_0^2 x^3 dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_0^2 = 4 - 0 = 4$$

Demak, S=16-4=12 (kv.birlik).

2. Agar $y = f(x)$ funksiya [a,b] uzluksiz va musbat bo'lmasa, u holda $y = f(x)$, *x*=*a*, *x*=*b* va *OX* o'qi bilan chegaralangan figuraning yuzi

$$S = \int_\alpha^b (-f(x))dx = -\int_\alpha^b (f(x))dx$$

formula orqali topiladi.

3. Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya [a, b] kesmada uzluksiz va bu kesmaning turli qismlarida turli ishorali qiymatlar qabul qilsin.

Bu holda, turli qismlarda mos rabishda 1) yoki 2) hollarni qo'llagan holda yuza topiladi.

4. Quyidagi teorema tekis figuralarning yuzlarini topishda muhim o'rin tutadi.

Teorema.[a,b] kesmada uzluksiz va $f_2(x) \geq f_1(x)$ bo'lgan $y = f_1(x)$ va $y=f_2(x)$ funksiyalar berilgan bo'lsin. U holda [a,b] kesmada $y = f_1(x)$ va $y=f_2(x)$ chiziqlari bilan chegaralangan figuraning yuzi

$$S = \int_a^b \left(f_2(x) - f_1(x)\right)dx \text{ S=}$$

formula bilan topiladi.

Namuna uchun, teoremaning isbotini $f_2(x) \geq f_1(x)$, $f_2(x) \geq 0$, $f_1(x) \leq 0$ bo'lganda, grafikaviy usulda namoyish qilamiz.

$$S = S_{aABb} + S_{aCDb} = \int_a^b f_2(x)dx + \left(-\int_a^b f_1(x)\right)dx) =$$

$$= \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx \; .$$

Aniq integralning ba`zi iqtisodiy va biologik tatbiqlar haqida

I. Biz hosilaning iqtisodiy ma`nosi sifatida ishlab chiqarish hajmidan t vaqt bo'yicha hosila t momentdagi mehnat unumdorligini berishiga ishonch hosil qilgan edik.

Agar f(t) t momentdagi mehnat unumdorligi bo'lsa, $\int_0^T f(t)dt$ integral [0,T] vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini ifodalaydi.

II. Agar populyatsiya uchun sharoit qulay bo'lsa, tug'ilish soni o'lish sonidan ko'p bo'ladi,ya`ni vaqt o'tishi bilan popuyatsiya soni o'sadi.

Bir birlik v aqt oralig'ida belgilar sonining oshishiga popuyatsiyaning o'sish tezligi deb ataymiz. Bu tezlikni $v = v(t)$ bilan belgilaymiz.

Agar $v(t)$ ma`lum bo'lsa, u holda t_0 dan T gacha vaqt oralig'da populyatsiya sonining qancha o'zgarishini aniqlash mumkin.

$v(t)$ t momentdagi populyatsiya soni N(t) dan olingan hosilaga teng bo'ladi.Demak,populyatsiya soni $N(t)$ populyatsiya tezligi $v(t)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi.

Shuning uchun

$$N(T) - N(t_0) = \int_{t_0}^{T} v(t)dt$$

Oziq-ovqat zahiralari yetarli bo'lganda populyatsiyaning osish tezligi eksponentsial bo'ladi,yani $v(t)=ae^{kt}$.

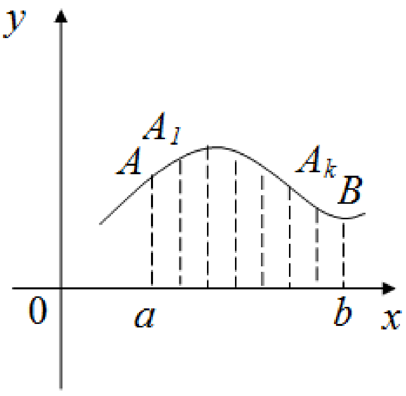
U holda $N(T)=N(t_0)+a\int_{t_0}^{T} e^{kt}\,dt = N(t_0) + \frac{a}{k}e^{kt}|_{t_0}^{T} = N(t_0) + \frac{a}{t}(e^{kT}-e^{kt_0})$.

Bu formula bilan masalan, penitsilin ajaratib chiqaruvchi o'stiriluvchi mog'orlangan zamburug'lar sonini topish mumkin.

Yoy uzunligini hisoblash

$y = f(x)$) funksiya [a,b] кесмада aniqlangan va uzluksiz bo'lsin.

[a,b] kesmani x_0 ,x_1,x_2,…,x_n ($a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$) nuqtalar bilan n ta bo'lakka bo'lamiz. Bu nuqtalardan Oy o'qiga papallel chiziqla o'tkazib, ularni $y = f(x)$ funksiya grafigi bilan kesishguncha davom ettiramiz. Funksiya grafikning bu qismi $\breve{AB}$ egri chiziq-yoyni ifodalasin. Kesishish nuqtalarini A_k (k=0,1,2,…n-i,n) bo'lsin. Bu nuqtalarning koordinatalari (x_k, f(x_k)) bo'lsin: $A_k(x_k, f(x_k))$.



26-chizma

$\breve{AB}$ yoydagi bu nuqtalarni to'g'ri chizig kesmalari yordamida birlashtiramiz va bu yoyga chizilgan siniq chiziqni hosil qilamiz.

Ikki nuqta orasidagi masofani topish formulasidan foydalanib siniq chiziq perimetini topamiz:

$$L=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(f(x_1)-f(x_0))^2}+\sqrt{(x_2-x_1)^2+\left(f(x_2)-f(x_1)\right)^2}$$

$$+\ldots+\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}+\ldots+$$

$$\sqrt{(x_n-x_{n-1})^2+(f(x_n)-f(x_{n-1}))^2}=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-i}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}\ .$$

$\lambda=\max\limits_k\{\Delta x_k\}$ deb belgilaymiz.

1-ta`rif. $\breve{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq perimetri

$$L=\sum_{k=0}^{n-i}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}$$

$\lambda\to 0$ da chekli limitga ega bo'lsa, bu limitga $\breve{AB}$ yoy uzunligi deyiladi va *l* bilan belgilanadi.

Demak,

$$l=\lim_{\lambda\to 0} L. \tag{1}$$

Faraz qilaylik f(x) funksiya [a,b] kesmada uzluksiz f$'$(x) hosilaga ega bo'sin.

Bu holda $[x_k,x_{k+1}]$ kesmada $f(x)$ funksiya Lagranj teoremasining shartlarini qanoatlantiradi, shuning uchun ham

$$f(x_{k+1})-f(x_k)=f'(\xi_k)(x_{k+1}-x_k)\ (x_k<\xi_k<x_{k+1})\ .$$

Buni ko'ra $\overset{\smile}{AB}$ yoyga chizilgan siniq chiziq perimetri:

$$L=\sum_{k=0}^{n-i}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+(f(x_{k+1})-f(x_k))^2}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-i}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2+f'^2(\xi_k)\,(x_{k+1}-x_k)^2}=$$

$$\sum_{k=0}^{n-i}\sqrt{(x_{k+1}-x_k)^2[1+f'^2(\xi_k)]}=\sum_{k=0}^{n-i}\sqrt{1++f'^2(\xi_k)}\,(x_{k+1}-x_k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n-i}\sqrt{1++f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k. \qquad (2)$$

$f(x)$ funksiya [a,b] kesmada uzlujsiz hosilaga ega bo'lganligi uchun $\sqrt{1++f'^2(x)}$ funksiya ham uzluksiz bo'ladi.

Shuning uchun

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=0}^{n-i}\sqrt{1++f'^2(\xi_k)}\,\Delta x_k=\int_a^b\sqrt{1++f'^2(x)}\,dx. \qquad (3)$$

(1),(2) va (3) dan yoy uzunligini topish uchun quyidagi formulaga ega bo'lamiz: $l=\int_a^b\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$. (4)

1-misol. $f(x)=x^{3/2}$ $(0\le x\le 2)$ funksiya grafigi tasvirlangan yoy uzunligi topilsin.

Yechish. $f'(x)=\frac{3}{2}2x^{1/2}$, a=0, b=2 bo'lganligi uchun (4) formulaga ko'ra

$$l=\int_0^2\sqrt{1+\frac{9}{4}x}\,dx=\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\left(1+\frac{9}{4}x\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{8}{27}\left(\frac{11}{2}\sqrt{\frac{11}{2}}-1\right).$$

Agar egri chiziq parametrik tenglamalari

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

bilan berilgan bo'lib, x(t) va y(t) –uzluksiz,differensiallanuchi funksiyalar bo'lsalar, t parametrning t_1 dan t_2 gacha o'zgarishiga mos yoy uzunligi

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{(x')^2+(y')^2}\,dt$$

formula bilan hisoblanadi.

Agar silliq egri chiziq qutb koordinatalaridagi tenglamalsi $r=r(\varphi),\ (\alpha\le\varphi\le\beta)$ bilan berilgan bo'lsa, yoy uzunligi quyidagi integralga teng:

$$l=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{r^2+(r')^2}\,d\varphi \quad .$$

2-misol. r=$\sin^3(\varphi/3)$ $(0\leq \varphi\leq\pi)$ egri chiziq yoyining uzunligi topilsin.

Yechish. $r'=\sin^2(\varphi/3)\cos(\varphi/3)$ bo'lganligi uchun

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^6\frac{\varphi}{3}+\left(\sin^2\left(\frac{\varphi}{3}\right)\cos\left(\frac{\varphi}{3}\right)\right)^2}\,d\varphi=\int_0^{\pi}\sin^2\frac{\varphi}{3}d\varphi=$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos\frac{2\varphi}{3}\,d\varphi=\frac{1}{2}(\varphi-\frac{3}{2}\sin\frac{2\varphi}{3})\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2}(\pi+\frac{3\sqrt{3}}{4}).$$

Aylanma jismlar hajmlarini va sirtining yuzini hisoblash

Aniq integraldan aylanma jismlarning hajmini hisoblashda ham foydalanish mumkin.

Masalan, y=f(x) , x=a, x=b, y=0 chiziqlari bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bolgan jism hajmi

$$V_x=\pi\int_a^b f^2(x)dx \qquad (1)$$

ga teng.

$x=\varphi(y),\ y=c,\ y=d,\ x=0$ chiziqlar bilan chegaralangan figuraning Oy o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmi

$$V_y=\pi\int_c^d x^2dy=\pi\int_c^d\varphi^2(y)dy \qquad (2)$$

formula bilan hisoblanadi.

1-misol. $y^2=3x$ parabola, $x=2$ to' chiziq va Ox o'qi bilan chegaralangan figurani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning jajmi hisoblansin.

Yechish. a=0, b=2 bo'ganligi uchun (1) formulaga ko'ra

$$V_x=\pi\int_0^2 y^2dx=\pi\int_0^2 3xdx=\frac{3}{2}\pi x^2\Big|_0^2=\frac{3}{2}\pi(2^2-0^2)=6\pi \text{ (kub birlik).}$$

2-misol. y=e^{-x}, y=0, x=0, x=1 chiziqlari bilan chegaralangan figurani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning hajmi topilsin.

Yechish. Yuqoridagi formulaga asosan izlanayotgan hajm

$$V_x = \pi\int_a^b \left(e^{-x}\right)^2 dx = \pi\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{1}{e^2}\right) \approx 1{,}36 \text{ (kub birlik).}$$

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, $\forall x \in [a,b]$ lar uchun $f(x) \geq 0$ bo'lsin. Funksiya grafigining $(a,\ f(a))$ va $(b,\ f(b))$ nuqtalari orasidagi bo'lagi bo'lgan yoyni O*x* o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt aylanma sirt deyiladi.

Bunday sirtning yuzi

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1+(f'(x))^2}\, dx$$

formula yordamida topiladi.

Agar chiziq parametrik tenglamalari $x=x(t)$, $y=y(t)$ $(t_1 \leq t \leq t_2)$ bilan berilgan bo'lsa, u holda

$$S_x = 2\pi \int_{t_1}^{t_2} y\sqrt{(x'(t))^2 1+(y'(t))^2}\, dt$$

bo'ladi.

3-misol. y=sin2x $(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2})$ funksiya grafigi yoyini Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirt yuzi topilsin.

Yechish. $y' = 2\cos 2x$ bo'lganligi uchun yuqoridagi formulaga asosan:

$$S_x = 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x\sqrt{1+4\cos^2 x}\, dx \text{ bo'ladi.}$$

$t=2\cos 2x$ almashtirishdan keyin

$$S_x = 2\pi \int_2^{-2} \sqrt{1+t^2}\ (-\tfrac{1}{4})dt = \frac{\pi}{2}\int_{-2}^{2}\sqrt{1+t^2}dt =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{t}{2}\sqrt{1+t^2} + \frac{1}{2}\ln(t+\sqrt{1+t^2})\right]\Big|_{-2}^{2} = \frac{\pi}{2}\left[2\sqrt{5} + \ln(\sqrt{5}+2\right] .$$

Statik momentlar va og'irlik markazining koordinatalarini topish

Statik momentlar

Moddiy nuqta deganda, o'lchami yetarli dararajada kichik va massaga ega bo'lgan jism tushuniladi.

1-ta`rif. xOy tekislikda massalari $m_1, m_2, ..., m_n$ bo'lgan $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), ..., A_n(x_n, y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasi beilgan bo'lsin.

Bu sistemaning Ox o'qiga nisbatan **statik momenti** deb, nuqtalar massasi va ordinatalari ko'paytmalari yig'indisiga aytiladi va M_x kabi belgilanadi:

$$M_x = \sum_{k=1}^{n} m_k y_k. \tag{1}$$

Shu sistemaning Oy o'qiga nisbatan **statik momenti** deb, nuqtalar massasi va abstsisalari ko'paytmalari yig'indisiga aytiladi va M_y kabi belgilanadi:

$$M_y = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k. \tag{2}$$

Inertsiya momentlari

Tekislikda m massaga ega bo'lgan A moddiy nuqta berilgan bo'lib, bu nuqtadan biror l o'qqacha (yoki O nuqtagacha) bo'lgan masofa r ga teng bo'lsin.

Ushbu

$$J = mr^2$$

miqdorga A moddiy nuqtaning l o'qqa (O nuqtaga) nisbatan inertsiya momenti deyiladi.

Masalan, $A = A(x, y)$ moddiy nuqtaning koordinata o'qlari hamda koordinata boshiga nisbatan inertsiya momentlari mos rravishda quyidagicha aniqlanadi:

$$J_x = my^2 \;,\; J_y = mx^2 \;,\; J_0 = m\sqrt{x^2 + y^2} \quad . \tag{3}$$

Tekislikda massalari $m_1, m_2, ..., m_n$ bo'lgan $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), ..., A_n(x_n, y_n)$ moddiy nuqtalar sistemasining biror l o'qqa (O nuqtaga) nisbatan inertsiya momenti ushbu yig'indi bilan aniqlanadi:

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} m_k r_k^{\ 2}, \qquad (4)$$

bunda $r_k - A_k$ nuqtadan l o'qqacha (O nuqtagacha) bo'lgan masofa $(k=1,2,...,n)$. Xususan, moddiy nuqtalar sistemasining Ox va Oy o'qlariga nisbatan inertsiya momentlari :

$$J_{\ x} = \sum_{k=1}^{n} m_k\, y_k^2\ ,\ \ J_{\ y} = \sum_{k=1}^{n} m_k\, x_k^2\ \ . \qquad (5)$$

Faraz qilaylik, f(x) funksiya [a,b] kesmada uzluksiz hamda uzluksiz hosilaga ega bo'lsin. $y = f(x)$ egri chiziq $A\breve{B}$ yoyining statik momentlai quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$M_x = \int_a^b f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\ dx\ \ ,\ \mathrm{M}_y = \int_a^b x\sqrt{1+f'^2(x)}\ dx. \qquad (6)$$

Massaga ega bo'lgan $A\breve{B}$ egri chiziqning koordinata o'qlariga hamda koordinata boshiga nisbatan inertsiya momentlari esa, qyuidagi formulalar yordamida topiladi:

$$J_x = \int_a^b f^2(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx\ \ ,$$

$$J_y = \int_a^b x^2\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx\ \ ,$$

$$J_0 = \int_a^b (x^2 + f^2(x))\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx.$$

Xususan, $y = f(x)$ funksiya $x=a$, $x=b$, Ox o'qqi bilan chegaalangan egri chiziqli tapetsiyaning statik momentlari va inertsiya momentlari qyuidagi formulalar bilan topiladi:

$$\mathrm{M_x} = \frac{1}{2}\int_a^b y^2 dx\ ,\ \mathrm{M_y} = \frac{1}{2}\int_a^b xydx\ ,\ J_x = \frac{1}{3}\int_a^b y^3 dx\ ,\ J_y = \frac{1}{3}\int_a^b x^2 ydx\ .$$

1-misol. y= $\sqrt{r^2 - x^2}$ (-r$\leq x \leq r)$ yarim doiraning Ox o'qiga nisbatan static va inertsiya momentlari topilsin.

Yechish. Dastlab, Ox o'qiga nisbatan statik momentni topamiz:

$$y' = -x/\sqrt{r^2 - x^2}$$

bo'lgaligi uchun

$$M_x = \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \mathrm{r} \int_{-r}^{r} dx \ = 2\mathrm{r}^3 \ .$$

Ox o’qiga nisbatan inertsiya momenti:

$$J_x = \int_{-r}^{r} (r^2 - x^2) \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2}} dx = \mathrm{r} \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx = 2\mathrm{r} \int_{0}^{r} \sqrt{r^2 - x^2} dx \ .$$

x=rsint deb almashtirish olsak, *dx=rcostdt*, agar *x*=0 bo’lsa *t*=0, *x=r* bo’lsa, t=$\pi/2$ bo’ladi.

$$J_x = 2\mathrm{r} \int_{0}^{\pi/2} \sqrt{r^2 - x^2 \sin^2 t} dt = r^3 \int_{0}^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = r^3 [\mathrm{t} + \tfrac{1}{2} \mathrm{sint}] \Big| = \frac{\pi r^3}{2} \ .$$

Og’irlik markazining koordinatalarini topish

$y = f(x)$ (a$\leq x \leq b$) bir jinsli tekis egri chiziq yoyining og’rlik markazining koordinatalari quyidagi formulalari orqali topiladi:

$$\bar{x} = \frac{1}{L} \int_a^b x dL \ , \qquad \bar{y} = \frac{1}{L} \int_a^b y dL \ ,$$

Bu yerda dL=$\sqrt{1 + y'^2}$ dx , L – yoy uzunligi.

Egri chiziqli trapetsiyaning og’rlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar bilan hisoblanadi:

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_a^b x dS = \frac{1}{S} \int_a^b xy dx \ , \ \bar{y} = \frac{1}{2S} \int_a^b y dS = \frac{1}{2S} \int_a^b y^2 dx \ ,$$

bu yerda *dS=ydx*, *S*- figuraning yuzi.

1-misol. *x=acost*, *y=bsint* ellipsning I-chorakdagi yoyi va koordinata o’qlari bilan chegaralangan figuraning og’irlik markazining koordinatalari topilsin.

Yechish. I-chorakda *x* 0 dan *a* gacha o’sganda *t* $\frac{\pi}{2}$ dan 0 gacha kamayagani uchun

$$\bar{x} = \frac{1}{S} \int_0^a xy dx = \frac{1}{S} \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} a cost \cdot \mathrm{bsint}(-\mathrm{asint}) dt = \frac{a^2 \ b}{S} \int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2 t cost dt = \frac{a^2 \ b}{3S} \ .$$

Ellipsning bu qismiga tegishli yuza S= πab bo’lganligi uchun

$$\bar{x} = (4a^2 \ b)/(3\pi ab) = (4\mathrm{a})/(3\pi).$$

Endi og’irlik markazining ordinatasini topamiz:

$\bar{y}=\frac{1}{2S}\int_a^b y^2dx=\frac{1}{2S}\int_{\frac{\pi}{2}}^0 b^2\ sin^2t(-asint)dt=\frac{2ab^2}{\pi ab}\int_{\frac{\pi}{2}}^0(1-t)d(cost)dt=\frac{4b}{3\pi}$.

Demak, $\bar{x}$= (4a)/(3π) , $\bar{y}$= 4b/(3π)

Aylanma jismlar hajmlarini va sirtining yuzini hisoblashda quyidagi Gul`den teoremalaridan foydalanish mumkin:

1-teorema. Tekis egri chiziq yoyini o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan sirtning (shu chiziq tekisligida yotuvchi va u bilan kesishmaydigan) yuzi egri chiziq yoyi uzunligi va markazi yoy og'irlik markazida bo'lgan tashqi chizilgan aylana uzunligi ko'paytmasiga teng.

2-teorema. Tekis figurani o'q atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jismning (uni kesmaydigan va shu figura tekisligida yotuvchi) hajmi figura yuzi va va markazi figura og'irlik markazida bo'lgan tashqi chizilgan aylana uzunligi ko'paytmasiga teng.

2-misol. $(x-a)^2$+ $(y-b)^2\le r^2$ (a≥ r ,b≥) doirani Ox o'qi atrofida aylantirishdan bo'lgan sirtnig yuzi va jismi hajmi topilsin.

Yechish. Doira Ox o'qi atrofida aylantirilsa, doiraning og'irlik markazi aylantirish o'qidan b masofada bo'ladi, shuning uchun ham, Gol`denning 1-teoremasiga asosan sirt yuzi

$$S_x = 2\pi r \cdot 2\pi b = 4\pi br,$$

Gol`denning 2-teoremasiga asosan jism hajmi esa,

$$V_x = \pi r^2\cdot 2\pi b = 2\pi r^2 b$$

ga teng bo'ladi.

Mavzuga doir nazorat savollari va topshiriqlar

1.Aniq integralga tushunchasiga olib keluvchi qanday masalarni bilasiz ?

2. y=f(x) uchun [a,b] kesmada integral yig'indi deganda qanday yig'indiga aytiladi ?

3. Aniq integral ta'rifini keltiring?

4. Aniq integralning geometrik ma`nosini tushuntirib bering?

5. Aniq integralning xossalarini sanab o'ting?

6. O'rta qiymat haqidagi teoremani isbotlang?

7. Nyuton-Leybnits formulasining isbotlang?

8. Aniq integralda o'zgaruvchlarni almashtirish va bo'laklab integrallasl fomullarini yozing va ularga misollar yechib ko'ring.

9. Aniq integral yordamida yuzalarni hisoblashga doir formulalarni keltiring?

10. Aniq integralning aylanma jism hajmi va sirtining yuzini hisoblashga tatbiqlari haqida nimalarni bilasiz ?

11. Tenglamalari turli ko'rinishda bo'lgan egri chiziq yoyining uzunligi uchun formulalarni keltirib chiqaring ?

12. Statik momentlar va og'irlik markazining koordinatalari haqida nimalarni bilasiz ?

Quyidagi aniq integrallar hisoblansin [1-5].

1. $\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx$. [$\frac{2}{3}$.]

2. $\int_{-1}^{0} e^{-2x}\,dx$. [$\frac{e^2-1}{2}$.]

3. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosxdx$. [1.]

4. $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$. [$\frac{\pi}{6}$.]

5. $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$. [$\frac{\pi}{6}$.]

Quyidagi aniq integrallar o'garuvchilarni almashtirish usul bilan hisoblansin [6-13].

6. $\int_0^1 \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}$. [1.]

7. $\int_0^{ln2} \sqrt{e^x-1}$dx . [$\frac{4-\pi}{2}$.]

8. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sin^2$xdx . [$\frac{\pi}{4}$.]

9. $\int_0^4 \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$dx . [$\frac{4}{3}$.]

10. $\int_2^8 \frac{dx}{x^2+6x+8}$dx . [0,5ln(1,25).]

11. $\int_{-2}^0 \frac{dx}{(1-2x)^3}$. [0,24.]

12. $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{cosx}{sin^3 x}$dx . [0,5.]

13. $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{sinx}{cos^4 x}$dx . [$\frac{7}{3}$.]

Quyidagi aniq integrallar bo’laklab integrallash usul bilan hisoblansin [14-20].

14. $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx$. [ln($\frac{4}{e}$) .]

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcosxdx$. [$\frac{\pi-2}{2}$.]

16. $\int_1^e \ln^2$xdx . [e^{-2} .]

17. $\int_1^8 \frac{xdx}{\sqrt{3x+1}}$. [8.]

18. $\int_0^{\ln 3}$ xe^{-x}dx . [1-$\frac{\ln(5e)}{5}$.]

19. $\int_1^e x^2 lnxdx$. [$\frac{2e^2+1}{9}$.]

20. $\int_1^2 (3-2x)e^{-3x}dx$. [$\frac{5e^{-6}}{9}$.]

Egri chiziq yoyining uzunligi topilsin [21-24].

21. y= lnsinx ($\frac{\pi}{4} \leq$x$\leq \frac{\pi}{2}$). [$\frac{ln3}{2}$.]

22. y=$\frac{x^2}{2}$ (0≤x ≤ 1). [0,5[$\sqrt{2}$ +ln(1+$\sqrt{2}$)]

23. x=t^3/3-t , y=t^2+2 (0≤x ≤ 3). [12.]

24. r=φ^2 ($0 \leq \varphi \leq \pi$). [((π^2+4)$\sqrt{\pi^2+4}$-8)/3 .]

Chiziq yoyini Ox o’qi atrofida aylantirishdan hosil bo’lgan sirtning yuzini toping [25- 26].

25. y=x^3 (0≤x ≤ 1/2). [61π /1728 .]

26. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ $[2\pi b(b+\frac{a^2}{a^2-b^2}\ arcsin\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$.]

27. x=t-sint , y=1-cost (Bir arkining aylanishidan hosil bo'lgan yuza). $[64\pi/3$.]

Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan figuraning og'irlik markazining koordinatalarini toping [28-30].

28. x=0, x= $\pi/2$, y=0 , y=cosx . $[\bar{x}=(\pi-2)/2 , \bar{y}=\pi/8$.]

29. y=4- x^2 , y=0 . $[\bar{x}=0 , \bar{y}=8/5$.]

30. y= 2x- x^2 , y=0. $[\bar{x}=1 , \bar{y}=2/5$.]

Mavzuga doir testlar

1.Quyidagi masalalarning qaysi birlari aniq integral tushunchasiga olib keladi:

A) Egri chiziqli trapesiya yuzi, B) [0,T] vaqt oralig'ida ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi, C) v tezlikda [0,t] vaqt oralig'ida bosib o'tilgan masofa, D) keltirilganlarning barchasi.

2. y=f(x) funksiya uchun integral yig'ndi:

A)$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$.,*B)*$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)dx_k$, $C)\ \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k)\,dx_k$,$D)\sum_{k=1}^{n} f(dx_k)$.

3. Agar [a,b] kesmada f(x) funksiya F(x) boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa:

A)$\int_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$, *B)*$\int_a^b f(x)dx = F(b)+F(a)$,

$C)\ \int_a^b f(x)dx = F(a)-F(b)$, D)$\int_a^b f(x)dx = F(b)F(a)$.

4. $\int_0^2 x^2$dx=?

A)$\frac{8}{3}$, B) 8 , C) $2\frac{1}{3}$, D) 4 .

5. y=x^3funksiyadan [0,1] kesma bo'yicha olingan aniq integral:

A) ¼, B) ½, C) ¾, D) 1.

6. $\int_0^1 \sqrt{x}$dx=?

A)$\frac{2}{3}$, B) $\frac{1}{3}$, C) $\frac{3}{2}$, D) 1 .

7. y=sinx funksiyadan [0,π] oraliq b o'yicha olingan aniq integral:

A) 2, B) -2, C) 1, D) 0.

8. $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}$ cosxdx=?

A) -1, B) 0, C) 1, D) -2.

8. Aniq integral yordamida …topish mumkin:

A) Yuzalarni, B)Aylanma jismlar hajmilarini, C) Mehnat unumdorligini, D)Populyatsiya tezligini.

9. Aniq integral yordamida …topish mumkin:

A) Harakat tezligini, B) Funksiya elastikligini,

C) Ishlab chiqarilgan mahsulot hajmini, D)Populyatsiya sonini.

10. To'g'ri munosabatlarni aniqlang:

$\int_a^a f(x)dx = 0,\ \ B)\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$

$C)\ \int_a^a f(x)dx = a,\ \ D)\int_a^b f(x)dx = 2\int_b^a f(x)dx.$

11. Agar [a,b] kesmada f(x)≤g(x) bo'lsa:

A) $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$, $B)\ \int_a^b f(x)dx > \int_a^b g(x)dx$,

C) $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$, D) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$.

12. $\int_a^b f(x)dx = ?$

A) $-\int_b^a f(x)dx$, B) $\int_b^a f(-x)dx$, C) $\int_a^b f(\sqrt{x})dx$, D) $\int_a^b f^{-1}(x)dx$.

13. [a,b] kesmada m≤f(x) $\le M$ bo'lsa, . . . tengsizlik o'rinli :

A) m $\le \int_a^b f(x)dx \le M$, B) m(b-a) $\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$,

C) m(b-a) $\le \int_a^b f(x)dx \le M$,

D) m(b-a) $\le \int_a^b f(x)dx \le M(a+b)$.

14. y=f(x) ,x=a, x=b va y=0 chiziqlari bilan chegailangan figuraning yuzi:

A) $\int_a^b f(x)dx$ $, B) -\int_a^b f(x)dx$,

C) $\int_0^b f(x)dx$, D) $\int_o^b f(x)dx$.

15. Agar f(x)≤0 bo'lsa, y=f(x) ,x=a, x=b va y=0 chiziqlari bilan chegailangan figuraning yuzi:

A) $\int_a^b f(x)dx$ $, B) -\int_a^b f(x)dx$,

C) $\int_0^a f(x)dx$, D) $\int_o^b f(x)dx$.

16. y=f_1(x) , y=f_2(x) (f_2(x)$\geq f_1(x)$), x=a, x=b chiziqlari bilan chegaralan figuraning yuzi:

A) $\int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$, B) $\int_b^a (f_2(x) - f_1(x))dx$,

C) $\int_0^a f_1(x)f_2(x)dx$, D) $\int_o^b (f_1(x) + f_2(x))dx$ .0

17. y=f(x) funksiyaning [a,b] kesmadagi aniq integrali mavjud, agar,. . . . bo'lsa: A) faqat [a,b] kesmada aniqlangan;

B) [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz; C) [a,b] kesmada o'suvchi; D) [a,b] kesmada kamayuvchi.

18. O'rta qiymat haqidagi teoremani ifodalovchi tengsizlikning o'ng tomoni($a<\xi<b$):

A) f(ξ)(b-a), B) f(ξ)(a-b),

C) f(a)(b-a) , D) f(b)(b-a).

19. Agar $\forall x \in$[a,b] uchun f(x)≥ 0 bo'lsa:

A) $\int_a^b f(x)dx > 0$, B) $\int_a^b f(x)dx \geq 0$,

C) $\int_a^b f(x)dx = 0$, D) $\int_0^b f(x)dx$ <0 .

20. $\left(\int_a^x f(t)dt\right)'_x$ =?

A) f(x) , B) f(a) , C) f(t) , D) af(x) .

21. $\int_a^a f(x)dx$ =?

A) 0 , B) f(a) , C) 1 , D) f(x) .

22. Agar f(x) va g(x) funksiyalar [a,b] kesmada integrallanuvchi bo'lsalar, . . . ham integrallanuvchi bo'ladi:

A) f(x)g(x) , B) f(x)+g(x) , C) $\frac{f(x)}{g(x)}$, D) $\frac{g(x)}{f(x)}$.

23. Agar f(x) funksiya [a,b] kesmada integrallanuvchi bo'lsa, . . . ham integrallanuvchi bo'ladi:

A) $[f(x)]^n$,n$\in N$, B) $\sqrt{f(x)}$, C) $\frac{1}{f(x)}$, D) $\sqrt[3]{f(x)}$.

24. y=f(x) ,x=a, x=b va y=0 chiziqlari bilan chegailangan figurani Ox o'qi atrofida aylantirishdan hosil bo'lgan jism hajmi V_x teng:

A) $\int_a^b f^2(x)dx$, $B)\ \pi \int_a^b f^2(x)dx$,

C) $\int_0^b f(x)dx$, D) $\int_o^b f(x)dx$.

25. Agar f(t), t momentdagi mehnat unumdorligi bo'lsa, [0,T] vaqt oralig'idagi ishlab chiqarish hajmi:

A) $\int_0^T f(t)dt$, $B)\ \int_0^T f^2(t)dt$,

C) $\int_0^T \sqrt{f(t)}dt$, D) $\int_0^{T/2} f(t)dt$.

26. y=x^2 ,x=1, x=2 chiziqlar va Ox o'qi bilan chegaralangan figuraning yuzi:

A) $\frac{8}{3}$, B) $\frac{7}{3}$, C) 3 , D) $\frac{5}{3}$.

Sonli qatorlar

Sonli qatorlar va ularning yaqinlashish alomatlari

1-ta`rif. Qo'shish amali bilan birlashtirilgan $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ cheksiz sonli ketma – ketlikka ***sonli qator*** deyiladi :

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \; . \qquad (1)$$

Bunda $u_1, u_2, u_3, \ldots, u_n, \ldots$ – ***sonli qator hadlari***, u_n esa uning ***umumiy*** yoki n-***hadi*** deyiladi.

Bunda har qanday natural n soni uchun (1) sonli qatorning u_n umumiy hadi ma'lum deb hisoblanadi. Masalan, umumiy hadi

$$u_n = (-1)^n \frac{n}{2^n}, \quad n = 1,2,3,\cdots$$

formula bilan ifodalangan sonli qator

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} - \frac{3}{2^3} + \frac{4}{2^4} - \cdots$$

ko'rinishda bo'ladi.

2-ta`rif. Berilgan (1) sonli qatorning dastlabki n ta hadidan tuzilgan

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k \; , \quad n = 1,2,3,\cdots \; , \qquad (2)$$

yig'indigo qatorning ***n – xususiy* (qismiy) *yig'indisi*** deyiladi.

Sonli qatorning n –xususiy yig'indilari S_n (n=1,2,3, ···)

$S_1 = u_1$, $S_2 = u_1 + u_2$, $S_3 = u_1 + u_2 + u_3$, · · · , $S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n$, · · ·

lar sonli ketma – ketlikni tashkil etadi. Demak, uning limitini qarash mumkin.

3-ta`rif.** Agar $n \to \infty$ da (1) qatorning xususiy yig'indilar ketma – ketligi $S_n$ ($n$=1,2,3, ··· ) chekli limitga ega bo'lsa,ya`ni $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, $|S| < \infty$, bo'lsa, u holda (1) sonli qator ***yaqinlashuvchi*, S esa uning ***yig'indisi*** deyiladi.

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \equiv \sum_{k=1}^{\infty} u_k = S \; .$$

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$ yoki mavjud bo‘lmasa, (1) sonli qator ***uzoqlashuvchi*** deyiladi.

Masalan,

$$b + bq + bq^2 + \cdots + bq^{n-1} + \ldots \tag{3}$$

geometrik qatorning S_n xususiy yig‘indilarini $q\neq 1$ holda

$$S_n = \frac{b - bq^n}{1-q} = \frac{b}{1-q}(1-q^n)$$

ko’rinihda ifodalah mumkin.

Agar $|q|<1$ bo‘lsa,

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{1-q}(1-q^n) = \frac{b}{1-q}\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = \frac{b}{1-q} = S \ .$$

Demak, $|q|<1$ bo’lganda (3) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $S=b/(1-q)$ bo‘ladi.

2) Agar $q>1$ bo‘lsa, unda

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b}{1-q}(1-q^n) = \frac{b}{q-1}\lim_{n\to\infty}(q^n - 1) = +\infty,$$

$q<-1$ bo‘lganda esa $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud emas. Demak, $|q|>1$ holda (3) sonli qator uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Endi $q=1$ bo‘lgan holni qaraymiz. Bunda (3) sonli qator

$$b+b+\cdots+b+\cdots$$

ko‘rinishda bo‘ladi. Bu holda $S_n=nb$, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} nb = \infty$ ekanligidan (3) sonli qatorning uzoqlashuvchiligi kelib chiqadi.

$q=-1$ bo’lganda, (3) qator

$$b-b+b-b\cdots+(-1)^{n+1}b+\cdots$$

ko‘rinishni oladi va uning n–xususiy yig‘indisi:

$$S_n = \begin{cases} b, & \text{agar } n \text{ toq son bo'lsa;} \\ 0, & \text{agar } n \text{ juft son bo'lsa.} \end{cases}$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \lim_{n\to\infty} b = b, \quad \lim_{n\to\infty} S_{2n+1} = \lim_{n\to\infty} 0 = 0.$$

Bundan ko’rinaiki, $q = -1$ bo’lganda $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ mavjud emas, ya`ni bu holda (3) sonli qator uzoqlashuvchidir.

Demak, (3) sonli qator $|q|<1$ holda yaqinlashuvchi, $|q|\geq 1$ holda esa uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Sonli qatorlarning ba‘zi sodda xossalari bilan tanishibni chiqamiz.

1°. Agar (1) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi S bo‘lsa, unda bu qatorning barcha hadlarini biror C o‘zgarmas songa ko‘paytirishdan hosil qilingan

$$Cu_1 + Cu_2 + \cdots + Cu_n + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} Cu_k \tag{4}$$

sonli qator ham yaqinlashi va uning yig‘indisi $C{\cdot}S$ bo‘ladi.

Isbot: Agar (1) sonli qatorning n- xususiy yig‘indisi S_n bo‘lsa, (4) sonli qatorning n- xususiy yig‘indisi $C{\cdot}S_n$ bo‘ladi. Limitlar haqidagi teoremaga ko’ra

$$\lim_{n\to\infty}(C\cdot S_n) = C\lim_{n\to\infty} S_n = C\cdot S$$

ekanligi kelib chiqadi.

Keyingi xossalarni isbotsiz keltiramiz.

2°. Agar $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ va $\sum\limits_{k=1}^{\infty} v_k$ sonli qatorlar yaqinlashuvchi va ularning yig‘indilari mos ravishda S_1 va S_2 lar bo‘lsalar, u holda ularning yig‘indisi bo‘lgan $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(u_k + v_k)$ sonli qator ham yaqinlashuvchi bo‘ladi va uning yig‘indisi $S_1 + S_2$ ga teng bo’ladi.

3°. Agar (1) qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi) bo’lsa, bu qatorda chekli sondagi hadlarni tashlab yuborish (yoki qo’shish) dan hosil bo’lgan qator ham yaqinlashadi.

$\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ (1) qatorning birinchi n ta hadini tashlab yuborishdan hosil bo'lgan $u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots$ qatorga (1) qatorning *n*-qoldig'i deyiladi.

Qatorning n-qoldig'i yig'indisini r_n bilan belgilaymiz.

$$r_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m} + \cdots = \lim_{m\to\infty} \sigma_m \; (\sigma_m = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots + u_{n+m}).$$

Demak (1) qatorni S= $S_n + r_n$ ko'rinishda ifodalash mumkin.

1-teorema (**Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti**): Agar (1) sonli qator yaqinlashuvchi bo‘lsa, unda uning umumiy hadi u_n uchun

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0 \tag{5}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Isbot: (1) sonli qatorning yig‘indisi S bo‘lsin. $u_n = S_n - S_{n-1}$ ekanligidan:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

(5) tenglik qator yaqinlashishining **yetarli shartini** ifodalaydi.

Natija. (5) tenglik bajarilmasa, (1) qator uzoqlashadi.

(5) tenglikning bajarilishi sharti sonli qator yaqinlashishi ucun yetarli emas. Masalan, ***garmonik qator*** deb ataluvchi ushbu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \tag{6}$$

sonli qatorning umumiy hadi $u_n = 1/n$ bo‘lib, (5) shartni qanoatlantiradi. Ammo bu qator uzoqlashuvchi bo‘ladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun (6) qatorni yaqinlashuvchi va uning yig'indisi S bo'lsin deb faraz qilamiz.

S_n hamda S_{2n} xususiy yig‘indilarni qaraymiz. Qator yig'indisi ta`rifi va farazimizga asosan

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = S \Rightarrow \lim_{n\to\infty} (S_{2n} - S_n) = S - S = 0 \tag{7}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi. Ikkinchi tomondan

$$S_{2n} - S_n = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{2n} > \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \cdots \frac{1}{2n} = n \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

Bundan,

$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)\ge \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0 \qquad (8)$$

Bu qarama-qarshilik farazimiznig noto'g'riligini, ya`ni garmonik qatorning uzoqlashuvchi ekanligini ko'rsatadi.

Barcha hadlari musbat bo'lgan($u_n>0$, $n=1,2,3,\cdots$) **musbat hadli qatorlar** deb ataluvchi qatorlarni qarab chiqamiz.

2-teorema. ***(Taqqoslash*(solishtirish) *alomati)*:** Ikkita $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (1) va $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ (7) musbat hadli sonli qatorlar berilgan va $u_n\le v_n$ ($n=1,2,3,\cdots$) bo'lsin.

U holda: a) (7) qator yaqinlashsa, (1) qator ham yaqinlashadi;

b) (1) qator uzoqlashsa, (7) qator ham uzoqlashadi.

Taqqoslash uchun "etalon" sifatida quyidagi qatorlardan foydalaniladi:

1) Geometrik qator $\sum_{n=1}^{\infty}bq^{n-1}$, $|q|<1$ bo'lganda yaqinlashadi, $|q|\ge 1$ bo'lganda uzoqlashadi.

2) Garmonik qator $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ uzoqlashuvchi.

3) Umumlashgan garmonik qator $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$, $\alpha>1$ bo'lganda yaqinlashadi, $\alpha\le 1$ bo'lganda uzoqlashadi.

1-misol. Umumiy hadi $u_n=\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2}}$ qator taqqoslash alomati yordamida yaqinlashishga tekshirilsin.

Yechish. Berilgan qatorni birinchi hadi birga $b_1=1$ maxraji q= 0,9 bo'lgan geometrik qator bilan taqqoslaymiz:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}<1;\ \frac{1}{\sqrt{10}}<0{,}9;\ \frac{1}{30}<0{,}9^2;\cdots;\frac{1}{\sqrt{n(1+n^2}}<(0{,}9)^{n-1};\cdots.$$

Geometrik qator q=0,9<1 da yaqinlashuvchi bo'lganligi uchun, berilgan qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

3-teorema (**limitik taqqoslash alomati**): Agar $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ musbat hadli qatorlar va $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$=k≠0 mavjud bo'lsa, u holda bu qatorlar bir vaqtda yaqinlashadi yoki uzoqlashadi.

4-teorema (**Dalamber alomati**): $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ musbat hadli qator uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lambda$ (8) limit mavjud bo'lsin. U holda agar $\lambda < 1$ bo'lsa, qator yaqinlashadi, $\lambda > 1$ bo'lsa, qator uzoqlashadi, $\lambda = 1$ bo'lsa, qator yaqinlashishi haqidagi masala ochiq qoladi.

Biz namuna tariqasida yaqillashish alomatlaridan faqat Dalamber alomatining isbotini keltiramiz.

Isbot: Ketma-ketlik limiti ta`rifigan har qanday ε>0 soni uchun shunday N tartib raqami topiladiki, barcha n>N uchun

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda\right| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} - \lambda < \varepsilon \Rightarrow \lambda - \varepsilon < \frac{u_{n+1}}{u_n} < \lambda + \varepsilon$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

1) $\lambda < 1$ bo'lsin. ε ni shunday kichik qilib tanlaymizki, q= $\lambda + \varepsilon < 1$, ya`ni $\frac{u_{n+1}}{u_n}$<q yoki u_{n+1}<qu_n.

Oxirgi tengsizlik barcha $n>N$ lar uchun bajariladi, ya'ni $n=N+1, N+2,\cdots$:

$$u_{N+2}<qu_{N+1},\ u_{N+3}<qu_{N+2} < q^2u_{N+1},\ \cdots, u_{N+k}<qu_{N+k-1} < \cdots < q^{k-1}u_{N+1}.$$

Demak, $u_{N+2} + u_{N+2} + \cdots + u_{N+k} \cdots$ qatorning hadlari q<1 bo'lganda yaqinlashuvchi bo'gani

$$qu_{N+1}+q^2u_{N+1} + \cdots + q^2u_{N+1}+\cdots$$

geometrik qator hadlaridan kichik, taqqoslash alomatiga ko'ra, qaralayotgan qatordan birinchi (n+1) ta hadi bilan farqlanuvchi $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

2) $\lambda > 1$ bo'lsin. ε>0 yetarlicha kichik sonini shunday tanlaymizki, λ – ε>1 bo'lsin. Bu holda $\frac{u_{n+1}}{u_n} > \lambda - \varepsilon > 1.$

Bu esa, qatorning hadlari N+1 hadidan boshlab o'sishini ko'rsatadi.

Shuning uchun ham qatorning umumiy hadining limiti nolga teng emas,qator yaqinlashishining zaruruiy sharti bajarilmaydi.

Demak, qatot uzoqlashadi.

2-misol. Umumiy hadi $u_n=\frac{n(n+1)}{3^n}$ qator Dalamber alomati yordamida yaqinlashishga tekshirilsin.

Yechish. $u_n=\frac{n(n+1)}{3^n}$ va $u_{n+1}=\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}$ bo'lganligi uchun

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}:\frac{n(n+1)}{3^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n(n+1)}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n}=\frac{1}{3}<1.$$

Demak, Dalamber alomatiga ko'ra berilgan qator yaqinlashuvchi.

***5-teorema* (*Koshi alomati*):** Berilgan $\sum_{k=1}^{\infty}u_k$ musbat hadli sonli qator uchun

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=k \tag{9}$$

limit mavjud bo'lsin. Bu holda k<1 bo'lganda qator yaqinlashuvchi, k>1 bo'lganda esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

6-teorema (**integral alomati**): $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ musbat hadli qator berilgan va $u_1\ge u_2\ge\ldots\ge u_n\ge\ldots$ va $f(x)$ funksiya $x\ge 1$ uchun aniqlangan, uzluksiz, o'smaydigan va $f(1)=u_1,\ f(2)=u_2,\ldots,\ f(n)=u_n,\ \ldots$ bo'lsin, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ qator yaqinlashishi uchun $\int_1^{\infty}f(x)dx$ integralning yaqinlashishi zarur va yetarli.

3-misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ umumlashgan garmonik qator yaqinlashishga tekshirilsin.

Yechish. $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$ bo'lsin. $f(x)$ funksiya x>0 bo'lganda musbat va o'smaydi. Shuning uchun ham berilgan qator yaqinlashishi $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}$ integralning yaqinlashishiga ekvivalent: $I=\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{b\to\infty}\int_1^{b}\frac{dx}{x^{\alpha}}$.

$$\text{Agar } \alpha=1 \text{ bo`lsa, } I=\lim_{b\to\infty}\left(\ln|x|\,|_1^b\right)=\lim_{b\to\infty}(\ln|b|-\ln 1)=\infty.$$

Agar $\alpha\neq 1$ bo`lsa, $I=\lim_{b\to\infty}\left(\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right)\Big|_1^b=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{b\to\infty}(b^{1-\alpha}-1)=\begin{cases}\alpha>1 \text{ bo`lsa, } & \frac{1}{\alpha-1}\\ \alpha\le 1 \text{ bo`lsa, } & \infty\end{cases}$.

Demak, $\alpha > 1$ bo’lsa, umumlashgan garmonik qator uzoqlashadi, $\alpha \leq 1$ bo`lsa, esa yaqinlashadi.

Ishorasi o’zgaruvchi sonli qatorlar

Agar qatorning hadlari orasida musbatlari ham, manfiylari ham bo’lsa, u holda bunday qator **o’zgaruvchi ishorali qator** deyiladi.

$u_1 + u_2 + ... + u_n ...,$ bunda $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ sonlar musbat ham manfiy ham bo’lishi mumkin.

Ishorali navbatlashuvchi qatorlar o’zgaruvchan ishorali qatorlarning xususiy holidir.

Endi o’zgaruvchan ishorali qatorning absolyut shartli yaqinlashuvi kabi muhim tushunchalarni yuritamiz.

1-ta’rif. o’zgaruvchan ishorali $u_1 + u_2 + ... + u_n ...$ (8) qator hadlari absolyut qiymatlaridan tuzilgan bo’lsin,

$|u_1| + |u_2| + ... + |u_n| + ...$ (9) qator yaqinlashuvchi bo’lsa, (8) **absolyut yaqinlashuvchi qator** deyiladi.

2-ta’rif. Agar o’zgaruvchan ishorali (8) qator yaqinlashuvchi bo’lib, bu qatorning hadlari absolyut qiymatlaridan tuzilgan (9) qator uzoqlashuvchi bo’lsa, u holda berilgan o’zgaruvchan ishorali (8) qator shartli yoki noabsalyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Hadlarning ishoralari har xil bo’lgan qatorlarni o’rganishga o’tamiz.

Eng avval ishoralari navbatlashuvchi qatorlar deb ataluvchi qatorlarga yo’xtalamiz. Bunday qatorlarda har bir musbat haddan keyin manfiy had va har bir manfiy haddan keyin musbat had keladi. Ishoralari navbatlashuvchi qatorni quyidagi ko’rinishida yozish mumkin:

$$u_1 - u_2 + u_3 - ... + (-1)^{n+1} u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} u_n , \qquad (10)$$

bunda $u_1, u_2, ..., u_n, ...$- musbat sonlar.

Ishoralari navbatlashuvchi qatorlar yaqinlashishining yetarli shartini o’z ichiga olgan quyidagi teoremani keltiramiz.

1-teorema (**Leybnits teoremasi**): Agar ishoralari navbatlashuvchi

$$u_1 - u_2 + u_3 - \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots \qquad (11)$$

qatorda hadlarning absolyut qiymatlari absolyut kamayuvchi, ya’ni

$$u_1 > u_2 > u_3 > \ldots > u_n > \ldots \qquad (12)$$

bo’lsa, shu bilan birga umumiy hadi nolga intilsa, ya`ni

$$\lim_{n=\infty} u_n = 0 . \qquad (13)$$

U holda (11) qator yaqinlashuvchi bo’ladi, shu bilan birga uning yig’indisi birinchi hadidan katta bo’lmaydi, ya’ni $0<S<u_1$.

Isbot: (10) qatorning dastlabki $n=2m$ ta ($m=1,2,3,\cdots$) hadidan hosil qilingan S_{2m} xususiy yig‘indilar ketma-ketligini qaraymiz:

$$S_{2m} = (u_1 - u_2) + (u_3 - u_4) + \cdots + (u_{2m-1} - u_{2m}) \quad .$$

Teorema shartidagi (12) shartga asosan bu yig‘indida har bir qavs ichidagi ifoda musbatdir. Bu yerdan $S_{2m}>0$ va monoton o‘suvchi ekanligi kelib chiqadi. Endi S_{2m} xususiy yig‘indini quyidagi ko‘rinishda ifodalab olamiz:

$$S_{2m} = u_1 - (u_2 - u_3) - (u_4 - u_5) - \cdots - (u_{2m-2} - u_{2m-1}) - u_{2m} \ .$$

(12) shartga ko‘ra, har bir qavs ichidagi ifoda musbat va shu sababli $S_{2m}<u_1$ bo‘ladi. Shunday qilib, S_{2m} xususiy yig‘indilar ketma-ketligi monoton o‘suvchi va yuqoridan u_1 soni bilan chegaralangan.

Demak, $\lim\limits_{m\to\infty} S_{2m} = S$ limit mavjud va $0<S\le u_1$.

Bu esa, teoremaning $n=2m$ hol uchun isbotlanganligini bildiradi.

Endi $n=2m+1$ holni qaraymiz.

Teorema shartidagi (13) shartdan foydalanib, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$S_{2m+1} = S_{2m} + u_{2m+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_{2m+1} = \lim_{n\to\infty} S_{2m} + \lim_{n\to\infty} u_{2m+1} = S + 0 = S \quad .$$

Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ limit mavjud, ya’ni ishorasi navbatlanuvchi (10) sonli qator yaqinlashuvchi va uning yig‘indisi $0<S\le u_1$ bo‘ladi. Teorema to’la isbotlandi.

1-misol. Umumiy hadi $u_n=\frac{(-1)^n n}{n^3+2}$ bo’lgan qator yaqinlashishga tekshirilsin.

Yechish. Berilgan qator ishoralari navbat bilan almashinuvchi qator va

$$\frac{1}{3}>\frac{2}{9}>\frac{3}{29}>\cdots>\frac{n}{n^3+2}>\cdots \text{ va } \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n^3+2}=0 .$$

Shuning uchun Leybinits teoremasiga asosan qator yaqinlashuvchi.

Mavzu doir nazorat savollari va topshiriqlar

1. Sonli qator qator ta`rifini keltiringi.
2. Sonli qatorning umumiy hadi deb nimaga aytiladi?
3. Sonli qatorning *n*-xususiy yig‘indisi qanday aniqlanadi?
4. Qachon sonli qator yaqinlashuvchi (uzoqlashuvchi)deyiladi?
5. Sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti ifodalovchi teoremani keltiring?
6. Garmonik qator deganda, qanday qator tushuniladi?
7. Musbat hadli sonli qatorlar ta`rifini va unga misollar keltiring.
8. Taqqoslash alomatining mohiyati nimadan iborat?
9. Taqqoslash uchun “etalon” sifatida qanday qatorlardan foydalaniladi?
10. Limitik taqqoslash alomatini ifodalovchi teoremani keltiring.
11. Dalamber alomati yordamida qatorlar yaqinlashga tekshiriladi?
12. Koshi alomati haqidagi teoremani keltiring.
13. Qator yaqinlashushining integral alomati haqidagi teorema shartlarini yozing.
14. Umumlashgan garmonik qator qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
15. Qaysi holda umumlashgan garmonik qator yaqinlashuvchi bo‘ladi?
16. Ishorasi o’zgaruvchi qatorlar deb qanday qatorlarga aytiladi?
17. Qachon sonli qator ishorasi navbatlanuvchi deb ataladi ?
18. Ishorasi navbatlanuvchi sonli qatorlarga misollar keltiring.
19. Leybnits alomatining mohiyati nimadan iborat ?
20. Leybnits alomatini ifodalovchi teoremaning isbotini keltiring.

Quyidagi qatorlarning umumiy hadi uchun ifoda toping[1-2] .

1. $2+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\frac{5}{2^4}+\cdots$ [$u_n=\frac{n+1}{2^n}$.]

2. $\frac{1}{99}+\frac{2}{199}+\frac{3}{299}+\frac{4}{399}+\cdots$ [$u_n=\frac{n}{100n-1^n}$.]

Quyidagi qatorlarning yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsating va yig'indisini toping[3-4].

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}$. [$\frac{3}{4}$.]

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^n 2}{3^n}$. [$\frac{ln2}{3-ln2}$.]

Taqqoslash alomati yordamida qatorlar yaqinlashishga tekshirilsin[5-7].

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n-3}$. [Yaqinlashadi.]

6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{lnn}{n}$. [Uzoqlashadi.]

7. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+2}{n^2}$. [Uzoqlashadi.]

Dalamber alomatidan foydalanib, yaqinlashishga tekshirilsin[8-11].

8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{3^n}$. [Yaqinlashadi.]

9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{100^n}$. [Uzoqlashadi.]

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^4}{(n+1)!}$. [Yaqinlashadi.]

11. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^3 n}{n!}$. [Yaqinlashadi.]

Quyidagi qatorlar yaqinlashishga tekshirilsin[12-14].

12. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2^n}$. [Absolyut yaqinlashadi.]

13. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$. [Srtli yaqinlashadi.]

14. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^n}$. [Absolyut yaqinlashadi.]

Mavzu doir testlar

1. Ta`rifni to'ldiring: … amali bilan birlashtirilgan cheksiz sonlar ketma-ketligi sonli qator deyiladi.

A) qo'shish, B) ko'paytirish, C) bo'lish, D) ko'paytirish va ildiz chiqarish.

2. Ushbularning qaysi biri sonli qator bo‘ladi?

A) $u_1 \cdot u_2 \cdot u_3 \cdot \cdots \cdot u_n \cdot \cdots$, B) $u_1 : u_2 : u_3 : \cdots : u_n : \cdots$,

C) $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$, D) $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

E) keltirilgan barcha ifodalar sonli qator bo‘ladi.

3. Quyidagilardan qaysi biri $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ sonli qator uchun xususiy yig‘indi bo‘ladi?

A) u_1, B) $u_1 + u_2$, C) $u_1 + u_2 + u_3 + u_3$, D) $u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$.

E) keltirilgan barcha ifodalar sonli qator uchun xususiy yig‘indi bo‘ladi.

4. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)}$ sonli qator uchun S_4 xususiy yig‘indining qiymatini toping.

A) $\frac{17}{30}$, B) $\frac{15}{30}$, C) $\frac{7}{30}$, D) $\frac{11}{30}$.

5. $\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \cdots$ sonli qatorning u_n umumiy hadini ko‘rsating.

A) $u_n = \frac{n+1}{n}$, B) $u_n = \frac{n-1}{n}$, C) $u_n = \frac{n}{n+1}$, D) $u_n = \frac{n}{n-1}$.

6. Umumiy hadi $u_n = 1 + \frac{1}{n}$ bo‘lgan sonli qatorni toping .

A) $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \cdots$,

B) $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$,

C) $\frac{2}{1} + \frac{3}{2} + \frac{4}{3} + \frac{5}{4} + \cdots$,

D) $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} + \cdots$.

7. n-xususiy yig‘indisi S_n bo‘lgan sonli qator qaysi shartda yaqinlashuvchi deyiladi?

A) $\lim_{n\to\infty} S_n \le C < \infty$,

B) $\lim_{n\to\infty} S_n \ge C > -\infty$,

C) $\lim_{n\to\infty} S_n = C, |C| < \infty$,

D) $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$.

8. n-xususiy yig‘indisi S_n bo‘lgan sonli qator qaysi shartda uzoqlashuvchi deyiladi?

A) $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$,

B) $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$,

C) $\lim_{n\to\infty} S_n = \pm\infty$,

D) ko‘rsatilgan barcha hollarda.

9. Quyidagilarning qaysi biri uchun sonli qator yaqinlashuvining zaruriy sharti bajarilmaydi ?

A) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}$, B) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k}$, C) $\sum_{k=1}^{\infty}\sin\frac{1}{k}$, D) $\sum_{k=1}^{\infty}\cos\frac{1}{k}$.

10. Quyidagi qatorlardan qaysi biri musbat hadli bo‘ladi?

A) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}$, B) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos k}{k}$, C) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin k}{k}$, D) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\ln\frac{1}{k}$.

11. Qatorni taqqoslash alomati orqali tekshirishda qanday limit qaraladi?

A) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$=k≠0 , B) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}$=k , C) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n\,.\,v_n)$, D) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_n+v_n)$.

12. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sonli qatorni Dalamber alomati orqali tekshirish uchun qaysi limit hisoblanadi?

A) $\lim\limits_{n\to\infty}u_{n+1}u_n$, B) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}+u_n)$, C) $\lim\limits_{n\to\infty}(u_{n+1}-u_n)$, D) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

13. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sonli qatorni Koshi alomati orqali tekshirish uchun qaysi limit qaraladi?

A) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{u_n}$, B) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$, C) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_nu_{n+1}}$, D) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{u_{n+1}}{u_n}}$.

14. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sonli qatorni integral alomati orqali tekshirish haqidagi teoremada shartilarida:

A) $u_1\geq u_2\geq\ldots u_n\geq\ldots$, B) $u_1<u_2<\ldots<u_n<\ldots$,

C) $u_1<u_2>\ldots<u_n>\ldots$, D) qator hadlariga hech qanday shart qo’yilmaydi.

15. Musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ sonli qatorni integral alomati orqali tekshirish haqidagi teoremada shartilarida:

A) $f(n)=u_n$ $(n=1,2,3,\cdots)$, B) $f(x)$ funksiya o‘smuvchi,

C) f(x) funksiya $x\geq1$ uchun aniqlangan, uzluksiz; D) A,B,C.

13. Integral alomati orqali tekshirish haqidagi teoremada musbat hadli $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ sonli qator ma`lum shartlarda qanday integralga almashtiriladi.

A) $\int_1^{\infty} f(x)dx$; B) $\int_0^{\infty} f(x)dx$; C) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$; D) $\int_{-\infty}^{1} f(x)dx$.

14. Ishorasi navbanlashuvchi qatorning umumiy ko'rinishi:

A) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}u_n$; B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^2u_n$; C) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^3u_n$; D) A,C .

15. Quyidagi shartlardan qaysi birlari Leybinits teoremasi(alomati) shartlarida bor.

A) $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots u_n > \ldots$, B) $\lim\limits_{n=\infty} u_n=0$,

C) qator ishorasi navbatlashuvchi, D) keltirilgan shartlarning barchasi.

16. Leybinits teoremasi(alomati) tasdiqlaydi:

A) qator yaqinlashuvchi , B) 0<S<u_1 , C) 0<u_1 <S , D) A va B.

Ko'p o'zgaruvchili funksiya

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar , aniqlanish va o'zgarish sohalari

Ixtiyoriy $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ haqiqiy sonlardan hosil qilingan $\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ vektorlardan tuzilgan n o'lchovli chiziqli fazoni qaraymiz va uni R^n kabi belgilaymiz. Bu fazodagi ikkita

$$\boldsymbol{x}'=(x_1', x_2', \cdots, x_n'), \quad \boldsymbol{x}''=(x_1'', x_2'', \cdots, x_n'')$$

vektorlar uchun ***skalyar ko'paytman***i quyidagicha kiritamiz:

$$(\boldsymbol{x}', \boldsymbol{x}'')= x_1'x_1'' + x_2'x_2'' + \cdots + x_n'x_n'' \ . \qquad (1)$$

1-ta`rif. Ixtiyoriy ikkita vektorlari uchun (1) tenglik orqali skalyar ko'paytma kiritilgan R^n chiziqli fazo ***n o'lchovli Evklid fazo*** deb ataladi.

R^n evklid fazodagi ikkita

$$M'(x_1', x_2', \cdots, x_n'), \quad M''(x_1'', x_2'', \cdots, x_n'')$$

nuqtalar orasidagi masofani $d(M', M'')$ kabi belgilaymiz va uni quyidagicha kiritamiz:

$$d(M', M'') = \sqrt{(x_1' - x_1'')^2 + (x_2' - x_2'')^2 + \cdots + (x_n' - x_n'')^2} \ .$$

2 –ta`rif. Agar n o'lchovli R^n evklid fazosidagi biror D to'plamdagi har bir $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ nuqtaga ma'lum bir qonun asosida qandaydir u haqiqiy son mos qo'yilgan bo'lsa, unda u berilgan D to'plamda aniqlangan ***n o'zgaruvchili funksiya*** deb ataladi.

$D \subset R^n$ to'plamda aniqlangan n o'zgaruvchili funksiya $u=f(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ yoki qisqacha $u=f(M)$ kabi belgilanadi. Bunda $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$ sonlari funksiyaning ***argumentlari*** deb ataladi.

3-ta`rif. Berilgan n o'zgaruvchili $u=f(M)$ funksiya ma'noga ega bo'ladigan R^n evklid fazosidagi barcha $M(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n)$ nuqtalar to'plami funksiyaning

aniqlanish sohasi , $u=f(M)$ funksiya qabul qilishi mumkin etadigan haqiqiy sonlar to‘plami esa bu funksiyaning ***qiymatlar to‘plami*** deyiladi.

Funksiyaning aniqlanish sohasi D(*f*), qiymatlar sohasi esa E(*f*) kabi belgilanadi.

Biz soddalik uchun ikki o‘zgaruvchili funksiyalarni qarash bilan cheklanamiz.

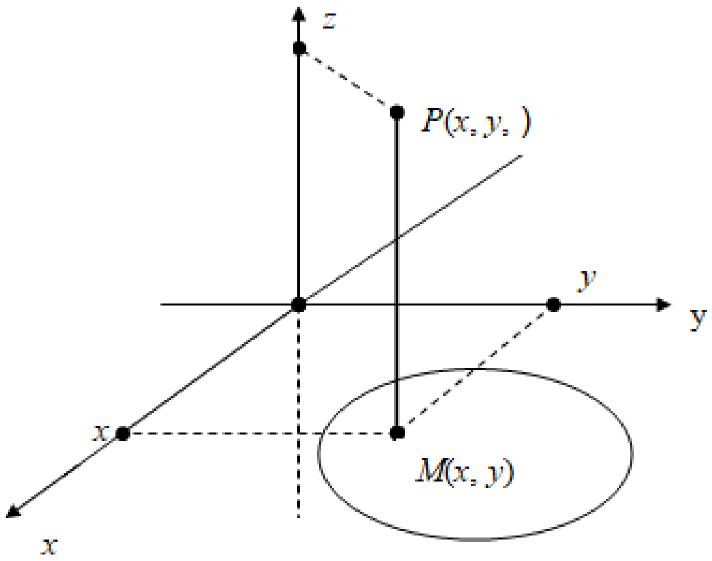
Ikki o‘zgaruvchili funksiya $z=f(x,y)$, $z=g(x,y)$ va hokazo ko‘rinishda belgilanadi. Masalan,

$$z = f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad z = g(x,y) = 4x+5y+1, \quad z = h(x,y) = \frac{1}{x^2-y^2}$$

lar ikki o‘zgaruvchili funksiyalar bo‘ladilar.

Birinchi funksiyaning aniqlanish sohasi D(*f*)- markazi O(0,0) koordinata boshida joylashgan va radiusi r=1 bo‘lgan birlik doiradan, ikkinchi funksiya uchun D(*g*) -butun tekislikdan (D(*g*)=R^2), uchunchi uchun esa $D(h) = \{(x,y): |x| \neq |y|\}$.

Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi tushunchasini kiritamiz. Buning uchun fazoda *XYZ* to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasini olamiz. *XOY* koordinata tekisligida funksiyaning D(*f*) aniqlanish sohasini qaraymiz va uning har bir $M(x,y)$ nuqtasidan *XOY* koordinata tekisligiga perpendikular o‘tkazamiz. Bu perpendikularga funksiyaning $z= f(x,y)$ qiymatini qo’yamiz. Natijada fazoda koordinatalari $(x, y, f(x,y))$ bo‘lgan P nuqtani hosil qilamiz



27-chizma

4-ta`rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning ***grafigi*** deb fazodagi

$$P(x, y, z)=P(x, y, f(x,y))= P(x, y, f(M)),\ M=M(x,y)\in \mathrm{D}(f),$$

nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi.

Ikki o‘zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi fazodagi biror sirtdan iborat bo‘ladi va $z=f(x,y)$ fazodagi ***sirt tenglamasi*** deb ham ataladi.

Masalan, yuqorida keltirilgan $z=f(x,y)$ funksiyaning grafigi tenglamasi

$$z=\sqrt{1-x^2-y^2} \Rightarrow z^2=1-x^2-y^2 \Rightarrow x^2+y^2+z^2=1$$

bo‘lgan sferadan, $z=g(x,y)$ funksiyaning grafigi esa tenglamasi $z=3x+5y-1$ yoki $3x+5y-z-1=0$ bo‘lgan tekislikdan iborat bo’ladi.

5-ta`rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning qiymatlari biror o‘zgarmas C soniga teng bo‘ladigan xOy koordinata tekisligidagi nuqtalar to‘plamidan iborat chiziq funksiyaning ***sath chizig’i***, C soni esa ***sath*** deb ataladi.

Bu tushuncha dan $z=h(x,y)$ funksiya grafigini tasavvur qilishda foydalanish mumkin.

Karrali va takroriy limitlar

1-ta`rif. $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning ***r radiusli atrofi*** deb tekislikdagi

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan $M(x,y)$ nuqtalar to‘plamiga aytiladi.

2-ta`rif. A soni $z=f(x,y)$ funksiyaning $x\to x_0$, $y\to y_0$ (yoki $M(x,y)\to M_0(x_0,y_0)$) dagi ***limiti*** deyiladi, agar ixtiyoriy kichik $\varepsilon>0$ soni uchun unga bog‘liq shunday $r(\varepsilon)=r>0$ son topilsaki, $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning $r=r(\varepsilon)$ radiusli atrofiga tegishli bo‘lgan barcha $M(x,y)\neq M_0(x_0,y_0)$ nuqtalar uchun

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa.

Ikki o‘zgaruvchili $f(x,y)$ funksiyaning $x\to x_0$, $y\to y_0$ dagi limiti

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A \quad \text{yoki} \quad \lim_{M\to M_0} f(M)=A$$

kabi belgilanadi.

Agar funksiyaning ikkala argumenti x va y bir paytda x_0 va y_0 sonlariga intilsa,

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

karrali limit deb yuritiladi.

x yoki y argumentlarni u yoki bu tartibda x_0 yoki y_0 sonlariga ketma-ket yaqinlashtirib,

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=A_1, \quad \lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=A_2$$

limitlarni ham hosil qilish mumkin. Bular ***takroriy limitlar*** deb ataladi.

1-misol. $f(x,y)=4x+6xy-y^2$ funksiyaning $x\to 1$, $y\to -2$ bo’lganda takroriy limitlar topilsin.

Yechish:

$$\lim_{x\to 1}\lim_{y\to -2} f(x,y)=\lim_{x\to 1}\lim_{y\to -2}(4x+6xy-y^2)=\lim_{x\to 1}(4x-12x-4)=-12=A_1\ ,$$

$$\lim_{y\to -2}\lim_{x\to 1} f(x,y)=\lim_{y\to -2}\lim_{x\to 1}(4x+6xy-y^2)=\lim_{y\to -2}(4+6y-y^2)=-12=A_2\,.$$

Bu funksiya uchun ikkala takroriy limit mavjud va ular o‘zaro teng ekan.

Umumiy holda takroriy limitlar hamma holda ham teng bo’lmaydi.

2-misol. $f(x,y)=\dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$ funksiyaning $x\to 0$, $y\to 0$ dagi takroriy limitlari hisoblansin.

Yechish:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x+x^2}{x}=\lim_{x\to 0}(1+x)=1=A_1,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0} f(x,y)=\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x-y+x^2+y^2}{x+y}=\lim_{y\to 0}\frac{-y+y^2}{y}=-1=A_2\,.$$

Bu funksiya uchun ikkala takroriy limit mavjud, ammo ular o‘zaro teng emas ekan.

Qanday hollarda takroriy limitlar teng bo’lishliginigini tasdiqlovchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0,y_0)$ atrofida aniqlangan va karrali limit

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$$

mavjud bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $M(x,y)\in U_r(x_0,y_0)$ uchun

$$\varphi(y)=\lim_{x\to x_0} f(x,y)\,,\quad \psi(x)=\lim_{y\to y_0} f(x,y)$$

oddiy limitlar mavjud bo‘lsa, unda ikkala takroriy limit

$$A_1=\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=\lim_{x\to x_0}\psi(x)\,,\quad A_2=\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)$$

mavjud va $A_1=A_2=A$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Bir o'zgaruvchi funksiyaning limiti hagidagi 2-4 -teoremlar ikki o'zgaruvchili funksiya limiti uchun quyidagicha ifodalanadi.

2-teorema. Agar $z=f(x,y)$ va $z=g(x,y)$ funksiyalarning ikkalasi ham $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0,y_0)$ atrofida aniqlangan va ularning karrali limitlari

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A,\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B$$

mavjud bo‘lsa, quyidagi tengliklar o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} C=C\quad (C-const.),\quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} Cf(x,y)=C\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=CA\ ,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y)\pm g(x,y)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\pm \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=A\pm B\ ,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} [f(x,y)\cdot g(x,y)]=\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)\cdot \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=AB,$$

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} \frac{f(x,y)}{g(x,y)}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)}{\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)}=\frac{A}{B}\quad (\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} g(x,y)=B\neq 0).$$

Masalan, bu teorema asosida quyidagi karrali limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}(4x+6y+2)=\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}4x+\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}6y+\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}2=$$

$$=4\lim_{x\to 2}x+6\lim_{y\to 3}y+\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}2=4\cdot 2+6\cdot 3+2=28,$$

$$\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}} f(x,y)=\lim_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}\frac{3x+4xy-2y+1}{x^3+y^2+3}=\frac{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}(3x+4xy-3y+1)}{\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 0}}(x^3+y^2+3)}=\frac{4}{4}=1.$$

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari va to'la differensiali

Biz dastlab, ikki o'zgaruvchili funksiyaning uzluksizligi tushunchasini kiritamiz.

1-ta`rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning D(f) aniqlanish sohasidagi biror $M_0(x_0,y_0)$ nuqta uchun, o'zgaruvchi $M(x,y)$ nuqta funksiyaning aniqlanish sohasida tegishli bo'lganda $M_0\ (x_0,y_0)$ nuqtaga ixtiyoriy usulda intilganda ($M\to M_0$)

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0) \text{ yoki } \lim_{M\to M_0} f(M)=f(M_0) \qquad (1)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, $z=f\,(x,\,y)$ funksiya $M_0\ (x_0,y_0)$ nuqtada ***uzluksiz*** deyiladi.

$M_0(x_0,y_0)$ nuqtagafunksiyaning ***uzluksizlik nuqtasi*** deyiladi. Biror D sohaning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lgan funksiya shu ***sohada uzluksiz*** deyiladi.

Misollar.

1. $f(x,y)=4x^3+5xy-5y^3$ funksiya tekislikdagi barcha nuqtalarda aniqlangan va ularning har birida uzluksizdir. Demak, bu funksiya butun tekislikda uzluksiz.

2. $f(x,y)=\sqrt{4-x^2-y^2}$ funksiya o'zining aniqlanish sohasi markazi koordinatalar boshida radiusi 2 ga teng bo'lgan doiraning nuqtalarida uzluksiz.

Agar $M(x,y)$ o'zgaruvchi nuqta bo'lsa, unda $\Delta x=x-x_0$ va $\Delta y=y-y_0$ ayirmalar mos ravishda x va y argumentlarning o'zgarishlarini ifodalaydi hamda ***argument orttirmalari*** deyiladi. $z=f(x,y)$ funksiyaning o'zgarishi, esa

$$\Delta z=\Delta f=f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) \qquad (2)$$

ayirma orqali aniqlanadi va unga funksiyaning ***to'la orttirmasi*** deyiladi.

$x\to x_0$, $y\to y_0$ munosabatlardan $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ ekanligi kelib chiqqanligi uchun z=f(x,y) funksiya uzluksizligining orttirmalar tilidagi ta`rifi

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \Delta f=0 \qquad (3)$$

tenglik bilan ifodalanadi.

Bir o’zgaruvchili uzluksiz funksiyalarning 1-xossasi ikki o’zgaruvchi funksiyalar uchun quyidagi ko’rinishda oladi:

Agar $f(x,y)$ va $g(x,y)$ funksiyalar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda, shu nuqtada $C\,f(x,y)$ (C-const.), $f(x,y)\pm g(x,y)$, $f(x,y)\cdot g(x,y)$ va $g(x,y)\neq 0$ bo’lganda $f(x,y)/g(x,y)$ funksiyalar ham uzluksiz bo‘ladi.

Bu tasdiqdan foydalanib, murakkabroq ko‘rinishdagi funksiyalarni uzluksizlikka tekshirishni soddalashtirish mumkin .

2-ta`rif. $z=f(x,y)$ funksiya uchun argumentlarning Δx va Δy orttirmalarida

$$\Delta_x f = f(x_0+\Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)\,, \quad \Delta_y f = f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0) \qquad (4)$$

ayirmalar mos ravishda funksiyaning x va y argumentlari bo‘yicha $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadagi ***xususiy orttimalari*** deyiladi.

(2) tenglik bilan aniqlangan Δf orttirma funksiyaning **to‘la orttirmasi** deyiladi.

3-ta`rif. Tekislikdagi D sohaning $\mathrm{M}_0(x_0,y_0)$ nuqtasi o‘zining biror r atrofi bilan shu sohada joylashgan bo‘lsa, u ***ichki nuqta*** deb ataladi .

Masalan, doira, kvadrat, uchburchak kabi figuralarning ichidagi nuqtalar ularning ichki nuqtalari bo‘ladi.

4-ta`rif. Tekislikdagi $\mathrm{M}_0(x_0,y_0)$ nuqtaning ixtiyoriy r atrofida ham D sohaga tegishli, ham D sohaga tegishli bo‘lmagan nuqtalar mavjud bo‘lsa, u D soha uchun ***chegaraviy nuqta*** deb ataladi .

5-ta`rif. Tekislikdagi D sohaning barcha chegaraviy nuqtalar to‘plami uning ***chegarasi*** deb ataladi.

Masalan, doira uchun uning aylanasi chegara bo‘ladi.

6-ta ‘rif. Agar D sohaga tegishli barcha nuqtalar ichki bo‘lsa, D ***ochiq soha*** deb ataladi.

Masalan, doira, kvadrat, uchburchak kabi figuralarning ichidagi barcha nuqtalardan iborat sohalar ochiq bo‘ladi.

Agar D ochiq soha bo‘lsa, unga chegaraviy nuqtalari kirmaydi.

7-ta`rif. Agar D sohaning barcha chegaraviy nuqtalari bu sohaga tegishli bo‘lsa u ***yopiq soha*** deyiladi.

Masalan, doira o‘zining aylanasi bilan birgalikda yopiq sohani tashkil etadi.

Endi ikki o’zqaruvchli funksiyaning xuxuziy hosilalariga to’talamiz.

Biz z=$f(x,y)$ funksiya biror D sohada aniqlangan va $M(x,y)$ shu sohaning ichki nuqtasi bo‘lsin deb faraz qilamiz.. Bu nuqtaning x abssissasiga Δx orttirma berib, y ordinatasini o‘zgartirishsiz qoldiramiz. Hosil bo’lgan $N(x+\Delta x, y)$ nuqta ham D sohaga tegishli deb hisoblaymiz. Bu holda $z=f(x,y)$ funksiyaning o‘zgarishi

$$\Delta_x f = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

x argument bo‘yicha xususiy orttirma orqali ifodalanadi.

8-ta`rif. Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning x bo‘yicha $\Delta_x f$ xususiy

orttirmasining Δx argument orttirmasiga nisbati $\Delta x\to 0$ bo‘lganda chekli limitga ega bo‘lsa, bu limitga funksiyaning ***x bo‘yicha xususiy hosilasi*** deyiladi va u

$$z'_x\,,\quad f'_x\,,\quad f'_x(x,y)\,,\quad \frac{\partial z}{\partial x}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial x}$$

kabi belgilardan biri kabi belgilanadi.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}\,. \qquad (5)$$

$z=f(x,y)$ funksiyaning x bo‘yicha xususiy hosilasini hisoblashda ikkinchi y o‘zgaruvchini o‘zgarmas son kabi qaralganligi sababli, bu xususiy hosila uchun bir o’zgaruvchili funksiya hosilalar jadvali hamda differensiallash qoidalaridan foydalanish mumkin.

Yuqoridagi kabi $z = f(x,y)$ funksiyaning

$$z'_y\,,\quad f'_y\,,\quad f'_y(x,y)\,,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\,,\quad \frac{\partial f}{\partial y}$$

lardan biri kabi belgilanuvchi y bo‘yicha xususiy hosilasi kiritiladi:

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y f}{\Delta y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}\ . \qquad (6)$$

Bu holda x o’zgarmas deb qaraladi.

3-misol. f(x,y)= $2x^3$lny-$3y^2$x funksiyaning x va y bo’yicha xususiy

hosilalari topilsn.

Yechish. $f_x(x,y)=(2x^3\ln y-3y^2x)'_x=$ $6x^2$lny-$3y^2$.

$$f'_y(x,y)=(2x^3\ln y-3y^2x)'_y=2x^3\frac{1}{y}-6xy.$$

$z=f(x,y)$ funksiyaning $\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial x},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosilalari mavjud bo‘lsin.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=f''_{xx},\quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=f''_{yy}$$

lar $z=f(x,y)$ funksiyaning x va y argumentlari bo‘yicha ***II - tartibli xususiy hosilalari***,

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=f''_{xy},\quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\equiv\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=f''_{yx}$$

lar, esa $z=f(x,y)$ funksiyaning ***II- tartibli aralash hosilalari*** deyiladi.

4-misol. f(x,y)= $2x^3$lny-$3y^2$x funksiyaning II -tartibli xususiy va aralash

hosilalari topilsin.

Yechish. 3- misolga ko’ra $f_x(x,y)=6x^2\ln y-3y^2$ va $f'_y(x,y)=2x^3\frac{1}{y}-6xy.$

$$f''_{xx}=(f'_x)'_x=(6x^2\ln y-3y^2)'_x=12x\ln y,\quad f''_{yy}=(f'_y)'_y=-2x^3/y^2-6x=-2(x^3/y^2+3x),$$
$$f''_{xy}=(f'_x)'_y=6x^2/y-6y=6(x^2/y-y),\quad f''_{yx}=(f'_y)'_x=6x^2/y-6y=6(x^2/y-y).$$

Bu misol uchun $f''_{xy}=f''_{yx}$ ekan.

Quyidagi **aralash hosilalar haqidagi teorema** deb ataluvchi teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-teorema. Agar $z=f(x,y)$ funksiya va uning $f'_x,\quad f'_y,\quad f''_{xy},\quad f''_{yx}$ hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan, bu nuqtada II tartibli $f''_{xy},\quad f''_{yx}$ aralash hosilalar uzluksiz bo‘lsa, unda aralash hosilalar bu nuqtada o‘zaro teng, ya’ni $f''_{xy}=f''_{yx}$ bo‘ladi.

Bizga funksiya $M(x,y)$ nuqtaning biror atrofida aniqlangan va bu nuqtadan o‘tuvchi l to‘g‘ri chiziq bo‘yicha yo‘nalish biror $\boldsymbol{e}=(\cos\alpha, \cos\beta)$ birlik vektor orqali berilgan bo‘lsin. Bunda $\cos\alpha$, $\cos\beta$ berilgan $\boldsymbol{e}$ birlik vektorning mos ravishda OX va OY koordinata o‘qlari bilan hosil etgan α va β ($\beta=90^0-\alpha$) burchaklar bilan aniqlanadi va ***yo‘naltiruvchi kosinuslar*** deb ataladi.

Bu l to‘g‘ri chiziqda yotuvchi va $M(x,y)$ nuqtaning atrofiga tegishli boshqa bir N($x+\Delta x, y+\Delta y$) nuqtani qaraymiz. Bunda $z=f(x,y)$ funksiyaning o‘zgarishi

$$\Delta_l f = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x,y)$$

ayirma orqali ifodalanadi va unga funksiyaning ***l yo‘nalish bo‘yicha orttirmasi*** deyiladi.

$MN=\Delta l$ olsak, $N\to M$ da, ya’ni $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ da $\Delta l\to 0$ bo‘ladi.

9-ta`rif. Agar $\Delta l\to 0$ bo‘lganda $\Delta_l f/\Delta l$ nisbat chekli limitga ega bo‘lsa, bu limitga $z=f(x,y)$ funksiyaning ***l yo‘nalish bo‘yicha hosilasi*** deb ataladi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning l yo‘nalish bo‘yicha hosilasi

$$f'_l\,,\quad z'_l\,,\quad \frac{\partial f}{\partial l}\,,\quad \frac{\partial z}{\partial l}$$

lardan biri kabi belgilanadi va u

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta_l f}{\Delta l}$$

kabi aniqlanadi.

$\Delta l=\Delta x\cos\alpha+\Delta y\cos\beta$ tenglikdan foydalanib,

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta \qquad (7)$$

formula o‘rinli ekanligiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

10-ta`rif. $z=f(x,y)$ funksiyaning ***gradienti*** deb koordinatalari f'_x va f'_y xususiy hosilalardan iborat vektorga aytilad va u grad$f$ kabi belgilanadi.

Yo’nalish bo’yicha hosila va funksiya gradient orasida quyidagi munosabat o’rinli:

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\vec{e}\cdot \mathrm{grad}f=|\vec{e}|\cdot|\mathrm{grad}f|\cdot\cos\varphi=|\mathrm{grad}f|\cdot\cos\varphi\quad .$$

Bu yerda φ *l* yo‘nalishni ifodalovchi ***e*** birlik vektor bilan gradient vektor orasidagi burchak.

11-ta`rif. Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning berilgan $M(x,y)$ nuqtadagi to‘la orttirmasi

$$\Delta f=A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \qquad (8)$$

ko‘rinishda ifodalanib, unda $A=A(x,y)$ va $B=B(x,y)$ argumentlarnig Δx va Δy orttirmalariga bog‘liq bo‘lmagan ifodalar, α va β esa $\Delta x\to 0$, $\Delta y\to 0$ holda cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsa, unda bu funksiya $M(x,y)$ nuqtada ***differensiallanuvchi*** va $A\Delta x+B\Delta y$ *ga* funksiyaning ***differensiali*** deyiladi.

$z=f(x,y)$ funksiyaning differensiali df yoki $df(x,y)$ kabi belgilanadi va, ta’rifga asosan, (8) tenglikdan

$$df=A\Delta x+B\Delta y \qquad (9)$$

formula orqali topiladi.

z=f(x,y) funksiyaning differensiallanuvchiligini tekshirishda quyidagi teorema muhim o’rin tutadi.

1- teorema. Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning f'_x, f'_y xususiy hosilalari $M(x,y)$ nuqta va uning biror atrofida aniqlangan hamda uzluksiz bo‘lsa, unda funksiya bu nuqtada differensiallanuvchi va uning differensiali

$$df=f'_x\Delta x+f'_y\Delta y=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y \qquad (10)$$

formula bilan aniqlanadi.

(10) formulada $f(x,y)=x$ *deb olsak,*

$$dx = df = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = 1\cdot\Delta x + 0\cdot\Delta y = \Delta x\,.$$

Xuddi shunday $f(x,y)=y$ deb olsak, $dy=\Delta y$ bo'lishligini ko'ramiz.

Demak,i funksiya differensiali uchun (10) formulani quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\,. \qquad (11)$$

Bu tenglikning o'ng tomonidagi qo'shiluvchilar $z=f(x,y)$ funksiyaning mos ravishda x va y bo'yicha ***xususiy differensiallari*** deyiladi va $d_x f$, $d_y f$ kabi belgilanadi. df ga *funksiyaning* ***to'la differensiali deyiladi.***.

Bir o'zgaruvchl**i** funksiya differensiallanuvchi bo'lishi uchun $f'(x)$ hosilasi mavjudligi etarli edi, ikki o'zgaruvchili funksiyalar uchun uning xususiy hosilalarini mavjudligi differensiallanuvchi bo'lishi uchun yetarli emasligini ta`kidlab o'tamiz.

Ikki o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari

Faraz qilaylik, $z=f\,(x,y)$ funksiya tekislikdagi biror D sohada aniqlangan bo'lib, $M_0(x_0, y_0)$ bu sohaning ichki nuqtasi bo'lsin.

1-ta`rif. Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0, y_0)$ atrofiga tegishli ixtiyoriy $M(x,y)$ nuqta uchun

$$f\,(x_0, y_0)\geq f\,(x,y) \quad [f\,(x_0, y_0)\leq f\,(x,y)] \qquad (1)$$

tengsizlik bajarilsa, $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada ***maksimumga*** **(*minimumga*)** ega deyiladi.

Bu ta`rif to'la orttirma orqali quyidagicha ifodalanadi.

2-ta`rif. Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqtaning biror $U_r(x_0, y_0)$ atrofida $z=f\,(x,y)$ funksiyaning to'la orttirmasi uchun $\Delta f(x_0, y_0)\leq 0$ $[\Delta f(x_0, y_0)\geq 0]$ tengsizlik bajarilsa, unda bu funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada ***maksimumga*** **(*minimumga*)** ega deyiladi.

Bir o'zgaruvchili funksiyalardagi kabi, funksiyaning maksimum va minimumlari birgalikda ***funksiyaning ekstremumlari*** deyiladi.

Ikki o'zgaruvchili funksiya *ekstremumning zaruriy sharti.*

1-teorema (Ferma teoremasi). Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ekstremumga erishsa va bu nuqtada uning ikkala xususiy hosilalari mavjud bo'lsa, ular nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=0 \\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Isbot: $z=f(x,y)$ funksiyada $y=y_0$ deb olasak, bir o'zgaruvchili $h(x)=f(x,y_0)$ funksiyani hosil qilamiz. Teorema shartiga ko'ra bu funksiya $x=x_0$ nuqtada ekstremumga ega va uning hosilasi $h'(x)=f'_x(x,y_0)$ mavjud. Shining uchun ham, bir o'zgaruvchili funksiyalar uchun Ferma teoremasiga asosan, $h'(x_0)=f'_x(x_0,y_0)=0$ bo'ladi. x= x_0 deb olib,yuqoridagiday mulohaza yuritib, $f'_y(x_0,y_0)=0$ tenglikka ega bo'lamiz.

Agar $z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada ekstremumga erishsa va differensiallanuvchi bo'lsa, bu nuqtada uning differensiali $df(x_0,y_0)=0$ va gradienti grad$f(x_0,y_0)=0$ bo'ladi.

Masalan, $f(x,y)=4-x^2-y^2$ funksiya $M_0(0,0)$ nuqtada maksimumga erishadi va bu nuqtada

$$f'_x(0,0)=2x\Big|_{x=0}^{y=0}=0 \quad , \quad f'_y(0,0)=-2y\Big|_{x=0}^{y=0}=0 \Rightarrow df(0,0)=0,\ \text{grad}f(0,0)=0$$

tengliklar bajariladi.

(2) tengliklar ekstremumning faqat zaruriy shartini ifodalab, ekstremum bo'lishi uchun yetarli emas.

Masalan, $f(x,y)=x^2-y^2$ differensiallanuvchi funksiya bu funksiya uchun O(0,0) nuqtada (2) tengliklar bajariladi, ammo bu nuqtada funksiya ekstremumga ega emas. Chunki, bu holda to'la orttirma

$$\Delta f=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)=f(\Delta x,\Delta y)=\Delta x^2-\Delta y^2$$

ko‘rinishda bo‘lib, $\Delta x>\Delta y$ bo‘lganda musbat, $\Delta x<\Delta y$ holda esa manfiy qiymat qabul qiladi. Demak, O(0,0) nuqtaning ixtiyoriy atrofida $\Delta f(0,\ 0)$ to‘la orttirma o‘z ishorasini o‘zgartiradi va shu sababli bu nuqtada ekstremum mavjud emas.

3-ta`rif. Agar $z=f(x,y)$ funksiyaning xususiy hosilalari mavjud bo‘lsa, unda (2) tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar bu funksiyaning ***kritik yoki statsionar nuqtalari*** deb ataladi.

$z=f(x,y)$ funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtaning biror atrofida aniqlangan, uzluksiz hamda uzluksiz I- va II- tartibli hosilalarga ega deb faraz qilib, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$A=f''_{xx}(x_0,y_0)\,,\ B=f''_{xy}(x_0,y_0)\,,\ C=f''_{yy}(x_0,y_0)\,,\ \Delta=\begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix}=AC-B^2\,. \quad (3)$$

Ikki o’zgaruvchili funksiya ekstremumning yetarli shartlari

Biz ikki o’zgaruvchili funksiya ekstremumning yetarli shartlarini ifodalovchi quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

2-teorema. Agar $z=f(x,y)$ funksiya uchun $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqta bo‘lsa, (3) belgilashlarda quyidagi tasdiqlar o‘rinli :

1. $\Delta>0$, $A>0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada minimumga ega;
2. $\Delta>0$, $A<0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada maksimumga ega;
3. $\Delta<0$ holda funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada ekstremumga ega emas.

$\Delta=0$ bo‘lgan holda ekstremumni bu teorema orqali aniqlab bo‘lmaydi. Bu holda bu masala, funksiyaning $\Delta f(x_0,y_0)$ to‘la orttirmasining ishorasini tekshirish orqali yechiladi.

Ikki o’zgaruvchili $z=f(x,y)$ funksiyani ekstremumga tekshirish quyidagi algoritm (ketma-ketlik) asosida amalga oshiriladi:

1. funksiyaning $f'_x(x,y)\,,\ f'_y(x,y)$ xususiy hosilalari topiladi;
2. xususiy hosilalar nolga tenglashtirilib,

$$\begin{cases} f'_x(x,y)=0 \\ f'_y(x,y)=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi hosil etiladi;

3. hosil etilgan tenglamalar sistemasi yechilib, funksiyaning kritik nuqtalari topiladi. Agar kritik nuqtalar mavjud bo‘lmasa, unda funksiya ekstremumga ega bo‘lmaydi;

4. funksiyaning II- tartibli hosilalari topiladi;

5. kritik nuqtada (3) formulalar bo‘yicha *A*, *B*, *C* va Δ qiymatlari hisoblanadi;

6. Yetarli shartdan foydalanib, *A*, *B*, *C* va Δ larning qiymatlari bo‘yicha kritik nuqtada ekstremum bor yoki yo’ligi haqida xulosa qilinadi;

7. funksiyaning ekstremumlari (ekstremal qiymatlar) topiladi.

Misol sifatida, $f(x,y)=x^2+3xy+2{,}5y^2-5x-6y+1{,}5$ funksiyani ekstremumga tekshiramiz. Bu holda

$$f'_x(x,y)=2x+3y-5\,,\quad f'_y(x,y)=3x+5y-6$$

bo‘lib, ulardan tuzilgan

$$\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+5y=6 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechib, $M_0(7,-3)$ kritik nuqtani topamiz.

Endi berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilalarining kritik nuqtadagi qiymatlarini topamiz:

$$f''_{xx}(x,y)=2\,,\quad f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)=3\,,\quad f''_{yy}(x,y)=5$$

bo‘lgani uchun $A=2$, $B=3$, $C=5$ va $\Delta=AC-B^2=1$ bo’ladi.

Bunda $\Delta>0$, $A>0$ bo’lganligi uchun berilgan funksiya $M_0(7,-3)$ nuqta minimumga erishadi: $f_{min}=f(7,-3)=2$.

Mavzuga doir savollar va topshiriqlar

1. *n* o‘lchovli chiziqli fazoda skalyar ko‘paytma tushunchasi qanday kiritiladi?
2. *n* o‘lchovli evklid fazo ta`rifini keltiring.

3. *n* o‘lchovli evklid fazosida masofa qanday aniqlanadi?

4. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ta’rifini keltiring.

5. Ikki o‘zgaruvchili funksiya qanday ta’riflanadi?

6. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning aniqlanish va qiymatlar sohalari ta`riflarini keltirimg.

7. Tekislikdagi nuqtaning *r* radiusli atrofi deb nimaga aytiladi?

8. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti qanday ta’riflanadi?

9. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning limiti qanday xossalarga ega?

10. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning takroriy limiti nima?

11. Qaysi shartda takroriy limitlar o‘zaro teng bo‘ladi?

12. Qachon ikki o‘zgaruvchili funksiya nuqtada uzluksiz deyiladi?

13. Ikki o‘zgaruvchili uzluksiz funksiyalar qanday xossalarga ega?

14. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning argument bo‘yicha uzluksizligi nima?

15. Sohaning qanday nuqtasi ichki deb ataladi?

16. Qaysi shartda sohaning nuqtasi chegaraviy deyiladi?

17. Tekislikdagi qanday sohalar ochiq deb ataladi?

18. Tekislikdagi yopiq soha qanday ta’riflanadi?

19. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning xususiy hosilalari qanday ta’riflanadi?

20. Yo‘nalish bo‘yicha hosila qanday aniqlanadi?

21. Gradient nima?

22. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning II tartibli xususiy va aralash hosilalari qanday ta’riflanadi?

23. Aralash hosilalar haqidagi teoremada keltiring.

24. Qachon ikki o‘zgaruvchili funksiya differensiallanuvchi deyiladi?

25. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning to‘la differensiali nimaga teng?

26. Qaysi sartda ikki o‘zgaruvchili funksiya uzluksiz bo‘ladi?

27. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning maksimumi (minimumi) qanday ta’riflanadi?

28. Ikki o‘zgaruvchili funksiyaning ekstremumlari deganda nimani tushunasiz.

29. Ekstremumning zaruriy sharti nimadan iborat?

30.Eekstremumning yetarli sharti qanday ifodalanadi?

31.Ikki o‘zgaruvchili funksiyanig ekstremumga tekshirish algoritmi bosqichlarini keltiring.

Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin[1- 4].

1. z=arcsin(x+y). [x+y=1 va x+y=-1 chiziqlari orasidagi yo’lak.]

2. z=ln(y-x) . [y$\geq x$ yarim tekislik.]

3. z=x+$\sqrt{x}$. [x$\geq$ 0 yarim tekislik.]

4.z=$\frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$. [Tekislikning x^2+y^2<1 shartni qanoatlantiruvchi nuqtalari.]

Quyidagi funksiyalarning xususiy hosilalari topilsin[5- 7].

5. z= x^3y^2-2xy^3. 6. z= ln(x^2 +2y^3). 7. z= $(1+x^2)^y$.

Quyidagi funksiyalarning II-tartibli hosilalari topilsin[8- 10].

8. z=5x^2 -16xy +4y^2 . 9. z=$(4x+5y)^3$. 10. z=1,4$x^{0,2}$ $y^{0,7}$.

Funksiyalarning x=3,y=4, dx=0,1, dy=0,2 bo’lgandagi to’la differensiyallari topilsin[11- 12].

11. z=$\sqrt{x^2+y^2}$. [0,22 .]

12. z=x- $\sqrt{x^2+y^2}$. [0,12 .]

13. z=3x^2y-2xy +y^2-1 funksiya uchun $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ bo’lishligi tekshirilsin.

Quyidagi funksiyalarning kritik nuqtalari topilsin[14-15].

14. z=2xy-4-2y. *[(1,2) .]*

15. z=$(y-x)^2+(y+2)^2$. *[(-2,-2)]*

Quyidagi funksiyalar ekstremumga tekshirilsin[16-18].

16. z=xy^2(1-x-y). [$z_{max}=\frac{1}{64}$.] 17.

z = x^2+y^2-15xy. [$z_{min}=-125$.]

18. z=x-ye^x. [Ekstremum yo’q.]

Mavzuga doir testlar

1.n o'lchovli Evklid fazosi- ixtiyoriy ikkita vektor uchun . . . aniqlangan R^n fazo:
A) skalyar ko'paytma, B) qo'sish amali, C) ayirish amali, D) oddiy ko'paytirish amali

2. Asosi x va balandligi y bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakka doir masalalardan qaysi birlarining yechimlari ikki o'zgaruvchli funksiya bilan ifodalanadi?

A) yuzasini toppish, B) perimetrini toppish, C) gipotenuzasining uzunligini toppish, D) keltirilgan barcha masalalarning yechimlari.

3.z=f(x,y) funksiyaning sath chizig'i . . . munosabat bilan aniqlanadi:

A) f(x,y) =C, B) f(C,y) =0, C) f(x,C)=0, D) f(C,y) =C.

1. 4. $f(x,y)=\sqrt{16-x^2-y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi:

A) Radiusi R=4 va markazi O(0,0) nuqtada joylashgan doira;

B) Faqatgina radiusi R=4 va markazi O(0,0) nuqtada joylashgan aylananing nuqtalari;

C) Radiusi R=4 va markazi O(0,0) nuqtada joylashgan doiradan tashqaridagi tekislik nuqtalari;

D) Faqatgina radiusi R=4 va markazi O(0,0) nuqtada joylashgan aylananing ichkarisidagi nuqtalar.

5. $z= f(x,y)$ funksiyaning grafigi:

A) fazodagi sirt, B) tekislikdagi egri chiziq, C) fazodagi tekislik, D) fazodagi jism.

6. f(x,y)=$\frac{x^3+y^2}{x^2-y^2}$ funksiyaning O(1,1) nuqtadagi limiti:

A) Mavzud emas, B) 2, C) 0, D) 1.

7. $M_0(x_0,y_0)$ nuqtaning r radiusli atrofi tekislikdagi . . . shartni qanoatlantiruvchi M(x,y) nuqtalar: A) $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r$, B) $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=r$,

C) $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} > r$, D) $\sqrt{(x-x_0)^2-(y-y_0)^2} < r$,

8. Karrali limitda : A) x→ x_0 , y→ y_0 ga bir vaqtda, B) x→ x_0 , y→ y_0 ga ketma-ket,

C) x→ x_0 , D) y→ y_0 ga intiladi.

9. $z=f(x,y)$ funksiyaning x argumenti bo'yicha f'_x xususiy hosilasi:

A) $f'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta x}$, B) $f'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x, y+\Delta x)-f(x,y)}{\Delta x}$,

C) $f'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)}{\Delta x}$,

D) $f'_x = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y)}{\Delta x}$.

10. $z=f(x,y)$ funksiyaning y argumenti bo'yicha f'_y xususiy hosilasi:

A) $f'_y = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$, B) $f'_y = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x, y+\Delta y)-f(x,y)}{\Delta y}$,

C) $f'_y = \lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta y}$,

D) $f'_y = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x+\Delta x, y)-f(x,y+\Delta y)}{\Delta x}$.

11. $z=x^3+y^2-xy$ funksiyaning x bo'yicha f'_x xususiy hosilasi:

A) $f'_x = 3x^2+2y-y$; B) $f'_x = 3x+y-x$, C) $f'_x = 3x^2-y$,

D) $f'_x = 2x+3y^2-x$.

12. $z= x^3+y^2-xy$ funksiyaning y bo'yicha f'_y xususiy hosilasi:

A) $f'_y = 3x^2+2y-x$, B) $f'_y = 2y-x$, C) $f'_y = 3x^2+2y$,

D) $f'_y = 2y+x$.

13. z=f(x,y) funksiyaning to'la differensiali:

A) $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$, B) $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dx-\dfrac{\partial f}{\partial y}dy$, C) $df = \dfrac{\partial f}{\partial x}dy+\dfrac{\partial f}{\partial y}dx$,

D) $df = \frac{\partial f}{\partial y}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$.

14. $z = x^3 + y^2 - xy$ funksiyaning *dz* to‘la differensialini:

A) $dz = (3x^2 - x)dx + (2y - y)dy$, B) $dz = (3x + y^2 - x)dx + (2y^2 - y)dy$,

C) $dz = (3x - y)dx + (2y - x)dy$, D) $dz = 3x^2dx + 2ydy$.

15. z=f(x,y) funksiya $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada maksimumga ega deyiladi,agar biror $U_r(x_0, y_0)$ atofida: A) $f(x_0, y_0) \geq f(x,y)$, B) $f(x_0, y_0) \leq f(x,y)$, C) $f(x_0, y_0) \leq -f(x,y)$, D) $f(x_0, y_0) \geq 0$.

16. Eekstremumning zaruriy shartini ifodalavchi teoremada:

A) $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$, B) $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) \neq 0 \\ f'_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}$, C) $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$, D) $\begin{cases} f'_x(x_0, y_0) \neq 0 \\ f'_y(x_0, y_0) \neq 0 \end{cases}$.

17. Eekstremumning yetarli shartinidagi Δ xarakteristika teng:

A) AC-B^2, B) $B^2 - AC$, C) AC- B, D) AC-2B.

18. z=f(x,y) funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada minimumga ega ,agar:

A) $\Delta>0$, $A>0$, B) $\Delta>0$, $A<0$, C) $\Delta>0$, $A=0$, D) $\Delta<0$.

19. z=f(x,y) funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada maksimumga ega ,agar:

A) $\Delta>0$, $A<0$, B) $\Delta>0$, $A>0$, C) $\Delta>0$, $A=0$, D) $\Delta=0$.

20. z=f(x,y) funksiya $M_0(x_0,y_0)$ kritik nuqtada ekstremumga ega emas ,agar:

A) $\Delta<0$, B) $\Delta>0$, $A>0$, C) $\Delta>0$, $A=0$, D) $\Delta=0$.

21. Quyidagilardan qaysi birlari z=f(x,y) funksiyani ekstremumga tekshirish algoritmi bosqichlariga kiradi:

A) $f'_x(x,y)$, $f'_y(x,y)$ xususiy hosilalari topiladi,

B) $\begin{cases} f'_x(x,y) = 0 \\ f'_y(x,y) = 0 \end{cases}$ tenglamalar sistemasi hosil qilinadi,

C) funksiyaning kritik nuqtalari topiladi,

D) keltirilganlarning barchasi.

22. Quyidagilardan qaysi birlari z=f(x,y) funksiyani ekstremumga tekshirish algoritmi bosqichlariga kiradi:

A) funksiyaning II- tartibli hosilalari topiladi**,**

B) kritik nuqtada *A*, *B*, *C* va Δ qiymatlari hisoblanadi,

C) *A*, *B*, *C* va Δ larning qiymatlari bo‘yicha kritik nuqtada ekstremum bor yoki yo’ligi haqida xulosa qilinadi.

D) keltirilganlarning barchasi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Jabborov N.M., Aliqulov E.O., Axmedova Q.S. Oliy matematika. 1, 2 qismlar. Qarshi, 2010.

2. Blinder S. M.*Guide to Essential Math. 2nd Edition.* Elsevier. 2013. – 320 p.

3. Баврин И. И. *Высшая математика для химиков, биологов и медиков: учебник и практикум для прикладного бакалавриата.* 2-е изд., испр. и доп. М.: Издательство «Юрайт», 2016. – 329 с.

4. Минорский В. П.*Сборник задач по высшей математике: учебное пособие для втузов.* 15-е изд. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. – 336 с.

5. Высшая математика для зкономистов (Под редакцией проф. Н.Ш. Кремера). Москва. “Банк и биржа”, 2010г.

6. Мамуров Б.Ж. Иктисодчилар учун математика. II кисм. Бухоро, 2005.

MUNDARIJA

Оглавление