O‘zbekiston Respublikasi
Oliy va o‘rta maxsus ta’lim vazirligi
Toshkent temir yo‘l muhadislari instituti

Narimov Sh.
Eshmamatova D.B.

OLIY MATEMATIKA

Birinchi qism

Barcha ta’lim yo‘nalishlarning 1-2 – bosqich bakalavriat talabalari va professor-o‘qituvchilari uchun o‘quv qo‘llanma

Toshkent – 2020 y

UO’K 517.98

Oliy matematika. O’quv qo’llanma. Sh. Narimov, D.B.Eshmamatova.

TTYMI, T. : 2020, 254 bet.

Ushbu o’quv qo’llanma texnik oliy o’quv yurtlarining barcha ta’lim yo’nalishlaridagi bakalavriatning kunduzgi, maxsus sirtqi, sirtqi bo’lim talabalari va professor-o’qituvchilari uchun mo’ljallangan. Qo‘llanma oliy matematika fanining oquv dasturi tarkibiga kiruvchi oliy algebraning matritsalar, determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, fazoda va tekislikda analitik geometriyaning elementlari va matematik tahlilning funksiyalar nazariyasi, limitlar nazariyasi, differensial hisob va differensial hisobning asosiy teoremalari, aniqmasliklarni ochish, Lopital qoidalari, Teylor va Makloren formulalari kabi boblarini o‘z ichiga olgan.

Fazoda va tekislikda analitik geometriyaning ikkinchi tartibli egri chiziqlar, sirtlar, matematik tahlilning limitlar nazaziyasi, differensial hisob kabi tushunchalariga oid masalalarni yechishda talabalarga Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish tavsiya etilgan.

O’quv qo’llanma Institutning Ilmiy-uslubiy kengashi tomonidan nashrga tavsiya etildi.

Taqrizchilar: R.N.Ganixodjayev – O’zMU “Algebra va fuksional analiz” kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori, professor.

B. Egamberdiyev – TTYMI “Oliy matematika” kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi.

SO‘Z BOSHI

Ma’lumki, mamlakatimizda oxirgi yillarda sog‘lom va barkamol avlodni tarbiyalash, yoshlarning o‘z ijodiy va intellektual salohiyatini ro‘yobga chiqarish, zamon talablariga javob beradigan, mehnat bozorida raqobatbardosh kadrlar tayyorlash uchun zarur shart sharoitlar va imkoniyatlarni yaratish ustuvor yo‘nalishlardan biri bo‘lib kelmoqda. Bu maqsadlarni ro‘yobga chiqarish yo‘lida respublikada oliy ta’limni tizimli isloh qilishning ustuvor yo‘nalishlarini belgilash, zamonaviy bilim va yuksak ma’naviy-axloqiy fazilatlarga ega, mustaqil fikrlaydigan yuqori malakali kadrlar tayyorlash jarayonini sifati jihatidan yangi bosqichga ko‘tarishni samarali yo‘lga qo‘yish, oliy ta’limni modernizatsiya qilish, ilg‘or ta’lim texnologiyalariga asoslangan holda ijtimoiy soha va iqtisodiyot tarmoqlarini rivojlantirish maqsadida qator farmon va qarorlar ishlab chiqilmoqda. Bu qonun hujjatlariga asosan yangi avlod o‘quv adabiyotlarini yaratish va ularni oliy ta’lim muassasalarining ta’lim jarayoniga keng tatbiq etish, oliy ta’lim muassasalarini zamonaviy o‘quv, o‘quv-metodik va ilmiy adabiyotlar bilan ta’minlash, shu jumladan, eng yangi xorijiy adabiyotlar sotib olish va tarjima qilish, axborot-resurs markazlari fondlarini muntazam yangilab borish kabi masalalar ustuvor masala sifatida belgilangan.

Ushbu o‘quv qo‘llanma talabalar uchun “Oliy matematika” fanining nazariy qismiga bag‘ishlangan bo‘lib, texnik oliy o‘quv yurtlari talabalarida, ya’ni bo’lajak ishlab chiqarish, iqtisodiyot sohalari muhandislarida matematik fikrlash ko‘nikmasini oshiradi. Qo‘llanmada nazariy ma’lumotlar batafsil, sodda tilda bayon etilib, har bir mavzuga oid namunaviy masalalar yechimlari keltirilgan.

O‘quv qo‘llanmaning asosiy maqsadi – “Oliy matematika” fanini o‘rganish jarayonida bakalavriatning kunduzgi, sirtqi ta’lim shakli yo‘nalishlarida taxsil olayotgan talabalarning auditoriyada berilgan materiallar va mustaqil ishlarini samarali bajarishga yordam berishdan iborat.

O‘quv qo‘llanma “Oliy matematika” fanining dasturi tarkibiga kiruvchi oliy algebra elementlari: matritsalar, determinantlar, chiziqli tenglamalar sistemasi, fazoda va tekislikda analitik geometriyaning elementlari, matematik tahlilning: bir o‘zgaruvchili funksiyalar nazariyasi, limitlar nazariyasi, differensial hisob va differensial hisobning asosiy teoremalari, aniqmasliklarni ochish, Lopital qoidalari, Teylor va Makloren formulalari kabi asosiy bo‘limlarini o‘z ichiga olgan.

Fazoda va tekislikda analitik geometriyaning ikkinchi tartibli egri chiziqlar, sirtlar, matematik tahlilning limitlar nazaziyasi, differensial hisob kabi tushunchalariga oid masalalarni yechishda talabalarga Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish tavsiya etilgan.

Ushbu o‘quv qo‘llanma O‘zbekiston Respublikasi Prezidentining 2017 yil 20 apreldagi “Oliy ta’lim tizimini yanada rivojlantirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ-2909-sonli, 2017 yil 27 iyuldagi “Oliy ma’lumotli mutaxassislar tayyorlash sifatini oshirishda iqtisodiyot sohalari va tarmoqlarining ishtirokini yanada kengaytirish chora-tadbirlari to‘g‘risida” gi PQ-3151-sonli, 2019 yil 8 oktyabrdagi “O‘zbekiston Respublikasi oliy ta’lim tizimini 2030 yilgacha rivojlantirish konsepsiyasini tasdiqlash to‘g‘risida”gi PF-5847-son farmoni, hamda 2019 yil 9 iyuldagi “Matematika ta’limi va fanlarini yanada rivojlantirishni davlat tomonidan qo‘llab-quvvatlash, shuningdek, O‘zbekiston Respublikasi Fanlar Akademiyasining V.I.Romanovskiy nomidagi matematika instituti faoliyatini tubdan takomillashtirish chora-tadbirlari to‘g‘risida”gi PQ 4387-sonli qarorlari ijrosini ta’minlash maqsadida, xorijiy texnika oliy o‘quv yurtlari talabalari uchun yozilgan yangi zamonaviy matematika o‘quv adabiyotlardan foydalangan holda tayyorlandi.

O‘quv qo‘llanma bakalavriatning texnik yo‘nalishlari Davlat ta’lim standartlariga va “Oliy matematika” fanining tasdiqlangan o‘quv dasturining (1-semestri) talablariga mos keladi. O‘quv qo‘llanmaning yozilishida mualliflarning ko‘p yillar davomida “Oliy matematika” fanini o‘qitishdagi tajribalariga tayanilgan.

O‘quv qo‘llanma texnika oliy o‘quv yurtlarida taxsil olayotgan bakalavriatning texnika yo‘nalishining barcha turdagi, ya’ni kunduzgi, sirtqi va maxsus sirtqi ta’lim shaklidagi talabalari, hamda shu yo‘nalishlarda ta’lim berayotgan professor-o‘qituvchilar uchun mo‘ljallangan.

Qo‘llanmani tayyorlashda mualliflar O‘zMUning “Algebra va funksional analiz” kafedrasi, hamda TTYMIning “Oliy matematika” kafedrasining barcha a’zolariga foydali fikr-mulohazalari uchun minnatdorchilik bildiradi.

Mualliflar.

O’quv qo’llanmada qyidagi shartli belgilashlardan foydalanilgan:

$\boxed{\boldsymbol{t}}$ **-Ta’rif**; $\boxed{\boldsymbol{T}}$ **-Teorema**; $\boxed{n}$ **Natija**; $\boxed{!}$ -Izoh.

I BOB. OLIY ALGEBRA ELEMENTLARI

1. MATRITSA VA DETERMINANTLAR

Ushbu bo‘limda chiziqli algebraning elementlari bayon etilib, bunda matritsa va determinantlar nazariyalari haqidagi boshlang‘ich ma’lumotlar hamda ularning qo‘llanilishi bayoni keltirilgan. Matritsalar hisobidan oliy matematikada (chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda, vektorlar algebrasida, differensial tenglamalar kursida, ehtimollar nazariyasida), nazariy mexanikada, elektrotexnikada, nazariy fizikada va boshqa turli sohalarda keng qo‘llaniladi. Matritsalar hisobi ko‘p o‘zgaruvchili noma’lumlarga doir real masalalarning yechimlarini kompakt ko‘rinishda topish imkoniyatini yaratib beradi.

Bo‘limning mavzulari:

1.1. Matritsa tushunchasi. Matritsaning xususiy xollari-ko‘rinishlari.

1.2. O‘rin almashtirish va o‘rniga qo‘yishlar.*

1.3. Ixtiyoriy tartibli determinant tushunchasi.*

1.4. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar.

1.5. Determinantlarning xossalari.

1.6. Determinantni satr(ustun) elementlari bo‘yicha yoyish haqida teorema.

1.7. “n” –tartibli determinantni hisoblash usullari.

1.7.1. Determinantlarning tartibini pasaytirib hisoblash usuli.

1.7.2. Determinantlarni “uchburchak ko‘rinishiga keltirish” yordamida hisoblash.

Ko‘p hadli yig‘indi va ko‘paytmalarni qisqacha yozish uchun qabul qilingan quyidagi matematik belgilashlardan foydalanamiz:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + ... + a_n, \quad \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n.$$

1.1. Matritsa tushunchasi. Matritsaning xususiy xollari- ko‘rinishlari

$\boxed{t}$ $(m \times n)$ **o‘lchovli matritsa** deb m ta satr va n ta ustunlardan tashkil topgan va elementlari a_{ij} sonlardan iborat bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchakli jadvalga aytiladi:

$$A = \left\| a_{ij} \right\|_{m,n} = (a_{ij})_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

bu erda $i = 1,...,m;\ j = 1,...,n$. a_{ij} sonlar matritsaning elementlari deyiladi.

i, j – matritsa elementining joylashgan o‘rnini ko‘rsatuvchi sonlar: *i* – satr raqami, *j* – ustun raqami. *m*×*n* matritsaning elementlari soni, uni *m* ta satrlar sonini *n* ta ustunlarga ko‘paytirish orqali aniqlanadi.

Uning o‘lchami (*m*×*n) ga teng deyiladi*.

Matritsaning xususiy xollari-ko‘rinishlari

$\boxed{t}$ O‘lchami (*m*×*n)*ga teng **nol matritsa** deb barcha elementlari nolga teng bo‘lgan matritsaga aytiladi, uni $\varnothing$ kabi belgilanadi va nol matritsa deb yuritiladi. Masalan:

$$\varnothing = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{t}$ O‘lchami $(1 \times n)$ ga teng matritsalarga **satr-matritsa** yoki satr deyiladi, masalan:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7{,}3 \end{pmatrix}_{1,3}.$$

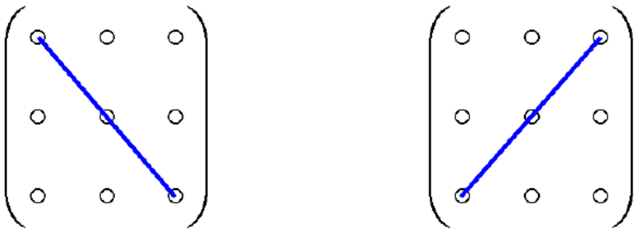
$\boxed{t}$ O‘lchami $(m \times 1)$ ga teng matritsalarga **ustun-matritsa** yoki ustun deyiladi, masalan:

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}_{3,1}.$$

$\boxed{t}$ Agar matritsaning satrlari soni *m* uning ustunlari soni *n* ga teng bo‘lsa, ya’ni $m = n$ bo‘lsa, u holda, bunday matritsaga **kvadrat** matritsa deyiladi. Odatda bunday holda *n* soniga matritsaning **tartibi** ham deb ataladi, masalan *n*=3 da:

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 0 & -7 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}_{3,3}.$$

$\boxed{t}$ Kvadrat matritsaning **bosh** diagonali elementlari deb $a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}$ sonlardan tashkil topgan, yani jadvalning chap yuqori burchagidan o‘ng quyi burchakka qarab yo‘nalgan diagonalidagi elementlariga aytiladi; **qo‘shimcha** diagonalining elementlari deb esa, jadvalning o‘ng yuqori burchagidan chap quyi burchakka qarab yo‘nalgan diagonalidagi elementlariga ayitadi:



$\boxed{t}$ Bosh diagonalidan yuqorisida va quyisida turgan barcha elementlar nolga teng bo‘lsa, bunday kvadrat matritsaga **diagonal matritsa** deyiladi, misol uchun:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -11 \end{pmatrix}.$$

$\boxed{t}$ Bosh diagonalning bir tomonida joylashgan barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, bunday kvadrat matritsaga **uchburchak** matritsa deyiladi, misol uchun:

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ - yuqori uchburchakli matritsa;

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 0 \\ 4 & -8 & 1 \end{pmatrix}$$ - quyi uchburchakli matritsa.

$\boxed{t}$ Bosh diagonali elementlari birlardan, qolgan elementlari esa nollardan iborat kvadrat diagonal matritsaga **birlik** matritsa deyiladi va u E harfi bilan belgilanadi. Masalan, 3-tartibli birlik matritsa quyidagi ko‘rinishga ega:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{t}$ Matritsani **transponirlash** deganimizda, matritsaning satr elementlarini o'sha nomerli ustun elementlarilariga mos almashtirilishiga aytiladi. Shunday qilib, berilgan matritsani transponirlaganimizda matritsaning satrlari ustunlariga bir xil ketma-ketlikda o'rinlari almashadi degani, va aksincha.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

Kvadrat matritsani transponirlash uchun uning o'zini bosh diagonali atrofida 180° ga burish orqali ham amalga oshiriladi.

1.2. * O'rin almashtirish va o'rniga qo'yishlar

$\boxed{t}$ n ta $a_1, a_2, ..., a_n$ simvol(belgi)larning **o'rin almashtirishi** deb, ushbu simvol(belgi)larning ma'lum tartibda ixtiyoriy ravishda joylashishiga aytiladi. Berilgan n ta belgini $1, 2, ..., n$, sonlar orqali tartiblash mumkinligi sababli, ixtiyoriy n ta simvol(belgi) o'rin almashtirishlarini o'rganish ushbu sonlarning o'rin almashtirishini o'rganishga olib keladi. n ta sonning barcha o'rin almashtirishlari soni $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot n$ ga teng bo'ladi, keyinchalik uni "n –faktorial" deb o'qiladi va $n!$ kabi belgilanadi.

Misol: 1, 2, 3 sonlarining barcha o'rin almashtirishlari quyidagi ko'rinishga ega: 123, 132, 213, 231, 312, 321. Ularning soni 3! = 6 ga teng.

$\boxed{t}$ Ikkita sonlarning o'rinlarini almashtirishdan inversiya hosil bo'ladi, agar katta son kichik sondan oldin tursa, bu ikki son **inversiyani** hosil qiladi va kichik son katta sondan oldin tursa ularning joylashish **tartibini** hosil qiladi.

Inversiyalar sonini hisoblash usuli: o'rin almashtirish sonlarini ularning yozilish tartibida o'qiymiz (chapdan o'ngga), har bir son uchun uning o'zidan o'ngda turgan sonlardan kichik sonlar nechtaligini sanaymiz va natijada hosil bo'lgan barcha sonlarni qo'shamiz.

Misol: 528371964 o'rin almashtirishda inversiyalar soni quyidagiga teng

$$4 + 1 + 5 + 1 + 3 + 2 + 1 = 17.$$

$\boxed{t}$ O‘rin almashtirishlardagi inversiyalar soni juft yoki toq bo‘lishi mumkin, shunga qarab inversiyalar juft yoki toq deyiladi.

$\boxed{t}$ O‘rin almashtirishda ikki sonning o‘rnini almashtirish **transpozitsiya** deyiladi. *i* va *j* sonlarining transpozitsiyasi (*i*, *j*) orqali belgilanadi. n ta sonning ixtiyoriy ravishda o‘rin almashtirishidan o‘sha sonning boshqa ixtiyoriy o‘rin almashtirishiga qator o‘tish transpozitsiyalarni bajarish orqali o‘tish mumkin va bu $n-1$ tadan ko‘p bo‘lmagan transpozitsiya orqali amalga oshiriladi.

Misol: 25134 o‘rin almashtirishdan 42513 o‘rin almashtirishga to‘rtta transpozitsiyalarni bajargandan keyingina o‘tish mumkin: (2,4), (2,5), (1,5), (1,3).

$\boxed{t}$ $1,2,...,n$ sonlarni, ya’ni n ta sonlarni o‘rniga qo‘yishlari yoki n-darajali o‘rniga qo‘yish deb, bu sonlar to‘plamini o‘ziga bir qiymatli akslantirishga aytiladi, ya’ni 1 dan n gacha bo‘lgan har bir songa bu sonlardan biri va ikkita turli raqamlardan iborat songa har doim ikkita turli sonlar doim mos keladi.

O‘rinlashtirishlar umumiy qavslarga olingan ikkita satr ko‘rinishida yoziladi va bunda yuqori satrda joylashgan har bir songa uning ostidagi quyi satrda joylashgan yagona son mos keladi.

Masalan, $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ quyidagi 1→1, 2→3, 3→4, 4→2 o‘rniga qo‘yishni ifodalaydi. Boshqacha qilib aytganda, n-darajali o‘rniga qo‘yish – bu n ta sonning ikkita turli o‘rin almashtirishlarini mos qo‘yilishidir.

Yuqori satrdagi sonlarning joylashuviga ko‘ra bitta o‘rniga qo‘yishni bir necha usulda yozish mumkin.

Masalan, $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ yozuvlar 1 2 ga, 2 3 ga, 3 1 ga o‘tadigan aynan bitta o‘rniga qo‘yishni ifodalaydi. *n* ta soning o‘rniga qo‘yishlari soni *n*! ga tengligidan *n* elementli o‘rniga qo‘yishlar soni ham *n*! ga teng.

$\boxed{t}$ Agar ikkala satrdagi umumiy inversiyalar soni juft bo‘lsa, o‘rniga qo‘yishlar juft deyiladi, agar ikkala satrdagi umumiy inversiyalar soni toq bo‘lsa o‘rniga qo‘yishlar toq deyiladi.

1.3. * Ixtiyoriy tartibli determinant tushunchasi

"n"-tartibli kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin:

$$A=(a_{ij})_{n,n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$\boxed{t}$ ***n*-tartibli determinant**, yoki A matritsaning determinanti deb, $n>1$ bo‘lganda ushbu matritsa elementlaridan tashkil topgan quyidagi formula yordamida hisoblanadigan songa aytiladi:

$$|A|=|a_{ij}|_{n,n}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^{s+t}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}\ ,$$

bu erda yig‘indi o‘zaro turlicha bo‘lgan barcha o‘rinlashtirishlar bo‘yicha olinadi, ya’ni

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix},$$

s – yuqori satrdagi, t – esa quyi satrdagi inversiyalar soni.

Yig‘indidagi qo‘shiluvchilar **determinantni tashkil etuvchi hadlari** deyiladi; determinantni tashkil etuvchi har bir hadi matritsaning har bir satr va har bir ustunlardan bittadan olingan matritsaning n ta elementlaridan iborat ko‘paytmasiga teng, bunda agar indekslar o‘rniga qo‘yishlari soni juft bo‘lsa ushbu ko‘paytma o‘z ishorasi bilan olinadi, agar indekslari soni toq bo‘lsa qarama-qarshi ishorasi bilan olinadi.

Birinchi tartibli determinant o‘zining yagona elementiga teng bo‘ladi. n-tartibli determinantni tashkil etuvchi barcha hadlari soni $n!$ ga teng. A matritsaning elementlari, satrlari, ustunlari va h.k. mos ravishda $|A|$ determinantning tashkil etuvchi elementlari, uning satrlari, ustunlari elementlari hosil qiladi deyiladi.

1.4. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlar

$\boxed{t}$ Ikkinchi tartibli A kvadrat matritsaning **ikkinchi tartibli determinanti** deb quyidagiga songa aytiladi:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

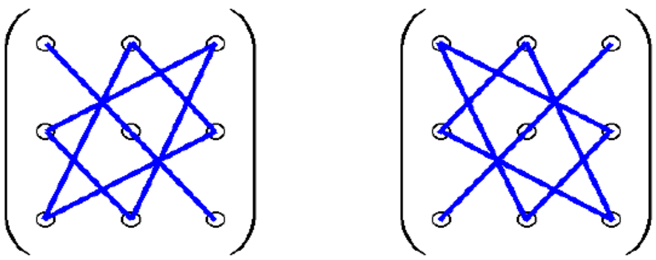
Masalan, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$.

$\boxed{t}$ Uchinchi tartibli A kvadrat matritsaning **uchinchi tartibli determinanti** deb quyidagi songa aytiladi:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}$$

.

Bu ifoda uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashning uchburchak (Sarryus) qoidasi deb ham ataladi. Uni quyidagi sxema yordamida ko’rsatishimiz ham mumkin:



+ -

bunda determinantni tashkil etuvchi elementlar doirachalar, elementlarni mos ko‘paytmalari esa yuqorida keltirilgan chizmadagi kesmalar yoki uchburchak uchlaridagi sonlar ko‘paytmalari bilan ifodalanadi. Ularni “+” yoki “-” ishoralari determinantning tarkibiga kiruvchi yig’indilar ishorasiga mos, masalan,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 0 - 0 \cdot 2 \cdot 0 - 1 \cdot 3 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 0 = -1.$$

1.5. Determinantlarning xossalari

Quyida keltirilgan xossalar 2- yoki 3-tartibli determinantlarni bevosita hisoblashlar yordamida oson tekshiriladi va n-tartibli determinantlar uchun ham o‘rinli bo‘ladi.

Avvalo zarur ta’riflarni kiritib o‘tamiz.

$\boxed{t}$ Bir xil uzunlikdagi **bir nechta satrlarning yig‘indisi** deb, har bir elementi berilgan satrlarning mos elementlari yig‘indisiga teng satrga aytiladi.

$\boxed{t}$ **Satrni songa ko‘paytmasi** deb, berilgan satrning barcha elementlarini berilgan songa ko‘paytirishdan keyin hosil bo‘lgan satrga aytiladi.

$\boxed{t}$ Bir xil uzunlikdagi bir nechta satrlarning **chiziqli kombinatsiyasi** deb, ushbu chiziqli kombinatsiyaning koeffitsientlari deb ataluvchi qandaydir sonlarga berilgan satrlar elementlarini ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng satrga aytiladi. Agar bitta satr boshqa satrlarning chiziqli kombinatsiyasiga teng bo‘lsa, u holda u satr boshqa satrlar orqali chiziqli ifodalangan deyiladi. Masalan, $(1,-1,-3,-5)=3(1,1,1,1)-2(1,2,3,4)$ ushbu tenglik o‘ng tomondagi birinchi satr bilan ikkinchi satrning chiziqli kombinatsiyasi ekanligini bildiradi.

Quyida determinantlarning xossalarini keltiramiz:

1°. Determinant transponirlanganda uning qiymati o‘zgarmaydi.

Birinchi xossa $|A|$ determinantining satr va ustunlarining o‘zaro teng huqligini bildiradi. Boshqacha qilib aytganda, satrlar uchun isbotlangan determinant xossalari ustunlar uchun ham o‘rinli va aksincha.

2°. Ikkita ixtiyoriy satr(ustun)larning o‘rinlari almashtirilganda determinant qiymatining ishorasi qarama-qarshisiga o‘zgaradi.

3°. Ikkita bir xil satr(ustun)li determinantning qiymati doim 0 ga teng.

Ikkinchi xossaga asosan: satrlarning o‘rni almashganda

$$\Delta=-\Delta,\ \Delta+\Delta=0\ ,\ 2\Delta=0 \Rightarrow \Delta=0.$$

4°. Ixtiyoriy satr(ustun)ning umumiy ko‘paytuvchisini determinant belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

Bu xossani boshqacha qilib ham ifodalash mumkin: $|A|$ determinantning qandaydir satr(ustun)ining barcha elementlarini k songa ko‘paytirish determinantni ushbu songa ko‘paytirishga teng kuchli ekanligini bildiradi, masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 \\ 6 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

5°. Agar |A| determinantning qandaydir satr(ustun)ining barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda determinantning o‘zi ham nolga teng.

Bu xossa avvalgi xossadan $k=0$ bo’lganda kelib chiqadi.

6°. Agar determinant bir satri (ustun)ning barcha elementlari boshqa satr (ustun)ning mos elementlariga proporsional bo‘lsa, u holda bu determinant nolga teng.

7°. Agar ixtiyoriy satr (ustun)ning elementlari ikkita qo‘shiluvchidan iborat bo‘lsa, u holda bu determinant ikki determinant yig‘indisiga teng bo‘ladi, ularning birinchisining mos satr (ustun)ida birinchi qo‘shiluvchi, ikkinchisida esa ikkinchi qo‘shiluvchi teng bo‘lib qoldiriladi, qolgan elementlar esa saqlanib qolinadi, masalan,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1+3 & 3+2 & 5+1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}.$$

8°. Agar determinantning ixtiyoriy satr (ustun)i elementlariga boshqa bir satri (ustuni)ning elementlarini biror o’zgarmas songa ko‘paytirib ularning mos elementlariga qo‘shilsa, u holda determinantning qiymati o‘zgarmaydi.

1.6. Determinantni satr(ustun) elementlari bo‘yicha yoyish haqida teorema

n-tartibli determinantni ko‘rib chiqaylik:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{t}$ n-tartibli determinant a_{ij} **elementining** M_{ij} **minori** deb kesishmasida a_{ij} element bo‘lgan *i*-satr va *j*–ustunni o‘chirishdan hosil qilingan $(n-1)$-tartibli determinantga aytiladi.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Rightarrow M_{ij}.$$

Masalan, $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$, $M_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$.

$\boxed{t}$ a_{ij} elementning A_{ij} **algebraik to‘ldiruvchisi deb, uning** $(-1)^{i+j}$ ishorali minoriga aytiladi, bu erda kesishmasida a_{ij} element bo‘lgan i – satr raqami, j – ustun raqami, $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, masalan,

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = (-1)^4 M_{13} = M_{13},\ A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = (-1)^5 M_{32} = -M_{32}$$

$\boxed{T}$ n-tartibli $|A|$ determinant uning ixtiyoriy satr (ustun) elementlarini ularga mos algebraik to‘ldiruvchilari ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \ldots + a_{in} A_{in},\ i = 1, \ldots, n,$$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \ldots + a_{nj} A_{nj},\ j = 1, \ldots, n.$$

Ushbu formulalar determinantni ***i*-satr yoki *j*-ustun bo‘yicha yoyishni** bildiradi. Masalan, uchinchi tartibli determinantlar uchun birinchi ustun bo‘yicha yoyish quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} A_{11} + a_{21} A_{21} + a_{31} A_{31} =$$

$$= a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{21} a_{32} a_{13} - a_{13} a_{22} a_{31} - a_{21} a_{12} a_{33} - a_{32} a_{23} a_{11}.$$

$\boxed{n}$ $|A|$ determinantning ixtiyoriy satr (yoki ustun) elementlarini boshqa bir satr (yoki ustun) elementlarining mos algebraik to‘ldiruvchisiga ko‘paytmalarining algebraik yig‘indisi har doim nolga teng:

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_{kj} = 0,\ k \neq i.$$

Bevosita hisoblashlar shuni ko‘rsatadiki, ushbu yig‘indiga ikkita bir xil satr (ustun)li determinantlar mos keladi.

1.7. “*n*”-tartibli determinantni hisoblash usullari

Yuqori tartibli determinantlarni uning xossalaridan foydalangan holda ikkita usulda hisoblanadi.

1.7.1. Determinantlarni “tartibni pasaytirib” hisoblash usuli

“n”-tartibli determinantni satr (ustun) bo‘yicha yoyish formulasiga asosan tartibini pasaytirib hisoblash mumkin bo‘ladi

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in},$$

Bu formuladagi barcha algebraik to‘ldiruvchilar $(n-1)$-tartibli determinantlardir. Shuning uchun qo‘yilgan masalaning yechimi ya’ni n-chi tartibli determinantni hisoblash n ta $(n-1)$-tartibili determinantlarni hisoblashlar va yuqoridagi yig‘indini hisoblashdan iborat bo‘ladi.

Agar berilgan determinantning biron bir satr(ustun)idagi elementlari orasida nolga teng bo‘lganlari ko‘p bo‘lsa, u holda aynan ushbu satr(ustun) elementlari bo‘yicha yoyish qulaydir. Shu bilan birga, determinantning keltirilgan xossalaridan foydalangan holda, biror bir satr(ustun)idagi bittadan tashqari barcha elementlarini nolga aylantirish ham mumkin.

1.7.2. Determinantni “uchburchak ko‘rinishga keltirish” hisoblash usuli

Determinantni tuzilishini 1°– 8° xossalaridan foydalanib shunday bir ko‘rinishga keltirish mumkinki, bunda bosh diagonalidan yuqori(quyi)sida joylashgan barcha elementlari nolga teng bo‘ladi, ya’ni determinant uchburchak ko‘rinishga ega bo‘ladi va uning qiymati bosh diagonalda joylashgan barcha elementlarning ko‘paytmasiga teng bo‘ladi:

$$|A| = \begin{vmatrix} \tilde{a}_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{nn} \end{vmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii} = \tilde{a}_{11} \cdot \tilde{a}_{22} \cdot \ldots \cdot \tilde{a}_{nn}.$$

Misol:

$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$ determinantni ikkita usulda hisoblang.

1). Determinantni birinchi satr bo‘yicha yoyamiz:

$$\Delta = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 - 3 = -1.$$

2). Determinantni uchburchak ko‘rinishga keltiramiz:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -0,5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -1.$$

Bayon etilgan ma’lumotlarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi zarur:

Matritsa haqida tushunchaga ega bo‘lish;

Matritsaning xususiy ko‘rinishlarini bilish;

O‘rin almashtirish va o‘rniga qo‘yishlar;

Ixtiyoriy tartibli determinantlar tushunchasi;

Determinantlarning xossalari;

Determinantni satr (ustun) elementlari bo‘yicha yoyish;

“n”–chi tartibli determinantni hisoblash usullari:

a) determinantni“tartibini pasaytirib” hisoblash usuli;

b) detrminantlarni”uchburchak ko‘rinishiga keltirib” hisoblash usuli;

Minor tushunchasini bilish, topish va hisoblash;

Algebraik to‘ldiruvchi tushunchasini bilishi, topish va hisoblash.

2. MATRITSALAR USTIDA AMALLAR. TESKARI MATRITSA

Ushbu bo‘limda chiziqli algebraning elementlari bayon etilib, ularda matritsa va determinantlar nazariyalari haqidagi boshlang‘ich va asosiy ma’lumotlar keltirilgan. Matritsalar ustida arifmetik amallar bajarish, teskari matritsa va uni hisoblash algaritmlari keltirilgan. Turli xil matritsali chiziqli tenglamalarni teskari matritsalar yordamida yechish usulari, matritsaning rangini topish, matritsalar ustida elementar almashtirishlar bajarishlar berilgan.

Bo‘limning mavzulari:

2.1. Matritsalar ustida amallar.

2.2. Teskari matritsa. Chap va o‘ng teskari matritsaning mavjudligi haqida teorema. Teskari matritsani topish algoritmi.

2.3. Matritsali chiziqli tenglamalarni yechish.

2.4. Matritsaning rangi. Matritsa rangini topishning minorlarni hoshiyalash usuli.

2.5. Matritsalar ustida elementar almashtirishlar.

2.1. Matritsalar ustida amallar

$\boxed{t}$ Agar ikkita bir xil o‘lchamli $A=(a_{ij})_{m,n}$ va $B=(b_{ij})_{m,n}$ matritsalarning barcha mos elementlari ustma-ust tushib, o‘zaro bir-biriga teng bo‘lsa, ya’ni $a_{ij}=b_{ij},\ i=1,...,m;\ j=1,...,n$, u holda bu matritsalar A = B teng matritsalar deyiladi.

$\boxed{t}$ $A=(a_{ij})_{m,n}$ va $B=(b_{ij})_{m,n}$ bir xil $m\times n$ o‘lchamdagi ikki matritsaning yig‘indisi deb, elementlari $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}, i=1,...,m;\ j=1,...,n$ ga teng bo‘lgan $C=(c_{ij})_{m,n}$ matritsaga aytiladi, ya’ni $C = A + B$.

Matritsalarni qo‘shish amali uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

$1^\circ.\ A+B=B+A$.

$2^\circ.\ A+B+C=(A+B)+C=A+\left(B+C\right)$.

$3^\circ.\ A+\varnothing=A$.

4°. $A+(-A)=\varnothing$.

$\boxed{t}$ $A=(a_{ij})_{m,n}$ matritsani α **songa** ko‘paytmasi deb, elementlari $b_{ij}=\alpha a_{ij},\ i=1,...,m;\ j=1,...,n$ ga teng bo‘lgan $B=(b_{ij})_{m,n}$ matritsaga aytiladi, ya’ni $B=\alpha\cdot A$.

Matritsani songa ko‘paytirish amali uchun quydagi xossalar o‘rinli:

5°. $(\alpha\cdot\beta)A=\alpha(\beta A)$.

6°. $\alpha(A+B)=\alpha A+\alpha B$.

7°. $(\alpha+\beta)A=\alpha A+\beta A$.

8°. $0\cdot A=\varnothing;\ 1\cdot A=A$.

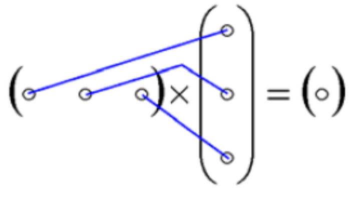
Yuqorida keltirilgan matritsalarning 1°- 8° xossalarni isbotlash uchun mos ta’riflardan foydalanish yetarlidir.

Ikki matritsani ko‘paytirish amali faqatgina birinchi matritsaning ustunlari soni ikkinchi matritsaning satrlari soniga teng bo‘lgan holda kiritiladi.

$\boxed{t}$ O‘lchami (*m*×*n)* ga teng bo‘lgan $A=(a_{ij})_{m,n}$ matritsani o‘lchami (*n*×*k*) ga teng bo‘lgan $B=(b_{ij})_{n,k}$ matritsaga ko‘paytmasi deb, o‘lchami (*m*×*k*) ga teng bo‘lgan $C=(c_{ij})_{m,k}=A\cdot B$ matritsaga aytiladi, uning elementlari quyidagi formula bo‘yicha hisoblanadi:

$$c_{ij}=\sum_{l=1}^{n}a_{il}\cdot b_{lj}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+...+a_{in}\cdot b_{nj}\quad i=1,...,m,\ \ j=1,...,k.$$

Boshqacha qilib aytganda: ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan matritsaning *i*-satr va *j*-ustun satr kesishmasida joylashgan element c_{ij}, A matritsaning i-satrdagi elementlarni B matritsaning j-ustundagi mos elementlariga ko‘paytmalarining yig‘indisiga teng.



Misol: Berilgan: $A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & 9 & 10\\ 0 & 2 & 1\end{pmatrix}$. $C=A\cdot B$ ni topish kerak.

$c_{11}=1\cdot 1+3\cdot 0=1$, $c_{12}=1\cdot 9+3\cdot 2=15$, $c_{13}=1\cdot 10+3\cdot 1=13$,

$c_{21}=2\cdot 1+4\cdot 0=2$, $c_{22}=2\cdot 9+4\cdot 2=26$, $c_{23}=2\cdot 10+4\cdot 1=24$.

$$C=\begin{pmatrix}1 & 15 & 13\\ 2 & 26 & 24\end{pmatrix}.$$

Matritsalarni ko‘paytirish amali uchun quyidagi xossalar o‘rinlidir:

9°. (A × B)×C= A×(B× C).

10°. (A+ B)× C = A× C+ B× C.

11°. A ×(B + C)= A× B+ A× C.

12°. A ×E=E× A= A.

13°. $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$.

14°. $(A\times B)^T=B^T\times A^T$.

15°. $\det\left(A\times B\right)=\det A\times\det B$.

Yuqoridagi 9°-14° xossalarni isbotlash uchun matritsalar ustida amallarning ta’riflaridan foydalanish yetarlidir.

$\boxed{t}$ A va B matritsalar ko‘paytmalari uchun o‘rin almashtirish qonuni o‘rinli bo‘lsa, ya’ni $A\times B=B\times A$ bo‘lsa, ular kommutativ matritsalar deyiladi. Umumiy holda matritsalar ko‘paytmasi har doim kommutativ emas, $A\times B\neq B\times A$.

2.2. Teskari matritsa. Chap va o‘ng teskari matritsaning mavjudligi haqida teorema.

Teskari matritsani topish algoritmi

$\boxed{t}$ Agar o‘lchami n ga teng bo‘lgan A kvadrat matritsaning determinanti nolga teng $|A|=0$ bo‘lsa, u holda A kvadrat matritsa xos matritsa, aks holda xosmas matritsa deyiladi.

$\boxed{t}$ A^{-1} Matritsa biron bir A kvadrat matritsa uchun teskari deyiladi, agarda bu matritsalar uchun ushbu tenglik $A\times A^{-1}=A^{-1}\times A=E$ o‘rinli bo‘lsa. Bundan keyin teskari matritsani har doim A^{-1} kabi belgilaymiz.

$\boxed{\mathrm{T}}$ **Teskari matritsaning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.**

Agar A matritsa xosmas matritsa bo‘lsa, u holda bu matritsaga teskari matritsa har doim mavjud bo‘lib, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left(A^V\right)^T$ ga teng.

A^{-1} teskari matritsa mavjud va u yagona, bu erda $A^V = \left(A_{ij}\right)$ - biriktirilgan matritsa (berilgan matritsa elementlariga mos algebraik to‘ldiruvchilaridan tuzilgan matritsa).

Isbot:

Faraz qilaylik, *n*-tartibli kvadrat matritsa berilgan bo‘lsin:

$$A = (\mathrm{a}_{ij})_{n,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

1. Teskari matritsa mavjudligining zaruriy shartini isbotlaymiz. Faraz qilaylik, A^{-1} mavjud bo‘lsin. Ta’rifga ko‘ra, $A^{-1}A = E$. Matritsalarni ko‘paytirish amalining 15° xossaga ko‘ra, $\det(A^{-1}A) = \det E$, $\det A^{-1} \det A = \det E = 1 \Rightarrow \det A \neq 0$, ya’ni A – xosmas matritsa.

2. Teskari matritsa mavjudligining yetarli shartini isbotlaymiz.

Faraz qilaylik, A matritsa xosmas bo‘lsin. Teskari matritsa A^{-1} elementlarining ko‘rinishini topamiz. Buning uchun quyidagi ko‘paytmani hisoblaymiz:

$$C = A \cdot (A^V)^T = (a_{ij}) \cdot (A_{ij})^T ,$$

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (\mathrm{A}^T)_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} \det A, \ i = j \\ 0, \ i \neq j \end{cases}$$

Determinantni satr (ustun) bo‘yicha yoyish teoremasiga ko‘ra,

$$C=\begin{pmatrix} \det A & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \det A & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \det A \end{pmatrix}=\det A\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}=\det A\cdot E$$

ya’ni $A\cdot(\mathrm{A}^V)^T=\det A\cdot E$. Bunda $\det A\neq 0$, $A\cdot\dfrac{\left(A^V\right)^T}{\det A}=E$ va $A^{-1}=\dfrac{1}{\det A}\left(A^V\right)^T$.

3. Yagonalikning isbotini teskarisidan boshlaymiz. Faraz qilaylik, $A^{-1}\cdot A=E$ (1) tenglik o‘rinli bo‘lsin. Ushbu A^{-1} teskari matritsadan tashqari B matritsa ham mavjud bo‘lsin , u holda $B\cdot A=E$ (2) tenglik o‘rinli bo‘ladi. Teskari B matritsa ham mavjud bo‘lsin, lekin teskari matritsalar biri-biriga teng bo‘lmasin, ya’ni $B\neq A^{-1}$. Yuqoridagi birinchi tenglikdan ikkinchi tenglikni ayiramiz:

$$A^{-1}\cdot A-B\cdot A=E-E=\varnothing,\ (A^{-1}-B)\cdot A=\varnothing.$$

Oxirgi tenglikni A^{-1}ga o‘ngdan ko‘paytirib, quyidagi tenglikka ega bo‘lamiz:

$$(A^{-1}-B)\cdot AA^{-1}=\varnothing\cdot A^{-1}=\varnothing.$$

$$AA^{-1}=E,\Rightarrow(A^{-1}-B)E=\varnothing,\Rightarrow A^{-1}-B=\varnothing,\Rightarrow A^{-1}=B$$

Oxirgi tengligimizdan bu teskari matritsalar o‘zaro teng degan xulosaga kelamiz. Bu $B\neq A^{-1}$tengsizlik farazimizga zid. Farazimizning noto‘g‘riligidan teskari matritsalarning yagonaligi kelib chiqadi.

Teskari matritsalar uchun quyidagi tengliklar o‘rinlidir:

$\boxed{!}$ 1°. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$. 2°. $(\alpha\cdot A)^{-1}=\dfrac{1}{\alpha}\cdot A^{-1}$. 3°. $(A\times B)^{-1}=B^{-1}\times A^{-1}$. 4°. $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$.

Teskari matritsani topish algoritmi:

1-bosqich: $\det A$ ni topamiz, $\det A\neq 0$ ligini tekshiramiz.

2-bosqich: A matritsaning barcha M_{ij} minorlarini topamiz.

3-bosqich: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$ algebraik to‘ldiruvchilarni aniqlaymiz.

4-bosqich: $A^V=\left(A_{ij}\right)$ algebraik to‘ldiruvchilar matritsasini quramiz va uni transponirlaymiz: $\left(A^V\right)^T=\left(A_{ji}\right)$.

5-bosqich: Oxirgi bosqichda topilgan matritsaning har bir elementining qiymatini $\det A$ ga bo‘lamiz : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\left(A^V\right)^T$

Misol: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping.

1. $\det A = 4 - 6 = -2 \neq 0$.
2. $M_{11} = 4,\ M_{12} = 3,\ M_{21} = 2,\ M_{22} = 1$.
3. $A_{11} = 4,\ A_{12} = -3,\ A_{21} = -2,\ A_{22} = 1$.
4. $A^V = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},\ \left(A^V\right)^T = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$.
5. $A^{-1} = -\dfrac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -0{,}5 \end{pmatrix}$

Tekshirish: $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1{,}5 & -0{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & 1-1 \\ -6+6 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E$.

2.3. Matritsali chiziqli tenglamalarni yechish

$\boxed{t}$ Agar A, B – ma’lum matritsalar, X – noma’lum matritsa bo‘lsa, u holda $A \cdot X = B$ ko‘rinishidagi tenglikka **matritsali tenglama** deyiladi.

Matritsali tenglamalarning asosiy turlari

Tenglamalarning turlari quyidagicha bo‘lishi mumkin:

1. $A \cdot X = B$. Bunda A kvadrat matritsa bo‘lishi kerak, $|A| \neq 0$. Tenglamani A^{-1} ga chapdan ko‘paytiramiz: $A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1}B,\ \ E \cdot X = A^{-1}B$ va natijada $X = A^{-1}B$.
2. $X \cdot A = B$. A kvadrat matritsa bo‘lishi kerak, $|A| \neq 0$. Tenglamani A^{-1} ga o‘ngdan ko‘paytiramiz: $X \cdot AA^{-1} = B \cdot A^{-1} \Rightarrow X = B \cdot A^{-1}$.
3. $A \cdot X \cdot B = C$. A va B kvadrat matritsalar bo‘lishi kerak, $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$. Tenglamani chapdan A^{-1} ga ko‘paytiramiz $A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B = A^{-1}C \Rightarrow X \cdot B = A^{-1}C$. Bu tenglikni B^{-1}ga o‘ngdan ko‘paytiramiz:

$$X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1}C \cdot B^{-1} \Rightarrow X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}.$$

Misol: Matritsali tenglamani yeching:

$A\cdot X = B$, bu erda $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix}$.

$$X = A^{-1}B,\ A^{-1} = \frac{1}{det\,A}\left(A^V\right)^T = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix},$$

$$A^{-1}\cdot B = \begin{pmatrix}-2 & 1\\ 1{,}5 & -0{,}5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 5\\ 5 & 9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix}-1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}.$$

Kelgusi bo‘limda chiziqli tenglamalarni yechishda matritsalardan foydalanamiz.

2.4. Matritsaning rangi. Matritsaning rangini topishning minorlarni hoshiyalash usuli.

Faraz qilaylik, (m×n) o‘lchamli A matritsada k ta satr va k ta ustun tanlab olish mumkin bo‘lsin, bunda $k \le min(m,n)$. U holda tanlangan satr va ustunlar kesishmasida joylashgan elementlar k-tartibli kvadrat matritsani hosil qiladi. Ushbu matritsaning M_k determinanti A matritsaning k-tartibli minori deb ataladi.

t A matritsaning **rangi** deb, ushbu matritsaning noldan farqli M_k minorlarning r maksimal tartibiga teng bo‘lgan songa aytiladi:

$$r = r(A) = rangA.$$

t Matritsalar **ekvivalent** deyiladi, agar $r(A) = r(B)$ bo‘lsa va $A \approx B$ kabi belgilanadi.

A matritsaning rangini minorlarni hoshiyalash (okaymlash) yoki elementar almashtirishlar usulidan foydalanib ham hisoblash mumkin.

Minorlarni hoshiyalash(okaymlash) usuli

Faraz qilaylik, A matritsada $a_{ij} \ne 0$ element bo‘lsin, u holda $M_1 \ne 0$ va $r(A) \ge 1$. Ushbu elementni $(j+1)$-ustun va $(i+1)$-satr elementlari bilan hoshiyalaymiz, 2-tartibli minor hosil qilamiz:

$$M_2 = \begin{vmatrix}a_{i,j} & a_{i,j+1}\\ a_{i+1,j} & a_{i+1,j+1}\end{vmatrix}$$

Agar $M_2 = 0$ bo‘lsa, u holda barcha 2-tartibli minorlarni qayta ko‘rib, boshqa satr va ustunlarni birlashtiramiz. Agar ikkinchi tartibli barcha minorlar nolga teng bo‘lsa, u holda $r(A)=1$; agar hech bo‘lmaganda bitta noldan farqli 2-tartibli minor mavjud bo‘lsa, u holda $r(A)\geq 2$.

Noldan farqli 2-tartibli M_2 minorni tanlaymiz va uni 3-tartibli minorgacha qo‘shni satr va ustun elementlari bilan hoshiyalaymiz va shunday qilib, $M_r \neq 0$ shart bajarilmaguncha hoshiyalaymiz, biroq barcha $M_{r+1} = 0$ bo‘lishi kerak.

Misol:

Matritsaning rangini toping $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$M_1 = 1;\ M_2^1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2+2 = 0, M_2^2 = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} = -2+2 = 0,$$

$$M_2^3 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2+2 = 4 \neq 0;\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow r(A) = 2.$$

2.4. Matritsalar ustida elementar almashtirishlar

Matritsalarning elementar almashtirishlariga quyidagilar kiradi:

- transponirlash;
- satr (ustun)larni o‘rnini almashtirish;
- satr (ustun)larni $\alpha \neq 0$ songa ko‘paytirish;
- matritsaning satr (ustun) elementlariga biror bir songa ko‘paytirilgan boshqa satr elementlariga qo‘shish;
- matritsaning nol satr (ustun)ini tashlab yuborish.

$\boxed{\text{T}}$ Matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarish uning rangini o‘zgartirmaydi.

A matritsaning rangini elementar almashtirishlar usulida aniqlash uchun quyidagilarni bajarish kerak:

1. Satrlarni shunday almashtirish kerakki, matritsaning yuqori chap burchagida noldan farqli element bo‘lsin.

2. Birinchi ustunning barcha elementlarini, a_{11} elementidan tashqari, nolga aylantirish:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1n} \\ 0 & \dots & \dots \\ 0 & \dots & a'_{mn} \end{pmatrix}.$$

3. Amalni ikkinchi ustun bilan takrorlash: ikkinchi ustunda noldan farqli element bo‘lishi kerak, bundan keyin ikkinchi ustunning barcha elementlari a_{12} va a_{22} dan tashqari nolga aylantirish.

Ko‘rsatilgan amalni ko‘p marta qo‘llab noldan farqli satrlarni tashlab yuborilgandan keyin almashtirilgan matritsa quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$\tilde{A}=\begin{pmatrix} \tilde{a}_{11} & \tilde{a}_{12} & \dots & \tilde{a}_{1,r-1} & \tilde{a}_{1r} & \dots & \tilde{a}_{1n} \\ 0 & \tilde{a}_{22} & \dots & \tilde{a}_{2,r-1} & \tilde{a}_{2r} & \dots & \tilde{a}_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \tilde{a}_{r-1,r-1} & \tilde{a}_{r-1,r} & \dots & \tilde{a}_{r-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{rr} & \dots & \tilde{a}_{rn} \end{pmatrix}.$$

U holda matritsaning rangi $r(A)=rangA=rang\tilde{A}$ ga teng.

Bayon etilgan ma’lumotlarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi zarur:

Matritsalarni songa ko‘paytirish;

Matritsalarni qo‘shish va ayirish;

Matritsalar ustida bajariladigan amallarning xossalari;

Matritsalarni o‘zaro ko‘paytirish;

Matritsa rangi va uni topish;

Teskari matritsani topish;

Teskari matritsalarning xossalari;

Matritsali tenglamalarni barcha turlarini yechish.

3.CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

Bo‘limda chiziqli tenglamalar sistemasi nazariyasi elementlarining bayoni keltirilgan. Chiziqli tenglamalar sistemasi mexanika, elektrotexnika va nazariy fizikaning ko‘plab masalalarini yechishda yuzaga keladi. Matritsali hisob bunday masalalarni yechishda hosil bo‘lgan sistemalar yechimlarini kompakt ko‘rinishda olish va uning bayoni soddalashtirish imkonini beradi. Katta miqdordagi (o‘nlab va yuzlab) o‘zgaruvchilar qatnashgan real masalalarni yechish uchun ushbu nazariya asoslari usullarini bilishimiz katta ahamiyat kasb etadi.

Bo‘lim mavzulari:

3.1. n ta noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi. Asosiy tushunchalar.

3.2. n ta noma’lumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari: matritsa yordamida yechish. Kramer qoidasi. Gauss usuli (o‘zgaruvchilarni ketma-ket yo‘qotish usuli).

3.2.1. n ta noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi.

3.2.2. Kramer qoidasi.

3.2.3. Gauss usuli.

3.3. Kroneker – Kapelli teoremasi.

3.4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi.

3.5. n ta noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimini topish sxemasi.

*3.6. * Yechimlarning fundamental sistemasi.*

3.1. *n* ta noma’lumli *m* ta chiziqli tenglamalar sistemasi.

Asosiy tushunchalar

m ta tenglama va *n* ta noma’lumga ega bo‘lgan chiziqli tenglamalar sistemasi (ChTS)ni ko‘rib chiqamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}, \tag{1}$$

bu erda a_{ij}, $i = 1,...,m;\ j = 1,...,n$ - sistema koeffitsientlari, b_i, $i = 1,...,m$ - ozod hadlar, x_j, $j = 1,...,n$ - noma'lumlar.

Sistema **matritsa ko'rinishda** yozilishi ham mumkin: $A \cdot X = B$,

bu erda $A = (a_{ik})_{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix}_{m,n}$ - sistemaning asosiy matritsasi,

$B = (b_i)_{m,1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_m \end{pmatrix}_{m,1}$ - ozod hadlarning ustun matritsasi,

$X = (x_k)_{n,1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ .... \\ x_n \end{pmatrix}_{n,1}$ - noma'lumlarning ustun matritsasi.

Masalan, sistemaning birinchi tenglamasi A matritsaning birinchi satrini noma'lumlar ustuniga ko'paytirishdan hosil qilingan: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1$.

t A matritsaga ozod hadlar ustunini qo'shishdan hosil qilingan matritsa sistemaning **kengaytirilgan** matritsasi deyiladi:

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right)_{m,n+1}.$$

t n ta $x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ ...,\ x_n = c_n$ miqdorning tartiblangan to'plami tenglamalar sistemasidagi noma'lumlar o'rniga qo'yilganda ChTSning tenglamalarini ayniyatga aylansa, u holda bu tartiblangan to'plam elementlari ChTSning yechimi deyiladi. Yechim matritsasini quyidagi ko'rinishida yozish mumkin:

$$X = (c_k)_{n,1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \dots \\ c_n \end{pmatrix}_{n,1} .$$

$\boxed{t}$ Agar chiziqli tenglamalar sistemasi hech bo‘lmaganda bitta yechimga ega bo‘lsa, u holda bu tenglamalar sistemasi **birgalikda** deyiladi. Agarbu sistema bitta ham yechimga ega bo‘lmasa, bu sistema **birgalikda bo‘lmagan sistema** deyiladi.

$\boxed{t}$ Agar chiziqli tenglamalar sistemasi yagona yechimga ega bo‘lsa, u holda bu sistema **aniqlangan** deyiladi. Agar chiziqli tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘lsa, u aniqlanmagan deyiladi.

$\boxed{t}$ Agar (1) chiziqli tenglamalar sistemasining ozod hadlaridan tuzilgan B matritsasi $\varnothing$ nol-matritsa bo‘lmasa, ya’ni $B \neq \varnothing$ bo‘lsa, u holda bu (1) sistema **bir jinslimas** deyiladi.

$\boxed{t}$ Agar (1) chiziqli tenglamalar sistemasining ozod hadlaridan tuzilgan B matritsasi $\varnothing$ nol-matritsa bo‘lsa, ya’ni $B = \varnothing$ bo‘lsa, u holda bu sistema **bir jinsli** deyiladi.

$\boxed{!}$ Bir jinsli tenglamalar sistemasi doimo **nol (trivial)** yechimga ega: $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$.

Masalan,

1). Sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 2 \end{cases}$ birgalikda emas, ya’ni yechimi yo‘q;

2). Sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ birgalikda, biroq aniqlanmagan, chunki cheksiz ko‘p yechimga ega: $x_1 = 1 - c, x_2 = c$ yoki (matritsa shaklida) $X = \begin{pmatrix} 1 - c \\ c \end{pmatrix}$, bu erda c – ixtiyoriy o‘zgarmas son;

3). Sistema $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$, birgalikda va aniqlangan, chunki u yagona yechimga ega: $x_1 = 1, x_2 = 0$ (yoki $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$).

3.2. *n* ta noma’lumli *n* ta chiziqli tenglamalar sistemasi.

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish usullari: matritsa yordamida yechish. Kramer qoidasi. Gauss usuli (o‘zgaruvchilarni ketma-ket yo‘qotish usuli).

3.2.1. *n* ta noma’lumli *n* ta chiziqli tenglamalar sistemasi. Chiziqli tenglamalar sistemasini matritsa yordamida yechish

T Agar *n* ta noma’lumli *n* ta ChTSning asosiy matritsasi A ning determinanti noldan farqli bo‘lsa, bunday sistema yagona yechimga ega bo‘ladi.

Isbot:

ChTSsini matritsa ko‘rinishida yozib olamiz: $A\cdot X = B$, bu erda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n,n}, \ X = (x_i)_{n,1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}_{n,1}, \ B = (b_k)_{n,1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}_{n,1} \quad .. \ (2)$$

Faraz qilaylik, bunda $\det A \neq 0$ bo‘lsin, u holda unga har doim teskari matritsa mavjud bo‘ladi: $A^{-1}, A^{-1}\cdot A = E$. Tenglamani chap tomonidandan A^{-1} ga ko‘paytiramiz:

$$A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}\cdot B.$$

$\boxed{n}$ 1. Agar *n* ta noma’lumli *n* ta ChTSsi noldan farqli determinantga ega bo‘lsa, uni matritsali usuli yordamida yechilishi mumkin.

Masalan, $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_1 - x_2 = 1 \end{cases}$ sistema matritsa ko‘rinishida quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \det A = -2 \neq 0, \ A^{-1} = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left(-\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. Agar *n* ta noma’lumli va *n* ta tenglamalar bir jinsli tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi noldan farqli determinantga ega bo‘lsa, u holda uning yagona nol (trivial) yechimi har doim mavjud bo‘ladi.

Bir jinsli sistema uchun ozod hadlar matritsasi $B = \varnothing; \quad A \cdot X = \varnothing$.
Chunki A^{-1} har doim mavjud, u holda $X = A^{-1} \cdot \varnothing = \varnothing$.

3.2.2. Kramer qoidasi

Δ orqali (2) tenglamalar sistemasining asosiy matritsasi determinantini belgilaymiz (sistemaning asosiy - bosh determinanti)

$$\Delta = \det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Δ_i - orqali tenglamalar sistemaning *i*-yordamchi determinantlarini, u Δ determinantdagi *i* -ustunni ozod hadlar ustuniga almashtirib hosil qilinadi,

$$\Delta_i = \left|\tilde{A}_i\right| = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

$\boxed{\textbf{T}}$ Agar chiziqli tenglamalar sistemasining bosh – asosiy determinantining qiymati noldan farqli bo‘lsa, u holda tenglamalar sistemasi har doim birgalikda va aniqlangan bo‘ladi, bunday holda yagona yechimlari $x_1, x_2, \dots, x_n$ quyidagi Kramer formulalari bo‘yicha hisoblanadi:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta},\ \dots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.$$

Isbot:

A matritsaga teskari matritsa $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(A^V\right)^T$, bu erda $\left(A^V\right)_{ij} = \left(A_{ij}\right) = (-1)^{i+j} M_{ij}$ birlashtirilgan matritsa elementlari, bunda quyidagicha $q_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} M_{ji}}{\det A}$ belgilash kiritsak, $A^{-1} = \left(q_{ij}\right)$ ga tengligi kelib chiqadi. Ushbu $X = A^{-1} \cdot B$ tenglamaning o‘ng tomonidagi matritsalar ko‘paytmasinin elementlarini yozib olamiz:

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} q_{ik} b_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{i+k} M_{ki}}{\det A} \cdot b_k = \frac{1}{\det A}\left(\sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} b_k M_{ki}\right).$$

Determinantni ustunlar bo‘yicha yoyish haqidagi teoremaga ko‘ra qavslar ichidagi yig‘indi $\tilde{A}_i$ matritsaning determinantiga teng. $\tilde{A}_i$ matritsa *A* matritsadan *i*-

ustunni ozod hadlar ustuniga almashganligi bilan farq qiladi, xolos.

Shunday qilib, $x_i = \dfrac{\Delta_i}{\Delta}$.

Misol:

Sistemani eching: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 14, \\ 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 16. \end{cases}$

Kramer formulasiga ko‘ra:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -6 \neq 0, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 3 & 2 \\ 14 & 2 & -3 \\ 16 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -12, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 9 & 2 \\ 1 & 14 & -3 \\ 3 & 16 & 1 \end{vmatrix} = -18$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 9 \\ 1 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 12.$$

Noma’lumlarning qiymatlarini hisoblaymiz:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 2, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = -2.$$

3.2.3. Gauss usuli (o‘zgaruvchilarni ketma-ket yo‘qotish-o‘chirish usuli)

n ta noma’lumli *n* ta tenglamalar sistemasi (2) ni ko‘rib chiqamiz. Mazkur sistemani avvalo, elementar almashtirishlar yordamida yechilishi osonroq topiladigan ekvivvalent sistemaga keltirib olamiz.

Sistemani “elementar almashtirishlar” deyilganida quyidagi amallarni bajarishni tushuniladi:

- sistemaning ixtiyoriy ikki tenglamasining o‘rnini almashtirish;
- sistemaning ixtiyoriy tenglamasini har qanday $k \neq 0$ songa ko‘paytirish;
- sistemaning bir tenglamasiga ixtiyoriy $k \neq 0$ songa ko‘paytirib, boshqa tenglamasiga qo‘shish.

$\boxed{!}$ 1). Tenglamalarning elementar almashtirishlariga $\overline{A} = (A|B)$ sistemaning kengaytirilgan matritsasi satrlarini almashtirish mos keladi.

2) Matritsani elementar almashtirishlardan keyin ham uning rangi

o‘zgarmaydi.

3) Gauss usuli ixtiyoriy ($m \times n$) sistemalar uchun ham o‘rinlidir.

Quyidagi algoritm chiziqli tenglamalar sistemasini Gauss usulida yechish algoritmi hisoblanadi:

1. $\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{n1}x_1 + ... + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ tenglamalar sistemasi uchun sistemaning kengaytirilgan matritsasini yozib olinadi:

$$\overline{A} = (A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} & b_2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} & b_n \end{array}\right)_{n,n+1}.$$

2. Kengaytirilgan matritsani elementar almashtirishlar natijasida uni trapetsiya shakliga keltiriladi, bunda sistemaning asosiy matritsasi yuqori uchburchak ko‘rinishga keltiriladi.

3. Tenglamalar sistemasini qaytadan yozib, barcha tenglamalarini aniqlaymiz. Shundan keyin barcha noma’lumlar qiymatlarini topamiz.

Misol:

Tenglamalar sistemasini yeching: $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$.

Qulaylik uchun matritsa satrlarini α_i, ustunlarini esa β_j orqali belgilaymiz.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \alpha_2 - 2\alpha_1 \\ \alpha_3 - \alpha_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right)$, tenglamalar sistemasiga qaytamiz:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ -3x_2 - x_3 = -9 \\ -2x_3 = -6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 3 = 6 \\ -3x_2 - 3 = -9 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + 5 = 6 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 1 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases}.$$

! Shuningdek, Gaussning kengaytirilgan usuli yoki Gauss-Nyuton usulidan foydalanish mumkin. Bunda sistemaning asosiy matritsasi satrlarni elementar almashtirish orqali diagonal ko‘rinishga keltiriladi, avvalgi sxemaning 2-punkti (to‘g‘ri yurish deb ataluvchi) teskari yurish – yuqori uchburchak matritsani diagonalga keltirish bilan to‘ldiriladi. Avvalgi misol uchun bu quyidagicha bo‘ladi:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & -3 & -1 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

bundan yechim ko‘rinib turibdi.

3.3. Kroneker – Kapeli teoremasi

Avvalo, (1) n ta noma’lumli m ta tenglamalar sistemasini ko‘rib chiqamiz. Yгqorida qayd etilgadek uni matritsa ko‘rinishida tasvirlash mumkinligi ko‘rsatilgan edi. $m \times n$ o‘lchamli A matritsani α_i satrlar (β_j ustunlar) to‘plami sifatida qaraymiz:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \qquad \text{yoki} \quad A = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n),$$

bu erda $\alpha_i = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ – satr-matritsa; $\beta_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ - ustun-matritsa.

Matritsa satr (ustun)larining chiziqli bog‘liq bo‘lishi tushunchasini kiritamiz.

$\boxed{t}$ Satrlarning **chiziqli kombinatsiyasi** deb quyidagi ko‘rinishdagi ifodaga aytiladi:

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_k\alpha_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\alpha_i =$$
$$= \lambda_1(a_{11}\ a_{12}\ \dots a_{1n}) + \lambda_2(a_{21}\ a_{22}\ \dots a_{2n}) + \dots + \lambda_k(a_{k1}\ a_{k2}\ \dots a_{kn}).$$

$\boxed{t}$ Agar shunday $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ sonlar to‘plami mavjud bo‘lib, ular (kamida bittasi) bir vaqtning o‘zida noldan farqli bo‘lganda satrlarning chiziqli kombinatsiyasi, ya’ni quyidagi yig‘indi

$$\lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \dots + \lambda_k\alpha_k = 0$$

nolga teng bo‘lsa, u holda $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ matritsa satrlari **chiziqli bog‘liq** deyiladi,:

$\boxed{\text{T}}$ Agar matritsa satrlari(ustunlari)dan biri qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo‘lsa, ya’ni

$$\alpha_k = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + ... + \lambda_{k-1}\alpha_{k-1} + \lambda_{k+1}\alpha_{k+1} + ... + \lambda_n\alpha_n$$

tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda matritsaning satr (ustun)lari chiziqli bog‘liq deyiladi..

$\boxed{!}$ Satrlar ustida amallar sistema tenglamalari ustidagi amallarga mos keladi.

$\boxed{t}$ $(m \times n)$ o‘lchamli A matritsaning rangi r ga teng bo‘lsin. A matritsa elementlaridan tuzilgan r-tartibli noldan farqli minori A matritsaning **bazis minori** deyiladi.

$\boxed{t}$ Koeffitsientlari bazis minorga kiruvchi noma’lumlar bazis o‘zgaruvchilar deyiladi. Bazis bo‘lmagan o‘zgaruvchilar esa erkin o‘zgaruvchilar deb ataladi.

$\boxed{\text{T}}$ **Bazis minor haqida teorema.** Agar $(m \times n)$ matritsaning rangi r ga teng bo‘lsa, u holda r ta shunday satr (ustun) mavjudki, qolgan barcha satr (ustun)lar r ta satr(ustun)ning chiziqli kombinatsiyasi hisoblanadi. Ushbu satr (ustun)larga kiruvchi elementlaridan matritsaning bazis minorini qurish mumkin.

$\boxed{!}$ Bazis minorlar ko‘p bo‘lishi mumkin, biroq rang har doim yagona bitta qiymatga ega bo‘ladi .

$\boxed{n}$ 1). Bazis minorga kiruvchi satr (ustun)lar chiziqli bog‘liq emas, chiziqli erklidir.

2). Bazis minorga kirmagan matritsaning barcha satr (ustun)lari bazisga kiruvchilari bilan chiziqli bog‘liqdir.

3). Matritsaning chiziqli erkli (bog‘liqmas) satrlari soni chiziqli erkli (bog‘liqmas) ustunlari soniga teng, ya’ni matritsaning rangiga teng.

4). $rang(A) \le min(m,n)$.

$\boxed{\text{T}}$ **Kroneker - Kapelli teoremasi**. n ta o‘zgaruvchili m ta tenglamalar sistemasi birgalikda bo‘lishi uchun noma’lumlar oldidagi koeffitsientlardan tuzilgan asosiy matritsasining rangi kengaytirilgan matritsasining rangiga teng bo‘lishi zarur va etarlidir:

$$r(A)=r(A|B).$$

Isbot*:

Yetarliligi. $r(A)=r(A|B)$ bo‘lsin. A va $\overline{A}$ matritsalar ustunlarini ko‘rib chiqamiz:

$$\beta_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\\dots\\a_{m1}\end{pmatrix},\dots,\ \beta_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\\dots\\a_{mn}\end{pmatrix},\ \ B=\begin{pmatrix}b_1\\\dots\\\dots\\b_m\end{pmatrix}.$$

B ustunni $\{\beta_1,\dots,\beta_n\}$ to‘plamga qo‘shish chiziqli bog‘lanmagan ustunlar sonini oshirmagani sababli, B ustun asosiy matritsa ustunlarining chiziqli kombinatsiyasidir, ya’ni shunday $x_1,x_2,\dots,x_n\neq 0$ mavjudki, ular

$$B=x_1\beta_1+x_2\beta_2+\dots+x_n\beta_n,$$

yoki

$$\begin{pmatrix}b_1\\\dots\\b_m\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}a_{11}\\\dots\\a_{m1}\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}a_{12}\\\dots\\a_{m2}\end{pmatrix}+\dots+x_n\begin{pmatrix}a_{1n}\\\dots\\a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Oxirgi tenglikni $\begin{cases}b_1=a_{11}x_1+\dots+a_{1n}x_n\\b_2=a_{21}x_1+\dots+a_{2n}x_n\\\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\b_m=a_{m1}x_1+\dots+a_{mn}x_n\end{cases}$ ko‘rinishda yozib,

$x_1,x_2,\dots,x_n$ - sistemanining yechimi ekanligiga ishonch hosil qilamiz, demak sistema birgalikda.

Zarurligi. Faraz qilaylik sistema birgalikda bo‘lsin, $x_1,x_2,\dots,x_n$- sistemaning yechimi.

Sistemani quyidagi ko‘rinishda yozib

$$\begin{pmatrix}a_{11}\\\dots\\a_{m1}\end{pmatrix}x_1+\begin{pmatrix}a_{12}\\\dots\\a_{m2}\end{pmatrix}x_2+\dots+\begin{pmatrix}a_{1n}\\\dots\\a_{mn}\end{pmatrix}x_n=\begin{pmatrix}b_1\\\dots\\b_m\end{pmatrix},$$

$$x_1\beta_1+x_2\beta_2+\dots+x_n\beta_n=B,$$

B ni $\beta_1,\dots,\beta_n$ larning chiziqli kombinatsiyasi ekanligini ko‘ramiz, ozod hadlar ustunini qo‘shish matritsaning rangini orrtirmaydi, $r(A)=r(\overline{A})$.

Shunday qilib, agar $r(A)\neq r(A|B)$ bo‘lsa, u holda sistema yechimga ega emas; agarda $r(A)=r(A|B)$ bo‘lsa, u holda ikki hol bo‘lishi mumkin:

1) agar $r = n$ bo‘lsa, u holda sistemaning yechimi yagona bo‘ladi;

2) agar $r < n$ bo‘lsa, u holda sistemaning yechimi cheksiz ko‘p bo‘ladi.

3.4. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Quyidagi ko‘rinishga ega

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga **bir jinsli chiziqli tenglamalar** sistemasi deyiladi. Unga $A\cdot X=\varnothing$ matritsali tenglama mos keladi.

$r(A)=r(\overline{A})$ bo‘lganligidan bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda, nol ustun matritsa rangini o‘zgartirmaganligi sababli, bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi har doim nol(trivial) yechimga bo‘ladi: (0, 0, ..., 0).

$\boxed{\textbf{T}}$ Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi nol bo‘lmagan yechimga ega bo‘lishi uchun $r(A)<n$ bo‘lishi zarur va etarli.

Isbot:

1) r rang n dan katta bo‘la olmaydi (matritsa rangi ustun yoki satrlar sonidan oshmaydi);

2) $r \neq n$, chunki agar $r = n$ bo‘lsa, u holda sistemaning asosiy determinanti $\Delta\neq 0$ bo‘ladi va Kramer formulasiga ko‘ra yagona trivial yechim mavjud $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$, bu shartga zid. Demak, $r(A)<n$.

$\boxed{n}$ Bir jinsli n ta no’malumli n ta chiziqli tenglamalar sistemasi noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun uning asosiy determinanti $\Delta=0$ bo‘lishi zarur va yetarlir.

3.5. n ta noma’lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy yechimini topish sxemasi

1. Asosiy A va kengaytirilgan $(A|B)$ matritsalar rangini topamiz.

Agar $r(A) \neq r(A|B)$ bo‘lsa, u holda sistema yechimga ega emas.

Agar $r(A) = r(A|B)$ bo‘lsa, u holda sistemaning yechimi mavjud, ya’ni A va $(A|B)$ matritsalarning umumiy bazis minori mavjud bo‘ladi. Uni aniqlaymiz.

2. Sistemada koeffitsientlaridan umumiy bazis minorga kiruvchi tenglamalarni qoldiramiz. Qolgan tenglamalari ushbu tenglamalarning chiziqli kombinatsiyasi hisoblanadi va sistema haqida qo‘shimcha axborot bera olmaydi.

3. Rang va o‘zgaruvchilar sonini taqqoslaymiz:

Agar *r* = *n*, ya’ni bazis minor tartibi o‘zgaruvchilar soni bilan bir xil bo‘lsa, u holda *n* ta o‘zgaruvchili *n* ta tenglamalar sistemasini yechamiz (uning determinanti Δ≠0) va yagona yechimni hosil qilamiz.

Agar *r* < *n* bo‘lsa, u holda sistemada (*n* − *r*) ta erkli o‘zgaruvchi mavjud. Bunda $x_1, x_2, ..., x_r$ – bazis o‘zgaruvchilar, $x_{r+1}, ..., x_n$ esa – erkin o‘zgaruvchilar.

Erkin o‘zgaruvchilarni tenglamalar sistemasining o‘ng tomoniga o‘tkazamiz:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1,r+1}x_{r+1} - ... - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2,r+1}x_{r+1} - ... - a_{2n}x_n, \\ .... \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + ... + a_{rr}x_r = b_n - a_{r,r+1}x_{r+1} - ... - a_{rn}x_n. \end{cases} \qquad (3)$$

yoki matritsa ko‘rinishida,

$$\tilde{A}\tilde{X}_r = \tilde{B}_0 + x_{r+1}\tilde{B}_1 + x_{r+2}\tilde{B}_2 + ... + x_n\tilde{B}_{n-r} \qquad (4)$$

bu erda

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2r} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{r1} & a_{r2} & ... & a_{rr} \end{pmatrix}, \quad \det \tilde{A} \neq 0,$$

$$\tilde{X}_r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_r \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_r \end{pmatrix}, \quad \tilde{B}_1 = -\begin{pmatrix} a_{1,r+1} \\ a_{2,r+1} \\ ... \\ a_{r,r+1} \end{pmatrix}, \ ..., \ \tilde{B}_{n-r} = -\begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ ... \\ a_{r,n} \end{pmatrix}.$$

(3) tenglamalar sistemasi dastlabki (1) tenglamalar sistemasining natijasi

hisoblanib, uning yechimini yuqorida ko‘rib chiqilgan chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ixtiyoriy usullaridan foydalanib topish mumkin.

Faraz qilaylik, erkin o‘zgaruvchilar quyidagi qiymatlarni qabul qilsin:

$$x_{r+1} = c_1,\ x_{r+2} = c_2, ..., x_n = c_{n-r}\ .$$

U holda (4) sistema quyidagi ko‘rinishni oladi:

$$\tilde{A}\tilde{X}_r = \tilde{B}_0 + c_1\tilde{B}_1 + c_2\tilde{B}_2 + ... + c_{n-r}\tilde{B}_{n-r} \qquad (5)$$

va bazis noma’lumlar $x_1, x_2, ..., x_r$ ma’lum tarzda $x_i = x_i(c_1, c_2, ..., c_{n-r}), i = 1,2,...,r$ qiymatlar orqali ifodalanadi.

$A \cdot X = B$ bir jinsli bo‘lmagan sistemaning yechimini matritsa-ustun ko‘rinishida yozish mumkin:

$$X = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ x_2(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ \dots\dots\dots\dots \\ x_r(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ c_1 \\ c_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ c_{n-r} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Erkin o‘zgaruvchilar ixtiyoriy son qiymatlarni qabul qilishi mumkinligi sababli, berilgan sistema cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi.

(6) ifoda (1) sistemaning umumiy yechimi deb ataladi. Agar $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ o‘zgarmaslarga aniq qiymatlar berilsa, u holda (1) sistemaning xususiy echimini olamiz.

Misol: Sistemani yeching: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2, \\ 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 5. \end{cases}$

Kengaytirilgan matritsani ko‘rib chiqamiz:

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 2\\ 7 & 4 & 2 & 8\\ 3 & -2 & 4 & 5\end{array}\right)\sim \beta_3\leftrightarrow\beta_1\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 4 & 7 & 8\\ 4 & -2 & 3 & 5\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\alpha_2+2\alpha_1\\ \alpha_3+4\alpha_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}-1 & 3 & 2 & 2\\ 0 & 10 & 11 & 12\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right).$$

Bundan kelib chiqadiki, $r(A)=2$ va $r(A|B)=3$. $r(A)\neq r(A|B)$ demak, sistema birgalikda emas. Ko‘rinib turibdiki, almashtirilgan sistemaning uchinchi tenglamasi $0\cdot x_1+0\cdot x_2+0\cdot x_3=1$ yechimga ega emas.

Misol:

Sistemani yeching $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=12,\\ 2x_1+3x_2-x_3=13,\\ 3x_2+4x_3=5,\\ -3x_1+x_2+4x_3=-20.\end{cases}$

Kengaytirilgan matritsani ko‘rib chiqamiz:

$$\left(A|B\right)=\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 12\\ 2 & 3 & -1 & 13\\ 0 & 3 & 4 & 5\\ -3 & 1 & 4 & -20\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}\alpha_2-2\alpha_1\\ \alpha_4+3\alpha_1\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 12\\ 0 & 5 & 3 & -11\\ 0 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -2 & 7 & 16\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\alpha_2+\alpha_4\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 12\\ 0 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 3 & 4 & 5\\ 0 & -2 & 7 & 16\end{array}\right)\sim\begin{array}{c}\alpha_2-\alpha_3\\ \alpha_4\leftrightarrow\alpha_2\end{array}\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 12\\ 0 & -2 & 7 & 16\\ 0 & 3 & 4 & 5\end{array}\right)\sim$$

$$\sim 2\alpha_3+3\alpha_2\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 12\\ 0 & -2 & 7 & 16\\ 0 & 0 & 29 & 58\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -1 & 1 & 12\\ 0 & -2 & 7 & 16\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{array}\right)$$

Bundan kelib chiqadiki, $r(A)=r(A|B)=3$, shuning uchun sistema birgalikda va yagona yechimga ega.

Shakl almashtirilgan sistema quyidagi ko‘rinishga ega: $\begin{cases}x_1-x_2+x_3=12,\\ -2x_2+7x_3=16,\\ x_3=2,\end{cases}$

uning yechimi: $x_1=9,\ x_2=-1,\ x_3=2$.

Misol:

Sistemani yeching $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8. \end{cases}$

Kengaytirilgan matritsani ko‘rib chiqamiz:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7 \\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8 \end{array}\right) \sim \begin{matrix} \alpha_2 - 2\alpha_1 \\ \alpha_3 - 3\alpha_1 \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \\ 0 & 5 & -5 & -5 & -5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \alpha_3 - \alpha_2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \alpha_1 + 4\alpha_2 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -4 & -5 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Bundan kelib chiqadiki, $r(A) = r(A|B) = 2$, shuning uchun sistema birgalikda va aniqlanmagan. x_1 va x_2 ni bazis noma’lum sifatida tanlaymiz va shakl almashtirilgan sistemani yozib olamiz:

$$\begin{cases} x_1 = -5 + 2x_3 + 4x_4, \\ x_2 = -1 + x_3 + x_4. \end{cases}$$

$x_3 = c_1$, $x_4 = c_2$ deb olib, bunda c_1 va c_2 – ixtiyoriy sonlar, sistemaning umumiy yechimini hosil qilamiz

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 + 2c_1 + 4c_2 \\ -1 + c_1 + c_2 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Mos bir jinsli sistemaning yechimi

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = 0, \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = 0 \end{cases}$$

quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$X = c_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.6.* Yechimlarning fundamental sistemasi

$\boxed{\mathbf{T}}$ Agar ChTS $A\cdot X = c_1B_1 + c_2B_2$ ko‘rinishga ega bo‘lsa, u holda uning yechimini $X = c_1X_1 + c_2X_2$ ko‘rinishda yozish mumkin, bu erda X_1 va X_2 mos ravishda $A\cdot X = B_1$ va $A\cdot X = B_2$ sistemalarning yechimi.

Isboti:

$$X_1 = A^{-1}\cdot B_1,\ \ X_2 = A^{-1}\cdot B_2,$$

$$\begin{aligned} X &= A^{-1}\cdot(c_1B_1 + c_2B_2) = A^{-1}\cdot(c_1B_1) + A^{-1}\cdot(c_2B_2) = \\ &= c_1A^{-1}\cdot B_1 + c_2A^{-1}\cdot B_2 = c_1X_1 + c_2X_2. \end{aligned}$$

Avvalgi paragrafda (5) sistema berilgan edi

$$\tilde{A}\tilde{X}_r = \tilde{B}_0 + c_1\tilde{B}_1 + c_2\tilde{B}_2 + ... + c_{n-r}\tilde{B}_{n-r}\ .$$

Yyqorida isbotlangan teoremadan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\tilde{X}_r = \tilde{X}_{r,0} + c_1\cdot\tilde{X}_{r,1} + c_2\cdot\tilde{X}_{r,2} + ... + c_{n-r}\tilde{X}_{r,n-r}, \qquad (7)$$

bu erda $\tilde{X}_{r,0},\ \tilde{X}_{r,1},\ \tilde{X}_{r,2},...\tilde{X}_{r,n-r}$ - (5) sistemaning B_0, B_1, B_2, B_{n-r} ustunlari o‘ng qismi o‘rniga (5) ga qo‘yilgan нechimi.

Bu erda $\tilde{X}_r = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_r \end{pmatrix}$ ligi sababli, bu bazis noma’lumlar erkin noma’lumlardan chiziqli bog‘liqligini bildiradi va avvalgi paragrafda keltirilgan ifodada

$$X = \begin{pmatrix} x_1(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ x_2(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ .... \\ x_r(c_1, c_2, ..., c_{n-r}) \\ c_1 \\ c_2 \\ .... \\ c_{n-r} \end{pmatrix} \qquad (8)$$

sistemaning umumiy yechimi uchun $x_i = x_i(c_1, c_2, ..., c_{n-r})$lar $c_1, c_2, ..., c_{n-r}$ larning chiziqli funksiyalaridir.

Bu (1) sistemaning umumiy yechimi (6) matritsa-ustunni quyidagi ko‘rinishda yozish imkonini beradi:

$$X = X_0 + c_1 \cdot X_1 + c_2 \cdot X_2 + \ldots + c_{n-r} X_{n-r}, \qquad (9)$$

bu erda yechimlarning fundamental sistemasini hosil qiluvchi $X_i \ (i = 0,1,2,\ldots,n-r)$ xususiy yechimlar (5) ifodadagi o‘zgarmaslarning quyidagi qiymatlarida olingan:

$$X_0 = \begin{pmatrix} x_1(0,0,\ldots,0) \\ x_2(0,0,\ldots,0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r(0,0,\ldots,0) \\ 0 \\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_1 = \begin{pmatrix} x_1(1,0,\ldots,0) \\ x_2(1,0,\ldots,0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r(1,0,\ldots,0) \\ 1 \\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ X_2 = \begin{pmatrix} x_1(0,1,\ldots,0) \\ x_2(0,1,\ldots,0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r(0,1,\ldots,0) \\ 0 \\ 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, X_{n-r} = \begin{pmatrix} x_1(0,0,\ldots,1) \\ x_2(0,0,\ldots,1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r(0,0,\ldots,1) \\ 0 \\ 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1 \end{pmatrix}$$

(9) ifoda bir jinsli tenglamalar yechimlarning fundamental sistemasi bo‘yicha yoyish deyiladi.

Bayon etilgan ma’lumotlarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi zarur:

ChTS nazariyasining asosiy tushunchalari (asosiy va kengaytirilgan matritsalar tushunchasi);

ChTSning birgalikdagi yoki birgalikda emasligi;

ChTSning aniqlangan yoki aniqlamaganligini tekshirish;

ChTSning, bazis tenglamalari va erkin noma’lumlari;

ChTS ning umumiy va xususiy yechimlari tushunchalari;

Sistema yechimga bo‘lishligi haqidagi (Kroneker – Kapelli) teoremasi;

ChTSlarni yechish usullari: matritsali usuli; Kramer qoidasi; Gauss (o‘zgaruvchilarni ketma-ket yo‘qotish-o‘chirish) usuli;

Kroneker – Kapelli teoremasi;

ChTSning umumiy yechimini qidirish sxemasi;

Bir jinsli ChTS yechimlarining fundamental sistemasi.

II BOB. ANALITIK GEOMETRIYA

1. VEKTORLAR ALGEBRASI

Bo‘limda vektorlar algebrasining elementlari bayoni keltirilgan. Vektor algebrasi hisobi mutaxassislik fanlarini o‘rganishda muhandislik masalalarini yechishda tadbiq etish zaruratidan kelib chiqadi. U fanlardagi matematik qonunlarni ifodalash va hodisalarni o‘rganishda qulaylik va imkoniyatlar yaratadi. Yo‘nalgan kattaliklardan fizika, nazariy mexanika, suyuqlik va gazlar mexanikasi, elektromagnetizm va h. z.larga taalluqli keng doiradagi hodisalarni tasvirlashda doim vektorlardan foydalaniladi.

Bo‘lim mavzulari:

1.1. Vektorlar algebrasining asosiy tushunchalari.

1.2. Vektorlar ustida chiziqli amallar.

1.3. Vektorlarning chiziqli bog‘liqligi. Chiziqli bog‘liqlikning geometrik ma’nosi -kriteriysi.*

1.4. Bazis va koordinatalar.

1.5. Ortonormallangan bazis.

To‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi.

1.6. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi. Ta’rifi. Algebraik xossalari. Geometrik tadbiqlari . Skalyar ko‘paytmani vektorlarlarning dekart koordinata(proyeksiya)*lari orqali ifodalash.*

1.7. Vektorlarning vektor ko‘paytmasi. Ta’rifi. Algebraik va geometrik xossalari. Vektor ko‘paytmani vektorlarning dekart koordinata (proyeksiya)*lari orqali ifodalash.*

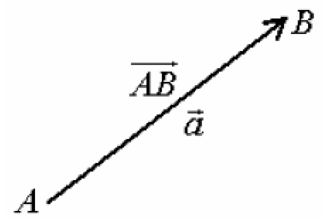
1.8. Vektorlarning aralash ko‘paytmasi. Ta’rifi.

Algebraik va geometrik xossalari. Aralash ko‘paytmani vektorlarning dekart koordinata(proyeksiya)*lari orqali ifodalash.*

1.1. Vektorlar algebrasining asosiy tushunchalari

Ba’zi miqdorlar bitta son qiymati bilan aniqlanadi, bunday miqdorlar **skalyarlar** miqdorlar deyiladi, masalan (temperatura, massa, kuchning bajargan ishi, zichlik va h.k.z). Tabiatda bunday miqdorlardan boshqa turdagi miqdorlar ham mavjudki, ularning xarakterlari faqat bittagina son qiymati bilan aniqlanmaydi, yana uning tekislikdagi, fazodagi yo‘nalishi bilan xarakterlanadi. Bularga siljish, kuch, kuch momenti, elektr maydonning kuchlanganligi va h.k. misol bo‘la oladi. Bunday turdagi kattaliklarni o‘rganish bizni **vektor** tushunchasiga olib keladi.

$\boxed{t}$ **Geometrik vektor (vektor)** deb yo‘nalishga ega kesmaga aytiladi (kesma ikkita nuqtalar bilan chegaralangan bo‘ladi, ularning biri boshlanish nuqtasi, ikkinchi nuqtasi uning uchi (oxiri) deyiladi).



1 – rasm.

Chizmada vektor strelka bilan belgilanadi; shuningdek vektorlarni harflar bilan belgilashlarda kichik harflardan foydalaniladi, ularning ustiga chiziqcha tortiladi yoki strelkalar qo‘yiladi $\overrightarrow{AB}, \vec{a}$ (1- rasmga qarang).

$\boxed{t}$ Vektorning boshidan va oxirigacha bo‘lgan masofaga **uzunligi** (moduli) deb ataladi, ya’ni vektorning uzunligini ifodalovchi kesmaning uzunligiga teng bo‘ladi. Belgilanishi: $|\overrightarrow{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ kabi bo‘ladi.

$\boxed{t}$ **Nol** vektor deb boshi bilan oxiri ustma-ust tushgan vektorga aytiladi. Ular $\overline{0}$ yoki $\vec{0}$ kabi belgilanadi.

$\boxed{t}$Bir to‘g‘ri chiziqda, yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotgan vektorlar **kollinear vektorlar** deyiladi va $\overline{a}$ // $\overline{v}$ kabi belgilanadi. Nol vektor ixtiyoriy vektorga kollinear bo‘ladi.

$\boxed{t}$ Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi uch va undan ortiq vektorlar **komplanar vektorlar** deyiladi.

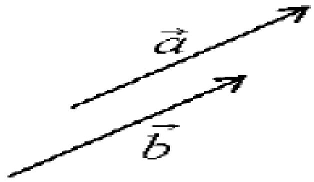
Agar vektorlar uchligini tashkil etuvchi vektorlarning bittasi nol vektor bo‘lsa yoki ulardan ikkitasi kollinear vektorlar bo‘lsa, bu vektorlar uchligi komplanar deyiladi.

$\boxed{!}$ Yuqorida ta’riflangan vektorlar **erkli** yoki **bog‘langan (biriktirilgan)** vektorlar deb nomlanadi.

Agar vektorlarning qo‘yilish nuqtasi ($\overline{AB}$ vektor uchun A nuqta) ixtiyoriy tanlanishi mumkin bo‘lsa, u holda bu vektor **erkin** vektor deyiladi. Agar vektor qo‘yilish nuqtasini chiziq bo‘yicha siljitish mumkin bo‘lsa bunday vektor **sirpanuvchi** vektor deyiladi. Ya’ni, $\vec{a}$ vektor erkin va sirpanuvchi vektorlar to‘plamining vakili hisoblanadi.

Bundan keyin biz, faqat erkin vektorlarni qaraymiz va o‘rganamiz. Ular uchun quyidagi ta’rif o‘rinlidir.

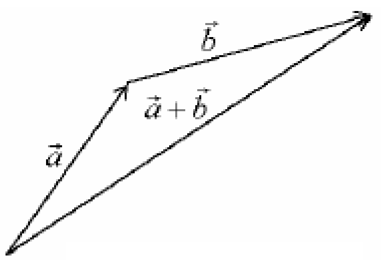
$\boxed{t}$ Agar ikki vektorlar kollinear bo‘lib, bir xil uzunlik va yo‘nalishga ega bo‘lishsa, ular teng vektorlar deyiladi. Masalan, $\vec{a} = \vec{b}$ (2- rasmga qarang).



2 -rasm.

1.2. Vektorlar ustida chiziqli amallar

$\boxed{t}$ $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning $\vec{a}+\vec{b}$ yig‘indisi deb, $\vec{a}$ vektorning boshidan $\vec{b}$ vektorning oxiriga yo‘nalgan vektorga aytiladi, bunda $\vec{b}$ vektorning boshi $\vec{a}$ vektorning uchiga quyiladi (**uchburchak qoidasi,** 3-rasm**)**.

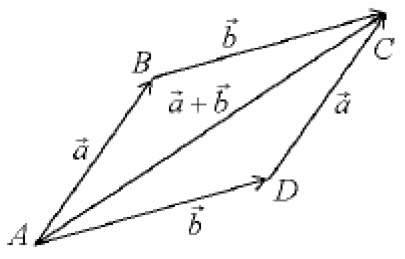


3-rasm.

Vektorlarni qo‘shish amalining xossalari:

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ (o‘rin almashtirish xossasi) (4-rasm).

2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ (guruhlash xossasi).

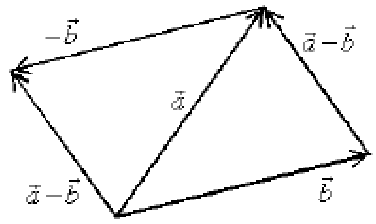


4-rasm.

3°. Shunday $\vec{0}$ vektor mavjudki, u bilan ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi (bu nol vektorning alohida xususiyatini ko‘rsatadi).

4°. Har bir $\vec{a}$ vektor uchun unga qarama-qarshi shunday $\vec{a}'=-\vec{a}$ vektor mavjudki, ular uchun quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi: $\vec{a}+\left(-\vec{a}\right)=0$.

Yuqoridagi xossalar geometrik isbotlanadi. Masalan, 1° xossani isbotlaymiz. Ixtiyoriy $ABCD$ parallelogrammni olamiz. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ bo‘lsin. U holda $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AC}$. Biroq $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AB}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\vec{b}+\vec{a}$. Shunday qilib, $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ kelib chiqadi.



5-rasm.

! 1° xossani isbotlash vektorlarni qo‘shishning **parallelogramm qoidasi** deb ataluvchi yana bir qoidaga asoslangan: agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni boshlanishini bitta umumiy nuqtaga quyib, bu vektorlarga parallelogramm qurilgan bo‘lsa, u holda ushbu vektorlarning $\vec{a}+\vec{b}$ yig‘indisi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning umumiy uchidan chiquvchi parallelogramm diagonalini ifodalaydi (5-rasm).

! **Vektorlarni ayirish** ularni qo‘shish orqali aniqlanadi: $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+\left(-\vec{b}\right)$. Aksincha: agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar umumiy uchga quyilgan bo‘lsa, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning ayirmasi $\vec{b}$ vektorning oxiridan $\vec{a}$ vektorning oxiriga yo‘nalgan $\vec{a}-\vec{b}$ vektorni ifodalaydi.

t $\vec{a}$ vektorni α haqiqiy songa $\alpha\vec{a}$ ko‘paytmasi deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, uzunligi $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$ miqdorga teng, $\alpha>0$ bo‘lganda hosil bo‘lgan vektorning yo‘nalishi $\vec{a}$ vektor yo‘nalishi bilan ustma-ust tushuvchi va $\alpha<0$ holatda $\vec{a}$ vektor yo‘nalishiga qarama-qarshi yo‘nalishga ega bo‘lgan $\vec{b}=\alpha\,\vec{a}$ vektorga aytiladi.

Vektorni songa ko‘paytirish amalining geometrik ma’nosi: $\vec{a}$ vektorni α songa ko‘paytirishda $\vec{a}$ vektor $|\alpha|>1$ da $|\alpha|$ marta “cho‘ziladi”, $0<\alpha<1$ da $\frac{1}{|\alpha|}$ marta “qisqaradi” (“siqiladi” deb ham aytiladi). Agar $\alpha<0$ bo‘lsa, vektor yo‘nalishini qarama-qarshisiga almashtiradi.

Vektorni songa ko‘paytirish amalining xossalari:

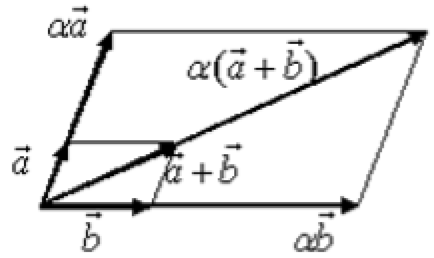
5°. $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ (vektorlar yig‘indisiga nisbatan taqsimot qonuni).

6°. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ (sonlar yig‘indisiga nisbatan taqsimot qonuni).

7°. $\alpha\left(\beta\vec{a}\right)=(\alpha\beta)\vec{a}$ (sonli ko‘paytuvchilarga nisbatan guruhlash xossasi).

8°. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ (birning mavjudligi).

Masalan, 5-xossani isbotlaymiz. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarni umumiy uchga qo‘yamiz va ular yordamida parallelogramm quramiz, diagonal $\vec{a}+\vec{b}$ yig‘indini ifodalaydi. Parallelogramm tomonlari α ($\alpha>1$) marta “cho‘zilganda” diagonal ham α marta “cho‘ziladi”, bu $\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ yig‘indi $\alpha\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$ga tengligini bildiradi (6-rasm).



6-rasm.

! Haqiqiy sonlar algebrasidagi qoidalar kabi vektorlar uchun 1° ÷ 7° xossalar ham vektorlar algebrasida muhim ahamiyatga ega.

1.3.* Vektorlarning chiziqli bog‘liqligi. Chiziqli bog‘liqlikning geometrik ma’nosi -kriteriysi.

t $\overrightarrow{a_1},\overrightarrow{a_2},...,\overrightarrow{a_n}$ vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi deb quyidagi ifodaga aytiladi:

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\overrightarrow{a_i},$$

bu erda $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ - ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

t Agar hech bo‘lmaganda bittasi noldan farqli $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ haqiqiy sonlar uchun quyidagi tenglik o‘rinli bo‘lsa

$$\alpha_1\overrightarrow{a_1}+\alpha_2\overrightarrow{a_2}+...+\alpha_n\overrightarrow{a_n}=\vec{0}, \qquad (*)$$

u holda $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, ..., \overrightarrow{a_n}$ vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq deyiladi, aks holda, (*) tenglik faqat barcha $\alpha_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n$ bo‘lganda bajarilsa, u holda bu vektorlar sistemasi chiziqli erkli deyiladi.

! Agar vektorlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda bu vektorlar sistemasining ixtiyoriy vektorini qolgan vektorlarning chiziqli kombinatsiyasi orqali ifodalash mumkin. Masalan, agar $\alpha_n \neq 0$, u holda (*)dan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\overrightarrow{a_n} = \beta_1 \overrightarrow{a_1} + \beta_2 \overrightarrow{a_2} + ... + \beta_{n-1} \overrightarrow{a_{n-1}} = \sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \overrightarrow{a_i},$$

bu erda $\beta_1 = -\dfrac{\alpha_1}{\alpha_n}, \beta_2 = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_n}, ..., \beta_{n-1} = -\dfrac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n}$.

Chiziqli bog‘liqlikning geometrik ma’nosi

T Ikkita $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}$ noldan farqli vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun ular o‘zaro kollinear bo‘lishi zarur va etarli.

Isbot:

Zarurligi. $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} = \vec{0}$ va $\alpha_1 \neq 0$ bo‘lsin. U holda $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} = -\alpha_2 \overrightarrow{a_2}$, $\overrightarrow{a_1} = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1} \overrightarrow{a_2}$;

yoki $\overrightarrow{a_1} = \lambda \overrightarrow{a_2}$, bunda $\lambda = -\dfrac{\alpha_2}{\alpha_1}$.

Yetarliligi. $\overrightarrow{a_1} = \lambda \overrightarrow{a_2}$ bo‘lsin. Tenglikni quyidagi ko‘rinishda yozib olamiz: $\overrightarrow{a_1} - \lambda \overrightarrow{a_2} = \vec{0}$ yoki $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} = \vec{0}$, bunda $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = -\lambda \neq 0$. Shunday qilib, noldan farqli koeffitsientli chiziqli nolga teng chiziqli kombinatsiya mavjud, demak, vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liqdir.

T Uchta $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}$ noldan farqli vektorlar sistemasi chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun ular o‘zaro komplanar bo‘lishi zarur va etarlidir.

T To‘rtta vektordan iborat vektorlar sistemasi doim chiziqli bog‘liqdir, ya’ni ixtiyoriy $\overrightarrow{a_1}, \overrightarrow{a_2}, \overrightarrow{a_3}, \overrightarrow{a_4}$ vektorlar uchun shunday $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ noldan farqli sonlar topiladiki, ular uchun ushbu $\alpha_1 \overrightarrow{a_1} + \alpha_2 \overrightarrow{a_2} + \alpha_3 \overrightarrow{a_3} + \alpha_4 \overrightarrow{a_4} = \vec{0}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

1.4. Bazis va koordinatalar

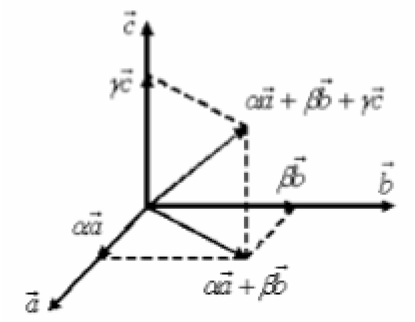
t Fazoning bazisi deb, komplanar bo‘lmagan va aniq tartibda olingan uchta vektorga aytiladi.

$\boxed{t}$ Tekislikning bazisi deb, kollinear bo‘lmagan va aniq tartibda shu tekislikdan olingan ikkita vektorga aytiladi.

$\boxed{t}$ To‘g‘ri chiziq bazisi deb, to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy noldan farqli vektoriga aytiladi.

$\boxed{\mathbf{T}}$ Har qanday fazodagi vektorni fazoning bazis vektorlari bo‘yicha yoyish mumkin va bu yoyilma yagonadir.

Agar $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ – uch vektor fazoda komplanar bo‘lmasa, u holda ixtiyoriy vektorni yagona $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$ ko‘rinishda ifodalash mumkin.



7-rasm.

Isboti:

$\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ - fazoning biror bir bazisi va $\vec{d}$ - ixtiyoriy vektor bo‘lsin. U holda $\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\vec{0}$ tenglik faqat $\alpha=\beta=\gamma=0$ o‘rinli bo‘lganda bajariladi. $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}+\alpha_4\vec{d}=\vec{0}$ bo‘lsin, bunda $\alpha_4\neq 0$. Agar $\alpha_4=0$ bo‘lsa, u holda $\alpha_1\vec{a}+\alpha_2\vec{b}+\alpha_3\vec{c}=\vec{0}$ bo‘la olmaydi chunki $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ - vektorlar bazisni tashkil etadi.

U holda $\alpha_4\vec{d}=-\alpha_1\vec{a}-\alpha_2\vec{b}-\alpha_3\vec{c}$, $\vec{d}=-\frac{\alpha_1}{\alpha_4}\vec{a}-\frac{\alpha_2}{\alpha_4}\vec{b}-\frac{\alpha_3}{\alpha_4}\vec{c}$, ya’ni $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}$.

Yagonalikning isboti:

Faraz qilaylik, $\vec{d}$ $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ bazis bo‘yicha ikkita yoyilmaga ega bo‘lsin: $\vec{d}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}+\gamma_1\vec{c}$; $\vec{d}=\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}+\gamma_2\vec{c}$. Birinchisidan ikkinchisini ayirib $(\alpha_1-\alpha_2)\vec{a}+(\beta_1-\beta_2)\vec{b}+(\gamma_1-\gamma_2)\vec{c}=\vec{0}$ ga ega bo‘lamiz. $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ - bazis ekanligidan $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ vektorlardan hech birini nolga teng bo‘lmagan koeffitsientlar orqali boshqalari bilan ifodalab bo‘lmaydi, shuning uchun $\alpha_1=\alpha_2,\ \beta_1=\beta_2,\ \gamma_1=\gamma_2$.

$\boxed{!}$ $\vec{d}$ vektor geometrik nuqtai nazardan $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga qurilgan parallelepipedning diagonalini ifodalaydi.

$\boxed{t}$ Bazis orqali yoyilgan yoyilma hadlarining koeffitsientlari vektorning berilgan bazisdagi koordinatalari deyiladi va har bir bazis uchun bu koordinatalar bir qiymatli aniqlanadi: $\vec{d}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}+\gamma\vec{c}=\{\alpha,\beta,\gamma\}$.

$\boxed{T}$ $\vec{d_1}$ va $\vec{d_2}$ vektorlarni qo‘shishda (ixtiyoriy bazisga nibatan) ularning koordinatlari qo‘shiladi. $\vec{d_1}$ vektorni ixtiyoriy α songa ko‘paytirishda uning barcha koordinatalari shu songa ko‘paytiriladi.

Isboti:

$\vec{d_1}=\alpha_1\vec{a}+\beta_1\vec{b}+\gamma_1\vec{c}$ va $\vec{d_2}=\alpha_2\vec{a}+\beta_2\vec{b}+\gamma_2\vec{c}$ bo‘lsin. U holda vektorlar ustidagi chiziqli amallarning 1°-7° xossalaridan $\vec{d_1}+\vec{d_2}=(\alpha_1+\alpha_2)\vec{a}+(\beta_1+\beta_2)\vec{b}+(\gamma_1+\gamma_2)\vec{c}$, $\lambda\vec{d_1}=(\lambda\alpha_1)\vec{a}+(\lambda\beta_1)\vec{b}+(\lambda\gamma_1)\vec{c}$ ga ega bo‘lamiz.

Vektorni bazis bo‘yicha yoyilmasi yagonaligidan teorema isbotlandi.

$\boxed{t}$ Fazoda **koordinatalar sistemasi deb** $\{\vec{a},\vec{b},\vec{c}\}$ bazis va koordinatalar boshi deb ataluvchi biror nuqta majmuiga aytiladi.

$\boxed{t}$ Boshi koordinatalar boshi O nuqtada va oxiri M nuqtada bo‘lgan $\overrightarrow{OM}$ vektor radius-vektor deb ataladi.

$\boxed{t}$ $M(\alpha,\beta,\gamma)$ nuqtaning koordinatalari $\overrightarrow{OM}$ vektorning koordinatalari deb ham ataladi. Shunday qilib, $\overrightarrow{OM}$ radius-vektor va M nuqtaning koordinatlari ustma-ust tushadi.

1.5. Ortonormallangan bazis.

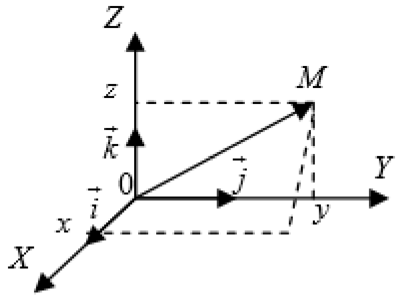
To‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi

Bazis sifatida uzunligi birga teng bo‘lgan o‘zaro perpendikulyar uchta vektor tanlangan bo‘lsin.

Belgilanishi: $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$, $|\vec{i}|=|\vec{j}|=|\vec{k}|=1$.

$\boxed{t}$ Bunday bazis ortonormalangan (ONB) deb ataladi. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlar bazis ortlari deb ataladi. Koordinatalar boshini O deb olamiz va $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlani joylashtiramiz. Hosil bo‘lgan koordinatalar sistemasi to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasi deb ataladii. Bu bazisdagi ixtiyoriy vektorning koordinatasi, shu vektorning dekart koordinatalari deb ataladi (8-rasm):

$$\vec{a}=\{x,y,z\}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}\,.$$



8-rasm.

$\boxed{t}$ Koordinatalar boshidan o‘tuvchi bazis vektorlar yo‘nalishidagi to‘g‘ri chiziqlar **koordinata o‘qlari** deb ataladi: $\vec{i}\ -Ox$ ni, $\vec{j}-\ Oy$ ni $\vec{k}$ – esa Oz vujudga keltiradi. M ($\overrightarrow{OM}$ vektor) nuqtaning koordinatalari Ox, Oy, Oz o‘qlar bo‘yicha dekart koordinatalar sistemasida mos ravishda **abssissa, ordinata va applikatasi** deb ataladi.

To‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida $\vec{a}$ vektorning x,y,z koordinatalari bu vektorning Ox, Oy va Oz o‘qlardagi proeksiyalari deyiladi, boshqacha qilib aytganda,

$$x=np_{OX}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\alpha\,,\ \ y=np_{OY}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\beta\,,\ \ z=np_{OZ}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\gamma\ .$$

Bu erda $\alpha,\beta,\gamma-\ \vec{a}$ vektor bilan mos ravishda Ox, Oy, Oz koordinata o‘qlari hosil qilgan burchaklar. Bu burchaklar kosinuslari: $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ $\vec{a}$ vektorning **yo‘naltiruvchi kosinuslari deb ataladi**.

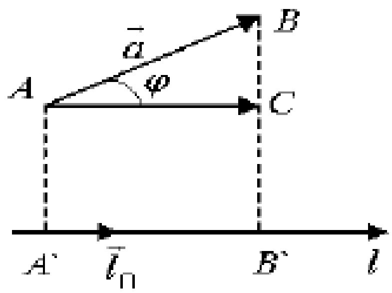
$\overrightarrow{a_0}=\dfrac{\vec{a}}{\left|\vec{a}\right|}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ vektor berilgan yo‘nalishdagi birlik vektorni yoki berilgan yo‘nalishdagi **ortni** ifodalaydi. Yo‘naltiruvchi kosinuslar uchun quyidagi munosabat o‘rinli:

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1.$$

1.6. Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi. Ta’rifi.

Algebraik xossalari. Geometrik tadbiqlari. Skalyar ko‘paytmani vektorlarning dekart koordinatal(proyeksiya)lari orqali ifodalash

$\boxed{t}$ $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak ($\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right)$ kabi belgilanadi) deb $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorgacha burish mumkin bo‘lgan eng kichik burchakka aytiladi.



9-rasm.

$\boxed{t}$ $\vec{a}$ vektorning ℓ o‘qdagi **proeksiyasi** $np_\ell \vec{a}$ **deb,** ℓ o‘q bo‘yicha $\overrightarrow{A'B'}$ yo‘nalgan kesmaning $A'B'$ kattaligiga aytiladi (9-rasmga qarang).

$$np_\ell \vec{a} = |\vec{a}|\cos\phi = |\vec{a}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{l_0}\right),$$ bu erda $\vec{\ell_0}$ - ℓ o‘q orti.

$\boxed{t}$ Ikki vektorning **skalyar ko‘paytmasi deb**, bu vektorlar uzunliklari va ular orasidagi burchak kosinusi ko‘patmasiga teng:

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{a},\vec{b}\right) = \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}\right).$$

$\boxed{!}$ $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan biri nol vektor bo‘lsa, u holda $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=0$.

Skalyar ko‘paytmaning algebraik xossalari:

1°. O‘rin almatirish: $\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$.

2°. Guruhlash: $\left(\lambda\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\lambda\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\left(\vec{a}\cdot\lambda\vec{b}\right)$.

3°. Taqsimot: $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)+\left(\vec{b}\cdot\vec{c}\right)$, $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)+\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right)$.

4°. Agar $\vec{a}\neq 0$ bo‘lsa $\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)>0$ bo‘ladi va agar $\vec{a}=0$ bo‘lsa, $\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)=0$ bo‘ladi.

$\boxed{!}$ Xossalarni isboti ta’rifdan kelib chiqadi.

Skalyar ko‘paytmaning geometrik tadbiqlari:

1. Modul bilan bog‘liqligi: $\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)=|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos\left(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{a}\right)=|\vec{a}|^2\cos 0^o=|\vec{a}|^2$; $|\vec{a}|=\sqrt{\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)}$.

2. Vektorlar orasidagi burchak kosinusi: $\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\dfrac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}$.

3. Proeksiya tushunchasi bilan bog‘liqligi.

$$np_{\vec{b}}\vec{a}=\left|\vec{a}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=\left|\vec{a}\right|\cdot\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}$$, ya’ni $np_{\vec{b}}\vec{a}=\dfrac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|}$.

$\vec{b}$ vektorning $\vec{a}$ vektordagi proeksiyasi: $np_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right|}$.

4. **Ortogonallik** (perpendikulyarlik)**ning zaruriy va yetarli sharti:** ikkita nol bo‘lmagan vektorlarning skalyar ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi $\vec{a}\perp\vec{b}$: $\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\dfrac{\pi}{2}\Leftrightarrow\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=0$ hisoblanadi.

Skalyar ko‘patmaning dekart koordinata(proyeksiya)lari ko‘paytuvchilar orqali ifadalanishi

T Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zlarining to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalari bilan berilgan bo‘lsa, ya’ni $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$, $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$, u holda bu vektorlarning skalyar ko‘paytmasi mos koordinatalari ko‘paytmasi yig‘indisiga teng, ya’ni
$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

Isboti: $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\quad \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$.

2 va 3 xossadan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{aligned}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)&=\left(\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\right)\cdot\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)\right)=x_1x_2\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)+x_1y_2\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)+x_1z_2\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right)+\\&+y_1x_2\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right)+y_1y_2\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)+y_1z_2\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)+z_1x_2\left(\vec{k}\cdot\vec{i}\right)+z_1y_2\left(\vec{k}\cdot\vec{j}\right)+z_1z_2\left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right).\end{aligned}$$

$\vec{i}\perp\vec{j},\ \vec{i}\perp\vec{k},\ \vec{j}\perp\vec{k}$ ekanligidan

$$\left(\vec{i}\cdot\vec{j}\right)=\left(\vec{i}\cdot\vec{k}\right)=\left(\vec{j}\cdot\vec{k}\right)=\left(\vec{j}\cdot\vec{i}\right)=\left(\vec{k}\cdot\vec{i}\right)=\left(\vec{k}\cdot\vec{j}\right)=1\cdot1\cdot\cos90^o=0.$$

Biroq $\left(\vec{i}\cdot\vec{i}\right)=\left|\vec{i}\right|^2\cos\left(\vec{i},\vec{i}\right)=\left|\vec{i}\right|^2=1$, shu kabi $\left(\vec{j}\cdot\vec{j}\right)=1,\ \left(\vec{k}\cdot\vec{k}\right)=1$. Shunday qilib,

$$\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2.$$

$\boxed{n}$ 1. Vektor uzunligi: $\vec{a}=\{x,y,z\}$, $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

2. Ikki nuqta orasidagi masofa: Agar $A=\left(x_1,y_1,z_1\right)$ va $B=\left(x_2,y_2,z_2\right)$– nuqtalar bo‘lsa,

u holda $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

3. Vektorlar orasidagi burchak: Agar $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$ va $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$ vektorlar bo‘lsa, u holda

$$\cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} .$$

2. $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektordagi proeksiyasi $np_{\vec{b}}\vec{a}$

$$np_{\vec{b}}\vec{a} = \frac{\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right)}{\left|\vec{b}\right|} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2}{\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}} .$$

5. Vektorning yo‘naltiruvchi kosinuslari:

$$\cos\alpha = \cos\left(\vec{a}, \vec{i}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

$$\cos\beta = \cos\left(\vec{a}, \vec{j}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ,$$

$$\cos\gamma = \cos\left(\vec{a}, \vec{k}\right) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} ;$$

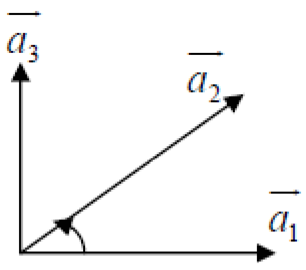
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

1.7. Vektorlarning vektor ko‘paytmasi. Ta’rifi.

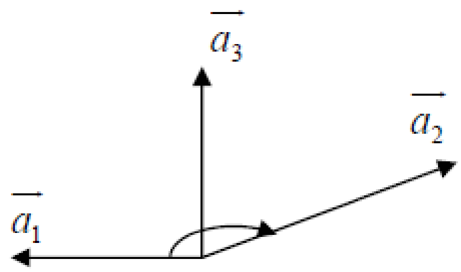
Algebraik va geometrik xossalari.

Vektor ko‘paytmani vektorlarning dekart koordinata(proyeksiya)lari orqali ifodalash

$\boxed{t}$ $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ komplanar bo‘lmagan tartiblangan vektorlar uchligi agar $\vec{a}_3$ oxiridan $\vec{a}_1$ vektorni $\vec{a}_2$ vektor tomon soat strelkasi yo‘nalishiga qarshi eng qisqa burish mumkin bo‘lsa o‘ng, aks holda bu vektorlar uchligi chap deyiladi.



o‘ng



chap

$\boxed{t}$ Koordinatalar sistemasi o‘ng deyiladi, agar uning bazis vektorlari o‘ng uchlikni tashkil etsa.

Kelgusida biz faqat o‘ng koordinata sistemasi qarab chiqamiz.

Ikki qo‘shni vektorlar o‘rni almashtirilsa uchlik yo‘nalishi o‘zgaradi. Agar $\vec{a}\vec{b}\vec{c},\ \vec{b}\vec{c}\vec{a},\ \vec{c}\vec{a}\vec{b}$ -vektorlar uchligi o‘ng bo‘lsa, u holda $\vec{a}\vec{c}\vec{b},\ \vec{c}\vec{b}\vec{a},\ \vec{b}\vec{a}\vec{c}$ -vektorlar uchligi chap bo‘ladi. Aylanma (**siklik**) o‘rin almashtirishda vektorlar uchligi yo‘nalishi o‘zgarmaydi.

$\boxed{t}$ $\vec{a}$ vektorning $\vec{b}$ vektorga vektor ko‘paytmasi $\vec{c}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\vec{a}\times\vec{b}$ deb, quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi vektorga aytiladi:

1) $\vec{c}$ vektor uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar uzunliklari va ular orasidagi burchak sinusi ko‘paytmasiga teng, ya’ni $|\vec{c}|=\left|\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\right|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$.

2) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning har biriga ortogonal, ya’ni $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar.

3) $\vec{c}$ vektor shunday yo‘nalganki, bunda $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ vektorlar uchligi o‘ng uchlikni tashkil etsin.

Vektor ko‘paytmaning algebraik xossalari:

1°. Ko‘paytuvchilarni o‘rin almashtirishga bo‘ysunmasligi: $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=-\left[\vec{b}\times\vec{a}\right]$.

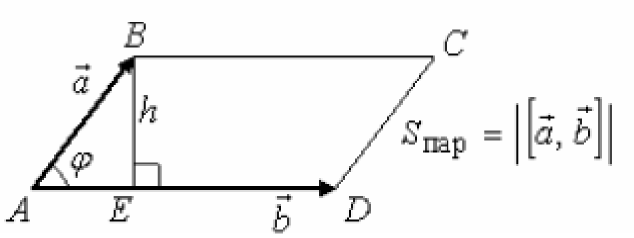
2°. Guruhlash xossasi: $\left[\alpha\vec{a}\times\vec{b}\right]=\alpha\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$.

3°. Taqsimot xossasi: $\left[\vec{a}+\vec{b}\times\vec{c}\right]=\left[\vec{a}\times\vec{c}\right]+\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]$.

4°. Ixtiyoriy $\vec{a}$ vektor uchun $\left[\vec{a}\times\vec{a}\right]=\vec{0}$.

Vektor ko‘paytmaning geometrik xossalari:

$\boxed{\mathbf{T}}$ $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ vektorning moduli $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelagoramm yuzi S_{nap} ga teng, ya’ni $S_{nap}=\left|\overrightarrow{AD}\right|\cdot\left|\overrightarrow{BE}\right|=\left|\vec{b}\right|\cdot h=\left|\vec{b}\right|\cdot|\vec{a}|\sin\left(\vec{a},\hat{\ }\vec{b}\right)$ ga teng (10-rasmga qarang):



10-rasm.

$\boxed{\text{T}}$ Ikkita vektorlar **kollinear bo‘lishi uchun ularning** vektor ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi **zarur va etarli**.

Isboti:

Zarurligi. Faraz qilaylik, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lsin. U holda

$$\left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 0 \Rightarrow \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \vec{0}.$$

Yetarliligi.

Faraz qilaylik, $\left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \vec{0} \Rightarrow \left|\left[\vec{a} \times \vec{b}\right]\right| = 0 \Rightarrow |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 0$ bo‘lsin. U holda quyidagi uch hol bo‘lishi mumkin:

1) yoki $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 0$,

2) yoki $\vec{a} = \vec{0}$,

3) yoki $\vec{b} = \vec{0}$.

1) $\sin\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 0 \Rightarrow \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right) = 0$, ya’ni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear; 2) va 3) $\vec{a}$ va $\vec{b}$ ta’rifga ko‘ra kollinear.

Vektor ko‘paytmaning koordinatalar ko‘paytmalari orqali ifodalanishi. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar o‘zlarining dekart koordinatalari bilan berilgan bo‘lsa, ya’ni $\vec{a} = \{x_1, y_1, z_1\}$, $\vec{b} = \{x_2, y_2, z_2\}$, u holda ularning vektor ko‘paytmasi $\vec{c} = \left[\vec{a} \times \vec{b}\right] = \{y_1 z_2 - z_1 y_2,\ z_1 x_2 - x_1 z_2,\ x_1 y_2 - y_1 x_2\}$ ga teng, yoki determinant orqali ifodalaganda (eslab qolish uchun qulay) quyidagiga teng:

$$\vec{c}=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}.$$

Isboti: $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$- o‘ng uchlik.

Quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$\vec{c}=\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\left[\left(x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}\right)\times\left(x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}\right)\right]=x_1x_2\left[\vec{i}\times\vec{i}\right]+x_1y_2\left[\vec{i}\times\vec{j}\right]+x_1z_2\left[\vec{i}\times\vec{k}\right]+$$
$$+y_1x_2\left[\vec{j}\times\vec{i}\right]+y_1y_2\left[\vec{j}\times\vec{j}\right]+y_1z_2\left[\vec{j}\times\vec{k}\right]+z_1x_2\left[\vec{k}\times\vec{i}\right]+z_1y_2\left[\vec{k}\times\vec{j}\right]+z_1z_2\left[\vec{k}\times\vec{k}\right].$$

Bunda

$$\left[\vec{i}\times\vec{i}\right]=\left[\vec{j}\times\vec{j}\right]=\left[\vec{k}\times\vec{k}\right]=\vec{0},\ \left[\vec{i}\times\vec{j}\right]=-\left[\vec{j}\times\vec{i}\right]=\vec{k},\ \left[\vec{i}\times\vec{k}\right]=-\left[\vec{k}\times\vec{i}\right]=-\vec{j},\ \left[\vec{j}\times\vec{k}\right]=-\left[\vec{k}\times\vec{j}\right]=\vec{i}.$$

ekanligidan va yuqoridagi tengliklardan $\vec{c}$ ni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\left(y_1z_2-z_1y_2\right)\cdot\vec{i}-\left(z_1x_2-x_1z_2\right)\cdot\vec{j}+\left(x_1y_2-y_1x_2\right)\cdot\vec{k}$$

Buni determinat orqali ifodalab olsak u quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}x_1 & z_1\\ x_2 & z_2\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\cdot\vec{k}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$$

$\boxed{n}$ Agar $\vec{a}=\{x_1,y_1,z_1\}$ va $\vec{b}=\{x_2,y_2,z_2\}$ vektorlar kollinear bo‘lsa, u holda $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]=0$ va ularning koordinatalari proporsional bo‘ladi, ya’ni $\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}$.

1.8. Vektorlarning aralash ko‘paytmasi. Ta’rifi.

Algebraik va geometrik xossalari. Aralash ko‘paytmani vektorlarning dekart koordinata(proyeksiya)lari orqali ifodalash

$\boxed{t}$ Agar $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorga vektor ko‘paytirib, $\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]$ natijasini $\vec{c}$ vektorga skalyar ko‘paytirish orqali hosil bo‘lgan son $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning $\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right)=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ **aralash** ko‘paytmasi deb ataladi.

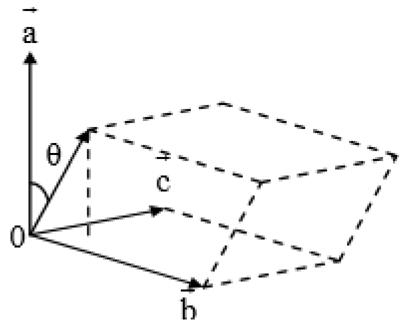
$\boxed{T}$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ va $\vec{c}$ komplanar bo‘lmagan vektorlarning aralash ko‘paytmasi absolyut qiymati bu vektorlarni umumiy uchga keltirib, ularga qurilgan parallelepiped hajmiga teng. Agar $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ uchlik o‘ng bo‘lsa, aralash ko‘paytma musbat, agar bu uchlik chap bo‘lsa, aralash ko‘paytma manfiy bo‘ladi. Agar $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo‘lsa, u holda $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ nolga teng bo‘ladi.

Isboti:

Parallelepiped hajmi asosining yuzini uning balandligiga ko‘paytmasiga teng (11-rasm).

$S_{asos} = \left|\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right|;\ h = |\vec{a}|\cdot|\cos\theta|;$

$V = S_{acoc}\cdot h = \left|\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right|\cdot|\vec{a}|\cdot|\cos\theta| = \left(\vec{a},\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right) = \left|\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right|.$



11-rasm.

! Aralash ko‘paytma ishorasi $cos\,\theta$ ishorasiga bog‘liq. Agar $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar aniqlovchi tekislik tomonga yo‘nalgan, ya’ni $\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]$ vektor bilan bir xil yo‘nalgan, ya’ni vektorlar uchligi o‘ng bo‘lsa, $\vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$ bo‘ladi. Vektorlar uchligi chap bo‘lganda $\vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$ bo‘lishi shunga o‘xshash isbotlanadi.

$\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar komplanar bo‘lsa, u holda $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orqali aniqlangan tekislikda yotadi. Bundan $np_{\vec{e}}\ \vec{c} = 0 \Rightarrow \left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right) = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

$\boxed{n}$ 1. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ va $\vec{b}\vec{c}\vec{a}$, $\vec{c}\vec{a}\vec{b}$ vektorlar uchligi bir xil yo‘nalishga ega bo‘lganligi uchun $\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right) = \left(\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\cdot\vec{a}\right) = \left(\left[\vec{c}\times\vec{a}\right]\cdot\vec{b}\right)$ o‘rinli(vektorlarning siklik o‘rin almashishi aralash ko‘paytma ishorasini o‘zgartirmaydi)dir.

Vektorlarning siklik bo‘lmagan o‘rin almashishi aralash ko‘paytma ishorasini o‘zgartirib, vektorlar uchligi yo‘nalishini o‘zgartiradi va ishorasi almashishiga olib keladi: $\vec{b}\vec{a}\vec{c} = \vec{a}\vec{c}\vec{b} = \vec{c}\vec{b}\vec{a} = -\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Bu esa aralash ko‘patmani $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$

ko‘rinishda yozish mumkinligini ko‘rsatadi, shuningdek $\left(\left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c}\right)=\left(\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\cdot\vec{a}\right)=\left(\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right)$ (aralash ko‘paytma ko‘paytuvchilar o‘rniga bog‘liq, biroq vektor ko‘paytmaning dastlabki ishorasi ko‘paytuvchilarning o‘rniga bog‘liq emas).

2. Uchta vektorlarning komplanarlik mezoni. Uchta vektorlar komplanar bo‘lishi uchun bu vektorlarning aralash ko‘paytmasi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isboti:

Agar $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right|\cdot\cos\theta=0$ bo‘lsa, u holda quyidagi shartlardan hech bo‘lmaganda bittasi bajarilishi shart:

1) $\left|\vec{a}\right|=0\Rightarrow$ vektorlar komplanar;

2) Agar $\vec{b}$ va $\vec{c}$ kollinear bo‘lsa, u holda $\left|\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right|=0$, b ×c =0 bo‘ladi $\Rightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - komplanar;

3) Agar $\cos\theta=0$ bo‘lsa, u holda $\vec{a}\perp\left|\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right|$, ya’ni $\vec{a}$ vektor $\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarga perpendikulyar.

Aksincha, agar $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ - komplanar bo‘lib, 1) va 2) hollar o‘rinli bo‘lmasa, u holda 3) hol o‘rinli bo‘ladi.

Aralash ko‘paytmaning dekart koordinatali ko‘paytuvchilari shaklida ifodalanishi

T Agar $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlar o‘zlarining dekart koordinatalari bilan berilgan bo‘lsa $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k},\ \vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k},\ \vec{c}=x_3\vec{i}+y_3\vec{j}+z_3\vec{k}$, u holda bu vektorlarning aralash ko‘paytmasi $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ satrlari ko‘paytiriladigan vektorlarning koordinatalaridan iborat bo‘lgan diterminantga teng:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Isboti:

$$\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix},$$

$$\left(\vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\vec{c}\right]\right)=x_1\begin{vmatrix}y_2 & z_2\\ y_3 & z_3\end{vmatrix}-y_1\begin{vmatrix}x_2 & z_2\\ x_3 & z_3\end{vmatrix}+z_1\begin{vmatrix}x_2 & y_2\\ x_3 & y_3\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\\ x_3 & y_3 & z_3\end{vmatrix}.$$

$\boxed{n}$ Dekart bazisda berilgan uchta vektorning komplanar bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti birinchi satrida birinchi vektor koordinatalari yozilgan, ikkinchi satrida ikkinchi vektor koordinatalari yozilgan va uchinchi satrida uchinchi vektor koordinatalari yozilgan determinant qiymatining nolga teng bo‘lishidan iboratdir.

Bayon etilgan ma’lumotlarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi zarur:

Skalyar va vektor kattaliklarning farqi;

Vektorlar va ular ustida chiziqli amallar bajarish va amallarning xossalarini bilish (qo‘shish va songa ko‘paytirish amallari uchun);

Bazis tushunchasi va vektorning berilgan bazisdagi koordinatlari;

Ikki vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko‘paytmalarining ta’riflari;

Vektorlarning (skalyar, vektor va aralash) ko‘paytmalarining algebraik va geometrik xossalari;

Vektorlar (skalyar, vektor va aralash) ko‘paytmalarilarini vektorlarning koordinatalari orqali ifodalash;

Vektorlarni (skalyar, vektor va aralash) ko‘paytirish amallarining geometrik tatbiqlari.

2. TO‘G‘RI CHIZIQ VA TEKISLIK

Analitik geometriyaning predmeti tekislik va fazodagi geometrik ob’ektlarni algebraik tenglamalar yordamida o‘rganishdan iborat. Analitik geometriyada zamonaviy tabiiy va texnik ob’ekt va hodisalarning matematik modellarini qurishdan keng foydalaniladi. Bo‘limda o‘zgaruvchilarga nisbatan birinchi darajali tenglamalar bilan ifodalanuvchi nisbatan sodda ob’ektlar: to‘g‘ri chiziq va tekisliklar ko‘rib chiqilgan. To‘g‘ri chiziq va tekislikning turli ko‘rinishdagi tenglamalari keltirib chiqarilgan bo‘lib, masalalarda ularning qaysi tipi ko‘proq mos kelishi ko‘rsatilgan. Keltirilgan misollar tipik masalalar hisoblanib, ularning yechish usullari namoyon qilingan.

Bo‘limning mavzulari:

2.1. Analitik geometriya asoslari.

2.1.1. Sirt tenglamasi.

2.1.2. Chiziq tenglamasi.

2.2. Fazoda tekislik.

2.2.1. Tekislik birinchi tartibli sirt sifatida. Tekislikning umumiy tenglamasi.

2.2.2. Tekislikning to‘liqmas tenglamalari.

2.2.3. Tekislikning «kesmalar»dagi tenglamasi.

2.2.4. Tekislikning normal tenglamasi.

2.2.5. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa.

2.2.6. Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi.

2.2.7. Ikki tekislik orasidagi burchak.

2.2.8. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

2.3. Fazodagi to‘g‘ri chiziq.

2.3.1. To‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasi.

2.3.2. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi.

2.3.3. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi.

2.3.4. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

2.3.5. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.

2.3.6. To‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasi.

2.3.7. Ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita to‘g‘ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

2.4. To‘g‘ri chiziq va tekislik.

2.4.1. To‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi.

2.4.2. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak. To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallelik va perpendikulyarlik shartlari.

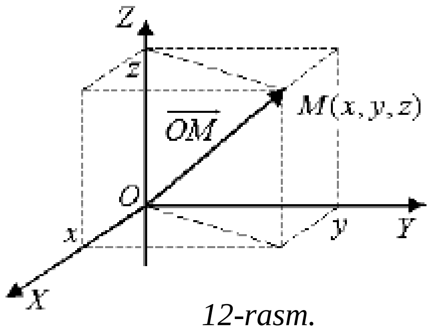
2.1. Analitik geometriya asoslari

2.1.1. Sirt tenglamasi

Analitik geometriya analitik usullar yordamida geometrik ob’ektlarni o‘rganish masalasini o‘z oldiga qo‘yadi.

Geometrik ob’ektlar: nuqta, chiziq, sirt.

Nuqta. Sonlarning analitik majmuasi: bittasi - to‘g‘ri chiziqdagi nuqta uchun; ikkitasi – tekislikdagi nuqta uchun; uchtasi – fazodagi nuqta uchun. Bu sonlar nuqtaning koordinatalar deb ataladi.



12-rasm.

Fazoda to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasini kiritamiz, ya’ni O nuqta koordinatlar boshi, Ox, Oy, Oz o‘qlar bo‘yicha yo‘nalgan bazislar $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

$\boxed{t}$ M nuqtaning d**ekart koordinatalari deb,** uning $\overline{OM} = \{x, y, z\}$ radius-vektori koordinatalariga aytiladi.

Murakkab geometrik ob’ektlar tenglamalari berilgan ob’ektga tegishli nuqtalar bilan bog‘liq bo‘lgan tenglamalar orqali beriladi. Bu tenglamalarni qanoatlantiruvchi nuqtalar berilgan geometrik ob’ektga tegishlilik shartini ifodalaydi.

Bizga $F(x, y, z) = 0$ $(*)$ tenglama va S sirt berilgan bo‘lsin. S-sirt (*) tenglama orqali aniqlangan nuqtalarning geometrik o‘rnidir. Bunda S sirtning ixtiyoriy nuqtasi (*) tenglamani qanoatlantiradi va unda yotmaydigan nuqtalar esa

(*) tenglamani qanoatlantirmaydi.

$\boxed{t}$ Dekart koordinatalar sistemasida n-tartibli algebraik tenglama bilan berilgan sirt n-tartibli algebraik **sirt deb ataladi.**

2.1.2. Chiziq tenglamasi

Analitik geometriyada fazodagi har bir chiziq fazodagi ikki sirt kesishmasi sifatida qaraladi va u ikkita tenglamalar orqali aniqlanadi. Agar $F(x, y, z) = 0$ va $\Phi(x, y, z) = 0$ tenglamalar L chiziq bo‘yicha kesishuvchi ikki sirt S_1 va S_2 tenglamalari bo‘lsin. U holda L chiziq S_1 va S_2 sirtlarning umumiy nuqtalarining geometrik o‘rni bo‘lib, uning koordinatalari quyidagi tenglamalar sistemasini har doim qanoatlantiradi:

$$L = \begin{cases} F(x, y, z) = 0, \\ \Phi(x, y, z) = 0. \end{cases}$$

2.2. Fazoda tekislik

2.2.1. Tekislik birinchi tartibli sirt sifatida.

Tekislikning umumiy tenglamasi

$\boxed{\text{T}}$ Dekart koordinatalarda har qanday tekislik birinchi tartibli tenglama orqali aniqlanadi va har qanday birinchi tartibli tenglama tekislikni ifodalaydi.

Fazodagi P tekislikda ixtiyoriy $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtani olamiz. Tekislikka perpendikulyar $\vec{n} = \{A, B, C\}$ (**normal**) vektorni tanlaymiz. $M(x, y, z)$– nuqta P tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. M nuqta $\overrightarrow{M_0M} \perp \vec{n} \Rightarrow \left(\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{n}\right) = 0$ shart o‘rinli bo‘lgandagina P tekislikda yotadi ($M(x, y, z) \in P$ kabi yoziladi).

$\vec{n}$ va $\overrightarrow{M_0M}$ vektorlarning koordinatalari $\vec{n} = \{A, B, C\}$ va $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ bo‘lgani uchun ularning skalyar ko‘paytmasi quyidagiga teng:

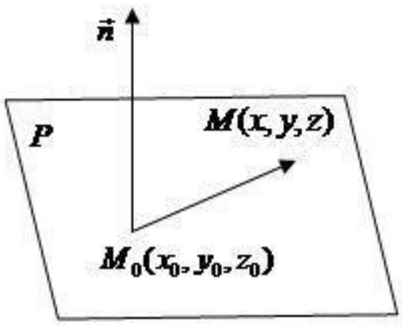
$$\left(\vec{n} \cdot \overrightarrow{M_0M}\right) = A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0).$$

$\vec{n} = \{A, B, C\}$ normal vektorga ega va $M_0(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi quyidagi ko‘rinishga

$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

ega bo‘ladi.

Qavslarni ochib, $D=-Ax_0-By_0-Cz_0$ belgilash kiritsak, birinchi tartibli tenglama (tekislikning umumiy tenglamasi)ga ega bo‘lamiz: $Ax+By+Cz+D=0$.



Masalan $M(1,1,1)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{n}=\{2,2,3\}$ perpendikulyar vektorga ega bo‘lgan tekislik tenglamasini tuzamiz.

Qidirilayotgan tenglama: $2(x-1)+2(y-1)+3(z-1)=0$, $2x+2y+3z-7=0$.

$\boxed{n}$ Agar $A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va $A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar aynan bir tekislikni ifodalasa ularning koeffitsientlari doim proporsional:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}.$$

2.2.2. Tekislikning to‘liqmas tenglamasi

Agar tekislikning umumiy tenglamasida biror bir qo‘shiluvchi qatnashmasa, bu tenglama tekislikning **to‘liqmas** tenglamasi deyiladi.

$Ax+By+Cz+D=0$ birinchi tartibli tenglamalarni xususiy hollarini ko‘rib chiqamiz.

$D=0: Ax+By+Cz=0$ - koordinatalar boshidan o‘tuvchi tekislik tenglamasi.

Quyidagi tenglamalar tekislik normal vektorining mos komponentalari nolga teng va mos ravishda OX, OY, OZ o‘qlariga parallel tekisliklarni ifodalaydi:

$A=0: By+Cz+D=0-\vec{n}\|YOZ \rightarrow P\|OX$;

$B=0: Ax+Cz+D=0-\vec{n}\|XOZ \rightarrow P\|OY$;

$$C=0: Ax+By+D=0-\vec{n}\|XOY \to P\|OZ;$$

Quyidagi tenglamalar mos ravishda OXY, OXZ, OYZ koordinata tekisliklariga parallel tekisliklarni ifodalaydi:

$$A=0,\ B=0:\ Cz+D=0\ -\ \vec{n}\|OZ \to P\ \|\ XOY;$$

$$A=0,\ C=0: By+D=0\ -\ \vec{n}\ \|\ OY \to P\ \|\ XOZ;$$

$$B=0,\ C=0: Ax+D=0\ -\ \vec{n}\ \|\ OX\ \to P\ \|YOZ;$$

Quyidagi tenglamalar esa mos ravishda XOY, XOZ, YOZ koordinata tekisliklarini ifodalaydi:

$A=0,\ B=0,\ D=0:\ Cz=0$ - XOY tekislik;

$A=0, C=0,\ D=0: By=0$ - XOZ tekislik;;

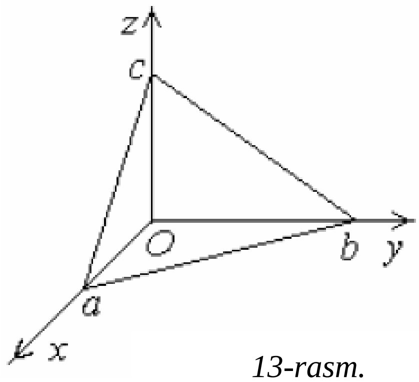
$B=0, C=0, D=0: Ax=0$ - YOZ tekislik;;

2.2.3. Tekislikning "kesmalar"dagi tenglamasi

Faraz qilaylik, tekislik koordinatalar boshidan o‘tmasin. Tekislikning umumiy tenglamasida quyidagi almashtirishlarni bajaramiz:

$$Ax+By+Cz=-D, \qquad \frac{Ax}{-D}+\frac{By}{-D}+\frac{Cz}{-D}=1,$$

$$\frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1.$$



13-rasm.

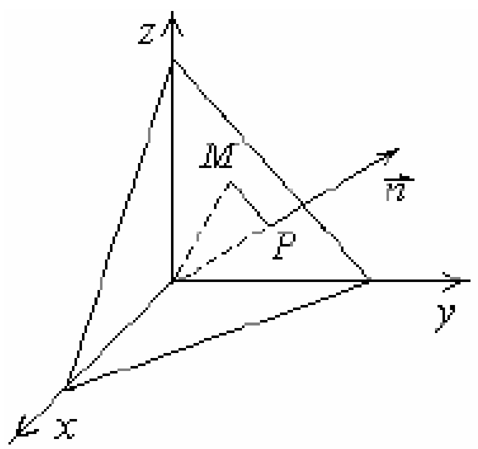
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ tenglama **tekislikning «kesmalar»dagi tenglamasi** deb ataladi. Bunda $a=-\frac{D}{A},\ b=-\frac{D}{B},\ c=-\frac{D}{C}$ parametrlar tekislikning koordinata o‘qlari bilan kesishish nuqtalarining koordinatalarini ifodalaydi va tekislikni koordinata o‘qlaridan ajratgan kesmalariga doim tengdir (13-rasm).

Misol: $2x-4y+6z-12=0$ tekislik koordinata o‘qlarini qanday kesmalarda kesib o‘tadi?

Tekislikning berilgan umumiy tenglamasini tekislikning kesmalardagi tenglamasi ko‘rinishiga keltiramiz: $\frac{2x}{12}-\frac{4y}{12}+\frac{6z}{12}=1 \Rightarrow \frac{x}{6}+\frac{y}{-3}+\frac{z}{2}=1.$

O‘qlarda qidirgan kesmalarimiz $a=6,\ b=-3,\ c=2$. b oldidagi “-” ishora tekislik Oy o‘qini manfiy yarim o‘qida kesishini bildiradi.

2.2.4. Tekislikning normal tenglamasi



P –koordinatalar boshidan tekislikka tushirilgan perpendikulyar asosi va $M(x,y,z)$ esa tekislikdagi ixtiyoriy nuqta bo‘lsin. $\left(\overrightarrow{OM}=\{x,y,z\}\right)$,

$\overline{OR}$ vektorning moduli $\left|\overrightarrow{OP}\right|=p$ ga teng.

$\overrightarrow{n_0}$ – tekislikning birlik normal vektori, $\left|\overrightarrow{n_0}\right|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{n}_0}=\{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}$.

Tekislikning ixtiyoriy $M(x,y,z)$ nuqtasiga mos radius-vektori $\overrightarrow{OM}$ ning $\overrightarrow{\mathrm{n}_0}$ -vektor yo‘nalishdagi proeksiyasining radius-vektori $\overrightarrow{OP}$ vektorining moduli $\left|\overrightarrow{OP}\right|=p$ ga, ya’ni $np_{\overrightarrow{n_0}}\overrightarrow{OM}=p$ ga teng.

$$np_{\overrightarrow{n_0}}\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{n_0}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma.$$

$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=p$ tenglama tekislikning normal tenglamasi bo‘lib, uni quyidagicha yozish mumkin:

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0,$$

bu erda $\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma$ - normalni tekislikka yo‘naltiruvchi kosinuslari, p – tekislikdan koordinatlar boshigacha bo‘lgan masofa (koordinatalar boshidan tekislikka tushirilgan normal uzunligi).

Tekislik tenglamasini normal ko‘rinishga keltirish

Tekislik umumiy tenglamasi $Ax+By+Cz+D=0$ ni normal ko‘rinishga keltiramiz: $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$. Bu tenglamalar aynan bir tekislikni ifodalagani uchun ularning koeffitsientlari proporsional:

$$\cos\alpha=\mu A,\ \cos\beta=\mu B, \cos\gamma=\mu C, -p=\mu D.$$

Yo‘naltiruvchi vektor kosinuslari quyidagi shartni qanoatlantiradi

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1,$$

bu shartidan esa $\mu^2\left(A^2+B^2+C^2\right)=1$ ekanligi kelib chiqadi.

Normallashtiruvchi ko‘paytuvchi deb ataluvchi ko‘paytuvchini kiritib olamiz: $\mu=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$. Normallashtiruvchi ko‘paytuvchi ishorasi $\mu D<0$ shart asosida aniqlanadi, ya’ni uning ishorasi normallashtiriladigan tenglama ozod hadining ishorasiga qarama-qarshi qilib olinadi. Tekislikning umumiy tenglamasini μ normallashtiruvchi ko‘paytuvchiga ko‘paytirish, uni normal tenglama ko‘rinishiga keltiradi:

$$\mu Ax+\mu By+\mu Cz+\mu D=0.$$

$\boxed{!}$ 1. Tekislik tenglamasini normal ko‘rinishga keltirish orqali tekislikni koordinatalar sistemasiga nisbatan joylashuvini bilish imkonini beradi.

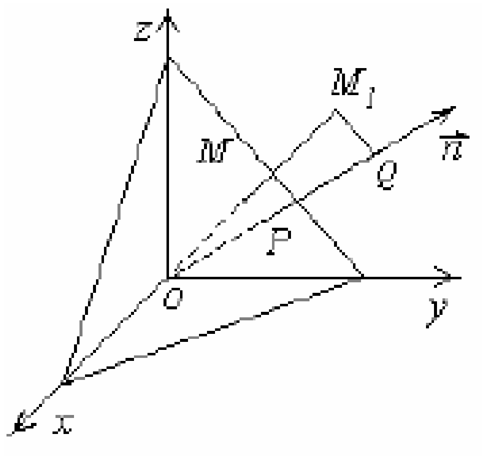
2. Tekislik tenglamasida normallashtiruvchi ko‘paytuvchi kiritish ixtiyoriy $\vec{n}=\{A,B,C\}$ normal vektorni birlik normal vektor $\overrightarrow{\mathrm{n}_0}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}=\frac{\vec{n}}{|\vec{n}|}$ bilan almatirishga olib keladi.

2.2.5. Nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa

$\boxed{t}$ Tekislikdan $M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqtaning δ chetlanish deb, M_1 nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikulyar uzunligiga teng bo‘lgan songa aytiladi. Agar M_1 nuqta va koordinatalar boshi tekislikdan bir tomonda joylashgan bo‘lsa «-» ishora bilan, aks holda «+» ishora bilan olinadi.

$M_1(x_1,y_1,z_1)$ nuqta berilgan bo‘lsin. M_1 nuqtani tekislik $\vec{n}$ normaliga proeksiyalaymiz (14-rasm).

Chetlanish $\delta = PQ = OQ - OP$. $OQ = np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM_1}$, $\left|\overrightarrow{OP}\right| = p$, $\delta = np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM_1} - p$,



14-rasm.

$np_{\vec{n}}\overrightarrow{OM_1} = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma$, $\delta = x_1\cos\alpha + y_1\cos\beta + z_1\cos\gamma - p$.

Shunday qilib, biror bir nuqtaning tekislikka nisbatan chetlanishini topish uchun, tekislik normal tenglamasining chap tomoniga nuqtaning koordinatalarini qo‘yish yetarli bo‘ladi.

Agar tekislik umumiy tenglamasi $Ax + By + Cz + D = 0$ bilan berilgan bo‘lsa, u holda $M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtaning bu tekislikdan chetlashishi quyidagi formula orqali hisoblanadi:

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan tekislikkacha bo‘lgan masofa**:**

$$d = |\delta| = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Misol: $M(4,3,1)$ nuqtadan $3x - 4y + 12z + 14 = 0$ tekislikkacha bo‘lgan masofani toping.

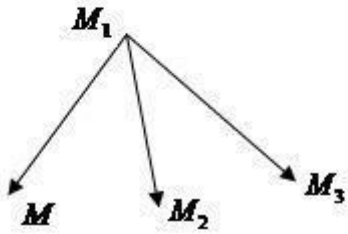
$\mu = \dfrac{-1}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 12^2}} = -\dfrac{1}{13}$;

$-\dfrac{1}{13}(3x - 4y + 12z + 14) = 0$, $\delta = -\dfrac{1}{13}(3\cdot 4 - 4\cdot 3 + 12\cdot 1 + 14) = -2 \rightarrow d = 2$.

2.2.6. Berilgan uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasi

$M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ va $M_3(x_3, y_3, z_3)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. $M(x, y, z)$ - tekislikning joriy nuqtasi bo‘lsin.

Quyidagi uchta vektorni qarab chiqamiz:



$\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\}$,

$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$,

$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$.

Agar $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ va $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlar komplanar bo‘lsa, $M(x, y, z)$ nuqta $M_1M_2M_3$ tekislikda yotadi. Boshqacha aytganda, uchta $\overrightarrow{M_1M}$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ va $\overrightarrow{M_1M_3}$ vektorlarning komplanarlik sharti bu uchta nuqtadan o‘tuvchi tekislik tenglamasini aniqlaydi, ya’ni: $\overrightarrow{M_1M} \cdot \overrightarrow{M_1M_2} \cdot \overrightarrow{M_1M_3} = 0$.

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - x_1 & z_3 - x_1 \end{vmatrix} = 0.$$

2.2.7. Ikki tekislik orasidagi burchak

P_1 va P_2 tekisliklar berilgan bo‘lsin:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Ikkita tekislik orasidagi burchak ularning $\vec{n}_1 = \{A_1, B_1, C_1\}$ va $\vec{n}_2 = \{A_2, B_2, C_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchak bilan aniqlanadi.

$$\cos\phi = \frac{\left|\left(\vec{n}_1, \vec{n}_2\right)\right|}{\left|\vec{n}_1\right| \cdot \left|\vec{n}_2\right|} = \frac{\left|A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2\right|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Misol:

$x - y - \sqrt{2}z - 6 = 0$ va $y = 0$ tekisliklar orasidagi burchakni aniqlang.

Tekisliklar normallari: $\vec{n}_1 = \{1, -1, -\sqrt{2}\}$, $\vec{n}_2 = \{0,1,0\}$.

$$\cos\varphi = \frac{\left|1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 - \sqrt{2} \cdot 0\right|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + \sqrt{2}^2} \cdot \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2}} = \left|-\frac{1}{2}\right| \rightarrow \varphi = 60^0.$$

2.2.8. Tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

P_1 va P_2 tekisliklar o‘zaro **parallel bo‘ladi**, agarda ularning normal vektorlari $\vec{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\vec{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ kollinear bo‘lsa. Bunda ularning koordinatalari proporsional bo‘ladi:

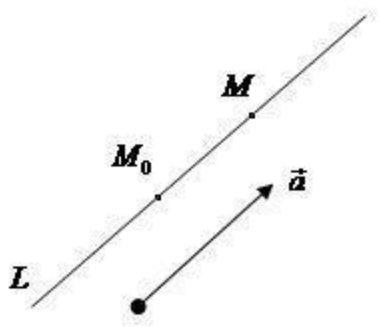
$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}.$$

Agar P_1 va P_2 tekisliklarning normal vektorlari $\vec{n_1}=\{A_1,B_1,C_1\}$ va $\vec{n_2}=\{A_2,B_2,C_2\}$ o‘zaro perpendikulyar bo‘lsa, u holda bu tekisliklar o‘zaro **perpendikulyar bo‘ladi**, , ya’ni $\left(\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\right)=0$. Bundan $A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$.

2.3. Fazoda to‘g‘ri chiziq

2.3.1. To‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasi

Fazodagi biror bir L to‘g‘ri chiziqni ko‘rib chiqaylik. $M_0(x_0,y_0,z_0)$ nuqta L to‘g‘ri chiziqning fiksirlangan nuqtasi $(M_0\in L)$, $M(x,y,z)$ – nuqta esa L to‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi $(M\in L)$ va $\vec{a}=\{l,m,n\}$ – to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori (to‘g‘ri chiziqda yotuvchi yoki unga parallel ixtiyoriy vektor) bo‘lsin. M nuqta L to‘g‘ri chiziqda yotishi uchun $\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{a}$ bo‘lishi va bu vektorlar proporsional $\overrightarrow{M_0M}=t\cdot\vec{a}$ bo‘lishi kerak.



Shunday qilib, $\overrightarrow{M_0M}=\vec{r_M}-\vec{r_{M_0}}$ bo‘ladi, bu erda $\vec{r_M},\vec{r_{M_0}}$ - M va M_0 nuqtalarning radius vektorlari. To‘g‘ri chiziqning ixtiyoriy nuqtasi uchun quyidagiga $\vec{r_M}=\vec{r_{M_0}}+t\cdot\vec{a}$ ga ega bo‘lamiz. Bu tenglama to‘g‘ri chiziqning **vektor tenglamasidir.**

2.3.2. To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasi

Koordinatalar ko‘rinishdagi to‘g‘ri chiziqning vektor tenglamasi uch qismga ajraladi:

$$\begin{cases} x = x_0 + l \cdot t, \\ y = y_0 + m \cdot t, \\ z = z_0 + n \cdot t \end{cases}$$

bu - to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasidir.

2.3.3. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi

To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasidan t parametrni tenglashtirish natijasida $\frac{x-x_0}{l} = \frac{y-y_0}{m} = \frac{z-z_0}{n}$ ga ega bo‘lamiz. Bu esa $M_0(x_0, y_0, z_0)$ fiksirlagan nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{a} = \{l, m, n\}$ yo‘naltiruvchi vektorga ega bo‘lgan to‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasidir.

2.3.4. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ va $M_2(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Yo‘naltiruvchi vektor sifatida $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$ vektorni olsak, u holda to‘g‘ri chiziq tenglamasi quyidagi ko‘rinishga keladi:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

2.3.5 To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi

Quyidagi ikkita tekislikni ko‘rib chiqalik:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Agar $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ bo‘lsa, u holda bu tekisliklar o‘zaro parallel bo‘ladi, aks holda ular kesishadi va tekisliklarning kesishish chizig‘i tenglamasi to‘g‘ri chiziq tenglamasini ifodalaydi.

2.3.6. To‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasi

Quyidagi ikki tekislik kesishishidan hosil bo‘lgan L to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin:

$$L: \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Noldan farqli ixtiyoriy α va β sonlarni olamiz va quyidagi tenglikni tuzamiz: $\alpha(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$.

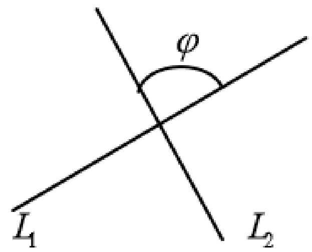
Bu tenglama L to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi tekisliklar dastasining tenglamasini aniqlaydi. Bitta to‘g‘ri chiziqdan o‘tuvchi barcha tekisliklar to‘plami tekisliklar dastasi deb ataladi. Agar $\lambda=\dfrac{\beta}{\alpha}$ deb olsak, u holda tenglama $A_1x+B_1y+C_1z+D_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$ ko‘rinishga kelib, ikkinchi to‘g‘ri chiziqni beruvchi tekislikdan boshqa barcha tekisliklar dastasini aniqlaydi.

2.3.7. Ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak. Ikkita to‘g‘ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari

To‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari berilgan bo‘lsin:

$$L_1:\ \overrightarrow{a_1}=\{l_1,m_1,n_1\},\ L_2:\ \overrightarrow{a_2}=\{l_2,m_2,n_2\}.$$

To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak sifatida ularning yo‘naltiruvchi vektorlari orasidagi burchak olinadi: $\cos\varphi=\dfrac{|l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2|}{\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}$.



Agar to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari a_1 va a_2 parallel bo‘lsa, ya’ni $\dfrac{l_1}{l_2}=\dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}$ shart o‘rinli bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqlar **parallel bo‘ladi**.

Agar to‘g‘ri chiziqlarning yo‘naltiruvchi vektorlari a_1 va a_2 perpendikulyar bo‘lsa, ya’ni $l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0$ shart o‘rinli bo‘lsa, to‘g‘ri chiziqlar **perpendikulyar bo‘ladi**.

2.4. To‘g‘ri chiziq va tekislik

2.4.1. To‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtasi

Faraz qilaylik, L to‘g‘ri chiziq va P tekislik tenglamalari berilgan bo‘lsin:

$$L:\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n},\quad P:Ax+By+Cz+D=0.$$

L to‘g‘ri chiziq va P tekislik kesishish nuqtalarining koordinatalari bir vaqtda bu tenglamalarni qanoatlantirishi lozim. To‘g‘ri chiziq tenglamasini parametrik ko‘rinishga keltiramiz:

$$x = x_0 + lt,\ \ y = y_0 + mt,\ \ z = z_0 + nt\,.$$

Buni P tekislik tenglamasiga qo‘yib, t parametr qiymatiga ega bo‘lamiz, ya’ni u $t = -\dfrac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn}$ ga teng. t parametr qiymatini to‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamasiga qo‘yish to‘g‘ri chiziq va tekislikning kesishish nuqtalari koordinatalarini aniqlaydi.

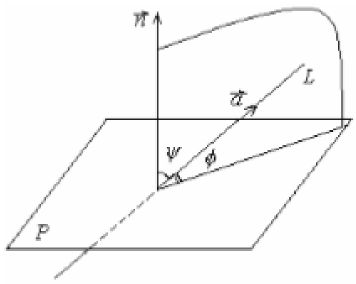
2.4.2. To‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak.

To‘g‘ri chiziq va tekislikning parallelik va perpendikulyarlik shartlari

Agar ϕ – to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchak bo‘lsa u holda

$$\cos\left(\vec{n},\hat{\ }\vec{a}\right) = \cos\psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \sin\phi$$

$$\sin\phi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \phi\right) = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}$$



Agar L to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori P tekislikning normal vektoriga kollinear bo‘lsa, u holda L **to‘g‘ri chiziq** P **tekislikka perpendikulyar** bo‘ladi, ya’ni $\dfrac{A}{l} = \dfrac{B}{m} = \dfrac{C}{n}$.

Agar L to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori P tekislikning normal vektoriga perpendikulyar bo‘lsa, u holda L **to‘g‘ri chiziq** P **tekislikka parallel** bo‘ladi, $\left(\vec{a} \cdot \vec{n}\right) = 0$, ya’ni $Al + Bm + Cn = 0$.

Bayon etilgan ma’lumotlarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi zarur:

Tekislikning turli xil ko‘rinishdagi tenglamalari va bir ko‘rinishdan boshqa ko‘rinishga o‘tish;

To‘g‘ri chiziq turli xil ko‘rinishdagi tenglamalari va bir ko‘rinishdan boshqa ko‘rinishga o‘tish;

To‘g‘ri chiziq va tekislik bilan bog‘liq bo‘lgan standart masala va misollar (ikkita tekislik, to‘g‘ri chiziq va tekislik orasidagi burchakni topish, tekisliklarning o‘zaro joylashuvi, to‘g‘ri chiziqlaring o‘zaro joylashuvi, to‘g‘ri chiziq va tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari, nuqtadan tekislikgacha bo‘lgan masofa, to‘g‘ri chiziq bilan tekislikning kesishish koordinatalarini topish)ni yechish.

3. TEKISLIKDA ANALITIK GEOMETRIYA

Bo‘lim tekislikda analitik geometriya masalalariga bag‘ishlangan bo‘lib, unda tekislikdagi sodda ob’ektlar: nuqta, kesma va to‘g‘ri chiziq bilan bog‘liq masalalar ko‘rilgan. Bundan tashqari ikkinchi tartibli chiziqlar batafsil tahlil qilingan bo‘lib unda chiziqlarning kanonik tenglamalari kiritilgan, shakllari tadqiq etilgan va chiziq elementlari o‘rganilgan.

Koordinatalarni almashtirish, ya’ni koordinata o‘qlarini parallel ko‘chirish va burishda ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish mumkinligi mazkur bo‘limda ko‘rsatilgan.

Bo‘lim yakunida qutb koordinatalar sistemasidagi chiziqlar va ularning parametrik ko‘rinishdagi tenglamalari keltirilgan.

Bo‘limning mavzulari:

3.1. Tekislikdagi eng sodda masalalar.

3.1.1. Berilgan ikki nuqta orasidagi masofa.

3.1.2. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish.

3.2. Tekislikda to‘g‘ri chiziq.

3.2.1. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi.

3.2.2. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi.

3.2.3. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

3.2.4. Berilgan yo‘nalish va berilgan nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi.

3.2.5. To‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi.

3.2.6. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi.

3.2.7. Berilgan nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa.

3.2.8. Ikkita to‘g‘ri chiziq kesishish nuqtalarining koordinatalari.

3.2.9. Ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak.

3.2.10. Ikkita to‘g‘ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik shartlari.

3.3. Ikkinchi tartibli egri chiziqlar.

3.3.1. Ellips.

3.3.2. Aylana.

3.3.3. Giperbola.

3.3.4. Parabola.

3.4. Koordinatalarni almashtirish.

3.4.1. Parallel ko‘chirish.

3.4.2. Koordinata o‘qlarini burish.

3.4.3. Koordinata boshini o‘zgartirish va uning o‘qlarini burish.

3.4.4. Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish.*

3.5. Qutb koordinatalar sistemasida chiziqlar.*

3.5.1. Tekislikdagi qutb koordinatalar sistemasi.*

3.5.2. Qutb va dekart koordinatalar sistemasining bog‘liqligi.*

3.5.3. Qutb koordinatalar sistemasida chiziq tenglamasi.*

3.6. Egri chiziqlarning parametrik ko‘rinishda berilishi.*

3.6.1. Aylana.*

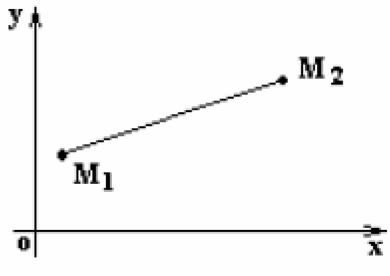
3.6.2. Sikloida.*

3.6.3. Astroida.*

3.1. Tekislikdagi eng sodda masalalar

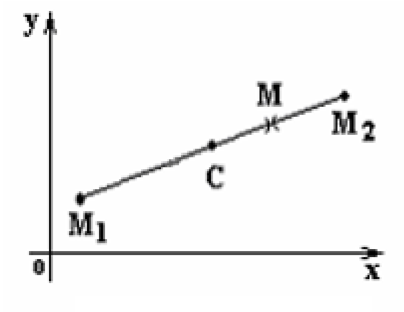
3.1.1. Berilgan ikki nuqta orasidagi masofa

Bizga $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofa $\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ vektor uzunligiga teng bo‘lib , u quyidagi formula yordamida hisoblanadi: $d = \left|\overrightarrow{M_1M_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.



3.1.2. Kesmani berilgan nisbatda bo‘lish

Berilgan $M(x, y)$ nuqta M_1M_2 kesmani λ nisbatda bo‘lsin (15-rasm). Agar $\frac{\left|\overrightarrow{M_1M}\right|}{\left|\overrightarrow{MM_2}\right|} = \lambda$ bo‘lsa, u holda $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \lambda\left|\overrightarrow{MM_2}\right|$ bo‘ladi. Bundan $\frac{x - x_1}{x_2 - x} = \frac{y - y_1}{y_2 - y} = \lambda$ ekanligi kelib chiqadi. M nuqtaning koordinatalari quyidagicha aniqlanadi:



15-rasm.

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} \\ y = \dfrac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \end{cases}.$$

Kesma o‘rtasi C nuqtaning koordinatalari $\left|\overrightarrow{M_1M}\right| = \left|\overrightarrow{MM_2}\right|$ bo‘lganda aniqlanadi. Bunda $\lambda = 1$ bo‘lib, $x_C = \dfrac{x_1 + x_2}{2}, y_C = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$ bo‘ladi.

λ parametr M_1M_2 kesmaning musbat yo‘nalishi qanday tanlanganiga bog‘liq bo‘lmay, yo‘nalish qarama qarshisiga o‘zgarganda λ ning qiymati o‘zgarmaydi.

3.2. Tekislikda to‘g‘ri chiziq

3.2.1. To‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi

XOY tekislikdagi to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasi fazoda tekislikning umumiy tenglamasidan $z = 0$ bo‘lganda hosil qilinadi. Tekislikda dekart koordinatalar sistemasida to‘g‘ri chiziq umumiy $Ax + By + C = 0$ tenglamasi orqali beriladi. Agar $A = 0$ $(B = 0)$ bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziq OX (OY) o‘qiga parallel bo‘ladi. Agar $C = 0$ bo‘lsa, u holda to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tadi. Agar to‘g‘ri chiziq (x_0, y_0) nuqtadan o‘tib, $\vec{n} = \{A, B\}$ vektorga perpendikulyar bo‘lsa, uning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$.

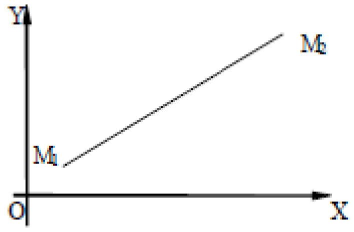
3.2.2. To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi

To‘g‘ri chiziq (x_0, y_0) nuqtadan o‘tib, $\vec{a} = \{l, m\}$ yo‘naltiruvchi vektorga perallel bo‘lsa, u holda fazodagi to‘g‘ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamasida $z = 0$ bo‘lganda tekislikda to‘g‘ri chiziqning kanonik va parametrik tenglamasiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m} \quad \text{va} \quad \begin{cases} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \end{cases} \text{bu erda } t \text{ – parametr, } t \in (-\infty, +\infty).$$

3.2.3. Ikkita nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

Faraz qilaylik, tekislikda bizga $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Ushbu nuqtalardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozish uchun fazodagi mos tenglamalardagi $z = z_1 = z_2 = z_3 = 0$ larni deb olsak u holda biz uchun kerakli bo‘lgan tenglamaga ega bo‘lamiz:

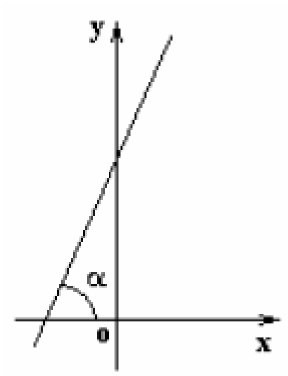


$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

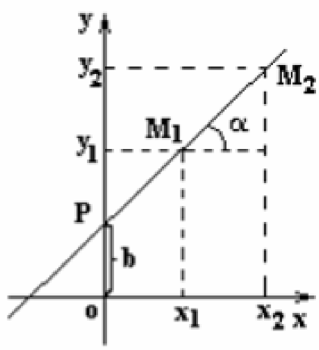
3.2.4. Berilgan yo‘nalish va berilgan nuqta orqali o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi

To‘g‘ri chizig‘imiz OX o‘qi bilan α burchak tashkil etsin. To‘g‘ri chiziqning k burchak koeffitsienti deb quyidagi songa aytiladi: $k = tg\alpha$.

To‘g‘ri chiziq $M_1(x_1, y_1)$ nuqta va k burchak koeffitsient bilan yoki $M_1(x_1, y_1)$ va $M_2(x_2, y_2)$ nuqtalar bilan berilishi mumkin.



k burchak koeffitsientli to‘g‘ri chiziq tenglamasini uning umumiy tenglamasidan olish mumkin. $Ax + By + C = 0$ da $B \neq 0$ bo‘lsa, u holda $y = kx + b$, bu erda $k = -\dfrac{A}{B}$, $b = -\dfrac{C}{B}$. Faraz qilaylik, to‘g‘ri chiziq OY o‘qni $P(0, b)$ nuqtada kesib o‘tsin. Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasidan $y - y_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ ga ega bo‘lamiz. Bundan $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = tg\alpha = k$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $y - y_1 = k(x - x_1)$ tenglamaga ega bo‘ldik. Agar bu tenglamada $b = y_1 - kx_1$ deb olsak, u holda to‘g‘ri chiziq tenglamasi k burchak



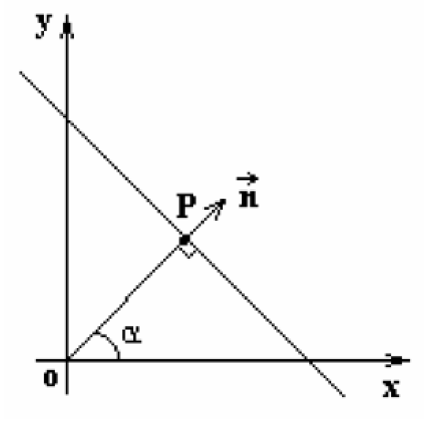
koeffitsientli to‘g‘ri chiziq tenglamasi ko‘rinishiga ega bo‘ladi.

3.2.5. To‘g‘ri chiziqning kesmalardagi tenglamasi

$Ax + By + C = 0$ to‘g‘ri chiziqning umumiy tenglamasini uning «kesmalardagi» tenglamasi $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ orqali ifodalash mumkin. Kesmalarda berilgan to‘g‘ri chiziq tenglamasi OX o‘qini $A(a,0)$ nuqtada va OY o‘qini $B(0,b)$ nuqtada kesib o‘tadi.

3.2.6. To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasi

Faraz qilaylik, to‘g‘ri chiziqdan koordinatalar boshigacha bo‘lgan masofa $\left|\overrightarrow{OP}\right| = p$ ga teng bo‘lsin va koordinatalar boshidan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikulyarning OX o‘qi bilan tashkil etgan burchagi α ga teng bo‘lsin (16-rasm). Fazodagi tekislikning normal tenglamasida $z = 0$ deb va $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$ ekanligini e’tiborga olsak, to‘g‘ri chiziqning tekislikdagi normal tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$.



16-rasm.

To‘g‘ri chiziqning normal tenglamasini uning umumiy tenglamasi $Ax + By + C = 0$ dan ham keltirib chiqarish, ya’ni uning tenglamasini $\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}}$ normallovchi ko‘paytuvchiga ko‘paytirish orqali ham hosil qilish mumkin. Bunda μ ning ishorasi ozod had C ishorasiga qarama-qarshi qilib olinadi. Koordinata o‘qlari bilan to‘g‘ri chiziq hosil qilgan burchaklarning kosinuslarini to‘g‘ri chiziqning **yo‘naltiruvchi kosinuslari** deb atash mumkin. Agar OX o‘qi va to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak α ga va OY o‘qi va to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak β ga teng bo‘lsa, u holda ular uchun ushbu tenglik $\cos^2\alpha + \cos^2\beta = 1$ har doim o‘rinli bo‘ladi.

3.2.7. Berilgan nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

Berilgan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtadan normal tenglamasi bilan berilgan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan d masofa to‘g‘ri chiziqdan nuqtagacha bo‘lgan δ chetlashishning moduliga teng, ya’ni $d = |\delta|$, bu erda

$$\delta = x_0 \cos\alpha + y_0 \sin\alpha - p = \pm\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Agar M_0 nuqta va koordinatalar boshi to‘g‘ri chiziqdan turli tomonlarda yotsa, δ chetlashish musbat bo‘ladi, aks holda δ manfiy bo‘ladi.

3.2.8. Ikkita to‘g‘ri chiziq kesishish nuqtalarining koordinatalari

Agar tekislikdagi ikkita to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro paralel bo‘lmasa yoki ustma ust tushmasa, ular bir nuqtada kesishadi. Tekislikdagi ikkita to‘g‘ri chiziq mos ravishda $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ tenglamalar bilan berilgan bo‘lsa, ularning kesishish nuqtasi koordinatalari (x_0, y_0) quyidagi tenglamalar sistemasini yechish orqali aniqlanadi:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{cases}$$

Sistemaning yechimi Kramer formulasiga ko‘ra:

$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$ bo‘lganda $x_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}, y_0 = \dfrac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}$ ga teng bo‘ladi.

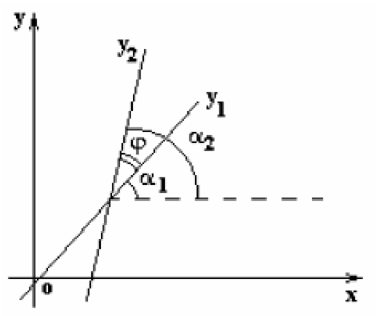
3.2.9. Ikkita to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak

Ikkita to‘g‘ri chiziqlar o‘zlarining burchak koeffitsient tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin (17-rasm):

$$y_1 = k_1x + b_1,$$
$$y_2 = k_2x + b_2.$$

Bu ikkita to‘g‘ri chiziq kesishishidan hosil bo‘lgan φ o‘tkir burchak (soat strelkasiga qarama-qarshi olinadi) quyidagi munosabatlar asosida aniqlanadi:

$$tg\varphi = tg(\alpha_2 - \alpha_1) = \left|\frac{tg\alpha_2 - tg\alpha_1}{1 + tg\alpha_1 tg\alpha_2}\right|. \qquad \text{Bundan } tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| .$$



17-rasm.

Agar to‘g‘ri chiziqlar $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ va $A_2x + B_2y + C_2 = 0$ umumiy tenglamalari bilan berilgan bo‘lsa, u holda bu to‘g‘ri chiziqlarning burchak koeffitsientlari: $tg\alpha_1 = -\frac{A_1}{B_1}, tg\alpha_2 = -\frac{A_2}{B_2}$ ga teng va φ ular orasidagi burchak quyidagi formula orqali hisoblanadi: $tg\varphi = \left|\frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2}\right|$.

3.2.10. Ikkita to‘g‘ri chiziqning parallellik va perpendikulyarlik sharti

$y_1 = k_1x + b_1$ va $y_2 = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro parallel bo‘lsa, ular orasidagi burchak nolga teng bo‘ladi, ya’ni $\varphi = 0$. Bundan $tg\varphi = 0$, demak $k_1 = k_2$.

$y_1 = k_1x + b_1$ va $y_2 = k_2x + b_2$ to‘g‘ri chiziqlar o‘zaro perpendikulyar, ya’ni ular orasidagi burchak $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo‘lsa, bundan $tg\varphi \to \infty$ ekanligi kelib chiqadi va $k_1 \cdot k_2 = 1$ yoki $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Agar to‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalari orqali berilgan bo‘lsa, u holda:
$A_1B_2 - A_2B_1 = 0, \frac{A_1}{B_1} = \frac{A_2}{B_2}$ – parallelik sharti,

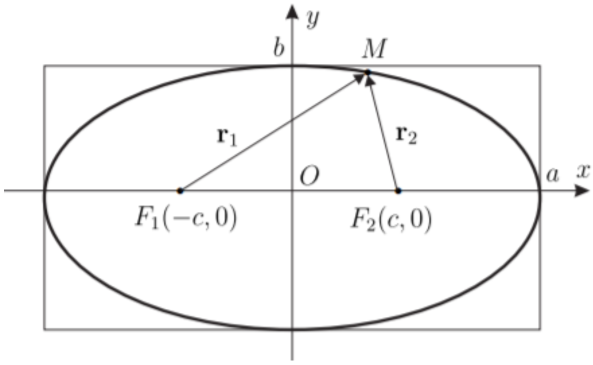
$A_1B_1 + A_2B_2 = 0$ – perpendikulyarlik sharti.

3.3. Ikkinchi tartibli chiziqlar

Tekislikda ikkinchi tartibli chiziqlar ikkinchi tartibli algebraik tenglamalar orqali ifodalanadi.

3.3.1. Ellips

$\boxed{t}$ Ellips deb fokuslar deb ataluvchi berilgan $F_1(+c,0)$ va $F_2(-c,0)$ nuqtalargacha bo‘lgan masofalar yig‘indisi o‘zgarmas va $2a$ ga teng bo‘lgan $M(x,y)$ nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi (18-rasm).



18-rasm.

Ellipsning kanonik tenglamasini uning bevosita ta’rifidan keltirib chiqarish mumkin. Ta’rifga ko‘ra, $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|+\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=2a$ va $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|=2c$, bu erda $a>c$. Ikkita nuqta orsasidagi masofani topish formulasidan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right|=\sqrt{(x-c)^2+y^2}=r_1,\quad \left|\overrightarrow{F_2M}\right|=\sqrt{(x+c)^2+y^2}=r_2.$$

Ta’rifga ko‘ra, $r_1+r_2=2a$. Aniqlangan r_1 va r_2 larni $\left|\overrightarrow{F_1M}\right|+\left|\overrightarrow{F_2M}\right|=2a$ ga qo‘yamiz:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a.$$

Ayrim almashtirishlarni bajaramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2},$$

$$(x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2,\ a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=a^2-cx,$$

$$\left(a^2-c^2\right)x^2+a^2y^2=a^2\left(a^2-c^2\right).$$

$a>c$ ekanligidan $a^2-c^2=b^2$ deb olsak, u holda $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ bo‘ladi yoki $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Hosil bo‘lgan tenglama ellipsning **kanonik tenglamasidir**.

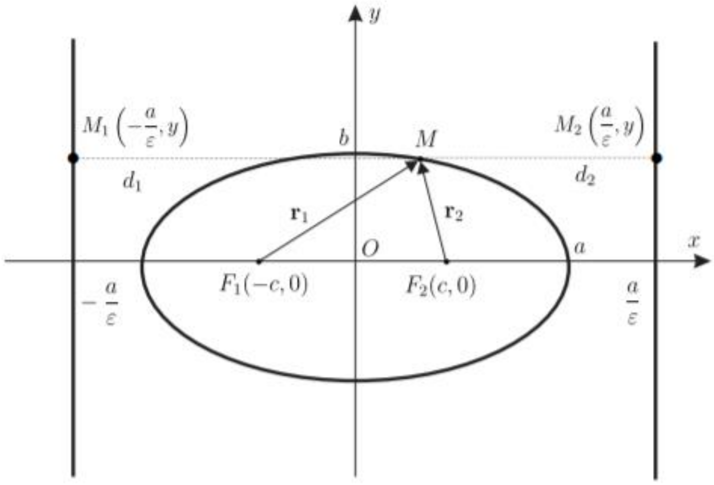
Quyidagilar ellipsning **elementlari** hisoblanadi:

- O - nuqta ellipsning **markazi**;

- A, B, C, D - nuqtalar ellipsning **uchlari**;
- $F_1(+c,0)$ va $F_2(-c,0)$ - ellipsning **fokuslari**;
- $2c$ - **fokuslar orasidagi masofa**, $c=\sqrt{a^2-b^2}$ formula yordamida hisoblanadi;
- $AB=2a$ va $CD=2b$ - ellipsning **katta** va **kichik o‘qlari**;
- a va b - ellipsning **katta** va **kichik yarim o‘qlari**;
- $\varepsilon=\dfrac{c}{a}$, $(\varepsilon<1)$ - ellipsning **ekssentrisiteti**, $\varepsilon=\sqrt{1-\dfrac{b^2}{a^2}}$ formula yordamida hisoblanadi.

Ekssentrisitet ellipsning o‘qlari yordamida topiladi va uning shaklini xarakterlaydi: ε qanchalik katta bo‘lsa, ellips katta o‘q bo‘yicha shunchalik cho‘zilgan bo‘ladi.

Ellipsning kichik o‘qiga parallel va undan $\dfrac{a}{\varepsilon}$ masofada joylashgan to‘g‘ri chiziqlar ellipsning **direktrisalari deb ataladi**. Chap va o‘ng direktrisalarning tenglamalari quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi: $x=\pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ (19-rasm).



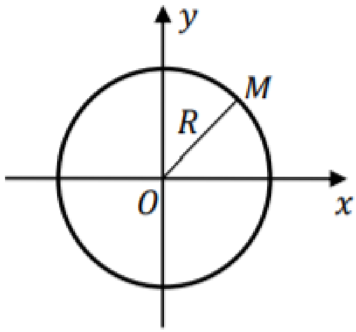
19-rasm.

Ellips uchun $\varepsilon<1$ ekanliginidan $\dfrac{a}{\varepsilon}>a$ bo‘ladi.

Ellipsning fokal parametri $p=\dfrac{b^2}{a}$ - bu fokusdan o‘tuvchi kichik yarim o‘qqa parallel vatarning yarmidir.

3.3.2. Aylana

$\boxed{t}$ Berilgan O nuqtadan bir xil uzoqlikda yotgan barcha nuqtalarning geometrik o‘rniga **aylana** deb ataladi.



Aylana tenglamasini ellips tenglamasidan hosil qilish mumkin, ya’ni

$$a = b = R: \quad x^2 + y^2 = R^2 .$$

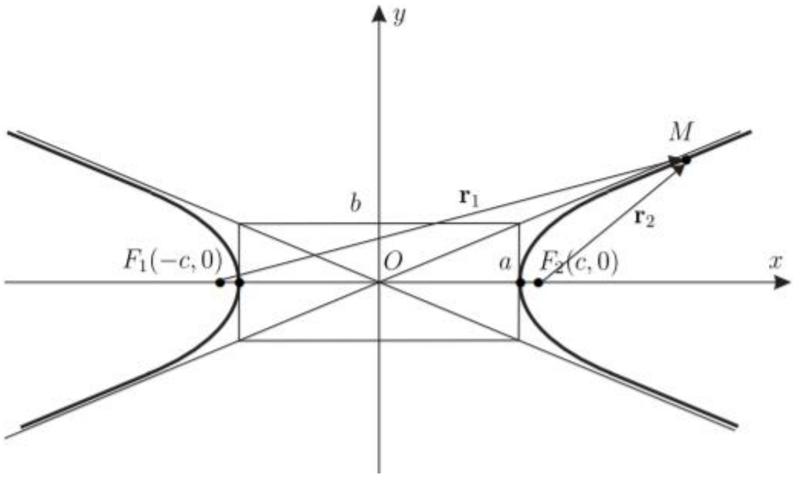
3.3.3. Giperbola

$\boxed{t}$ **Giperbola** deb fokuslar deb ataluvchi berilgan $F_1(+c, 0)$ va $F_2(-c, 0)$ nuqtalargacha bo‘lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o‘zgarmas $2a$ $(a < c)$ga teng bo‘lgan $M(x, y)$ nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi (20-rasm).

Giperbolaning **kanonik** tenglama-sini uning ta’rifidan hosil qilish mumkin. Ta’rifga ko‘ra, $\left|\overrightarrow{F_1M} - \overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$ va $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = 2c$, bu erda $a < c$.

Ikkita nuqta orsasidagi masofani topish formulasidan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = r_1, \quad \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = r_2 .$$



20-rasm.

Ikkita nuqta orsasidagi masofani topish formulasidan quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = r_1, \ \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = r_2.$$

Ta’rifga ko‘ra, $r_1 - r_2 = \pm 2a$. Aniqlangan r_1 va r_2 larni $\left|\overrightarrow{F_1M} - \overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$ ga qo‘yamiz:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a.$$

Zarur almashtirishlarni bajaramiz:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2},$$

$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$, $\quad cx - a^2 = \pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$, $(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2)$.

$c > a$ ekanligidan $c^2 - a^2 = b^2$ deb olsak, u holda $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ bo‘ladi yoki $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. Bu tenglama giperbolaning **kanonik tenglamasidir**.

Quyidagilar giperbolaning **elementlari** hisoblanadi:

- O - nuqta giperbolaning **markazi**;
- A, B - nuqtalar giperbolaning **uchlari**;
- $F_1(+c, 0)$ va $F_2(-c, 0)$ - giperbolaning **fokuslari**;
- $2c$ - **fokuslar orasidagi masofa**, $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ formula yordamida

hisoblanadi;

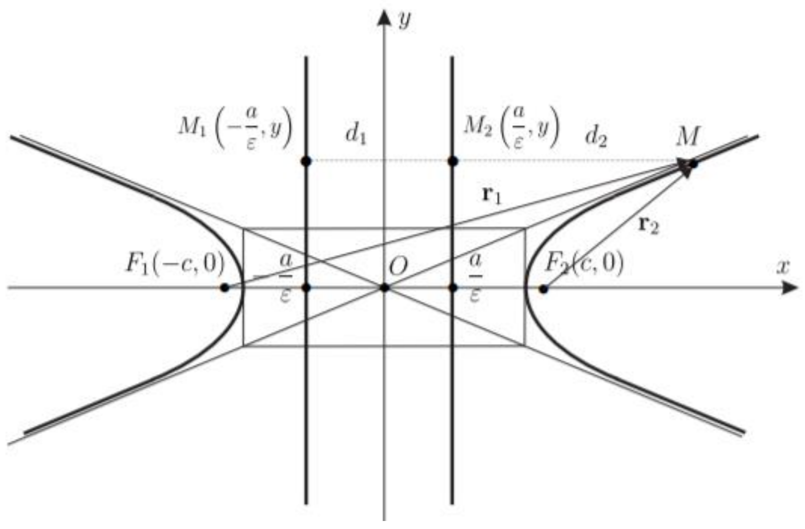
- $AB = 2a$ giperbolaning haqiqiy va $CD = 2b$ - giperbolaning **mavhum o‘qlari,** $b = \sqrt{c^2 - a^2}$;
- $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ - giperbolaning **ekssentrisiteti**, $\varepsilon = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}}$, $\varepsilon > 1$formula yordamida hisoblanadi.

Ekssentrisitet giperbola o‘qlari yordamida aniqlanadi va uning shaklini xarakterlaydi: ε qanchalik katta bo‘lsa, giperbola shunchalik mavhum o‘qi bo‘yicha cho‘zilgan bo‘ladi. Giperbola **direktrisasining** tenglamasi: $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$ (21-rasmga qarang).

$\varepsilon > 1$ ekanliginidan $\dfrac{a}{\varepsilon} < a$ bo‘ladi.

Giperbolaning asimptotalari – giperbola shoxlariga cheksizlikda cheklanmagan yaqinlashuvchi to‘g‘ri chiziqlardir. $k = \pm tg\alpha = \pm\dfrac{b}{a}$ ekanligidan giperbolaning asimptotalari tenglamalari $y = \pm\left(\dfrac{b}{a}\right)\cdot x$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

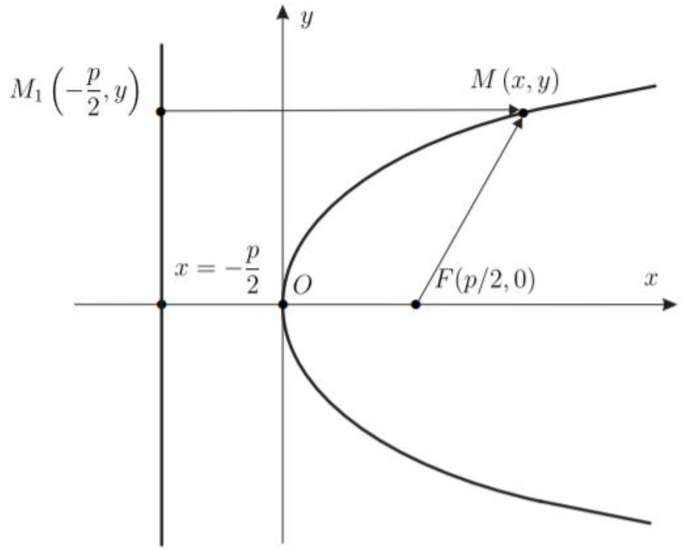
Giperbolaning fokal parametri: $p = \dfrac{b^2}{a}$.



21-rasm.

3.3.4. Parabola

$\boxed{t}$ Parabola deb fokus deb ataluvchi $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqtadan, hamda direktrisa deb ataluvchi to‘g‘ri chiziq(OY o‘qiga parallel to‘g‘ri chiziq)dan teng uzoqlikda joylashgan $M(x,y)$ nuqtalarning geometrik o‘rniga aytiladi (22-rasm).



22-rasm.

Parabolaning **kanonik** tenglamasini uning ta’rifidan hosil qilish mumkin. Ta’rifga ko‘ra $\left|\overrightarrow{FM}\right|=\left|\overrightarrow{MM_1}\right|$. $\left|\overrightarrow{MM_1}\right|=\frac{p}{2}+x$ yoki $\left|\overrightarrow{FM}\right|=\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}$ bo‘ladi. Bundan $\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\frac{p}{2}+x$ yoki $\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(\frac{p}{2}+x\right)^2$ tenglamalarga ega bo‘lamiz. Bir nechta shakl almatirishlarni bajarib, parabolaning **kanonik** tenglamasi $y^2=2px$ ga ega bo‘lamiz.

Quyidagilar parabolaning **elementlari** hisoblanadi:

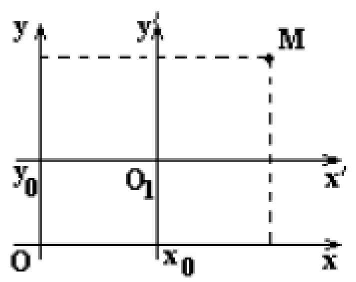
- O - nuqta parabolaning **uchi**;
- OX - parabolaning **o‘qi**;
- $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ - parabolaning **fokusi**;
- $x=-\frac{p}{2}$ - **parabolaning direktrisasi** tenglamasi;
- $\varepsilon=1$ - parabola **ekssentrisiteti**;

- p - parabolaning **fokal parametri** (fokusdan direktrisagacha bo‘lgan masofa yoki OX o‘qiga perperdikulyar va fokusdan o‘tuvchi vatarning yarmi).

3.4. Koordinatalarni almashtirish

3.4.1. Parallel ko‘chirish

Koordinatalar boshini O nuqtadan O_1 nuqtaga Ox va Oy koordinata o‘qlarini parallel ko‘chirish orqali ko‘chiramiz. Faraz qilaylik, xOy koordinatalar sistemasidagi M nuqta x va y koordinatalarga ega bo‘lsin. $x'O_1y'$ koordinatalar sistemasi xOy koordinatalar sistemasi o‘qlarini parallel ko‘chirish orqali hosil qilingan va xOy koordinatalar sistemasida O_1 koordinatalar boshi x_0 va y_0 koordinatalarga ega bo‘lsin (23-rasm).



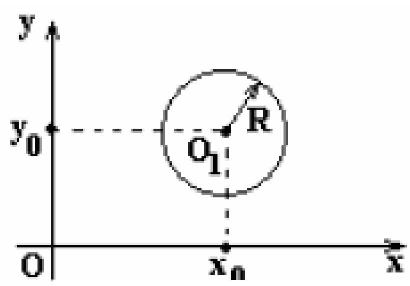
23-rasm.

M nuqta $x'O_1y'$ koordinatalar sistemasida x' va y' koordinatalarga ega bo‘ladi. $M(x,y)$ va $M(x',y')$ nuqtalar orasidagi bog‘lanish oldingi va keyingi koordinatalar sistemasida quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\begin{cases} x = x' + x_0, \\ y = y' + y_0, \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x' = x - x_0, \\ y' = y - y_0. \end{cases} \qquad (2)$$

Ikkinchi tartibli chiziqlarning simmetriya markazi $O_1(x_0, y_0)$ nuqtada joylashgan bo‘lsa, ularning tenglamalarini (2) parallel ko‘chirish formulasi orqali yangi koordinatalar sistemasidagi tenglamalari hosil qilinadi.



24-rasm.

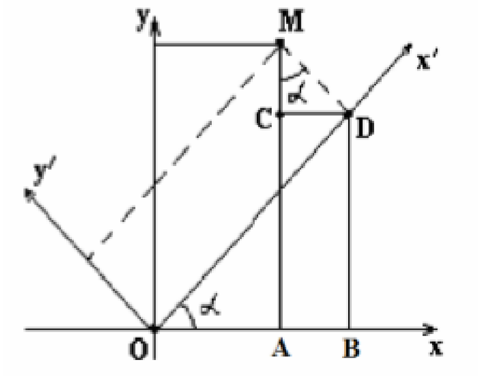
$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$ - markazi $O_1(x_0, y_0)$ nuqtada va radiusi R ga teng bo‘lgan aylana tenglamasi (24-rasm).

Boshqa ikkinchi tartibli chiziqlar tenglamalari ham shu kabi aniqlanadi:

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} \pm \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$ - simmetriya markazi $O_1(x_0, y_0)$ nuqtada bo‘lgan ellips va giperbolaning tenglamasi; $(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0)$ - uchi $O_1(x_0, y_0)$ nuqtada bo‘lgan parabolaning tenglamasi. Bunda masalan, ellips va giperbola direktrisalari tenglamalari: $x - x_0 = \pm\frac{a}{\varepsilon}$, parabolaniki esa: $x - x_0 = -\frac{p}{2}$ ko‘rinishda bo‘ladi. Xuddi shu kabi giperbolaning asimptotalari tenglamalari ham aniqlanadi: $y - y_0 = \pm\frac{b}{a}(x - x_0)$.

3.4.2. Koordinata o‘qlarini burish

Koordinatalar o‘qi burilgandagi koordinatalar sistemasini almashtirish formulasini kiritamiz. Berilgan koordinatalar sistemasiga nisbatan koordinatalar o‘qini α burchakka buramiz. M nuqtaning $x'Oy'$ koordinatalar sistemasidagi koordinatalari x' va y' ga teng. Uni xOy koordinatalar sistemasidagi koordinatalarini aniqlaymiz. CMD uchburchakda $\angle CMD = \alpha$, $OD = x'$, $MD = y'$.



Demak,

$$x = OA = OB - AB = OB - CD, \quad y = MA = AC + CM = DB + CM .$$

Quyidagi tengliklardan:

$$OB = x'\cos\alpha,\ CD = y'\sin\alpha ,$$

$$CM = y'\cos\alpha,\ DB = x'\sin\alpha ,$$

u holda

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha. \end{cases} \qquad (3)$$

ga ega bo‘lamiz.

(3) formula oldingi koordinatalar sistemasidagi koordinatalari (x, y) bo‘lgan ixtiyoriy M nuqtani koordinatalar o‘qi α burchakka burilgandagi yangi (x', y')

koordinatalari orqali ifodalaydi. (3) formula M nuqtaning (x, y) oldingi koordinatalarini (x', y') yangi koordinatalar bilan ifodalasada, bu formula yordamida avvalgi koordinatalari orqali keyingisini ham aniqlash mumkin: Agar keyingi koordinatalar sistemasi avvalgi koordinatalar sistemasini α burchakka burish orqali hosil qilingan bo‘lsa, keyingi koordinatalar sistemasini $(-\alpha)$ burchakka burish yordamida aniqlash mumkin, shuning uchun (3) da α ni $(-\alpha)$ ga bir vaqtda almashtirish yordamida keyingi va avvalgi koordinatalarni almashtirish mumkin.

Mazkur almashtirishni bajarib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' = -x\sin\alpha + y\cos\alpha. \end{cases}$$

Bunda, masalan, ellips (giperbola) va parabola direktrisalarining tenglamalari quyidagi ko‘rinishlarda bo‘ladi:

$$x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = \pm\frac{\varepsilon}{a};$$

$$x'\cos\alpha - y'\sin\alpha = -\frac{p}{2}.$$

3.4.3. Koordinata boshini o‘zgartirish va o‘qlarni burish

Agar to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida o‘qlar OX o‘qi bo‘yicha x_0 ga va OY o‘qi bo‘yicha y_0 ga parallel ko‘chirilsa va shu bilan birga α burchakka burilsa, u holda o‘zgargan koordinatalar sistemasi koordinatalarining avvalgi koordinatalar sistemasi koordinatalari orqali ifodasi quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + x_0, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + y_0, \end{cases} \tag{4}$$

Keyingisining avvalgisi orqali ifodasi esa quyidagi formula bilan topiladi:

$$\begin{cases} x' = (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha, \\ y' = -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha. \end{cases} \tag{5}$$

3.4.4.* Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltirish

Ikkinchi tartibli egri chiziqning umumiy tenglamasi quyidagi tenglama bilan ifodalanadi:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 .$$

Mazkur tenglamani kanonik ko‘rinishga keltirish deganda, tenglama kanonik ko‘rinishga ega bo‘ladigan koordinatalar sistemasini aniqlash tushuniladi. Geometrik nuqtai nazardan bu koordinatalar boshini egri chiziqning makazini (x_0, y_0) nuqtaning koordinalariga parallel ko‘chirish yoki koordinatalar o‘qini biror bir burchakka burish, ya’ni egri chiziqning simmetriya o‘qi bilan koordinatalar o‘qini ustma-ust tushadigan qilishdan iborat bo‘lishi mumkin. Algebraik nuqtai nazardan esa bu, (1) va (3) formulalarni qo‘llash yordamida, joriy koordinatalar va ularni birinchi darajali hadlarga ko‘paytirish yordamida hadlarni yo‘qotish yo‘li bilan amalga oshiriladi.

Agar egri chiziq markazi mavjud bo‘lsa, u holda egri chiziq markazini aniqlash tenglamasi quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} Ax_0 + By_0 + D = 0 \\ Bx_0 + Cy_0 + E = 0 \end{cases}$$

Yagona markazga ega bo‘lgan ikkinchi tartibli egri chiziqlar markaziy egri chiziqlar deb ataladi. Koordinatalar boshini egri chiziq markazi (x_0, y_0) nuqtasiga ko‘chirishdan hosil bo‘lgan egri chiziq tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$Ax'^2 + 2Bx'y' + Cy'^2 + F_1 = 0, \qquad (7)$$

bu erda $F_1 = Dx_0 + Ey_0 + F$.

Egri chiziq kanonik tenglamasini hosil qilish uchun, (7) tenglamani koordinata o‘qlarini α burchakka buramiz, ya’ni

$$A_1(x'')^2 + C_1(y'')^2 + F_2 = 0 .$$

Almashtirishni bajargandan so‘ng quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x' = x'' \cos\alpha - y'' \sin\alpha,$$
$$y' = x'' \sin\alpha + y'' \cos\alpha,$$

bu erda x'', y'' - yangi koordinatalar.

Almashtirish bajarilgan tenglamadan ikkinchi darajali qo‘shiluvchilarni yozib olamiz, ya’ni:

$$A\left(x''\cos\alpha - y''\sin\alpha\right)^2 + 2B\left(x''\cos\alpha - y''\sin\alpha\right)\cdot\left(x''\sin\alpha + y''\cos\alpha\right) + C\left(x''\sin\alpha + y''\cos\alpha\right)^2.$$

Bu ifodada bizni $x''\cdot y''$ ko‘paytma qatnashgan hadlar qiziqtiradi, ya’ni bu ko‘paytma koeffitsienti quyidagiga teng:

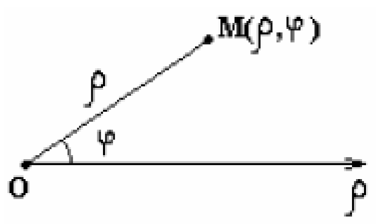
$$B_1 = -2A\sin\alpha\cos\alpha + 2B\left(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\right) + 2C\sin\alpha\cos\alpha = 2B\cos 2\alpha + (C-A)\sin 2\alpha.$$

$B_1 = 0$ shartdan burilish burchagini aniqlaymiz: $2B\,cos\,2\alpha = (A-C)\,sin\,2\alpha$.

Agar $A = C$ bo‘lsa, u holda $\cos 2\alpha = 0$ va burish burchagi sifatida $\alpha = \frac{\pi}{4}$ ni olish mumkin; agar $A \neq C$ bo‘lsa, u holda $\alpha = \frac{1}{2}arctg\frac{2B}{A-C}$ ga teng bo‘ladi.

3.5.* Qutb koordinatalar sistemasida chiziqlar

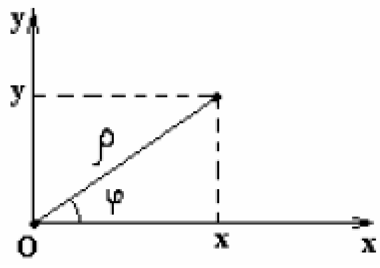
3.5.1.* Tekislikda qutb koordinatalar



Qutb koordinatalar tekislikda O qutb boshi va ρ qutb o‘qining berilishi bilan aniqlanadi. Ixtiyoriy M nuqtaning qutb koordinatalar sitemasidagi koordinatalari radius-vektor uzunligi $\left|\overrightarrow{OM}\right| = \rho$ va bu radius-vektorning qutb o‘qiga nibatan hosil qilgan musbat yo‘nalish bilan olingan (soat strelkasiga teskari) burchagi bilan beriladi.

Bunda $0 \le \rho < \infty$, $0 \le \varphi < 2\pi$ (yoki $-\pi < \varphi \le \pi$).

3.5.2.* Qutb va dekart koordinatalar sistemasining bog‘liqligi



Dekart koordinatalar sistemasining boshini va qutb koordinatalar sistemasining qutb boshi bilan va OX o‘qini esa ρ qutb o‘qi bilan ustma-ust qo‘yamiz. Dekart koordinatalar sistemasidagi ixtiyoriy $M(x,y)$ va qutb koordinatalar sistemasidagi $M(\rho,\varphi)$ nuqtalar orasidagi bog‘lanishni aniqlaymiz. Bu bog‘lanish quyidagi tenglamalar sistemasi yordamida ifodalanadi:

$$\begin{cases} x = \rho\cos\varphi, & \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ y = \rho\sin\varphi, & tg\varphi = \dfrac{y}{x}. \end{cases}$$

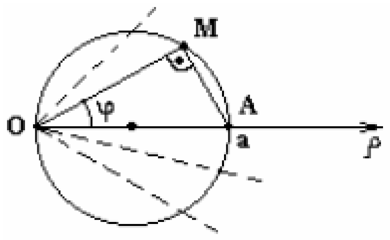
Agar $A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalar koordinatalari ma'lum bo'lsa, u holda AB kesmaning proeksiyasi $AB = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\} = \{\rho\cos\varphi,\ \rho\sin\varphi\}$ bo'ladi. Kesmaning qutb burchagi esa uning boshi va oxiri koordinatalari orqali quyidagicha aniqlanadi:

$$\cos\varphi = \frac{x_2 - x_1}{\rho},\ \sin\varphi = \frac{y_2 - y_1}{\rho},$$

$$tg\varphi = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1},\ \rho = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\ .$$

3.5.3.* Qutb koordinatalar sistemasida chiziq tenglamasi

Qutb koordinatalar sistemasida $\rho = a\cos\varphi,\ \ a = const > 0$ chiziqni yasaymiz. ρ koordinata faqat musbat qiymat qabul qiladi. $\varphi = 0$ bo'lganda $cos\,\varphi = 1$ va $\rho = a$ dan $A(a,0)$ nuqtani aniqlaymiz (25-rasm).



25-rasm.

$M(\rho,\varphi)$ nuqtani qaraymiz. Chiziq tenglamasidan - $\cos\varphi = \dfrac{\rho}{a}$, demak OMA-burchak to'g'ri burchak. φ burchakning 0 dan $\dfrac{\pi}{2}$ gacha o'sishi bilan bu burchak kosinusi 1 dan 0 gacha kamayadi, shunday qilib, $O\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ nuqtada ρ ning qiymati a dan 0 gacha kamayadi va M nuqtaning radius-vektori yuqori yarim aylanani ifodalaydi. Quyi yarim aylana esa φ burchakning qiymati $\dfrac{3\pi}{2}$ dan 2π gacha o'zgarganda hosil bo'ladi. Burchakning bu qiymatlari $\cos\varphi$ ning o'suvchi 0 dan 1 gacha bo'lgan musbat qiymatlari mos keladi, bu esa ρ ning qiymatini 0 dan a gacha o'sishini va yarim aylanalarning tutashuvini ta'minlaydi.

Demak, $\rho = a\cos\varphi$ tenglama markazi $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ nuqtada va radiusi $\frac{a}{2}$ teng bo‘lgan aylanani ifodalaydi. Chiziq tenglamasi $\rho = a\cos\varphi$ ni dekart koordinatalar sistemasiga o‘tkazsak ham xuddi shu natijaga erishamiz, ya’ni

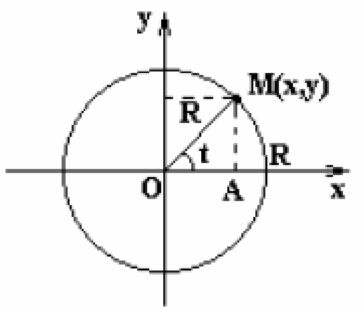
$\sqrt{x^2+y^2} = a\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $x^2+y^2-ax=0$, $\left(x-\frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ - markazi $\left(\frac{a}{2}, 0\right)$ nuqtada va radiusi $\frac{a}{2}$ teng bo‘lgan aylananing kanonik tenglamasini ifodalaydi.

Agar qutb koordinatalar sistemasida qutb fokusda bo‘lib, qutb o‘qi esa fokusdan yaqin uchga yo‘nalgan bo‘lsa, u holda bu koordinatalar sistemasida ikkinchi tartibli egri chiziq tenglamasi $\rho = \frac{p}{1-\varepsilon\cos\varphi}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi (bu tenglama yordamida giperbolaning faqat bitta shohi aniqlanadi); p - fokal parametr, ε - egri chiziq ekssentrisiteti.

3.6.* Egri chiziqlarning parametrik ko‘rinishda berilishi

Egri chiziqlarning parametrik tenglamasi x va y joriy koordinatalarni biror bir t parametrga bog‘liq bo‘lgan ko‘rinishida beriladi. Bunda t ning har bir qiymati uchun juft x va y larning yagona bir qiymatlari mos qo‘yiladi. t parametrning o‘zgarishi bilan $M(x,y)$ joriy nuqta tekislikdagi biror bir egri chiziqni ifodalaydi. Egri chiziq tenglamasini t parametrga nisbatan yechib, tenglamani dekart koordinatalar sistemasidagi mos tenglamasiga olib kelinadi va aksincha dekart koordinatalar sistemasida berilgan egri chiziq tenglamasini parametrik tenglamaga keltirish mumkin. Quyida ba’zi egri chiziqlarning parametrik tenglamalarini ko‘rib chiqamiz.

3.6.1*. Aylana



Bizga markazi koordinatalar boshida va radiusi R teng bo‘lgan aylana berilgan bo‘lib, $M(x,y)$ - nuqta aylananing ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. t parametr sifatida M nuqtaning radius-vektorini OX o‘qi bilan hosil qilgan burchagini olamiz. OMA uchburchakdan:

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \end{cases}$$

- bu aylananing parametrik tenglamasi.

Aylana parametrik tenglamadan t parametrni chiqarib tashlaymiz. Buning uchun bu tenglamalarni har ikki tomonini kvadratga ko‘tarib qo‘shamiz va natijada: $x^2 + y^2 = R^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = R^2$ ga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, hosil bo‘lgan tenglama aylananing dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasidir.

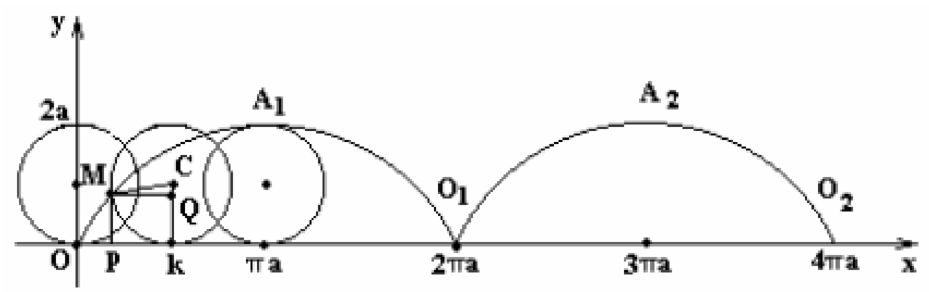
3.6.2.* Sikloida

Oddiy **sikloida** (yunoncha “kykloeides” – dumaloq) - bu tekis transsendent egri chiziq bo‘lib, to‘g‘ri chiziq bo‘ylab sirg‘almasdan aylanayotgan aylananing biror M nuqtasining traektoriyasini tavsiflovchi egri chiziqqa aytiladi.

OX - radiusi a ga teng bo‘lgan aylana harakatlangan to‘g‘ri chiziq bo‘lsin. U holda $MC = CK = a$, bu erda K - urinish nuqtasi, t parametr sifatida MC kesmani CK kesmaga nisbatan burilish $t = \angle MCK$ burchagini olamiz (burchak radianda). Aylananing harakati siljishlarsiz bo‘lgani uchun $OK = \overset{\cup}{MK} = at$ o‘rinli (26-rasmga qarang). Rasmdan ko‘rinib turibdiki,

$$x = OP = OK - PK = OK - MQ = at - a\sin t = a(t - \sin t),$$

$$y = PM = KC - QC = a - a\cos t = a(1 - \cos t).$$



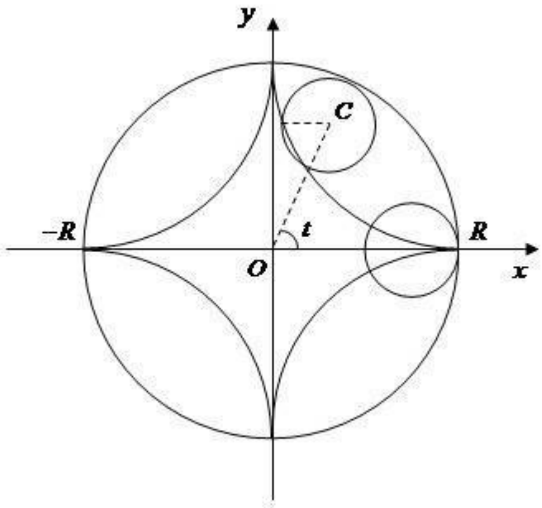
26-rasm.

Shunday qilib, sikloidaning parametrik tenglamasi $\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t), \end{cases}$ bunda

$-\infty < t < +\infty$. Agar t parametr $0 \le t < 2\pi$ gacha qiymatlarni qabul qilsa, sikloidaning birinchi arkasiga ega bo‘lamiz. Arka uzunligi $OA_1O_1 = 8a$ ga, bitta arka yuzasi esa $S = 3\pi a^2$ teng.

3.6.3.* Astroida

Astroida (αστρον - yulduz va ειδος - ko‘rinish, ya’ni yulduz shaklidagi) deb radiusi R ga teng bo‘lgan aylana ichida radiusi $\frac{R}{4}$ ga teng bo‘lgan aylanani urintirib va siljitmay aylantirish orqali fiksirlangan nuqtasining hosil qilgan traektoriyasini ifodalovchi egri chiziqqa aytiladi.



27-rasm.

Astroidaning parametrik tenglamasi

$$\begin{cases} x = R\cos^3 t, \\ y = R\sin^3 t, \end{cases}$$

bu erda $0 \le t < 2\pi$.

Astroidaning dekart koordinatalar sistemasidagi tenglamasi $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = R^{\frac{2}{3}}$ ko‘rinishga ega. Astroida uzunligi $L = 6R$, yuzasi, ya’ni astroida bilan chegaralangan yuza, $S = \frac{3\pi R^2}{8}$ ga teng.

Bo‘lim mavzulariga oid ikkinchi tartibli egri chiziqlarning shaklini yasashda Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish mumkin.

Bayon etilgan materiallarni o'rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

Tekislikdagi to'g'ri chiziq va uning tenglamalari, tenglamalarning bir ko'rinishidan ikkinchisiga o'tish;

Ikkinchi tartibli chiziqlarning kanonik tenglamalari;

Tekislikda qutb koordinatalar sistemasi va uning dekart koordinatalar sistemasi bilan bog'lanishi;

Egri chiziqlarning parametrik ko'rinishda berilishi.

Talaba quyidagilarni bajara olishi shart:

Tekislikdagi analitik geometriyaning sodda masalalarini yechish;

Ikkinchi tartibli egri chiziqlarning kanonik tenglamalari asosida uning elementlarini topish;

Egri chiziq tenglamalarini dekart koordinatalar sistemasidan qutb koordinatalar sistemasiga va aksincha o'tkazish;

Egri chiziqlarning parametrik tenglamalarini dekart koordinatalar sistemasidan qutb koordinatalar sistemasiga va aksincha o'tkazish;

Egri chiziqlarning shaklini yasashda Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish.

4. FAZODAGI IKKINCHI TARTIBLI SIRTLAR

Mazkur bo‘limda fazodagi sirtlarning umumiy nazariyasi elementlari bayon etilib, ikkinchi tartibli sirtlar batafsil ko‘rib chiqilgan. Ikkinchi tartibli sirtlarning shakllarini tadqiq etish maqsadida kesimlar usuli tadbiq qilingan.

Bo‘limning mavzulari:

4.1. Sirtlar.

4.2. Chiziqli sirt.

4.3. Aylanma sirtlar.

4.4. Ikkinchi tartibli sirtlar.

4.5. Ikkinchi tartibli sirtlarning shakllarini kanonik tenglamalari yordamida tadqiq qilish.

4.5.1. Ellipsoid.

Giperboloidlar:

4.5.2. Bir pallali giperboloid.

4.5.3. Ikki pallali giperboloid.

Paraboloidlar:

4.5.4. Elliptik paraboloid.

4.5.5. Giperbolik paraboloid.

4.5.6. Konus.

Silindrlar:

4.5.7. Elliptik silindr.

4.5.8. Giperbolik silindr.

4.5.9. Parabolik silindr.

4.1. Sirtlar

$\boxed{t}$ Uch o‘lchovli fazoda sirtni quyidagicha aniqlash mumkin:

Oshkor ko‘rinishda:

$$z = z(x, y); \quad (x, y) \in G; \tag{1}$$

Oshkormas ko‘rinishda:

$$F(x, y, z) = 0; \quad (x, y, z) \in U; \tag{2}$$

Parametrik ko‘rinishda:

$$x=(u,v),\ \ y=(u,v),\ \ z=(u,v);\ \ (u,v)\in G; \qquad (3)$$

Vektor ko‘rinishda:

$$\vec{r}=\vec{r}(u,v);\ \ (u,v)\in G, \qquad (4)$$

bu erda G - tekis soha, U - fazoviy soha. Yuqoridagi (4) formuladagi $\vec{r}=x(u,v)\vec{i}+y(u,v)\vec{j}+z(u,v)\vec{k}$ - sirt $M(x,y,z)$ nuqtasining radius- vektori deyiladi.

4.2. Chi qli sirt

$\boxed{t}$ Agar sirt yasovchi deb ataluvchi fazodagi to‘g‘ri chiziqni harakatlantirishdan hosil bo‘lgan bo‘lsa, bunday sirt chiziqli deyiladi.

$\boxed{t}$ Agar yasovchisi yo‘naltiruvchi deb nomlangan tekis egri chiziq bo‘ylab harakatlanib, uning uchi deb ataluvchi qo‘zg‘almas nuqtasiga ham ega bo‘lsa, bunday sirt k**ononik sirt** deb ataladi.

$\boxed{t}$ **Silindrik sirt** yasovchining fiksirlangan nuqtasini yo‘naltiruvchi deb ataluvchi biror bir tekis egri chiziq bo‘yicha harakatlanishidan hosil bo‘ladi. Harakatlanish jarayonida yasovchi berilgan yo‘nalishga paralleligicha qoladi.

Kononik va silindrik sirtlardan tashqari chiziqli sirtlar oilasiga bir pallali giperboloid va giperbolik paraboloid ham tegishli, lekin bunda yasovchining harakatlanish qonuni murakkabligicha qoladi; quyida ma’lum bir sirtlar shaklini tahlil qilishda bu savolni batafsil ko‘rib chiqamiz.

4.3. Aylanma sirtlar

Agar sirt biror bir koordinatalar tekisligidagi tekis egri chiziqni biror bir koordinatalar o‘qi atrofida aylantirishdan hosil qilingan bo‘lsa, u holda bu sirtning tenglamasini shu chiziqning tenglamasi orqali aniqlash mumkin:

1) Oxy tekislikda yotuvchi chiziq $L(x,y)=0$;

Ox o‘qi atrofida aylantirilsa: $F(x,y,z)=L\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$,

Oy o‘qi atrofida aylantirilsa: $F(x,y,z)=L\left(\pm\sqrt{x^2+z^2},y\right)=0$;

2) Oxz tekislikda yotuvchi chiziq $L(x,z)=0$;

Ox o‘qi atrofida aylantirilsa: $F(x,y,z)=L\left(x,\pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0$,

Oz o‘qi atrofida aylantirilsa: $F(x, y, z) = L\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$;

3) Oyz tekislikda yotuvchi chiziq $L(y, z) = 0$;

Oy o‘qi atrofida aylantirilsa: $F(x, y, z) = L\left(y, \pm\sqrt{x^2 + z^2}\right) = 0$,

Oz o‘qi atrofida aylantirilsa: $F(x, y, z) = L\left(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z\right) = 0$;

4.4. Ikkinchi tartibli sirtlar

$\boxed{t}$ Ikkinchi tartibli algebraik S sirt deb, dekart koordinatalar sistemasida tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘lgan sirtlarga aytiladi:

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \quad (5)$$

bunda ikkinchi darajali o‘zgaruvchilarning oldidagi koeffitsientlar bir vaqtda nolga teng bo‘lmasligi lozim (aks holda (5) – tenglama birinchi tartibli algebraik sirtni, ya’ni tekislikni ifodalaydi).

Koeffitsientlarning qiymatlariga ko‘ra (5) tenglama xos sirtlarni ifodalashi mumkin (bo‘sh to‘plam, nuqta, to‘g‘ri chiziq, tekislik, tekisliklar juftligi).

Masalan, $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ tenglama yechimga ega emas, shuning uchun bu tenglama bo‘sh to‘plamni, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ tenglama $(0,0,0)$ koordinatali nuqtani, $x^2 + y^2 = 0$ tenglama Oz koordinatalar o‘qini, $x^2 = 0$ tenglama $x = 0$ koordinata tekisligini, $x^2 = 1$ tenglama esa $x = -1$ va $x = 1$ tekisliklar juftligini ifodalaydi.

Quyida faqat xosmas sirtlarni ko‘rib chiqamiz.

Ikkinchi tartibli sirtlar aniq simmetriya elementlariga ega, ularning ayrimlari esa **simmetriya** markaziga, hammasi hech bo‘lmaganda bitta **simmetriya tekisligiga,** ko‘pchiligi **simmetriya** o‘qiga ega bo‘ladi.

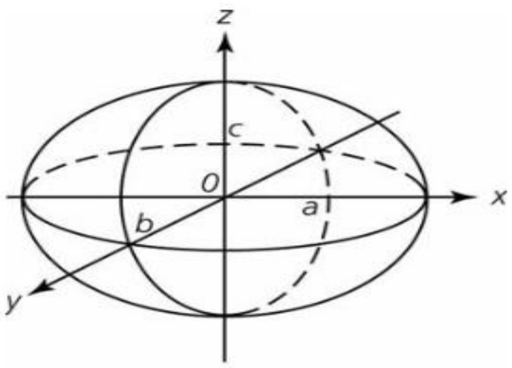
Ushbu (5) ko‘rinishidagi har qanday tenglamaning koordinatalarini almashtirish (asosiy o‘qlarga keltirish deb ataluvchi) orqali, ya’ni siljitish va burishga nisbatan **kanonik** ko‘rinishga keltirish mumkin. Kanonik ko‘rinishda har bir o‘zgaruvchi faqatgina bitta darajada qatnashadi, ya’ni nolinchi, birinchi yoki ikkinchi darajada qatnashadi. Tenglama sirtning simmetriya o‘qi bilan koordinatalar sistemasi o‘qi ustma-ust tushgandagina kanonik ko‘rinishga ega bo‘ladi. Koordinatlar boshi esa maxsus usulda tanlab olinadi (markaziy-simmetrik sirtlar uchun simmetriya markazi bilan ustma-ust tushadi).

4.5. Ikkinchi tartibli sirtlarning shakllarini kanonik tenglamalari yordamida tadqiq qilish

Sirt shaklini uning tenglamasi orqali tadqiq etishning asosiy usuli kesimlar usuli hisoblanadi va bunda berilgan sirt $x = const,\ y = const,\ z = const$ tekisliklar bilan kesishganda hosil bo‘ladigan chiziq shakli bilan sirt shakli baholanadi.

Ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalarini ketma-ket ko‘rib chiqamiz.

4.5.1. Ellipsoid



$\boxed{t}$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ kanonik tenglamaga ega bo‘lgan sirt **ellipsoid** deb ataladi.

Ellipsoidni $z=0$ tekislik bilan kesimini ko‘rib chiqaylik. Ellipsoid va tekislik kesimini quyidagi tenglamalar sistemasi aniqlaydi:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1, \\ z=0 \end{cases}$$ yoki

28-rasm.

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \\ z=0. \end{cases}$$

Bu kesim a va b yarim o‘qlarga ega bo‘lgan ellips ekanligini ko‘rish qiyin emas.

Ellipsoidni, $z=h$ tekislik bilan kesimini ko‘rib chiqaylik. Ellipsoid va berilgan tekislik kesimi chizig‘ini quyidagi tenglamalar sistemasi yordamida aniqlaymiz:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ z=h, \end{cases} \text{ yoki } \begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1, \\ z=h. \end{cases}$$

bu erda $a_1=a\cdot\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$; $b_1=b\cdot\sqrt{1-\dfrac{h^2}{c^2}}$;. Shunday qilib, agar $0<h<c$ bo‘lsa, u holda bu kesim ellipsning yarim o‘qlar bilan kesishmasi $a_1<a;\ b_1<b$ bo‘ladi. Agar $h=c$ bo‘lsa, kesim $(0,0,c)$ nuqtada bo‘ladi. Agar $h>c$, sistema yechimga ega emas, ya’ni tadqiq qilinayotgan sirt qaralayotgan tekislik bilan kesishmaydi (umumiy nuqtaga ega bo‘lmaydi).

Xuddi shu kabi S sirtning $x=const$ va $y=const$ tekisliklar bilan kesimlarini ham ko‘rib chiqish mumkin.

a,b,c kattaliklar ellipsoidning yarim o‘qlari deb ataladi. Agar ularning barchasi turlicha bo‘lsa, u holda ellipsoid uch o‘qli deb ataladi. Agar uning ikkita yarim o‘qi o‘zaro teng bo‘lsa, bu ellipsoid aylanma **ellipsoid**: $a=b<c$ bo‘lganda **cho‘zilgan**, $a=b>c$ bo‘lganda esa – **siqilgan** bo‘ladi. Bu sirtlar ellipsni katta va kichik o‘qlari atrofida aylantirishdan hosil bo‘ladi.

Agar yarim o‘qlari o‘zaro teng bo‘lsa $a=b=c=R$, uning kanonik tenglama quyidagicha bo‘ladi

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Bu tenglama markazi koordinatalar boshida joylashgan va radiusi R ga teng bo‘lgan sferani ifodalaydi:

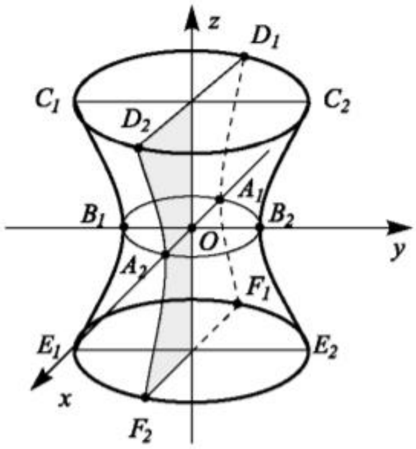
Giperboloidlar

4.5.2. Bir pallali giperboloid

$\boxed{t}$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ kanonik tenglamaga ega bo‘lgan sirt **bir pallali giperboloid** deb ataladi (29-rasm).

Giperboloidning $z=0$ tekislik bilan kesimini ko‘rib chiqaylik. Giperboloid va tekislik kesimi chizig‘i quyidagi tenglamalar sistemasi orqali aniqlanib, bu kesim a va b yarim o‘qlarga ega bo‘lgan ellips ekanligi ma’lum bo‘ladi:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ z = 0, \end{cases}$$



29-rasm.

Giperboloidni $z = h$ tekislik bilan kesganimizda kesimda: yarim o‘qlari $a_1 = a \cdot \sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}};\ b_1 = b \cdot \sqrt{1 + \dfrac{h^2}{c^2}}$ larga teng bo‘lgan ellips hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2} + \dfrac{y^2}{b_1^2} = 1, \\ z = h. \end{cases}$$

S sirtni $x = 0$ tekislik bilan kesganimizda kesimda Oy haqiqiy va Oz mavhum o‘qli $\begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = 0, \end{cases}$ giperbola hosil bo‘ladi. S sirtni $y = 0$ tekislik bilan kesganimizda kesimda Ox haqiqiy va Oz mavhum o‘qli $\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1, \\ y = 0, \end{cases}$ giperbola hosil bo‘ladi.

Agar $a = b$ bo‘lganda bu sirtimiz bir pallali aylanma **giperboloid bo‘ladi**.

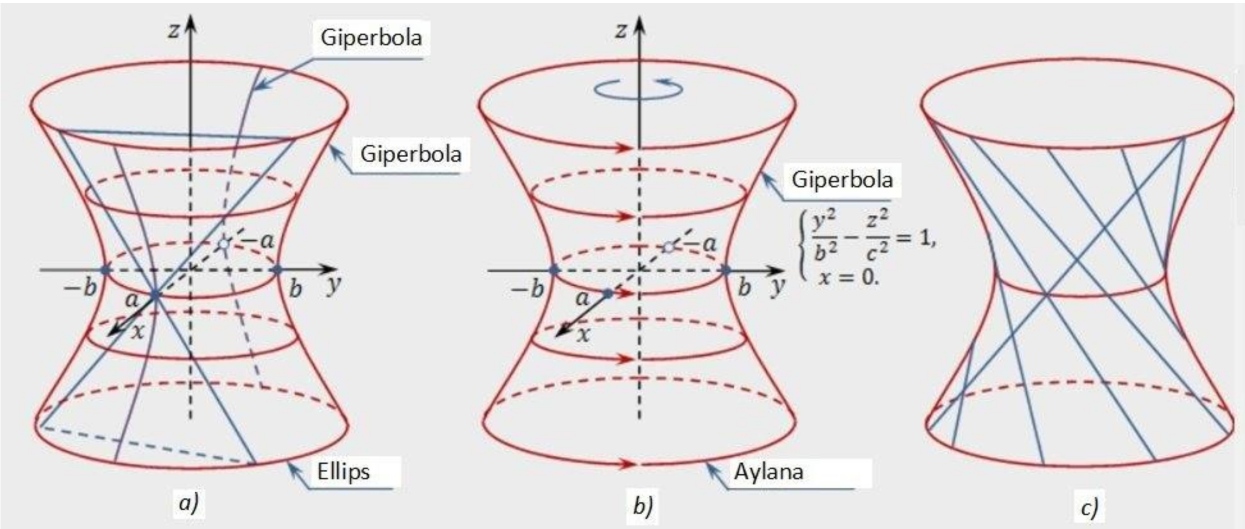
Bir pallali giperboloidni chiziqli sirt ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun tenglamasini quyidagi shaklda yozib olamiz:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{y^2}{b^2}\Rightarrow\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{y}{b}\right)\left(1+\frac{y}{b}\right).$$

Ikkita tenglamalar sistemasini ko‘rib chiqamiz

$$\begin{cases} v\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1+\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=v\left(1-\frac{y}{b}\right), \end{cases} \qquad \begin{cases} v\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=u\left(1-\frac{y}{b}\right), \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=v\left(1+\frac{y}{b}\right), \end{cases}$$

bu erda u va v lar noldan farqli parametrlar. Har bir sistema to‘g‘ri chiziq (ikki tekislik kesishish chizig‘i)ni ifodalaydi. Agar bu ikki sictema tenglamalarini o‘zaro ko‘paytirsak, bir pallali giperboloid hosil bo‘ladi. Bundan bu to‘g‘ri chiziqlarning har biri to‘laligicha bir pallali giperboloid ustida yotadi. Shunday qilib, bir pallali giperboloidning har bir nuqtasidan ikkita to‘g‘ri chiziq o‘tadi va ular bir pallali giperboloidni to‘g‘ri chiziqli yasovchilari deb ataladi. Bir pallali giperboloid ikkita to‘g‘ri chiziqli yasovchilarining oilasiga ega bo‘ladi.

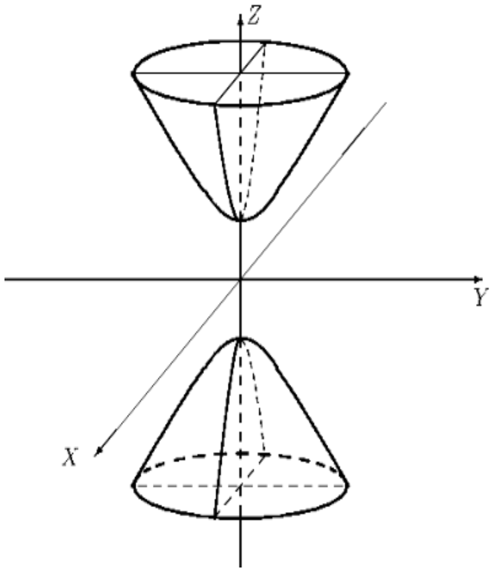


30-rasm.

Rus injeneri V.G.Shuxov ([1]) qurilish texnikasida bir pallali giperboloidning chiziqli xususiyatlaridan foydalanishni kiritgan va u aylanma bir pallali giperboloid to‘g‘ri chiziqli yasovchilari joylashuvi kabi metal to‘sin konstruksiyalaridan foydalanishni taklif qilgan. Bunday konstruksiyalar engil va mustahkam bo‘lib, ular hozirgi kunda ham suv minoralari hamda radiomachtalarda qo‘llanilib kelinmoqda. Keyinchalik, mashhur arxitektorlar Bakminster Fuller va Norman Fosterlar zamonaviy amaliyotga to‘rsimon chig‘anoqlarni kiritishgan va 21 asrga kelib qobiqlar avangard binolarni shakllantirishning asosiy vositalaridan biriga aylandi ([7]).

4.5.3. Ikki pallali giperboloid

$\boxed{t}$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ kanonik tenglamaga ega bo‘lgan sirt **ikki pallali giperboloid** deb ataladi.



31-rasm.

Giperboloidning $z=0$ tekislik bilan kesimini ko‘rib chiqaylik. Giperboloid va tekislik kesimi chizig‘i echimi bo‘sh to‘plam bo‘lgan quyidagi tenglamalar sistemasi orqali aniqlanadi:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1, \\ z=0. \end{cases}$$

Sirtni $z=h$ tekislik bilan kesimi $\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1, \\ z=h, \end{cases}$ yoki $\begin{cases} \frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1, \\ z=h, \end{cases}$ chiziqni ifodalaydi. Bu erda $a_1=a\cdot\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$; $b_1=b\cdot\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}$;

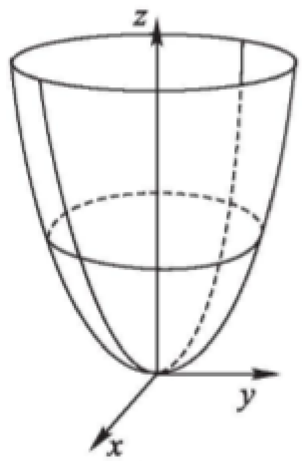
SHubhasiz, sistema $|h|\geq c$ bo‘lganda yechimga ega ekanligini ko‘rish qiyin emas, agar $h=\pm c$ bo‘lsa, kesim $-(0,0,\pm c)$ nuqtadan iborat, $|h|>c$ bo‘lganda esa kesim – yarim o‘qlari $a_1,\ b_1$ larga teng ellipsni ifodalaydi.

S sirtni $x=0$ tekislik bilan kesimi $\begin{cases}\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=-1,\\ x=0,\end{cases}$ haqiqiy o‘qi Oz va mavhum o‘qi Oy bo‘lgan giperbola bo‘ladi. S sirtni $y=0$ tekislik bilan kesimi esa haqiqiy o‘qi Oz va mavhum o‘qi Ox bo‘lgan giperbola bo‘ladi.

Paraboloidlar

4.5.4. Elliptik paraboloid

$\boxed{t}$ $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=pz,\ p>0$ kanonik tenglamaga ega bo‘lgan sirt **elliptik paraboloid** deb ataladi (32-rasm).

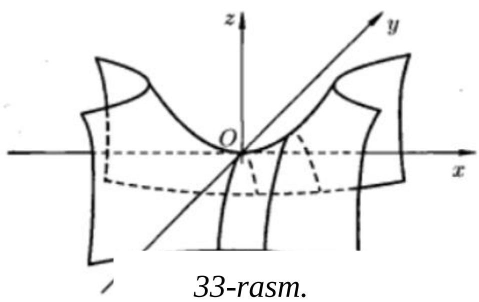


32-rasm.

Sirt $z\geq 0$ yuqori yarim fazoda joylashgan, sirtni $z=0,\ h>0$ tekisliklar bilan ko‘ndalang kesimi yarim o‘qlari $a_1=a\sqrt{ph}$ va $b_1=b\sqrt{ph}$ bo‘lgan ellipslardir. Ellipslarning o‘lchami h ortganda ortadi, sirtni $x=0$ va $y=0$ tekisliklar bilan bo‘ylama kesimi parabolalarni tashkil qiladi.

4.5.5. Giperbolik paraboloid

$\boxed{t}$ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=pz,\ \ p>0$ kanonik tenglamaga ega bo‘lgan sirt **giperbolik paraboloid** deb ataladi (33-rasm).



33-rasm.

Sirtni $z=0$ tekislik bilan kesimi $y=\pm\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘ladi, $z=h$ tekislik bilan kesimi esa - giperbolalar.

Agar $h>0$ bo‘lsa, giperbolaning haqiqiy o‘qi Ox o‘qiga va mavhum o‘qi Oy o‘qiga parallel bo‘ladi, agarda $h<0$ bo‘lsa, o‘qlarning o‘rinlari almashadi. Sirtni $x=const$ va $y=const$ tekisliklar bilan kesimi esa parabolalardan iborat.

Bir pallali giperboloid kabi giperbolik paraboloid ham chiziqli sirt hisoblanib, sirt ichida to‘laligicha yotuvchi ikkita to‘g‘ri chiziqli yasovchilar oilasiga ega. Yasovchilarining tenglamalari bir pallali giperboloiddagi kabi hosil qilinadi va quyidagi ko‘rinishga ega:

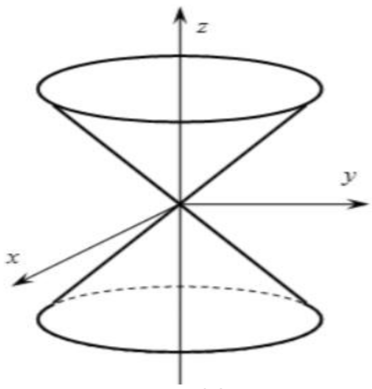
$$\begin{cases} v\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=upz, \\ u\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=v, \end{cases} \qquad \begin{cases} v\left(\frac{x}{a}-\frac{y}{b}\right)=upz, \\ u\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)=v, \end{cases}$$

Bunda sirtning har bir nuqtasi orqali ikkita to‘g‘ri chiziqli yasovchi o‘tadi.

Giperbolik paraboloidning bu xossasi ham qurilish konstruksiyalarida foydalaniladi ([7]): to‘g‘ri chiziqli metal elementlar asosida ustki qatlam karkaslari giperbolik paraboloid shaklida yasaladi. Bunday sirt o‘zining egriligiga ko‘ra yaxshi mustahkamlikka ham ega. Odatiy shaklidagi ustki qatlam, ya’ni - tekis bo‘lakli ko‘rinishdagi qatlam mustahkamlovchi (to‘sin) konstruksiyani va qo‘shimcha materiallarni talab qiladi.

4.5.6. Konus

$\boxed{t}$ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ ko‘rnishdagi kanonik tenglamaga ega bo‘lgan sirt **elliptik konus** deb ataladi (34-rasm).



34-rasm.

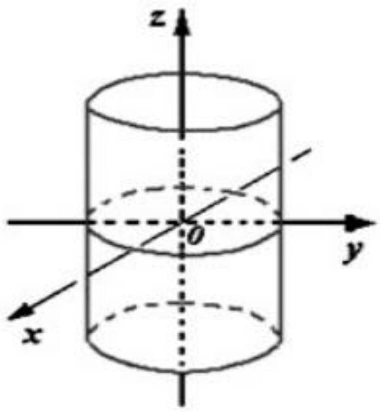
Elliptik konusni $z = const$ tekislik bilan kesimi ellips bo‘lib, bu tekislik koordinatalar boshidan uzoqlashgan sari ellips o‘lchamlari ortib boradi, Oz o‘qdan o‘tuvchi tekislik bilan kesimida esa ayqash to‘g‘ri chiziqlar hosil bo‘ladi.

Silindrlar

Berilgan koordinatlar sistemasida silindrning yasovchisi Oz o‘qiga parallel va uning tenglamasida z koordinatalar qatnashmaydi. Bu xossa (5) sirtning umumiy ko‘rinishdagi tenglamasi uchun ham o‘rinli: agar tenglamada o‘zgaruvchilardan biri qatnashmasa, bu tenglama orqali aniqlanadigan sirt yasovchisi mos o‘qqa parallel bo‘lgan – silindr bo‘ladi.

4.5.7. Elliptik silindr

$\boxed{t}$ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kanonik tenglamaga ega bo‘lgan sirt **elliptik silindr** deb ataladi (35-rasm).

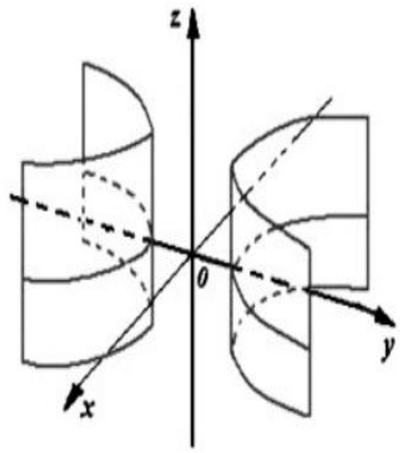


35-rasm.

Silindr o‘qi Oz koordinatalar o‘qi bo‘lib, ko‘ndalang kesimi – ellipslardan iborat bo‘ladi. Oxz va Oyz tekisliklar sirtning oyna simmetrik tekisliklari hisoblanadi.

4.5.8. Giperbolik silindr

$\boxed{t}$ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ kanonik tenglamaga ega bo‘lgan sirt **giperbok silindr** deb ataladi (36-rasm).

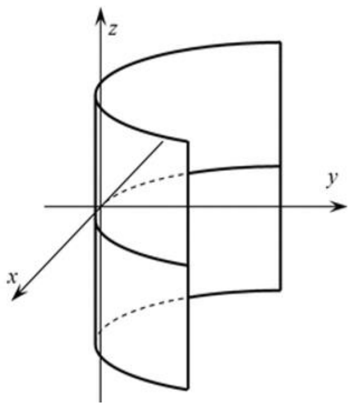


36-rasm.

Silindr o‘qi Oz koordinatalar o‘qi bo‘lib, uning ko‘ndalang kesimi – giperbolalar bo‘ladi. Oxz va Oyz tekisliklar sirtning oyna simmetrik tekisliklari hisoblanadi.

4.5.9. Parabolik silindr

$\boxed{t}$ $y^2 = 2px,\ p > 0$ kanonik tenglamaga ega bo‘lgan sirt **parabolik silindr** deb ataladi (37-rasm).



37-rasm.

Oxz tekislik sirtning oyna simmetrik tekisligi hisoblanadi.

Bo‘lim mavzulariga oid sirtlarning shaklini yasashda talabalar Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalaridan foydalanishlari mumkin.

Bayon etilgan materiallarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

Sirtlarning turli ko‘nishlari;

Sirtlarning xossalari;

Ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalari;

Ikkinchi tartibli sirtlarni kesish usullari orqali tadqiq qilish.

Ikkinchi tartibli sirtlarning shakllarini Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish.

III BOB. MATEMATIK TAHLILGA KIRISH. TO‘PLAMLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

1. TO‘PLAMLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

Qo‘llanmaning bu qismida to‘plamlar nazariyasining asosiy elementlari, ko‘p uchratiladigan sonli to‘plamlar va ularning xossalari bayon etilgan. Sonli ketma-ketlik va uning limiti tushunchalari kiritilib, sonli ketma-ketliklar (cheksiz kichik, cheksiz katta, moton kamayuvchi va monoton o‘suvchi)ning xossalari ko‘rib chiqilgan.

Bo‘lim mavzulari:

1.1. To‘plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari

1.2. Sonli to‘plamlar

1.3. Sonli oraliqlar

1.4. Chegaralangan to‘plamlar

1.5. Sonli ketma-ketliklar

1.6. Chegaralangan ketma-ketliklarning xossalari

1.1. To‘plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari

Keyinchalik yozuvlarni kamaytirish maqsadida matematik mantiq va to‘plamlar nazariyasining ayrim tushunchalari, belgilashlar va amallaridan foydalaniladi.

To‘plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo‘lib, uni boshqa umumiyroq tushunchalar bilan aniqlab bo‘lmaydi.

$\boxed{t}$ Bir butun deb qaraladigan va biror bir umumiy belgiga ega bo‘lgan ob’ektlar to‘plamni tashkil qiladi va bu ob’ektlar to‘plamning **elementlari deb ataladi**.

To‘plamning elementlari ham to‘plam bo‘lishi mumkin.

Masalan, N - № nomerli maktab o‘quvchilari to‘plamni tashkil qiladi, har bir o‘quvchi bu to‘plamning elementidir. Bu to‘plamni boshqacha qilib ham tashkil etish mumkin: N - № nomerli maktab sinflardan tashkil topgan, sinflar esa o‘quvchilardan tashkil topgan.

To‘plamlarni lotin alifbosining bosh harflari bilan, ularning elementlarini esa lotin alifbosini kichik harflari bilan belgilash qabul qilingan.

To‘plam quyidagicha berilgan bo‘lishi mumkin:

- Sodda elementlarini sanash orqali (bunda elementlari figurali qavslar ichiga olinadi): $A=\{1,2,3\}$;
- To‘plamning barcha elementlarining umumiy belgisi asosida: $X=\{x: 1<x<2\}$.

Birinchi misolda to‘plam 1, 2, 3 sonlaridan, ya’ni uchta sondan iborat, ikkinchi misolda esa to‘plamning elementlari $1<x<2$ shartni qanoatlantiruvchi cheksiz haqiqiy sonlardan (agar qo‘shimcha boshqa shart berilmagan bo‘lsa) iborat.

$\boxed{t}$ Elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deb ataladi.

$\boxed{t}$ Agar B to‘plamning barcha elementlari A to‘plamning ham elementlari bo‘lsa, u holda B to‘plam A to‘plamning qism to‘plami deb ataladi.

Bo‘sh to‘plam har qanday to‘plamning qism to‘plami, bo‘sh bo‘lmagan har qanday to‘plam o‘ziga o‘zi qism to‘plam (xosmas qism to‘plam) hisoblanadi.

$\boxed{t}$ Agar bir vaqtning o‘zida A to‘plam B to‘plamga va B to‘plam A to‘plamga qism to‘plam bo‘lsa, A va B to‘plamlar teng deyiladi. Teng to‘plamlar aynan bir xil elementlarga ega bo‘ladi.

To‘plam va to‘plamlar ustida amallarga nisbatan tasdiqlarning qisqa yozuvlarini ko‘rib chiqamiz:

$\varnothing$ - bo‘sh to‘plam;

$a\in A$ - “a element A to‘plamga tegishli” (“A to‘plam a elementga ega”);

$a\notin A$ - “a element A to‘plamga tegishli emas”;

$A\supset B$ - “B - to‘plam A to‘plamning qism to‘plami” (“A o‘zida Bni saqlaydi”, “B A da mavjud”);

$A\subset B$ - “A - to‘plam B to‘plamning qism to‘plami”;

$A=B$ - “A teng B”, “A bilan B ustma-ust tushadi”;

$A\cup B$ - A va B to‘plamlarning birlashmasi (yig‘indisi); birlashmaning har bir elementi birlashmadagi to‘plamlarning kamida biriga tegishli bo‘ladi;

$A \cap B$ - A va B to‘plamlarning kesishmasi (ko‘paytmasi); kesishmaning har bir elementi bir vaqtda ham A to‘plamga, ham B to‘plamga, ya’ni kesishmadagi har bir to‘plamga bir vaqtda tegishli bo‘ladi.

Quyida standart so‘z birikmalari (quyida kichik harf bilan biror bir mulohaza (tasdiq) belgilanadi) va mantiqiy amallarni qisqartirib yozishni ko‘rib chiqamiz:

$\alpha \Rightarrow \beta$ **implikatsiya**, mantiqiy xulosa chiqarish; “α mulohazadan β mulohaza kelib chiqadi”, “β mulohaza α mulohazaning natijasi (xulosasi)” deb o‘qiladi;

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ **ekvivalent**, teng kuchli; “α mulohaza β mulohazaga teng kuchli”, “α ekvivalent β ga”, “α va β lar teng kuchli” deb o‘qiladi; bu $\alpha \Rightarrow \beta$ va $\beta \Rightarrow \alpha$ **ekanligini bildiradi**, ya’ni mulohazalar bir vaqtda rost yoki bir vaqtda yolg‘on ekanligini bildiradi;

$\overline{\alpha}$ α mulohazaning **inkori**;

$\vee$ **diz’yunksiya**, mantiqiy «yoki»; $\alpha \vee \beta$ - “α yoki β” ni anglatadi;

$\wedge$ **kon’yunksiya**, mantiqiy “va”; $\alpha \wedge \beta$ - “α va β” ni anglatadi;

$\exists$ **mavjudlik** kvantori, $\exists \alpha \in A$ – “A to‘plamga tegishli α element mavjud” deb o‘qiladi;

$\forall$ **umumiylik** (ixtiyoriylik) **kvantori**, $\forall \alpha \in A$ – “A to‘plamning har bir α elementi uchun” deb o‘qiladi.

: - “shunday”, “shartni qanoatlantiruvchi”, “o‘rinli” deb o‘qiladi.

Bundan tashqari ko‘p elementli yig‘indi va ko‘paytmaning qisqartma shakli quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = a_1 + a_2 + \ldots + a_n , \quad \prod_{j=1}^{n} a_j = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n .$$

Belgili ifodalanishni tadbiqiga oid bir nechta misollar keltiramiz:

1) $(x \in A \cup B) \Leftrightarrow ((x \in A) \vee (x \in B))$ - birlashma ta’rifi;

2) $(A = B) \Leftrightarrow ((A \supset B) \wedge (A \subset B))$ - to‘plamlar tengligi ta’rifi;

3) $(A \supset B) \Leftrightarrow (\forall x \in B : ((x \in B) \Rightarrow (x \in A)))$ - qism to‘plam ta’rifi.

1.2. Sonli to‘plamlar

$\boxed{t}$ 1, 2, 3, . . . – sonlar **natural sonlar deb ataladi, natural sonlar to‘plami** $N=\{n\}=\{1,2,...,n,...\}$ kabi belgilanadi.

$\boxed{t}$ $Z=\{0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,...,\pm n,...\}$, $n\in N$ sonlar butun sonlar to‘plamini tashkil qiladi.

$\boxed{t}$ $Q=\left\{q=\dfrac{m}{n}:m\in Z,n\in N\right\}$ ko‘rinishidagi sonlar ratsional sonlar to‘plamini tashkil qiladi.

$\boxed{t}$ Agar $|m|<n$ bo‘lsa, u holda ratsional kasr to‘g‘ri, agar $|m|\ge n$ bo‘lsa teskari kasr deb ataladi.

$\boxed{!}$ Ratsional kasrlar chekli yoki cheksiz davriy o‘nli kasrlardir.

Misol:

$$\frac{1}{3}=0,333...=0,(3),\ \frac{2}{5}=0,4,\ \ 0,3999...=0,3(9)=\frac{39-3}{90}=\frac{36}{90}=\frac{4}{10},$$

$$\frac{7}{99}=0,0707...=0,(07).$$

$\boxed{t}$ Cheksiz davriy bo‘lmagan o‘nli kasrlar I **irratsional sonlar to‘plamini tashkil qiladi**.

Masalan, $\sqrt{2}=1,41...$, $\pi=3,1415926535\ 9...$, $e=2,7182818284\ 59045...$.

$\boxed{t}$ Ratsional va irratsional sonlar haqiqiy sonlar to‘plamini tashkil qiladi $R=Q\cup I$.

$\boxed{!}$ Haqiqiy sonlar to‘plami va sonlar o‘qidagi nuqtalar to‘plami orasida o‘zaro bir qiymatli moslik mavjud.

1.3. Sonli oraliqlar

Sonli to‘plamlarga doir misollar:

x elementlar to‘plami $\{x\}$

To‘plam elementi: $x\in\{x\}$

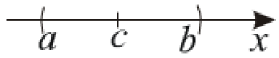
Kesma (segment): $\{x\}=[a,b]: a\le x\le b$, bu erda $a\in\{x\}$, $b\in\{x\}$

Interval: $\{x\}=(a,b)$: $a<x<b$

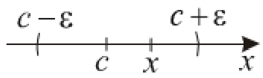
Yarim interval (yarim segment): $\begin{cases}\{x\}=(a,b]: a<x\le b,\\ \{x\}=[a,b): a\le x<b.\end{cases}$

Nur: $\begin{cases} \{x\} = [a,\infty):\ (x \ge a), \\ \{x\} = (-\infty,b]:\ (x \le b). \end{cases}$

c nuqtaning atrofi - c nuqtani o‘z ichiga oluvchi ixtiyoriy (a,b) interval.



c nuqtaning $\{x : |x-c| < \varepsilon\}$ $\varepsilon -$ atrofi, ya’ni $c-\varepsilon < x < c+\varepsilon$ tengsizlik bilan ifodalanuvchi interval.



1.4. Chegaralangan to‘plamlar

$\boxed{t}$ Agar $\forall x \in \{x\}: x \le M$ shartni qanoatlantiruvchi M soni mavjud bo‘lsa, u holda $\{x\}$ to‘plam yuqoridan chegaralangan deyiladi, M soni esa $\{x\}$ to‘plamning yuqori chegarasi (YuCh $\{x\}$) deyiladi.

Misol: $\{-1,2,3,4,5\}, M_1 = 5, M_2 = 6, .M_3 = 10, .., .$

$\boxed{\mathbf{T}}$ Yuqoridan chegaralangan to‘plam cheksiz ko‘p yuqori chegaraga ega bo‘ladi.

$\boxed{t}$ Yuqori chegaraning eng kichigi aniq yuqori chegara (AYuCh $\{x\}$) deb ataladi, $\bar{x} = Sup\{x\}$ (lotin tilidagi “***supremum***” dan- eng yuqori ma’nosini anglatadi) kabi belgilanadi.

Misol: $\{-1,2,3,4,5\},\ \bar{x} = 5$.

$\boxed{t}$ Agar $\forall x \in \{x\}:\ x \ge m$ shartni qanoatlantiruvchi m son mavjud bo‘lsa, u holda $\{x\}$ to‘plam quyidan chegaralangan deyiladi. m son $\{x\}$ to‘plamning quyi chegarasi (QCh $\{x\}$) deyiladi.

$\boxed{\mathbf{T}}$ Quyidan chegaralangan to‘plam cheksiz ko‘p quyi chegaraga ega bo‘ladi.

$\boxed{t}$ Quyi chegaraning eng kattasi aniq quyi chegara (AQCh $\{x\}$) deb ataladi, $\underline{x} = Inf\{x\}$ (lotin tilidagi ***infimum*** dan- eng quyi) kabi belgilanadi.

$\boxed{t}$ Agar $\forall x \in \{x\}:\ |x| \le M$ shartni qanoatlantiruvchi $M > 0$ soni mavjud bo‘lsa, $\{x\}$ to‘plam chegaralangan deyiladi,. Chegaralangan to‘plam bir vaqtning o‘zida ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘ladi.

$\boxed{t}$ Agar har qanday yetalicha katta $M>0$ son uchun $|x|\geq M$ shartni qanoatlantiruvchi $x\in\{x\}$ element mavjud bo‘lsa, u holda $\{x\}$ to‘plam chegaralanmagan deyiladi,.

Misol:

Chegaralanmagan to‘plam:
$(-\infty,\infty)$ – chegaralanmagan to‘plam,
$(-\infty,2]$ – quyidan chegaralanmagan to‘plam,
$[-5,\infty)$ - yuqoridan chegaralanmagan to‘plam.

$\boxed{!}$ To‘plam chegaralanmagan bo‘lishi uchun u yoki quyidan, yoki yuqoridan chegaralanmagan bo‘lishi etarlidir.

$\boxed{t}$ M son $\{x\}$ to‘plamning eng katta elementi $M=\max\{x\}$ deyiladi, agar quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa:

1) $M\in\{x\}$; 2) $\forall x\in\{x\}:\ x\leq M$.

$\boxed{t}$ m son $\{x\}$ to‘plamning eng kichik elementi $m=\min\{x\}$ deyiladi, agar quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa: 1) $m\in\{x\}$; 2) $\forall x\in\{x\}:\ x\geq m$ bo‘lsa.

$\boxed{!}$ Yuqoridan (quyidan) chegaralangan to‘plam eng katta (kichik) elementga ega bo‘lishi va ega bo‘lmasligi mumkin:

$\{x\}=[a,b],\ \max\{x\}=b,\ \min\{x\}=a$;

$\{x\}=(a,b),\ \max\{x\}, \min\{x\}$ lar mavjud emas.

1.5. Sonli ketma-ketliklar

$\boxed{t}$ Agar har bir natural n soniga biror qonun yoki qoidaga ko‘ra qandaydir x_n soni mos qo‘yilgan bo‘lsa, u holda nomerlangan $x_1, x_2, x_3,..., x_n,...$ sonlardan tashkil topgan $\{x_n\}=\{x_1, x_2, x_3,..., x_n,...\}$ to‘plamga sonli ketma-ketlik deyiladi. Bu to‘plamning elementlari ketma-ketlikning hadlari deyiladi.

$\boxed{!}$ Sonli ketma-ketlik quyidagi hollarda berildi deyiladi, agar:

1) hadlar ro‘yhati berilsa;
2) ketma-ketlikning umumiy hadi $x_n=f(n)$ ko‘rinishda berilsa;
3) rekkurent (qaytma) tengliklar ko‘rinishida; bu holda ketma-ketlikning bir

nechta bosh hadlari va keyingi hadlarini hisoblash qonuniyati berilgan bo‘lsa: $x_{n+1} = f\left(x_n\right)$, $x_1 = const$ - birhadli rekkurent formula, $x_{n+2} = f\left(x_{n+1}, x_n\right)$, $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$ - ikkihadli rekkurent formula va hokazo.

Misol:

1) $\{-1,1,-1,1,...\} = \left\{(-1)^n\right\}$;
2) $\left\{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, ...\right\} = \left\{\frac{n-1}{n}\right\}$;
3) $\{1,2,3,...\} = \{n\}$;
4) $x_{n+1} = \frac{x_n}{2}$, $x_1 = 1 \Rightarrow x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$, $n = 1,2,3,...$;
5) $x_{n+2} = x_{n+1} + x_n$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1, \Rightarrow x_3 = 2$, $x_4 = 3$;

$\boxed{t}$ Agar ixtiyoriy natural sonlardan tashkil topgan o‘suvchi ketma-ketlikni qaraylik: $k_1, k_2, k_3, ..., k_n, ...$ va $\{x_n\}$ ketma-ketlikdan qayd etilgan ketma-ketlik hadlariga mos nomerli $x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}, ..., x_{k_n}, ...$ hadlarini tanlab olamiz, hosil bo‘lgan ketma-ketlik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning **qism ketma-ketligi** deyiladi. Masalan, ixtiyoriy ketma-ketlik uchun uning juft yoki toq nomerli hadlaridan tuzilgan ketma-ketliklar berilgan ketma-ketlikning qism ketma-ketliklari bo‘ladi.

$\boxed{!}$ Sonli ketma-ketliklar tartiblangan sonli to‘plamlar hisoblanib, ular uchun chegaralangan to‘plamlar haqidagi teoremalar o‘rinlidir.

Misol:

Chegaralangan ketma-ketliklar:
1) $\{x_n\} = \{-n\} = \{-1, -2, -3, ..., -n, ...\}$ ketma-ketlikning barcha hadlari uchun $x_n \le -1$ tengsizlik o‘rinli bo‘lgani uchun, ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan.
2) $\{x_n\} = \left\{n^2\right\}$ ketma-ketlik quyidan chegaralangan, chunki uning barcha hadlari $x_n = n^2 \ge 1$ tengsizlikni qanoatlantiradi.
3) $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ ketma-ketlik chegaralangan, chunki ixtiyoriy $n \in N$ lar

	uchun $0<\frac{1}{n}\le 1$ shart o‘rinli, ya’ni ketma-ketlikning yuqori chegarasi $M=1$ quyi chegarasi esa $m=0$ ga teng.
Misol:	Chegaralanmagan ketma-ketliklar: 1) $\{x_n\}=\{n^2\}$ ketma-ketlikni ko‘raylik. Bu ketma-ketlikni yuqorida quyidan chegaralangan degan edik, bu to‘g‘ri, lekin bu ketma-ketlik chegaralanmagan ham hisoblanadi, chunki ixtiyoriy yetarlicha katta $M>0$ soni uchun ketma-ketlikning shu sondan katta hadi doim mavjud, ya’ni $x_n>M \Rightarrow n^2>M \Rightarrow n>\sqrt{M} \Rightarrow n_0=\left[\sqrt{M}\right]+1$, bu erda $[y]$ -sonning butun qismi, ya’ni ixtiyoriy musbat $\forall M>0$ uchun shunday $n=\left[\sqrt{M}\right]+1$nomer topiladiki, ketma-ketlikning shu nomerdan katta hadlari quyidagi shartni qanoatlantiradi: $\left\|x_{\left[\sqrt{M}\right]+1}\right\|>M$. Demak ketma-ketlik chegaralanmagan. 2) $\left\{\left(1-(-1)^n\right)n\right\}$ ketma-ketlik toq hadlari orasida $\forall M>0$ soni uchun $\|x_n\|\ge M$ shartni qanoatlantiruvchi hadi mavjud.

1.6. Chegaralangan ketma-ketliklarning xossalari

1. Ikkita chegaralangan ketma-ketliklar yig‘indisi yana chegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi.

2. Ikkita chegaralangan ketma-ketliklar ayirmasi yana chegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi.

3. Ikkita chegaralangan ketma-ketliklar ko‘paytmasi yana chegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi.

$\boxed{!}$ Chegaralanmagan ketma-ketliklar bunday xossalarga ega emas.

Bayon etilgan materiallarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

To‘plam, to‘plamning elementi;

Natural, butun, ratsional, irratsional, haqiqiy sonlar;

Sonli to‘plamlar va ularning ko‘rinishlari (interval, segment, nur va shu kabilar);

Chegaralangan va chegaralanmagan to‘plamlar;

Sonli ketma-ketliklar;

Chegaralangan va chegaralanmagan ketma-ketliklar;

Chegaralangan ketma-ketliklarning xossalari.

2. SONLI KETMA-KETLIKLARNING LIMITI

Bo‘limning bu qismida sonli ketma-ketliklarning limiti tushunchasi kiritilgan, hamda ketma-ketliklarning (cheksiz kichik va cheksiz katta, monoton) maxsus ko‘rinishlari va xossalari ko‘rilgan.

Bo‘limning mavzulari:

2.1. Sonli ketma-ketlikning limiti.

2.2. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar.

2.3. Cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalari.

2.4. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari.

2.5. Monoton ketma-ketliklar.

2.6. e soni monoton ketma-ketlikning limiti sifatida.

2.7. Limit nuqtalar. Yuqori va quyi limitlar.

2.1. Sonli ketma-ketlikning limiti

$\boxed{t}$ Agar ixtiyoriy yetarlicha kichik musbat ε soni uchun shunday N natural son (ε ga bog‘liq) topilsaki, barcha $n > N$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n lar uchun ketma-ketlikning hadlari $|x_n - a| < \varepsilon$ shartni qanoatlantirsa, u holda a chekli son $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikning limiti deyiladi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ yoki $x_n \underset{n\to\infty}{\to} a$ kabi belgilanadi.

Bu quyidagi jumlalar orqali ham tavsiflanishi mumkin:

$\{x_n\}$ ketma-ketlik a ga yaqinlashadi;

$\{x_n\}$ ketma-ketlik a ga teng limitga ega;

x_n (ketma-ketlikning umumiy hadi) a ga intiladi.

Yuqoridagi fikrlarning qisqacha yozuvi:

$$\left(\lim_{n\to\infty} x_n = a\right) \Leftrightarrow \left(\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists N = N(\varepsilon): \;\; \forall n > N(\varepsilon) \;\Rightarrow\; |x_n - a| < \varepsilon\right).$$

$\boxed{t}$ Chekli limitga ega bo‘lgan ketma-ketliklar yaqinlashuvchi ketma-ketliklar deb ataladi.

$\boxed{!}$ Tasdiqni qisqacha shakllantirish ham mumkin.

$\boxed{t}$ Agar ketma-ketlikning biror hadidan boshlab uning hadlari a sondan yetarlicha kichik farq qilsa, u holda a soni $\{x_n\}$ ketma-ketlik limiti deyiladi.

Mazkur ta’rif «biror hadidan boshlab» va «yetarli darajada kichik» jumlalarni qanday tushunish kerakligini aniqlashtiradi: $\forall\varepsilon > 0 \; |x_n - a| < \varepsilon$ - birinchi tasdiqning aniq shakllanishi, $\forall n > N(\varepsilon)$ - esa ikkinchi tasdiqning aniq shakli.

Misol:

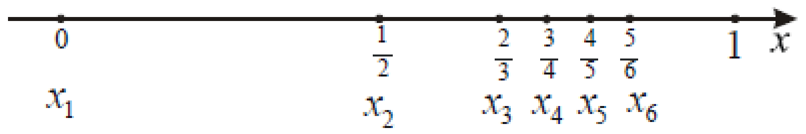
Berilgan: $\{x_n\} = \left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1.$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right) = 1$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Isboti: $\forall\varepsilon > 0$, $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon \Rightarrow \left|1 - \dfrac{1}{n} - 1\right| < \varepsilon$; $\dfrac{1}{n} < \varepsilon$; $n > \dfrac{1}{\varepsilon} \Rightarrow$

Agar $N(\varepsilon)$ sifatida $\dfrac{1}{\varepsilon}$ dan katta – ixtiyoriy butun son tanlansa, u holda $\left|\dfrac{n-1}{n} - 1\right| < \varepsilon$ tengsizlik $\forall n > N(\varepsilon)$ uchun bajariladi.

Misolning geometrik talqini:



$-\varepsilon < x_n - 1 < \varepsilon, \quad 1 - \varepsilon < x_n < \varepsilon + 1.$

$$\varepsilon=\frac{1}{2},\ N\left(\frac{1}{2}\right)=2;\ n>2 \Rightarrow |x_n-1|<\frac{1}{2};$$

$$\varepsilon=\frac{1}{5},\ N\left(\frac{1}{5}\right)=5;\ n>5 \Rightarrow |x_n-1|<\frac{1}{5}.$$

$\boxed{!}$ $\{(-1)^n\}$ ketma-ketlik limitga ega emas, chunki uning birorta ham hadlari (shartni qanoatlantiruvchi had nomerini ko‘rsatib bo‘lmaydi) biror sonning yetarlicha kichik atrofida mavjud bo‘lmaydi .

$\boxed{t}$ Limitga ega bo‘lmagan ketma-ketliklar uzoqlashuvchi ketma-ketliklar deb ataladi.

2.2. Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar

$\boxed{t}$ Agar ixtiyoriy M musbat son uchun shunday natural N (M ga bog‘liq) son topilsaki, $n>N$ shartni qanoatlantiruvchi n lar uchun $|x_n|>M$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz katta deyiladi. Qisqacha bu ta’rif quyidagicha talqin etiladi:

$$\forall\, M>0\ \exists N=N(M):\ \forall n>N(M)\Rightarrow |x_n|>M.$$

$\boxed{t}$ Agar $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlik cheksiz katta bo‘lib, uning hadlari (hech bo‘lmaganda biror bir haddan boshlab) ishorasini saqlasa (+ yoki -), u holda $\{x_n\}$ ketma-ketlik $+\infty$ (yoki $-\infty$) limitga ega deyiladi:

Misol: $\{n^\alpha\}$, $\alpha>0$ ketma-ketlik cheksiz katta, chunki ixtiyoriy $M>0$ uchun $n^\alpha>M$ ekanligidan va $n>\sqrt[\alpha]{M}$ bo‘ladi, u holda ta’rif shartlari bajariladi.

$$\lim_{n\to\infty} x_n=+\infty,\ \ x_n \underset{n\to\infty}{\to} +\infty \text{ yoki } \lim_{n\to\infty} x_n=-\infty,\ \ x_n \underset{n\to\infty}{\to} -\infty.$$

$\boxed{t}$ Agar yetarli darajada kichik musbat ε son uchun shunday N (ε ga bog‘liq) natural son topilsaki, $n>N(\varepsilon)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n lar uchun $|x_n|<\varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik deb ataladi.

Qisqacha bu ta’rif quyidagicha talqin etiladi:

$$\forall\varepsilon>0 \quad \exists N(\varepsilon): \ \forall n>N(\varepsilon): \ |x_n|<\varepsilon .$$

! Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo‘lsa, ketma-ketlik limitining ta’rifiga ko‘ra $\{x_n\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi.

2.3. Cheksiz kichik ketma-ketliklarning xossalari

Misol: Cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya $x_n = q^n$, $|q|<1$ cheksiz kichik ketma-ketlik hisoblanadi, chunki ixtiyoriy $\varepsilon>0$ son uchun va $n>\log_{|q|}\varepsilon$ shartni qanoatlantiruvchi n lar uchun $|q^n|<\varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $N(\varepsilon)=\lfloor \log_{|q|}\varepsilon \rfloor$ ga teng deb olinadi.

T Cheksiz kichik ketma-ketlik chegaralangan.

Isboti: $\{x_n\}$ – cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lsin. U holda berilgan musbat ε soni uchun ketma-ketlikning biron bir haddan boshlab $|x_n|<\varepsilon$ tengsizlik bajariladi. M ning qiymati sifatida $\varepsilon, |x_1|, |x_2|, ..., |x_{n-1}|$ sonlarning eng kattasini olamiz va barcha n lar uchun $|x_n|<M$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. Teorema isbotlandi.

T Ikki va undan ortiq chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklar yig‘indisi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

T Ikki va undan ortiq chekli sondagi cheksiz kichik ketma-ketliklar ayirmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

T Chegaralangan ketma-ketlikning cheksiz kichik ketma-ketlikka ko‘paytmasi cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Isboti:

$\{x_n\}$ – cheksiz kichik ketma-ketlik, $\{y_n\}$ – esa chegaralangan cheksiz ketma-ketlik bo‘lsin. Ixtiyoriy $\varepsilon>0$ uchun $n>N(\varepsilon)$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan $N(\varepsilon)$ son mavjudki, u $|x_n|<\varepsilon$ shartni qanoatlantiradi, hamda shunday M son mavjudki barcha n uchun $|y_n|<M$ tengsizlik bajariladi. U holda $\{x_n \cdot y_n\}$ ketma-ketlik uchun

$n > N(\varepsilon)$ bajariladigan n lar uchun $|x_n \cdot y_n| < \varepsilon \cdot M$ ga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, M –fiksirlangan son, ε esa yetarlicha kichik son bo‘lgani uchun $\varepsilon \cdot M$ ham yetarlicha kichik bo‘ladi. Teorema isbotlandi.

$\boxed{n}$ Cheksiz kichik ketma-ketliklar ko‘patmasi yana cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘ladi.

Bu tasdiq cheksiz kichik ketma-ketliklar har doim chegaralanganligidan kelib chiqadi.

$\boxed{\mathbf{T}}$ Agar cheksiz kichik $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari nolga teng bo‘lmasa, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz katta bo‘ladi.

$\boxed{\mathbf{T}}$ Agar cheksiz katta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning hadlari noldan farqli bo‘lsa $(x_n \neq 0)$, u holda $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik bo‘ladi.

Misol:

1). $\left\{\frac{\sin n}{n}\right\}$ – ketma-ketlik cheksiz kichik, ya’ni uning hadlari chegaralangan $\{\sin n\}$ ketma-ketlik va cheksiz kichik $\frac{1}{n}$ ketma-ketlik hadlarining ko‘paytmasidan iborat.

2). $\left\{\frac{n+1}{n^3}\right\}$ – ketma-ketlik cheksiz kichik, chunki uning hadlari $\left\{\frac{1}{n^2}\right\}$ va $\left\{\frac{1}{n^3}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar yig‘indisidan iborat.

3). $\left\{\frac{e^{-n}}{n}\right\}$ – ketma-ketlik cheksiz kichik, ya’ni uning hadlari $\{e^{-n}\}$ va $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ cheksiz kichik ketma-ketliklar hadlari ko‘paytmasidan iborat.

$\boxed{t}$ Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $N(\varepsilon)$ nomer topiladiki, $n > N(\varepsilon)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha n va barcha $m\,(m = 1,2,3,\ldots)$ natural sonlar uchun $|x_{n+m} - x_n| < \varepsilon$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **fundamental ketma-ketlik** deb ataladi.

$$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon):\ \forall n>N(\varepsilon)\ \ \forall m\in N:\ |x_{n+m}-x_n|<\varepsilon.$$

$\boxed{\textbf{T}}$ **Koshi kriteriysi**. $\{x_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘lishi uchun uning fundamental ketma-ketlik bo‘lishi zarur va yetarli.

2.4. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

1°. Agar $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘lsa, u holda uning hadlari $x_n = a+\alpha_n$ ko‘riniishda bo‘ladi, bu erda $\{\alpha_n\}$ – cheksiz kichik ketma-ketlik.

Isboti:

Ta’rifga ko‘ra, $\forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon):\ n>N(\varepsilon),\ \ |x_n-a|<\varepsilon$.

$\alpha_n = x_n - a\ \Rightarrow\ x_n = a+\alpha_n$ ni $|x_n-a|<\varepsilon$ ga qo‘ysak: $|a+\alpha_n-a|<\varepsilon\Rightarrow\ \forall\varepsilon>0\ \ \exists N(\varepsilon):\ \forall n>N(\varepsilon)\ \Rightarrow|\alpha_n|<\varepsilon$ bo‘ladi, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0\Rightarrow\alpha_n$ - cheksiz kichik ketma-ketlik.

2°. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga ega.

Isboti:

$a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ va $b=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ $a\neq b,\ a<r<b$ – $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ikkita limiti bo‘lsin.

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_1:\ \forall n>N_1\ \ |x_n-a|<|r-a|\ \Rightarrow\forall n>N_1,\ \ x_n<r;$

$\forall\varepsilon>0\ \ \exists N_2:\ \forall n>N_2\ \ |x_n-b|<|b-r|\ \Rightarrow\forall n>N_2,\ x_n>r.$

$N=N(\varepsilon)=max\{N_1,N_2\}$ va $n\geq N$ deb olsak, u holda bir vaqtning o‘zida $x_n<r$ va $x_n>r$ tengsizliklar bajarilishi lozim, bu esa mumkin emas, demak, $a=b$.

3°. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangan.

$\boxed{!}$ Teskari tasdiq o‘rinli emas, masalan $\{x_n\}=\left\{sin\dfrac{\pi n}{2}\right\}$ ketma-ketlik chegaralangan, lekin u limitga ega emas.

4°. $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketliklar yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbati ($\forall n\in N\ \ y_n\neq0$ va $\lim\limits_{n\to\infty}y_n\neq0$ shartlar asosida) yaqinlashuvchi ketma-ketlik bo‘lib, ularning limiti mos ravishda bu ketma-ketliklar limitlari yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va nisbatiga teng, ya’ni

$$\lim_{n\to\infty}\{x_n \pm y_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n \pm \lim_{n\to\infty} y_n, \quad \lim_{n\to\infty}\{x_n \cdot y_n\} = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}, \ \forall n \in N \ \ y_n \neq 0, \ \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0$$

Isboti (yig‘indi uchun):

$\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ – yaqinlashuvchi ketma-ketliklar, ya’ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ bo‘lsin. U holda $x_n = a + \alpha_n$, $y_n = b + \beta_n$ bo‘ladi. Bu erda $\{\alpha_n\}$ va $\{\beta_n\}$ – cheksiz kichik ketma-ketliklar va $x_n + y_n = a + b + \alpha_n + \beta_n$, ya’ni $\{x_n + y_n - a - b\}$ ketma-ketlik cheksiz kichik. Shuning uchun $\{x_n + y_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlik va uning limiti $a + b$ ga teng.

$\boxed{n}$ Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustidagi arifmetik amallar ularning limitlari ustida mos arifmetik amallarni bajarishga olib keladi.

5°. Biror bir hadidan boshlab $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlikning hadlari $x_n \le b \ (x_n \ge b)$ tengsizlikni qanoatlantirsa, bu ketma-ketlik limiti $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le a$ ham $a \le b \ (a \ge b)$ tengsizlikni qanoatlantiradi.

$\boxed{n}$ 1. Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklarning biror bir hadidan boshlab ularning hadlari $x_n \le y_n$ shartni qanoatlantirsa, u holda bu ketma-ketliklarning limitlari ham $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \le \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ shartni qanoatlantiradi.

2. Agar $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi ketma-ketlikning barcha hadlari $[a;b]$ kesmada yotsa, uning limiti ham shu kesmada yotadi.

6°. $\{x_n\}$ va $\{z_n\}$ – yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning limitlari $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$ bo‘lsin. Faraz qilaylik, $\{y_n\}$ ketma-ketlikning biror bir hadidan boshlab uning hadlari $x_n \le y_n \le z_n$ tengsizlikni qanoatlantirsin. U holda $\{y_n\}$ ketma-ketlik yaqinlashuvchi va uning limiti $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ ga teng bo‘ladi.

7°. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik va uning har qanday qism ketma-ketligi aynan bir limitga ega bo‘ladi.

2.5. Monoton ketma-ketliklar

Agar ketma-ketlikning har bir keyingi hadi oldingisidan kichik (katta) bo‘lmasa, ya’ni barcha n raqamli hadlar uchun $x_n \le x_{n+1} \left(x_n \ge x_{n+1}\right)$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik **kamaymaydigan (o‘smaydigan) ketma-ketlik deyiladi.**.

$\boxed{t}$ Kamaymaydigan va o‘smaydigan ketma-ketliklar **monoton** ketma-ketliklar deb ataladi.

$\boxed{t}$ Agar qat’iy bo‘lmagan tengsizliklar $x_n \ge x_{n+1}$ va $x_n \le x_{n+1}$ o‘rniga $x_n < x_{n+1}$ yoki $x_n > x_{n+1}$ qat’iy tengsizliklar o‘rinli bo‘lsa, ketma-ketlik mos ravishda o‘suvchi va kamayuvchi deb ataladi.

Misol:

1) $1,1,2,2,...,n,n,...$ - ketma-ketlik kamaymaydigan ketma-ketlik.

2) $\left\{\dfrac{n^2}{n^2+1}\right\}$ – ketma-ketlik o‘suvchi, ya’ni $x_{n+1} > x_n$.

Haqiqatdan ham,

$$\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2+1} - \frac{n^2}{n^2+1} = \frac{(n+1)^2\left(n^2+1\right) - n^2\left((n+1)^2+1\right)}{\left((n+1)^2+1\right)\left(n^2+1\right)} = \frac{2n+1}{\left((n+1)^2+1\right)\left(n^2+1\right)} > 0.$$

3) $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}$ – ketma-ketlik kamayuvchi, chunki $x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n} = -\dfrac{1}{n(n+1)} < 0$.

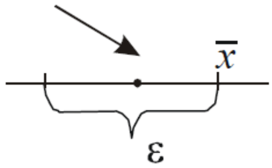
$\boxed{T}$ **Monoton ketma-ketliklarning yaqinlashish alomati**. Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik kamaymaydigan (o‘smaydigan) ketma-ketlik bo‘lib, u yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda bu ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo‘ladi.

Kamaymaydigan ketma-ketlik yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u holda uning yaqinlashuvchi (limitga ega) bo‘lishini isbotlaymiz.

Isboti:

$\{x_n\}$ - yuqoridan chegaralangan, $\Rightarrow \{x_n\}$ $\bar{x} = Sup\{x\} \Rightarrow$ ga ega $\exists \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$

ekanligini ko‘rsatamiz.



1) $\forall n,\ \ x_n \le \bar{x}$;

2) $\forall \varepsilon > 0$ uchun $x_N > \bar{x} - \varepsilon$ had mavjudki, $\forall n > N,\ \ x_N \le x_n$ (shartga ko‘ra $\{x_n\}$ - ketma-ketlik kamaymaydigan bo‘lganligi uchun):

$$\bar{x} - \varepsilon < x_N \le x_n \le \bar{x} \Rightarrow \bar{x} - \varepsilon < x_n \le \bar{x} \Rightarrow -\bar{x} \le -x_n < -\bar{x} + \varepsilon \Rightarrow 0 \le \bar{x} - x_n < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| x_n - \bar{x} \right| < \varepsilon,$$

u holda limit ta’rifiga ko‘ra $\bar{x} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

! 1. Har qanday kamaymaydigan ketma-ketlik doim quyidan birinchi hadi bilan chegaralangan bo‘ladi. Har qanday o‘smaydigan ketma-ketlik yuqoridan birinchi hadi bilan chegaralangan bo‘ladi.

2. Har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik ham monoton bo‘lavermaydi.

Misol:

$x_n = 1 + \dfrac{(-1)^n}{n^2}$ - $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limiti mavjud $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$, biroq u monoton emas.

T Chegaralanmagan monoton ketma - ketlik cheksiz katta bo‘ladi.

2.6. “e” soni monoton ketma-ketlikning limiti sifatida

Umumiy hadi $x_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ ko‘rinishda bo‘lgan $\{x_n\}$ ketma-ketlikni ko‘rib chiqaylik. Monoton ketma-ketliklarning yaqinlashish alomatiga ko‘ra, quyidagilarni isbotlash etarli:

1) $\{x_n\}$ - ketma-ketlikning o‘suvchigini;

2) $\{x_n\}$ - ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini.

1) va 2) lardan $\left\{\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$ limiti mavjudligi haqida xulosa chiqaramiz.

Isboti:

Nyuton binomi formulasidan foydalanib:

$$(a+b)^n = a^n b^0 + na^{n-1}b^1 + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2 +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a^{n-3}b^3 + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{n!}a^0 b^n,$$

bu erda $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n$.

U holda

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1 + n\frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!}\frac{1}{n^2} + ... + \frac{n(n-1)(n-2)...(n-(n-1))}{n!}\frac{1}{n^n} =$$

$$= 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right) + ... + \frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot ...\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right).$$

Xuddi shunday x_{n+1} ni yuqoridagi kabi hisoblaymiz:

$$x_{n+1} = 2 + \frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right) + \frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right) + ...$$

$$... + \frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdot ...\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right),$$

1) $\left(1-\frac{1}{n}\right) < \left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ bo‘lsin. U holda x_{n+1} hadning x_n haddan bitta musbat yig‘iluvchiga ko‘pligidan, $\forall\, n$ uchun $x_n < x_{n+1}$ ga ega bo‘lamiz. Demak, $\{x_n\}$ – ketma-ketlik o‘suvchi

2) $n \geq 2$ bo‘lganda $0 < \left(1-\frac{1}{n}\right) < 1 \Rightarrow x_n > 2$.

3) $x_n < 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$; agar yig‘indidagi har bir hadni kattalashtirsak, ya’ni kattaroq kasr bilan almashtirilsa: $\frac{1}{2!} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{3!} = \frac{1}{2\cdot 3} < \frac{1}{2\cdot 2} = \frac{1}{2^2}$, ..., $\frac{1}{n!} < \frac{1}{2^{n-1}}$, dan $x_n < 2 + \left\{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} ... + \frac{1}{2^{n-1}}\right\}$ ga ega bo‘lamiz.

$\{...\}$ - kamayuvchi geometrik progressiya yig‘indisi formulasiga ko‘ra:

$$b_1=\frac{1}{2},\ q=\frac{1}{2},\ b_n=\frac{1}{2^{n-1}},\ S_n=\frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}\ \Rightarrow\ S_n=1-\frac{1}{2^n};$$

$\forall\, n$ lar uchun $S_n<1\Rightarrow\forall\, n:\ x_n<3.$

Xulosa: O‘suvchi $\{x_n\}$ ketma-ketlik yuqoridan chegaralanganligidan uning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi.

$\boxed{!}$ 1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e,\ \ 2<e<3$ soni (Eyler), Neper soni ham deyiladi;

$e\approx 2{,}718281828459045$

2. e soni matematik analizda muhim ahamiyatga ega:

$y=e^x$ - e asosli ko‘rsatkichli funksiya;

$y=\ln x$ - natural logarifm (e asosga ko‘ra logarifm).

3. Quyidagi tasdiq o‘rinli: Agar $\{\alpha_n\}$ – ixtiyoriy cheksiz kichik ketma-ketlik bo‘lib $\alpha_n\neq 0$ bo‘lsa, u holda $.\lim\limits_{n\to\infty}(1+\alpha_n)^{\frac{1}{\alpha_n}}=e.$

2.7. Limit nuqtalar. Yuqori va quyi limitlar

$\boxed{t}$ Agar cheksiz to‘g‘ri chiziq x nuqtasining ε - atrofida $\{x_n\}$ sonli ketma-ketlikning cheksiz hadlari joylashgan bo‘lsa, u holda bu x nuqta $\{x_n\}$ ketma-ketlikning limit nuqtasi deyiladi.

$\boxed{!}$ Ba’zida limit nuqta quyilish nuqta (bu haqiqiy sonlarni sonlar o‘qida joylashuvi ma’nosidagi geometrik talqini bilan bog‘liq) deb ham ataladi. Ketma-ketlik hadlarini ifodalovchi nuqtalar, limit nuqta yonida «zichlashadi (quyiladi)».

Huddi shunday o‘xshash «geometrik» yondashuv ikkita tasdiqni keltirishga asos bo‘ladi.

1) har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limit nuqtaga ega bo‘ladi;

2) Bir nechta limit nuqtaga ega bo‘lgan ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo‘ladi.

Misol:

1). $\left\{1-\left(-1\right)^n\right\}$ ketma-ketlik ikkita limit $x=0$ va $x=2$ nuqtaga ega, lekin u limitga ega emas.

	2). $\{e^{-n}\}$ ketma-ketlik bitta $x=0$ limit nuqtaga ega va bu bir vaqtda ketma-ketlikning ham limiti bo‘ladi.

T **Bolsano – Veyershtrass qoidasi**. Har qanday chegaralangan ketma-ketlik hech bo‘lmaganda bitta limit nuqtaga ega.

t $\{x_n\}$ ketma-ketlikning eng katta limit nuqtasi ketma-ketlikning yuqori limiti deb ataladi va $\overline{a}=\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n$ kabi belgilaniladi.

t $\{x_n\}$ ketma-ketlikning eng kichik limit nuqtasi ketma-ketlikning quyi limiti deb ataladi va $\underline{a}=\underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$ kabi belgilanadi.

Misol:	1). $1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, ..., 1, \frac{1}{n}$ ketma-ketlikning yuqori limiti $\overline{a}=1$ ga, quyi limiti esa $\underline{a}=0$ ga teng. 2). $1, 2, 3, 1, 2, 4, 1, 2, 5, ..., 1, 2, n, ...$ ketma-ketlik $\underline{a}=1$ ga teng quyi limitga ega, biroq ketma-ketlik chegaralanmaganligi sababli, uning oddiy limiti yo‘q.

Bu tushunchalar(bunda limit qiymatlar xosmas qiymatlardan ham iborat bo‘lishi mumkin, ya’ni $+\infty$ yoki $-\infty$)ning muhimligini ko‘rsatuvchi teoremani isbotsiz keltiramiz.

T Ixtiyoriy sonli ketma-ketlikning yuqori va quyi limiti doim mavjud bo‘ladi va ularning teng bo‘lishi limit mavjud bo‘lishining zarur va yetarli (odatiy ma’noda) shartidir.

Bayon etilgan materiallarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

Sonli ketma-ketlik limiti;

Cheksiz katta va cheksiz kichik ketma-ketliklar va ularning xossalari;

Fundamental sonlar ketma-ketligi;

Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar va ularning xossalari;
Monoton ketma-ketliklar va ularning yaqinlashish alomatlari;
“e” sonining monoton ketma-ketlik limiti sifatida aniqlanishi;
Sonli ketma-ketlikning limit (quyilish) nuqtalari, uning geometrik talqini;
Balsano- Veyershtras teoremasi;
Sonli ketma-ketliklar quyi va yuqori limitlari.

3. FUNKSIYALAR

Bo‘limda matematikaning asosiy tushunchalaridan biri – funksiya tushunchasi kiritilgan bo‘lib, unda funksiyaning berilish usullari va xossalari muhokama qilingan. Funksiyalar klassifikatsiyasi, asosiy elementar funksiyalar va ularning grafiklari keltirilgan.

Bo‘limning mavzulari:

3.1. Funksiya tushunchasi, funksiyaning berilish usullari, funksiyaning grafigi.
3.2. Funksiyaning asosiy xarakteristikalari.
3.3. Teskari funksiya. Murakkab funksiya.
3.4. Asosiy elementar funksiyalar.
3.5. Elementar va elementar bo‘lmagan funksiyalar.

3.1. Funksiya tushunchasi. Funksiyaning berilish usullari. Funksiyaning grafigi

Funksiya – bu ikki to‘plam elementlari orasida moslik o‘rnatishga taaluqli bo‘lgan asosiy matematik tushunchalardan biridir.

$\boxed{t}$ Agar X to‘plamning har bir x elementiga biror qoida f ga ko‘ra Y to‘plamning yagona y elementi mos quyilgan bo‘lsa, u holda X to‘plamda $y = f(x),\ x \in X,\ y \in Y$ funksiya berilgan deyiladi.

X to‘plam funksiyaning aniqlanish sohasi (FAS) deyiladi va $D(f)$ kabi belgilanadi. Y to‘plam funksiyaning qiymatlarining o‘zgaradigan to‘plami - funksiyaning qiymatlar sohasi (FQS) deyiladi va $E(f)$ kabi belgilanadi.

Bundan keyin (asosan) sonli funksiyalarni, ya'ni FAS va FQS i sonli to'plamlardan iborat bo'lgan funksiyalarni qaraymiz, ya'ni $X \subset R, Y \subset R$. Ushbu holda "x" o'zgaruvchi miqdor erkli o'zgaruvchi yoki argument, "y" miqdor esa bog'liq (erksiz) o'zgaruvchi ("x" dan) yoki funksiya deyiladi. Berilgan x qiymatiga mos y son funksiyaning x nuqtadagi xususiy qiymati deb ataladi.

$\boxed{t}$ Oxy tekislikning $\left(x, f\left(x\right)\right)$ nuqtalar to'plami $y = f\left(x\right)$ funksiyaning grafigi deyiladi.

Funksiya uch xil ko'rinishda: 1) analitik; 2) grafik; 3) jadval yordamida berilishi mumkin.

Funksiya analitik berilishda quyidagicha aniqlangan bo'lishi mumkin:

1) oshkor ko'rinishida - $y = f\left(x\right)$ tenglama yoki $y = \begin{cases} f_1\left(x\right), \ x \in D_1 \subset D\left(f\right) \\ f_2\left(x\right), \ x \in D_2 \subset D\left(f\right) \end{cases}$;

2) oshkormas ko'rinishida - quyidagi $F\left(x, y\right) = 0;$ tenglama;

3) parametrik –yordamchi o'zgaruvchisi-parametr yordamida $\begin{cases} x = x\left(t\right), \\ y = y\left(t\right) \end{cases}$ $t \in T \subset R.$

Misol:

Funksiyaning oshkor berilish:

1). $y = \sqrt{1 - x^2}$, $\{x\} = \{x : |x| \le 1\}, \{y\} = \{y : 0 \le y \le 1\};$.

2). $y = |x| = \begin{cases} x, \ x \ge 0, \\ -x, \ x < 0, \end{cases}$.

$\{x\} = \{x\colon \ -\infty \le x \le \infty\}, \{y\} = \{y\colon \ 0 \le y \le \infty\}$

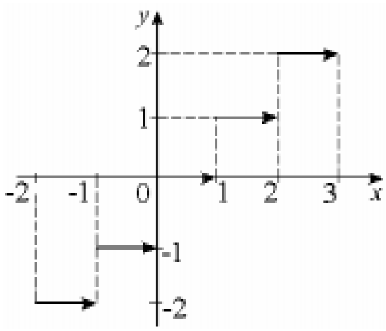
3). $y = \operatorname{sgn} x$ - x ning ishorasi, $y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, \ x > 0, \\ 0, \ x = 0, \\ -1, \ x < 0, \end{cases}$.

$\{x\} = \{x\colon \ -\infty \le x \le \infty\}, \{y\} = \{-1, 0, 1\}$

4). Dirixle funksiyasi $y=\begin{cases}0, & x-irratsional,\\ 1, & x-ratsional,\end{cases}$

$$\{x\}=\{x:\ -\infty\le x\le\infty\},\ \{y\}=\{0,1\}.$$

5). $y=[x]$ - x ning butun qismi (x dan oshmaydigan eng katta butun son)

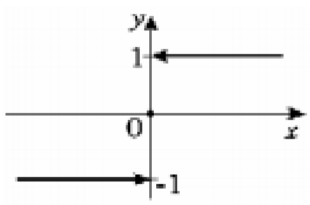


$$D(f)=\{x\}=\{x:\ -\infty\le x\le\infty\},$$
$$E(f)=\{y\}=\{y:\ butun\ sonlar\};$$

ushbu funksiya quyidagi ko‘rinishda berilishi ham mumkin:

$$[x]=\begin{cases}\dots\\ 1, & x\in[1,2),\\ 0, & x\in[0,1),\\ -1, & x\in[-1,0),\\ \dots\end{cases}.$$

Funksiya oshkormas $F(x,y)=0$ ko‘rinishda berilganda bir nechta $y=f(x)$ ko‘rinishdagi funksiyalarni aniqlashi mumkin. Masalan, $x^2+y^2-1=0$ tenglama ikkita



$y=f_1(x)=+\sqrt{1-x^2}$ va $y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}$.

funksiyalarni aniqlaydi:

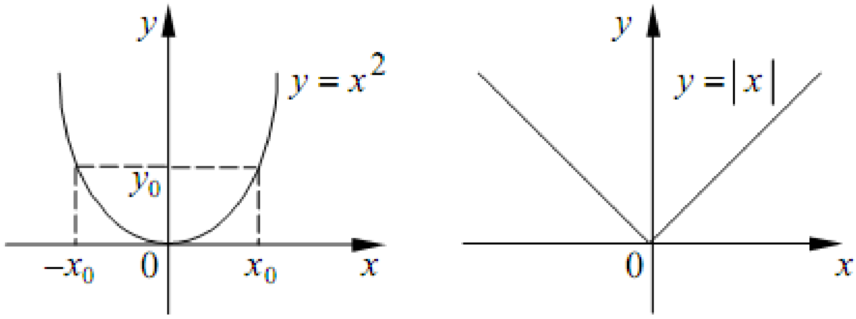
Funksiyaning analitik usulida berilishi aniq hisoblanib, funksiyani keyinchalik matematik analiz usullari yordamida tadqiq qilish uchun qulay hisoblanadi. Grafik va jadval ko‘rinishda tasvirlash kuzatilayotgan funksional bog‘lanishlarni tajribaviy tadqiq qilishda yuzaga keladi, biroq ushbu holatda ham odatda, tajribaviy ma’lumotlarni yetarli darajadagi aniqlikda ko‘rsatuvchi (approksimatsiya deb ataluvchi) mos analitik formula tanlanadi.

3.2. Funksiyaning asosiy xarakteristikalari

$\boxed{t}$ Agar $f(x)$ funksiya o‘zining X aniqlanish sohasida nolga nisbatan simmetrik bo‘lib, ixtiyoriy $x\in X$ uchun $f(-x)=f(x)$ tenglik o‘rinli bo‘lsa

juft funksiya deyiladi.

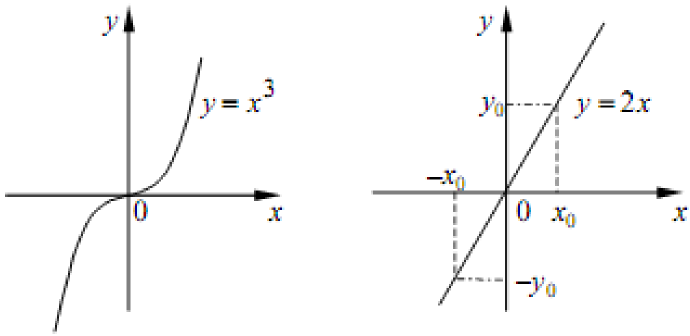
Juft funksiya ta’rifiga ko‘ra, uning grafigi ordinata o‘qiga nisbatan simmetrik bo‘ladi. Masalan, $y=x^{2}$, $y=|x|$ funksiyalar juft va ularning grafiklari quyidagi ko‘rinishga ega(38-rasm):



a) *38-rasm* *b)*

$\boxed{t}$ Agar $f(x)$ funksiya X aniqlanish sohasining ixtiyoriy $x \in X$ uchun $f(-x)=-f(x)$ tenglik bajarilsa funksiya **toq** funksiya deyiladi.

Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi. Masalan, $y=x^{3}$, $y=2x$ funksiyalar toq bo‘lib, ularning grafiklari quyidagi ko‘rinishga ega:



a) *39-rasm* *b)*

Quyidagi $y=x^2+x$ funksiya toq ham emas, juft ham emas, chunki

$$f(-x)=(-x)^{2}+(-x)=x^2-x \neq \pm y .$$

$\boxed{t}$ Agar shunday $T \neq 0$ son mavjud bo‘lib, har qanday $x \in X$ uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

1) $x+T \in X$; 2) $f(x+T)=f(x)$,

u holda $y = f\left(x\right)$ funksiya **davriy** deyiladi va T soni $y = f\left(x\right)$ funksiyaning **davri** deyiladi.

Funksiyaning qiymatlar sohasi chegaralangan, yuqori(quyi)dan chegaralangan yoki chegaralanmagan bo‘lishi mumkin. Bularga mos ravishda funksiyalar ham chegaralangan, yuqori(quyi)dan chegaralangan yoki chegaralanmagan bo‘ladi.

$\boxed{t}$ Agar $\exists\, A\colon \forall x \in M \quad \left|f\left(x\right)\right| \le A$ shart o‘rinli bo‘lsa, f funksiya $M \subset D\left(f\right)$ to‘plamda chegaralangan deyiladi.

Masalan, $y = \sin x$ funksiya butun son o‘qida chegaralangan; $y = x^3$ funksiya chekli uzunlikdagi ixtiyoriy oraliqda chegaralangan, lekin butun aniqlanish sohasi $x \in R$ da chegaralanmagan.

$\boxed{t}$ Agar $\exists\, A\colon \forall x \in M \quad f\left(x\right) \le A \ \left(\exists\, A\colon \forall x \in M \quad f\left(x\right) \ge A\right)$ shart o‘rinli bo‘lsa, f funksiya $M \subset D\left(f\right)$ to‘plamda yuqoridan (quyidan) chegaralangan deyiladi.

Masalan, $y = x^2$ funksiya butun aniqlanish sohasi $x \in R$ da quyidan chegaralangan.

$\boxed{t}$ M to‘plamning yuqori (quyi) chegarasi f funksiyaning E qiymatlar sohasidagi **aniq yuqori(quyi)** cherarasi deyiladi va $\sup\limits_{x \in E} f\left(x\right),\ \left(\inf\limits_{x \in E} f\left(x\right)\right)$ kabi belgiladi.

Masalan, $\sup\limits_{x \in \left(-\infty; 0\right)} \dfrac{1}{x} = 0,\ \inf\limits_{x \in R} x^2 = 0$.

$\boxed{t}$ Agar $\sup\limits_{x \in E} f\left(x\right) \left(\inf\limits_{x \in E} f\left(x\right)\right)$ son E sohadagi f funksiyaning qiymatlar sohasi M to‘plamga tegishli bo‘lsa, u holda bu son f funksiyaning E dagi eng katta (eng kichik) qiymati deyiladi va $\max\limits_{x \in E} f\left(x\right) \left(\min\limits_{x \in E} f\left(x\right)\right)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $\min\limits_{x \in R} x^2 = 0$ ga teng va $\max\limits_{x \in (-\infty\,;\,0)} \dfrac{1}{x}$ mavjud emas.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya $D(f)$ to‘plamda aniqlangan va $E \subset D(f)$ bo‘lsin.

$\boxed{t}$ Agar $\forall\, x_1, x_2 \in E$ uchun:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ – bo‘lsa, $f(x)$ E da o‘suvchi;

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$ – bo‘lsa, $f(x)$ E da kamaymaydigan;

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ – bo‘lsa, $f(x)$ E da kamayuvchi;

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$ – bo‘lsa, $f(x)$ E da o‘smaydigan;

Yuqoridagi keltirilgan to‘rtta turdagi funksiya E da monoton deyiladi, o‘suvchi va kamayuvchilari esa E da qat’iy monoton deyiladi.

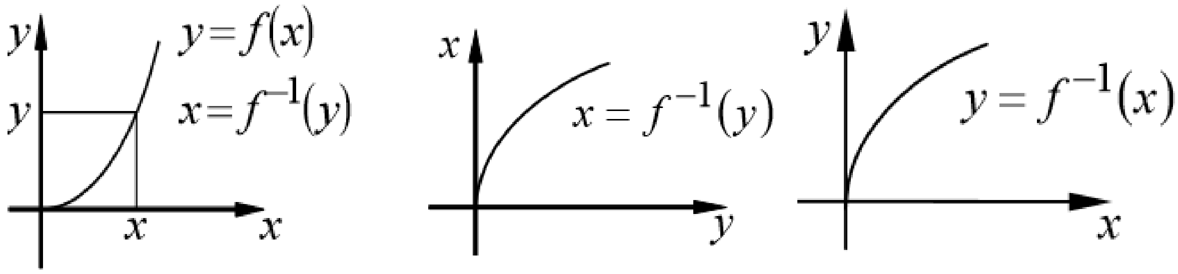
3.3. Teskari funksiya. Murakkab funksiya

$\boxed{t}$ Agar $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ funksiya o‘zning har bir qiymatini bir marotaba qabul qilsa, ya’ni har bir $y \in Y$ uchun yagona $x \in X$ mavjud bo‘lsa, ya’ni $y = f(x)$ bo‘lsa, u holda $y = f(x)$, $x \in X$, $y \in Y$ funksiya teskarilanuvchi deyiladi (40 a)-rasm).

$\boxed{t}$ Funksiya teskarilanuvchi bo‘lsa, u holda X to‘plamni Y to‘plamga akslantiruvchi $y = f(x)$ funksiyaga Y to‘plamni X to‘plamga akslantiruvchi $x = g(y)$ funksiya mos qo‘yilishi mumkin, bunda $x = g\big(f(x)\big)$. Bu funksiya $f(x)$ funksiyaga teskari funksiya deyiladi va $f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi (40 b) rasm).

Boshqa tomondan, $x = f^{-1}(y)$ funksiya uchun $y = f(x)$ funksiya teskari hisoblaniladi, shuning uchun $y = f(x)$ va $x = f^{-1}(y)$ funksiyalar **o‘zaro teskari funksiyalar** deyiladi (40 c)-rasm).

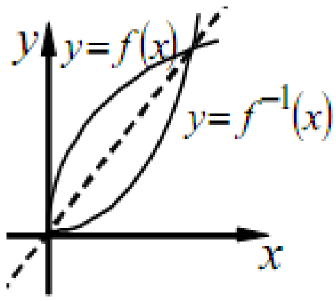
$y = f(x)$ va $x = f^{-1}(y)$ funksiyalar grafiklari mos tushadi, ammo agar $f^{-1}(y)$



a) *b)* *40-rasm* *c)*

funksiyani odatiy ko‘rinishda ifodalamoqchi bo‘lsak, ya’ni argumentni x bog‘liq o‘zgaruvchini y orqali belgilasak, u holda uning grafik tasviri o‘zgaradi, ya’ni $y = f^{-1}(x)$ ning grafik tasviri $y = f^{-1}(x)$ funksiyaning grafigidan o‘zgaradi.

Birinchi navbatda o‘qlarning yo‘nalishlarini almashtiramiz; so‘ng o‘qlarning nomlarini almashtiramiz; natijada o‘zaro teskari funksiyalarni grafiklari birinchi va uchinchi choraklari bissektrisasiga nisbatan, ya’ni $y = x$ ga nisbatan simmetrikligini ko‘rishimiz mumkin.



41-rasm

$y = f^{-1}(x)$ funksiyaning qiymatlar sohasi $y = f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasiga va teskari $y = f^{-1}(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasi $y = f(x)$ funksiyaning qiymatlar sohasiga mos keladi.

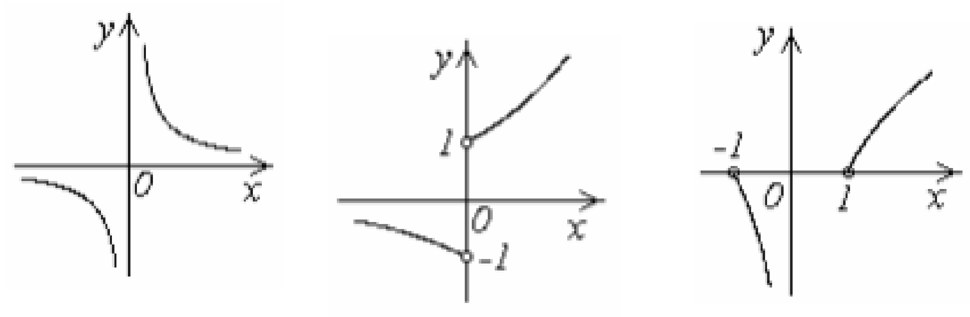
Misol:

1) $y = \dfrac{1}{x} = f(x),\ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty);$ funksiyaga teskari funksiya

$g(x) = f^{-1}(x) = \dfrac{1}{x}$ (teskari funksiya dastlabkisi bilan mos tushadi) (42 a)-rasm).

2) $y = f(x) = \begin{cases} e^x, \ x > 0, \ x \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \\ -e^x, \ x < 0, \ y \in (-1, 0) \cup (1, \infty); \end{cases}$ (42 b)-rasm)

$y = f^{-1}(x) = \begin{cases} \ln x, \ x > 1, \ x \in (-1, 0) \cup (1, \infty), \\ \ln(-x), \ x \in (-1, 0), \ y \in (-\infty, 0) \cup (0, \infty). \end{cases}$ (42 c)-rasm)



a) *b)* *c)* *42-rasm*

$\boxed{t}$ Agar f va g — bitta o‘zgaruvchining funksiyalari bo‘lsa, u holda $D(h) = \{x \in D(f): \ f(x) \in D(g)\}$ sohada $h(x) = g[f(x)]$ munosabat orqali berilgan h funksiya — f va g larning murakkab funksiyasi yoki superpozitsiyasi (kompozitsiyasi) deyiladi va $g \circ f$ kabi belgilaniladi.

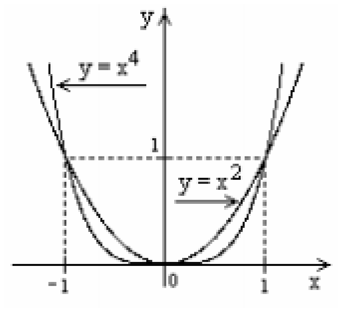
Amal o‘ngdan chapga bajariladi, ya’ni dastlab x nuqtada f ning qiymati hisoblanadi, hosil bo‘lgan son funksiya uchun argument vazifasini bajaradi va bu qiymatda g ning qiymati hisoblanadi.

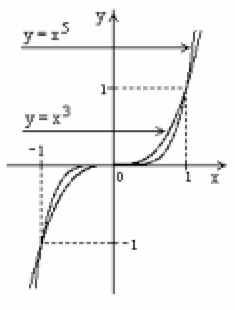
Superpozitsiya amali qayta qo‘llanilishi ham mumkin, masalan, $F(x) = lg\left|\sin\left(tg\left(x^2\right)\right)\right|$ funksiyada beshta superpozitsiya amali qo‘llanilgan: kvadrat ko‘tarish, tangens, sinus, modul va logarifmni hisoblash.

3.4. Asosiy elementar funksiyalar va ularning grafiklari

1. Darajali funksiyalar

1.1. $y = x^n$, $n \in N$.

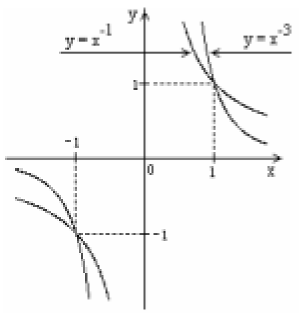


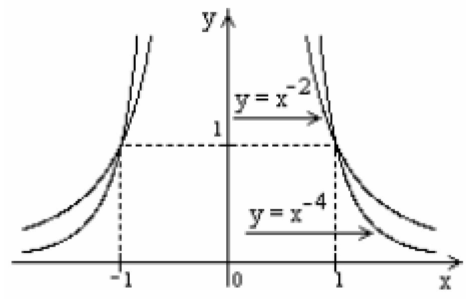


n-juft

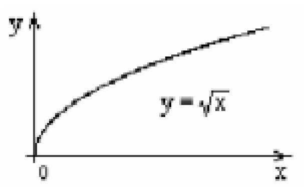
n-toq

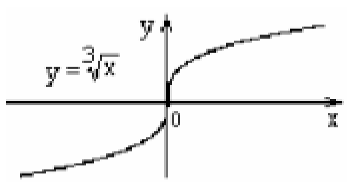
1.2. $y = \dfrac{1}{x^n}$, $x \neq 0$.



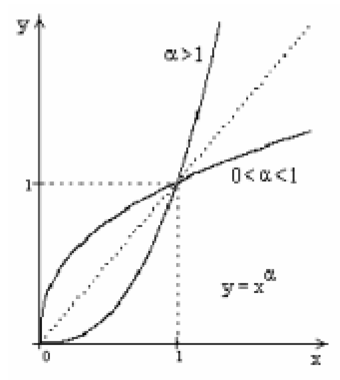


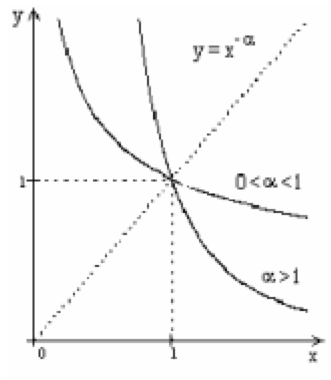
1.3. $y = \sqrt[n]{x}$.





1.4. $y = x^{\alpha}$, $\alpha \in R$, $x \geq 0$.



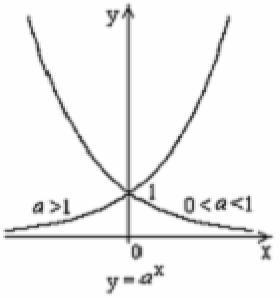


2. Transsendent funksiyalar

2.1. Ko‘rsatkichli funksiya

$y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$,

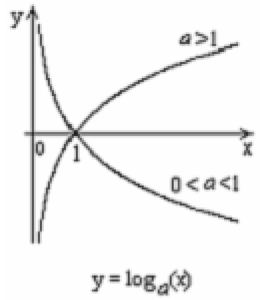
$x \in (-\infty, +\infty)$, $y \in (0, +\infty)$.



2.2. Logarifmik funksiya

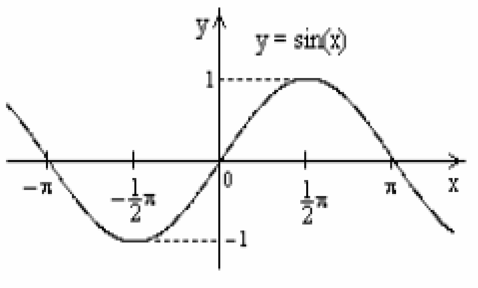
$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$,

$x \in (0, \infty)$, $y \in (-\infty, +\infty)$

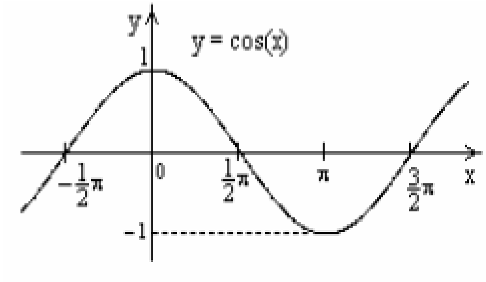


3. Trigonometrik funksiyalar

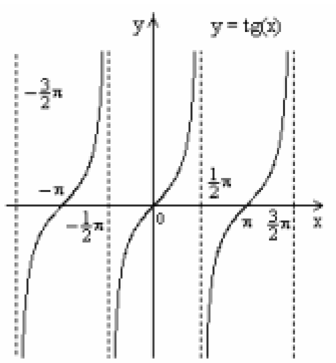
3.1. $y = \sin x$



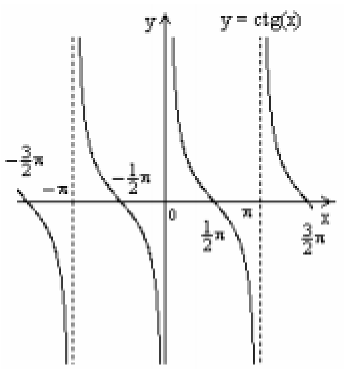
3.2. $y = \cos x$



3.1. $y = tg\, x$, $x \neq \dfrac{\pi}{2} + n\pi$



3.2. $y = ctg\, x$, $x \neq n\pi$



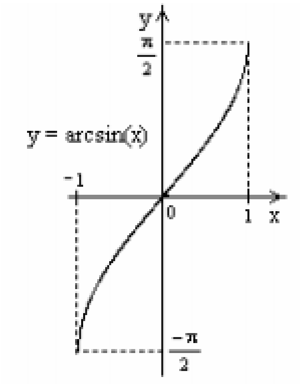
4. Teskari trigonometrik funksiyalar

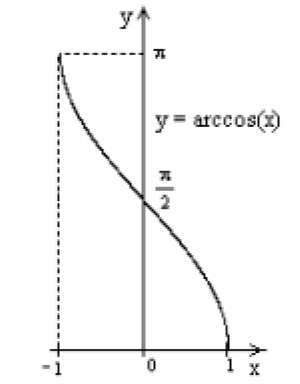
4.1. $y = \arcsin x$, $|x| \leq 1$, $y \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

4.2. $y = \arccos x$, $|x| \leq 1$, $y \in [0, \pi]$

$\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

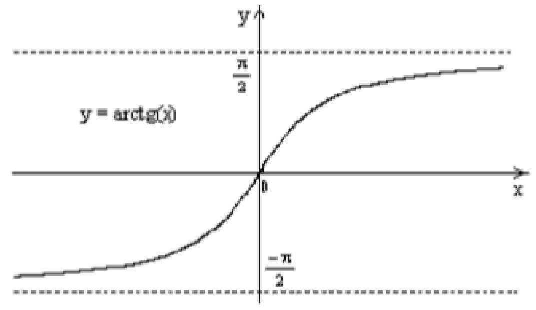
$$\arcsin(-x) = -\arcsin x$$





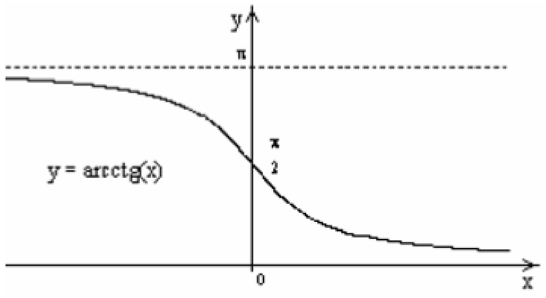
4.3. $y = \mathrm{arc}\,tg\, x$,

$$\mathrm{arc}\,tg(-x) = -\mathrm{arc}\,tgx$$



4.4. $y = \mathrm{arc}\,ctg\, x$,

$$\mathrm{arc}\,ctg(-x) = \pi - \mathrm{arc}\,ctgx$$

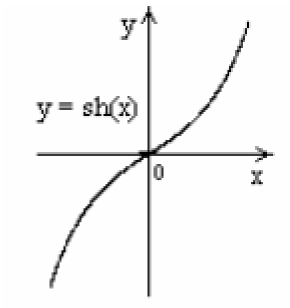


$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}, \quad arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}, \quad arctgx = \frac{\pi}{2} - arctg\frac{1}{x}$$

5. Giperbolik funksiyalar

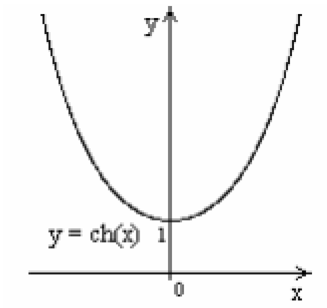
5.1. Giperbolik sinus

$$y = shx = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$



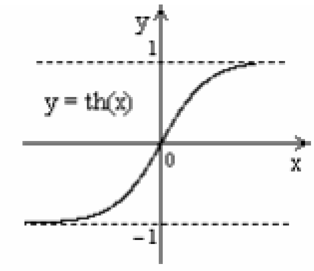
5.2. Giperbolik kosinus

$$y = chx = \frac{e^x + e^{-x}}{2},$$



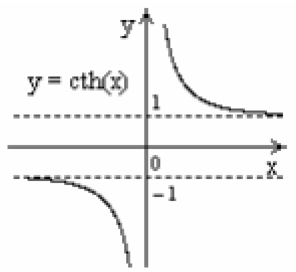
5.3. Giperbolik tangens

$$y = thx = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{sh\,x}{ch\,x}.$$



5.4. Giperbolik kotangens

$$y = thx = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} = \frac{ch\,x}{sh\,x}.$$



$$ch^2 x - sh^2 x = 1, \; th\,x \cdot cth\,x = 1,$$

$$sh(x+y) = shx\,ch\,y + shxchx, \quad ch(x+y) = chx\,ch\,y + shxshx$$

3.5. Elementar va elementar bo‘lmagan funksiyalar

$\boxed{t}$ Asosiy elementar funksiyalar va o‘zgarmaslarni chekli sondagi arifmetik amallarni (qo‘shish, ayirish, ko‘paytirish va bo‘lish) birlashtirishdan hamda superpozitsiya amali orqali hosil qilingan funksiya **elementar** funksiya deb ataladi (maktab kursidagi asosiy elementar funksiyalar ro‘yxati turli ilovalarda ko‘p uchraydigan va trigonometrik funksiyalar bilan yaqindan bog‘liq bo‘lgan giperbolik funksiyalar bilan to‘ldirilgan).

Yuqorida ko‘rib chiqilgan $y = \mathrm{sgn}\, x$, $y = |x|$, $y = [x]$, funksiyalar, Dirixle funksiyalari **elementar** bo‘lmagan funksiyalar hisoblanadi.

Bayon etilgan materiallarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

Funksiya tushunchasi. Funksiya berilish usullari;

Funksiyalarning asosiy xarakteristikalari (juft yoki toqligini, davriy yoki davriy emasligi;

Funksiya grafiklari;

Teskari va murakkab funksiyalar;

Asosiy elementar funksiyalarini va ularning grafiklari;

Elementar bo‘lmagan funksiyalar.

4. FUNKSIYANING LIMITI

Bo‘limda matematik taxlil kursining tayanch bo‘lgan tushunchasi, ya’ni funksiyaning limiti ko‘rib chiqilgan bo‘lib unung turli xil ta’riflari keltirilgan (Koshi, Geyne bo‘yicha ta’rifi, nuqtada va cheksizlikda limit, bir tomonlama limitlar va h.k.). Shu bilan birga qulay matematik vosita hisoblangan cheksiz kichik va cheksiz katta funksiya (miqdor)lar tavsiflari berilib, ulardan turli isbotlarda keng foydalanilgan.

Bo‘limning mavzulari:

4.1. Funksiyaning nuqtadagi limiti.

4.2. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.

4.3. Bir tomonlama limitlar.

4.4. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar hamda ularning xossalari.

4.5. Funksiya limitining ta’riflari jadvali.

4.1. Funksiyaning nuqtadagi limiti

$\boxed{t}$ 4.1.1. Agar $\{x_n\}$ ixtiyoriy ketma-ketlik uchun $x_n \in D(f),\ x_n \neq a,\ \lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘lib, $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$ tenglik bajarilsa, u holda A soni $y = f(x)$ funksiyaning a nuqtadigi limiti deb ataladi va u $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ kabi belgilanadi.

4.1.1. - ta’rif «ketma-ketlik tili» (boshqacha qilib aytganda Geyne bo‘yicha limit ta’rifi)da shaklllantirilgan.

Misol:

1) $y = x;\ \forall x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a\ \ y(x_n) = a \Rightarrow \lim\limits_{x\to a} x = a.$.

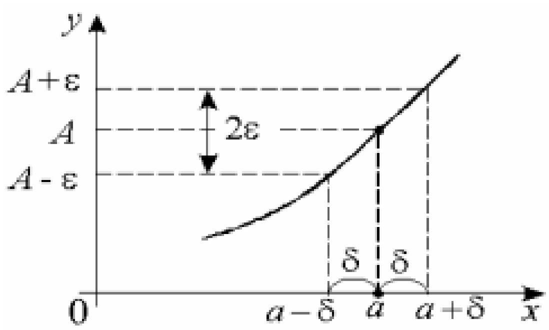
2) $y = \begin{cases} 0, & x - irratsional, \\ 1, & x - ratsional, \end{cases}$ $-$ Dirixle funksiyasi, $x \to a,\ y \to ?$

ratsional $-$ $\{x_n\} \to a \ \Rightarrow\ \{y\{x_n\}\} \to 1,$

irratsional $-$ $\{x_n\} \to a \ \Rightarrow\ \{y\{x_n\}\} \to 0.$

Dirixle funksiyasi agar a - ixtiyoriy son bo‘lsa, $x \to a$ da limitga ega emas.

$\boxed{t}$ 4.1.2. Agar $\forall \varepsilon > 0$ yetarlicha kichik musbat son uchun shunday $\exists \delta(\varepsilon) > 0$ (ε ga bog‘liq) son topilsaki, x ning quyidagi $|x-a| < \delta(\varepsilon)$ shart o‘rinli bo‘ladigan barcha qiymatlari uchun $f(x)$ funksiya $|f(x) - A| < \varepsilon$ shartni qanoatlantirsa, u holda A soni $f(x)$ funksiyaning $x \to a$ intilgandagi limiti deyiladi va u quyidagicha yoziladi: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$. Bu ta’rifni qisqa ko‘rinishda quyidagicha yozish mumkin:



43-rasm.

$$(\forall \varepsilon > 0\ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x : |x-a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon) \Rightarrow \left(\lim_{x \to a} f(x) = A \right)$$

Shunday qilib, A nuqtaning ixtiyoriy ε atrofida a nuqtaning δ atrofini topish mumkinki, bunda a nuqtaning δ atrofidagi x uchun funksiyaning barcha qiymatlari A nuqtaning ε atrofida yotadi (43-rasm).

Tasdiq ma’nosi “*x* nuqta qanchalik *a* nuqtaga yaqin joylashgan bo‘lsa, $f(x)$ shunchalik *A* ga yaqin bo‘ladi”dan iborat.

4.1.2. ta’rif «epsilon-delta tili» (boshqacha qilib aytganda Koshi bo‘yicha limit ta’rifi) da shakllantirilgan.

4.2. Funksiyaning cheksizlikdagi limiti

Agar FAS yuqori(quyi)dan chegaralanmagan bo‘lsa, u holda $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ da funksiyaning harakati qanday bo‘lishi haqida masalani ko‘rish mumkin.

$\boxed{t}$ 4.2.1. Agar $\{x_n\}$ ixtiyoriy ketma-ketlik uchun $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \left(x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \right)$da quyidagi shart o‘rinli bo‘lsa, $f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \left(f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \right)$, u holda A soni $f(x)$ funksiya uchun $x \to \infty$ dagi limiti deyiladi va $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \right)$ kabi yoziladi.

Bu ta’rifni qisqa ko‘rinishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\forall \{x_n\}:\ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

$$\left(\forall \{x_n\}:\ x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\infty \Rightarrow f(x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} A \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = A \right).$$

4.2.1 ta’rif “ketma-ketlik tili” da shakllantirilgan.

$\boxed{t}$ 4.2.2. Agar $\forall\, \varepsilon > 0$ son uchun shunday $\exists\, M(\varepsilon)$ (ε ga bog‘liq) son topilsaki, x ning $x > M(\varepsilon)$ $\left(x < M(\varepsilon)\right)$tengsizlik o‘rinli bo‘ladigan barcha qiymatlari uchun $f(x)$ funksiya $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ shartni qanoatlantirsa, u holda A son $f(x)$ **funksiyaning** $x \to +\infty\, (x \to -\infty)$ dagi limiti deb ataladi va $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A \right)$ kabi yoziladi.

4.2.2 ta’rif «epsilon-delta tili» da shakllantirilgan bo‘lib, qisqa ko‘rinishda quyidagicha yoziladi:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, M(\varepsilon) > 0 : \forall\, x :\ x > M(\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = A$$

$$\left(\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, M(\varepsilon):\ \ \forall\, x :\ x < M(\varepsilon) > 0 \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = A \right)$$

$\boxed{\mathbf{T}}$ 4.1.1 ta’rif ⇔ 4.1.2 ta’rifga, 4.2.1 ta’rif ⇔ 4.2.2 ta’rifga, ya’ni Geyne va Koshi ta’riflari ekvivalent.

Bu ikki turli ko‘rinishdagi ta’riflardan funksiya limitining mavjudlik va mavjud bo‘lmaslik teoremalarining isbotida qanday foydalanishni ko‘rsatamiz. Funksiya limiti mavjudligini isbotlashda Koshi, limitning mavjud bo‘lmasligini isbotlashda esa Geyne ta’rifi sodda va qulay hisoblanadi.

Misol:

1) $y = 2x+3,\ x \to 1$ ekanligi ma’lum bo‘lsa, $\lim\limits_{x\to 1}(2x+3)=5$ ekanligini isbotlang.

Isboti:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad |2x+3-5| < \varepsilon,\ |2(x-1)| < \varepsilon \Rightarrow |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Shunday qilib, limitli o‘tishda x ning qiymatlar sohasi $a=1$ nuqtaga yaqin joylashadi, bunda $|x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$ ekanligidan $\delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{2}$ deb olish mumkin. Boshqacha aytganda, $x \to a$ intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti mavjudligini isbotlashda ixtiyoriy ε uchun $\delta(\varepsilon)$ ni topish formulasini qurish talab etiladi.

2) $y = \dfrac{x+1}{x}$ funksiyaning $x \to \infty$ dagi limiti 1 ga teng ekanligi, ya’ni $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+1}{x} = 1$ ekanligini isbotlang.

Isboti:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \exists M(\varepsilon) > 0,\ \left|\frac{x+1}{x} - 1\right| < \varepsilon,\ \left|\frac{1}{x}\right| < \varepsilon \Rightarrow |x| > \frac{1}{\varepsilon},\ \text{demak,}\ M(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}.$$

3) $y = \sin\dfrac{1}{x}$ funksiyani $x \to 0$ da limiti mavjud emasligini isbotlang.

Isboti:

Ikkita ketma-ketlikni ko‘rib chiqamiz:

$$x_n = \frac{1}{\pi n},\ \lim_{n\to\infty} x_n = 0,\ f(x_n) = \sin(n\pi) = 0,\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = 0,\ n \in N;;$$

$$x_n' = \frac{2}{\pi + 4\pi n}, \quad \lim_{n\to\infty} x_n' = 0, \quad f\left(x_n'\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1, \quad \lim_{n\to\infty} f\left(x_n'\right) = 1..$$

Turli x_n va x_n' ketma-ketliklarning argument qiymati nolga intilganda mos ketma-ketliklar funksiyalari turli limitlarga ega bo‘lganligi sababli $\lim_{x\to 0} \sin\frac{1}{x}$ mavjud emas.

4.3. Bir tomonlama limitlar

$\boxed{t}$ 4.3.1. Agar har qanday musbat ε son uchun shunday $\delta(\varepsilon)$ son topilsaki, x o‘zgaruvchining $0 < x - a < \delta(\varepsilon)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ shart o‘rinli bo‘lsa, u holda A soni $f(x)$ funksiyaning $x \to a + 0$ dagi o‘ng limiti deyiladi, ya’ni qisqacha

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0: \;\; \forall\, x: \;\; 0 < x - a < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ yoziladi.

Ekvivalent ta’rif: Agar $\forall \{x_n\} \to a \;\; (x_n > a) \Rightarrow \{f(x_n)\} \to A$ bo‘lsa, A soni $y = f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o‘ng limiti deb ataladi va o‘ng limit $\lim_{x\to a+0} f(x) = A$ kabi belgilanadi.

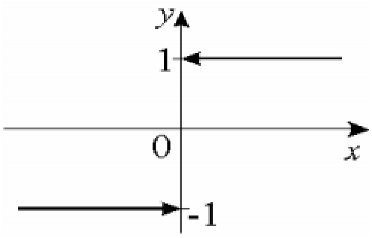
$\boxed{t}$ 4.3.2. Agar har qanday musbat ε son uchun shunday $\delta(\varepsilon)$ son topilsaki, x o‘zgaruvchining $0 < a - x < \delta(\varepsilon)$ shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $\left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ shart o‘rinli bo‘lsa, u holda A soni $f(x)$ funksiyaning $x \to a - 0$ dagi chap limiti deyiladi, ya’ni qisqacha

$\forall\, \varepsilon > 0 \;\; \exists\, \delta(\varepsilon) > 0: \;\; \forall\, x: \;\; 0 < a - x < \delta(\varepsilon) \Rightarrow \left| f(x) - A \right| < \varepsilon$ yoziladi.

Ekvivalent ta’rif: Agar $\forall \{x_n\} \to a \;\; (x_n < a) \Rightarrow \{f(x_n)\} \to A$ bo‘lsa, A soni $y = f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi chap limiti deb ataladi va chap limit $\lim_{x\to a-0} f(x) = A$ kabi belgilanadi.

Misol:

$$y = Sgn\ x,\ \lim_{x\to+0} Sgn\ x = 1,\ \lim_{x\to-0} Sgn\ x = -1.$$



$\boxed{\mathbf{T}}$ Agar $y = f(x)$ funksiyaning a nuqtadagi o‘ng va chap limitlari mavjud va teng, ya’ni $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ bo‘lsa, $y = f(x)$ funksiya a nuqtada limitga ega bo‘ladi.

Isboti:

4.3.1 ta’rifdan $\forall\ \varepsilon > 0$ uchun shunday $\exists\ \delta_1(\varepsilon) > 0$ topiladiki, $\forall\ x$ o‘zgaruvchining $0 < x - a < \delta_1(\varepsilon)$ dagi qiymatlari uchun $|\ f(x) - A| < \varepsilon$ shart o‘rinli bo‘lsin, ya’ni

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta_1(\varepsilon) > 0:\ \forall\ x:\ 0 < x - a < \delta_1(\varepsilon) \Rightarrow |\ f(x) - A| < \varepsilon\ .$$

4.3.2 ta’rifdan esa $\Rightarrow$ o‘sha ε uchun shunday $\exists\ \delta_2(\varepsilon) > 0$ topiladiki, $\forall\ x$ o‘zgaruvchining $0 < a - x < \delta_2(\varepsilon)$ dagi qiymatlari uchun $|\ f(x) - A| < \varepsilon$ shart o‘rinli bo‘lsin, ya’ni

$$\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta_2(\varepsilon) > 0:\ \forall\ x:\ 0 < a - x < \delta_2(\varepsilon) \Rightarrow |\ f(x) - A| < \varepsilon\ .$$

Bunda $\delta(\varepsilon)$ ni quyidagicha tanlaymiz, ya’ni $\delta(\varepsilon) = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, u holda $\forall\ \varepsilon > 0\ \ \exists\ \delta(\varepsilon) > 0\ \ \forall\ x:\ 0 < |x - a| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ dan $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ deyish mumkin.

4.4. Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar va ularning xossalari

$\boxed{t}$ Agar $y = \alpha(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x\to a} \alpha(x) = 0$ o‘rinli bo‘lsa, $\alpha(x)$ funksiya a nuqtada cheksiz kichik funksiya (miqdor) deyiladi.

! Cheksiz kichik funksiya(miqdor)lar $x\to+\infty\ (x\to-\infty)$ da ham shunga o‘xshash aniqlanadi.

Cheksiz kichik funksiyalar xossalari:

1^0. Agar $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\left(\alpha(x)+\beta(x)\right)=0$

Isboti:

Berilgan shartdan ixtiyoriy $x_n\to a$ ketma-ketlik uchun $\alpha(x_n)\to0$ va $\beta(x_n)\to0$ bo‘ladi. Bundan $\alpha(x_n)+\beta(x_n)\to0$ ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy musbat ε ni fiksirlaymiz:

$$\forall\ N_1(\varepsilon):\ n>N_1(\varepsilon)\Rightarrow\left|\alpha(x_n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{va}\quad \forall\ N_2(\varepsilon):\ n>N_2(\varepsilon)\Rightarrow\left|\beta(x_n)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Bunda $N(\varepsilon)$ ni quyidagicha tanlaymiz: $N(\varepsilon)=\max\{N_1(\varepsilon),N_2(\varepsilon)\}$, u holda $n>N(\varepsilon)\Rightarrow\left|\alpha(x_n)+\beta(x_n)\right|\le\left|\alpha(x_n)\right|+\left|\beta(x_n)\right|<\varepsilon$ ga ega bo‘lamiz.

! Xossani quyidagicha kengaytirish mumkin: chekli sondagi cheksiz kichik funksiyalar yig‘indisi cheksiz kichik funksiyadir.

2^0. Cheksiz kichik funksiyaning chegaralangan funksiyaga ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiyadir.

Masalan, $\lim\limits_{x\to0}x^2\cdot\sin\frac{1}{x}=0$ ga teng, chunki bunda x^2 funksiya $x=0$ nuqtada cheksiz kichik funksiya; $\sin\frac{1}{x}$ - esa chegaralangan funksiya.

3^0. Cheksiz kichik funksiyalar ko‘paytmasi cheksiz kichik funksiyadir.

4^0. Agar $\lim\limits_{x\to a}f(x)=A\ne0$ va $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{f(x)}=0$.

t Agar $\forall\ M>0\ \ \exists\,\delta(M)>0\ \ \forall\ x:\ 0<|x-a|<\delta(\varepsilon)\Rightarrow|f(x)|>M$ o‘rinli bo‘lsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada cheksiz katta funksiya (miqdor) deyiladi va

$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ kabi belgilanadi.

Agar $x\to a$ da funksiya absolyut qiymati bo‘yicha nafaqat o‘suvchi bo‘lsa, balki ma’lum ishorani saqlasa, u holda u quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{x\to a} f(x)=+\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\,\delta(M)>0\ \forall\, x:0<|x-a|<\delta(M)\Rightarrow f(x)>M;$$

$$\lim_{x\to a} f(x)=-\infty \Leftrightarrow \forall M>0\ \exists\,\delta(M)>0\ \forall\, x:0<|x-a|<\delta(M)\Rightarrow f(x)<M..$$

! 1). Cheksiz katta funksiya(miqdor)lar $x\to+\infty\ (x\to-\infty)$da ham shunga o‘xshash aniqlanadi.

2). $x\to a$ da cheksiz katta funksiya a nuqta atrofida chegaralanmagan bo‘ladi, lekin teskari tasdiq o‘rinli emas: ixtiyoriy chegaralanmagan funksiya cheksiz katta funksiya bo‘lmaydi. Masalan, $f_1(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya $x\to 0$ da cheksiz katta, $f_2(x)=\dfrac{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{x}$ funksiya esa $x\to 0$da chegaralanmagan, lekin cheksiz katta funksiya bo‘la olmaydi.

Birinchi holda ixtiyoriy M uchun har bir nuqtasida $|f(x)|>M$ shartni qanoatlantiruvchi $x=0$ nuqtaning atrofini topish mumkin; ikkinchi holda esa ixtiyoriy M uchun $x=0$ nuqtaning har bir atrofida$|f(x)|>M$ shartni qanoatlantiradigan nuqtani topish mumkin, biroq bu atrofda yuqoridagi shartni qanoatlantirmaydigan nuqtalar ham mavjud, masalan, $f(x)=0$.

$x\to a$ da cheksiz katta va cheksiz kichik funksiyalar orasidagi bog‘lanish quyidagi teorema orqali tasdiqlanadi:

T Agar $x\to a$ da $\alpha(x)$ - cheksiz kichik funksiya va $x\neq a$ da $\alpha(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda $x\to a$ da $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - cheksiz katta funksiya bo‘ladi. Agar $\alpha(x)$ -

cheksiz katta funksiya bo‘lsa, u holda $\dfrac{1}{\alpha(x)}$ - cheksiz kichik funksiya bo‘ladi.

Cheksiz katta funksiyalarning xossalari

1°. Cheksiz katta funksiyani noldan farqli chegaralangan funksiyaga ko‘paytmasi cheksiz katta funksiya bo‘ladi.

2°. Cheksiz katta funksiyalarning ko‘paytmasi cheksiz katta funksiya.

3°. Cheksiz katta funksiyalarning algebraic yig‘indisi cheksiz katta funksiya bo‘lmasligi ham mumkin:

$f(x)=x,\ g(x)=1-x$. $f(x)$ va $g(x)$ lar $x\to\infty$ da chekchiz katta funksiyalar, lekin ularning yig‘indisi $f(x)+g(x)=x+1-x=1$ bunday hisoblanmaydi.

$f(x)=x,\ g(x)=1-x^2$. $f(x)$ va $g(x)$ lar $x\to\infty$ da chekchiz katta funksiyalar, ularning yig‘indisi $f(x)+g(x)=1+x-x^2$ ham cheksiz katta funksiya, ya’ni bunda $f(x)$, $g(x)$ va $f(x)+g(x)$ funksiyalar $x\to\infty$ da cheksiz katta funksiyalar.

4.5. Funksiya limitining ta’riflari jadvali

Jadvalda yuqorida keltirilgan funksiya limiti ta’riflarining barchasi keltirilgan. Qisqalik uchun faqat Koshi ta’rifi keltirilgan.

Tushuncha	**Belgilanishi**	**Ta’rif**
f funksiyaning $x=a$ nuqtadagi limiti	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0: \forall x: \lvert x-a\rvert<\delta(\varepsilon)\Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$x=a$ nuqtada “ f funksiyaning cheksizlikka aylanishi”	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$	$\forall M>0\ \exists\delta(M)>0\ \forall\ x: \lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow\ f(x)>M$
	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=-\infty$	$\forall M>0\ \exists\delta(M)>0\ \forall\ x: \lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow\ f(x)<-M$

	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$	$\forall M>0\ \exists\delta(M)>0\ \forall\ x:\lvert x-a\rvert<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow\lvert f(x)\rvert>M$
f funksiyaning mos ravishda $x\to+\infty$ va $x\to-\infty$ dagi limiti	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon)>0\ \ \forall\ x:\ x>M(\varepsilon)\Rightarrow$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0\ \exists M(\varepsilon)>0\ \ \forall\ x:\ x<-M(\varepsilon)\Rightarrow$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
f funksiyani mos ravishda $x\to+\infty$ va $x\to-\infty$ da “cheksizlikka aylanishi”	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$	$\forall M>0\ \exists x_0(M)>0\ \ \forall x: x>x_0\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)>M$
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$	$\forall M>0\ \exists x_0(M)>0\ \forall x: x\geq x_0\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)<-M$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$	$\forall M>0\ \exists x_0(M)>0\ \forall x: x<-x_0\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)>M$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$	$\forall M>0\ \exists x_0(M)>0\ \forall x: x,-x_0\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)<-M$
	$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\infty$	$\forall M\ \ \exists x_0(M)\ \ \forall x: x>x_0\Rightarrow\lvert f(x)\rvert>M$
	$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$	$\forall M\ \ \exists x_0(M)\ \ \forall x: x<-x_0\Rightarrow$ $\Rightarrow\lvert f(x)\rvert>M$
O‘ng va chap limitlar	$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x: 0<x-a<\delta(\varepsilon)\Rightarrow$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
	$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=A$	$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta(\varepsilon)>0:\forall x: 0<a-x<\delta(\varepsilon)\Rightarrow$ $\Rightarrow\lvert f(x)-A\rvert<\varepsilon$
$x=a$ nuqtaning o‘ng va chapida “ f funksiyaning cheksizlikka	$\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=+\infty$	$\forall M>0\ \exists\delta(M)>0\ \forall x: 0<x-a<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)>M$
	$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$	$\forall M>0\ \exists\delta(M)>0\ \forall x: 0<a-x<\delta\Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)>M$

aylanishi”	$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = -\infty$	$\forall M>0\ \exists\delta(M)>0\ \forall x: 0<x-a<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)<-M$
	$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = -\infty$	$\forall M>0\ \exists\delta(M)>0\ \forall x: 0<a-x<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x)<-M$
	$\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = \infty$	$\forall M>0\ \exists\delta(M)>0\ \forall x: 0<x-a<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x)\rvert>M$
	$\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = \infty$	$\forall M>0\ \exists\delta(M)>0\ \forall x: 0<a-x<\delta \Rightarrow$ $\Rightarrow \lvert f(x)\rvert>M$

Bayon etilgan materiallarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

Funksiyaning nuqtadagi limiti;

Funksiyaning cheksizlikdagi limiti;

Funksiyaning bir tomonlama limitlari;

Cheksiz kichik va cheksiz katta funksiyalar va ularning xossalari.

5. LIMITGA EGA FUNKSIYALARNING XOSSALARI. AJOYIB LIMITLAR

Bo‘limda limitga ega funksiyalarning xossalari, noaniq (aniqmasliklar) ifodalarning limitlarini hisoblashga imkon beruvchi birinchi va ikkinchi ajoyib limitlari isbotlari bilan keltirilgan. Cneksiz kichik miqdorlar klasifikatsiyasi va funksiya limitlarini hisoblash uchun cheksiz kichik ekvivalent miqdorlarning muhimligi yoritib berilgan bo‘lib, unga doir tipik misollarning yechimlari keltirilgan.

Bo‘limning mavzulari:

5.1. Limitga ega funksiyalarning xossalari;

5.2. Ajoyib limitlar;

5.2.1. Birinchi ajoyib limit;

5.2.2. Ikkinchi ajoyib limit;

5.3. Cneksiz kichik funksiyalarni taqqoslash.

5.1. Limitga ega funksiyalarning xossalari

Limitga ega funksiyalarning xossalarini o‘rganishda cheksiz kichik funksiya(miqdor) va limitga ega bo‘lgan funksiya bog‘liqligi haqidagi teoremalar muhim ahamiyatga ega. Mazkur bo‘limdagi teoremalar x_0 nuqtadagi limitlar uchun keltirilgan, biroq ularning barchasi $x \to \pm\infty$ dagi limitlar uchun ham o‘rinlidir.

T Agar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ va $A < \infty$ (chekli son) bo‘lsa, u holda $f(x) = A + \alpha(x)$ bo‘ladi. Bunda erda $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$.

Isbot:

Agar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ bo‘lsa, u holda Koshi ta’rifiga ko‘ra har qanday $\forall \varepsilon > 0$ uchun $|f(x) - A| < \varepsilon$ shart o‘rinli bo‘ladi. Agar bu erda $f(x) - A = \alpha(x)$ deb olsak, u holda har qanday $\forall \varepsilon > 0$ uchun $|\alpha(x)| < \varepsilon$ bajariladi. Biroq bu $\alpha(x)$ funksiyani - $x \to x_0$ da cheksiz kichik miqdor bo‘lishini bildiradi.

! Teskari tasdiq ham o‘rinli: Agar $f(x)$ funksiyani $f(x) = A + \alpha(x)$ ko‘rinishda ifodalash mumkin bo‘lib, bunda $\lim\limits_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ o‘rinlidir.

Faraz qilaylik, $y = f(x)$ va $y = \varphi(x)$ funksiyalar bir xil D aniqlanish sohasiga ega bo‘lsin.

T Agar $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ va $\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = B$ bo‘lsa, u holda:

1) $\lim\limits_{x \to x_0} \left(f(x) + \varphi(x) \right) = \lim\limits_{x \to x_0} f(x) + \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x);$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(k\cdot f(x)\right)=k\cdot\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$;

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}=\dfrac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$, , bu erda $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\neq 0$.

Limitga ega bo‘lgan funksiya va cheksiz kichik miqdor bog‘likligi haqidagi teoremadan quyidagilar kelib chiqadi:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x)$, bu erda $\lim\limits_{x\to x_0}\alpha(x)=0$;

$\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B\Leftrightarrow\varphi(x)=B+\beta(x)$, bu erda $\lim\limits_{x\to x_0}\beta(x)=0$.

Bu yerda A va B chekli sonlar.

1-xossani isbotlaymiz: Buning uchun quyidagi yig‘indini ko‘ramiz, ya’ni

$$f(x)+\varphi(x)=\left(A+\alpha(x)\right)+\left(B+\beta(x)\right)=(A+B)+\left(\alpha(x)+\beta(x)\right)=$$
$$=(A+B)+\gamma(x),$$

bu erda $\gamma(x)=\alpha(x)+\beta(x)$.

Bog‘liqlik teoremasini yana bir bor qo‘llab va $\lim\limits_{x\to x_0}\gamma(x)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(\alpha(x)+\beta(x)\right)=0$ ekanligini inobatga olib,

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=A+B$ ga ega bo‘lamiz.

$\boxed{!}$ Uchta turlicha limitni shakllantiruvchi 1, 2, 4 – xossani ikki yo‘nalishda o‘qish mumkin: Agar ikkita ixtiyoriy limit mavjud bo‘lsa, u holda uchinchisi ham mavjud va munosabat bajariladi.

Misol:

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$ limitni hisoblang.

$f(x)=\dfrac{x^2+5}{x^2-3}$ funksiya $x_0=2$ nuqtada aniqlangan, ya’ni

$f(2)=\frac{2^2+5}{2^2-3}=\frac{9}{1}=9$, shuning uchun $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}=9$.

Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo‘lsa, u holda

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)= f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)= f(x_0)$ o‘rinli bo‘ladi.

Misol:

Quyidagi limit $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^3-x^2+3}$ ni hisoblang.

Ketma-ketiklar kabi kasrning ikkala qismnini x ning eng katta darajasi x^3 ga bo‘lamiz, ya’ni:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^3-x^2+3}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x}+\frac{3}{x^3}}=\frac{1+0}{1-0+0}=1.$$

Misol:

Quyidagi limit $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}$ ni hisoblang.

Berilgan limitosti funksiyaga bevosita $x_0=0$ ni funksiyaga qo‘yib $\left[\frac{0}{0}\right]$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka ega bo‘lamiz. Maktab dasturidan bizga ma’lumki, qisqa ko‘paytirish formulasidan $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$ kelib chiqib, kasrning surat va maxrajini $\sqrt{9+5x+4x^2}+3$ ifodaga ko‘paytiramiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{9+5x+4x^2}-3}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{9+5x+4x^2}\right)^2-3^2}{x\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{9+5x+4x^2-9}{x\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x(5+4x)}{x\left(\sqrt{9+5x+4x^2}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{5+4\cdot 0}{\sqrt{9+5\cdot 0+4\cdot 0^2}+3}=\frac{5}{3+3}=\frac{5}{6}$$

Misol:

Quyidagi limit $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$ ni ko‘raylik.

Ushbu misol $[\infty-\infty]$ ko‘rinishidagi aniqmaslik bo‘lib, irratsionallikni to‘g‘ridan to‘g‘ri qisqartirish imkoni yo‘q, shuning uchun quyidagi usulni qo‘llaymiz:

$$f(x)-\varphi(x)=\frac{\left(f(x)-\varphi(x)\right)\left(f(x)+\varphi(x)\right)}{f(x)+\varphi(x)}=\frac{f^2(x)-\varphi^2(x)}{f(x)+\varphi(x)}:$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)=[\infty-\infty]=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}=0$$

T Faraz qilaylik, $y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalar bir xil D aniqlanish sohasiga ega bo‘lib, $\forall x\in D$ lar uchun $f(x)\le\varphi(x)$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda ularning limitlari $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ uchun ham shart bajariladi. Boshqacha aytganda, limitli o‘tishlarda tengsizlik belgisi saqlanadi. Bu hol $f(x)<\varphi(x)$ qat’iy tengsizlikdan avvalgidek qat’iy bo‘lmagan $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ tengsizlik kelib chiqadi, masalan, $f(x)=x^4$, $\varphi(x)=x^2$ bo‘lsin, bu funksiyalar $|x|<1$ da $f(x)<\varphi(x)$ shartni qanoatlantiradi, lekin $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\lim\limits_{x\to 0}\varphi(x)=0.$

T Oraliq funksiya limiti haqida teorema.

Bizga biror D sohada aniqlangan $y=f(x)$, $y=\varphi(x)$ va $y=g(x)$

funksiyalar berilgan bo‘lsin. Bu funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\forall x \in D, \quad f(x) \le \varphi(x) \le g(x)$

2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = A$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} \varphi(x) = A$ o‘rinli bo‘ladi.

5.2. Ajoyib limitlar.

Limitlar nazariyasida muhimligi jihatidan ajoyib limit nomini olgan ikki limit juda katta rol o‘ynaydi.

5.2.1. Birinchi ajoyib limit.

$y = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiyaning $x \to 0$ dagi limitini ko‘raylik.

$\boxed{\mathbf{T}}$ $y = \dfrac{\sin x}{x}$ funksiyaning $x \to 0$ dagi limiti 1 ga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 .$$

Isboti:

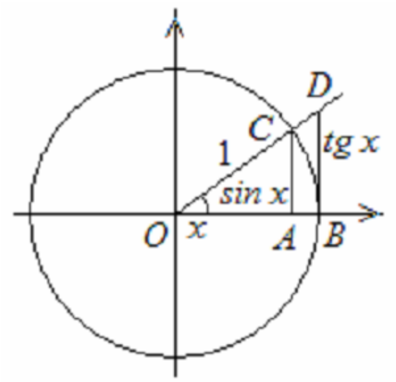
Teoremani isbotlash uchun birlik aylanani ko‘rib chiqamiz (shaklga qarang). Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$\angle COB = x,\ 0 < x < \dfrac{\pi}{2},\ OC = OB = r = 1$ bo‘lsin. Chizmada uchta figurani ko‘ramiz. $\triangle OAC,\ \text{сектор}OBC,\ \triangle ODB$ (44-rasm).

Bu figuralarning tomonlarini aniqlaymiz:

$AC = \sin x,\ OA = \cos x,\ BD = tg\, x$

$\triangle OAC$ uchburchak, OBC-sektor va $\triangle ODB$-uchburchak



44-rasm.

yuzalarini taqqoslab,

$$S_{\triangle OAC} < S_{\text{секторOBC}} < S_{\triangle ODB}$$

$$\frac{1}{2}\sin x \cdot \cos x < \frac{1}{2}x < \frac{1}{2}\cdot\frac{\sin x}{\cos x}$$ ga ega bo‘lamiz.

Qo‘sh tengsizlikni $\frac{\sin x}{2}(>0)$ ga bo‘lamiz va natijada:

$$\cos x < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \quad . \qquad (*)$$

Quyidagi funksiyalar juftligi $\cos(-x) = \cos x,\ \frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ sababli, (*) qo‘sh tengsizlik $x < 0$ da ham o‘rinli. (*) qo‘sh tengsizlikda $x \to 0$ intiltirib limitga o‘tamiz: $\cos x$ - uzluksiz funksiya, $\cos x \to \cos(0) = 1$. Oraliq funksiya limiti haqida teoremadan:

$1 \le \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le 1$ dan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ekanligi kelib chiqadi.

$\boxed{!}$ Birinchi ajoyib limitda $\left[\frac{0}{0}\right]$ aniqmaslik mavjud.

Misol:

Limit hisoblansin: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}$.

Agar $x \to 0$, u holda $2x \to 0$ va

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin 2x}{2\cdot x} = 2\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{2x} = 2\cdot 1 = 2 .$$

Misol:

Limit hisoblansin: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tgx}{x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x} = $$
$$= 1\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos 0} = 1 .$$

5.2.2. Ikkinchi ajoyib limit

$\boxed{\mathbf{T}}$ $x \to \infty$ da $y(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ funksiya limiti e ga teng, ya’ni

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e\ .$$

Isboti:

Monoton ketma-ketlik limiti ko‘rib chiqilganda $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$ munosabat olingan edi.

$x\to+\infty$ bo‘lsin. Har qanday x qo‘sh $n\le x<n+1$ tengsizikni qanoatlantiradi, bu erda $n=[x]$ - x ning butun qismi. U holda $x\to+\infty$ va $n\to+\infty$ intilganda

$$\frac{1}{n+1}<\frac{1}{x}\le\frac{1}{n},\ \ 1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\le 1+\frac{1}{n}\ \text{va}\ \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Qo‘sh tengsizlikning chap va o‘ng qismlari limitlarini alohida ko‘rib chiqaylik:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}=\frac{e}{1}=e,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e\cdot 1=e,$$

Oraliq funksiya limiti haqida teoremani qo‘llab:

$e\le\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\le e$ ga ega bo‘lamiz. Bundan $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ ekanligi kelib chiqadi.

$x\to-\infty$ bo‘lsin. O‘zgaruvchini almashtiramiz: $t=-(x+1)$, $x=-(t+1)$, bunda $x\to-\infty$ dan $t\to+\infty$ kelib chiqadi.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\left(1+\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\cdot\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot1=e$$

$\boxed{n}$ $\lim\limits_{t\to0}(1+t)^{\frac{1}{t}}=e$.

$$\left(\text{ўзгарувчини алмаштирамиз}:\ t=\frac{1}{x},\ \lim_{t\to0}(t+1)^{1/t}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\right).$$

Misol: Limit hisoblansin: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}$.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{7x}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{7}=e^{7}.$$

$\boxed{t}$ $y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ $\left(f(x)>0\right)$ funksiya daraja-ko‘rsatkichli yoki murakkab-ko‘rsatkichli funksiya deb ataladi.

$\boxed{T}$ Daraja-ko‘rsatkichli $y=\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}$ $\left(f(x)>0\right)$ funksiyaning $x\to x_0$ dagi limiti quyidagi formula bilan hisoblaniladi:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\left[\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}.$$

Asosiy logarifmik ayniyatdan foydalanib va $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B$ ekanligini inobatga olib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\lim_{x\to x_0}\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}e^{\ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)}}=\lim_{x\to x_0}e^{\varphi(x)\ln f(x)}=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\ln f(x)}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\cdot\lim\limits_{x\to x_0}\ln f(x)}=e^{B\cdot\ln A}=e^{\ln A^{B}}=A^{B}=\left[\lim_{x\to x_0}f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$$

$\boxed{!}$ Ikkinchi ajoyib limitda $\left[1^{\infty}\right]$ aniqmaslik mavjud.

Misol:

Limitni hisoblansin: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$.

Quyidagi limitlarni $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}\right)=\frac{1+0}{1-0}=1$ va $\lim\limits_{x\to\infty}(2x-1)=\infty$ hisoblaymiz. Shunday qilib, $y=\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}$ funksiya $\left[1^{\infty}\right]$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni keltirib chiqaradi.

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)=1+\left(\frac{x+1}{x-2}-1\right)=1+\frac{x+1-x+2}{x-2}=1+\frac{1}{\left({(x-2)}\big/{3}\right)}.$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^{2x-1}=\left[1^{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\left({(x-2)}\big/{3}\right)}\right)^{2x-1}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\left({(x-2)}\big/{3}\right)}\right)^{{(x-2)}\big/{3}}\right]^{(2x-1)\frac{3}{(x-2)}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3(2x-1)}{(x-2)}}=e^{6},$$

Chunki $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x-3}{x-2}=6$.

5.3. Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash

$\alpha_1(x)$ va $\alpha_2(x)$ funksiyalar $x\to x_0$ da cheksiz kichik miqdorlar bo‘lsin. Agar $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=A$ bo‘lsa, u holda quyidagi bir necha holatlar bo‘lishi mumkin:

1) agar A -chekli bo‘lsa, u holda $\alpha_1(x)$ va $\alpha_2(x)$ bir xil tartibli cheksiz kichik miqdorlar deyiladi;

2) agar $A=1$ bo‘lsa, u holda $\alpha_1(x)$ va $\alpha_2(x)$ ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=1$

3) agar $A=0$ bo‘lsa, u holda $\alpha_1(x)$ funksiya $\alpha_2(x)$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor deyiladi. Bunda quyidagicha o belgini kiritamiz,

$$\alpha_1(x)=o\left(\alpha_2(x)\right)\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=0.$$

$\boxed{\mathbf{T}}$ Agar $x\to x_0$ da $\alpha_1(x),\alpha_2(x)$ va $\alpha_3(x)$ funksiyalar cheksiz kichik miqdorlar bo‘lib, bunda $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$, $\alpha_2(x)\sim\alpha_3(x)$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{\alpha_3(x)}$ bo‘ladi.

Aslida, $\alpha_3(x)\sim\alpha_2(x)\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_3(x)}{\alpha_2(x)}=1$, u holda

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)\alpha_3(x)}{\alpha_3(x)\alpha_2(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_3(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_3(x)}{\alpha_2(x)}=$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_3(x)}\cdot1=\lim_{x\to x_0}\frac{\alpha_1(x)}{\alpha_3(x)}$$

Shunga o‘xshash: agar $x\to x_0$ da $\alpha_1(x)\sim\alpha_2(x)$ bo‘lsa, u holda quyidagilar o‘rinli bo‘ladi:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\alpha_1(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)\cdot\alpha_2(x)\right)$;

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_1(x)}{f(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\alpha_2(x)}{f(x)}$;

3) $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(\alpha_1(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f\left(\alpha_2(x)\right)$.

$\boxed{\mathbf{T}}$ Agar $x\to0$ bo‘lsa, u holda quyidagi ekvivalentliklar bajariladi:

1) $\sin x \sim x$	5) $\arcsin x \sim x$	9) $1-\cos x \sim \dfrac{x^2}{2}$
2) $tg\ x \sim x$	6) $arctg\ x \sim x$	10) $sh\ x \sim x$
3) $e^x - 1 \sim x$	7) $\ln(1+x) \sim x$	11) $\sqrt{1 \pm x} - 1 \sim \pm\dfrac{x}{2}$
4) $a^x - 1 \sim x \cdot \ln a$	8) $\log_a(1+x) \sim \dfrac{x}{\ln a}$	12) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$

! yuqorida keltirilgan ekvivalentliklar quyidagi mos limit munosabatlar natijasidir:

$$\frac{\sin x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \qquad \frac{a^x - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \ln a,$$

$$\frac{tg\ x}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 1, \qquad \frac{(1+x)^a - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} a,$$

$$\frac{\log_a(1+x)}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{\ln a}, \qquad \frac{\sqrt{1+x} - 1}{x} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{2}.$$

Misol:

Limit hisoblansin: $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

$x \to 0$ da $\sin x \sim x$ ni qo‘llaymiz.

$$\lim_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Misol:

Limit hisoblansin: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}$.

$x \to 0$ da $\sin x \sim x$ va $\sin 4x \sim 4x$ ekvivalentliklarni qo‘llaymiz:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{4x} = \frac{1}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{4}\cdot 1 = \frac{1}{4}.$$

Misol:

Hisoblang: $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}$.

$t=x-1$ almashtirish bajarib, $t\to 0$ va $x=t+1$ ega bo‘lamiz. Bundan

$$\cos\pi x=\cos\pi(t+1)=\cos(\pi t+\pi)=-\cos\pi t.$$

$$tg^2\pi x=tg^2\pi(t+1)=tg^2(\pi t+\pi)=tg^2\pi t$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{1+\cos\pi x}{tg^2\pi x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos\pi t}{tg^2\pi t}=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin^2\frac{\pi t}{2}}{tg^2\pi t}=$$

$$=2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\left(\frac{\pi t}{2}\right)^2}{(\pi t)^2}=2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{\frac{\pi^2t^2}{4}}{\pi^2t^2}=2\cdot\lim_{t\to 0}\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

Bo‘lim mavzulariga limitlarni hisoblashda Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish mumkin.

Bayon etilgan materiallarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

Limitga ega funksiyalarning xossalari;

Limitlarni amaliy hisoblash qoidalari va usullari;

Birinchi ajoyib limit;

Ikkinchi ajoyib limit;

Cheksiz kichik funksiyalarni taqqoslash;

Ekvivalent cheksiz kichik miqdorlar va ulardan limitlarni hisoblashda foydalanish.

6. FUNKSIYA UZLUKSIZLIGI

Bu bo‘limda nuqtada uzluksiz funksiyalar va ularning xossalari keltirilgan. Teskari va murakkab funksiyalar nuqtada uzluksizligining ta’riflari berilgan, unga doir misollar yechib ko‘rsatilgan. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari haqidagi teoremalar isbotlari bilan berilgan. Funksiya uzilish nuqtalarining klassifikatsiyasi-turlari o‘rganilgan.

Bo‘lim mavzulari:

6.1. Funksiyaning uzluksizligi

6.1.1. Funksiyaning nuqtada uzluksizligi

$\boxed{\boldsymbol{t.1}}$ $y=f(x)$ funksiya D sohada aniqlangan va $x_0 \in D$ bo‘lsin. Agar funksiya x_0 nuqtada aniqlangan va $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ limit mavjud bo‘lsa, $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **uzluksiz** deyiladi, bunda $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Boshqacha aytganda quyidagi shartlar o‘rinli bo‘lsa:

$$1)\ \exists f(x_0),\ 2) \exists \lim_{x \to x_0} f(x),\ \ 3)\ \lim_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$$

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada **uzluksiz** deyiladi, bunda $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$.

$\boxed{!}$ 1). Agar yuqorida keltirilgan uchta shartlardan kamida bittasi bajarilmasa

$y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzilishga ega funksiya deyiladi.

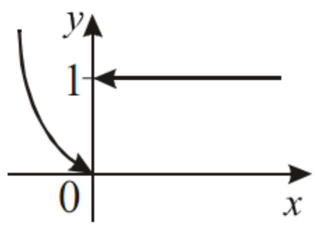
2). $\lim\limits_{x \to x_0} x = x_0$ bo‘lganligi uchun uzluksizlik ta’rifini $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x \to x_0}(x)\right)$ ko‘rinishda ham yozish mumkin, ya’ni $y = f(x)$ funksiyani x_0 nuqtada uzluksizligini va limitini hisoblash amali o‘rin almashinuvchidir.

Misol:

1) $f(x) = x,\ \forall x_0,\ \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} x = x_0 = f(x_0)$.

$f(x) = x$ - ta’rifga ko‘ra funksiya ixtiyoriy x_0 nuqtada uzluksiz.

2) $f(x) = \begin{cases} x^2\ , x < 0 \\ 1\ ,\ x \geq 0 \end{cases}$



$f(x)$ funksiya ixtiyoriy $x_0 \neq 0$ nuqtada uzluksiz, $f(x)$ $x_0 = 0$ nuqtada esa uzilishga (ta’rifning ikkinchi sharti buzilganligi sababli) ega.

$y = f(x)$ funksiyaning $x_0 \in D$ va $x \neq x_0$ nuqtasini ko‘rib chiqaylik.

$\Delta x = x - x_0$ kattalik **argument orttirmasi** deyiladi: $x = x_0 + \Delta x$.

$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ kattalik Δx argument orttirmasiga **mos funksiya orttirmasi** deyiladi.

$\boxed{\boldsymbol{t.2}}$ Agar $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo‘lib, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ shart o‘rinli bo‘lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Boshqacha ta’riflash: **agar argumentning cheksiz kichik orttirmalariga funksiyaning cheksiz kichik orttirmalari mos kelsa, u holda funksiya nuqtada uzluksiz deyiladi.**

Misol:

Uzluksizlikning birinchi va ikkinchi ta’riflari teng kuchliligi ko‘rsatilsin.

Limitning arifmetik xossasidan foydalanib quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,\ \lim_{\Delta x\to 0}\left[f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)\right]=0\ ,$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}f\left(x_0+\Delta x\right)-\lim_{\Delta x\to 0}f\left(x_0\right)=0,\ \lim_{\Delta x\to 0}f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=0\ .$$

Orttirma ta’rifidan $\Delta x=x-x_0$ ga egamiz, shuning uchun

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}f\left(x_0+\Delta x\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)$ va $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)-f\left(x_0\right)=0$ yoki $\lim\limits_{x\to x_0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$.

$\boxed{\boldsymbol{t.3}}$ Agar $y=f\left(x\right)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan bo‘lib, bir tomonlama limitlari $\lim\limits_{x\to x_0-0}f\left(x\right)$, $\lim\limits_{x\to x_0+0}f\left(x\right)$ mavjud va ular $f\left(x_0\right)$ga teng bo‘lsa, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0-0}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to x_0+0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$, u holda bu funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

$\boxed{!}$ Uzluksizlikning uch ta’rifi teng kuchli.

Bir tomonlama uzluksizlik tushunchasini ham kiritamiz.

$\boxed{\boldsymbol{t}}$ Agar $y=f\left(x\right)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan va bir tomonlama (chapdan) $\lim\limits_{x\to x_0-0}f\left(x\right)$ limit mavjud bo‘lsa, bunda $\lim\limits_{x\to x_0-0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$, u holda bu funksiya x_0 nuqtada chapdan uzluksiz deyiladi.

$\boxed{\boldsymbol{t}}$ Agar $y=f\left(x\right)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlangan va bir tomonlama (o‘ngdan) $\lim\limits_{x\to x_0+0}f\left(x\right)$ limit mavjud bo‘lsa, bunda $\lim\limits_{x\to x_0+0}f\left(x\right)=f\left(x_0\right)$, u holda bu funksiya x_0 nuqtada o‘ngdan uzluksiz deyiladi.

$\boxed{!}$ Bir tomonlama uzluksizlik tushunchasidan foydalanib, shuni aytish mumkinki, agar funksiya x_0 nuqtada chapdan va o‘ngdan uzluksiz bo‘lib, limiti $f\left(x_0\right)$ ga teng bo‘lsa, u holda funksiya nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

6.1.2. Funksiyani to‘plamda uzluksizligi

$\boxed{\boldsymbol{t}}$ Funksiya D to‘plamning ixtiyoriy nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, D **to‘plamda funksiya uzluksiz deyiladi.**

To‘plamning ayrim nuqtalarida ikki tomonlama limit mavjud bo‘lmasligi mumkin. Masalan, D to‘plam sifatida $[a, b]$ kesma olinsa, bu holda chegara nuqtalardagi limitlar bir tomonlama limitlarga almashtiriladi.

$\boxed{t}$ Agar funksiya (a, b) intervalning chetki nuqtalari, ya’ni a nuqtada **o‘ng tomondan** va b nuqtada **chap tomondan** uzluksiz bo‘lsa, u holda funksiya $[a, b]$ kesmada **uzluksiz** deyiladi**.**

6.1.3. Asosiy elemantar funksiyalarning uzluksizligi

Asosiy elementar funksiyalar deb odatda quyidagi funksiyalar olinadi: $y = x^{\alpha}$, a^{x}, $\log_a x$, $\sin x$, $\cos x$, $tg\, x$, $ctg\ x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $arctg\ x$, $arcctg\ x$.

$\boxed{\text{T}}$ Asosiy elementar funksiyalar o‘zining aniqlanish sohasining ixtiyoriy x_0 nuqtasida uzluksiz.

Misol:

Haqiqiy sonlar o‘qining ixtiyoriy x_0 nuqtasida $y = x^2$ funksiyaning uzluksiz ekanligi ko‘rsatilsin.

$$\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = x_0^2 + 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim_{\Delta x \to 0}\left(2x_0 \cdot \Delta x + (\Delta x)^2\right) = 2x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \Delta x = 2x_0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 0.$$

$\boxed{!}$ Haqiqiy sonlar o‘qning ixtiyoriy x_0 nuqtasida $y = x^n$ funksiyaning uzluksizligi Nyuton binomidan foydalanib isbotlanadi.

Misol:

Haqiqiy sonlar o‘qining ixtiyoriy x_0 nuqtasida $f(x) = \sin x$ funksiyaning uzluksizligini ko‘rsating.

Isboti:

1) $\lim\limits_{x \to +0} \sin x = 0.\ \forall \{x_n\} \to +0\ (x > 0).$

$n \to \infty$ da lemmaga ko‘ra $0 < \sin x_n < x_n$ bo‘ladi. Tengsizliklarda limitga o‘tish teoremasiga ko‘ra $\lim\limits_{n \to \infty} \sin x_n = 0$ bo‘ladi. $\lim\limits_{x \to 0+} \sin x = 0 = \sin 0$, ya’ni $x = 0$ nuqtada funksiya o‘ng tomondan uzluksiz. Endi $\forall \{x_n\} \to -0$ bo‘lsin, bunda x ni $(-x)$, $((-x)>0)$ ga almashtiramiz. U holda quyidagi shart bajariladi:

$$0<\sin(-x)<(-x), \quad 0<-\sin x<-x.$$

Tengsizlikni (-1) ga ko‘paytirsak $0>\sin x>x$ bo‘ladi. $(x_n<0)$, $x_n<\sin x_n<0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to 0-}\sin x=0=\sin(0)$, ya’ni $x=0$ nuqtada funksiya chap tomondan uzluksiz.

2) $\forall x=x_0\neq 0$ nuqtalar uchun:

$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$ bo‘lishini, ya’ni $\lim\limits_{x\to x_0}(\sin x-\sin x_0)=0$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$$\sin x-\sin x_0=2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}.$$

$$\lim_{x\to x_0}(\sin x-\sin x_0)=2\lim_{x\to x_0}\left(\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right)=0$$ ($\cos\frac{x+x_0}{2}$ - chegaranlangan kattalik , $\sin\frac{x-x_0}{2}$ - esa cheksiz kichik miqdor $(\to 0)$ bo‘lgani uchun) $\Rightarrow$ bu esa butun ko‘paytma $\to 0$ nolga intilishini anglatadi.

Misol:

Limit hisoblansin: $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x$.

$y=\sin x$ funksiya ixtiyoriy nuqtada uzluksiz bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}x\right)=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin x=\sin\left(\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}x\right)=\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

bo‘ladi.

6.1.4. Uzluksiz funksiyalarning hossalari

T Agar $y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalar D to‘plamda aniqlangan va biror $x_0\in D$ nuqtada uzlukciz bo‘lsa, u holda:

$$f(x)+\varphi(x),\ k\cdot f(x),\ f(x)\cdot\varphi(x),\ \frac{f(x)}{\varphi(x)}$$

funksiyalar ham $x_0\in D$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi, bunda bo‘linmada maxrajning noldan $\varphi(x_0)\neq 0$ farqli bo‘lishi talab qilinadi.

Yuqoridagi funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lgani uchun

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0) \qquad \lim_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi(x_0)$$ shart bajariladi.

Limitning arifmetik xossasidan foydalanib,

$\lim\limits_{x\to x_0}\left(f(x)+\varphi(x)\right)=\lim\limits_{x\to x_0}f(x)+\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=f(x_0)+\varphi(x_0)$ ga ega bo‘lamiz, bu esa $f(x)+\varphi(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz ekanligini anglatadi.

$\boxed{n}$ 1). $P_n(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0$ ko‘phad haqiqiy o‘qning ixtiyoriy x_0 nuqtasida uzluksiz.

2). $R(x)=\dfrac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\dfrac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_1x+b_0}$ -ratsional-kasr funksiya haqiqiy o‘qning ixtiyoriy x_0 nuqtasida uzluksiz, bu erda $Q_m(x_0)\neq 0$.

$\boxed{\text{T}}$ Agar $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya nuqtaning biror istalgancha kichik atrofida chegaralangan bo‘ladi.

$\boxed{\text{T}}$ Uzluksiz funksiyalar ishoralarining turg‘unlik alomati haqida.

Agar $y=f(x)$ funksiya - x_0 nuqtada uzluksiz va bu nuqtadagi qiymati noldan farqli $\left(f(x_0)\neq 0\right)$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqtaning shunday δ atrofi mavjudki, bu atrofdagi x ning barcha qiymatlarida funksiya noldan farqli $\left(f(x)\neq 0\right)$ va uning ishorasi $f(x_0)$ ning ishorasi bilan bir xil bo‘ladi.

Isbot:

Shartga ko‘ra, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

Shunday qilib, $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0$: $|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|f(x)-f(x_0)\right|<\varepsilon$, ya’ni

$f(x_0)-\varepsilon < f(x) < f(x_0)+\varepsilon$.

Agar ε ni quyidagicha tanlasak, $\varepsilon < \left|f(x_0)\right|$, u holda $f(x_0)-\varepsilon,\ f(x_0)+\varepsilon$ va $f(x_0)$ lar bir xil ishoraga ega bo‘ladi. Shunday qilib, ε atrofida $\varepsilon < |f(x_0)|$, $f(x)$ va $f(x_0)$ bir xil ishoraga ega.

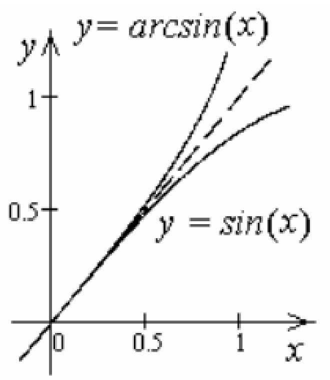
6.1.5. Teskari funksiyaning uzluksizligi

$\boxed{T}$ Agar:

1) $y = f(x)$ - qat’iy monoton va $[a,\ b]$ oraliqda uzluksiz;

2) $\alpha = f(a),\ \beta = f(b)$ bo‘lsa, u holda $\exists\ x = f^{-1}(y)$ - qat’iy monoton va $[\alpha,\ \beta]$ oraliqda uzluksiz funksiya bo‘ladi.

Misol:



$y = \sin x$ funksiya $\left[-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ oraliqda qat’iy monoton va uzluksiz $\Rightarrow$ bu funksiya $[-1,\ 1]$ oraliqda qat’iy monoton va uzluksiz $x = \arcsin y$ teskari funksiyaga ega bo‘ladi.

Qayta belgilashdan so‘ng bu funksiya $y = \arcsin x$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

6.1.6. Murakkab funksiyaning uzluksizligi

$\boxed{t}$ Ikki va undan ortiq funksiyalar superpozitsiyalari natijasida hosil bo‘lgan funksiya **murrakab funksiya** deyiladi.

$\boxed{t}$ Faraz qilaylik,

1) $x = \varphi(t)$ funksiya $\{t\}$ da berilgan va $\{x\}$ qiymatlar sohasiga ega;

2) $y = f(x)$ funksiya esa $\{x\}$ da berilgan bo‘lsin, u holda $\{t\}$ da $y = f(x)$ murrakab funksiya berilgan deyiladi, bu erda $x = \varphi(t)$ yoki $y = F(t) = f\left[\varphi(t)\right]$ bo‘lib, bunda x — oraliq argument, t – erkli o‘zgaruvchi.

Misol:

$y = \sin x,\ x = t^2,\ y = \sin t^2$ - murakkab funksiya.

$\boxed{\mathbf{T}}$ Murakkab funksiya uzluksizligi.

Agar: 1) $x = \varphi(t)$ funksiya $t = a$ nuqtada uzluksiz va

2) $y = f(x)$ funksiya esa $x = b = \varphi(a)$ nuqtada uzluksiz bo‘lsa,

u holda $y = f[\varphi(t)]$ funksiya $t = a$ nuqtada uzluksiz bo‘ladi.

Isboti:

Limitning Geyne ta’rifidan foydalanib quyidagini isbotlaymiz:

$$\lim_{t\to a} f[\varphi(t)] = f[\varphi(a)] = f(b).$$

Funksiya uzluksizligining birinchi ta’rifi

(1-shartining isboti): $\forall \{t_n\} \to a,\ \{\varphi(t_n)\} \to \varphi(a) = b$,

(2-shartining isboti): $x_n = \varphi(t_n)$, ya’ni $\{x_n\} \to b,\ \{f(x_n)\} \to f(b)$,

lekin $f(x_n) = f[\varphi(t_n)]$, ya’ni $\forall\{t_n\} \to a,\ \{f[\varphi(t_n)]\} \to f[\varphi(a)] \Rightarrow$ bu esa $f[\varphi(t)]$- funksiyaning $t = a$ nuqtada uzluksiz ekanligini anglatadi, shuni isbotlash talab etilgan edi.

$\boxed{!}$ 1). Agar berilgan funksiyalar uzluksiz bo‘lsa, u holda ularning yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi, nisbati (maxraji $\neq 0$), teskari funksiyasi va murakkab funksiya ham uzluksiz funksiya bo‘ladi.

2). x_0 nuqtada uzluksiz $f(x)$ funksiya uchun

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = f\left(\lim_{x\to x_0} x\right) \text{ o‘rinli.}$$

Uzluksiz funksiyalar uchun limitga funksiya ishorasi ostida o‘tish mumkin, masalan:

a) $\lim\limits_{x\to 5} e^{x^2} = e^{\lim\limits_{x\to 5} x^2} = e^{25}$,

b) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(1+\sin x) = \ln\left(\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)\right) = \ln(1+0) = 0$.

6.1.7. Kesmada uzluksiz funksiyalarning xossalari

$\boxed{\text{T}}$ Agar $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya shu kesmada chegaralangan $\left(\exists M \text{ ва } m: m\le f(x)\le M,\ \forall x\in[a,b]\right)$.

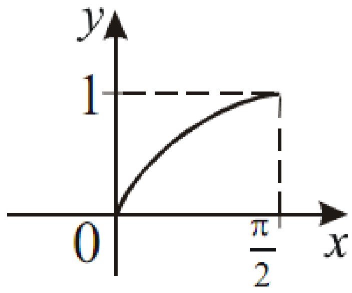
Misol:

$f(x)=\sin x,\ \left[0,\frac{\pi}{2}\right],$

$m=-1,\ m=-5,\ m=0,$

$M=2,\ M=3,\ M=1,$

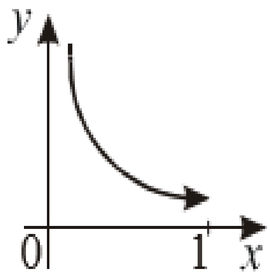
$\underline{m}=\inf\{f(x)\}=0,\ \overline{M}=\sup\{f(x)\}=1.$



$\boxed{!}$ Uzluksiz funksiya intervalda chegaralangan yoki chegaralanmagan bo‘lishi mumkin, shuning uchun funksiyaning kesmada uzluksizlik bo‘lishi zaruriy shart hisoblanadi.

Misol:

$f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya $(0,1)$ intervalda uzluksiz, ya’ni $\forall x,\ 0<x<1$, biroq bu funksiya chegaralanmagan.



$\boxed{\text{T}}$ Agar $f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda bu funksiya $[a,\ b]$kesmada o‘zining aniq yuqori va aniq quyi chegarasiga ega bo‘ladi, ya’ni $\exists x_1\in[a,b]:\ f(x_1)=\overline{M},\ \exists x_2\in[a,b]:\ f(x_2)=\underline{m}$.

Isbot. Teskaridan faraz qilaylik:

agar x_1 nuqta mavjud bo‘lmasa, u holda $f(x)<\overline{M}$, ya’ni $\forall x \Rightarrow f(x)-\overline{M}<0$ yoki $\overline{M}-f(x)>0$ bo‘ladi.

$F(x)=\frac{1}{\overline{M}-f(x)}$ funksiyani ko‘rib chiqaylik, bu funksiya - $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz (murakkab funksiya uzluksizligi haqidagi teoremadan). $F(x)$ funksiyaning $[a,\ b]$ kesmada uzluksizligidan uning shu kesmada chegaralanganligi kelib chiqadi:

$$F(x)=\frac{1}{\overline{M}-f(x)}\leq B\Rightarrow f(x)\leq\overline{M}-\frac{1}{B},$$

$\overline{M}-\dfrac{1}{B}$ - funksiyaning yuqori chegarasi, u holda $\overline{M}$ - aniq yuqori chegara bo‘lmaydi. Yuzaga kelgan qarama-qarshilik teoremani isbotlaydi.

Misol:

1) $f(x)=\sin x,\ x\in\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right],\ \underline{m}=f(0)=0,\ \overline{M}=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$.

2) $f(x)=|x|,\ x\in[-1,1],\ \underline{m}=0,\ \overline{M}=1.$

$\boxed{!}$ 1). Teorema $(a,\ b)$ interval, $[a,\ b)$ yoki $(a,\ b]$ yarim intervallar uchun o‘rinli emas.

Misol:

$y=x,\ x\in(0,1).$ $\underline{m}=0,\ \overline{M}=1$ qiymatlarga funksiya $x\in(0,1)$ intervalda erishmaydi.

2). $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz bo‘lgan $f(x)$ funksiya uchun $\overline{M}$ va $\underline{m}$ larni mos ravishda funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari deyish mumkin, ya’ni:

$$\max f(x)=\overline{M},\ \min f(x)=\underline{m}.$$

$\boxed{\text{T}}$ Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,\ b]$ kesmada uzluksiz va kesma oxirlarida funksiyaning $f(a)$ va $f(b)$ qiymatlari turli ishoraga ega bo‘lsa, u holda $(a,\ b)$ intervalga tegishli shunday kamida bitta $\exists\xi\ (\xi\in(a,b))$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiyaning qiymati nolga teng, ya’ni $f(\xi)=0$ bo‘ladi.

Isboti:

$f(a)<0$ va $f(b)>0$ bo‘lsin. Shunday $\{x\}: f(x)<0$ ni ko‘rib chiqaylik. $\{x\}$ - yuqoridan chegaralangan, masalan b soni bilan: $b \Rightarrow \exists \sup\{x\} = \xi$. $f(\xi)=0$ ekanligini ko‘rsatamiz.

Agarda $f(\xi)=C>0$ bo‘lsa, uzluksiz funksiya ishorasining saqlanishi haqidagi teoremadan ξ nuqtaning shunday δ – atrofi mavjudki bu atrofga tegishli barcha x lar uchun $(\forall x \in (\xi-\delta, \xi+\delta))$ $f(x)>0$ bo‘lardi, u holda ξ $\{x\}$ ning aniq yuqori $sup\{x\}$ chegarasi bo‘lmasdi, bu erda $f(x)<0$. SHunga o‘xshash $f(\xi)=C<0$ uchun ham $f(\xi)=0$ bo‘ladi, shuni isbotlash talab qilingan edi.

$\boxed{\text{T}}$ Uzluksiz funksiyaning har qanday oraliq qiymatdan o‘tishi haqidagi teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz va kesma oxirlarida $f(a)=A,\ f(b)=B$ bo‘lib, hamda A va B sonlar orasida shunday C soni topilsaki, ya’ni $A < C < B$ bo‘lsa, u holda (a, b) intervalga tegishli shunday ξ $(\xi \in (a, b))$ nuqta topiladiki, $f(\xi)=C$ bo‘ladi.

Isboti:

$\forall C: A < C < B$ ni ko‘rib chiqaylik. $[a, b]$ kesmada uzluksiz, $F(a)<0,\ F(b)>0$ shartlarni qanoatlantiruvchi $F(x)=f(x)-C$ funksiyani kiritamiz. Avvalgi teoremaga asosan, $\exists \xi \in (a, b)$ topiladiki, $F(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)-C=0 \Rightarrow f(\xi)=C$, shuni isbotlash talab qilingan edi.

$\boxed{!}$ Yuqoridagi teorema kesmani teng ikkiga bo‘lish usuli yordamida $F(x)=0$ ko‘rinishidagi tenglamalar ildizlarini topishda qo‘llaniladi.

Misol:

$\sin x - x + 1 = 0$ tenglama ildizga egami?

Sonlar o‘qida uzluksiz va uzluksiz funksiyalar yig‘indisi ko‘rinishida bo‘lgan $f(x)=\sin x - x + 1$ funksiyani ko‘rib chiqaylik.

$f(0)=1>0,\ f(2\pi)=-2\pi+1<0$ bo‘lgani uchun tenglama $[0,\ 2\pi]$ kesmada kamida bitta ildizga ega.

Misol:

$f(x)=\frac{x^3}{4}-\sin \pi x+3$ funksiya $[-2,\ 2]$ kesmada $2\frac{1}{3}$ qiymat qabul qiladimi?

Funksiya $[-2,\ 2]$ kesmada uzluksiz. Kesma oxirlaridagi funksiyaning qiymatlari $f(-2)=1,\ f(2)=5$ teng. $1<2\frac{1}{3}<5$ bo‘lgani uchun, $\xi\in(-2,\ 2)$, demak, $f(\xi)=2\frac{1}{3}$.

6.2. Uzilish nuqtalar va ularning klassifikatsiyasi

$y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksizlik hossalariga ega bo‘lsa, bu nuqta funksiyaning **uzluksizlik nuqtasi** deyiladi, aks holda x_0 nuqta **uzilish nuqtasi** deyiladi.

Uzilish nuqtalarini klassifikatsiyalash uchun uzluksizlikning uchinchi ta’rifi qulay hisoblanadi.

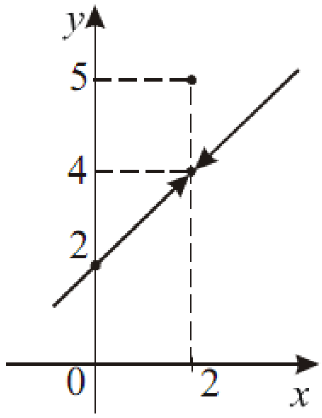
$\boxed{t}$ Agar $y=f(x)$ funksiyaning $x\to x_0$da bir tomonlama limitlar mavjud bo‘lib, bunda $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ o‘rinli va $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada aniqlanmagan yoki $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqta **uzilishni bartaraf etish nuqtasi** deyiladi.

$\boxed{!}$ Bartaraf etiluvchi uzulishni quyidagi funksiya kiritib yo‘qotish mumkin:

$$f(x_1)=\begin{cases} f(x),\ x\neq x_0, \\ \lim\limits_{x\to x_0} f(x),\ x=x_0. \end{cases}$$

Misol:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2},\ x\neq 2, \\ 5, \qquad x=2. \end{cases}$$



$x=2$ nuqta uzilishni bartaraf etish nuqtasidir, chunki: $\lim\limits_{x\to 2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)=4,\ \ f(2)=5\neq 4$

Uzilishni bartaraf etamiz:

$$f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2}, & x\neq 2,\\ 4, & x=2.\end{cases}$$

$f_1(x)$ funksiya barcha nuqtalarda uzluksiz.

$\boxed{t}$ Agar $f(x)$ funksiya uchun quyidagi shartlar bajarilsa:

1) x_0 – nuqta $f(x)$ funksiyaning uzilish nuqtasi,

2) $f(x)$ funksiyaning $x\to x_0$ da chap va o‘ng limitlari mavjud bo‘lsa:

$$\exists \lim_{x\to x_0-0} f(x),\ \ \exists \lim_{x\to x_0+0} f(x),$$

3) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)\neq \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x),$

u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun **1-tur uzilish nuqtasi (yakuniy sakrashni bartaraf etib bo‘lmaydigan)** deyiladi.

Misol:

$y=f(x)=\dfrac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ - funksiya uchun $x=0$ nuqta 1-tur uzilish nuqtasi, chunki

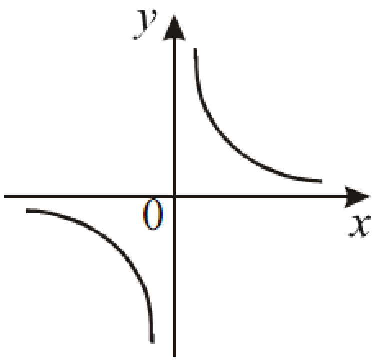
$$\lim_{x\to 0+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\left|\begin{array}{l} x\to +0\\ \dfrac{1}{x}\to +\infty,\\ 2^{\frac{1}{x}}\to +\infty\end{array}\right\}=0.\quad \lim_{x\to 0-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=\left|\begin{array}{l} x\to -0\\ \dfrac{1}{x}\to -\infty,\\ 2^{\frac{1}{x}}\to 0\end{array}\right\}=1.$$

$\boxed{t}$ Agar bir tomonlama limitlarning hech bo‘lmaganda biri cheksiz yoki mavjud bo‘lmasa, u holda x_0 nuqta **2-tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

Misol:

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ funksiya uchun $x=0$ nuqta 2-tur uzilish nuqtasi (45-rasm), chunki

$$\lim_{x\to 0+0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to 0-0} f(x) = -\infty \ .$$



45-rasm.

Bayon etilgan materiallarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

Funksiyaning nuqtada uzluksizligi;

Uzluksiz funksiyalarning xossalari;

Funksiyaning kesmada uzluksizligi va ularning xossalari;

Uzilish nuqtalarning klassifikatsiyasi.

IV BOB. HOSILA VA DIFFERENSIAL

1. FUNKSIYANING HOSILASI

Bo‘limda differensial hisobning asosiy tushunchalari: funksiyaning hosilasi, differensiali tushunchalari, ularning geometrik, mexanik va fizik ma’nolari ko‘rib chiqilgan. Funksiyalarning hosilalarini topish qoidalari, elementar funksiyalar hosilalari jadvali, jadvaldagi funksiyalarning hosilalari keltirib chiqarilgan, funksiyaning turli xil ko‘rinishlari uchun ularning hosilalarini hisoblash qoidalalari isbotlari bilan keltirilgan. Funksiya hosilalarini hisoblashga oid turli xildagi misollar yechimlari bilan ko‘rsatilgan.

Bo‘lim mavzulari:

1.1. Funksiyaning hosilasi.

1.1.1. Funksiya hosilasining ta’rifi.

1.1.2. Hosilaning geometrik ma’nosi. Funksiyaning grafigiga o‘tkazilgan urinma va normal tenglamasi.

1.1.3. Hosilaning mexanik ma’nosi.

1.2. Differensiallash qoidalari va formulalari.

1.2.1. Funksiyalar yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasining hosilasi.

1.2.2. Teskari funksiyaning hosilasi.

1.2.3. Hosilalar jadvali.

1.2.4. Murakkab funksiya hosilasi.

1.2.5. Logarifmik hosila.

1.2.6 Oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi.

1.2.7. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi.

1.1. Funksiyaning hosilasi

1.1.1. Funksiya hosilasining ta’rifi

Faraz qilaylik $y = f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ intervalda aniqlangan va $x \in (a,\ b)$ - qandaydir fiksirlangan nuqta, Δx - argumentning x nuqtadagi orttirmasi,

$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ - funksiyaning shu nuqtadagi mos orttirmasi, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ - orttirmalar nisbati (Δx - ga bog‘liq, x - fiksirlangan) bo‘lsin.

t Funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining limiti argument orttirmasi nolga intilganda mavjud bo‘lsa, bu limitning qiymati $f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi **hosilasi** deb ataladi va quyidagicha belgilanadi:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\frac{dy}{dx}=y'.$$

t Agar $y = f(x)$ funksiyaning $y'(x)$ hosilasi mavjud bo‘lsa, bu funksiya x nuqtada **differensiallanuvchi** funksiya deyiladi; hosilani hisoblash amali – **differensiallash** deb ataladi.

t Agar $y = f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ intervalning har bir nuqtasida differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $f(x)$ funksiya $(a,\ b)$ **intervalda differensiallanuvchi funksiya** deyiladi.

Ta’rifdan kelib chiqib, bir nechta elementar funksiyalarning hosilalarini topamiz.

Misol: $y = \sin x,\ \ y' = ?$

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x,$$

chunki $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}=1.$

Demak, $(\sin x)' = \cos x.$

Misol:

$y=\log_a x,\ \ 0<a\neq 1,\ \ y'=?$

$$\Delta y=\log_a\left(x+\Delta x\right)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)$$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right]=$$

$$=\log_a\left[\lim_{\Delta x\to 0}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}x}\right]^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

Demak, $\left(\log_a x\right)'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a},\quad \left(\ln x\right)'=\frac{1}{x}.$

Misol:

$y=x^{\alpha},\ \ y'=?$

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}$$

Umumiylikni cheklamay α ni natural ko‘rsatkich deb hisoblashimiz mumkin va Nyuton binomiga asosan qavsni ochamiz:

$$y'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(x+\Delta x\right)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}+\alpha x^{\alpha-1}\Delta x+\alpha\left(\alpha-1\right)x^{\alpha-2}\left(\Delta x\right)^2+...+\left(\Delta x\right)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\frac{\alpha x^{\alpha-1}\Delta x}{\Delta x}+\frac{\alpha\left(\alpha-1\right)x^{\alpha-2}\left(\Delta x\right)^2}{\Delta x}+...\right\}=\lim_{\Delta x\to 0}\left\{\alpha x^{\alpha-1}+o\left(\Delta x\right)\right\}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

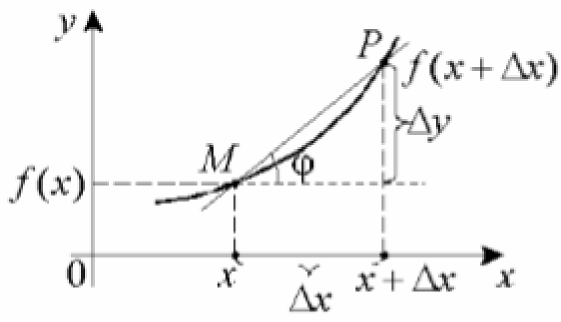
Demak, $y'=\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}$.

1.1.2. Hosilaning geometrik ma’nosi. Funksiyaning grafigiga o‘tkazilgan urinma va normal tenglamasi

$y=f\left(x\right)$ funksiyaning ikkita $M\left(x,\ f\left(x\right)\right)$ va $P\left(x+\Delta x,\ f\left(x+\Delta x\right)\right)$

nuqtalarini olaylik, bunda MP - kesuvchi.

Δx nolga (ya'ni P nuqta M nuqtaga) intilganda MP kesuvchi M nuqtaga nisbatan buriladi (46-rasm).



46-rasm.

$\boxed{t}$ $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x,\ f(x))$ nuqtadagi **urinmasi** deb, $\Delta x \to 0$ $(P \to M)$ da **kesuvchining limit holatiga** aytiladi.

$\boxed{t}$ $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x,\ f(x))$ nuqtasidagi **normali** deb, urinish nuqtasidan o'tkazilgan, urinmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqqa aytiladi.

$\boxed{\mathbf{T}}$ Agar $y = f(x)$ funksiya x nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda funksiya grafigiga $M(x,\ f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti $f'(x)$ ga teng bo'ladi.

Isboti:

Faraz qilaylik, $tg\varphi(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ va $\Delta x \to 0$ bo'lsin. Quyidagi limit $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tg\varphi(\Delta x)$ mavjud bo'lgani uchun:

1) kesuvchining limit holati, ya'ni urinma mavjud;

2) urinmaning burchak koeffitsienti $k = f'(x)$ ga teng.

$\boxed{n}$ 1). $y'(x_0)$ning qiymati $y = y(x)$ egri chiziqqa x_0 nuqtada o'tkazilgan urinmaning tenglamasini yozish imkonini beradi: $y - y_0 = y'(x_0) \cdot (x - x_0)$ yoki $y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

2). Ikkita to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti: $k_1 \cdot k_2 = -1$ bo'lgani uchun, normalning tenglamasi $y = y_0 - \dfrac{1}{y'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ yoki

$y = f\left(x_0\right) - \dfrac{1}{f'\left(x_0\right)} \cdot \left(x - x_0\right)$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

3). $y'\left(x\right) > 0$ shart bajarilganda x nuqtada funksiya o‘suvchi, $y'\left(x\right) < 0$ bo‘lganda esa funksiya kamayuvchi bo‘ladi.

1.1.3. Hosilaning mexanik ma’nosi

Nuqtani to‘g‘ri chiziq bo‘ylab harakatini ko‘rib chikaylik. Nuqtaning biror t vaqt momentida ko‘chishi $S = S\left(t\right)$ - tenglama bilan berilgan bo‘lsin, u holda nuqtaning shu t vaqt momentdagi oniy tezligi

$$V\left(t\right) = S'\left(t\right) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{S\left(t + \Delta t\right) - S\left(t\right)}{\Delta t}$$ ga teng.

Misol:

$$\boxed{S\left(t\right) = \frac{gt^2}{2}, \quad V\left(t\right) = S'\left(t\right) = gt}$$

1.2. Differensiallash qoidalari va formulalari

1.2.1. Funksiyalar yig‘indisi, ayirmasi, ko‘paytmasi va bo‘linmasining hosilasi

1) $\left(c\right)' = 0, \ c = const;$

2) $\left(f\left(x\right) + g\left(x\right)\right)' = f'\left(x\right) + g'\left(x\right);$

3) $\left(c \cdot f\left(x\right)\right)' = c \cdot f'\left(x\right);$

4) $\left(f\left(x\right) \cdot g\left(x\right)\right)' = f'\left(x\right) \cdot g\left(x\right) + f\left(x\right) \cdot g'\left(x\right);$

5) $\left(\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}\right)' = \dfrac{f'\left(x\right) \cdot g\left(x\right) - f\left(x\right) \cdot g'\left(x\right)}{g^2\left(x\right)}.$

2-qoidaning isboti:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(f + \Delta f\right) + \left(g + \Delta g\right) - \left(f + g\right)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f + \Delta f - f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{g + \Delta g - g}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta g}{\Delta x} = f' + g'.$$

Misol: $y = 3\sin x + 5\log_2 x - 10, \quad y' = 3\cos x + 5\frac{1}{x}\log_2 e = 3\cos x + \frac{5}{x\ln 2}$

1.2.2. Teskari funksiyaning xosilasi

T Faraz qilaylik, $y = f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) x_0 nuqtaning atrofida qat'iy monoton va uzluksiz,

2) x_0 nuqtada differensiallanuvchi va $f'(x_0) \neq 0$ bo'lsin,

u holda:

1) x_0 nuqtada teskari funksiyasining hosilasi mavjud: $\left(f^{-1}(y)\right)'$;

2) $\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Isboti:

1-shartdan uzluksiz qat'iy monoton teskari funksiya $x = f^{-1}(y)$ mavjudligi kelib chiqadi. Bu $x = f^{-1}(y)$ funksiyani $y_0 = f(x_0)$ nuqta atrofida ko'rib chiqaylik. Teskari funksiyaning argumenti y ga Δy orttirma bersak, unga mos ravishda funksiya Δx orttirma oladi va $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} = \dfrac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$ ga ega bo'lamiz.

Teskari $f^{-1}(y)$ funksiyaning $\Delta y \neq 0$ bo'lganda qat'iy monotonligidan $\Delta x \neq 0$ ekanligi kelib chiqadi. Δy ni nolga intiltiramiz ($\Delta y \to 0$) va $x = f^{-1}(y)$ funksiyaning uzluksizligidan $\Delta x \to 0$ ga ega bo'lamiz. Biroq $\Delta x \to 0$ da, $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \to f'(x_0)$, bundan $\dfrac{\Delta x}{\Delta y} \to \dfrac{1}{f'(x_0)}$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\left(f^{-1}(y)\right)'_{y=y_0} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$ bo'ladi.

Yuqoridagi formuladan foydalanib bir nechta elementar funksiyaning hosilasini topamiz:

1) $y=a^x,\ \left(a^x\right)'=?\ \ a>0,\ a\neq 0.\ x=\log_a y;$

$$\left(a^x\right)'=\frac{1}{\left(\log_a y\right)'}=\frac{1}{\frac{1}{y}\log_a e}=\frac{y}{\log_a e}=\frac{a^x}{\log_a e}=a^x\ln a\,;$$

$\left(a^x\right)'=a^x\ln a,\ \left(e^x\right)'=e^x.$

2) $y=\arcsin\,x,\ \left(\arcsin\,x\right)'=?\ \ x=\sin y\ ,$

$$\left(\arcsin\,x\right)'=\frac{1}{\left(\sin\,y\right)'}=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}};;$$

$$\left(\arcsin\,x\right)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

3) $\left(\arccos\,x\right)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

4) $y=\mathrm{arc}tg\ x,\ \left(\mathrm{arc}tg\ x\right)'=?\ \ x=tg\,y,\ \left(tg\ y\right)'=\dfrac{1}{\cos^2 y};$

$$\left(\mathrm{arc}tg\ x\right)'=\frac{1}{\left(tg\,y\right)'}=\cos^2 y=\frac{1}{1+tg^{\,2}y}=\frac{1}{1+x^2};$$

$$\left(\mathrm{arc}tg\ x\right)'=\frac{1}{1+x^2}.$$

5) $\left(\mathrm{arc}ctg\ x\right)'=-\dfrac{1}{1+x^2}.$

1.2.3. Hosilalar jadvali

Hosila jadvali hosilanung ta’rifi va differensiallash qoidalari asosida shakllantirilgan.

1) $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}.\left(x^{a}\right)'=ax^{a-1}.$

2) $\left(a^x\right)'=a^x\ln a,\ \left(a>0,\ a\neq 1\right)\Rightarrow\left(e^x\right)'=e^x.$

3) $\left(\log_a x\right)'=\log_a e\cdot\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{x\ln a}\ \ \left(a>0,\ a\neq 1\right)\Rightarrow\left(\ln x\right)'=\dfrac{1}{x}.$

4) $(\sin x)' = \cos x$.

5) $(\cos x)' = -\sin x$.

6) $(tg\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

7) $(ctg\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

8) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

9) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

10) $(\mathrm{arc}tg\ x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

11) $(\mathrm{arc}ctg\ x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

12) $(sh\, x)' = ch\, x$. Giperbolik sinus $sh\, x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$.

13) $(ch\, x)' = sh\, x$. Giperbolik kosinus $ch\, x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

14) $(th\, x)' = \dfrac{1}{ch^2 x}$. Giperbolik tangens $th\, x = \dfrac{sh\, x}{ch\, x}$.

15) $(cth\, x)' = \dfrac{1}{sh^2 x}$. Giperbolik kotangens $cth\, x = \dfrac{ch\, x}{sh\, x}$.

1.2.4. Murakkab funksiya hosilasi

Agar:

1) $y = f[\varphi(t)]$ - murakkab funksiya, t - erkli o‘zgaruvchi, φ- oraliq argument;

2) $f'(x_0)$ va $\varphi'(t_0)$ lar mavjud va $x_0 = \varphi(t_0)$ bo‘lsa, u holda $\{f[\varphi(t)]\}' = f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)$ bo‘ladi.

Isboti:

Quyidagilarni ko‘rib chiqamiz:

$t_0+\Delta t \Rightarrow \Delta x=\varphi(t_0+\Delta t)-\varphi(t_0),\ \ \Delta x \Rightarrow \Delta y = f(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0).$

$\Delta t \to 0$ bo‘lsin, u holda $\exists \lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ (shartga asosan $f'(x_0)=y'(x_0)$).

Hisoblaymiz:

$\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\cdot\dfrac{\Delta x}{\Delta t}=f'(x_0)\cdot\varphi'(t_0)$, shuni isbotlash talab etilgan edi.

$\boxed{!}$ t - erkli o‘zgaruvchi, x - oraliq argument. Amaliyotda quyidagi ko‘rinishdagi funksiyalarga duch kelamiz: $y=f(u),\ u=\varphi(x)$, u holda $y'_x=y'_u\cdot u'_x$. Masalan, $y=e^{arctg\,x};\ y=e^u,\ u=arctg\,x,\ \ y'_x=?.$

Yechimi: $y'_u=e^u,\ u'_x=\dfrac{1}{1+x^2},\quad y'_x=e^{arctg\,x}\cdot\dfrac{1}{1+x^2}.$

1.2.5. Logarifmik hosila

Ayrim ifodalarning hosilalarini hisoblashda bu ifodalarni avval logarifmlash qulay bo‘ladi.

$y=f(x)$ funksiyaning hosilasini $y'=?$

$\ln y=\ln f(x),\ [\ln y]'_x=\dfrac{1}{y}y' \Rightarrow \dfrac{y'}{y}$ - logarifmik hosila deyiladi.

Bundan $y'=y\cdot[\ln y]'$ ekanligi kelib chiqadi.

Misol:

1) $y=x^\alpha,\ \alpha\neq 0,\ y'=?$

$\ln y=\alpha\ln x,\quad \dfrac{y'}{y}=\alpha\cdot\dfrac{1}{x},$

$y'=y\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}\Rightarrow y'=\alpha\cdot\dfrac{x^\alpha}{x}=\alpha\cdot x^{\alpha-1}.$

2) $y=(\sin x)^{x^2},\ \ y'=?,$

$\ln y=\ln(\sin x)^{x^2}\Rightarrow \ln y=x^2\ln(\sin x),$

Misol:

$$\frac{y'}{y} = 2x\ln(\sin x) + x^2\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x,$$

$$y' = \left[2x\ln(\sin x) + x^2 ctgx\right](\sin x)^{x^2}.$$

Misol:

Umumiy holda daraja-ko‘rsatkichli ifodalar uchun quyidagi formulani keltirib chiqaramiz:

$y = f(x)^{\varphi(x)} \Rightarrow ln\, y = \varphi(x) ln\, f(x).$

$$y = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)} \Rightarrow \ln y = \ln\left(f(x)\right)^{\varphi(x)} \Rightarrow \ln y = \varphi(x)\ln\left(f(x)\right).$$

$$y' = \left(f(x)\right)^{\varphi(x)}\cdot\left[\varphi'(x)\ln f(x) + \varphi(x)\cdot\frac{f'(x)}{f(x)}\right].$$

Misol:

Logarifmik hosila ko‘p ko‘paytuvchili ko‘paytma hosilasini hisoblashda ham qo‘llaniladi, masalan,

1) $y = x\cdot\sin x\cdot\cos x,\ \ y' = ?$

$$\ln y = \ln x + \ln\sin x + \ln\cos x,$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{x} + \frac{\cos x}{\sin x} + \frac{-\sin x}{\cos x} \Rightarrow y' = x\cdot\sin x\cdot\cos x\left[\frac{1}{x} + ctg\, x - tg\, x\right].$$

2) $y = \sqrt[5]{\dfrac{x^3(x-1)^7}{x+6}},\ \ y' = ?$

$$\ln y = \frac{1}{5}\left[3\ln x + 7\ln(x-1) - \ln(x+6)\right];$$

$$(\ln y)' = \frac{1}{5}\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x-1} - \frac{1}{x+6}\right];$$

$$y' = \frac{1}{5}\left[\frac{3}{x} + \frac{7}{x-1} - \frac{1}{x+6}\right]\cdot\sqrt[5]{\frac{x^3(x-1)^7}{x+6}}.$$

1.2.6. Oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi

$y = f(x)$ funksiyaning $F(x, y) = 0$ ko‘rinishda berilishi funksiyaning oshkormas ko‘rinishi deb ataladi.

$y'(x)$ hosilani hisoblash uchun, $F(x, y(x)) = 0$ funksiyani x argumentning murakkab funksiyasi sifatida qarab, $F(x, y) = 0$ dan x o‘zgaruvchiga nisbatan differensiallab, so‘ngra hosil bo‘lgan $F_1(x, y(x), y'(x)) = 0$ tenglamani $y'(x)$ ga nisbatan yechish kerak.

Misol:

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad y' = ? \; (y > 0)$.

Yechish:

Birinchi usul. Tenglamadan y ni aniq ifodalaymiz:

$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$. Shartga ko‘ra $y > 0$ bo‘lgani uchun $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$

$$y' = \frac{b}{a} \cdot \frac{1}{2}\left(a^2 - x^2\right)^{-\frac{1}{2}}(-2x) = -\frac{b}{a} \cdot \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}.$$

Ikkinchi usul. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ifodani x o‘zgaruvchi bo‘yicha differensiallaymiz, ya’ni $\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2}y' = 0$, bundan $y' = -\frac{b^2}{a^2}\frac{x}{y}$.

! $y'(x)$ hosilaning ifodasi x ga bog‘liq bo‘lganday y ga ham bog‘liq bo‘lishi mumkin.

1.2.7. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning hosilasi

$y = y(x)$ funksiya parametrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsin: $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$.

T Agar parametrik ko‘rinishda berilgan funksiya uchun:

1) $x = x(t),\ y = y(t)$ - differetsiallanuvchi,

2) $x = x(t)$ funksiya differensiallanuvchi teskari funksiyaga ega, ya'ni $t = t(x)$ va $\exists t' = t'(x)$ mavjud,

3) $x' = x'(t) \neq 0$ o'rinli bo'lsa, u holda $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$ bo'ladi.

Isboti:

$y = y(t)$ va $t = t(x)$ funksiyalarni ko'rib chiqaylik. t ni oraliq argument sifatida qarab, y ni x ning murakkab funksiyasi deb hisoblashimiz mumkin. Unda $y'_x = y'_t \cdot t'_x,\ t'_x = \dfrac{1}{x'_t} \Rightarrow y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$.

Misol:	$\begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 \end{cases},\quad y'_x = ?$ Echish: $\begin{cases} x'_t = 2t \\ y'_t = 3t^2 \end{cases} \Rightarrow\ y'_x = \dfrac{3t^2}{2t} = \dfrac{3}{2}t.$

Bo'lim mavzulariga oid misollarni yechishda, ya'ni funksiya hosilasini hisoblashda Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish va yechilgan misollarni to'g'ri ekanligini tekshirish mumkin.

Bayon etilgan materiallarni o'rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

Funksiyaning hosilasi va uning geometrik, mexanik va fizik ma'nolari;

Funksiyaning grafigiga berilgan nuqtada o'tkazilgan urinma va normallarning tenglamalari;

Funksiyaning hosilasini hisoblash qoidalari va formulalari;

Teskari, murakab, parametrik, oshkor va oshkormas funksiyalarning hosilalarini topish;

Logarifmlash yordamida funksiyalar hosilalarini topish;
Funksiya hosilasini hisoblashda Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish.

2. YUQORI TARTIBLI HOSILA VA DIFFERENSIAL

Bo‘limda funksiyaning yuqori tartibli hosilasi tushunchasi, ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nolari matematik bayoni keltirilgan. Funksiya differensiali tushunchasining ma’nosi berilgan. Funksiyani differensiallash qoidalari va formulalari keltirib chiqarilgan. Taqribiy hisoblashlarda funksiya differensialidan foydalanish misollar yordamida ko‘rsatilgan.

Bo‘limning mavzulari:
2.1. Yuqori tartibli hosilalar.
2.1.1. n–tartibli hosilaning ta’rifi.
2.1.2. n–tartibli hosilani hisoblash qoidasi.
2.1.3. Oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi.
2.1.4. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi.
2.1.5. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosi.
2.2. Differensial.
2.2.1. Funksiyaning differensiali.
2.2.2. Erkli o‘zgaruvchining differensiali.
2.2.3. Differensialning xossalari.
2.2.4. Differensialning geometrik ma’nosi.
2.2.5. Differensial yordamida taqribiy hisoblash.
2.2.6. Murakkab funksiyaning differensiali.
2.2.7. Yuqori tartibli differensial.

2.1. Yuqori tartibli hosilalar

2.1.1. n–tartibli hosilaning ta’rifi

$y = f(x)$ funksiya biror $[a, b]$ kesmada differensiallanuvchi bo‘lsin.

Umuman olganda birinchi tartibli $f'(x)$ hosila x ga bog‘liq, ya’ni x ning funksiyasi bo‘ladi. Bu funksiyani differensiallab, $y=f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasiga ega bo‘lamiz.

$\boxed{t}$ $y=f(x)$ funksiyaning 2-tartibli hosilasi deb, uning birinchi tartibli hosilasidan olingan (birinchi tartibli) hosilaga aytiladi va $f''(x)=\left(f'(x)\right)'$ kabi belgilanadi.

Funksiyaning n - tartibli hosila(yoki n –hosilasi)si deb, $n-1$-tartibli hosilasidan olingan (birinchi tartibli) hosilaga aytiladi: $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

Shuningdek, $y^{(n)}(x)=\dfrac{d^n y}{dx^n}$ kabi belgilash qo‘llaniladi.

Misol:		
	1) $y=\sin x,$	2) $y=x^n,$
	$y'=\cos x,$	$y'=nx^{n-1},$
	$y''=-\sin x,$	$y''=n(n-1)x^{n-2},$
	$y'''=-\cos x,$	$y'''=n(n-1)(n-2)x^{n-3}$
	....	....
	$y^{(n)}=\sin\left(x+n\dfrac{\pi}{2}\right)$	$y^{(n)}=n!,$ $y^{(n+1)}=0.$

2.1.2. n–tartibli hosilani hisoblash qoidasi

1. $[f(x)+g(x)]^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x).$

2. Leybnits formulasi (ko‘paytmaning hosilasi):

$[f(x)\cdot g(x)]^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$, bu erda $C_n^k=\dfrac{n!}{(n-k)!\,k!}$ -n **dan** k **tadan guruhlashlar (kombinatsiyalar) soni,** $k!$ (k-faktorial deb o‘qiladi) manfiy bo‘lmagan k uchun aniqlangan, bunda $(k+1)!=(k+1)\cdot k!,\ \ 0!=1!=1$.

Misol:	$y=e^{\alpha x}\cdot x^2$ funksiyaning n-tartibli hosilasi topilsin.

	Yechish: $y=f(x)\cdot g(x)$, bunda $f(x)=e^{ax}$, $g(x)=x^2$; $f(x)=e^{ax}$; $\quad g(x)=x^2$; $f'(x)=ae^{ax}$; $\quad g'(x)=2x$; $f''(x)=a^2e^{ax}$; $\quad g''(x)=2$; $f'''(x)=a^3e^{ax}$; $\quad g'''(x)=0$; .... $f^{(n)}(x)=a^ne^{ax}$; $\quad g^{(n)}(x)=0$. Shunday qilib, Leybnits formulasida 3 ta nolga teng bo‘lmagan had mavjud. Koeffitsientlarni hisoblaymiz: $k=0\to C_n^0=\frac{n!}{n!}=1$ $k=1\to C_n^1=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$; $k=2\to C_n^2=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n(n-1)}{2}$; $y^{(n)}(x)=a^ne^{ax}\cdot x^2+na^{n-1}e^{ax}\cdot 2x+\frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}e^{ax}\cdot 2$.

2.1.3. Oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi

$F(x,y)=0$ tenglama bilan aniqlangan $y=y(x)$ oshkormas funksiyani ko‘rib chiqamiz. $F(x,y)=0$ funksiyaning **ikkinchi** tartibli hosilasini topish uchun y ni x ning funksiyasi deb, $F(x,y)=0$ tenglamani x o‘zgaruvchi bo‘yicha ikki marta differensiallaymiz, va y'' ni y va x ning funksiyasi deb ifodalaymiz.

Misol:	$x^2+y^2=1, \quad y''=?$

	Yechish. $2x+2y\cdot y'=0,\ \ y'=-\dfrac{2x}{2y}=-\dfrac{x}{y},\ \ 2+2y'\cdot y'+2y\cdot y''=0$, $y''=-\dfrac{1+\left(y'\right)^2}{y}=-\dfrac{y^2+x^2}{y^3}$.

2.1.4. Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi.

Quyidagi parametrik ko‘rinishda berilgan $\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ funksiyani ko‘rib chiqaylik.

$$y''_{xx}=\left(y'_x\right)'_x=\frac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \text{ yoki } y''_{xx}=\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_x=\left|t_x{}'=\frac{1}{x'_t}\right|=\frac{y_{tt}{}''\cdot x_t{}'-x_{tt}{}''\cdot y_t{}'}{\left(x_t{}'\right)^2}\cdot\frac{1}{x_t{}'}..$$

SHunday qilib, $y''_{xx}=\dfrac{y_{tt}{}''\cdot x_t{}'-x_{tt}{}''\cdot y_t{}'}{\left(x_t{}'\right)^3}$.

2.1.5. Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosi

$S=S(t)$ - jismning ilgarilanma harakati qonuni bo‘lsin. Berilgan vaqt momentidagi jism tezligi $V(t)=S'(t)$ ga teng. Agar harakat notekis harakat bo‘lsa, unda Δt vaqt orttirmasi uchun tezlik orttirmasi ΔV bo‘ladi.

U holda $\dfrac{\Delta V}{\Delta t}$ nisbat Δt vaqt oralig‘idagi o‘rtacha tezlanish. $\Delta t\to 0$ da t vaqt momentida oniy tezlanishga ega bo‘lamiz, ya’ni $a=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta V}{\Delta t}=V'(t)$.

Shunday qilib, tezlanish to‘g‘ri chiziqli harakatning vaqt bo‘yicha ko‘chishining ikkinchi tartibli hosilasi $a(t)=S''(t)$ ga teng.

2.2. Differensial

2.2.1. Funksiyaning differensiali

Agar $y=f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda $\forall x\in(a,b)$ uchun $\exists\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)$ bo‘ladi. $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $\Delta x\to 0$ da $f'(x)$

soniga intiladi, bundan, bu $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ nisbat $f'(x)$dan cheksiz kichik $\alpha(x)$ miqdorga farq qiladi, ya'ni $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x)+\alpha(x)$, bu erda $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x)=0$ yoki $\Delta y=f'(x)\cdot\Delta x+\alpha(x)\cdot\Delta x$.

$f'(x)\cdot\Delta x$ ko'rib chiqaylik. Umumiy holda $f'(x)\neq 0$, $f'(x)\cdot\Delta x$ esa - $\Delta x\to 0$ da Δx ga nisbatan birinchi tartibli cheksiz kichik miqdor.

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(x)\Delta x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(x)=0$ bo'lgani uchun $\alpha(x)\cdot\Delta x$ - Δx ga nisbatan yuqori tartibdagi cheksiz kichik miqdor.

$\boxed{t}$ Δx bo'yicha funksiya orttirmasining asosiy chiziqli qismi x nuqtadagi funksiyaning differensiali deb ataladi va $dy=f'(x)\Delta x$ kabi belgilanadi:

$\boxed{!}$ $\alpha(x)\cdot\Delta x$ - Δx ga nisbatan yuqori tartibdagi cheksiz kichik miqdor bo'lgani uchun **asosiy qism.** Differensial Δx ning birinchi darajasiga bog'liq bo'lgani uchun $f'(x)\Delta x$ **chiziqli** hisoblanadi.

2.2.2. Erkli o'zgaruvchining differensiali

$y=x$ bo'lsin. U holda $\Delta y=\Delta x$, $y'=(x)'=1$, $dy=dx=\Delta x$.

Xulosa: erkin o'zgaruvchining differensiali uning orrtirmasiga teng, ya'ni $dx=\Delta x$. Umumiy holda: $dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx \Rightarrow dy=f'(x)dx$.

$\boxed{n}$ Hosilani funksiyaning differensialini erkin o'zgaruvchining differensialiga nisbati (**Leybnits belgilanishi** deb ataluvchi) ko'rinishida yozish mumkin: $f'(x)=\dfrac{dy}{dx}$.

2.2.3. Differensialning xossasi

Funksiyaning differensiali asosiy $dy=f'(x)dx$ formula orqali hisoblanadi, shuning uchun oddiy differensiallash qoidalari o'rinli bo'ladi.

1) $d(c)=0$;

2) $d(u\pm v)=du\pm dv;\quad d(u\pm c)=du$;

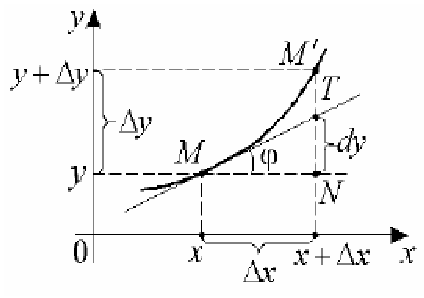
3) $d(uv) = udv + vdu; \quad d(uc) = cdu$;

4) $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$.

2.2.4. Differensialning geometrik ma’nosi

$y = f(x)$ funksiyani ko‘rib chiqaylik. Rasmdagi belgilanishlar quyidagilarga mos keladi:

$M(x,\ y),\ M'(x + \Delta x, y + \Delta y),\ \Delta y = NM',$ - MT to‘g ‘ri chiziq M nuqtada o‘tkazilgan urinma (47-rasm).



47-rasm.

ΔMTN ni ko‘rib chiqaylik:

$MN = \Delta x,\ NT = \Delta x \cdot tg\varphi,\ NT = \Delta x \cdot f'(x),\ dy = NT$.

$y = f(x)$ funksiyaning x nuqtadagi differensiali uning grafigiga x nuqtada o‘tkazilgan urinma ordinatasining orttirmasidir.

2.2.5. Differensial yordamida taqribiy hisoblash

Bu usul funksiyaning $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ orttirmasini uning taqribiy differensialiga almashtirilishiga asoslangan: $\Delta y \cong dy = f'(x)dx$. Bu Δy va dy cheksiz kichik $o(\Delta x)$ miqdorga farq qilgani uchun bo‘lishi mumkin.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha \Delta x}{f'(x)\Delta x} = 1 + \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\alpha}{f'(x)} = 1.$$

Asosiy ishchi formulalar:

$$x = x_0 + \Delta x,$$

$$f(x) = f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + dy,$$

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Misol:	$\sqrt[4]{15,8}$ taqriban hisoblansin.

	Yechish: $\sqrt[4]{x},\ x_0=16$ bo‘lsin. U holda $y(16)=\sqrt[4]{16}=2$; $y(15,8)=y(16)+\Delta y$; Almashtirish kiritamiz: $\Delta y\approx dy=y'(x)\Delta x$; $\Delta x=15,8-16=-0,2$; $y'(x)=\left(x^{\frac{1}{4}}\right)'=\frac{1}{4}x^{1-\frac{1}{4}}=\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}$; $y'(16)=\frac{1}{4}16^{-\frac{3}{4}}=\frac{1}{4\cdot 8}=\frac{1}{32}$. U holda $y(15,8)=2+\frac{1}{32}\cdot(-0,2)=2-0,0062=1,9938$.
Misol:	Radiusi $r=1,02$ metrga teng sharning V hajmi taqriban hisoblansin. Echish: $V(r)=\frac{4}{3}\pi\cdot r^3$ bo‘lgani uchun, $r_0=1$ deb olamiz, $\Delta r=0,02$, $V'(r)=4\pi\cdot r^2$ va ΔV uchun formuladan foydalanib: $V(1,02)=V(1)+\Delta V\approx V(1)+V'(1)\cdot 0,02=\frac{4}{3}\pi+4\pi\cdot 0,02\cong 4,44м^3$.

2.2.6. Murakkab funksiyaning differensiali

Murakkab $y=f\left[\varphi(x)\right]$ funksiyani ko‘rib chiqaylik. u oraliq argument bo‘lsin: $y=f(u),\ u=\varphi(x)$. $y'_x=f'_u\cdot u'_x$ tenglikni dx ga ko‘paytiramiz:

$$y'_x dx=f'_u\cdot u'_x\cdot dx,$$
$$dy=f'_u du.$$

$dy=f'_x\cdot dx$ bilan taqqoslash, funksiya differensialini uning argumenti x - erkli o‘zgaruvchi yoki erkli o‘zgaruvchining funksiyasi (oraliq argument) bo‘lishidan qat’iy nazar o‘z shaklini saqlab qolishini anglatadi.

Bu hossa birinchi differensial shaklining **invariantlik** (o‘zgarmaslik) hossasi deb ataladi.

2.2.7. Yuqori tartibli differensial

$y=f(x)$ - differensiallanuvchi funksiya va uning argumenti x - erkli o‘zgaruvchi bo‘lsin. U holda uning birinchi tartibli differensiali $dy=f'(x)\Delta x=f'(x)dx$ bo‘lib, u x ning funksiyasi bo‘lgani uchun undan ham differensial olish mumkin.

$\boxed{t}$ $y=f(x)$ funksiyaning **ikkinchi tartibli differensiali (yoki ikkinchi differensiali)** deb, bu funksiyaning birinchi tartibli differensialidan olingan differensialga aytiladi.

$$d^2 f(x)=d\left(df(x)\right)=d\left(f'(x)dx\right)=dx\cdot d\left(f'(x)\right)=dx\cdot f''(x)dx=$$
$$=f''(x)(dx)^2=f''(x)dx^2;$$

$$d^2 f(x)=f''(x)dx^2.$$

n-tartibli differensialga ham huddi shunday tarzda ta’rif beriladi, ya’ni $(n-1)$- tartibli differensialidan olingan differensialga aytiladi, ya’ni $d^n f(x)=d\left(d^{n-1}f(x)\right) \Rightarrow d^n f(x)=f^{(n)}(x)dx^n$ bo‘ladi, bu erda $dx^n=(dx)^n$.

1. Erkli o‘zgaruvchilar uchun $d^2x=0, d^3x=0,...$.

2. Keltirilgan formulalarda x - erkli o‘zgaruvchi deb faraz qilingan. Agar x - oraliq argument bo‘lsa, u holda ikkinchi differensiali ko‘rinishi $d^2 f=f''(x)dx^2$ dan farqli bo‘ladi.

Buni ikkinchi differensial misolida ko‘rsatib beramiz. $y=f(x),\ \ x=g(t)$ bo‘lsin, t - erkli o‘zgaruvchi.

U holda

$$d^2 f=d(df)=d\left(f'(x)\cdot dx\right)=d\left(f'(x)\right)\cdot dx+f'(x)\cdot d(dx)=$$
$$=f''(x)\cdot dx^2+f'(x)\cdot d^2x=f''(x)\cdot\left(g'(t)\right)^2\cdot dt^2+f'(x)\cdot g''(t)\cdot dt^2.$$

Shunday qilib, murakkab funksiya holatida ikkinchi tartibli differensial ifodasida qo‘shimcha qo‘shiluvchi paydo bo‘ladi; bu esa ikkinchi tartibli differensialning ko‘rinishi **invariat emasligini** anglatadi.

Bo‘lim mavzulariga oid misollarni yechishda, ya’ni taqribiy hisoblashlarda Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish va yechilgan misollarni to‘g‘ri ekanligini tekshirish mumkin.

Bayon etilgan materiallarni o‘rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

n–tartibli hosilaning ta’rifi;

n–tartibli hosilani hisoblash qoidalari;

Oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topish;

Parametrik ko‘rinishda berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini topish;

Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma’nosi;

Erkli o‘zgaruvchining differensiali;

Differsialning xossalari;

Differensialning geometrik ma’nosi;

Taqribiy hisoblashda differensialning qo‘llanishi;

Murakkab funksiyaning differensiali;

Yuqori tartibli differensiallarni topish;

Taqribiy hisoblashlarda Maple, MathCad kabi kompyuter dasturlaridan va MathHelper, MathGraph kabi mobil ilovalardan foydalanish.

V BOB. MATEMATIK TAHLILNING ASOSIY TEOREMALARI. LOPITAL QOIDASI, TEYLOR FORMULASI

Bo‘limda tahlilning deyarli barcha bo‘limlarida foydalaniladigan asosiy teoremalari (Roll, Lagranj va Koshi) ko‘rib chiqilgan. Differensiallash yordamida limitlarni hisoblash imkonini beruvchi aniqmasliklarni ochishning Lopital qoidasi bayon etilgan. Funksiyalar ko‘rinishiga bog‘liq ko‘plab farazlarni taqribiy ko‘phad ko‘rishida ifodalash va hosil bo‘lgan xatoliklarni baholash imkonini beruvchi Teylor formulasi kiritilgan.

Bo‘limning mavzulari:

1.1. Matematik tahlilning asosiy teoremalari.

1.1.1. Roll teoremasi (hosilaning noli haqida).

1.1.2. Lagranj teoremasi (chekli orttirmalar haqidagi teorema).

1.1.3. Koshi teoremasi (chekli ayirmalar haqida umumlashgan teorema).

1.1.4. Lopital qoidasi. Aniqmasliklarni ochish uchun Lopital qoidasini qo‘llash.

1.1.5. Teylor formulasi. Teylor formulasining xususiy hollari. Ayrim elementar funksiyalarni Makloren formulasi bo‘yicha yoyish. Qoldiq hadni baholash. Teylor va Makloren formulalarining tadbiqi.

1.1. Matematik tahlilning asosiy teoremalari.

1.1.1. Roll teoremasi (hosilaning noli haqida)

T Agar $y = f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $f(x)$ funksiya $[a, b]$ kesmada uzluksiz,

2) (a, b) intervalda $f'(x)$ differensiallanuvchi,

3) funksiyaning kesmaning oxiridagi qiymatlari teng, ya’ni $f(a) = f(b)$ bo‘lsa, u holda (a, b) intervalga tegishli kamida bitta shunday $\xi \in (a, b)$ nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiyaning hosilasi nolga $f'(\xi) = 0$ teng bo‘ladi.

Isboti:

$f\left(x\right)$ funksiya $\left[a, b\right]$ kesmada uzluksiz bo‘lgani uchun, funksiyaning bu kesmada eng katta M va eng kichik m qiymatlari mavjud.

Ikkita holat bo‘lishi mumkin: 1) $M = m$ va 2) $M > m$.

1) 1-holatni ko‘rib chiqaylik. $M = m$ bo‘lgani uchun $f\left(x\right)$ - o‘zgarmas bo‘ladi, bundan: $f'\left(x\right)=0$, $\forall x \in \left(a, b\right)$ ekanligi kelib chiqadi.

2) 2-holatni ko‘rib chiqaylik $M > m$ va $f\left(a\right)=f\left(b\right)$ bo‘lgani uchun $\left[a, b\right]$ kesmada hech bo‘lmaganda bu qiymatlarning biriga erishadi.

$f\left(\xi\right)=M$, $\xi \in \left(a, b\right)$ bo‘lsin. $f\left(\xi\right)$ - funksiyaning eng katta qiymati bo‘lgani uchun Δx ning har qanday qiymatida $f\left(\xi+\Delta x\right)-f\left(\xi\right)\le 0$ bo‘ladi.

$$\frac{f\left(\xi+\Delta x\right)-f\left(\xi\right)}{\Delta x}\le 0, \quad \Delta x > 0, \qquad \frac{f\left(\xi+\Delta x\right)-f\left(\xi\right)}{\Delta x}\ge 0, \quad \Delta x < 0,$$

$\Delta x \to 0$ limitga o‘tib, chap va o‘ng limitlarni alohida ko‘rib chiqish orqali quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} = f'(\xi)\le 0, \Delta x > 0, \qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\xi+\Delta x)-f(\xi)}{\Delta x} = f'(\xi)\ge 0, \Delta x < 0$$

Ushbu limitlar $f'\left(\xi\right)=0$ bo‘lganda o‘rinli bo‘ladi.

Kesmaning ichki nuqtasida minimumga erishganda ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

Roll teoremasining geometrik ma’nosi

Agar funksiya Roll teoremasi shartlarini kanoatlantirsa, u holda kesmaning qaysidir nuqtasida funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma Ox o‘qiga parallel bo‘ladi.

n Roll teoremasi funksiya hosilani hisoblamay turib uni nolga aylanishini bilish imkonini beradi.

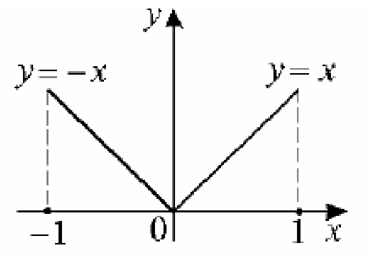
! Agar $f\left(x\right)$ funksiya $\left[a, b\right]$ kesmaning barcha nuqtalarida hosilaga ega bo‘lmasa, u holda $f'\left(\xi\right)$ nolga aylanuvchi shunday ξ nuqta mavjud bo‘lmasligi mumkin.

Misol: $y=|x|$,

$\left(y_0^{\text{ўнг}}\right)'=1$,

$\left(y_0^{\text{чап}}\right)'=-1$.

$y'(0)$- mavjud emas (ta’rif ko‘ra).



1.1.2. Lagranj teoremasi (chekli orttirmalar haqida teorema)

$\boxed{\textbf{T}}$ Agar $y=f(x)$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ kesmada uzluksiz,

2) (a,b) intervalda $f'(x)$ differensiallanuvchi, u holda (a,b) intervalga tegishli kamida bitta shunday $\xi\in(a,b)$ nuqta mavjudki, bu nuqtada $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$ tenglik bajariladi.

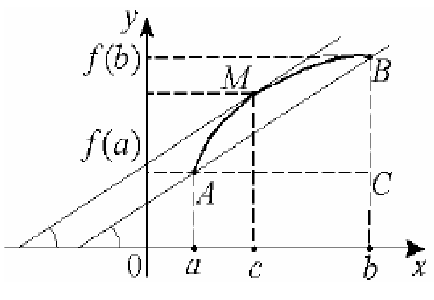
Isbot:

$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=Q$ belgilash kiritamiz va $F(x)=f(x)-f(a)-Q(x-a)$ funksiyani qurib olamiz. $F(x)$ quyidagi xossalarga ega: 1) $[a,b]$ kesmada uzluksiz, 2) funksiyaning (a,b) intervalda $F'(x)$ hosilasi mavjud, 3) $F(a)=F(b)=0$, ya’ni bu funksiya Roll teoremasi shartlarini qanoatlantiradi.

Bundan Roll teoremasiga ko‘ra, shunday $\xi\in(a,b)$ nuqta mavjudki $F'(\xi)=0,\ F'(x)=\left(f(x)-f(a)-Q(x-a)\right)'\Rightarrow F'(x)=f'(x)-Q=0$ bo‘ladi. $f'(x)-Q=0$ tenglama $x=\xi$ ildizga ega, ya’ni $f'(\xi)=Q$ yoki $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Lagranj teoremasining geometrik ma’nosi

$\dfrac{CB}{AC}=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ - AB kesuvchining burchak



47-rasm.

koeffitsienti. $f'(\xi)$ - $y=f(x)$ egri chiziqqa $x=\xi$ nuqtada o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsienti. AB egri chiziqda kamida bitta shunday M nuqta topiladiki, bu nuqtadan o‘tkazilgan urinma AB kesuvchi(vatar)ga parallel bo‘ladi.

$\boxed{!}$ 1). Isbotlangan formula Lagranj formulasi yoki chekli orttirmalar formulasi deyiladi. $a<\xi<b$ bo‘lgani uchun $\xi-a<b-a$, $\xi-a=\theta(b-a)$ bo‘ladi, bu erda $0<\theta<1$, bundan esa, $\xi=a+\theta(b-a)$, $f(b)-f(a)=f'\left[a+\theta(b-a)\right](b-a)$.

2). ξ nuqtalar bir nechta bo‘lishi mumkin.

3). Agar $f(a)=f(b)$, u holda $f'(\xi)=0$ bo‘ladi. Demak, Roll teoremasining tasdig‘iga ega bo‘ldik.

4). Lagranj teoremasidan taqribiy hisoblashlarda foydalanish mumkin: $f(b)-f(a)=f'\left[a+\theta(b-a)\right](b-a)$, bu erda $0<\theta<1$. $\theta=\frac{1}{2}$ deb olsak, u holda $f(b)-f(a)\approx f'\left[\frac{a+b}{2}\right](b-a)$. b ning qiymati a ning qiymatiga qanchalik yaqin bo‘lsa xatolik shunchalik kichik bo‘ladi.

Misol:

$arctg1{,}1=?$

$b=1{,}1;\ \ a=1{,}0;\ \ b-a=0{,}1;\ \ arctg1{,}1\approx arctg1+0{,}1\cdot(arctgx)'$,

$x=\frac{1{,}1+1{,}0}{2}=\frac{2{,}1}{2}$.

$$(arctgx)'=\frac{1}{1+x^2};\quad \frac{1}{1+x^2}=\Bigg|_{x=\frac{2,1}{2}}=\frac{1}{2{,}1025}\approx 0{,}5,\quad arctg1{,}1\approx\frac{\pi}{4}+0{,}05.$$

1.1.3. Koshi teoremasi (chekli ayirmalar haqidagi umumlashgan teorema)

$\boxed{T}$ Agar $y=f(x)$ va $y=\varphi(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $f(x),\varphi(x)$ funksiyalar $[a,b]$ kesmada uzluksiz,

2) (a,b) intervalda funksiyalar $f'(x),\varphi'(x)$ differensiallanuvchi,

3) $y=\varphi(x)$ funksiya $\forall\ x\in(a,b)$ da noldan farqli hosila $(\varphi'(x)\neq 0)$ ga ega, u holda (a,b) intervalga tegishli kamida bitta shunday $\xi\in(a,b)$ nuqta mavjudki, bu nuqtada $\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}=\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ tenglik bajariladi.

Isbot:

$\varphi(b)\neq\varphi(a)$, aks holda Roll teoremasiga ko‘ra hech bo‘lmaganda bitta $\xi\in(a,b)$ nuqtada $\varphi'(x)$ nolga teng bo‘lar edi.

Quyidagi yordamchi funksiyani ko‘rib chiqaylik:

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left[\varphi(x)-\varphi(a)\right].$$

Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, shuning uchun shunday $\xi\in(a,b)$ nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiyaning hosilasi $F'(\xi)=0$ nolga teng bo‘ladi.

$$F'(\xi)=f'(\xi)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(\xi)=0,\qquad f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\varphi'(\xi).$$

$\varphi'(\xi)\neq 0$ bo‘lgani uchun yuqoridagi tenglikni $\varphi'(\xi)$ ga bo‘lib $\dfrac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}$ ga ega bo‘lamiz.

$\boxed{!}$ Lagranj teoremasi Koshi teoremasining xususiy holidir.

1.1.4. Lopital qoidasi. Aniqmasliklarni ochish uchun Lopital qoidasini qo‘llash.

Bu qoida $\left[\dfrac{0}{0}\right]$ va $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ ko‘rinishidagi aniqmasliklarni differensial hisob usullari orqali ochishni tavsiflaydi.

$F(x)=\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ ko‘rinishdagi funksiyani ko‘rib chiqaylik, bu erda $f(x)$ va $\varphi(x)$ - funksiyalar a nuqtaning biror bir atrofida (a nuqtadan tashqari bo‘lishi mumkin) differensiallanuvchi. Agar $x \to a$ da $f(x) \to 0(ёки\ \infty)$ va $\varphi(x) \to 0(ёки\ \infty)$ bo‘lsa, u holda $F(x)$ funksiya a nuqtada $\left[\frac{0}{0}\right]$ yoki $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ aniqmaslikka ega bo‘ladi.

$\lim\limits_{x\to a} F(x)$ ni hisoblashda quyidagi teorema (**Lopital qoidasi**) yordam beradi.

$\boxed{\textbf{T}}$ **Lopital qoidasi**. Agar $y = f(x)$ va $y = \varphi(x)$ funksiyalar quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $f(x), \varphi(x)$ funksiyalar $[a, b]$ kesmada uzluksiz;

2) (a, b) intervalda funksiyalar $f'(x), \varphi'(x)$ differensiallanuvchi va $\varphi'(x) \neq 0$;

3) $f(a) = \varphi(a) = 0$;

4) Agar $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ limit mavjud bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ limit ham mavjud va

$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ bo‘ladi.

Isboti:

$[a, b]$ kesmada $x \neq a$ nuqta olamiz.

$[a, x]$ kesmada, Koshi teoremasi ko‘ra $\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$, o‘rinli bo‘ladi, bunda $a < \xi < x$, ya’ni ξ - $[a, x]$ kesmaning oraliq nuqtasi. Biroq, $f(a) = \varphi(a) = 0$, demak $\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)}$ bo‘ladi. Agar $x \to a$, u holda $\xi \to a$,

bundan $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{\xi\to a}\frac{f'(\xi)}{\varphi'(\xi)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ ekanligi kelib chiqadi.

Qisqacha bu tasdiqni quyidagicha ifodalash mumkin: agar ikkita cheksiz kichik funksiyalar hosilalari nisbatining limiti mavjud bo‘lsa, u holda bu funksiyalar nisbatining limiti ularning hosilalari nisbatining limitiga teng.

! 1). Agar $x\to\infty$ dagi limit ko‘rib chiqilsa, $f(x)\to 0$ va $\varphi(x)\to 0$, u holda tasdiq o‘rinliligacha qoladi:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}=\left|\begin{matrix} x=\frac{1}{z} \\ z\to 0\end{matrix}\right|=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{\varphi'\left(\frac{1}{z}\right)\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)}{\phi'\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

2). Agar $f'(a)=\varphi'(a)=0$ va $f'(x),\varphi'(x)$lar teorema shartlarini qanoatlintirsa, u holda $\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\Rightarrow\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim\limits_{x\to a}\frac{f''(x)}{\varphi''(x)}$ ga Lopital qoidasini qo‘llash mumkin. Lopital qoidasini bir necha marta ham qo‘llash mumkin.

3). Isbotsiz quyidagi tasdiqni keltiramiz:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Agar ikkita cheksiz katta funksiyalar hosilalari nisbatining limiti mavjud bo‘lsa, u holda bu funksiyalar nisbatining limiti ular hosilalari nisbatining limitiga teng.

Misol:

$\left[\frac{0}{0}\right]$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ko‘ramiz:

a) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 2x)'}{(x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 2x\cdot 2}{1}=2.$$

б) $$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x-\sin x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2)'}{(x-\sin x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{1-\cos x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(2x)'}{(1-\cos x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sin x}=\infty$$

Misol:

$\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ko‘ramiz:

a) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(a^x\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{a^x\cdot\ln a}{1}=\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x+1}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}\right)'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}=0$.

Misol:

a) $[0\cdot\infty]$ ko‘rinishdagi aniqmaslikni ko‘ramiz:

$$[0\cdot\infty]=\left[\begin{matrix}\left[\dfrac{0}{0}\right]\\ \left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]\end{matrix}\right].\ f(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}0,\quad \varphi(x)\underset{x\to a}{\longrightarrow}\infty$$

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\dfrac{1}{\varphi(x)}}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{\dfrac{1}{f(x)}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right].$$

Misol:

$$\lim_{x\to0}\left(x^2\cdot\ln x\right)=[0\cdot\infty]=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{x^2}}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{1}{x}}{-2\cdot\dfrac{1}{x^3}}=$$

$$=\lim_{x\to0}\left(-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{x}\right)=0.$$

Misol:

Quyidagi aniqmasliklar $\left[0^0\right],\left[\infty^0\right],\left[1^\infty\right]$ ni dastlabki logarifmlash yordamida $[0\cdot\infty]$ ko‘rinishdagi aniqmaslikka olib kelinadi.

Misol:

$y = x^x, \quad x \to 0. \ \lim_{x\to 0} x^x = ?$

Logarifmlaymiz: $ln\, y = x\, ln\, x$.

Hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} x \ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$$

$$\lim_{x\to 0} \ln y = 0, \quad \ln \lim_{x\to 0} y = 0, \quad \lim_{x\to 0} y = 1, \ \lim_{x\to 0} x^x = 1.$$

1.1.5. Teylor formulasi

T Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida $n+1$ marta differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu atrofidagi har qanday x uchun n -tartibli Teylor formulasi o‘rinli:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_{n+1}(x),$$

bu erda

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}\left(x_0 + \theta(x - x_0)\right)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1$$

$R_{n+1}(x)$ - Langranj ko‘rinishidagi qoldiq haddir.

Isboti:

Quyidagicha belgilash kiritamiz:

$$\varphi(x, x_0) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$\varphi(x, x_0)$ - n - tartibli ko‘phad (**Teylor ko‘phadi** deb ataladi), $R_{n+1}(x) = f(x) - \varphi(x, x_0)$.

Ushbu formula o‘rinli ekanligini ko‘rsatamiz. Berilgan atrofda x ni fiksirlaymiz, ya’ni $x > x_0$ bo‘lsin. $[x_0, x]$ kesmada yordamchi funksiyani ko‘rib chiqamiz:

$$\Phi(t)=f(x)-\varphi(x,t)-\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}\cdot R_{n+1}(x), \text{ bu erda } t\in[x_0,x].$$

$\Phi(x_0)=\Phi(x)$ bo‘lgani va $\Phi(t)$ - Roll teoremasining shartlarini qanoatlantirgani uchun $[x_0,x]$ kesmaga tegishli shunday $\xi\in[x_0,x]$ nuqta mavjudki, bu nuqtada $\Phi'(\xi)=0$ shart o‘rinli bo‘ladi.

$\Phi'(t)$ ni hisoblash uchun $\varphi(x,t)$ ni yozib olamiz:

$$\varphi(x,t)=f(t)+\frac{f'(t)}{1!}(x-t)+\frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2+...+\frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

$$\Phi'(t)=-\varphi'_t(x,t)+(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}\cdot R_{n+1}(x).$$

$$\varphi'_t(x,t)=\cancel{f'(t)}+\cancel{f''(t)(x-t)}-\cancel{f'(t)}+\cancel{\frac{f'''(t)}{2!}(x-t)^2}-\cancel{\frac{f''(t)}{2!}\cdot 2\cdot(x-t)}+...$$

$$...+\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-\cancel{\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot n\cdot(x-t)^{n-1}}=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Bundan,

$$-\Phi'(t)=\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n-(n+1)\frac{(x-t)^n}{(x-x_0)^{n+1}}\cdot R_{n+1}(x),$$

$t=\xi$ bo‘lganda

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \text{ bo‘ladi.}$$

$\boxed{!}$ 1). n–tartibli Teylor formulasi $y=f(x)$ funksiyani n–darajali ko‘phad va qoldiq had yig‘indisi ko‘rinishida ifodalash imkonini beradi.

2). $R_{n+1}(x)$ uchun olingan formula Lagranj ko‘rinishida qoldiq hadni beradi, ammo qoldiq hadning boshqacha formulalari mavjud, masalan, Peano ko‘rinishida: $R_{n+1}(x)=o\left((x-x_0)^n\right)$ - bu $(x-x_0)^n$-ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor.

Teylor formulasining xususiy hollari

1). Teylor formulasi $x_0=0$ da Makloren formulasi deyiladi:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+...+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+R_{n+1}(x),,$$

$$R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1},\qquad 0<\theta<1.$$

2). $f(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+...+c_nx^n$ - n–tartibli ko‘phadni ko‘rib chiqaylik.

$\forall\ x$ da $f^{n+1}(x)=0$ bo‘lgani uchun qoldiq had $R_{n+1}(x)=0$ nolga teng va

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

o‘rinli bo‘ladi.

Xulosa: Teylor formulasi yordamida ixtiyoriy n–tartibli ko‘phadni $(x-x_0)$ ning darajalari ko‘rinishidagi ko‘phad orqali ifodalash mumkin.

Misol:

$2x^3-3x^2+5x+1$ ko‘phadni $(x+1)$ni darajalari bo‘yicha yoying.

yechish:

$f(x)=2x^3-3x^2+5x+1,\ x_0=-1;\ f(-1)=-9$.

Teylor formulasi koeffitsientlarni topamiz:

$f'(x)=6x^2-6x+5\to f'(-1)=17$;

$f''(x)=12x-6\to f''(-1)=-18$;

$f'''(x)=12\to f'''(-1)=12$;

$f^{IV}(x)=0$;

....

$f^{(n)}(x)=0 \qquad \Rightarrow\ f(x)=-9+\frac{17}{1!}(x+1)-\frac{18}{2!}(x+1)^2+\frac{12}{3!}(x+1)^3$

$2x^3-3x^2+5x+1=-9+17(x+1)-9(x+1)^2+2(x+1)^3$.

Ba’zi elementar funksiyalarni Makloren formulasi bo‘yicha yoyish

1. $f(x)=e^x,\ f(0)=1,$

$f'(x)=e^x,\ f'(0)=1,$

$f''(x)=e^x,\ f''(0)=1,$

.... ,

$f^{(n)}(x)=e^x,\ f^{(n)}(0)=1,$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+R_{n+1}(x),\quad R_{n+1}(x)=\frac{e^{\theta x}}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

2. $f(x)=sin\,x,\ f(0)=0,$

$$f'(x)=\cos x=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\ f'(0)=1,$$

$$f''(x)=-\sin x=\sin\left(x+2\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f''(0)=0,$$

$$f'''(x)=-\cos x=\sin\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f'''(0)=-1,$$

.... ,

$$f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n-\text{жуфт},\\ (-1)^{\frac{n-1}{2}}, & n-\text{ток}.\end{cases}$$

$$sin\,x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+R_{2n+2}(x).$$

$\boxed{!}$ Toq $\sin x$ funksiya x ning toq darajalari bo‘yicha yoyilgan.

3. $f(x)=cos\,x,\ f(0)=1,$

$$f^{(n)}(x)=cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(n)}(0)=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)=\begin{cases}0, & n-\text{ток},\\ (-1)^{\frac{n}{2}}, & n-\text{жуфт}.\end{cases}$$

$$cos\, x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x).$$

! Juft $\cos x$ funksiya juft x daraja bo‘yicha yoyilgan.

4. $f(x) = ln(1+x),\ f(0) = 0,$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x},\ f'(0) = 1,$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2},\ f''(0) = -1,$$

$$f'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3},\ f'''(0) = 2,$$

.... ,

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+x)^n},\ f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!,$$

$$ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - ... + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x).$$

5. $f(x) = (1+x)^\alpha$, bu erda α - ixtiyoriy haqiqiy son.

$$f(x) = (1+x)^\alpha = 1 + \alpha \cdot x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + ... + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-n+1)}{n!}x^n + R_{n+1}(x).$$

Bu formula $\alpha = n$ bo‘lganda $(1+x)^n = 1 + n\cdot x + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + ... + x^n$ - ko‘rinishda bo‘lib, u Nyuton binomi formulasi deb nomlanadi.

Elementar funksiyalar uchun Makloren formulalari:

1. $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} ... + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^{\theta x};\ 0 < \theta < 1.$

2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot \sin\left(\theta x + \frac{2n+2}{2}\pi\right); 0 < \theta < 1.$

3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - ... + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cdot \cos\left(\theta x + \frac{2n+1}{2}\pi\right);\ 0 < \theta < 1.$

4. $\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\frac{(-1)^n x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^n}$; $0<\theta<1$.

Qoldiq hadni baxolash

$f(x)$ funksiya x_0 nuqta atrofida $\forall n$ uchun va x_0 nuqtaning atrofidagi $\forall x$ lar uchun $\left|f^{(n)}(x)\right|\le M$ shartni qanoatlantirsin. $R_{n+1}(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ qoldiqni ko‘rib chiqaylik:

$$\left|R_{n+1}(x)\right|=\frac{1}{(n+1)!}\cdot\left|f^{(n+1)}(\xi)\right|\cdot\left|x-x_0\right|^{n+1}\le M\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!},\quad \forall\left|x-x_0\right| \quad n\to\infty \text{ da}$$

$\frac{\left|x-x_0\right|^{n+1}}{(n+1)!}\to 0$ bo‘lganda va qoldiq hadni n - ni kattalashtirish orqali etarlicha kamaytirish mumkin.

SHunday qilib, agar $f(x)$ funksiya yuqorida keltirilgan xossalarga ega bo‘lsa, u holda Teylor formulasini har qanday aniqlikkacha taqribiy hisoblash uchun qo‘llash mumkin.

Teylor va Makloren formularining tadbiqi

1). Funksiyalarning taqribiy qiymatlarini hisoblash uchun:

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+...+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

Hisoblashdagi hatolik qoldiq hadni baholash orqali topiladi, ya’ni $\left|R_{n+1}(x)\right|<\varepsilon$, bu erda ε - xatolik.

Misol:	e ni $\varepsilon=10^{-3}$ aniqlikda hisoblang.

	$e^x,\ x=1,\ x_0=0$ ni ko'rib chiqamiz. $e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}...+\frac{1}{n!}+R_{n+1}(1),\ \ R_{n+1}(1)=\frac{e^{\theta}}{(n+1)!},\ \ 0<\theta<1.$ $\left\|R_{n+1}(1)\right\|<\frac{e}{(n+1)!},\ \ e<3\Rightarrow\left\|R_{n+1}(1)\right\|<\frac{3}{(n+1)!}\le\varepsilon.$

Misol:	$\frac{3}{(n+1)!}\le 0{,}001$ shartni qanoatlantiruvchi eng kichik n ni topamiz: $n=6:\quad e=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}...+\frac{1}{6!}=\frac{1957}{720}=2{,}714$

2). Funksiya limitlarini hisoblash uchun:

Misol:	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left\{x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...\right\}-x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+...}{x^3}=.$ $=-\frac{1}{3!}=-\frac{1}{6}$

Bayon etilgan materiallarni o'rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

Roll teoremasi (hosilaning noli);

Lagranjning chekli orttirmalar haqidagi teoremasi;

Koshining chekli orttirmalar haqidagi umumlashgan teoremasi;

Aniqmqsliklarni ochush. Lopital qoidasi;

Lopital qoidasi yordamida $\left[\frac{0}{0}\right],\left[\frac{\infty}{\infty}\right],[0\cdot\infty],\left[0^0\right],\left[\infty^0\right],\left[1^{\infty}\right]$

ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish;

Asosiy elementar funksiyalar uchun Teylor qo'phadlarining ko'rinishlari;

Ayrim elementar funksiyalarni Makleron qatoriga yoyish;

Funksiyalarni qatorlarga yoyishdagi qoldiq hadlarni baholash.

GLOSSARIY

ATAMANING O'ZBEK TILIDA NOMLANISHI	ATAMANING INGLIZ TILIDA NOMLANISHI	ATAMANING RUS TILIDA NOMLANISHI	ATAMANING MA'NOSI
Absissa	abscissa	absissa	Dekart koordinatalar sistemasing X o'qi absissa deb ataladi.
Algebraik to'ldiruvchi	cofactors	Algebraicheskoe dopolnenie elementa	Element joylashgan satr va ustun yig'indisi juft bo'lsa-minorga teng, toq bo'lsa- minordan ishoraga farq qiladi .
Aylana	Circle	Okrujnost	Tekislikda, markaz deb ataluvchi nuqtadan teng masofada yotgan nuqtalarning geometrik o'rni aylana deyiladi.
Aylana tenglamasi	Equation of circle	Uravnenie okrujnosti	Markazi $D(a,b)$ nuqtada, radiusi R bo'lgan aylana tenglamasi $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ bo'ladi.
Birinchi ajoyib limit	The first remarkable limit	Pervыy zamechatelnыy predel	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ limitiga birinchi ajoyib limit deb ataladi.
Birlik matrisa	identity matrix	Edinichnaya matritsa	Bosh diagonalining hamma elementlari bir soniga,qolgan elementlari nolga teng bo'lgan kvadrat matrisa
Burilish nuqta	The inflection point	Tochka peregiba	Funkciya ikkinchi tartibli hosilasini nolga aylantiruvchi nuqta
Cheksiz katta miqdor	Infinite large quantity	Beskonechno bolshaya velichena	Cheksiz katta miqdor bevosita funksiya limiti tushunchasi bilan bog'liq tushuncha bo'lib, funksiya limitining cheksizdagi qiymatiga aytiladi.
Cheksiz kichik miqdor	Infinite smal quantity	Beskonechno malaya velichena	Cheksiz kichik miqdor bevosita funkciya limiti tushunchasi bilan bog'liq tushuncha bo'lib, funksiya limitining noldagi qiymatiga aytiladi.
Chiziqli tenglamalar sistemasi	System of lyner equations	Sistema lineynыx uravneniy	Ushbu ko'rinishdagi $\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$ tenglama chiziqli algebraik

			tenglamalar sistemasi deb ataladi.
Dekart koordinatalar sistemasi	Cartesian coordinate system	Dekartovaya sistema koordinat	Dekart koordinatalar sistemasi tekislikda yo'ki fazoda to'g'ri chiziqli koordinatalar sistemasi bo'lib, odatda o'qlar bo'yicha masshtab birliklari teng qilib olinadi. Agar koordinata o'qlari o'zaro perpendikulyar bo'lsa, uni to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasi deb ataladi.
Determinant minori	Minors	Minor opredelitelya	Determinantning mos elementi joylashgan satr va ustunlarini tashlab yuborish natijasida hosil bulgan determinant
Determinant satri	rows (horizontal lines)	Stroki opredelitelya	Determinantning gorizontal qatori
Determinant ustuni	columns (vertical lines)	Stolbsы opredelitelya	Determinantning vertikal qatori
Differensiallanuvchi funksiya	Differentiable function	Differensiruemaya funksiya	Agar $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, ya'ni $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$ limit mavjud bo'lsa, berilgan $x = x_0$ qiymatda funksiya differensiallanuvchi deyiladi.
Doira	Disc	Krug	Tekislikning aylana bilan chegaralangan qismi doira deyiladi.
Ekssentrisitet	Eccentricity	Ekssentrisitet	Ellips fokuslari orasidagi masofaning katta o'qiga nisbati ellipsning ekssentrisiteti deyiladi va odatda ε harfi orqali belgilanadi.
Ellips	Ellipse	Ellips	Tekislikda har bir nuqtasidan, fokuslar deb ataluvchi ikki nuqtagacha bo'lgan masofalari yig'indisi o'zgarmas miqdor bo'lgan nuqtalarning geometrik o'rni ellips deyiladi. Tenglamasi $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ kabi yoziladi.

$f(x)$ **funksiyaning grafigiga urinma**	the tangent line to the graph of $f(x)$	Kasatelnaya k grafiku $f(x)$	Funksiyaning grafigiga biror nuqtasida o'tkazilgan to'g'ri chiziq bo'lib,u grafik bilan bitta umumiy nuqtaga ega.
$f(x)$ **funksiyaning hosilasi**	derivative of $f(x)$	Proizvodnaya funksii $f(x)$	$f(x)$ funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limiti
Formula	Formula	Formula	Matematik belgilarning arifmetik amalllar va belgilar yordamida ifodalanishi.
Funksiya	function	funksiya	Funksiya-bu bir qiymatli moslikdir. Funksiya bu matematik termin bo'lib bir to'plam elementlarini ikkinchi to'plam elementlariga biror qonun yoki qoidaga ko'ra mos qo'yuvchi munosabatdir.
Funksiya hosilasi	Derivation of function	Proizvodnaya funksii	Funksiya orttirmasi Δy ning argument orttirmasi Δx ga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitiga funksiya hosilasi deyiladi. Matematik yozilishi quyidagicha: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$
Funksiya limiti	function	Predel funksii	Funksiya limiti shunday kattalik bo'lib, qaralayotgan funksiyaning argumentining berilgan limit nuqtadagi qiymatiga intilishi deb tushuniladi
Funksiya uzluksizligi	Continuous function	Neprerыvnost funksii	Agar $y = f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti uning shu nuqtadagi qiymatiga teng bo'lsa, funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi. $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = f(x_o)$.
Funksiya uzluksizligi (ikkinchi ta'rif)	Continuity of a function	Neprerыvnost funksii	Agar har qanday $\varepsilon > 0$ son olinganda ham shunday $\delta > 0$ son topilsaki, argument x ning $\|x-a\| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlarida $\|f(x) - f(a)\| < \varepsilon$

			tengsizlik bajarilsa, $f(x)$ funksiya a nuqtada uzluksiz deyiladi.
Giperbola	Hyperbola	Giperbola	Har bir nuqtasidan fokuslar deb ataluvchi ikki nuqtagacha bo‘lgan masofalar ayirmasining absolyut qiymati o‘zgarmas miqdor bo‘lgan nuqtalarning geometrik o‘rni giperbola deyiladi. Tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ kabi yoziladi.
Hosilaning geometrik ma’nosi	Geometric meaning of derivative	Geometricheskiy smысl proizvodnoy	$y=f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi hosilasi, funksiya grafigiga $M(x_0,y_0)$ nuqtada o‘tkazilgan urunma burchak koeffitsientiga teng.
Hosilaning mexanik ma’nosi	Mechanic meaning of derivative	Mexanicheskiy smысl proizvodnoy	Harakatdagi jism (nuqta) bosib o‘tgan yo‘ldan vaqt bo‘yicha olingan hosila jismning o‘sha vaqtdagi o‘rtacha tezligini bildiradi.
Ikki nuqtadan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi	Equation of the line with two points	Uravnenie pryamoy, proxodyaщey cherez dve tochki	Tekislikda ikkita $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalar berilgan bo‘lsin. Ulardan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq tenglamasi $\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{x-x_1}{x_2-x_1}$ bo‘ladi.
Ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchak	Angle between two lines	Ugol mejdu dvumya pryamымi	Tekislikda ikki to‘g‘ri chiziq $y=k_1x+b_1$, $y=k_2x+b_2$ tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin. Bu to‘g‘ri chiziqlar orasidagi φ burchak $tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}$ formula bilan topiladi.
Ikkinchi ajoyib limit	The second remarkable limit	Vtoroy zamechatelnыy predel	$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$ munosabatiga ikkinchi ajoyib limit deyiladi.
Irratsional ifoda	Irrational expression	Irratsionalnoe vыrajenie	O’zgaruvch va uning turli kasr darajalari ustida arifmetik amallar bajarilishidan yuzaga

			kelgan ifoda.
Kamayuvchi funksiya	Decreasing function	Uбывауущауа funksiya	Agar $f'(x)<0$ bo'lsa, u holda $x_2 > x_1$ uchun formuladan $f(x_2) < f(x_1)$ bo'ladi. Bu (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyani qa'tiy kamayuvchanligini ko'rsatadi.
Ketma-ketlik	sequence	posledovatelnost	Natural sonlar yordamida nomerlanib chiqilqan $x_1, x_2, \ldots$ sonlardan iborat to'plam sonli ketma-ketlik deyiladi .
Kollinear vektorlar	Collinear vectors	Kollinearnые i komplanarnые vektora	Bir to‘g‘ri chiziqda yoki parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotgan ikki vektorga kollinear vektorlar deyiladi.
Komplanar vektorlar	Coplanar vectors	Komplanarnые vektorы	Bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotgan uchta vektorga komplanar vektorlar deyiladi.
Kompleks son	Complex number	Kompleksnoe chislo	$a+bi$ ko`rinishidagi son. Bu yerda *a* va *b* haqiqiy sonlar
Kompleks son argumenti	The argument of complex number	Argument komleksnogo chisla	Kompleks vektorning *Ox* o`qi bilan hosil qilgan burchagi
Kompleks son moduli	The modul of complex number	Modul kompleksnogo chisla	Komplek sonning uzunligi
Kramer qoidasi	Rule of Kramer	Pravilo Kramera	Agar sistema determinanti $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, u holda sistema yagona yechimga ega bo‘lib, bu yechim quyidagi formulalar orqali topiladi. $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \quad j=\overline{1,n}$ $x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta};$

			$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}$; Bu formula Kramer qoidasi deyiladi.
Kvadrat matrisa	a square matrix	Kvadratnaya matritsa	Satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lgan matrisa
Limit	Limit	predel	Ketma-ketlikning cheksiz katta hadlaridan juda kichik songa farq qiladigan a qiymat, ketma-ketlikning limiti deb ataladi, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} = a$ ko'rinishda yoziladi.
Lopital qoidasi.	De l'Ho'pital's Theorem	Pravilo Lopitalya	Agar $\ell im_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ limit $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmaslik bo'lib, $\ell im_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa (cheksiz ham bo'lishi mumkin), u holda $\ell im_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell im_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ tenglik o'rinli bo'ladi.
Maksimum	Maxima	maksimum	Agar $f(x)$ funksiyaning x_1 nuqtasidagi qiymati x_1 ni o'z ichiga olgan bironta intervalning hamma nuqtalardagi qiymatlaridan katta bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_1 nuqtada maksimum (max)ga ega bo'ladi
Masofa	dictance	Rastoyanie	Ikki nuqtani tutashtiruvchi eng qisqa kesma uzunligiga masofa deyiladi.
Matrisa usuli	Method of Matrice	Matrichnыy metod	Chiziqli tenglamalar sistemasining matritsa ko'rinishini yozamiz. Buning uchun a_{ij}, b_i, va x_i lar yordamida quyidagi matritsalarni hosil qilamiz.

			$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ - & - \quad - \quad - \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix},$$ $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ bu yerda A koeffitsientlar yoki sistema matritsasi, B ustun matritsa, ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda tenglamalar sistemasini quyidagi ko‘rinishda yoza olamiz: $AX = B$ Bu yerdan X matrisani topamiz. Bu usul matrisa usuli deyiladi.
Matrisaning elementi	entry of the matrix	Element matritsы	Matrisaning satr va ustunlarini tashkil etuvchi sonlar
Matrisaning rangi	rank of the matrix	Rang matritsы	Matrisa tarkibidagi noldan farkli determinantlarning eng yukori tartibi
Minimum	Minima	minimum	Agar absolut miqdori bo‘yicha yetarli darajada kichik bo‘lgan har qanday Δx uchun $f(x_2+\Delta x)< f(x_1)$ bo’lsa, $f(x)$ funksiya $x=x_2$ nuqtada minimum (min)ga ega bo‘ladi.
Murakkab funksiyaning hosilasi	Chain rule	Proizvodnaya slojnoy funksii	Aytaylik, $u=\varphi(x)$ va $y=f(u)$ bo’lib, ular yordamida $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo’lsin. Agar $u=\varphi(x)$ funksiya x nuqtada $u'=\varphi'(x)$ hosilaga ega bo’lib, $y=f(u)$ funksiya u nuqtada $(u=\varphi(x))$ $f'(u)$ hosilaga ega bo’lsa, u holda $y=f(\varphi(x))$ murakkab funksiya x nuqtada hosilaga ega va $y'_x=f'(u)\cdot u'_x$, ya’ni

			$y'_x = f'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)$ bo’ladi.
Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa	Distance between point and line	Rasstoyanie ot tochki do pryamoy	Tekislikdagi $M(x_0, y_0)$ nuqtadan $ax+by+c=0$ to‘g‘ri chiziqqacha masofa $d = \frac{\lvert ax_o + by_o + c\rvert}{\sqrt{a^2+b^2}}$ formula orqali hisoblanadi.
O’suvchi funksiya	Increasing function	Vozrastayuщaya funksiya	Agar $f'(x) > 0$ bo’lsa, u holda $x_2 > x_1$ uchun formuladan $f(x_2) > f(x_1)$ bo'ladi. Bu esa (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyani qa’tiy o’suvchanligini ko’rsatadi.
O’zgaruvchi miqdorlar	changing quantities	Peremennыe velichinы	Turli xil qiymatlar qabul qiluvchi miqdorlar
Oniy o’zgarish tezligi	instantaneous rate of change	Mgnovennaya skorost izmeneniya	Miqdorning ayni vaqtdagi o’zgarish tezligini bildiradi
Ordinata	ordinate	ordinata	Dekart koordinatalar sistemasing Y o’qi ordinata deb ataladi.
Parabola	Parabola	Parabola	Fokus deb ataluvchi F nuqtadan va direktrisa deb ataluvchi to‘g‘ri chiziqdan, bir xil uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o‘rniga parabola deyiladi. Tenglamasi $y^2 = 2px$ kabi yoziladi.
Qo`shma son	Conjugate number	Sopryajennoe chislo	Kompleks sonning qo`shmasi
Ratsional kasr	Rational fraction	Ratsionalnaya drob	Suratida ham, mahrajida ham ko‘phadlar bo’lgan kasr ifoda.
Rekurrent formula	The recurrent formula	Rekurrentnaya formula	Avvalgi qiymat yoki ifodalardan foydalanib keyingi qiymat yoki ifodalarni topishga yordam beradigan bog’lanish.
Teskari funksiyaning hosilasi	Inverse function derivative	Proizvodnaya obratnoy funksii	Aytaylik, $y = f(x)$ funksiya (a,b) da berilgan bo’lib, u teskari $x = \varphi(y)$ funksiyaga ega bo’lsin. Agar $y = f(x)$ funksiya $x \in (a,b)$

			nuqtada $f'(x)$ hosilaga ega bo'lib, $f'(x)\neq 0$ bo'lsa, teskari funksiya $\varphi(y)$ ham y nuqtada $(y=f(x))$ hosilaga ega va $\varphi'(y)=\frac{1}{f'(x)}$ bo'ladi.
Teskari matrisa	inverse of the matrix	Obratnaya matritsa	Berilgan matrisaga ko'paytirilganda, birlik matrisa hosil bo'ladi
Teylor formulasi	Taylor formula	Formula Teylora	Ushbu $f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+o\left((x-x_0)^n\right)$ formula $f(x)$ funksiyaning Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi deyiladi.
To'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi	Equation of line with angle coefficient	Uravnenie pryamoy s uglovым koeffitsientom	$y=kx+b$ ko'rinishdagi tynglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi.
To'plam	set	mnojestvo	Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri to'plam tushunchasi hisoblanadi. To'plam boshlang'ich matematik tushunchalardan bo'lib uni ta'rifsiz qabul qilinadi. To'plamni biror belgi yoki xossasiga ko'ra ajratib olingan barcha predmetlar sifatida tasavvurqilish mumkin.
To'plamlar ko'paytmasi	Crossing of sets	Peresechenie mnojestv	A va B to'plamlarning kesishmasi (ba'zan ko'paytmasi) deyilib, shu ikkala to'plamga ham tegishli bo'lgan elementlardan tashkil topgan to'plamga aytiladi va $A\cap B$ belgi orqali yoziladi.
To'plamlar yig'ndisi	Association of sets (Summa of sets)	Ob'edinenie mnojestv	A va B to'plamlarning birlashmasi (ba'zan yig'indisi) deyilib, shu to'plamlardan aqalli bittasiga tegishli bo'lgan elementlardan iborat bo'lgan to'plamga aytiladi va $A\cup B$

			belgi orqali yoziladi.
Urinma	tangent	kasatelnaya	Eg'ri chiziqni ikki x_1 va x_2 nuqtalardan o'tuvchi kesuvchining x_2 nuqtasining x_1 nuqtasiga intilgandagi limit vaziyatiga eg'ri chiziqning x_1 nuqtasidagi urinmasi deyiladi.
Vektorlar	Vectors	Vektorы	O‘zining son qiymatidan boshqa yana fazodagi yo‘nalishi bilan aniqlanadigan miqdorlarga vektorial miqdorlar yoki vektorlar deyiladi. Vektor, odatda, qora *a, b, c,* … yoki ustiga strelka qo‘yilgan $\vec{a},\vec{b},\vec{c},...$ harf bilan yoziladi.
Vektorlarning aralash ko‘paytmasi	Mixed (scalar triple) product of vectors	Smeshannoe proizvedenie vektorov	Uchta $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ ko‘paytmasiga $\vec{a},\vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorlarning aralash ko‘paytmasi deyiladi.
Vektorlarning skalyar ko‘paytmasi	Scalar (dot) product of vectors	Skalyarnoe proizvedenie vektorov	$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor uzunliklarining ko‘paytmasini shu vektor orasidagi burchakning kosinusi bilan ko‘paytmasiga $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko‘paytmasi deyiladi: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\cos\varphi$. Agar $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ bo‘lsa, u holda $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$ bo‘ladi.
Vektorlarning vektor ko‘paytmasi	Vector (cross) product of vectors	Vektornoe proizvedenie vektorov	$\vec{a}$ va $\vec{b}$ ning vektor ko‘paytmasi deb, quyidagicha aniqlangan $\vec{c}$ vektorga aytiladi: 1. $\vec{c}$ vektor uzunligi $\vec{a}$ va $\vec{b}$ lar uzunliklarini ular orasidagi burchakning sinusi bilan ko‘paytmasiga teng: $\lvert\vec{c}\rvert=\lvert\vec{a}\rvert\lvert\vec{b}\rvert\sin\varphi$, $\varphi=\left(\vec{a}\wedge\vec{b}\right)$.

			2. $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar. $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{б}$. 3. $\vec{c}$ ning uchidan qaraganda $\vec{a}$ dan $\vec{b}$ ga burilish soat mili yo‘nalishiga teskari bo‘ladi. $\vec{c}$ = $\vec{a}\times\vec{b}$ kabi belgilanadi. Agar $\vec{a}=(x_1,y_1,z_1)$ va $\vec{b}=(x_2,y_2,z_2)$ bo‘lsa, u holda $\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x_1 & y_1 & z_1\\ x_2 & y_2 & z_2\end{vmatrix}$ bo‘ladi.
Vektorning koordinatalari	Vector coordinates	Koordinatы vektora	Vektor uch o‘lchovli Dekart koordinatalar sistemasida $\vec{a}=(x;y;z)$ kabi yoziladi.
***X* sohada uzluksiz funksiya**	Function continuous on the set X	Funksiya, neprerыvnaya na mnojestve X	Agar $f(x)$ funksiya X to‘plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo‘lsa, funksiya X to‘plamda uzluksiz deyiladi.
Xosmas matrisa	invertible matrix	Nevыrojdennaya matritsa	Determinanti noldan farqli bo'lgan kvadrat matrisa
[*a*,*b*] kesmada chiziqli bog‘liq bo‘lmagan (chiziqli erkli) va chiziqli bog‘liq funksiyalar	Linear dependent and linear independent on the segment [*a*,*b*] functions	Lineyno nezavisimыe i lineyno zavisimыe na otrezke [*a*,*b*] funksii	Agar [*a*,*b*] kesmada $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ funksiyalarning nisbati o‘zgarmas songa teng bo‘lmasa, ya’ni $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}\neq const$ bo‘lsa, $\varphi(x)$ va $\psi(x)$ [*a*,*b*] kesmada chiziqli bog‘liq bo‘lmagan (chiziqli erkli) funksiyalar deyiladi. Aks holda ular chiziqli bog‘liq funksiyalar deyiladi.
Chiziqli erkli yechimlar	The linearly independent solutions	Lineyno nezavisimыe resheniya	Agar $y''+py'+qy=0$ tenglama $y_1(x), y_2(x)$ yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi: $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)=0$ tenglik faqat $c_1=c_2=0$ bo‘lgan holdagina o‘rinli bo‘lsa, u holda ular chiziqli erkli deyiladi.
Chiziqli erksiz yechimlar	Linearly dependent	Lineyno zavisimыe resheniya	Agar $y''+py'+qy=0$ tenglama $y_1(x), y_2(x)$ yechimlarning chiziqli

	solutions		kombinatsiyasi: $c_1 y_1(x)+c_2 y_2(x)=0$ tenglik biron bir $c_1 \neq 0$ yoki $c_2 \neq 0$ bo‘lgan holdagina o‘rinli bo‘lsa, u holda ular chiziqli erksiz deyiladi.
Funksiya	Function	funksiya	Funksiya-bu bir qiymatli moslikdir. Funksiya bu matematik termin bo'lib bir to'plam elementlarini ikkinchi to'plam elementlariga biror qonun yoki qoidaga ko'ra mos qo'yuvchi munosabatdir.

FOYDALANILGAN ADABIYOTLAR

1. Bauman G. Mathematics for engineers I. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010.
2. Bauman G. Mathematics for engineers II. Oldenbourg Wissenschaftsverlag GmbH. 2010.
3. Canuto C., Tabacco A. Mathematical Analysis I. Springer-Verlag Italia, Milan 2008
4. Canuto C., Tabacco A. Mathematical Analysis II. Springer-Verlag Italia, Milan 2008.
5. Stewart J. Calculus Concepts and Contexts, S.BookFi., 2010 y. p.1160.
6. Ummer E.K. Basic Mathematics for Economics, Business, and Finance. – USA and Canada: Routlege, 2012.
7. Wolfgang Ertel. Advanced Mathematics for Engineers, Hochschule Ravensburg-Weingarten, University of Applied Sciences, 2012 y., p.227.
8. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математическая анализа. Москва, 2016 -492c
9. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. Москва, 2005
10. Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике (типовые расчеты) — СПб.: Лань, 2005
11. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика. Том 2, М.: Едиториал УРСС, 2004. — 192 с
12. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И. Вся высшая математика. Том 1, М.: Едиториал УРСС, 2003. — 328 с.
13. Краснов М.Л., Киселев А.И., Макаренко Г.И., Шикин Е.В., Заляпин В.И., Соболев С.К. Вся высшая математика. Том 3, Москва: Эдиториал УРСС, 2001. — 240 с.
14. Лунгу К.Н., Письменный Д.Т., Федин С.Н., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 1 курс М.: Айрис-пресс, 2008. — 576 с:

15. Лунгу К.Н., Норин В.П., Письменный Д.Т., Шевченко Ю.А. Сборник задач по высшей математике. 2 курс М.: Айрис-пресс, 2007. — 592 с:

16. Минорский В.П. Сборник задач по высшей математике. М. Физматлит, 2008, 336 с.

17. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 1, Интеграл-Пресс, 2006.

18. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 2, Интеграл-Пресс, 2006.

19. Berdiqulov M.A., Eshmamatova D.B., Matematika 1, Toshkent, 2018 y.

20. Berdiqulov M.A., Eshmamatova D.B., Matematika 2, Toshkent, 2019 y.

21. G'aniev I. G'., Mansurov X.T., G’anixo’jayev R.N., Egamberdiyev O.I., Isanov R.Sh. Oliy matematika. Toshkent, 2013.

22. G'aniev I. G'., Karimov A.M., Nuriddinov F.R., Mirsalihov E.A. Oliy matematikadan masalalar to’plami. 1-qism. Toshkent-2008.

23. G'aniev I. G'., Karimov A.M., Nuriddinov F.R., Mirsalihov E.A. Oliy matematikadan masalalar to’plami. 2-qism. Toshkent-2009.

24. А.Б. Соболев, А.Ф. Рыбалко. “Математика” Учебное пособие. Часть 1. Екатеринбург 2005 г.

25. Ахипов Г. И., Садовничий В.А., Чуббариков В.Н. Лекции по математическому. М.: Высшая школа, 1999г

26. Ильин В.А., Позняк Э.Г. Основы математического анализа М.: Наука 1995г

MUNDARIJA

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENT