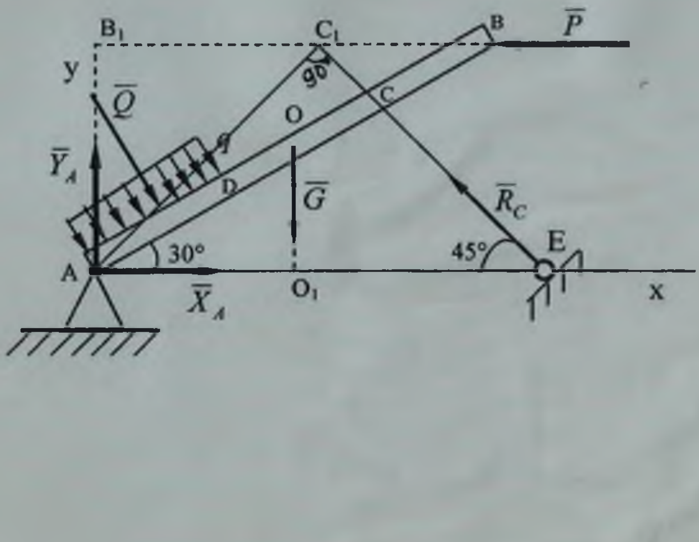
NAZARIY MEXANIKA

(Statika)

O'quv qo'llanma



Toshkent 2006

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI
ABU RAYHON BERUNIY NOMIDAGI TOSHKENT DAVLAT
TEXNIKA UNIVERSITETI

Shoobidov Sh.A., Habibullayeva X.N., Fayzullayeva F.D.

NAZARIY MEXANIKA

(statika)

O'quv qo'llanma

520000 – "Muhandislik va muhandislik ishi"
ta'lim sohalari uchun

Toshkent 2006

UDK. 531. 875

Nazariy mexanika (statika): O'quv qo'llanma /
Shoobidov Sh.A., Habibullayeva H.N., Fayzullayeva F.D.
– Toshkent, ToshDTU, 2006 – 126 b.

Hozirgi zamon fani va texnikasining tez sur'atlar bilan o'sishi umumtexnika fanlarining asosi bo'lgan nazariy mexanikani puxta o'rganishni talab etadi. O'quv qo'llanma, "Nazariy mexanika" fanining statika bo'limiga bag'ishlangan bo'lib, uning qonun-qoidalari to'liq, batafsil bayon etilgan. Ularga doir masalalar yechilgan. Qo'llanma "Muhandislik va muhandislik ishi" yo'nalishlarida ta'lim olayotgan bakalavr iat talabalari uchun mo'ljallangan.

"Nazariy mexanika va mashina detallari" kafedrasi

Abu Rayhon Beruniy nomidagi Toshkent davlat texnika universitetining ilmiy-uslubiy kengashi qarori asosida chop etildi.

Taqrizchilar: O'zbekiston Milliy universiteti "Nazariy va tatbiqiy mexanika" kafedrasi professori, fizika-matematika fanlari doktori A.A. Hamidov.

Toshkent davlat texnika universiteti "Neft va gaz ishi" kafedrasi dotsenti, texnika fanlari nomzodi U.D. Nurmatov.

MUQADDIMA

Tabiatda ro'y beradigan barcha o'zgarishlar va hodisalar harakat deb ataladi. Materiya harakatining eng sodda turi, jism holatining o'zgarishidir, ya'ni moddiy jismlarning vaqt o'tishi bilan fazoda bir-birlariga nisbatan qo'zg'alishlaridir. Harakatning bu turi mexanik harakat deb ataladi. Nazariy mexanika moddiy jismlar harakatining umumiy qonunlari haqidagi fandir. Xususan, agar jismning fazodagi holati vaqt o'tishi bilan o'zgarmasa, bu holda jism muvozanat holatida turadi. Muvozanat mexanik harakatning xususiy holidir. Binobarin, nazariy mexanika muvozanat qonuniyatlarini ham o'rganuvchi fandir. Harakat va muvozanat tushunchalaridan ularning nisbiyligi haqida xulosa chiqarishimiz mumkin. Mexanika fani matematika fani singari qadimiydir. Nazariy mexanikada izlanishning matematik usullari keng tatbiq qilinadi. Jismning holati boshqa qo'zg'almas deb olingan jismga biriktirilgan koordinata o'qlariga nisbatan kuzatiladi. Harakat davomida jismning holati kuzatilayotgan sanoq sistemasiga nisbatan vaqt o'tishi bilan o'zgaradi. Tabiatda harakatsiz jism mavjud emas, binobarin qo'zg'almas sanoq sistemasi ham mavjud emasdir. Odatda ko'pgina muhandislik masalalarini hal qilishda (kosmik uchishlar masalasi bundan mustasnodir), yerni qo'zg'almas deb qaraladi. Shuning uchun, keyinchalik, agar alohida ta'kidlanmasa, yerga bog'langan sanoq sistemasini qo'zg'almas deb qabul qilamiz. Hozirgi zamon "Nazariy mexanika" fanining asosiy qonunlarini 1687 yilda mashhur donishmand olim Isaak Nyuton o'zining «Tabiiy fanlar falsafasining matematik asoslari» nomli asarida bayon qilib bergan. Shuni ta'kidlab o'tamizki, Nyuton qonunlari Arximed va Galiley singari va boshqa buyuk olimlarning kundalik kuzatishlari va izlanishlarining natijasidir. Nazariy mexanika fanining rivojlanishi davomida, undan ko'pgina muhandislik fanlari mustaqil fan bo'lib ajralib chiqdi. Masalan: materiallar qarshiligi, inshootlar nazariyasi, suyuq va gazsimon jismlar mexanikasi, mashina va mexanizmlar nazariyasi va boshqalar. Bu fanlar nazariy mexanika qonunlariga tayangani holda mustaqil fanlar tarzida shakllandi. Hozirgi zamon mexanikasining tez sur'atlar bilan taraqqiy etishi, texnikani rivojlantirishda ijodiy ishlashga qodir bo'lgan yuqori malakali muhandis xodimlarga muhtojlikni oshiradi. Hozirgi zamon muhandislari o'ta murakkab hisob ishlarini bajarishlari darkor, masalan: inshoot muvozanatlariga oid (imorat, ko'prik va boshqalar), mashina va mexanizmlar harakatiga oid hisob-kitob ishlari. Bunday masalalarni yechishga faqat "Nazariy mexanika" fani qonun-qoidalarini chuqur o'rgangan muhandislargina qodirdirlar.

"Nazariy mexanika" fani uch qismdan iborat: statika, kinematika va dinamika.

Statika moddiy jismlar muvozanatiga oid qonunlarni o'rganadi.

Kinematika jism harakati qonunlarini bu harakatni vujudga keltiruvchi yoki o'zgartiruvchi sababga bog'lamay tekshiradi. Bundan ko'rinadiki, kinematika jism harakatini faqat geometrik nuqtai nazardan tekshiradi, ya'ni bu harakatni vujudga keltiruvchi sababga e'tibor bermaydi. Shuning uchun kinematikani to'rt o'lchovli geometriya deb atasak ham bo'ladi. Bunda uchta fazoviy o'zgaruvchilarga to'rtinchi o'zgaruvchi vaqt ham qo'shiladi.

Dinamika jismlar harakatini bu harakatni vujudga keltiruvchi, o'zgartiruvchi sababga bog'lab tekshiradi.

QATTIQ JISM STATIKASI

I BOB

STATIKANING ASOSIY TUSHUNCHALARI BA AKSIOMALARI

1-§. Asosiy tushunchalar va ta'riflar

Jismga ta'sir etuvchi kuchlar turlari, ular ustida amallar, kuchlarning muvozanat shartlarini o'rganuvchi nazariy mexanikaning bo'limi statika deb ataladi. Statikani o'rganish uchun zarur bo'lgan asosiy tushuncha va ta'riflarni keltiramiz.

1. Moddiy nuqta. Ko'rilayotgan masalada geometrik o'lchamlarining ahamiyati bo'lmagan jism moddiy nuqta deb ataladi.

2. Mexanik sistema. Har birining holati va harakati boshqalarining holati va harakatiga bog'liq bo'lgan moddiy nuqtalar to'plami mexanik sistema deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinadiki mexanik sistema moddiy nuqtalar orasida o'zaro ta'sir mavjud bo'lishini taqozo qiladi.

3. Absolyut (mutlaq) qattiq va deformatsiyalanuvchi jism. Qattiq jismning ixtiyoriy ikki nuqtasi orasidagi masofa har qanday holatda ham o'zgarmasdan qolsa, bunday jism absolyut (mutlaq) qattiq jism deb ataladi. Tabiatda mutlaq qattiq jism mavjud emas. Har qanday qattiq jism bo'lmasin, shunday sharoit mavjud qilish mumkinki, uning ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarishiga olib kelish mumkin. Bu jism shaklining o'zgarishiga olib keladi. Ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgaruvchi bo'lgan qattiq jism deformatsiyalanuvchi jism deb ataladi. Binobarin tabiatda faqat deformatsiyalanuvchi jism mavjuddir.

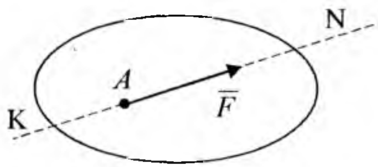
4. Erkin va erkin bo'lmagan jism. Fazoda ixtiyoriy vaziyatni egallashi mumkin bo'lgan jism erkin jism deb ataladi. Quyosh sistemasining sayyoralari bunga misol bo'la oladi. Agar jismning fazodagi vaziyati yoki harakatiga qandaydir chek qo'yilsa, bunday jism erkin bo'lmagan, ya'ni bog'lanishdagi jism deb ataladi.

5. Kuch. Moddiy jismlarning harakati yoki ichki holatining o'zgarishiga sabab bo'luvchi, o'zaro bir-birlariga ko'rsatgan ta'sirlarning miqdor o'lchovi kuch deb ataladi. Jismlarning o'zaro mexanik ta'siri ularni bir-biriga tegib yoki ma'lum masofada turganida ham mavjud bo'lishi mumkin.

Birinchi toifaga jismlarning o'zaro bir-birlariga bosimi, ikkinchi toifaga har xil tortishish kuchlari : sayyoralar orasidagi o'zaro tortishish, elektr, magnit va boshqalar kiradi. Jismga qo'yilgan kuch: miqdor, yo'nalish va qo'yilish nuqtasi bilan xarakterlanadi, ya'ni kuch vektor kattalikdir. SI xalqaro birliklar sistemasida kuch birligi – Nyuton.

Kuch yo'nalishi deb, tinch holatda turgan erkin moddiy nuqtaning qo'yilgan kuch ta'siridan olgan harakatining yo'nalishiga aytiladi. Kuch yo'nalgan to'g'ri chiziq kuchning ta'sir chizig'i deb ataladi (1-shakl).

Jismning bevosita kuch qo'yilgan nuqtasi kuch qo'yilgan nuqta deb ataladi. Kuch yo'naltirilgan kesma orqali grafik tasvirlanadi. Tanlab olingan masshtabda kesma uzunligi kuch miqdorini ifodalaydi, kesmaning yo'nalishi kuch yo'nalishiga monand, uning boshlanishi yoki oxiri kuch qo'yilgan nuqtaga monand.



1-shakl

1-shaklda $\vec{F}$ kuch A nuqtaga qo'yilgan.

6. Kuchlar sistemasi. Jismga qo'yilgan bir necha kuchlardan iborat bo'lgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ to'plam kuchlar sistemasi deb ataladi.

7. Ekvivalent kuchlar sistemasi. Agar jismga qo'yilgan $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'sirini, uning tinch yoki harakat holatini o'zgartirmay, boshqa kuchlar sistemasi, ya'ni $(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_n)$, bera olsa, unday ikki kuch sistemasi ekvivalent kuchlar sistemasi deyilali. $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n) \Leftrightarrow (\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, ..., \vec{Q}_n)$.

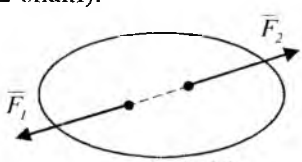
8. Teng ta'sir etuvchi kuch. Berilgan kuchlar sistemasi biror kuchga ekvivalent bo'lsa, bunday kuch teng ta'sir etuvchi kuch deb ataladi. Shuni nazarda tutish kerakki, kuchlar sistemasining jismga bergan ta'sirini yolg'iz bir kuch bera olsa, bunday kuch mazkur kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisidir $\left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \ldots, \vec{Q}_n\right) \Leftrightarrow \bar{R}$.

9. Muvozanatlashgan kuchlar sistemasi. Erkin jism unga qo'yilgan kuchlar sistemasi ta'sirida tinch holatda qolsa, bunday kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasi yoki nolga ekvivalent sistema deyiladi. $\left(\vec{Q}_1, \vec{Q}_2, \ldots, \vec{Q}_n\right) \Leftrightarrow 0$.

2-§. Statikaning asosiy aksiomalari

Statikaning asosida isbot talab etilmaydigan, aksioma deb ataluvchi boshlang'ich haqiqatlar to'plami yotadi. Bu aksiomalar tajriba va kuzatishlarning natijasidir. Aksiomalarga asoslanib, statikaning mazmunini tashkil etuvchi teoremalar isbot qilinadi.

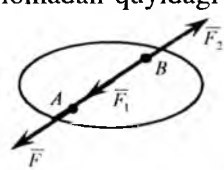
1-aksioma. Erkin qattiq jismga qo'yilgan ikki kuch miqdor jihatdan bir-biriga teng $\left|\bar{F}_1 = -\bar{F}_2\right|$ va bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'lsa, kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi. Bu aksioma oddiy muvozanatlashgan kuchlar sistemasini aniqlaydi (2-shakl).



2-shakl

2-aksioma. Agar jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi qatoriga, muvozanatlashgan kuchlar sistemasini qo'shsak, yoki undan ayirsak, kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi.

Yuqoridagi ikki aksiomadan quyidagi natija kelib chiqadi:



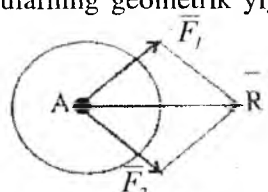
3-shakl

Bu aksiomadan quyidagi natija kelib chiqadi.

Kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, uning qo'yilish nuqtasini ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga ko'chirishimiz mumkin. Jismning A nuqtasiga $\vec{F}$ kuch qo'yilgan (3-shakl). Uning ta'sir chizig'ining, u bo'ylab ixtiyoriy B nuqtasiga muvozanatlashgan kuchlar sistemasini, ya'ni miqdor jihatidan F ga teng bo'lgan $F_1=F_2=F$ va F ning ta'sir chizig'i bo'ylab yo'nalgan, $(\vec{F}_1, \vec{F}_2) \Leftrightarrow 0$ qo'yamiz.

Ikkinchi aksiomaga asosan bu kuchlar sistemasining jismga ta'siri o'zgarmaydi. Osonlik bilan ko'rish mumkinki, $\vec{F}$ va $\vec{F}_2$ kuchlar sistemasi muvozanatlashgan kuchlar sistemasini tashkil qiladi. Bu muvozanatlashgan kuchlar sistemasini jismdan olib tashlaymiz. U holda jismning B nuqtasiga qo'yilgan $\vec{F}_1 = \vec{F}$ kuchigina qoladi. Demak, kuch o'zining ta'sir chizig'i bo'ylab jismning ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilishi mumkin ekan. O'zining ta'sir chizig'i bo'ylab ixtiyoriy nuqtaga ko'chirish mumkin bo'lgan vektor sirpanuvchi vektor deb ataladi.

3-aksioma. Jismning biror nuqtasiga turli yo'nalishda qo'yilgan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi shu nuqtaga qo'yilgan bo'lib, ularning geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Bu aksioma bir nuqtaga qo'yilgan ikki kuchning yig'indisi, shu nuqtaga qo'yilgan ikki vektorni qo'shish qonuniyatiga asoslanadi (4-shakl). $\vec{F}_1$ va $\vec{F}_2$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisini R bilan belgilab, 3-aksiomaga asosan quyidagini yozishimiz mumkin:

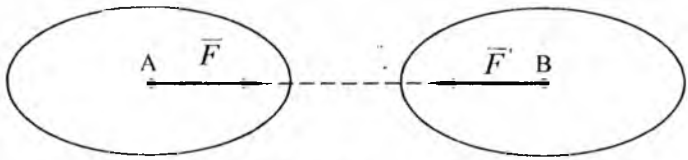


4- shakl

$$\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 .$$

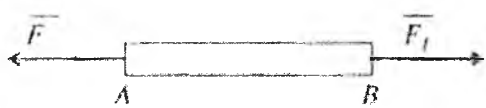
4-aksioma. Ikki jismning bir-biriga ko'rsatgan ta'sir kuchlari o'zaro teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. Bu aksioma ta'sir aks ta'sir tenglik aksiomasi deyiladi. Aksioma tabiatda bir tomonlama ta'sir mavjud emasligini ko'rsatadi. Birinchi jism ikkinchi jismga qanday kuch bilan ta'sir etsa (ta'sir), ikkinchi jism birinchi jismga shunday kuch bilan ta'sir etadi (aks ta'sir). Ta'sir va aks ta'sir kuchlarini ikkita jismga alohida-alohida qo'yilganligini osonlik bilan ko'rish mumkin. Shuning uchun bu ikki kuchni muvozanatlashgan kuchlar sistemasi deb qarab bo'lmaydi.

Masalan: agar A jism B jismga $\vec{F}$ kuch bilan ta'sir qilsa, u holda bir vaqtning o'zida B jism ham A jismga shunday kuch bilan ta'sir qiladi: $\overline{F'} = -\overline{F}$ (5-shakl).



5-shakl

5-aksioma. Berilgan kuchlar ta'sirida deformatsiyalangan jism muvozanat holatida absolyut qattiq jismga aylansa, uning muvozanati o'zgarmaydi. Bu aksiomaga qotish prinsipi deyiladi. Aksiomadan ko'rinadiki, absolyut qattiq jismning muvozanat sharti zaruriydir, ammo ko'p hollarda deformatsiyalanuvchi jismning muvozanati uchun yetarli emas, haqiqatan ham, masalan AB sterjenning ikki $\vec{F}$ va $\vec{F_1}$ kuchlar ta'sirida muvozanatini ko'raylik (6-shakl). Bu kuchlar miqdor jihatidan AB to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan.



6- shakl

Agar sterjen absolyut qattiq bo'lsa, u holda $\vec{F}$ va $\vec{F_1}$ kuchlarning har qanday miqdorlarida sterjen muvozanatda bo'ladi. Agar sterjen absolyut qattiq bo'lmasa, kuchlarning miqdori ixtiyoriy bo'lmaydi, chunki sterjenni uzishi mumkin bo'lgan kuchlarning chegaraviy qiymatlari mavjuddir.

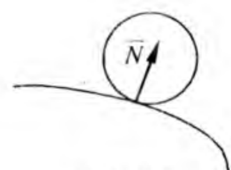
3-§. Bog'lanish va bog'lanish reaksiya kuchlari

Jismning holati va harakatini cheklovchi sabab bog'lanish deb ataladi. Mexanikada bog'lanishlar qattiq yoki elastik jismlar vositasida bajariladi.

Bog'lanishni jismga bergan ta'sirini ekvivalent kuch bilan almashtirish mumkin, uni bog'lanish reaksiyasi deb aytiladi. Jismning bog'lanishga ta'siri bosim deb aytiladi.

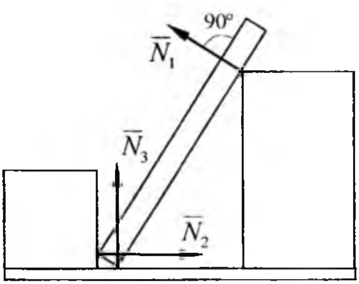
6-aksioma. Har qanday bog'lanishdagi jismni erkin jism deb qarash uchun bog'lanishlarni bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirish kerak. Bu aksioma bog'lanishdan qutulish prinsipi deyiladi. By aksiomaga asosan jismga ta'sir etayotgan kuchlar sistemasi qatoriga bog'lanish reaksiya kuchlarini ham qo'shish kerak. Odatda ular noma'lum bo'lib, berilgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan topiladi. Bog'lanishdan qutulish uchun bog'lansh reaksiya kuchining yo'nalishini aniqlash ahamiyatlidir. Bog'lanish reaksiya kuchining yo'nalishini aniqlashda quyidagidan foydalanishimiz lozim. Bog'lanishdagi jismlarning harakati qaysi tomonga cheklangan bo'lsa, reaksiya kuchi shu yo'nalishga teskari yo'nalgan bo'ladi. Bog'lanishning turlari va bog'lanish reaksiyalari ishqalanish mavjud bo'lmagan bir necha bog'lanishlarda reaksiyalarning yo'nalishlari qanday bo'lishini ko'ramiz.

1. Silliq sirt. Bunday sirt jismga silliq sirt bilan tegib turgan nuqtasidan sirtga o'tkazilgan normal yo'nalishi bo'ylab harakatiga halaqit beradi. Binobarin, reaksiya kuchi $\overline{N}$ silliq sirt bilan jismning tegib turgan nuqtasidan sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'nalgan va shu nuqtaga qo'yilgan bo'ladi (7-shakl).

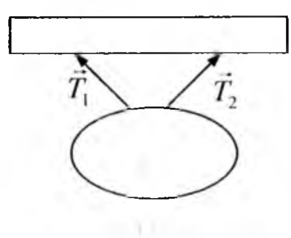


7- shakl.

Agar tegib turgan sirtlardan birortasi nuqta bo'lsa, u holda reaksiya kuchi ikkinchi sirtga o'tkazilgan normal bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (8-shakl).

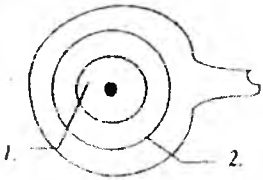


8- shakl



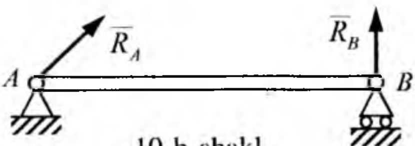
9-shakl

2. Ip (qayish, zanjir, arqon, tros). Agar bog'lanish cho'zilmaydigan ipdan iborat bo'lsa, ip jismning osilish nuqtasidan ip bo'ylab harakatlanishiga chek qo'yadi. Ipning taranglik kuchi ip bo'ylab osilish nuqtasiga tomon yo'naladi (9-shakl).



10-a shakl.

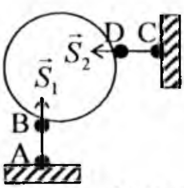
3. Silindrik sharnir (zoldirli g'ildirak-podshipnik). Bolt 1 va kiygizilgan vtulka 2 dan iborat qo'zg'almas silindrik sharnir jism bilan mahkam biriktirilgan vtulkaning ichki diametri bilan barobar (10-a shakl). Jism shakl tekisligiga perpendikulyar bo'lgan sharnir o'qi atrofida aylanishi mumkin. Ammo sharnir o'qiga perpendikulyar yo'nalish bo'yicha harakatlana olmaydi. Shuning uchun silindrik sharnirda reaksiya kuchi, sharnir o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotib, sharnir o'qini kesib o'tadi.



10-b shakl.

Ko'pincha texnikada mustahkam va qo'zg'aluvchan sharnirli tayanchlar uchraydi. 10-b shaklda A mustahkam sharnirli tayanchdir. Bu tayanchda R_A reaksiya kuchi sharnir o'qidan o'tib va unga perpendikulyar tekislikda yotib, ixtiyoriy yo'nalishda bo'ladi. B tayanch sharnirli qo'zg'aluvchan tayanchdir. Bunda R_B reaksiya kuchi qo'zg'aluvchan tayanch tiralib turgan tekislikning normali bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.

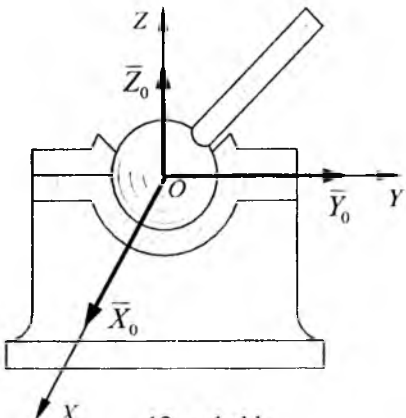
4. Sterjen. Bog'lanish uchlari sharnirlar bilan biriktirilgan AB va CD sterjenlar vositasida bajariladi.



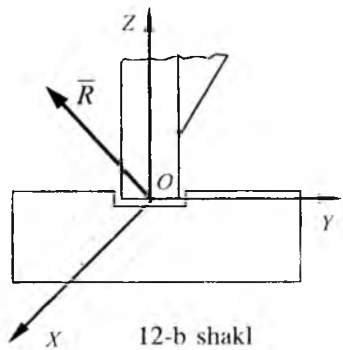
11-shakl

Sterjen og'irliklarini e'tiborga olmay, u sterjenning A va B (C va D) sharnirlariga qo'yilgan ikki kuch ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Binobarin reaksiya kuchlari sterjenlarning uchlaridagi, sharnirlardan o'tuvchi o'qlar bo'ylab yo'nalgan bo'ladi (11-shakl).

5. Zoldirli sharnir va tagtovon (podpyatnik). Bu holda jism har qanday harakat qilishi mumkin, faqat sferik sharnirning markazi qo'zg'almas bo'lib qoladi (12- a shakl).



12-a shakl



12-b shakl

Xuddi shunday bog'lanishni siqib tiralib turgan podshipnik (zoldirli g'ildirak) vositasida bajarilganligini ko'rish mumkin, odatda bu tagtovon (podpyatnik) deyiladi (12-b shakl). Fotoapparatlarning shtatividagi zoldirli tutqich, inson va hayvonlarning ko'pgina suyaklarining birlashgan joylari zoldirli sharnirga misol bo'la oladi. Zoldirli (sferik) sharnir va tagtovon (podpyatnik)larda bog'lanish reaksiya kuchlarining yo'nalishi fazoda ixtiyoriy yo'nalishni olishi mumkin.

Statika qismida quyidagi ikki masala hal qilinadi:

1. Jismga ta'sir qilayotgan kuchlar sistemasi unga ekvivalent bo'lgan soddaroq kuchlar sistemasi bilan almashtiriladi.
2. Kuchlar sistemasi ta'siridagi absolyut qattiq jismning muvozanat shartlarining zarur va yetarliligi tekshiriladi. Bog'lanishdagi jism bog'lanishdan xalos qilinganda erkin jism deb qaraladi. Jism unga ta'sir

qilayotgan kuchlar sistemasi va reaksiya kuchlari ta'siridan muvozanatda bo'ladi. Muvozanat tenglamalaridan no'malum reaksiya kuchlari aniqlanadi. Keyinchalik jismga har xil kuchlar sistemasi ta'sir etayotganda statikaning ikki asosiy masalasi yechiladi.

Takrorlash uchun savollar

1. Statika nimani o'rgatadi?
2. Satatikaning asosiy tushunchalari nimalardan iborat?
3. Statikaning asosiy aksiyomalari qanday?
4. Bog'lanishlar deb nimaga aytiladi?
5. Bog'lanish reaksiya kuchi deb nimaga aytiladi?
6. Bog'lanishdan bo'shatish aksiyomasida nima deyiladi?
7. Bog'lanishning qanday turlarini bilasiz?
8. Jism silliq sirtga tayanganda reaksiya kuchi qanday yo'naladi?
9. Sharnirlardagi reaksiya kuchlari qanday yo'naladi?
10. Ip, sterjenlardagi reaksiya kuchlari qanday yo'naladi?
11. Bog'lanishdagi jism erkin jism holatiga qanday keltiriladi?
12. Qotish prinsipi deganda nimani tushunasiz?

II BOB

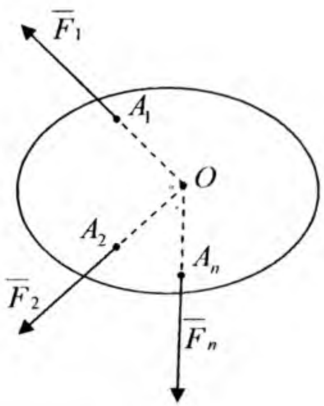
Kesishuvchi kuchlar sistemasi

Jismning A_1, A_2, ... , A_n nuqtalariga $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ kuchlar ta'sir etsin va ularning ta'sir chiziqlari O nuqtada kesishsin.

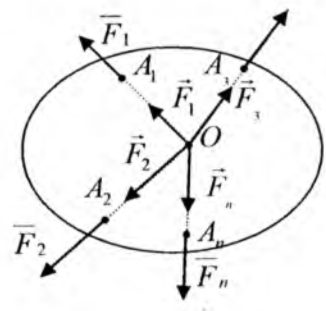
Ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishuvchi kuchlar sistemasi kesishuvchi kuchlar sistemasi deb aytiladi (13-a shakl).

Kesishuvchi kuchlar sistemasi tekislik (fazo)dagi kesishuvchi kuchlar deyiladi, agar ularning ta'sir chiziqlari bir tekislikda joylashgan (joylashmagan) bo'lsa.

Ularni ta'sir chiziqlari bo'ylab O nuqtaga ko'chirish mumkin bo'lganligi tufayli, kesishuvchi kuchlar sistemasini bir nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtiramiz (13- b shakl).



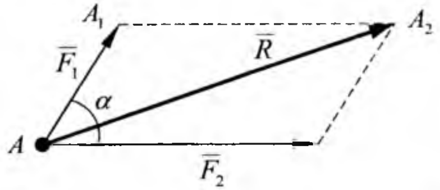
13-a shakl



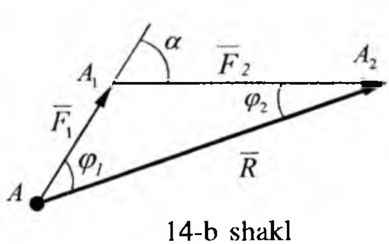
13-b shakl

4-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisini geometrik usulda aniqlash

Avvalambor shuni ta'kidlaymizki, parallelogramm aksiomasiga asosan, biror A nuqtaga qo'yilgan ikki kuchning teng ta'sir etuvchisi ularga qurilgan parallelogramm diagonaliga yoki parallelogrammning yarmini tashkil etuvchi kuch uchburchagining AA_2 tomoniga teng (14-b shakl). Bu holda $\overline{R}$ vektor ikki $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ vektorlarning geometrik yig'indisiga teng, ya'ni $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2$.



14-a shakl



14-b shakl

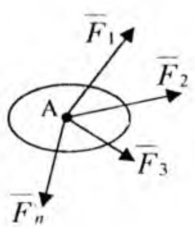
Teng ta'sir etuvchi $\overline{R}$ ni $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarning yo'nalishlari bilan tashkil qilgan burchaklari φ_1 va φ_2 larni hamda uning miqdorini sinuslar va kosinuslar teoremalaridan foydalanib ΔAA_1A_2 dan aniqlanadi

$$\frac{F_1}{\sin\varphi_2} = \frac{F_2}{\sin\varphi_1} = \frac{R}{\sin\alpha} \qquad (2.1)$$

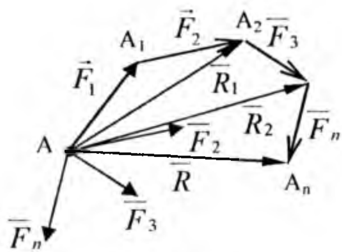
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha} \qquad (2.2)$$

bu yerda, α – $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$ kuchlarning yo'nalishlari orasidagi burchak.

Aytaylik, A nuqtada kesishuvchi $\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n}$ kuchlarning sistemasi berilgan. Birinchi ikki aksiomaning natijasidan foydalanib, bu kuchlar sistemasini A nuqtaga qo'yilgan kuchlar sistemasi bilan almashtiramiz.



15-a shakl



15-b shakl

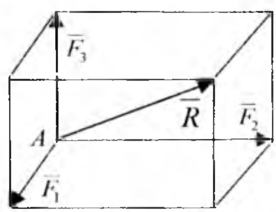
Endi quyidagini qurishni bajaramiz $\overline{F_1}$ kuchining oxiri A_1 dan $\overline{F_2}$ kuch vektoriga teng bo'lgan $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ vektorni o'tkazamiz, uning oxiridan vektor $\overline{A_2}\,\overline{A_3} = \overline{F_3}$, uning oxiridan vektor $\overline{A_3}\,\overline{A_n} = \overline{F_n}$ va hokazo. Hamma kuchlarni qo'ygandan keyin, birinchi kuchning boshi A dan oxirgi kuchining oxiri A_n ga $\overline{AA_n}$ kuch vektorini o'tkazamiz. $A_1A_2...A_n$ ko'pburchakni quramiz, u kuch ko'pburchagi deb ataladi. Kuch ko'pburchagida vektorlar oqimiga qarama-qarshi yo'nalishda bo'lgan $\overline{AA_n}$ vektorga kuch ko'pburchagini yopuvchi tomon deyiladi. Kuch ko'pburchagida shtrixlangan vektor yordamida bo'lingan uchburchaklarni qaraymiz (15-b shakl). Kuch uchburchagini qurish usuliga asosan $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$ kuchlarning teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}_1$, $\overline{AA_2}$ vektor vositasida tasvirlanadi, ya'ni $\overline{R}_1 = \overline{F_1} + \overline{F_2}$. $\overline{AA_3}$ vektor, $\overline{AA_2}$ va $\overline{F_3}$ kuchlarining teng ta'sir etuvchisi $\overline{R_2}$ ni tasvirlaydi, binobarin, uchta $\overline{F_1}, \overline{F_2}$ va $\overline{F_3}$ kuchlarining teng ta'sir etuvchisidir. Ya'ni, $\overline{R_2} = \overline{F_1} + \overline{F_2} + \overline{F_3}$ va hokazo. Hamma uchburchaklarni ko'rib chiqib, quyidagi xulosaga kelamiz. Kuch ko'pburchagini yopuvchi $\overline{AA_n}$ tomoni n-ta kuchning teng ta'sir etuvchisini tasvirlaydi, ya'ni:

$$\overline{R} = \overline{F_1} + \overline{F_1} + ... + \overline{F_n} = \sum \overline{F_k} \qquad (2.3)$$

Shunday qilib kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi, bu kuchlar ustiga qurilgan kuch ko'pburchagining yopuvchi tomoni sifatida geometrik aniqlanar ekan.

Demak, teng ta'sir etuvchi bu kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lar ekan. Teng ta'sir etuvchining ta'sir chizig'i kesishuvchi kuchlar sistemasi ta'sir chiziqlarining kesishgan nuqtasidan o'tadi.

Xususiy holda bir tekislikda yotmagan uchta kesishuvchi kuchlar sistemasini ko'raylik (16-shakl). Bu kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, kuchlar ustiga qurilgan parallelepipedning diagonali orqali tasvirlanadi (parallelepiped). Da'voimizning haqligiga kuch ko'pburchagini qurish orqali ishonch hosil qilamiz.



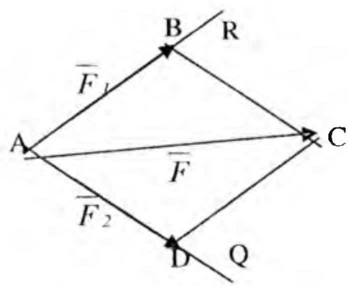
16-shakl

5-§. Kuchni tashkil etuvchilarga ajratish

Kuchni kesishuvchi tashkil etuvchi kuchlar sistemasiga ajratish deb, shunday kesishuvchi kuchlar sistemasini topishga aytiladiki, uning teng ta'sir etuvchisi berilgan kuchga teng bo'ladi. Boshqacha qilib aytganda, shunday kuchlar sistemasini topish kerakki, bu kuchlar ustiga qurilgan kuch ko'pburchagining yopuvchi tomoni berilgan kuchga teng bo'ladi. Bir xil yopuvchi tomonga ega bo'lgan har xil kuch ko'pburchaklarini qurish mumkin. Shuning uchun kuchni ta'sir etuvchilarga ajratish masalasini bir qiymatli hal qilish uchun, mumkin bo'lgan tashkil etuvchilar sonini cheklovchi qo'shimcha shartlar berilishi kerak. Tez-tez uchrab turadigan quyidagi ikki holni ko'ramiz:

1. Berilgan $\bar{F}$ kuchni ikkita tashkil etuvchilarga ajratish

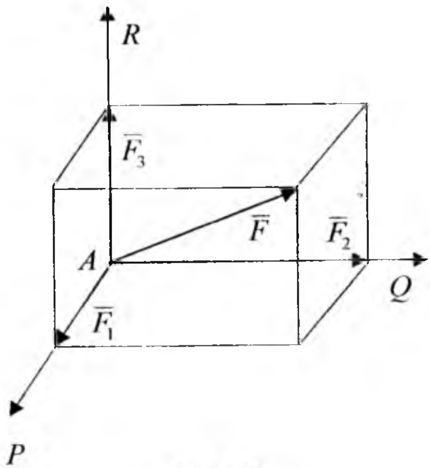
Ularning ta'sir chiziqlarining yo'nalishlari berilgan, AR va AQ $\bar{F}$ kuchi bilan bir tekislikda yotadi. (17-shakl). Buning uchun $\bar{F}$ kuchning oxiridan izlanuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlariga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Diagonali berılgan $\bar{F}$ kuchi bo'lgan ABCD parallelogramm hosil qilamiz. Uning AB va AD tomonlari izlanuvchi tashkil etuvchi $\bar{F}_1$ va $\bar{F}_2$ kuchlaridir.



17-shakl

2. Berilgan $\bar{F}$ kuchni uchta kesishuvchi tashkil etuvchilarga ajratish

Kuchlarning ta'sir chiziqlarining yo'nalishlari fazoda AP, AQ, AR bo'lgan va $\bar{F}$ kuchi bilan bir tekislikda yotmaydi (18-shakl). Buning uchun shunday parallelepiped qurish yetarliki, uning qirralari, ta'sir yo'nalishlari berilgan izlanuvchi kuchlardir. Diagonali esa berilgan kuchdir, u holda parallelepiped qonuniga asosan $\bar{F}_1$, $\bar{F}_2$, $\bar{F}_3$ kuchlar parallelepiped qirralariga monand bo'lib, kuchning berilgan uchiga yo'nalish b o'yicha tashkil etuvchilaridir.



18-shakl

1-masala

Gorizont bilan α burchak tashkil qilgan silliq qiya tekislikda og'irligi $\overline{P}$ bo'lgan jism qiya tekislikka parallel bo'lgan OD ip yordamida muvozanatda tortib turibdi (19-shakl). Ipning taranglik $\overline{T}$ kuchi va jismning qiya tekislikka bo'lgan bosimi aniqlansin.

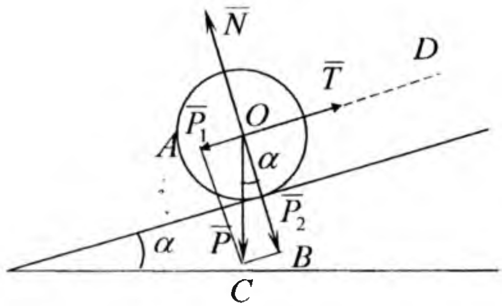
Yechish:

Berilgan $\overline{P}$ kuchni qiya tekislikka parallel va unga perpendikulyar bo'lgan yo'nalishlar bo'yicha $\overline{P_1}$ va $\overline{P_2}$ tashkil etuvchilarga ajratamiz. Buning uchun diagonali $\overline{P}$ kuchiga teng bo'lgan, OA va OB tomonlari tanlab olingan yo'nalishlarga parallel bo'lgan OABC parallelogrammni quramiz. To'g'ri burchakli OBC uchburchakdan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$P_1 = P\sin\alpha,\ P_2 = P\cos\alpha$$

OD ip bo'ylab yo'nalgan $\overline{P_1}$ tashkil etuvchi ip reaksiya kuchi bilan muvozanatlashadi, ya'ni

$$T = P_1 = P\sin\alpha$$



19-shakl

Qiya tekislikka perpendikulyar bo'lgan $\overline{P_2}$ tashkil etuvchi, izlanayotgan shu tekislikka bo'lgan bosimni ifodalaydi. Shuni ta'kidlaymizki, jismga qo'yilgan qiya tekislikning $\overline{N}$ reaksiya kuchi miqdor jihatidan jismning qiya tekisligiga bo'lgan bosimga teng, ya'ni:

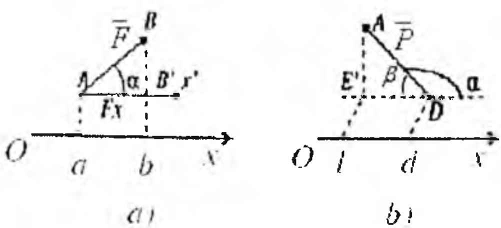
$$N = P_2 = P\cos\alpha .$$

Shuning uchun, tayanchga bo'lgan bosimni aniqlasak, unga teng bo'lgan tayanch reaksiya kuchini aniqlagan bo'lamiz.

6-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisini analitik usulda aniqlash

1. Kuchning o'qdagi va tekislikdagi proyeksiyasi

Kuchning boshi hamda oxirini biror o'qdagi proyeksiyalari orasiga joylashgan, tegishli ishora bilan olingan, kesma uzunligiga teng bo'lgan skalyar miqdorga kuchning o'qdagi proyeksiyasi deb ataladi (20-shakl).



20-shakl

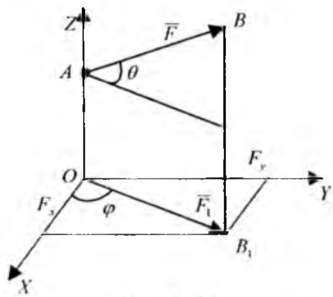
Kuchning o'qdagi proyeksiyasi musbat deb qabul qilinadi, agar proyeksiya boshlanish nuqtasidan oxirga qarab ko'chishi o'qning musbat yo'nalishi bilan hamohang bo'lsa (20-a shakl) va manfiy, agar qarama-qarshi bo'lsa (20-b shakl). Berilgan $\overline{F}$ kuchini OX o'qidagi proyeksiyasini F_x simvol bilan belgilab olamiz. Vektorning yo'nalishlari bir xil bo'lgan ikki parallel o'qlardagi proyeksiyalari o'zaro teng bo'ladi. Agar vektor bilan o'q bir tekislikda yotmasa, undan foydalanish qulaylik tug'diradi (20-b shakl) 20-shakldan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$F_x = ab = AB' = F\cos\alpha$$

$$P_x = -dl = -DE' = -P\cos\beta = P\cos\alpha$$

Demak, kuchning o'qdagi proyeksiyasi, kuch miqdori bilan kuchning o'qning musbat yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchak kosinusining ko'paytmasiga tengdir. O'qning musbat yo'nalishi bilan (masalan Ox) va $\overline{F}$ kuchi yo'nalishi orasidagi burchakni ($\overline{F}$,^ox) deb belgilaymiz. Burchak ($\overline{F}$,^ox)ning kosinusi, yo'naltiruvchi kosinus deb ataladi. Masalalarni yechishda kuchning proyeksiyasining absolyut qiymatini, kuch miqdorini kuchning ta'sir chizig'i bilan o'q yo'nalishi orasidagi o'tkir burchak kosinusiga ko'paytma shaklida olish tavsiya etiladi. Proyeksiyaning ishorasi to'g'ridan-to'g'ri shakldan olinadi. Berilgan $\overline{F}$ kuchning tekislikdagi proyeksiyasi deb (21-shaklda OXY tekisligi) $\overline{F}$ kuchning boshi va oxirini shu tekislikdagi proyeksiyalari orasidagi $\overline{F}_1=\overline{OB}_1$ vektorga aytiladi.

Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi kuchning o'qdagi proyeksiyasidan farq qiladi, chunki u tekislikda miqdor va yo'nalishga ega bo'lgan vektorli miqdordir. Uning miqdori quyidagiga teng: $F_1 = F\cos\theta$



21-shakl

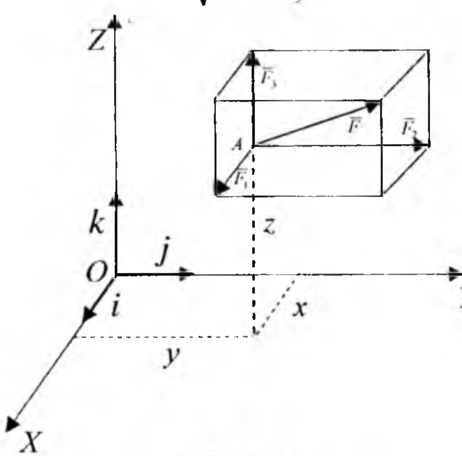
Bu yerda θ _ $\overline{F}$ vektor yo'nalishi bilan uning $\overline{F_1}$ proyeksiyasining yo'nalishi orasidagi burchak. Ko'pgina hollarda kuch bilan bir tekislikda yotmagan o'qdagi proyeksiyasini aniqlash uchun avvalo kuchni o'q yotgan tekislikka proyeksiyalab, proyeksiyani shu o'qqa proyeksiyalash kerak (ikki qaytalab proyeksiyalash usuli) masalan, shaklda ko'rsatilgan hol uchun quyidagilarni topamiz:

$$F_x = F_1 \cos\varphi = F\cos\theta\cos\varphi$$
$$F_y = F_1 \sin\varphi = F\cos\theta\sin\varphi \qquad (2.4)$$

2. Kuchning miqdor va yo'nalishini koordinata o'qlardagi proyeksiyalari orqali aniqlash

Agar $\overline{F}$ kuchning to'g'ri burchakli koordinata o'qlardagi proyeksiyalari berilgan bo'lsa, u holda kuchning miqdori, qirralari kuch proyeksiyalarning absolyut miqdorlariga teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepipedning diagonali uzunligini hisoblash tariqasida bo'ladi, ya'ni:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \qquad (2.5)$$



22-shakl

Kuchning yo'nalishi yo'naltiruvchi kosinuslar orqali quyidagicha aniqlanadi.

$$\cos\left(\overline{F},{}^\wedge x\right)=\frac{F_x}{F}$$

$$\cos\left(\overline{F},{}^\wedge y\right)=\frac{F_y}{F} \qquad (2.6)$$

$$\cos\left(\overline{F},{}^\wedge z\right)=\frac{F_z}{F}$$

Ma'lumki F kuchning to'liq berilishi uchun F_x, F_y, F_z ning proyeksiyalaridan tashqari uning qo'yilish nuqtasining koordinatalarini bilish kerak. Bunday usulga analitik usul deyiladi. 22-shakldan parallelepiped qoidasini e'tiborga olib, koordinata o'qlarining *i, j, k* birlik vektorlaridan foydalanib, $\overline{F}$ kuchni quyidagi yig'indi shaklida tasvirlash mumkin.

$$\vec{F}=F_x\cdot\vec{i}+F_y\cdot\vec{j}+F_z\cdot\vec{k} \quad \text{yoki} \quad \vec{F}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3$$

$$\overline{F_1}=F_x\cdot\bar{i},\ \ \overline{F_2}=F_y\cdot\bar{j},\ \overline{F_3}=F_z\cdot\bar{k} \qquad (2.7)$$

bu yerda F_1, F_2, F_3 – kuchning koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilaridir. Yuqoridagi tenglama kuchning koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilarni tasvirlovchi formuladir.

3. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda aniqlash

Geometriyadan ma'lumki, vektorlar yig'indisining biror o'qdagi proyeksiyasi tashkil etuvchi vektorlarning shu o'qdagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi. Shunga asosan (2.3)dan quyidagini topamiz:

$$R_x=\sum_{k=1}^{n}F_{kx}\,;\quad R_y=\sum_{k=1}^{n}F_{ky}\,;\quad R_z=\sum_{k=1}^{n}F_{kz} \qquad (2.8)$$

Shunday qilib, kesishuvchi kuchlar sistemasinnpg to'g'ri burchakli koordinata sistemasi o'qlaridagi proyeksiyalari F_{kx}, F_{ky}, F_{kz} (k=1, 2,...n) berilgan bo'lsa, u holda teng ta'sir etuvchining proyeksiyalari R_x, R_y, R_z (2.8) formula yordamida aniqlanadi. Keyin (2.5) va (2.6) formulalar yordamida teng ta'sir etuvchining miqdori, yo'nalishlari aniqlanadi.

$$R=\sqrt{R_x^2+R_y^2+R_z^2}\ ,$$

$$\cos(\overline{R},\hat{ox}) = \frac{R_x}{R}$$

$$\cos(\overline{R},\hat{oy}) = \frac{R_y}{R} \qquad (2.9)$$

$$\cos(\overline{R},\hat{oz}) = \frac{R_z}{R}$$

7-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining geometrik va analitik muvozanat shartlari

Kesishuvchi kuchlar sistemasiga qo'yilgan shart bajarilsa va ularning teng ta'sir etuvchisi $R=0$ bo'lsa, u holda bu shartga kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanat sharti deyiladi.

1. Muvozanatning geometrik sharti. Ma'lumki, kesishuvchi kuchlarga qurilgan kuch ko'pburchagi yopiq bo'lganda, faqat shu holdagina $\overline{R}=0$ bo'ladi. Kesishuvchi kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun, kuch ko'pburchagining yopiq bo'lishi zarur va yetarlidir.

2. Muvozanatning analitik sharti. Agar $R=0$ bo'lsa, u holda $R_x=0$, $R_y=0$, $R_z=0$ u holda (2.8)ga asosan quyidagini olamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad (2.10)$$

Teskarisi, agar (2.10) shart bajarilsa, u holda $R=0$ bo'ladi. Binobarin kesishuvchi kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, ularning uchta koordinata o'qlardagi proyeksiyalarining yig'indisi alohida-alohida nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Agar kesishuvchi kuchlar sistemasi tekislikda joylashgan bo'lsa, u holda Ox va Oy o'qlarini shu tekislikda olib, quyidagi muvozanat shartini yozamiz.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \ \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \qquad (2.11)$$

Agar (2.10) va (2.11) shartlarda noma'lum reaksiya kuchlari qatnashsa va ularni aniqlashni taqozo qilsa, u holda bu shartlar muvozanat tengdamalari deb ataladi.

8-§. Uch kuch muvozanati haqida teorema

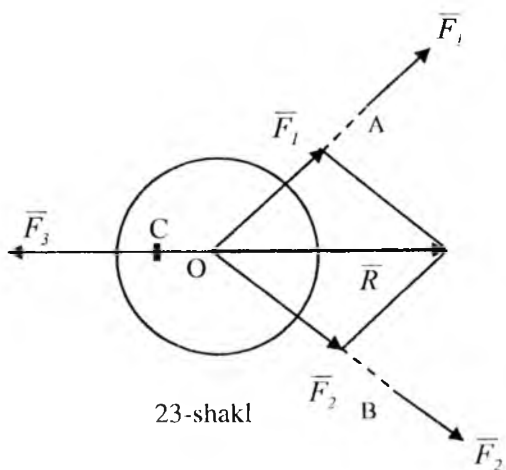
Teorema:

Bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan uchta kuch ta'siridan jism muvozanatda bo'lsa, bu kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadi (23-shakl).

Isbot:

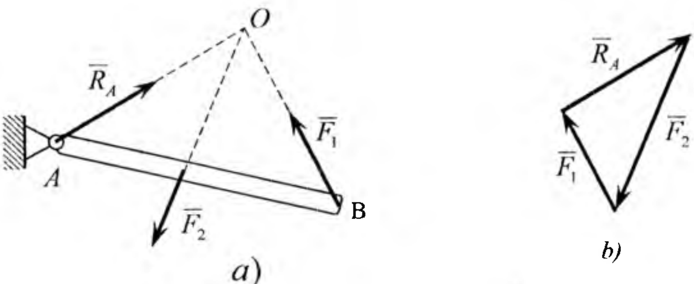
Kuchlar sistemasi bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmaganligi uchun, ulardan ixtiyoriy ikkitasining, masalan, $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$ kuchlarning ta'sir chiziqlari biror O nuqtada kesishadi. $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$ kuchlarni ta'sir chiziqlari bo'ylab O nuqtaga ko'chiramiz va parallelogramm qoidasiga asosan bitta O nuqtaga qo'yilgan $\overline{R}$ kuch bilan almashtiramiz. Natijada ikkita o'zaro muvozanatlashuvchi $\overline{F_3}$ va $\overline{R}$ kuchlarni olamiz. Statikaning birinchi aksiomasiga asosan $\overline{F_3}$ va $\overline{R}$ kuchlari bitta umumiy ta'sir chiziqqa ega. Demak, kuchlar bitta nuqtada kesishadi. Teorema isbotlandi.

Odatda isbot qilingan uchta bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan kuchlarning muvozanat shartlarining zaruriyligidir, ammo bu shartlar yetarli emas, chunki uchta qandaydir kuchlarning ta'sir chiziqlari bir nuqtada kesishadigan bo'lsa, ularni muvozanatlashuvchi deb xulosa chiqarib bo'lmaydi.



23-shakl

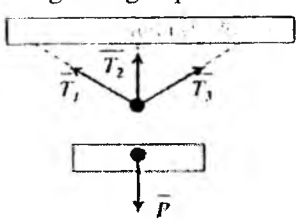
Uch kuch teoremasidan foydalanib, noma'lum reaksiya kuchlarining yo'nalishini avvaldan aniqlash mumkin. Aytaylik, masalan, AB sterjen (24-shakl) uchta kuch ta'siridan muvozanatda. Yo'nalishi noma'lum bo'lgan $\overline{R}_A$ reaksiya kuchining ta'sir chizig'i uch kuch muvozanati haqidagi teoremaga asosan $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlar ta'sir chiziqlari kesishgan O nuqtadan o'tadi. $\overline{R}_A$ reaksiya kuchining yo'nalishi esa, yopiq kuch uchburchagini qurish natijasida aniqlanadi, ya'ni kuch uchburchagida vektorlar oqimi bir xil yo'nalishda bo'ladi.



24-shakl

9-§. Statik aniq, va statik aniqmas masalalar

Bog'lanishdagi qattiq jismlarning muvozanatiga oid ko'pgina masalalar berilgan aktiv kuchlar ta'siridan hosil bo'ladigan bog'lanish reaksiya kuchlarini miqdor va yo'nalishlarini aniqlashdan iboratdir. Shuni ta'kidlaymizki, no'malumlar soni bog'lanishlarning turi va soniga bog'liq bo'ladi. No'malumlar soni muvozanat tenglamalari sonidan oshmaydigan masalalarga statik aniq masalar deyiladi. Yuqoridagi mulohazamiz jismlar sistemasi uchun ham o'rinli bo'lsa, u holda sistema statik aniq sistema deb ataladi. Faqat yuqoridagi masalalarni statikaning metodlari asosida hal qilish mumkin.



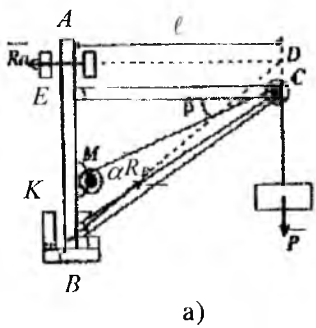
25-shakl

No'malumlar soni ular ishtirok etgan muvozanat tenglamalari sonidan ko'p bo'lsa, bunday masalalar statik aniqmas masalalar deb ataladi. Shu mulohazalar o'rinli bo'lgan sistema statik aniqmas sistemalar deb ataladi. Bunday masalalarni yechishda jismlarning deformatsiyalarini hisobga olish kerak bo'ladi va ular materiallar qarshiligi fanida yoritiladi. Og'irligi $\overline{P}$ bo'lgan yuk ta'siridan bir tekislikda yotuvchi uchta iplarda hosil bo'lgan $\overline{T}_1, \overline{T}_2$ va $\overline{T}_3$ taranglik kuchlarini aniqlash masalasi statik aniqmas masalalarga misol bo'la oladi (25-shakl). Bu masalada uchta no'malumni aniqlash uchun tekislikda kesishuvchi kuchlar uchun ikkita muvozanat tengmalarini tuzish mumkin (2.11).

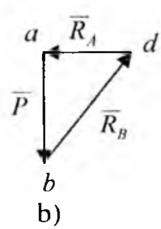
10-§. Kesishuvchi kuchlar sistemasining muvozanatiga oid masalalar

2-masala

Ko'taruvchi kran (26-a shakl) A nuqtaga silindrik sharnir, B nuqtaga tagtovon (podpyatnik) vositasida biriktirilgan. Kran qulochi l=4m, masofa AB=h=5m. Og'irligi P=2 kN bo'lgan yuk tros yordamida C blok orqali kran o'qiga biriktirilgan M lebyodkaga tutashtirilgan. C blok og'irligi e'tiborga olinmaydigan EC va KC sterjenlar yordamida AB o'qqa biriktirilgan. E, K va C nuqtalarda sharnirli bog'lanishlar. Kran og'irligini e'tiborga olmay, muvozanat holatida kranning A va B tayanchlarga bo'lgan bosimlari va α=45°, β=30° bo'lganda EC va KC sterjenlarda hosil bo'ladigan zo'riqishlar aniqlansin (sterjenlarning o'qi bo'ylab ta'sir qiluvchi siquvchi va cho'zuvchi kuchlarning algebraik qiymatlari zo'riqishlar deb ataladi. Agar sterjen cho'zilsa, zo'riqish musbat ishora bilan olinadi, aks holda sterjen siqilsa, zo'riqish manfiy).



a)

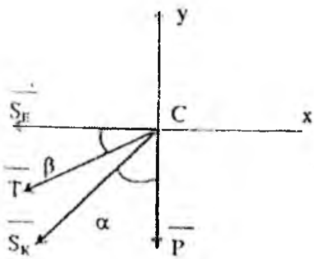


b)

26-shakl

Yechish:

A va B tayanchlarga bo'ladigan bosimlarni aniqlash uchun kranning muvozanatini ko'ramiz. Unga berilgan $\overline{P}$ kuchi va A hamda B nuqtalardagi reaksiya kuchlari ta'sir qiladi A podshipnikdagi $\overline{R}_A$ reaksiya AB o'qqa perpendikulyar tagtovondagi (podpyatnik) $\overline{R}_B$ reaksiya kuchi shakl tekisligida ixtiyoriy yo'nalishda bo'ladi. Kran bir tekislikda yotuvchi parallel bo'lmagan uchta $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$ va $\overline{P}$ kuchlari ta'siridan muvozanatda bo'lganligi uchun ularning ta'sir chiziqlari biror nuqtada kesishishi kerak. $\overline{R}_A$ va $\overline{P}$ kuchlarning ta'sir chiziqlari ma'lum va ular *D* nuqtada kesishadi. Bu yerdan $\overline{R}_B$ reaksiya kuchi *BD* bo'ylab yo'nalganligini ko'rishimiz mumkin. Geometrik yechish usulini tatbiq qilamiz. Muvozanatda $\overline{P}$, $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$ kuchlardan qurilgan kuch uchburchagi yopiq bo'ladi. Kuch uchburchagi qurishni ma'lum bo'lgan $\overline{P}$ kuchidan boshlaymiz. Ixtiyoriy «a» nuqtadan tanlab olingan masshtabda $\overline{ab}=\overline{P}$ vektorini olamiz (26-b shakl). Vektorning boshi hamda oxiridan $\overline{R}_A$, $\overline{R}_B$ reaksiya kuchlarining ta'sir chiziqlariga parallel qilib to'g'ri chiziqlar o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziqlarning kesishgan d nuqtasi *abd* kuch uchburchagining uchinchi uchi hisoblanadi unda *bd* va *ad* tomonlari tanlab olingan masshtabda $\overline{R}_B$ va $\overline{R}_A$ reaksiya kuchlarining miqdorini tasvirlaydi. Bu reaksiya kuchlarining ta'sir chiziqlari bo'ylab yo'nalishlari kuch uchburchagidagi strelkalar oqimiga qarab olinadi. Teng ta'sir etuvchi nolga teng bo'lgani uchun kuch uchburchagini tashkil qiluvchi hamma kuchlarning strelkalari berilgan $\overline{P}$ kuchning yo'nalishiga mos bo'lib, kuch uchburchagining konturi bo'ylab aylanadi. Kuch ko'pburchagi qurilgandan keyin $\overline{R}_B$ va $\overline{R}_A$ larni analitik aniqlash mumkin. Uchburchaklar *abd* va *ABD*larning o'xshashligidan quyidagilarni aniqlaymiz.



27-shakl

$$\frac{R_A}{l}=\frac{P}{h};\quad \frac{R_B}{\sqrt{h^2+l^2}}=\frac{P}{h}$$

bundan

$$R_A=P\frac{l}{h}=1{,}6\kappa N;\quad R_B=P\sqrt{1+\frac{\ell^2}{h^2}}=2{,}56\kappa N$$

Muvozanat holatda kranning A va B tayanchlarga ko'rsatgan bosimi miqdor jihatidan topilgan reaksiya kuchlariga teng bo'lib, ular bilan bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'naladi.

2. EC va KC sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlash uchun C blokning muvozanatini tekshiramiz. C blokni bog'lanishdan ozod qilamiz, unga ta'sir qilayotgan kuch vektorlarini ko'rsatamiz (27-shakl). Yukning $\bar{P}$ og'irligiga teng bo'lgan, trosning o'ng qismidagi T taranglik, miqdor jihatidan P ga teng (Agar blokda ishqalanish e'tiborga olinmasa, u holda trosning hamma nuqtalaridagi taranglik bir xil bo'ladi) va sterjen o'qi bo'ylab yo'nalgan $\bar{S}_E$ va $\bar{S}_K$ reaksiyalari. Sterjenlar cho'ziladi deb ta'kidlab, $\bar{S}_E$ va $\bar{S}_K$ lar C nuqtadan sterjenlarning o'rtalariga qarab yo'naltiramiz. Blokning o'lchovlarini e'tiborga olmay, kuchlarni C nuqtada kesishadi deb hisoblaymiz. Kuchlar soni uchtadan oshiq bo'lganligi uchun analitik aniqlash usulini tatbiq qilamiz. Koordinata o'qlarini 27-shaklda ko'rsatilganidek tanlab, (2.11) muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{kx}=0,\ -S_E - T\cos\beta - S_k\sin\alpha=0$$

$$\sum F_{ky}=0,\ -P - T\sin\beta - S_k\cos\alpha=0$$

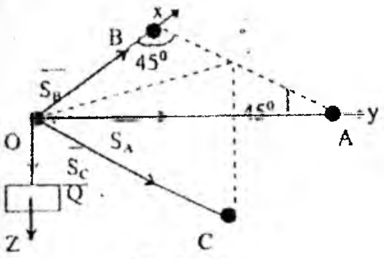
Bu tenglamalarni yechishda $T=P$ deb olamiz va son qiymatlarini qo'ysak, quyidagilarni aniqlaymiz.

$$S_k=-P\frac{1+\sin\beta}{\cos\alpha}\approx-4{,}26\ kN;$$

$$S_E=-P\frac{\sin\alpha-\cos(\alpha+\beta)}{\cos\alpha}\approx 1{,}27\ kN$$

Bu yerda S_K manfiy ishorada chiqqanligi uchun, $\bar{S}_K$ vektori 27-shaklda tanlab olingan yo'nalishga teskari yo'nalgan bo'ladi. Binobarin KC sterjen siqiladi S_E reaksiya kuchining musbat aniqlanishi 27-shaklda $\bar{S}_E$ vektorining yo'nalishi to'g'ri boshlab olinganligini ko'rsatadi, binobarin *EC* sterjen cho'ziladi. Modomiki shunday ekan, aniqlangan S_K va S_E reaksiyalarning miqdorlari aniqlanishi lozim bo'lgan *EC* va *KC* sterjenlardagi zo'riqishlarni ifodalaydi.

3-masala



28-shakl

Vertikal devorga *A*, *B* va *C* sharnirlar yordamida uchta og'irligi e'tiborga olinmaydigan sterjenlar o'zaro *O* nuqtada biriktirilgan sterjenlar o'rnatilgan (28-shakl). *AO* va *BO* sterjenlar gorizontal tekislikda joylashgan va har biri devor bilan 45° burchaklar tashkil qiladi. *CO* sterjen vertikal tekislikda yotadi va devor bilan 30° burchak hosil qiladi. Sterjenlarning sharnirli *O* boltga bo'lgan reaksiyasi aniqlansin. Unga og'irligi *Q* yuk osilgan.

Yechish:

O sharnirning muvozanatini tekshiramiz. Unga og'irligi *Q* yuk qo'yilgan, hamda cho'zilgan deb qabul qilingan sterjenlardagi S_E, S_A va S_B reaksiyalari. Burchak $\angle AOB$ ni to'g'ri deb, koordinata o'qlarini shaklda ko'rsatilganday olamiz.

Fazodagi kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun muvozanat tenglamalarini (2.10) tuzamiz.

$$\sum F_{kx} = 0;\ S_B + S_C \sin 30° \cos 45° = 0\,;$$
$$\sum F_{ky} = 0;\ S_A + S_C \sin 30° \cos 45° = 0\,;$$
$$\sum F_{kz} = 0;\ Q + S_C \cos 30° = 0\,.$$

S_C kuchni x va y koordinat o'qlariga proyeksiyalashda, ikki qaytalab proyeksiyalash usuli tatbiq qilindi. Kuchni x o'qidagi proyeksiyasi S_{CX} ni topish uchun, avval S_C kuchni x o'qi yotgan tekislikka (uchburchak *AOB* yotgan tekislikka) proyeksiyalaymiz. Shaklda ko'rsatilmagan *AOB* uchburchakning bissektrisasi bo'ylab yo'nalgan vektorni hosil qilamiz, uning miqdori $S_C \cdot \sin 30°$ ga teng. So'ngra bu vektorni x o'qiga proyeksiyalaymiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$S_{CX} = S_C \cdot \sin 30° \cos 45°.$$

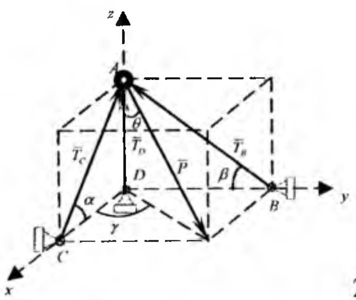
Xuddi shunday S_{CY} proyeksiyani aniqlaymiz. Muvozanat tenglamalarini yechib quyidagilarni topamiz.

$$S_C = -\frac{20}{\sqrt{3}}, \quad S_B = S_A = \frac{20}{\sqrt{3}}\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{Q}{\sqrt{6}}$$

S_C ning ishorasi manfiy chiqqanligi uchun, *CO* sterjenni siqiladi deb xulosa chiqaramiz. Uning *O* sharnirga bo'lgan reaksiyasi shaklda ko'rsatilgan yo'nalishga teskari yo'nalgan bo'ladi. S_A va S_B– reaksiya kuchlarining ishoralarining musbat ishorali bo'lishi *OA* va *OB* sterjenlarning cho'zilishini ko'rsatadi. Ularning *O* sharnirga reaksiyalari shaklda ko'rsatilgandek bo'ladi.

4-masala

Shaklda ko'rsatilgan qurilmaning (konstruksiyaning) bir qator vaznsiz sterjenlarda hosil bo'ladigan zo'riqishlarning miqdor va yo'nalishlari analitik aniqlansin.



Berilgan:		
α	β	*P*, kN
60°	30°	8,0

29-shakl

Yechish:

1. *AC* va *AD* sterjenlarning P kuchi qo'yilgan *A* nuqtaning muvozanatini tekshiramiz. 2. *AB, AC* sterjenlarni kesib, *A* nuqtani ajratib, erkin deb bog'lanishlardan xoli deb qaraymiz. P kuchi va sterjenlarda hosil bo'ladigan zo'riqishlarni T_S, T_B va T_D belgilab sterjen o'qlari bo'ylab yo'naltiramiz. 3. Kesishuvchi kuchlarni muvozanat shartlarini tuzamiz, buning uchun kuchlarning koordinata o'qlardagi proyeksiyalarining yig'indisini tuzamiz. γ va θ burchaklarni kiritamiz.

$$\sum F_{kx} = -T_C\cos\alpha + P\sin\theta\cos\gamma = 0; \quad (1)$$

$$\sum F_{ky} = -T_B\cos\beta + P\sin\theta\sin\gamma = 0; \quad (2)$$

$$\sum F_{kz} = T_C\sin\alpha + \mathrm{T_B}\sin\beta + \mathrm{T_D} - \mathrm{P}\cos\theta = 0. \quad (3)$$

Masalani yechish uchun avvalo sinγ, cosγ va sinθ, cosθ larning qiymatlarini hisoblab chiqamiz.

a) ΔCDA dan $CD = \dfrac{AD}{tg\alpha}$ $\qquad$ ΔBDA dan $BD = \dfrac{AD}{tg\beta}$

Bu yerdan:

$$tg\gamma = \frac{BD}{CD} = \frac{tg\alpha}{tg\beta} = \frac{tg60^\circ}{tg30^\circ}, \quad tg\gamma = 3.$$

Trigonometrik formulalarni tatbiq qilib, quyidagilarni aniqlaymiz.

$$\sin\gamma = \frac{tg\gamma}{\sqrt{1+tg^2\gamma}} = \frac{3}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\gamma}} = \frac{1}{\sqrt{1+3^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}}$$

b) Shakldan ko'rinadiki

$$tg\delta = \frac{\sqrt{(CD)^2+(BD)^2}}{AD}; \; tg\delta = AD\sqrt{\frac{1}{tg^2\alpha}+\frac{1}{tg^2\beta}} = \frac{\sqrt{tg^2\alpha+tg^2\beta}}{tg\alpha tg\beta} = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Trigonometrik formulalarga asosan

$$\sin\theta = \frac{tg\theta}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = \sqrt{\frac{10}{13}}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\theta}} = \sqrt{\frac{3}{13}}$$

Hisoblangan qiymatlarni muvozanat tenglamalariga qo'ysak, quyidagilarni hosil qilamiz.

$$-T_C\cos60^\circ + P\sqrt{\frac{10}{13}}\frac{1}{\sqrt{10}} = 0$$

$$-T_B\cos30^\circ + P\sqrt{\frac{10}{13}}\frac{3}{\sqrt{10}} = 0$$

$$T_C\sin60^\circ + T_B\cos30^\circ + T_D - P\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 0$$

Bulardan quyidagilarni olamiz

$$T_C = \frac{2P}{\sqrt{10}}; \qquad T_B = \frac{6P}{\sqrt{39}}; \qquad T_D = -\frac{3P}{\sqrt{39}}.$$

Olingan natijalar shuni ko'rsatadiki, berilgan P kuch ta'siridan

AC va *AB* sterjenlar siqilar ekan, *AD* sterjen esa cho'ziladi. Natijalarni quyidagi jadvalda berish mumkin.

2.1-jadval

Sterjenlar	Zo'riqishlar	Sterjenlar teng holati
AB	7,7 kN	siqiladi
AC	4,4 kN	siqiladi
AD	3,8 kN	cho'ziladi

Takrorlash uchun savollar

1. Kesishuvchi kuchlar sistemasi qanday kuchlardan tashkil topgan?
2. Kuch ko'pburchagi deb qanday ko'pburchakka aytiladi?
3. Kesishuvchi kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi geomitrik usulda qanday aniqlanadi?
4. Kuchni qanday tashkil etuvchilarga ajratish mumkin?
5. Kuchning o'qdagi proyeksiyasi qanday aniqlanadi?
6. Kuchning tekislikdagi proyeksiyasi qanday hisoblanadi va u qanday kattalik?
7. Teng ta'sir etuvchini analitik usulda qanday aniqlanadi?
8. Kesishuvchi kuchlar sistemasi geometrik muvozanat sharti qanday?
9. Kesishuvchi kuchlar sistemasi analitik muvozanat sharti qanday?
10. Uch kuch muvozanati haqidagi teoremani isbotlang.

III bob

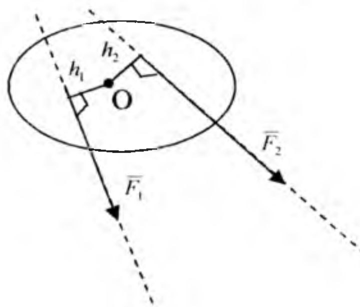
Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi

11-§. Nuqtaga nisbatan kuch momenti

Bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasiga tekislikdagi kuchlar sistemasi deb aytiladi.

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ko'rilayotganda, kuchni jismga beradigan burish qobiliyatini xarakterlovchi, ya'ni nuqtaga nisbatan kuch momenti tushunchasini kiritish zarurdir. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan ikki kuch $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$

jismga qo'yilgan (30-shakl). Jismning biror O nuqtasi mahkamlangan deb tasavvur qilamiz, u holda, $\overline{F_1}$ kuch jismni O nuqta atrofida soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intiladi, $\overline{F_2}$ kuch esa soat mili yo'nalishi bo'yicha, u holda buralish hodisasi kuch miqdoriga va O nuqtadan kuchning ta'sir chizig'igacha bo'lgan masofaga bog'liq bo'ladi.



30-shakl

Ta'rif:

Berilgan $\overline{F}$ kuchdan O nuqtaga nisbatan olingan kuch momenti deb, kuch miqdorini O nuqtadan kuchning ta'sir chizig'igacha tushirilgan perpendikulyar masofaga ko'paytmaning tegishli ishora bilan olingan miqdoriga aytiladi. Agar kuch jismni O nuqta atrofida soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda burishga intilsa, u holda moment musbat deb qabul qilinadi (31-a shakl). Agar kuch jismni O nuqta artrofida soat mili yo'nalishi bo'yicha burishga intilsa, u holda moment manfiy deb qabul qilinadi (31-b shakl).

Berilgan $\overline{F}$ kuchdan O nuqtaga nisbatan olingan kuch momentini quyidagi ifoda bilan belgilaymiz $m_0(\overline{F})$. U holda

$$m_0(\overline{F}) = \pm F h \tag{3.1}$$

h ga $\overline{F}$ kuchning O nuqtasiga nisbatan yelkasi deb aytiladi. O nuqta moment markazi deb ataladi.

Kuch momentining xususiyatlari:

1. Kuchni ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirish bilan nuqtaga nisbatan kuch momenti o'zgarmaydi.

2. Agar kuchning ta'sir chizig'i O nuqtadan o'tsa, berilgan $\overline{F}$

kuchining O nuqtaga nisbatan kuch momenti nolga teng bo'ladi (31-d shakl).

3. Berilgan $\overline{F}$ kuchidan O nuqtaga nisbatan kuch momenti ΔOAB yuzining ikkilanganiga teng bo'ladi (31-e shakl). Ya'ni,

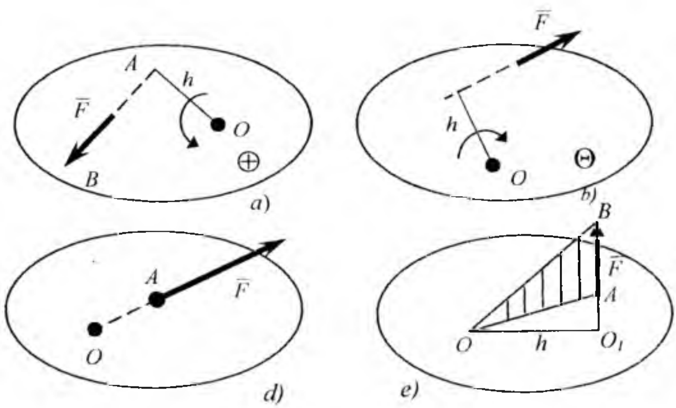
$$m_0(\overline{F}) = 2S_{\Delta OAB}. \tag{3.2}$$

Haqiqatan ham,

$$m_0(\overline{F}) = F\,h$$

Ikkinchi tomondan,

$$F\,h = 2S_{\Delta OAB}.$$



31-shakl

Texnik birlik sistemasida kuch momenti birligi uchun 1 N·m qabul qilingan.

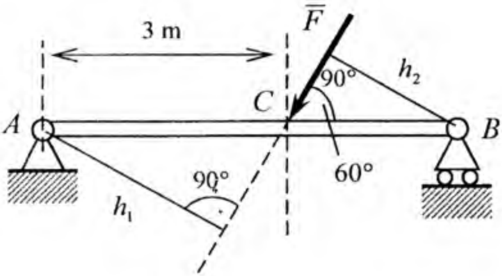
5-masala

Berilgan F (F=20 N) kuchdan A va B nuqtalarga nisbatan kuch momenti hisoblansin (32-shakl). AB = 5 m.

$$m_A(\overline{F}) = -Fh_1 = -F \cdot AC\sin 60^\circ$$

$$m_A(\overline{F}) = -20 \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -30\sqrt{3} \approx -51{,}9\ N \cdot m$$

$$m_B(\overline{F}) = Fh_2 = F \cdot BC\sin 60^\circ.$$



32-shakl

$$m_B(\overline{F}) = 20 \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3} \approx 34{,}6\ N \cdot m.$$

12-§. Teng ta'sir etuvchining momenti haqida Varin'on teoremasi

Teorema:

Tekislikda kesishuvchi kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining biror nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlardan shu nuqtaga nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'ladi.

Isbot:

Ta'sir chiziqlari A nuqtada kesishuvchi tekislikdagi $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \ldots, \overline{F}_n)$ kuchlar sistemasi berilgan (33-shakl). Bu kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi $\overline{R}$. Ixtiyoriy O nuqtadan OA ga perpendikulyar qilib Ox o'qini o'tkazamiz. Hamma kuchlardan O nuqtaga nisbatan kuch momentlarining ifodalarini (3.2) formuladan foydalanib tuzamiz.

$$m_0(\overline{F}) = OA \cdot OB_1$$

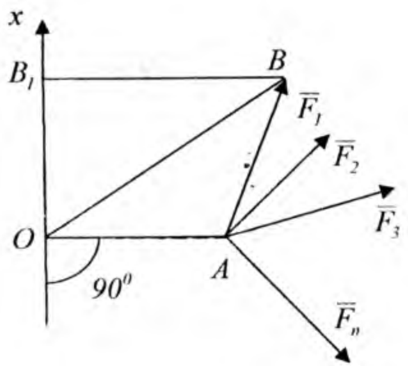
yoki $\quad m_0(\overline{F}_1) = OA \cdot F_{1x}$

binobarin $\quad m_0(\overline{F}_1) = OA \cdot F_{1x}$

$$m_0(\overline{F}_2) = OA \cdot F_{2x}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m_0(\overline{F}_n) = OA \cdot F_{nx}$$



33-shakl

Bu ifodalarning chap va o'ng tomonlarini o'zaro qo'shib quyidagini olamiz:

$$m_0(\overline{F}_1)+m_0(\overline{F}_2)+...+m_0(\overline{F}_n)=OA\cdot(F_{1x}+F_{2x}+...+F_{nx}).$$

Tenglikning o'ng tomonidagi ifodalar teng ta'sir etuvchining biror o'qdagi proyeksiyasiga asosan R_X ni beradi. Natijada quyidagini olamiz:

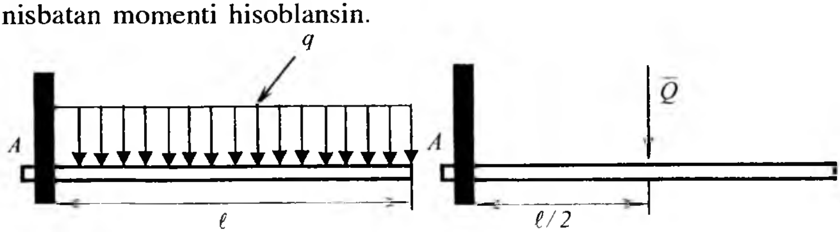
$$OA\cdot R_X = m_0(\overline{F}_1)+m_0(\overline{F}_2)+...+m_0(\overline{F}_n) \qquad (3.3)$$

yoki $$m_0(\overline{R})=\sum m_0(\overline{F}_n) \qquad (3.4)$$

(3.3) formula Varin'on teoremasini ifodalaydi.

6-masala

Intensivligi q N/m bo'lib, tekis yoyilgan yukning A nuqtaga nisbatan momenti hisoblansin.



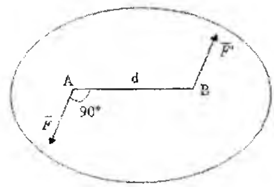
34-shakl

Yoyilgan kuchni to'plangan Q kuchi (34-b shakl) $Q=q\cdot l$ bilan almashtiramiz. U holda Varin'on teoremasiga asosan quyidagini olamiz.

$$M_A = -Q\cdot\frac{l}{2} = -\frac{1}{2}ql^2 \quad N\cdot m$$

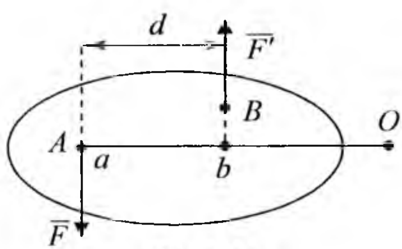
13-§. Juft kuch va uning momenti

1. Juft kuch haqida tushuncha. Juft kuch momenti



35-shakl

Miqdorlari teng, o'zaro ma'lum oraliqda parallel va qarama-qarshi yo'nalgan ikki kuchdan iborat sistema juft kuch deb ataladi (35-shakl). Juft kuch yotgan tekislik juftning ta'sir tekisligi deb ataladi. Juft kuch tashkil etuvchi kuchlarning ta'sir kuch chiziqlari orasidagi eng qisqa masofa d juft yelkasi deb ataladi. Juft kuch jismni juft tekisligiga perpendikulyar o'q atrofida burishga intiladi. Juft kuchni biror kuch bilan almashtirib bo'lmaydi, binobarin, juft kuch teng ta'sir etuvchiga ega bo'lmaydi. Juft kuch muvozanatlashishi uchun kuchning qarama-qarshi yo'nalishda buradigan juft qo'yish kerak. Juft kuch jismni juft tekisligida aylantirishga intiladi. Juftning jismga ta'siri uning momenti bilan baholanadi. Juft kuch tashkil etuvchi kuchlardan juft kuch tekisligida yotuvchi biror O markazga nisbatan olingan momentlarining yig'indisini hisoblaymiz (36-shakl).

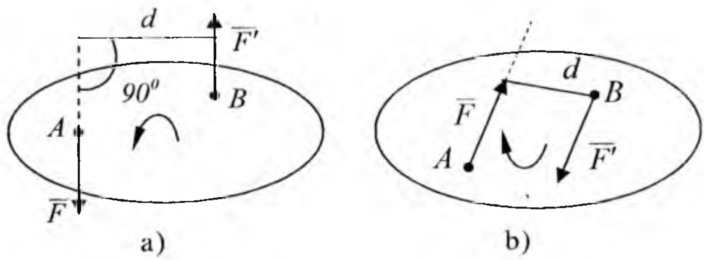


36-shakl

$$m_0(\overline{F}) + m_0(\overline{F'}) = F\cdot oa - F'\cdot ob$$

$F = F'$ va *oa-ob=d* bo'lganligi uchun $\overline{m}_0(\overline{F}) + \overline{m}_0(\overline{F}') = F \cdot d$

Bu yerdan ko'rinadiki, juft tashkil etuvchi kuchlarning momentlarining yig'indisi moment markaziga bog'liq bo'lmay har doim juft tashkil etuvchi kuchlarning birining miqdori bilan yelkasining ko'paytmasiga teng. Bu miqdor juft momenti deb qabul qilinadi. Demak, juft momenti skalyar miqdor bo'lib, tashkil etuvchi kuchlar birining miqdori bilan juft yelkasiga ko'paytmasiga aytiladi. Agar juft kuch jismni soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intilsa, juft momenti musbat deb qabul qilinadi (37-a shakl). Agar juft kuch jismni soat mili yo'nalishida burashga intilsa, juft kuch momenti manfiy deb qabul qilinadi (37-b shakl).



37-shakl

Juft kuch momentini qisqa m deb belgilaymiz, ya'ni $m(\overline{F}, \overline{F}') = m$, u holda $m = \pm Fd$ (3.4). Juft kuch momenti, juft tashkil etuvchi kuchlardan biri ikkinchi kuchning qo'yilish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga tengligi 37-shakldan ko'rinadi ya'ni,

$$m = m_B(\overline{F}) = m_A(\overline{F}') \qquad (3.5)$$

2. Juftning ekvivalentligi

Ta'rif:

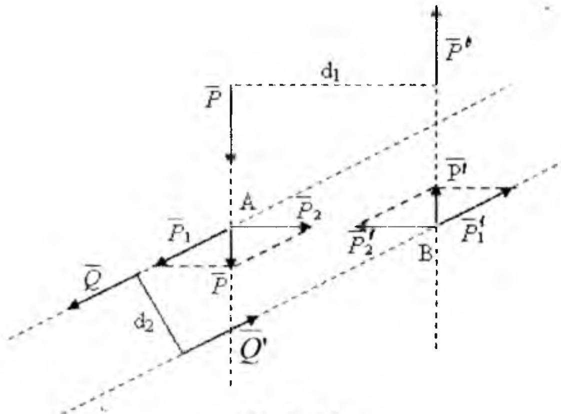
Juftning jismga beradigan ta'sirini o'zgartirmay boshqa juft bilan almashtirish mumkin bo'lsa, bunday ikki juft o'zaro ekvivalent juftlar deb ataladi. Quyidagi teorema juftlar ekvivalentligining sharti bo'la oladi.

Teorema:

Momentlari o'zaro teng va burilish yo'nalishlari bir xil bo'lgan bir tekislikda joylashgan ikki juft o'zaro ekvivalent bo'ladi.

Isbot: Aytaylik, momenti o'zaro teng, bir xil burilishga ega bo'lgan bir tekislikda joylashgan $(\bar{P}, \bar{P}')$ va $(\bar{Q}, \bar{Q}')$ (38-shakl) juftlar berilgan, ya'ni,

$$P \cdot d_1 = Q \cdot d_2 \tag{3.6}$$



38-shakl

Juftlarni tashkil etuvchi kuchlarning ta'sir chiziqlarini ular A va B nuqtalarda kesishguncha davom ettiramiz. Kuchlar P va P' ni A va B nuqtalarga keltirib mos ravishda $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ va $\bar{P}_1', \bar{P}_2'$ tashkil etuvchilarga ajratamiz. Osonlikcha $\bar{P}_2, \bar{P}_2'$ lar miqdor jihatidan tengligini, yo'nalish jihatidan bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalib, o'zaro muvozanatlashganligini ko'rish mumkin. Ikkinchi aksiomaga asosan bu kuchlar sistemasini e'tiborga olmasak ham bo'ladi. Miqdorlari o'zaro teng bo'lib, juft tashkil etuvchi P_1 va P_1' kuchlar qoldi. Bu $(\bar{P}, \bar{P}')$ juftga ekvivalentdir. Bu yerda $(\bar{P}, \bar{P}')$ juftning jismga ta'sirini o'zgartirmay, ularning tashkil etuvchi kuchlari ustida amal bajariladi. Bu ikki $(\bar{P}, \bar{P}')$ va $(\bar{P}_1, \bar{P}_1')$; juftlarning momentlari o'zaro tengligini osonlikcha ko'rsatish mumkin. Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasi, (3.5) formulalardan quyidagini olamiz:

$$m(\vec{P}, \vec{P}') = m_B(\vec{P}_1) + m_B(\vec{P}_2) \tag{3.6}$$

chunki, $m_B(\overline{P}_2)=0$, vaholanki $m_B(\overline{P}_1)=m(\overline{P}_1,\overline{P}_1^{\prime})$

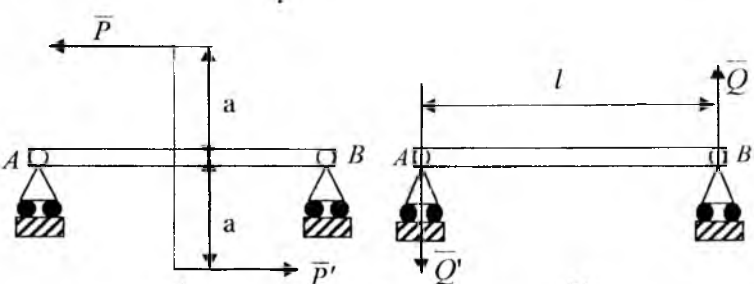
U holda, $m_B(\vec{P},\vec{P}')=m(P_1,P_1^{\prime})$, ya'ni $P \cdot d_1 = P_1 \cdot d_2$

Ikkinchi tomondan teorema shartiga asosan $P \cdot d_1 = Q \cdot d_2$, binobarin, bundan quyidagi kelib chiqadi $P_1=Q$ va $P_1^{\prime}=Q_1^{\prime}$. Modomiki, juft $(\overline{Q}, \overline{Q}')$ juft $(\overline{P}, \overline{P}')$ ga ekvivalent ekan, u holda juft $(\overline{P}_1, \overline{P}_1^{\prime})$ ga ham ekvivalent bo'ladi. Shuni isbot etish talab etilgan edi.

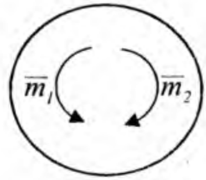
Natijalar:

1. Juftni jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'z ta'sir tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkin.
2. Juftni jismga ta'sirini o'zgartirmay, juft momenti o'zgarmas qolib, uning tashkil etuvchilari va yelkasini o'zgartirish mumkin.

Ikki juftni har doim bitta umumiy yelkaga keltirish mumkin, masalan, AB balkaga qo'yilgan $(\overline{P}, \overline{P}')$ juftni (39-a shakl), yuqorida keltirilgan natijalarga asosan $(\overline{Q}, \overline{Q}')$ (39-b shakl) ga almashtirish mumkin. Bu juftning tashkil etuvchilari quyidagi shartdan $P \cdot 2a = Q \cdot l$ aniqlanadi, bundan $Q=\dfrac{2Pa}{l}$.



39-shakl



40-shakl

Isbot qilingan teorema va keltirilgan natijalardan, tekislikda juftning jismga ta'siri uning momenti bilan baholanar ekan. Shuning uchun odatda juftni uning momenti va aylanish yo'nalishini ko'rsatuvchi buralma strelkalar yordamida tasvirlanadi (40-shakl).

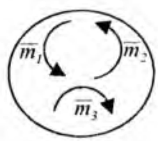
3. Tekislikda yotuvchi juftlarni qo'shish

Teorema:

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlarni, momenti berilgan juftlar momentlarining algebraik yig'indisiga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin.

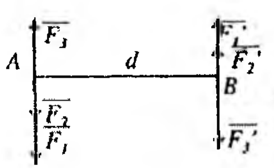
Isbot:

Tekislikda momentlari m_1, m_2, m_3 bo'lgan 3 ta juft joylashgan (41-shakl).

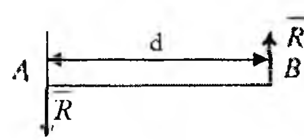


41-shakl

Juftlarning ta'sir tekisligida ixtiyoriy AB kesmani, berilgan juftlar uchun umumiy yelka uchun tanlab olamiz (42a-shakl) momentlari m_1, m_2, m_3 bo'lgan juftlarni, momentlari berilgan juftlarni momentlariga teng bo'lgan ($\overline{F}$, $\overline{F}'$), ($\overline{F}_2$, $\overline{F}_2'$), ($\overline{F}_3$, $\overline{F}_3'$) juftlar bilan almashtiramiz, ya'ni $m_1 = F_1 \cdot d$, $m_2 = F_2 \cdot d$, $m_3 = F_3 \cdot d$.



42-*a* shakl



42- *b* shakl

A nuqtaga qo'yilgan kuchlarni bitta kuch $\overline{R} = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$ bilan almashtiramiz. B nuqtaga qo'yilgan kuchlarni bitta kuch

$\overline{R}' = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \overline{F}_3'$ bilan almashtiramiz. Boshqacha aytganda ($\overline{R}$, $\overline{R}'$) kuchlar sistemasi berilgan juftlarga teng ta'sir etuvchi juftidir (42-*b* shakl). Teng ta'sir etuvchi juftning momenti quyidagiga teng bo'ladi

$$M = R_1 d = (F_1 + F_2 - F_3)d = F_1 \cdot d + F_2 \cdot d + (-F_3 \cdot d)$$

yoki $M = m_1 + m_2 + m_3$, teorema isbotlandi. Xuddi shunday ixtiyoriy sondagi juftlar uchun quyidagini yozish mumkin,

$$M = \sum_{k=1}^{n} m_k \tag{3.7}$$

4. Juftlarning muvozanat sharti

Bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar muvozanatda bo'lsin. Hamma juftlarni bitta juft bilan almashtirib, muvozanat mavjud bo'lishi uchun yoki R=0 yoki d=0 bo'lishi kerak degan xulosaga kelamiz. U holda $R \cdot d = 0$, ya'ni juft momenti M=0. Bu yerdan ko'rinadiki, (3.7) formulaga asosan

$$\sum_{k=1}^{n} m_k = 0 \tag{3.8}$$

Demak, bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar sistemasi muvozanatda bo'lsa, ular momentlarining algebraik yig'indisi 0 ga teng bo'ladi. Bu xulosaning teskarisi ham o'rinlidir. Ya'ni bir tekislikda ixtiyoriy joylashgan juftlar momentlarning algebraik yig'indisi nolga teng bo'lsa, bu juftlar sistemasi muvozanatda bo'ladi. Haqiqatan ham agar $\sum m_k = 0$ bo'lsa, u holda $M = R \cdot d = 0$. Bu yerdan R=0 yoki d=0 bo'lishi mumkin. Har ikkala holda ham sistema muvozanatda bo'ladi. Demak (3.8) tenglik juftlar sistemasi muvozanatining zarur va yetarli shartini ifodalaydi.

7-masala

43-shaklda tasvirlangan ($\overline{P}$, $\overline{P}'$), ($\overline{Q}$, $\overline{Q}'$), ($\overline{F}$, $\overline{F}'$) juftlar sistemasi muvozanatda bo'lishi mumkinligi tekshirib ko'rilsin, agar P=10N, $Q = 5\sqrt{3}$N, F=10N. AB=1m, CD=0,6m, EH=1,6m.

Yechish:

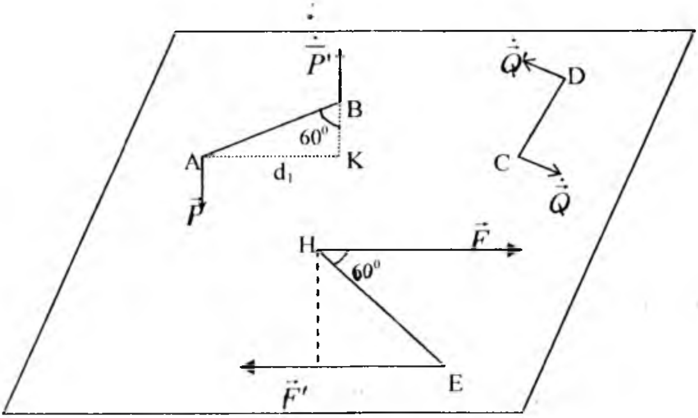
Berilgan juftlar momentlarini hisoblaymiz

$$m_1 = P \cdot d_1 = P \cdot AB \cdot Sin60^0 = 10 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3}\, N \cdot m$$

$$m_2 = Q \cdot d_2 = 5\sqrt{3} \cdot 0{,}6 = 3\sqrt{3}\, N \cdot m$$

$$m_3 = -F \cdot d_3 = -F \cdot EH \cdot Sin60^0 = -10 \cdot 1{,}6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -8\sqrt{3}\, N \cdot m$$

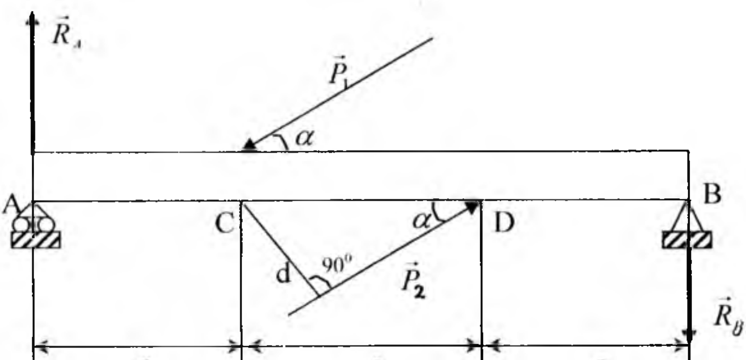
U holda $M = m_1 + m_2 + m_3 = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{3} - 8\sqrt{3} = 0$ juftlar sistemasi muvozanatda ekan.



43-shakl

8-masala

Juft ($\overline{P}_1, \overline{P}_2$) ta'siri ostidagi to'sinning tayanch reaksiyalari aniqlansin, agar AC=CD=BD=a (44-shakl).



44-shakl

Yechish:

Juft kuchi ($\overline{P}_1, \overline{P}_2$)ni qarama-qarshi yo'nalishdagi ($\overline{R}_A, \overline{R}_B$) juft kuch bilan muvozanatlashtirish mumkin.

To'sinning A sharnirli tayanchi qo'zg'aluvchan g'ildiraklar ustiga tayangan, shuning uchun $\overline{R}_A$ reaksiya vertikal yuqoriga yo'nalgan bo'ladi. U holda $\overline{R}_B$ reaksiya vertikal pastga yo'nalgan. Quyidagi belgilashni olamiz $\overline{m}_1 = \overline{m}(\overline{P}_1, \overline{P}_2)$, $\overline{m}_2 = \overline{m}(\overline{R}_A, \overline{R}_B)$. U holda ikki juftning muvozanat sharti $m_1 + m_2 = 0$ quyidagi ko'rinishni oladi:

$$P_1 a \sin\alpha - R_A \cdot 3a = 0, \text{ бундан } R_A = R_B = \frac{P\sin\alpha}{3}$$

14-§. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

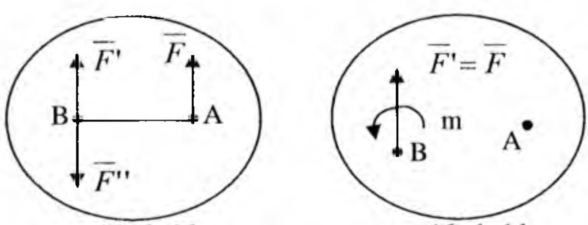
1. Kuchni o'ziga parallel ixtiyoriy nuqtaga ko'chirishga oid teorema.

Teorema:

Absolyut qattiq jismning biror nuqtasiga qo'yilgan kuchni jismga ta'sirini o'zgartirmay o'ziga parallel ravishda boshqa ixtiyoriy nuqtaga keltirish, momenti berilgan kuchdan keltirish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan juft qo'shishni taqozo qiladi.

Isbot:

Jismning biror A nuqtasiga F kuch qo'yilgan bo'lsin.



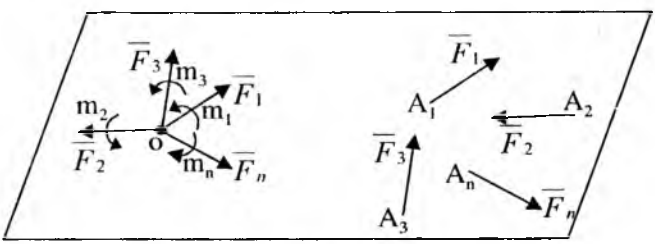
45-shakl 46-shakl

Jismning ixtiyoriy B nuqtasiga tashkil etuvchilari F' va F'' miqdor jihatidan F kuchga teng bo'lgan ya'ni $F' = F'' = F$ nolli sistemani kuchga parallel ravishda qo'yamiz (45-shakl). Hosil bo'lgan uchta kuchdan ($\overline{F}$, $\overline{F'}$, $\overline{F''}$) iborat bo'lgan sistema berilgan F kuchga ekvivalentdir. Bu sistemani F kuch va ($\overline{F}$, $\overline{F''}$) juftdan tashkil topgan deb qarash mumkin. Binobarin A nuqtaga qo'yilgan F kuchi, B nuqtaga qo'yilgan shunday F' kuchiga va ($\overline{F}$, $\overline{F''}$) juftga ekvivalentdir. Juft ($\overline{F}$, $\overline{F''}$) ni qo'shilgan juft deb ataladi. Uning momentini aniqlaymiz $\overline{m}(\overline{F},\overline{F''}) = F \cdot d = m_B(\overline{F})$.

Binobarin qo'yilgan juftning momenti A nuqtaga qo'yilgan F kuchdan, ko'chirish zarur bo'lgan B nuqtaga nisbatan momentga teng bo'ladi. Bu teoremaning tafsiloti 45- va 46-shakllarda tasvirlangan.

2. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirish

Bosh vektor va bosh moment. Qattiq jismga tekislikda ixtiyoriy joylashgan $\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$ kuchlar sistemasi ta'sir qilsin.



47-shakl

Tekislikda keltirish markazi deb ataluvchi ixtiyoriy O nuqtani olib, momentlari m_1, m_2, m_n bo'lgan qo'shilgan juftlarni qo'shib, hamma kuchlarni shu markazga keltiramiz, (47-shakl). Demak ($\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n$). Kuchlar sistemasi O nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}'_1, \overline{F}'_2, ..., \overline{F}'_n$ kuchlar sistemasiga va bir tekislikda joylashgan momentlari

$$m_1 = m_0(\overline{F}_1),\ m_2 = m_0(\overline{F}_2)...m_n = m_0(\overline{F}_n) \qquad (3.9)$$

bo'lgan juftlar sistemasiga ekvivalent bo'ladi.

O nuqtaga qo'yilgan kuchlarni qo'shib, ularni bitta kuch bilan almashtiramiz.

$$\overline{R}'=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k \qquad (3.10)$$

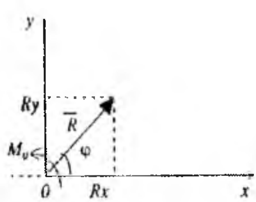
Modomiki $\overline{F}'_k=\overline{F}_k$, u holda $\overline{R}'=\sum_{k=1}^{n}\overline{F}_k$ kattalik berilgan kuchlar sistemasining bosh vektori deb ataladi. Binobarin tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng ekan. Tekislikda joylashgan qo'shilgan juftlarni jamlab, momenti $M_0=m_1+m_2+\ldots+m_n$ bo'lgan bitta juft bilan almashtiramiz. Formula (3.9)ni e'tiborga olib, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$M_0=m_0(\overline{F}_1)+m_0(\overline{F}_2)+\ldots+m_0(\overline{F}_n)$$

yoki

$$M_0=\sum_{k=1}^{n}m_0(\overline{F}_k) \qquad (3.11)$$

Moment M_0 berilgan kuchlar sistemasining O keltirish markaziga nisbatan bosh momenti deb ataladi. Demak, tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror markazga nisbatan bosh momenti berilgan sistemaning kuchlaridan keltirish markaziga nisbatan olingan momentlarning algebraik yig'indisiga teng. Olingan natijani quyidagi teorema shaklida keltirish mumkin. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini umumiy holda, sistemaning bosh vektoriga teng bo'lgan va qandaydir O nuqtaga qo'yilgan bitta kuch va shu tekislikda yotuvchi momenti berilgan kuchlar sistemasining shu nuqtaga nisbatan bosh momentiga teng bo'lgan bitta juft bilan almashtirish mumkin (48-shakl).



48-shakl

Bosh vektor R' ni miqdor va yo'nalishini analitik aniqlash. Koordinata sistemasi boshini keltirish markazi O nuqtada olib (48-shakl) OX va OY o'qlarini o'tkazib, R' ning miqdorini quyidagi formula yordamida aniqlaymiz.

$$R' = \sqrt{\left(R'_x\right)^2 + \left(R'_y\right)^2} \qquad (3.12)$$

Bu yerda R'_x va R'_y bosh vektor R' ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalaridir (3.10). Tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalab, quyidagini olamiz:

$$R'_x = \sum_{k=1}^{n} F_{kx}, \quad R'_y = \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \qquad (3.13)$$

Ya'ni kuchlar sistemasi bosh vektorining koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, kuchlarning shu o'qlardagi proyeksiyalarining algebraik yig'indisiga tengdir. Formula (3.12)ga R'_x, R'_y larning qiymatlarini (3.13) formuladan keltirib qo'yib, quyidagini olamiz

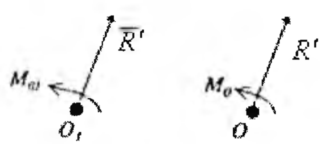
$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2} \qquad (3.14)$$

Bosh vektor R'ning yo'nalishi, uni OX o'qi bilan tashkil qilgan φ burchagi orqali quyidagicha aniqlanadi

$$tg\varphi = \frac{R'_y}{R'_x} \qquad (3.15)$$

Shuni ta'kidlaymizki, bosh vektor R' keltirish markazini o'zgartirish bilan o'zgarmaydi, chunki berilgan kuchlar sistemasining miqdor va yo'nalishlari o'zgarmas qoladi.

Keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi. Berilgan (F_1, F_2,..,F_n) kuchlar sistemasini bir O markazga keltirib, O nuqtaga qo'yilgan R' kuchni va momenti M_0 bo'lgan juftni olamiz (49-shak).



49-shakl

Keltirish markazi uchun boshqa O_1 nuqtani olamiz va bu nuqtaga nisbatan bosh momentni M_{01} deb belgilaymiz, R' kuchni O nuqtadan O_1 nuqtaga ko'chirish uchun momenti O_1 nuqtaga qo'yilgan R' kuchdan O_1 nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan ya'ni $m_{01}(R')$ juftni qo'shish kerak. Bu juftni kuchlar sistemasining O ga keltirish natijasida hosil bo'lgan juft bilan qo'shib, momenti quyidagiga teng bo'lgan bitta juft hosil qilamiz

$$M_{01} = M_0 + m_{01}(\overline{R'}) \tag{3.16}$$

bundan

$$M_{01} - M_0 = m_{01}(\overline{R'}) \tag{3.17}$$

Demak, keltirish markazi o'zgarishi bilan bosh momentning o'zgarishi oldingi markazga qo'yilgan bosh vektordan, keyingi markazga nisbatan olingan momentga teng bo'lar ekan.

3. Keltirishning xususiy hollari. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini sodda hollarga keltirish. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini biror O markazga keltirishda quyidagi xususiy hollar mavjud

$$1)\ \overline{R'} = 0,\ \ M_0 \neq 0$$

$$2)\ \overline{R'} \neq 0,\ \ M_0 = 0$$

$$3)\ \overline{R'} \neq 0,\ \ M_0 \neq 0$$

$$4)\ \overline{R'} = 0,\ \ M_0 = 0$$

1) Kuchlar sistemasini bir juftga keltirish

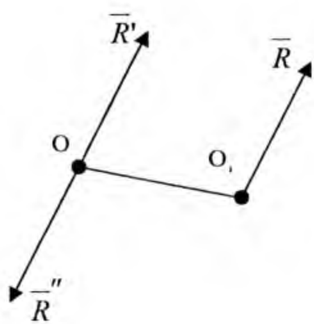
Agar tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bosh vektori nolga teng bo'lib, biror markazga nisbatan bosh momenti nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bir juftga keladi. Bunday holda bosh momenti keltirish markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaydi, haqiqatan ham, agar R'=0 bo'lsa, u holda (3.17) formuladan $M_{01}=M_0$ ekanligi kelib chiqadi.

2) Kuchlar sistemasini bir teng ta'sir etuvchiga keltirish. Teng ta'sir etuvchining momenti haqida teorema

Agar kuchlar sistemasining bosh vektori nolga teng bo'lmasa, u holda bunday sistema bitta teng ta'sir etuvchiga keltiriladi (2 va 3 xususiy hollar).

Agar $(\overline{F_1}, \overline{F_2}, ..., \overline{F_n})$ kuchlar sistemasini biror O markazga keltirish natijasida bitta kuch $\overline{R}=\sum\overline{F}_k$ va momenti $M_0=\sum m_0(\overline{F}_k)$ bo'lgan bitta juft hosil bo'lsin. Juft tashkil etuvchi kuchlar miqdorini bosh vektorga teng qilib olib, ya'ni, $\overline{R}'=\overline{R}''=\overline{R}$ va juft tashkil etuvchi kuchlardan birini O nuqtaga R' bilan qarama-qarshi yo'nalishda joylashtiramiz (50-shakl) juft $(\overline{R}_1,\overline{R}'')$ ning yelkasi quyidagi formuladan aniqlanadi.

$$d=\frac{M_0}{R} \tag{3.18}$$



50-shakl

Hosil bo'lgan $\left(\overline{R}',\overline{R}'',\overline{R}\right)$ kuchlar 50-shakl sistemasi bitta R kuchga ekvivalent bo'ladi. Darhaqiqat, $\overline{R}$ berilgan $(\overline{F}_1,\overline{F}_2...\overline{F}_n)$ kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi bo'ladi.

Teng ta'sir etuvchining momentiga oid Varin'on teoremasi

Teorema:

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchisining shu tekislikda yotuvchi ixtiyoriy nuqtaga nisbatan momenti, berilgan kuchlardan shu nuqtaga nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng.

Isbot:

50-shakldan ko'rinadiki, $m_0(\overline{R})=R\cdot d$. R=R' ekanligi va (3.18) formulani e'tiborga olib quyidagini yozish mumkin

$$m_0(\overline{R}) = M_0 \quad yoki \quad m_0(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) \tag{3.19}$$

Teorema isbotlandi.

15-§. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatlashishi uchun, quyidagi shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

$$\overline{R}' = 0 \quad \text{va} \quad \overline{M}_0 = 0 \tag{3.20}$$

Agar biror shart bajarilmasa, u holda kuchlar sistemasi teng ta'sir etuvchiga yoki juftga keltiriladi, ya'ni muvozanatda bo'lmaydi. Agar $\overline{R}' = 0$ bo'lsa, u holda sistema momenti M_0 bo'lgan juftga keltiriladi, modomiki $M_0=0$, u holda sistema muvozanatda bo'ladi. (3.20) shartdan tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatining quyidagi analitik shartlari kelib chiqadi:

1. Muvozanat shartining asosiy ko'rinishi

Bosh vektor $\overline{R}'$ va bosh moment M_0 quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi

$$R' = \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} F_{kx}\right)^2 + \left(\sum_{k=1}^{n} F_{ky}\right)^2}, \quad M_0 = \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k)$$

Agar $R' = 0$ va $M_0=0$ bo'lsa, u holda

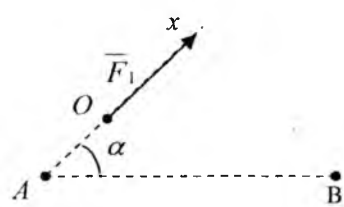
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = 0 \tag{3.21}$$

Ya'ni tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarining yig'indisi, kuchlarning ta'sir tekisligidagi biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir. Bog'lanishdagi jismlarning muvozanatiga oid masalalar yechishda (3.21) shartda noma'lum reaksiya kuchlari ishtirok etadi va muvozanat tenglamari deb ataladi. Agar noma'lum reaksiyalar soni ular qatnashgan tenglamalar soniga teng bo'lsa, u holda hamma noma'lumlar shu tenglamalardan aniqlanadi. Bunday masalar statik aniq masalalar deb ataladi. Agar noma'lum reaksiyalar soni, ular qatnashgan tenglamalar sonidan ko'p bo'lsa, u holda bunday masalalar statik aniqmas masalalar deb ataladi.

2. Muvozanat shartining ikkinchi shakli

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning ikkita A va B nuqtalarga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi, hamda AB kesmaga perpendikulyar bo'lmagan OX o'qiga proyeksiyalarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir (51-shakl).

$$\left.\begin{array}{l} \sum\limits_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \\ \sum m_A(\overline{F}_i) = 0 \\ \sum m_B(\overline{F}_i) = 0 \\ \alpha \neq 90^0 \end{array}\right\} \qquad (3.22)$$



51-shakl

3. Muvozanat shartining uchinchi shakli

Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun kuchlarning bir to'g'ri chiziq ustida yotmagan uchta A, B va C nuqtalarga nisbatan olingan momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) = 0, \quad \sum_{k=1}^{n} m_C(\overline{F}_k) = 0 \qquad (3.23)$$

Eslatma: (3.22) va (3.23) shartlar isbotsiz taklif etildi.

4. Tekislikda parallel joylashgan kuchlarning muvozanat shartlari

Agar hamma kuchlar OY o'qiga parallel bo'lsa (52-shakl), u holda

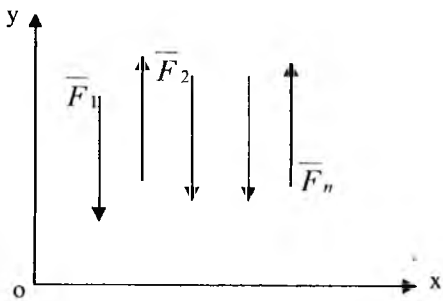
$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0,$$

modomiki

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = \sum_{k=1}^{n} F_k$$

va muvozanat sharti quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\sum_{k=1}^{n} F_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = 0 \qquad (3.24)$$



52-shakl

Demak tekislikdagi parallel kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, kuchlarning algebraik yig'indisi va shu tekislikdagi biror nuqtaga nisbatan olingan momentlarning yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.

Tekislikda parallel kuchlar muvozanat shartining ikkinchi shakli.

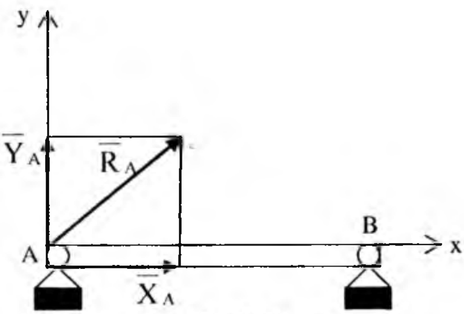
Tekislikda ixtiyoriy joylashgan parallel kuchlar muvozanatda bo'lishi uchun, bu kuchlarga parallel bo'lgan chiziq ustida yotmay turgan ikki A va B nuqtalarga nisbatan olingan kuchlar momentlarining yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0, \qquad \sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) = 0 \qquad (3.25)$$

Reaksiya kuchlarini aniqlashga doir qo'shimchalar

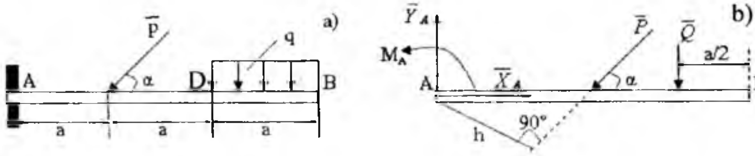
Bog'lanishlarning bir necha xil turlari va ularning reaksiyalari 1-bobning 3-§da berilgan. Xususan bog'lanish ishqalanishsiz silindrik sharnir vositasida bajarilgan bo'lsa, sharnir bog'lanish reaksiya kuchi silindrik o'qiga perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotishi ko'rsatilgan edi. Reaksiya kuchining yo'nalishi noma'lum bo'lib, jismga ta'sir etuvchi boshqa kuchlarga bog'liq bo'ladi. Jism tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'sirida muvozanatlashishiga oid masala yechiladigan bo'lsa, qo'zg'almas sharnirning reaksiya kuchi R_A ning miqdor va yo'nalishi noma'lum (53-shakl). Shuning uchun uni OX va OY koordinata o'qlari bo'ylab X_A va Y_A tashkil etuvchilar orqali tasvirlab, R_A ning miqdor va yo'nalishi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi

$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2}, \quad tg\alpha = \frac{Y_A}{X_A}$$



53-shakl

Qistirib mahkamlangan bog'lanish (54-a shakl). Agar jismga tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'sir qilsa, bu kuchlar sistemasini markazga keltirish natijasida, A nuqtaga qo'yilgan R_A kuchi va momenti M_A bo'lgan juft hosil bo'ladi. Noma'lum R_A reaksiya kuchini koordinata o'qlari bo'ylab X_A va Y_A tashkil etuvchilari orqali tasvirlaymiz.



54-shakl

Binobarin jismning qistirib mahkamlangan kesmasida reaksiyaning ikkita X_A va Y_A tashkil etuvchilari hamda, momenti M_A bo'lgan reaktiv juft ta'sir qiladi.

9-masala

(54-a shakl)da ko'rsatilgan to'sinning tayanch reaksiyalari aniqlansin.

Yechish:

AB to'sin (balka)ga tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi ta'sir qiladi. Intensivligi q bo'lgan tekis taqsimlangan kuchni to'plangan Q kuch bilan almashtiramiz. Bu kuch DB kesmaning o'rtasiga qo'yilgan va miqdori Q=q·a ga teng. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad X_A - P\cdot\cos\alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0, \quad Y_A - P\cdot\sin\alpha - Q = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0, \quad M_A - P\cdot a\sin\alpha - Q\cdot 2{,}5\cdot a = 0$$

Bu tenglamalar sistemasini X_A,Y_A, M_A larga nisbatan yechib quyidagilarni olamiz:

$$X_A = P\cdot\cos\alpha; \qquad Y_A = P\cdot\sin\alpha + Q = P\cdot\sin\alpha + qa$$

U holda

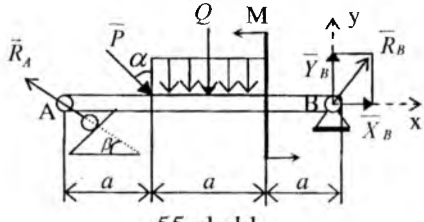
$$R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = \sqrt{(P\cos\alpha)^2 + (P\sin\alpha + qa)^2} =$$

$$= \sqrt{P^2 + 2Pqa\sin\alpha + (qa)^2}$$

$$M_A = Pa\sin\alpha + Q\cdot 2{,}5a = Pa\sin\alpha + 2{,}5qa^2$$

10-masala

(55-shakl)da ko'rsatilgan balkaga ta'sir qiluvchi kuchlar ta'siridan uning A va B nuqtalaridagi tayanch reaksiyalari analitik usulda aniqlansin. Berilgan:



55-shakl

a[m]	α	β	P[N]	q[N/m]	M[Nm]
2	30^0	60^0	6	3	12

Yechish:

AB balkani erkin jism deb qarab muvozanatini tekshiramiz. Unga quyidagi kuchlar ta'sir qiladi:

1. Vertikal bilan α burchak tashkil qilgan P kuchi.
2. Momenti M ga teng bo'lgan juft kuch.
3. a uzunlikdagi segment bo'ylab tekis tarqalgan yoyilgan kuch, uning teng ta'sir etuvchi miqdori

$$Q = q \cdot a, ya'ni\ Q = 3\left[\frac{N}{m}\right] \cdot 2[m] = 6\ N$$

4. Bog'lanish reaksiya kuchlari: R_A, X_B va Y_B. Endi muvozanat tenglamalarini yozamiz

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = X_B - R_A \cos\beta + P \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = Y_B \cdot 3a + M - Q \cdot \frac{3}{2}a - P\cos\alpha \cdot a = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_B(\overline{F}_k) = -R_A \sin\beta \cdot 3a + P\cos\alpha \cdot 2a + Q \cdot \frac{3}{2}a + M = 0$$

Berilgan son qiymatlarini tenglamalar sistemasiga qo'ysak, quyidagilarni olamiz

$$X_B - R_A \cdot \cos 60^o + 6\sin 30^o = 0$$

$$Y_B \cdot 3 \cdot 2 + 12 - 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 - 6\cos 30^o \cdot 2 = 0$$

$$-R_A \sin 60^o \cdot 3 \cdot 2 + 6\cos 30^o \cdot 2 \cdot 2 + 6 \cdot \frac{3}{2} \cdot 2 + 12 = 0$$

Bulardan

$$X_B - 0{,}5R_A + 3 = 0, X_B = 1.92N$$

$$Y_B - 2{,}73 = 0,\ Y_B = 2{,}73N$$

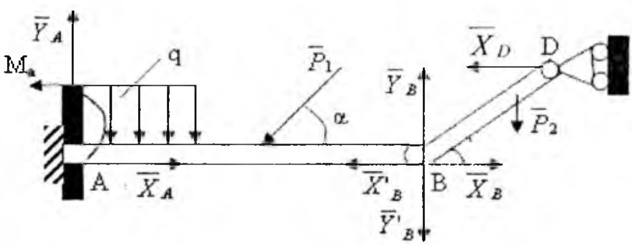
$$-0{,}86R_A + 8{,}46 = 0,\ R_A = 9{,}84N$$

16-§. Jismlar sistemasining muvozanati

Odatda o'zaro bog'langan (sharnir, arqon, sterjen vositasida), bir necha jismlardan tashkil topgan qurilmalar ko'proq uchraydi. 56-shaklda ikkita AB va BD jismlar o'zaro B sharnir yordamida biriktirilgan sistema tasvirlangan. A va D nuqtalardagi tayanch reaksiya kuchlari va B sharnirdagi o'zaro bosim aniqlanishi talab qilindi. B sharnirdagi o'zaro bosim kuchi miqdor va yo'nalish jihatidan noma'lum. Shuning uchun uni koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilar orqali tasvirlaymiz va ta'sir hamda aks ta'sir aksiomasiga asosan quyidagiga ega bo'lamiz

$$\overline{X}_B = -\overline{X}'_B,\ \overline{Y}_B = -\overline{Y}'_B$$

X_B, Y_B tashkil etuvchilar BD jismga ta'sir qiladi va X_B', Y_B' lar AB jismga.



56-shakl

Tashqi bog'lanishlarni bog'lanish reaksiya kuchlari bilan almashtirib, muvozanat holatdagi o'zgaruvchan mexanik sistemani hosil qilamiz, har ikkala jism ham B sharnir atrofida aylanishi mumkin. Qotish prinsipiga asosan, bu sistema uchun, xuddi absolyut qattiq jismga o'xshash, uchta muvozanat tenglamasini tuzamiz. Bu tenglamalar sistemasi noma'lumlarni aniqlashda ojizlik qiladi. Bundan tashqari masalani yechish uchun, jismlardan birortasini, masalan BD jismning muvozanatini ko'rish va u uchun uchta muvozanat tenglamasini tuzish kerak. Bu masalani boshqacha tartibda ham hal qilsa bo'ladi. Ya'ni har ikkala jism uchun alohida-alohida muvozanat tenglamasini tuzish mumkin.

17-§. Masalalar yechish

11-masala

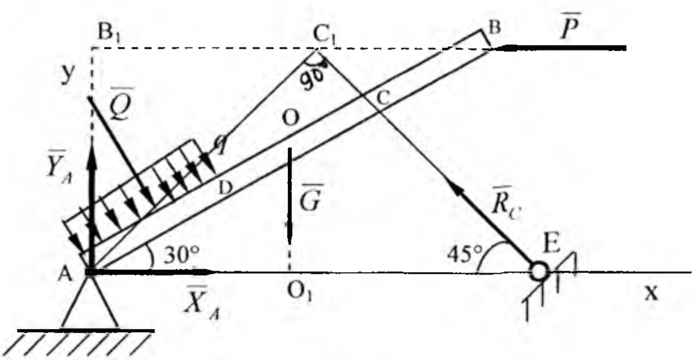
57-shaklda tasvirlangan qurilmaning A tayanch reaksiyasi CE sterjendagi zo'riqishi aniqlansin. Qurilmaga intensivligi q bo'lgan AB balka o'qiga perpendikulyar tekis taqsimlangan va gorizontal P kuch ta'sir etadi. Bir jinsli AB to'sinning og'irligi G=20 N, P=10 N, q=30 N\m. AD=DC=CB=1m bo'lsin. CE sterjenning og'irligi e'tiborga olinmasin.

Yechish:

Muvozanatdagi AB balkani tekshiramiz. Tekis taqsimlangan yukning ta'sirini to'plangan Q kuch bilan almashtiramiz. Bu kuch AD bo'lakning o'rtasiga qo'yilgan bo'lib, miqdori

$$Q = q \cdot AD$$

ga teng (57-shakl). AB jismni bog'lanishlardan xoli qilib, bog'lanish reaksiyalari bilan almashtiramiz. A sharnirdagi noma'lum reaksiyani koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilari orqali tasvirlaymiz. C sharnirdagi $\overline{R}_C$ reaksiya kuchi sharnir o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi.



57-shakl

Muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum_{k=0}^{n} F_{kx} = 0 \quad X_A + Q\cdot\cos60^o - R_C\cdot\cos45^o - P = 0 \qquad (a)$$

$$\sum_{k=0}^{n} F_{ky} = 0 \quad Y_A - Q\cdot\cos30^o - G + R_C\cdot\cos45^o = 0 \qquad (b)$$

$$\sum_{k=0}^{n} m_A(\overline{F}) = 0 \quad -Q\cdot\frac{AD}{2} - G\cdot AO_1 + R_C\cdot AC_1 + P\cdot AB_1 = 0 \qquad (d)$$

Shakldan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$AO_1 = AO\cdot\cos30^o = \frac{AB}{2}\cos30^o$$

$$AC_1 = AC\cdot\sin75^o, \quad AB_1 = AB\cdot\sin30^o$$

Bularni (d) tenglamaga qo'yib, quyidagini olamiz:

$$-Q\cdot\frac{AD}{2} - G\frac{AB}{2}\cos30^o + R_C\cdot AC\cdot\sin75^o + P\cdot AB\cdot\sin30^o$$

Bu yerdan R_C miqdorni aniqlaymiz

$$R_C = \frac{Q\cdot AD + G\cdot AB\cdot\cos30^o - 2P\cdot AB\cdot\sin30^o}{2\cdot AC\cdot\sin75^o}$$

Son qiymatlarini o'rniga qo'yib quyidagini olamiz:

$$R_C = \frac{30\cdot1 + 20\cdot3\cdot0{,}86 - 2\cdot10\cdot3\cdot0{,}5}{2\cdot2\cdot0{,}97} = 13{,}4\,N$$

(a) va (b) tenglamalar sistemasidan ketma-ket X_A va Y_A lar aniqlanadi

$$X_A = P + R_C\cdot\cos45^o - Q\cdot\cos60^o = 10 + 13{,}4\cdot0{,}7 - 30\cdot0{,}5 = 4{,}4\,N$$

X_A va Y_A larni topib, to'liq reaksiya R_A kuch quyidagi formula yordamida aniqlanadi

$$R_A = \sqrt{(X_A^2 + Y_A^2)} = \sqrt{(4\cdot41^2 + 36{,}4^2)} = \sqrt{1344{,}32} \approx 36{,}7\,N$$

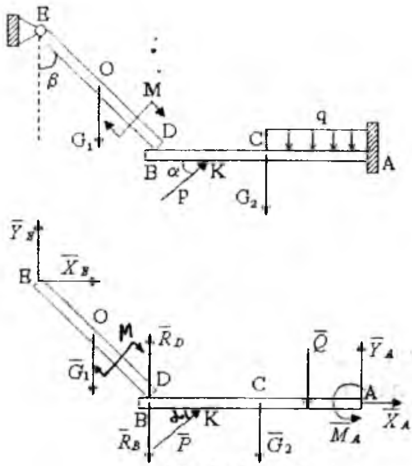
12-masala

58-shaklda tasvirlangan qurilmaning tayanch reaksiyalari va jismning D nuqtasidagi o'zaro bosimi aniqlansin. DE to'sin (balka) D nuqtasi AB to'singa erkin tayangan.

Berilgan:

$P = 30\sqrt{3}\,N,\ G_1 = 40\,N,\ G_2 = 30\,N,\ M = 150\sqrt{3}\ N,\ \alpha = 60^0,\ q = 100\,N/m$

AC=CB=2KB=2m, EO=OD=1,5m, $\beta=60^0$



58-shakl

Yechish:

Sistema ikkita jismdan tashkil topgan AB to'sin va DE to'sinlardir. Har bir jismning muvozanatini alohida-alohida ko'ramiz (58b-shakl). DE to'singa berilgan G_1 kuch va momenti M bo'lgan juft kuch ta'sir qiladi. AB to'sinning DE to'singa ta'sirini, AB balka o'qiga tik yo'nalgan reaksiya kuchi bilan almashtiramiz. E sharnirning reaksiyasini X_E, Y_E koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan tashkil etuvchilar orqali tasvirlaymiz. AB to'singa quyidagi berilgan kuchlar: P_1, G_2, Q lar ta'sir qiladi, chunonchi Q kuch AB to'sinning o'rtasiga ta'sir qilib, miqdori quyidagiga teng $Q=q\cdot AC$. DE to'sinning AB to'singa ta'sirini $R_B=-R_D$ reaksiya kuchi bilan almashtiramiz (ta'sir aks ta'sir aksiomasiga asosan) mustahkam mahkamlangan bog'lanishning A qirqimida hosil bo'lgan reaksiyani koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan X_A, Y_A tashkil etuvchilar va momenti M_A bo'lgan juft kuch bilan almashtiramiz. DE jismga ta'sir etuvchi kuchlar uchun muvozanat tenglamasini (3.22) ko'rinishda tuzamiz. Bunda moment markazlari uchun E va D nuqtalarni olamiz.

$$\sum m_E(\overline{F}_k)=0; \quad -M-G_1\cdot OE\cdot\sin\beta+R_D\cdot DE\cdot\sin\beta=0 \quad (a)$$

$$\sum m_D(\overline{F}_k)=0; \quad -M-Y_E\cdot DE\cdot\sin\beta+G_1\cdot OD\cdot\sin\beta-$$
$$-X_E\cdot DE\cos\beta=0 \quad (b)$$

$$\sum F_{kx}=0; \qquad X_E=0 \qquad (c)$$

AB jismga ta'sir qiluvchi kuchlar uchun muvozanat tenglamasini (3.21) ko'rinishda tuzamiz va bunda moment markazi uchun A nuqtani olamiz.

$$\sum F_{kx}=0 \qquad P\cdot\cos\alpha+X_A=0 \quad (1)$$

$$\sum F_{ky}=0 \qquad -R_B+P\cdot\sin\alpha-G_2-Q+Y_A=0 \quad (2)$$

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0 \qquad -P\cdot AK\cdot\sin\alpha+G_2\cdot AC+Q\cdot\frac{1}{2}\cdot AC+M_A=0 \quad (3)$$

Tenglamalar sistemasini yechib ketma-ket quyidagilarni olamiz: (a) tenglamadan.

$$R_D=\frac{M+G_1\cdot OE\cdot\sin\beta}{DE\cdot\sin\beta}=\frac{150\sqrt{3}+40\cdot1{,}5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{360}{3}=120\ N$$

(b) Tenglamadan

$$Y_E=\frac{M+G_1\cdot OD\cdot\sin\beta}{DE\cdot\sin\beta}=\frac{150\sqrt{3}-40\cdot1{,}5\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{3\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{240}{3}=80\ N$$

(1) Tenglamadan

$$X_A=-P\cos\alpha=-15\sqrt{3}\approx-26\ N$$

(2) Tenglamadan

$$Y_A=R_B-P\sin\alpha+G_2+Q=120-30\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+30+100\cdot2\approx305\ N$$

(3) Tenglamadan

$$M_A=P\cdot AK\cdot\sin\alpha+C_2\cdot AC-Q\frac{AC}{2}=30\sqrt{3}\cdot3\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-30\cdot2-100\cdot2\cdot1=-125\ N$$

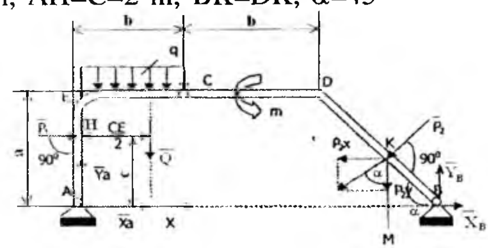
X_A va M_A miqdorlarning manfiy ishorali bo'lishi, ularning yo'nalishlari shaklda ko'rsatilgan yo'nalishlarga qarama-qarshi yo'nalishlarda bo'lishidan dalolat beradi. $X_E=0$ bo'lgani uchun E sharnirning reaksiyasi $R_E=Y_E$ bo'ladi. A sharnirning to'liq reaksiyasining miqdori $R_A=\sqrt{X_A^2+Y_A^2}=\sqrt{93701}\approx 306{,}1\,N$ bo'ladi.

13-masala

C sharnir yordamida tutashtirilgan qo'shma ramaning A va B tayanch sharnirlaridagi reaksiyalar aniqlansin. Ramaga P_1 va P_2 kuchlar, CE bo'limga intensivligi q bo'lgan tekis taqsimlangan yuk ta'sir qiladi. Hamda ramaning CDB o'ng qismiga momenti M bo'lgan juft kuch ta'sir qiladi (59-shakl).

Berilgan:

P_1=6 kN, P_2=22 kN, m=10 kN\m, q=2 kN/m, AE=a=3 m, EC=CD=b=2 m, AH=C=2 m, BK=DK, α=45°



59-shakl

Yechish:

Masalani hal qilishda avval butun sistema ya'ni ramaning muvozanatini, keyin uning biror bo'lagining muvozanatini ko'rish maqsadga muvofiqdir. Butun ramaning muvozanat tenglamalarida C birlashtiruvchi sharnirning reaksiya kuchlari ishtirok etmaydi, chunki bu kuchlar ichki kuchlar hisoblanadi. R_2 kuchidan A nuqtaga nisbatan moment olish uchun, uni tashkil etuvchilarga ya'ni P_{2X} va P_{2Y} larga ajratib, teng ta'sir etuvchining momenti haqida Varin'on teoremasidan foydalanamiz (59-shakl).

Bunda

$$P_{2y}=P_2\cdot\cos\alpha,\quad P_{2x}=P_2\cdot\sin\alpha$$

Butun rama uchun muvozanat tenglamasi quyidagicha bo'ladi

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0 \qquad -P_1\cdot C-Q\cdot\frac{b}{2}+m+P_{2x}\cdot\frac{a}{2}-P_{2y}\cdot AM+Y_B\cdot AB=0$$

$$\sum m_B(\overline{F}_k)=0 \qquad -Y_A\cdot AB-P_1\cdot C+Q\cdot LB+m+P_2\cdot BK=0$$

$$\sum F_{kx}=0 \qquad P_1+X_A-P_2\cdot\sin\alpha+X_B=0$$

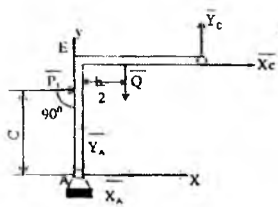
Bo'laklar va α burchak qiymatlarini tenglamaga qo'ysak, quyidagi ko'rinishni oladi

$$-2P_1-2q+m+\frac{3}{4}P_2\cdot\sqrt{2}-\frac{11}{4}\cdot P_2\cdot\sqrt{2}+7\cdot Y_B=0(a)$$

$$-7Y_A-2P_1+12q+m+\frac{3}{2}\cdot P_2\cdot\sqrt{2}=0 \quad (b)$$

$$P_1+X_A-\frac{1}{2}\cdot P_2\cdot\sqrt{2}+X_B=0 \quad (d)$$

Butun ramaning AEC chap qismini ajratib olamiz (60-shakl). Ramaning tashlab yuborilgan CDB qismining AEC qismiga ta'sirini X_C va Y_C kuchlari bilan almashtiramiz. Bular $\overline{R}_C$ reaksiya kuchini koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilaridir.



60-shakl

Ramaning AEC chap qismiga ta'sir etuvchi kuchlar uchun muvozanat tenglamalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi

$$\sum m_A(\overline{F}_k)=0 \quad -P_1\cdot C-Q\cdot\frac{b}{2}+Y_C\cdot b-X_C\cdot a=0$$

$$\sum m_C(\overline{F}_k)=0 \quad -Y_A\cdot b+X_A\cdot a+P_1\cdot(a-c)+Q\cdot\frac{b}{2}=0$$

$$\sum F_{ky}=0 \qquad Y_A-q\cdot b+Y_C=0$$

Masofalarning qiymatlari qo'yilgach, tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$-2P_1-2q+2Y_C-3X_C=0 \quad (e)$$
$$-2Y_A+3X_A+P_1+2q=0 \quad (f)$$
$$Y_A-2q+Y_C=0 \quad (g)$$

Tuzilgan 6 muvozanat tenglamalar sistemasini birgalikda yechib, noma'lum reaksiyalarni aniqlaymiz (a) tenglamadan Y_B ni aniqlaymiz

$$Y_B=\frac{1}{7}\left(2P_1+2q-m+\frac{3}{4}P_2\sqrt{2}+\frac{11}{4}P_2\sqrt{2}\right)=2\ kN$$

(b) tenglamadan Y_A ni aniqlaymiz

$$Y_A=\frac{1}{7}(-2P_1+12q+m+\frac{3}{4}P_2\sqrt{2})=4\ kN$$

(f) tenglamadan X_A ni aniqlaymiz

$$X_A=\frac{1}{3}(2Y_A-P_1-2q)=-\frac{2}{3}\approx 0{,}7\ kN$$

(b) tenglamadan X_B ni aniqlaymiz

$$X_B=-P_1+X_A+\frac{1}{2}P_2\sqrt{2}=-\frac{10}{3}\approx 3{,}3\ kN$$

(g) tenglamadan $Y_C=2q-Y_A=4-4=0$

(f) tenglamadan Y_C ni aniqlaymiz

$$X_C=\frac{1}{3}(-2P_1+2q)=-\frac{16}{3}\approx -5{,}3\ kN$$

X_A, X_B va X_C larning manfiy ishorali bo'lishi, ularning shaklda ko'rsatilgan yo'nalishlarga qarama-qarshi yo'nalgan ekanliklarini ko'rsatadi.

Takrorlash uchun savollar

1. Kuchninig nuqtaga nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
2. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti qachon nolga teng bo'ladi?
3. Kuchni ta'sir chizig'i bo'ylab ko'chirilsa kuch momenti o'zgaradimi?
4. Kuchning nuqtaga nisbatan momentining geometrik ma'nosi qanday?
5. Teng ta'sir etuvchi kuchning momenti tashkil etuvchi kuchlar momenti orqali qanday hisoblanadi?

6. Juft kuch deb nimaga aytiladi?
7. Juft kuch momenti qanday hisoblanadi?
8. Qanday juft kuchlar ekvivalent bo'ladi?
9. Tekislikdagi juft kuchlarni qanday qo'shish mumkin?
10. Tekislikdagi juft kuchlarning muvozanat shartlari qanday?
11. Kuchni o'ziga parallel qanday ko'chirish mumkin?
12. Tekislikdagi kuchlarni bir markazga keltirish natijasida nima hosil bo'ladi?
13. Kuchlar sistemasi bir markazga keltirilsa qanday hollar bo'lishi mumkin?
14. Tekislikda ixtiyoriy joylshgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?
15. Tekislikda parallel joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?
16. Jismlar sistemasida reaksiyasi kuchlarini aniqlash masalasi qanday yechiladi?

IV BOB
FERMALARDAGI ZO'RIQISHLARNI ANIQLASH

18-§. Fermada hosil bo'ladigan zo'riqish kuchlarini hisoblash usullari

Sterjenlarning uchlarini sharnirli tutashtiruvchi nuqta tugun deb ataladi. Agar ferma sterjenlari bir tekislikda yotsa, tekis fermalar deb ataladi. Fermalar ortiqcha sterjenga ega bo'lgan va ega bo'lmagan fermalarga bo'linadi. Agar fermaning bikirligi o'zgarmasligi uchun undan bir qancha sterjenni olib tashlash mumkin bo'lmasa, bunday ferma ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan ferma deb ataladi. Agar ferma sterjenlardan birorta yoki bir nechtani olib tashlaganda, uning bikirligi saqlanib qolsa, bunday ferma ortiqcha sterjenga ega bo'lgan ferma deb ataladi. Ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan fermaning sterjenlar soni m bilan tugunlar soni n orasidagi munosabatni topamiz. Ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan fermaga oddiy uchburchak misol bo'la oladi, ya'ni uchta tugun tutashtirish uchun uchta sterjen zarurdir. Undan keyin qolgan har n-5ta tugunlarni tutashtirish uchun ikkitadan sterjenlarni birlashtirishni taqozo qiladi. Demak n ta tugunli fermani hosil qilish uchun $m=3+2(n-3)$ ta sterjenlar zarurdir. Shunday qilib quyidagi munosabatni hosil qilamiz:

$$m=2n-3 \qquad (4.1)$$

Ortiqcha sterjenga ega bo'lgan ferma uchun quyidagiga ega bo'lamiz:

$$m>2n-3$$

Keyinchalik ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan tekis fermalarni ko'ramiz.

Bundan tashqari quyidagi shartlarning bajarilishini talab qilamiz.

1. Ferma sterjenlari to'g'ri chiziqlidir.
2. Sharnirlar ishqalanishdan xolidirlar.
3. Fermaga qo'yiladigan kuchlar faqat tugunlarga qo'yilgan bo'lib ferma tekisligida yotadi.
4. Ferma sterjenlarining o'z og'irliklari e'tiborga olinmaydi.

Shu shartlar bajarilganda ferma sterjenlari har qaysisi ularning uchlariga qo'yilgan ikki kuch ta'sirida muvozanatda bo'ladi. Muvozanat shartlaridan bu kuchlar miqdor jihatdan teng bo'lib, sterjen o'qi bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan bo'ladi. Fermaning sterjenlari faqat cho'zilish yoki siqilishga qarshilik ko'rsatadi. Fermalarni hisoblash masalalari: ularni tayanch reaksiyalari va ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni aniqlashdan iborat. Agar tayanch reaksiyalarni va ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarini, qattiq jism statikasining metodlari yordamida aniqlash mumkin bo'lsa, bunday fermalar statik aniq fermalar deb ataladi. Aks holda statik aniqmas fermalar deb ataladi. Fermani hisoblash usullarini ko'rayotgan paytimizda, ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan fermalarni statik aniq ekanligiga qanoat hosil qilamiz. Fermalarni hisoblashning bir nechta usullarini ko'ramiz. Hamma usullarda hisoblash: tayanch reaksiya kuchlarini aniqlashdan boshlanadi. Tayanch reaksiyalar butun fermani qattiq deb qarab muvozanat tenglamalaridan aniqlanadi.

1. Tugunni kesish usuli

Ferma sterjenlaridagi zo'riqishlarni topishning eng oddiy usuli tugunni kesish usulidir. Bu usulda fermaning tugunlari ketma-ket kesilib, ularning muvozanati: berilgan kuchlar, tayanch reaksiyalari va qirqilgan sterjenlarning reaksiyalari ta'siridan ko'riladi.

Shunday qilib, n(n-tugunlar soni) ta kesishuvchi kuchlar sistemasini olib, har biri ikkitadan muvozanat tenglamalarini tuzishimiz mumkin. Bu yerdan fermani hisoblash ikkita sterjen tutashgan tugunni kesishdan boshlash zarurligi ko'rinadi.

Keyinchalik noma'lumlar soni ikkidan oshmagan tugunlarni kesishga o'tiladi. Butun ferma uchun 2 n-ta tenglamalar tuzish mumkin. Bu tenglamalar sistemasidan 3 ta tayanch reaksiya kuchlarni tashkil etuvchilari va ferma sterjenlaridagi zo'riqishlar aniqlanadi. Agar ferma m-ta sterjenlardan tashkil topgan bo'lsa, statik aniqlash uchun quyidagini olamiz:

$$m=2n-3 \qquad (4.2)$$

Ya'ni ferma ortiqcha sterjenga ega bo'lmagan statik aniq. Agar fermani to'liq hisoblashni, ya'ni hamma sterjenlardagi zo'riqishlarni aniqlash zarur bo'lsa, bu usulni tatbiq qilish maqsadga muvofiqdir.

14-masala

61-shaklda tasvirlangan fermaning tayanch reaksiyalari va sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin. Fermaga parallel kuchlar ta'sir qiladi: F_1=1kN, F_2=2kN, F_3=3kN. Koordinata sistemasi AXY ni olamiz, tayanch reaksiya kuchlari bilan almashamiz. Bu fermaning statik aniq ekanligini oydinlashtiramiz. Fermada n=7 tugun va m=11 sterjenlar mavjud. Bu holda (4.2) tenglama o'rinli ekanligini osonlikcha ko'rish mumkin. B nuqtadagi reaksiya kuchi R_B BS sterjen bo'ylab yo'nalgan. Tayanch A dagi reaksiya kuchi miqdor va yo'nalish jihatidan noma'lum bo'lganligi uchun, uni koordinata o'qlari bo'ylab yo'nalgan X_A, Y_A tashkil etuvchilari orqali tasvirlash qulaydir. Reaksiya kuchlarini aniqlash uchun uchta muvozanat tenglamalarini tuzamiz

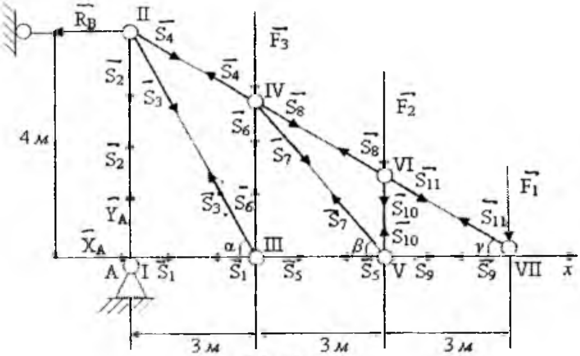
$$1)\sum F_{kx}=0;\;\; X_A-R_B=0$$

$$2)\sum F_{ky}=0;\;\; Y_A-F_1-F_2-F_3=0 \;\; bundan \; Y_A=5\;kN$$

$$3)\sum m_A\left(\overline{F}_k\right)=0;\;\; 4R_B-9F_1-6F_2-3F_3=0 \; bundan \; R_B=6{,}75\;kN$$

U holda $X_A=R_B$=6,75 kN.

Ferma tugunlarini rim raqamlari bilan, sterjenlarni esa arab raqamlari bilan belgilaymiz. Noma'lum zo'riqishlarni, sterjen bo'ylab tugundan ketgan deb qaraladi, ya'ni cho'zuvchi zo'riqishdir. Agar zo'riqishlar manfiy bo'lib qolsa, mos sterjenlar siqiladi. Fermani hisoblashni, ikkita noma'lum S_1 va S_2 ishtirok etgan I tugundan boshlanadi.



61-shakl

Muvozanat tenglamasini tuzamiz.

$\sum F_{kx} = 0 \quad X_A + S_1 = 0 \ \ bundan \ \ S_1 = -X_A = -6,75 \ кN$

$\sum F_{ky} = 0 \quad Y_A + S_2 = 0 \ \ bundan \ S_2 = -Y_A = -5 \ кN$

S_2 zo'riqishni bilib, II tugunga o'tamiz, bunda noma'lumlar S_3 va S_4 lardir. II tugun uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

$$\sum F_{kx} = 0 \quad -R_B + S_3 \cdot \cos\alpha + S_4 \cdot \cos\gamma = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0 \quad -S_2 - S_3 \cdot \sin\alpha - S_4 \cdot \sin\gamma = 0$$

Berilgan o'lchovlardan sterjenlar uzunliklarini aniqlaymiz:

$$l_3 = 5m, \ l_4 = l_8 = l_{11} = 3,3m$$

$$l_2 = \frac{8}{3}m, \ l_7 = 4m, \ l_{10} = \frac{4}{3}m$$

U holda

$\cos\alpha=0,6 \qquad \sin\alpha=0,8$

$\cos\beta=0,75 \qquad \sin\beta=0,6675$

$\cos\gamma=0,909 \qquad \sin\gamma=0,404$

Muvozanat tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$$-6,75+0,6S_3+0,909S_4=0$$

$$5-0,8S_3-0,404S_4=0$$

Bu tenglamalardan S_3=3,75 kN; S_4=4,95 kN kelib chiqadi.

III tugun uchun muvozanat tenglamalarini tuzamiz:

$$\sum F_{kx} = 0; \quad S_5 - S_1 - S_3 \cos\alpha = 0$$

$$\sum F_{ky} = 0; \quad S_6 + S_3 \sin\alpha = 0$$

Bundan quyidagilarni topamiz:

$$S_5=-4,505 \text{ kN}$$

$$S_6=-2,993 \text{ kN}$$

Keyin, ketma-ket IV, V va VII tugunlarning muvozanatini tekshirib, qolgan sterjenlardagi quyidagi zo'riqishlarni aniqlaymiz:

$$S_7=2,197 \text{ kN}, S_8=6,598 \text{ kN}, S_9=-6,153 \text{ kN}$$

$$S_{10}=1,465 \text{ kN}, S_{11}=2,475 \text{ kN}$$

Olingan natijalardan quyidagi xulosalarni chiqaramiz: 3, 4, 8, 10, 11 sterjenlar cho'ziladi, 1, 2, 5, 6, 7, 9 sterjenlar siqiladi.

2. Sterjenlarni qirqish usuli (Ritter usuli).

Ferma sterjenlaridan ba'zi birida hosil bo'ladigan zo'riqishlarni aniqlash zarur bo'lsa, Ritter usuli masalaning javobini tezroq beradi. Bu usul quyidagidan iborat:

Ferma zo'riqishi aniqlanadigan sterjenlardan o'tuvchi biror kontur bilan fikran ikki qismga ajratilib, uning bir qismi muvozanati tekshiriladi. Tashlangan qismning ta'siri, kesilgan sterjenlar cho'ziladi deb qarab, sterjen o'qlari bo'ylab tashlangan qismi tomon yo'nalgan zo'riqishlar bilan almashtiriladi. Ko'rilayotgan qism uchun muvozanat sharti tuziladi. Ferma kontur bilan fikran ikki qismga ajratilganda, kesilgan sterjenlarning soni uchtadan oshmasligi shart, chunki uchtadan oshsa, tegishli zo'riqishlarning soni ko'payib, masala statik aniqmas bo'lib qoladi. Ritter masalalarni osonroq hal qilish uchun shunday tenglamalarni tuzishni taklif qildiki, bularda bittadan noma'lum zo'riqishlar qatnashadi. Agar kesilgan sterjenlar parallel bo'lmasa, u holda bunday tenglamalar no'malum zo'riqishlar kesishuvchi nuqtalarga nisbatan uchta moment tenglamalari bo'ladi. Bu nuqtalar Ritter nuqtalari deb ataladi. Agar ikkita sterjenlar parallel bo'lib qolsa, bitta Ritter nuqtasi mavjud bo'lmaydi. U holda uchinchi muvozanat tenglamasi uchun kuchlar proyeksiyalari yig'indisining nolga tengligini olamiz.

15-masala

62-shaklda tasvirlangan fermaning tayanch reaksiyalari va 3, 5, 6, 8, 9, 10 sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin.

Yechish:

Tayanch reaksiyalarni aniqlaymiz. Fermaga ta'sir etuvchi kuchlar va $\overline{R_B}$ reaksiya kuchlari, parallel kuchlar sistemasi hosil qilgani uchun $\overline{R_A}$ reaksiya kuchi ham ularga parallel bo'lishi aniq.

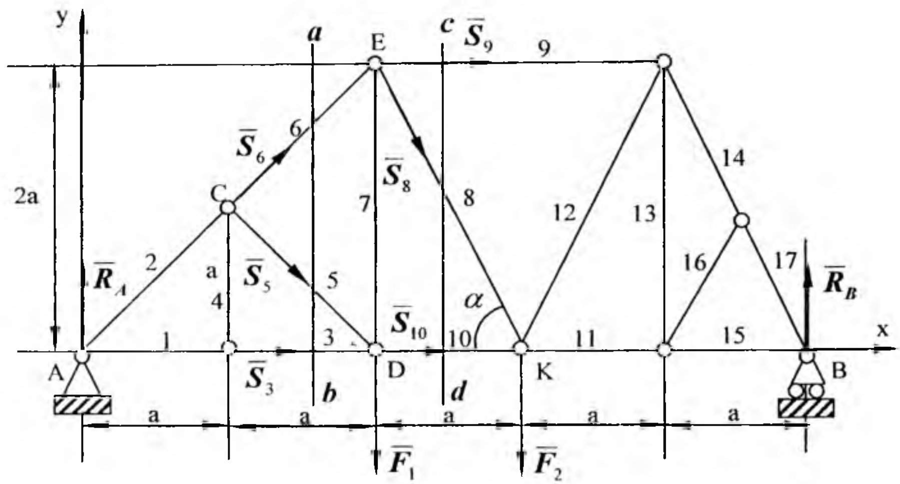
$F_1 = 5\ N$; $F_2 = 5\ N$ kuchlar berilgan.

Parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlaridan R_A, R_B topamiz:

$$\sum M_A(\overline{F}_k) = 0 \quad -F_1 \cdot 2a - F_2 \cdot 3a + R_B \cdot 5a = 0$$

$$\sum M_B(\overline{F}_k) = 0 \quad F_2 \cdot 2a + F_1 \cdot 3a - R_A \cdot 5a = 0$$

bu tenglamalardan $R_A = 5\ N$, $R_B = 5\ N$ aniqlandi.



62-shakl

3, 5, 6 sterjenlarni kesib o'tuvchi «ab» qirqimni o'tkazib, fermaning chap qismini muvozanatini tekshiramiz. A, C va D nuqtalar Ritter nuqtalari ekanliklarini osonlikcha ko'rish mumkin. Muvozanat tenglamalarini tuzamiz

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0 \quad S_5 \cdot a\sqrt{2} = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_C(\overline{F}_k) = 0 \quad S_3 \cdot a - R_A \cdot a = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_D(\overline{F}_k) = 0 \quad -R_A \cdot 2a - S_6 \cdot a\sqrt{2} = 0$$

Bu yerdan quyidagilarni aniqlaymiz:

$S_5=0$, $S_3=5$ N, $S_6=-7{,}14$ N.

8, 9, 10 sterjenardagi zo'riqishlarni aniqlash uchun «cd» qirqimni o'tkazib, fermaning chap qismining muvozanatini tekshiramiz. Bu qism uchun E va K nuqtalari Ritter nuqtalaridir

$$\sum_{k=1}^{n} m_E(\bar{F}_k) = 0 \qquad S_{10} \cdot 2a - R_A \cdot 2a = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_K(\bar{F}_k) = 0 \quad -R_A \cdot 3a + F_1 \cdot a - S_9 \cdot 2a = 0$$

Bundan quyidagilarni aniqlaymiz:

$S_9=-5$ N, $S_{10}=5$ N.

S_8 zo'riqish kuchlarni OY o'qiga proyeksiyalarning yig'indisi nolga tengligidan aniqlanadi

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\bar{F}_{ky}\right)=0 \qquad R_A - F_1 - S_8 \cdot \sin\alpha + S_6 \cos 45^o = 0 \qquad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Bundan: $S_8=5{,}5$ N.

Takrorlash uchun savollar

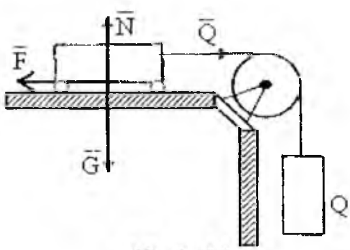
1. Fermalarni hisoblashning qanday usullarini bilasiz?
2. Tugunlarni qirqish usuli qanday usul?
3. Ritter usuli qanday usul?
4. Tugun deb nimaga aytiladi?
5. Fermalarga qanday shartlar qo'yiladi?
6. Ritter usulidan qachon foydalanish qulay?

V BOB

Ishqalanish

19-§. Sirpanib ishqalanish

Tajriba shuni ko'rsatadiki, bir jism ikkinchi jism sirtida sirpanganda, qarshilik namoyon bo'ladi, buni *sirpanib ishqalanish* deb ataladi. Sirpanishga qarshilik ko'rsatuvchi kuch, *ishqalanish* *kuchi* deb ataladi. Sirpanib ishqalanish kuchini hosil qiluvchi bosh sabab, jismlar tegib turgan sirtlarining g'adir-budirligi tufayli, qisilgan jismlarning ilashishdir. Ishqalanish kuchining namoyon bo'lishi va uning qonuniyatlarini, quyidagi tajriba orqali tushuntirish mumkin. Gorizontal tekislikda yotuvchi P og'irlikdagi g'o'lachaga (brusok), gorizontal ip vositasida Q yukni qo'yaylik. Buni blok orqali uzatilgan ip uchiga tosh qo'yilgan pallachani osish orqali bajarish mumkin (63-shakl). G'o'lachani og'irligi P bilan tekislikning N reaksiya kuchi o'zaro muvozanatlashishini osonlikcha ko'rish mumkin. Gorizontal Q kuchi muvozanatlashmagan, shuning uchun uning miqdori qanchalik kichik bo'lmasin, g'o'lacha sudralishi lozim. Biroq harakat Q kuch qandaydir miqdorga yetgandan keyingina boshlanadi. Bundan ko'rinadiki, jismlarning tegishib turgan sirtlarida N normal reaksiyadan tashqari, Q kuch bilan muvozanatlashuvchi qandaydir F kuch paydo bo'lgan. Shu kuchni ishqalanish kuchi deb ataladi.



63-shakl

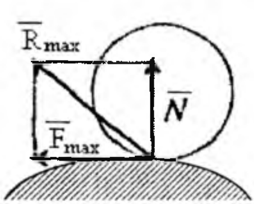
Jismning qo'zg'alish oldidan hosil bo'lgan qarshilik kuchi, maksimum ishqalanish kuchidir. Ishqalanish kuchi, faqat jismga sirpantiruvchi kuch ta'sir qilgandagina hosil bo'ladi. Bu kuch jismni qo'zg'atish uchun zarur bo'lgan kuchga kattalik jihatidan teng va unga qarama-qarshi yo'nalgan ishqalanish kuchi noldan qandaydir aniq qiymatgacha F max ga o'zgaradi. Ko'p sonli tajribalarga tayanib, maksimal ishqalanish kuchi jismning normal bosimiga yoki normal reaksiyaga to'g'ri proporsional ekanligi ta'kidlangan, ya'ni:

$$F_{max}=fN \qquad (5.1)$$

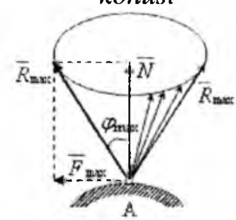
Bu yerda N-normal bosim, f-proporsionallik koeffitsienti. Bu ishqalanish koeffitsienti deyiladi. (5.1) tenglamadan ko'rinadiki, ishqalanish koeffitsienti f o'lchovga ega bo'lmagan miqdordir. U jismlarning moddiyligiga, ular sirtlarining fizik holatlariga (g'adirbudurligi, namlik, harorat va boshqalarga) bog'liq bo'ladi. Ishqalanish koeffitsienti tajribalar yordamida aniqlanadi. Odatda tavsif qilingan tajribadan foydalanish qulayroq. Ishqalanishda (5.1) tenglama o'rinlidir, faqat harakatdagi ishqalanish koeffitsienti, statik ishqalanish koeffitsientidan birmuncha kamroqdir. Shunday qilib bog'lanishning to'liq reaksiyasi $\overline{R}$ max normal reaksiya $\overline{N}$ va unga perpendikulyar bo'lgan ishqalanish kuchi $\overline{F}$ larning yig'indisidan iborat bo'lib, normal bilan qandaydir φ burchak tashkil qiladi. Ishqalanish kuchi $\overline{F}$ noldan $\overline{F}$ max gacha o'zgarganda, to'liq reaksiya $\overline{N}$ dan $\overline{R}$ max gacha, uning normaldan og'ish burchagi noldan φ_0 gacha o'zgaradi. To'liq reaksiyaning sirtning normali bilan tashkil qilgan burchakning maksimal miqdori φ_0-ishqalanish burchagi deb ataladi. (64-shakl) ishqalanish kuchi urinma tekislikda ixtiyoriy yo'nalishni oladi, chunki sirpantiruvchi kuchga bog'liq.

Bog'lanishning to'liq reaksiyasi R max yo'nalishining olishi mumkin bo'lgan geometrik o'rni, qandaydir, uchi jismlarning tegishib turgan nuqtasida bo'lgan konus sirtdan iborat bo'ladi. Bu konus sirt ishqalanish konusi deb ataladi (65-shakl).

U holda jismning muvozanat holatida to'liq reaksiya ishqalanish konusi ichida ixtiyoriy yo'nalishda bo'lishi mumkin. Binobarin, g'adir-budur sirtga tayangan jism muvozanatida unga ta'sir qiluvchi kuchlarning teng ta'sir etuvchisi, jismlarning tegishib turgan nuqtasidan o'tib, konus ichida yotadi. Faqat shunday kuchgina tayanch nuqtaning reaksiyasi bilan muvozanatlashadi. Agar teng ta'sir etuvchi ishqalanish konusining tashqarisidan o'tsa, u holda reaksiya u bilan muvozanatlashmaydi va jism sirpana boshlaydi.



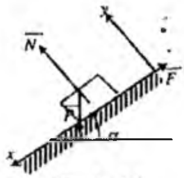
64-shakl



65-shakl

16-masala

Gorizont bilan α burchak tashkil qiluvchi qiya tekislikda og'ir jism yotadi. Agar ishqalanish koeffitsienti f ga teng bo'lsa, α burchagining qanday qiymatida jism muvozanatda bo'ladi (66-shakl).



66-shakl

Yechish:

Muvozanat sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0 \quad P \cdot \sin\alpha - F = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0 \quad N - P \cdot \cos\alpha = 0$$

bu yerda F-ishqalanish kuchi. Bu yerdan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$F = P \cdot \sin\alpha, \; N = P \cdot \cos\alpha.$$

Jism muvozanatda bo'lishi uchun quyidagi shart bajarilishi lozim:

$F \leq f \cdot N$ yoki $P \cdot \sin\alpha \leq P \cdot f\cos\alpha$, bu yerdan quyidagini aniqlaymiz:

$$\mathrm{tg}\alpha \leq f \text{ va } \alpha \leq \mathrm{arctg} f.$$

17-masala

G'ildirak bilan kolodka (tormozlovchi) o'q orasidagi ishqalanish kuchini e'tiborga olib, Q yuk bilan muvozanatlashuvchi P kuchning minimal miqdori aniqlansin. Ishqalanish koeffitsienti f=0,2 bo'lganda bog'lanish reaksiya kuchlari ham aniqlansin, $b = 4a$, $\ell = 0{,}2a$; $OB = 3R$

Yechish:

Masalani yechish uchun qurilmaning bir yoki bir necha bo'laklarining muvozanatlarini alohida ko'rish kerak. Sistemani tashkil qilgan jismlarning har birini erkin jism deb qarab, uning muvozanat shartlarini tuzamiz. Bog'lanishdagi ichki reaksiya kuchlari bir-biriga miqdor jihatidan bir chiziq bo'ylab qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Tekislikda ixtiyoriy joylashgan kuchlar ta'siridagi n-ta jismdan tashkil topgan qurilma muvozanatda bo'lsin. Har bir jism uchun 3 tadan muvozanat tenglamasi tuzilsa, qurilma uchun 3-n ta no'malumli 3n ta tenglamalar sistemasini tuzishni taqozo qiladi (Boshqacha kuchlar sistemasi ta'siridan o'ziga mos sonli tenglamalar sistemasini tuzish lozim). Qurilmani to'rtta bo'lakchaga bo'lib, har bir qismning muvozanatini tekshiramiz.

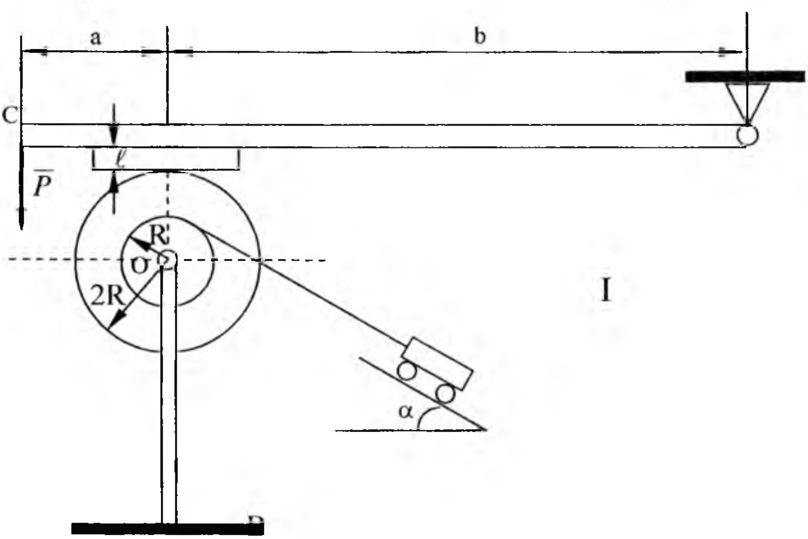
I. Umumiy ko'rinish ;

II. Q yuk uchun ($\overline{Q}, \overline{P}, \overline{T}$) ;

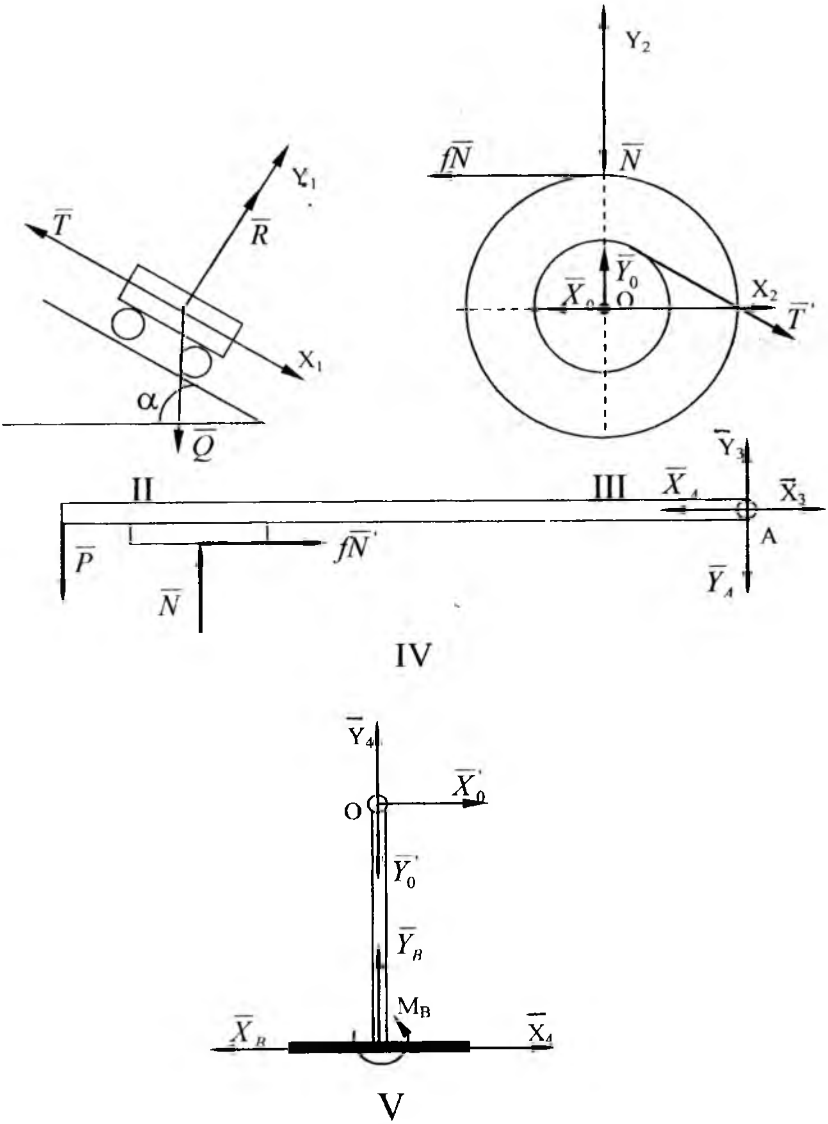
III. O g'ildirak uchun ($\overline{T}, \overline{X}_0, \overline{Y}_0, \overline{N}, \overline{fN}$) ;

IV. AC balka uchun ($\overline{N}, \overline{fN}, \overline{X}_a, \overline{Y}_a, \overline{P}$);

V. OB sterjen uchun ($\overline{T}, \overline{X}_0', \overline{Y}_0', \overline{X}_B, \overline{Y}_B, \overline{M}_B$).



67-shakl



T
R
Y1
X1
α
Q
Y2
fN
N
Y0
X0
O
X2
T'
II
III
Y3
X4
X3
A
P
fN'
N
Y4
IV
Y4
O
X0'
Y0'
YB
MB
XB
X4
V

68-shakl

α	R	a	Q
30°	10 sm	12 sm	240 N

Endi muvozanat tenglamalarini tuzamiz. II Q yuk ucl (kesishuvchi kuchlar sistemasi uchun)

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx1} = 0, \quad -T + Q \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky1} = 0, \quad R - Q \cdot \cos\alpha = 0;$$

Bu tenglamalardan

$$T = Q \cdot \sin\alpha = 240 \cdot \sin 30^o = 120 \quad N$$

$$R = Q \cdot \cos\alpha = 240 \cdot \cos 30^o = 270{,}8 \quad N$$

T=120 N; R=270,8 N

III hol uchun.

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx_2} = 0; \; -X_0 - fN + T' \cos\alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky_2} = 0; \; Y_0 - N - T' \sin\alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_0\left(\overline{F}_k\right) = 0; \; fN \cdot 2R - T'R = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky2} = 0, \; +Y_0 - N - T \cdot \sin\alpha = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_0(F_k) = 0, \quad f \cdot N \cdot 2R - T \cdot R = 0$$

Bu tenglamalarda $T' = T = 120\,\text{kN}$ deb qarab, quyidagilarni topamiz.

$$N = \frac{T}{2f} = \frac{120}{2 \cdot 0{,}2}; \; N = 300\,kN$$

$$Y_0 = N + T\sin\alpha = 300 + 120\sin 30^\circ; \; Y_0 = 360 \; N$$

$$X_0 = T\cos\alpha - fN = 120\cos 30^\circ - 0{,}2 \cdot 300; \; X_0 = 44 \; N$$

IV-AC balka uchun

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx_3} = 0; \; -X_A + fN' = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky_3} = 0; \; -Y_A - P + N' = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = 0; \; P(a+b) + fN' \cdot \ell - N' \cdot a = 0$$

O'rniga qo'ysak N'=N=300 N quyidagilarni olamiz.

$$P = \frac{N'a - fN' \cdot \ell}{a+b} = \frac{N'a - fN' \cdot 0{,}2}{5a}$$

$$P = \frac{30^0(1-0{,}2^2)}{5}; \quad P=57{,}6 \text{ N}$$

V-OB sterjen uchun

$$\sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_{kx_4}) = 0; \; X_0' - X_B = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} (\overline{F}_{ky_4}) = 0; \; -Y_0' + Y_B = 0$$

Bu yerdan quyidagilarni aniqlaymiz:

$$M_B - X_0 \cdot OB = 0 \qquad X_B = 44\,N$$

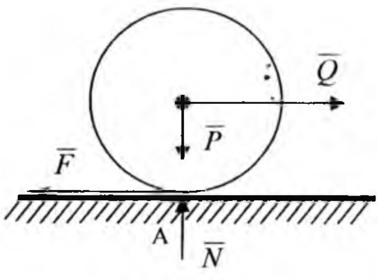
$$Y_B = Y_0' = Y_0 \qquad Y_B = 360\,N$$

$$M_B = X_0' \cdot OB = X_0 \cdot OB = 44 \cdot 3 \cdot 10 \qquad M_B = 13{,}20\,N \cdot sm$$

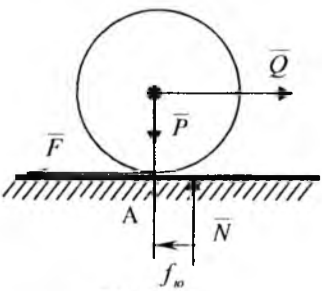
20-§. Yumalab ishqalanish

Bir jism ikkinchi jismning sirti bo'ylab yumalasa yoki yumalashga intilganda hosil bo'ladigan qarshilik yumalashdagi ishqalanish deb ataladi, misol tariqasida og'irligi P bo'lgan salmoqli g'ildirak gorizontal tekislikda turadi, g'ildirakning o'qiga gorizontal Q kuch qo'yilgan (69-shakl).

Bu holda g'ildirak bilan tekislikning tegishib turgan nuqtasida normal reaksiya kuchi N va ishqalanish kuchi g'ildirakning tekislik bo'ylab yumalashiga qarshilik ko'rsatadi. Ishqalanish kuchi miqdor jihatdan Q ga teng bo'lib, unga qarama-qarshi tomonga qarab yo'nalgan. Q kuch bilan ishqalanish kuchi F o'zaro juftni tashkil etadi. Q kuchning har qanday qiymatida bu juft kuch muvozanatlashmaydi va g'ildirak muvozanatda turolmaydi. Odatda esa yumalash Q kuchining qandaydir qiymatidan boshlanadi.



69-shakl



70-shakl

Binobarin g'ildirakning yumalashiga qarshilik ko'rsatuvchi juft hosil qiladi. Bu juft yumalashdagi ishqalanish jufti deyiladi. Bu juft tekislik va g'ildirakning, ezilishi natijasida hosil bo'ladi, g'ildirak va tekislikinng ezilishi natijasida, ularning sirtlarini A nuqta atrofidagi kichik bir yuzada o'zaro yopishib turadi. Bu reaksiya shu yuzacha bo'ylab taqsimlangan bo'ladi. Reaksiyalarni A nuqtaga keltirish natijasida A nuqtaga qo'yilgan N va F kuchlari hamda yumalashdagi ishqalanish jufti hosil bo'ladi (70-shakl). Yumalashdagi ishqalanish jufti Q, F jufti o'zaro muvozanatlashadi. Yumalab ishqalanish juftining momenti qandaydir M max qiymatgacha o'zgarishi tajribada tasdiqlangan. Ko'pincha tajribalarga suyanib quyidagi xulosaga kelgan. Yumalab ishqalanish juft momenti g'ildirak radiusiga bog'liq bo'lmagan normal reaksiya N ga to'g'ri proporsional bo'ladi ya'ni

$$M_{max} = f_{yu} \cdot N \tag{5.2}$$

F_{vu}-yumalab ishqalanish koeffitsienti deyiladi. Yumalab ishqalanish koeffitsienti f_{vu} uzunlik birligi bilan o'lchanadi. U bir-biriga tegib turgan materiallarning fizik xossalariga va ishqanishlariga bog'liq tajriba yordamida aniqlanadi. Tajriba shuni tasdiqlaganki, yumalashdagi qarshilik sirpanishdagi qarshilikdan birmuncha oz bo'ladi. Shuning uchun texnikada, ishqalanish zararli bo'lgan hollarda, sirpanishni yumalashga almashtirishga jazm qilinadi. Masalan sirpanuvchi podshipniklar o'rniga sharikli podshipniklar ishlatiladi.

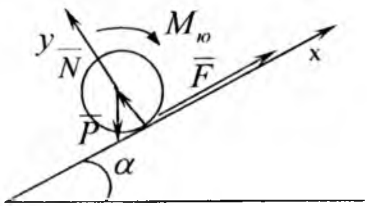
18-masala

Gorizont bilan α burchak tashkil qiluvchi qiya tekislikda radiusi R ga teng bo'lgan g'ildirak (silindr) turadi.

α burchagining qanday qiymatida g'ildirak muvozanatda bo'ladi? Yumalab ishqalanish koeffitsienti f_{vu} ga teng (71-shakl)

Yechish:

G'ildirakka quyidagi kuchlar ta'sir qiladi: Og'irlik kuchi P, tekislikning normal reaksiyasi N, sirpanib ishqalanish kuchi F va momenti M_{vu} yumalashdagi qarshilik jufti.



71-shakl

Agar sirpanish va yumalash sodir bo'lmasa quyidagi shart bajarilishi lozim:

$$F \le f \cdot N \tag{1}$$

$$M_{yu} \le f_{yu} \cdot N \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0, \quad \text{F - P} \cdot \sin\alpha = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky2} = 0, \quad \text{N - P} \cdot \cos\alpha = 0 \tag{4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} m_A(\overline{F}_k) = 0; \quad PR\sin\alpha - M_{yu} = 0 \tag{5}$$

Bu tenglamalarni (1) va (2) larni e'tiborga olib yechsak, quyidagilarni olamiz (4) dan $N = P\cos\alpha$, (3) dan (1)ni e'tiborga olib

$$tg\alpha \le f \tag{6}$$

(5)dan (2)ni e'tiborga olib

$$tg\alpha \le \frac{f_{yu}}{R} \qquad (7)$$

hosil qilamiz. Bu yerdan (6) shart g'ildirakning sirpanmasligini va (7) shart esa g'ildirakning yumalamasligini ta'minlaydi.

Ko'pgina jismlar uchun $\frac{f_{yu}}{R} \langle f$ bo'lganligi sababli, g'ildirak muvozanatda bo'lishi uchun α burchak (7) shartni qanoatlantirishi kerak.

Takrorlash uchun savollar

1. Sirpanish ishqalanish kuchi deb qanday kuchga aytiladi?
2. Ishqalanish kuchi qanday qonunlarga bo'ysunadi?
3. Ishqalanish kuchi nimalarga bog'liq?
4. Ishqalanish kuchining maksimal qiymati qanday hisoblanadi?
5. Ishqalanish bo'lgan holda reaksiya kuchi qanday bo'ladi?
6. Ishqalanish burchagi nima?
7. Ishqalanish konusi nima?
8. Yumalab ishqalanish nima?
9. Yumalab ishqalanish koeffitsienti nima?
10. Yumalab ishqalanish jufti momenti qanday hisoblanadi?

VI BOB

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi

Ta'sir chiziqlari fazoda ixtiyoriy ravishda joylashgan kuchlardan tashkil topgan sistema fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi deyiladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan moment vektori

Agar jismga fazoviy kuchlar ta'sir etsa, u holda jismning mazkur kuchlar ta'sirida aylanish yo'nalishini aniqlash uchun kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektor tarzida qaraladi.

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori moment markaziga qo'yilgan bo'lib, bu markaz va kuchning ta'sir chizig'i orqali o'tgan tekislikka perpendikulyar yo'naladi hamda uning uchidan qaraganimizda kuch jismni soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda aylantirishga intiladi.

$\overline{F}$ kuchning O nuqtaga nisbatan momenti vektorini aniqlash uchun kuch qo'yilgan A nuqtaning O markazga nisbatan radius-vektori $\bar{r}$ ning shu kuch vektoriga vektorli ko'paytmasini aniqlaymiz. Vektorlar algebrasidan ma'lumki, $\bar{r}\times\overline{F}$ vektor ustiga tushirish uchun soat milining aylanishiga teskari yo'nalishda eng qisqa burchakka burish kerak. Bu vektorning moduli

$$\left|\bar{r}\times\overline{F}\right| = r\,F\sin\left(\bar{r},^\wedge\overline{F}\right) \qquad (6.1)$$

bo'ladi.

O nuqtadan $\overline{F}$ kuchning ta'sir chizig'iga tik h kesmani o'tkazamiz, u holda

$$h = r\,\sin\left(\bar{r},^\wedge\overline{F}\right) \qquad (6.2)$$

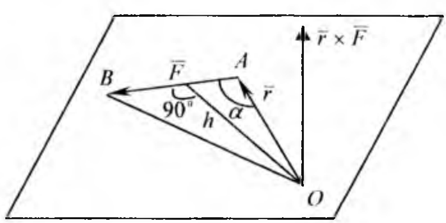
bo'lgani uchun

$$\left|\bar{r}\times\overline{F}\right| = F\cdot h = \left|\overline{M}_0,\left(\overline{F}\right)\right| \qquad (6.3)$$

$\bar{r}\times\overline{F}$ vektorning yo'nalishi kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori bilan ustma-ust tushadi. $\bar{r}\times\overline{F}$ va $\overline{M}_0(\overline{F})$ vektorlarning miqdorlari teng, yo'nalishlari ustma-ust tushgani uchun

$$\overline{M}_0(\overline{F}) = \bar{r}\times\overline{F} \qquad (6.4)$$

Ya'ni F kuchning O nuqtaga nisbatan moment vektori, moment markazidan kuch qo'yilgan nuqtaga o'tkazilgan radius-vektori bilan kuch vektorining vektorli ko'paytmasiga teng ekan.



72-shakl

21-§. Kuchning o'qqa nisbatan momenti

O'qqa nisbatan kuch momentining ta'rifi

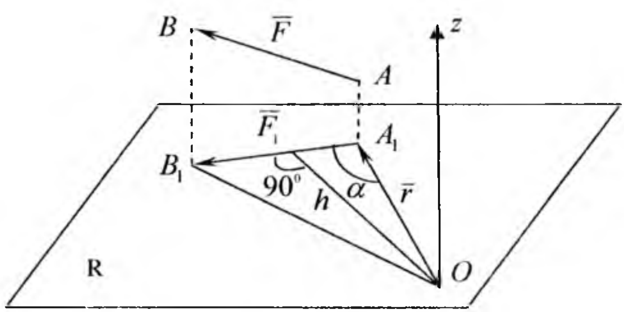
Qattiq jismning biror A nuqtasiga $\overline{F}$ kuchi qo'yilgan. Biror OZ o'qini o'tkazib, unga perpendikulyar bo'lgan R tekislikni olamiz. O'q bilan tekislikning kesishgan nuqtasini O bilan belgilaymiz. $\overline{F}$ kuchini R tekislikka proyeksiyalaymiz va uni $\overline{F}_1$ deb belgilaymiz ya'ni $\overline{F}_1 = \overline{F}_{pro}$ (73-shakl).

Ta'rif.

$\overline{F}$ kuchining OZ o'qiga nisbatan kuch momenti deb, $\overline{F}$ kuchning o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi $\overline{F}_1$ proyeksiyasining o'q bilan tekislikning kesishgan O nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga aytiladi ya'ni:

$$m_Z(F) = m_0(\overline{F}_1) = \pm F_1 \cdot h \qquad (6.5)$$

O'qqa nisbatan kuch momenti musbat deb qabul qilinadi, agar OZ o'qining oxiridan qaralganda $\overline{F}_1$ proyeksiya tekislikni OZ o'qi atrofida



73-shakl

soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda aylantirishga intilsa. O'qqa nisbatan kuch momentining sonli qiymati OA_1B_1 uchburchak yuzasining ikkilanganligiga teng, ya'ni

$$m_z(\overline{F}) = 2S_{\Delta OA_1B_1} \qquad (6.6)$$

O'qqa nisbatan kuch momenti quyidagi ikki holda nolga teng bo'ladi:

1. Agar $F_1=0$, ya'ni kuchning ta'sir chizig'i o'qqa parallel bo'lsa
2. Agar h=0, ya'ni kuchning ta'sir chizig'i o'qni kesib o'tsa

Demak, agar kuch bilan o'q bir tekislikda yotsa, bu o'qqa nisbatan kuch momenti nolga teng bo'lar ekan.

19-masala

Tomonlari a ga teng bo'lgan kubga qo'yilgan F_1,F_2,F_3 (74-shakl) kuchlarning koordinata o'qlariga nisbatan kuch momentlari hisoblansin.

F_1 kuchi OYZ tekisligida yotadi, shuning uchun

$$m_X(\overline{F_1})=-F_1a$$
$$m_Y(\overline{F_1})=0$$
$$m_z(\overline{F_1})=0$$

F_2 kuchi OZ o'qiga parallel, shuning uchun, bu kuchning Z o'qiga nisbatan momenti nolga teng. Demak,

$$m_X(\overline{F_2})=F_2a$$
$$m_Y(\overline{F_2})=-F_2a$$
$$m_z(\overline{F_2})=0$$

$\overline{F_3}$ kuchi OY o'qini kesib o'tadi, shuning uchun bu o'qqa nisbatan kuch momenti nolga teng bo'ladi $\overline{F_3}$ kuchini YOZ tekisligidagi $\overline{F_3}'$ proyeksiyasining miqdori quyidagiga teng:

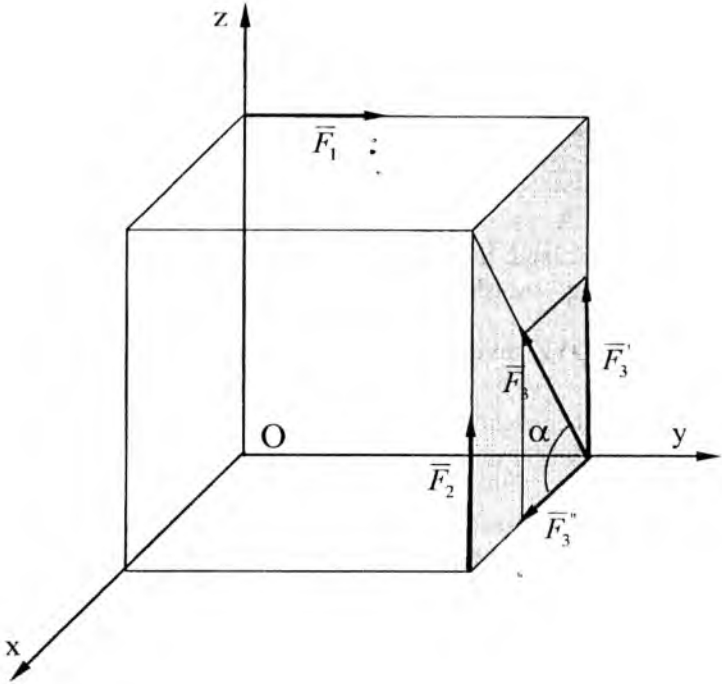
$$F_3'=F_3\sin\alpha=F_3\cdot\sin 45^0=F_3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_3''=F_3\cdot\cos\alpha=F_3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

u holda

$$m_X(\overline{F_3})=F_3'a=F_3\frac{a\sqrt{2}}{2}$$

$$m_Z(\overline{F_3})=-F_3''a=-F_3\frac{a\sqrt{2}}{2}$$



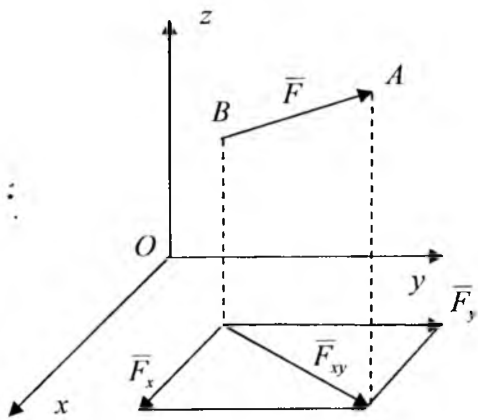
74-shakl

Kuchning koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari. $\overline{F}$ -berilgan kuch, $\overline{F}_x$, $\overline{F}_y$, $\overline{F}_z$ -uning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari, x, y, z-uning qo'yilgan nuqtasi koordinatalari. $\overline{F}$ kuchini koordinata o'qlariga nisbatan olingan momentlarining ifodalarini tuzamiz. $\overline{F}$ kuchini XOY tekisligiga proyeksiyalab, uni $\overline{F}_{xy}$ deb belgilaymiz (75-shakl). Ta'rifga asosan:

$$m_z(\overline{F}_3) = m_0(\overline{F}_{xy}) \tag{6.7}$$

$\overline{F}_{xy}$ kuchini OX va OY koordinata o'qlari bo'ylab $\overline{F}_x$ va $\overline{F}_y$ tashkil etuvchilarga ajratamiz:

$$\overline{F}_{xy} = \overline{F}_x + \overline{F}_y$$



75-shakl

Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasiga asosan:

$$m_0\left(\overline{F}_{xy}\right) = m_0\left(\overline{F}_x\right) + m_0\left(\overline{F}_y\right) \text{ yoki}$$

$$m_0(\overline{F}_{XY}) = x \cdot F_y - y \cdot F_X$$

u holda (6.7) ga asosan quyidagini olamiz:

$$m_z(\overline{F}) = x \cdot F_y - y \cdot F_X$$

Xuddi shunday asnoda kuchni OX va OY o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodasini olishimiz mumkin, natijada quyidagiga ega bo'lamiz:

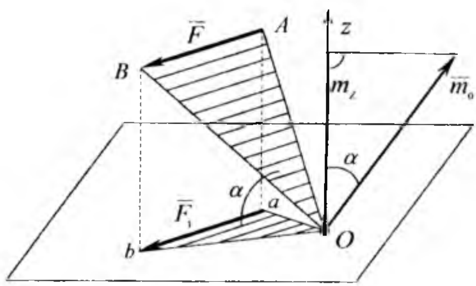
$$\left.\begin{aligned} m_z(\overline{F}) &= x \cdot F_y - y \cdot F_X \\ m_y(\overline{F}) &= z \cdot F_x - x \cdot F_z \\ m_z(\overline{F}) &= x \cdot F_y - y \cdot F_X \end{aligned}\right\} \qquad (6.8)$$

(6.8) tenglik $\overline{F}$ kuchining koordinata o'qlariga nisbatan momentlarining analitik ifodalari deyiladi.

22-§. Kuchning o'qqa va shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momentlari orasidagi munosabat

Kuchning nuqtaga nisbatan momenti bilan shu nuqtadan o'tuvchi o'qqa nisbatan momentlari orasidagi munosabatlarini o'rnatamiz. $\overline{F}$ berilgan kuch, $\overline{F}_1$ kuchni OZ o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikdagi proyeksiyasi. $\overline{F}$ kuchini O nuqtaga nisbatan kuch momenti OAB uchburchak yuzining ikkilanganiga teng, bu kuchning OZ o'qiga nisbatan momenti esa OAB uchburchak yuzining ikkilanganiga teng ya'ni:

$$m_0(\overline{F}) = 2S_{\Delta OAB}, \quad m_z(\overline{F}) = 2S_{\Delta oab}$$



76-shakl

Uchburchak oab, OAB uchburchakning OZ o'qiga perpendikulyar bo'lgan P tekislikdagi proyeksiyasidir. Shuning uchun

$$S_{\Delta oab} = S_{\Delta OAB} \cdot \cos\alpha$$

bu yerda α - OAB va oab uchburchaklar orasidagi burchakdir. Bu holda

$$m_z(\overline{F}) = 2 \cdot S_{\Delta OAB} \cdot \cos\alpha \text{ yoki } m_z(\overline{F}) = m_0(\overline{F}) \cdot \cos\alpha \qquad (6.9)$$

$\overline{m}_0$-vektor uchburchak yuzi $S_{\Delta OAB}$ga perpendikulyar yo'nalgan bo'ladi (76-shakl). Ma'lumki, tekisliklar orasidagi burchak ularga o'tkazilgan perpendikulyarlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Shuning uchun $\overline{m}_0$ va OZ o'qi orasidagi burchak α ga teng bo'ladi. Shuning uchun $\overline{m}_0 \cos\alpha$ miqdor $\overline{m}_0$ vektorning OZ o'qidagi proyeksiyasidir.

Shunday qilib, o'qqa nisbatan kuch momenti, kuchning shu o'qda yotuvchi nuqtaga nisbatan moment $\overline{m}_0$-vektorining shu o'qdagi proyeksiyasiga teng bo'ladi. Agar kuch o'qqa perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotsa, u holda $\cos\alpha = \pm 1$ bo'ladi va

$$m_z(\overline{F}) = m_0(\overline{F})$$

bo'ladi.

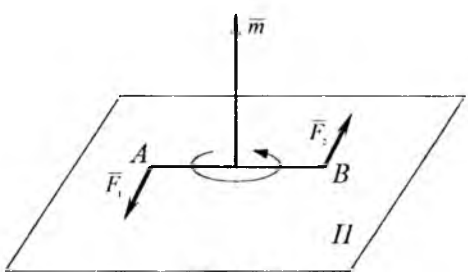
23-§. Fazodagi juft kuchlar

1. Juft momentining vektorligi. ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$)-juft kuch berilgan, П-uning ta'sir tekisligi (77-shakl). Ma'lumki (3.4) dan, juft momentining algebraik qiymati quyidagi formuladan aniqlanadi:

$$m = \pm F \cdot d$$

Bu yerda d-juft kuch yelkasi. Juft momentini vektor shaklida tasvirlaymiz. Ma'lumki, juftning ta'siri, juft tekisligining fazodagi holatiga bog'liq. Tekislikning fazodagi holati unga o'tkazilgan perpendikulyar orqali aniqlanadi, u holda ($\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$) tekisligiga perpendikulyar bo'ladi. U shunday tomonga yo'nalganki, uning oxiridan qaralganda juft ta'sir tekisligini soat mili yo'nalishiga qarama-qarshi tomonga aylantirishga intiladi. (77-shakl). Moment vektori $\overline{m}$ juft ta'sir tekisligining ixtiyoriy nuqtasiga qo'yilgan bo'lishi mumkin, yuqoridagi tavsifdan, quyidagi kelib chiqadi:

$$\overline{m} = \overline{m}_B; \quad m_B(\overline{F}_1) = m_A(\overline{F}_2)$$



77-shakl

Ya'ni moment vektori, juft tashkil etuvchi kuchlarining birortasidan ikkinchi kuchning qo'yilish nuqtasiga nisbatan olingan kuch momentiga teng. U holda (6.5) ga asosan quyidagini yozishimiz mumkin:

$$m(\overline{F}_1, \overline{F}_2) = F_1 \cdot AB = F_2 \cdot AB \qquad (6.10)$$

3. Teorema.

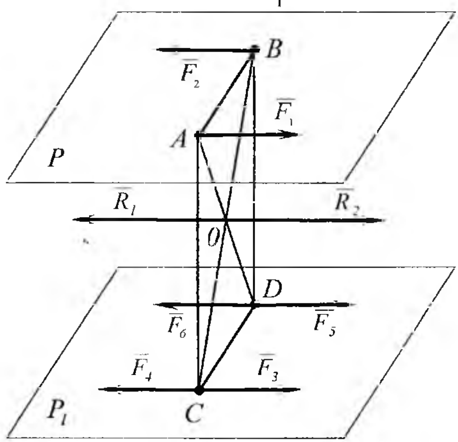
Juft kuchni ta'sir tekisligiga parallel tekislikka ko'chirish

Juft kuchni jismga ta'sirini o'zgartirmay, o'zining ta'sir tekisligiga parallel bo'lgan ixtiyoriy tekislikka ko'chirish mumkin.

Isbot.

Yelkasi d bo'lgan $(\overline{F}_1, \overline{F}_2)$ juft kuchni P tekislikda olamiz. Juft kuchning momenti quyidagiga teng:

$$m = \pm F_1 \cdot d$$



78-shakl

P tekisligiga parallel bo'lgan P_1 tekislikni o'tkazamiz va bu tekislikda juftning yelkasi AB ga teng va parallel bo'lgan CD kesmani olamiz. C va D nuqtalarga o'zaro muvozanatdagi 2 ta kuchlarni qo'yamiz. $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$ va $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$ ya'ni $(\overline{F}_3, \overline{F}_4) \Leftrightarrow 0$, $(\overline{F}_5, \overline{F}_6) \Leftrightarrow 0$ (78-shakl). $\overline{F}_3$, $\overline{F}_4$, $\overline{F}_5$, $\overline{F}_6$ kuchlarni $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$ kuchlarga teng va parallel qilib olamiz. Bu 4 ta kuchlar sistemasi bilan juftning jismga ta'siri o'zgarmaydi, shuning uchun quyidagini yozishimiz mumkin:

$$(\overline{F}_1, \overline{F}_2) \Leftrightarrow (\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5, \overline{F}_6)$$

AB va CD yelka ustiga parallelogramm quramiz va uning AD va BC diagonallarini o'tkazamiz $\overline{F}_1$ va $\overline{F}_2$, $\overline{F}_4$ va $\overline{F}_5$ kuchlarni o'zaro qo'shib, ikkita $\overline{R}_1$ va $\overline{R}_2$ kuchlarni olamiz:

$$\overline{R}_1 = \overline{F}_1 + \overline{F}_5, \quad \overline{R}_2 = \overline{F}_2 + \overline{F}_4$$

$\overline{R}_1$ va $\overline{R}_2$ kuchlar AD va BC diagonallarning kesishgan O nuqtasiga qo'yilgan. Bu kuchlar o'zaro teng va bir to'g'ri chiziq bo'ylab qarama-qarshi tomonga yo'nalgan. Shuning uchun ($\overline{R}_1$, $\overline{R}_2$)$\Leftrightarrow$0 yoki $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_4, \overline{F}_5\right)\Leftrightarrow 0$ u holda quyidagini yozishimiz mumkin $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right)\Leftrightarrow(\overline{F}_3, \overline{F}_6)$. $(\overline{F}_3, \overline{F}_6)$ kuchlar sistemasi $\left(\overline{F}_1, \overline{F}_2\right)$ juft kuchga ekvivalent bo'lgan juft kuchdir. Talab qilingan teorema isbotlandi. III bobda juft kuchning jismga ta'sirini o'zgartirmay, uni juft tekisligida ixtiyoriy holatga keltirish mumkinligi ta'kidlangan edi. Shunday qilib isbot qilingan teoremalardan quyidagi xulosalarni chiqarish mumkin:

Juft kuchlar ekvivalent bo'ladi, agar:

1. Ular bir yoki parallel tekisliklarda yotsa;
2. Momentlari miqdor jihatidan teng va bir xil burilishga ega bo'lsa. Demak juft kuchlar o'zaro ekvivalent bo'ladi, agar ularning moment vektorlari o'zaro geometrik teng bo'lsa. Juftni ta'sir tekisligida va unga parallel bo'lgan tekisliklarga uning ta'sirini o'zgartirmay ko'chirish mumkin. Shuning uchun juft kuch moment vektori erkin vektordir;

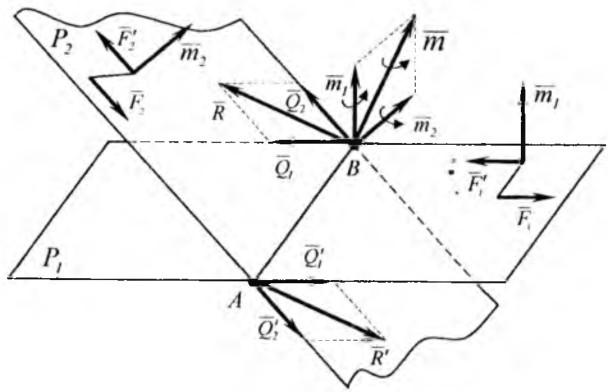
3. Kesishuvchi tekisliklarda joylashgan juftlarni qo'shish

Teorema:

Ikkita kesishuvchi tekisliklarda joylashgan juftlar yolg'iz juftga ekvivalent bo'lib, uning momenti berilgan juftlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng.

Isbot:

Momentlari tegishli $\overline{m}_1$ va $\overline{m}_2$ bo'lgan kesishuvchi tekisliklarda joylashgan 2 ta $\overline{F}_1, \overline{F}_1'$ va $\overline{F}_2, \overline{F}_2'$ juftlarni olamiz (79-shakl). Tekisliklar kesishish chizig'i AB kesmani umumiy yelka qilib tanlab olamiz. Berilgan juftlar momentlarini o'zgartirmay umumiy AB yelkaga keltiramiz.



79-shakl

Moment vektorlari berilgan juftlarning moment vektorlariga teng bo'lgan yangi ikkita $\left(\overline{Q}_1, \overline{Q}_1'\right)$ va $\left(\overline{Q}_2, \overline{Q}_2'\right)$ juftlarni hosil qilamiz, ya'ni

$$\overline{m}\left(\overline{Q}_1, \overline{Q}_1'\right) = \overline{m}_1; \quad \overline{m}\left(\overline{Q}_2, \overline{Q}_2'\right) = \overline{m}_2$$

$\overline{m}_1$ va $\overline{m}_2$ vektorlarni B nuqtaga qo'yamiz. A va B nuqtalarga qo'yilgan kuchlarni parallelogramm qoidasiga asosan qo'shamiz. Ikkita $\overline{R}$ va $\overline{R}'$ kuchlarni hosil qilamiz ya'ni:

$$\overline{R} = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2, \ \overline{R}' = \overline{Q}_1' + \overline{Q}_2'$$

Agar $\overline{R} = \overline{R}'$ bo'lsa u holda $(\overline{R}, \overline{R}')$ sistema juft kuchni hosil qilib ekvivalent deb ataladi. Ikkita kesishuvchi tekisliklarda joylashgan juftlar sistemasi yolg'iz juftga ekvivalent bo'lar ekan shu juftning moment vektorini aniqlaymiz, (6.10) formulasiga asosan quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\overline{m}\left(\overline{R}, \overline{R}'\right) = \overline{AB} \times \overline{R}$$

$$\overline{R} = \overline{Q}_1 + \overline{Q}_2, \quad \overline{m} = \overline{AB} \times (\overline{Q}_1 + \overline{Q}_2) = \overline{AB} \times \overline{Q}_1 + \overline{AB} \times \overline{Q}_2$$

$$\text{yoki } \overline{m} = \overline{m}\left(\overline{Q}_1, \overline{Q}_1'\right) + \overline{m}\left(\overline{Q}_2, \overline{Q}_2'\right)$$

natijada $\overline{m} = \overline{m}_1 + \overline{m}_2$ ekanligi isbotlandi. Shunday qilib $\overline{m}$ moment vektorni miqdor va yo'nalishi $\overline{m}_1$ va $\overline{m}_2$ momentlar vektorlarining ustiga qurilgan parallelogramm diagonali orqali aniqlanadi. Umumiy, holda fazoda ixtiyoriy joylashgan juft kuchlarni qo'shish natijasida hosil bo'lgan ekvivalent juft kuchlarning momenti berilgan juft kuchlar momentlarining geometrik yig'indisiga teng, ya'ni:

$$\overline{m} = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_k \tag{6.11}$$

Agar ekvivalent juftning momenti nolga teng bo'lsa, u holda juftlar o'zaro muvozanatlashadi:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{m}_k = 0 \tag{6.12}$$

Shunday qilib fazoda ixtiyoriy joylashgan juft kuchlar muvozanatlarini quyidagicha ifodalash mumkin: **fazoda ixtiyoriy joylashgan juftlar sistemasi o'zaro muvozanatda bo'lishi uchun ular momentlarining geometrik yig'indisi nolga teng bo'lishi zarur va yetarlidir.**

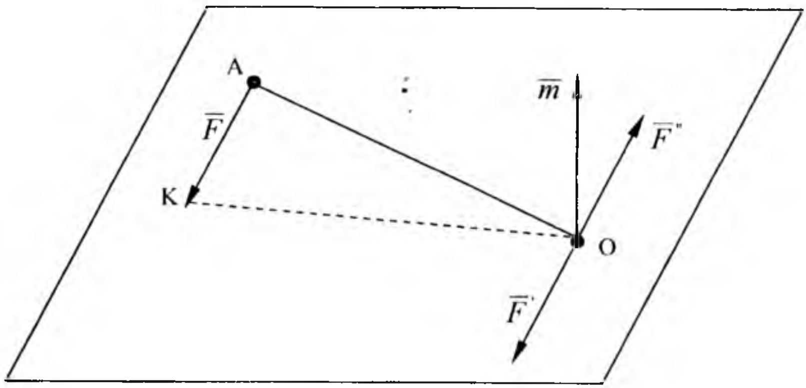
24-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan bir markazga keltirish

Bosh vektor va bosh moment

Qattiq jismning biror A nuqtasiga $\overline{F}$ kuchi qo'yilgan (80-shakl) kuchni o'ziga parallel ko'chirish haqidagi teoremaga asosan A nuqtaga qo'yilgan $\overline{F}$ kuchni O nuqtaga qo'yilgan shunday $\overline{F}'$ kuch va momenti $\overline{m}$ berilgan $\overline{F}$ kuchidan O nuqtaga nisbatan olingan kuch momentiga teng bo'lgan $(\overline{F}', \overline{F}'')$ juft kuch bilan almashtirish mumkin.

Juftning $\overline{m}$ moment vektori OAK tekislikka perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun quyidagicha yozish mumkin. $\overline{F} = \overline{F}'$ va juft $(\overline{F}, \overline{F}'')$ kuchni berilgan markazga keltirish chog'ida hosil bo'lgan qo'shilgan $(\overline{F}, \overline{F}'')$ juftni shaklda ko'rsatmay uning m momenti vektorini tasvirlash kifoya. Bu natijadan foydalanib ixtiyoriy joylashgan va qattiq jismning A_1, A_2, A_3 nuqtalariga qo'yilgan uchta $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ kuchlarni berilgan markazga keltiramiz (81-shakl). Buning uchun, hamma kuchlarni O nuqtaga keltirib qo'shilgan juftlarni olamiz. Natijada O markazga qo'yilgan $\overline{F}_1$, $\overline{F}_2$, $\overline{F}_3$ kuchlar sistemasi va momentlari $\overline{m}_1$, $\overline{m}_2$, $\overline{m}_3$ bo'lgan qo'shilgan juft kuchlar sistemasini olamiz. Ma'lumki

$$\overline{m}_1 = \overline{m}_0(\overline{F}_1),\ \overline{m}_2 = \overline{m}_0(\overline{F}_2),\ \overline{m}_3 = \overline{m}_0(\overline{F}_3)$$



80-shakl

O nuqta qo'yilgan $\overline{F}_1'$, $\overline{F}_2'$, $\overline{F}_3'$ kuchlarni qo'shib ularning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan $\overline{R}'$ ni olamiz ya'ni

$$\overline{R}' = \overline{F}_1' + \overline{F}_2' + \overline{F}_3'$$

agar $\overline{F}_1' = \overline{F}_1$, $\overline{F}_2' = \overline{F}_2$, $\overline{F}_3' = \overline{F}_3$ bo'lsa, u holda $\overline{R}' = \overline{F}_1 + \overline{F}_2 + \overline{F}_3$ kuchlarning geometrik yig'indisi bosh vektor deyiladi. Qo'shilgan juftlarni yig'ib teng ta'sir etuvchi juftni hosil qilamiz uning momenti qo'shilgan juft momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'ladi. Ya'ni

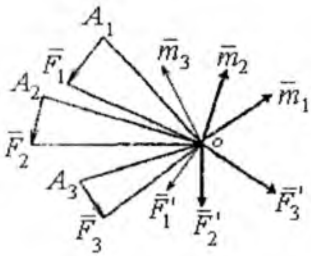
$$\overline{M}_0 = \overline{m}_1 + \overline{m}_2 + \overline{m}_3$$

agar $\overline{m}_1 = \overline{m}_0(\overline{F}_1)$, $\overline{m}_2 = \overline{m}_0(\overline{F}_2)$, $\overline{m}_3 = \overline{m}_0(\overline{F}_3)$ bo'lsa,

u holda

$$\overline{M}_0 = \overline{m}_0(\overline{F}_1) + \overline{m}_0(\overline{F}_2) + \overline{m}_0(\overline{F}_3)$$

$\overline{M}_0$-vektor berilgan kuchlardan O keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lib, kuchlar sistemasining keltirish markaziga nisbatan olingan bosh momenti deyiladi.

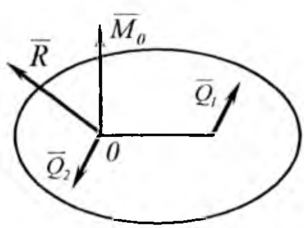


81-shakl

Olingan natijadan fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun tatbiq qilib quyidagilarga ega bo'lamiz.

$$\bar{R} = \sum_{k=1}^{n} \bar{F}_k; \qquad \overline{M}_0 = \sum_{k=1}^{n} \bar{m}_0(\bar{F}_k) \tag{6.13}$$

Shunday qilib fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan kuchlarning geometrik yig'indisiga teng bo'lgan va keltirish markaziga qo'yilgan yolg'iz kuch va momenti berilgan kuchlardan keltirish markaziga nisbatan olingan kuch momentlarining geometrik yig'indisiga teng bo'lgan qandaydir (Q_1, Q_2) juft bilan almashtirish mumkin (82-shakl) shuni ta'kidlab o'tamizki, bosh vektor keltirish markaziga bog'liq bo'lmaydi, lekin bosh moment esa keltirish markazining tanlab olinishiga bog'liq bo'lib, keltirish markazining o'zgarishi bilan bosh moment ham o'zgarishi mumkin.



82-shakl

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momentini analitik aniqlash

To'g'ri burchakli koordinata sistemasining boshini keltirish markazi O da olamiz, u holda bosh $\overline{R}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi:

$$\left.\begin{aligned} R_x &= \sum_{k=1}^{n} F_{kx} \\ R_y &= \sum_{k=1}^{n} F_{ky} \\ R_z &= \sum_{k=1}^{n} F_{kz} \end{aligned}\right\} \tag{6.14}$$

bo'ladi. Bosh vektorning moduli quyidagicha

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \tag{6.15}$$

Bosh vektor $\overline{R}$ ning yo'nalishi, yo'naltiruvchi kosinuslari

$$\cos(\overline{R},\hat{\ } ox) = \frac{R_x}{R};\ \cos(\overline{R},\hat{\ } oy) = \frac{R_y}{R};\ \cos(\overline{R},\hat{\ } oz) = \frac{R_z}{R} \tag{6.16}$$

Bosh moment M_o ning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$\left.\begin{aligned} M_{ox} &= \sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) \\ M_{oy} &= \sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) \\ M_{oz} &= \sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) \end{aligned}\right\} \tag{6.17}$$

formula yordamida aniqlanuvchi M_{ox}, M_{0y}, M_{oz} miqdorlar koordinata o'qlariga nisbatan bosh momentlar deyiladi. Qandaydir koordinata o'qiga nisbatan sistema kuchlarining bosh momenti berilgan kuchlardan shu o'qqa nisbatan olingan momentlar algebraik yig'indisiga teng ekanligi (6.17) formuladan yaqqol ko'rinadi. Bosh momentning miqdor va yo'nalishi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$M_0 = \sqrt{M_{ox}^2 + M_{oy}^2 + M_{oz}^2} \qquad (6.18)$$

$$\cos(\overline{M}_0, \hat{\ } ox) = \frac{M_{0x}}{M_0};\ \cos(\overline{M}_0, \hat{\ } oy) = \frac{M_{0y}}{M_0};\ \cos(\overline{M}_0, \hat{\ } oz) = \frac{M_{0z}}{M_0} \qquad (6.19)$$

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirilganda, bosh vektor bilan bosh moment orasidagi burchak ta'sir qilayotgan kuchlarga bog'liq bo'lib, ixtiyoriy bo'lishi, bu burchakni aniqlash vektorlar skalyar ko'paytmasining ifodasidan

$$\left(\overline{R}\cdot\overline{M}_0\right) = RM_0\cos(\overline{R}, \hat{\ } \overline{M}_0)$$

Bundan $\cos(\overline{R}, \hat{\ } \overline{M}_0) = \dfrac{\overline{R}\cdot\overline{M}_0}{RM_0} = \dfrac{R_xM_{ox} + R_yM_{oy} + R_zM_{oz}}{RM_0}$ (6.20)

Agar $R \perp M_0$ bo'lsa, u holda

$$\cos(\overline{R}, \hat{\ } \overline{M}) = 0$$

va

$$R_xM_{ox} + R_yM_{oy} + R_zM_{oz} = 0 \qquad (6.21)$$

munosabat (6.21) bosh vektor bilan bosh moment o'zaro perpendikulyarlik alomatidir.

25-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini bir markazga keltirishning turli hollari

Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasini berilgan markazga keltirilganda quyidagi hollar sodir bo'lishi mumkin.

1. $R = 0,\ M_0 \neq 0$

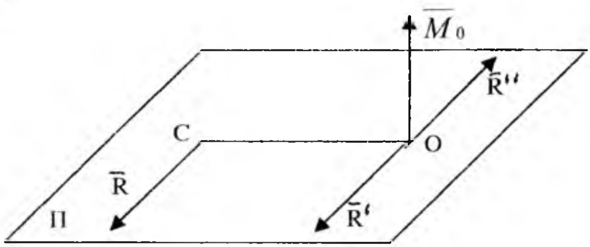
Bu holda kuchlar sistemasi momenti keltirish markaziga nisbatan bosh momentga teng bo'lgan juftga keltiriladi. Juft momenti moment markazining tanlanishiga bog'liq bo'lmaganligi uchun bosh moment ham keltirish markazining olinishiga bog'liq bo'lmaydi.

2. $R \neq 0,\ M_0 = 0$

Bu holda kuchlar sistemasi, ta'sir chizg'i keltirish markazidan o'tuvchi bir teng ta'sir etuvchiga keltiriladi.

3. $R \neq 0,\ M_0 \neq 0$ va $\overline{M}_0 \perp \overline{R}$

Bu holda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi, ta'sir chizig'i keltirish markazidan o'tmaydigan bir teng ta'sir etuvchiga keltiriladi. Haqiqatan R va M_o fazoda ixtiyoriy joylashgan $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_n)$ kuchlar sistemasi bosh vektori va bosh momenti bo'lsin va $M_0 \perp R'$ (83-shakl). Bosh moment M_o ni R=R"=R' bo'lgan (R, R") juft bilan almashtiramiz. Bu juftning biror kuchini O nuqtaga qo'yib, R' kuchga qarama-qarshi qilib olamiz,



83-shakl

juftning yelkasi quyidagi shartdan aniqlanadi:

$$OC = \frac{M_0}{R'} \tag{6.22}$$

demak kuchlar sistemasi, $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \Leftrightarrow (\overline{R}', \overline{R}'', ..., \overline{R})$, biroq sistema bo'lgani uchun $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n) \Leftrightarrow \overline{R}$ va berilgan kuchlar sistemasiga ekvivalent bo'lib, C nuqtaga qo'yiladi, O nuqtadan C nuqtagacha bo'lgan masofa (6.22) formula yordamida topiladi.

Teng ta'sir etuvchining momenti haqida Varin'on teoremasi

Biror nuqtaga nisbatan teng ta'sir etuvchining momenti bilan kuchlar sistemasini tashkil etuvchilari momentlari orasidagi munosabatini o'rnatamiz.

Fazodagi $(\overline{F}_1, \overline{F}_2, ..., \overline{F}_n)$ kuchlar sistemasi ta'sir chizig'i C dan o'tuvchi R kuchga keltiriladi deb qaraylik. Teng ta'sir etuvchini ixtiyoriy O nuqtasiga nisbatan momenti $m_0(\overline{R})$ni aniqlaymiz. Ixtiyoriy O markazga nisbatan

$$m_0(\overline{R}) = R \cdot OC$$

modomiki

$$R = R' \text{ va } OC = \frac{M_0}{R'},$$

u holda

$$m_0(\overline{R}) = M_0$$

ya'ni teng ta'sir etuvchining momenti berilgan kuchlar sistemasi bosh momentiga teng. Teng ta'sir etuvchining moment vektori yo'nalishi O keltirish markaziga nisbatan bosh moment vektorining yo'nalishi bilan bir xil. Teng ta'sir etuvchi kuchning momenti $\overline{m_0}(\overline{R})$ bosh moment $\overline{M_0}$ ga geometrik teng ya'ni

$$\overline{m}_0(\overline{R}) = \overline{M}_0$$

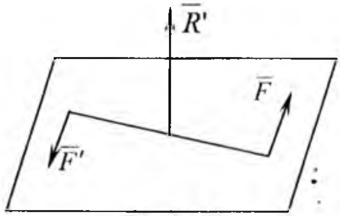
yoki (6.13) ga binoan

$$\overline{m}_0(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_0(\overline{F}_k) \tag{6.23}$$

(6.23) ifoda fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi uchun Varin'on teoremasini ifodalaydi: **fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisini O markazga nisbatan momenti berilgan kuchlardan shu markazga nisbatan olingan momentlarning geometrik yig'indisiga teng**. Ixtiyoriy keltirish markazi O dan qandaydir OZ o'qini o'tkazamiz nuqtaga nisbatan kuch momenti bilan undan o'tuvchi o'qqa nisbatan kuch momentlari orasidagi munosabatdan foydalanib va (6.23) vektorli tenglikni OZ o'qiga proyeksiyalab quyidagini olamiz:

$$\overline{m}_z(\overline{R}) = \sum_{k=1}^{n} \overline{m}_z(\overline{F}_k) \tag{6.24}$$

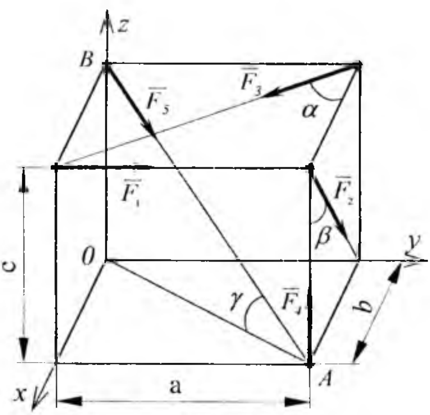
Teng ta'sir etuvchini ixtiyoriy OZ o'qiga nisbatan momenti haqidagi Varin'on teoremasini (6.24) tenglik ifodalaydi. **Kuchlar sistemasini teng ta'sir etuvchisini biror OZ o'qiga nisbatan momenti berilgan kuchlardan shu o'qqa nisbatan olingan kuch momentlarining algebraik yig'indisiga teng**. Umumiy holda $R' \neq 0$, $M_0 \neq 0$ va bosh vektor bilan bosh momenti o'zaro perpendikulyar bo'lmasa, u holda kuchlar sistemasi bosh vektor R'ga teng bo'lgan kuchga va bosh vektor perpendikulyar bo'lgan tekislikda yotuvchi qandaydir juftga keltiriladi. Juft va juftning ta'sir tekisligiga perpendikulyar bo'lgan kuchdan tashkil topgan sistema dinama deyiladi (84-shakl).



84-shakl

20-masala

Tomonlari a bo'lgan to'g'riburchakli parallelepipedning uchlariga $\overline{F}_1, \overline{F}_2, \overline{F}_3, \overline{F}_4, \overline{F}_5$ kuchlar qo'yilgan. Bosh vektor va bosh momentlar miqdor va yo'nalishlari aniqlansin. Berilgan kuchlar sistemasi bir teng ta'sir etuvchiga, yoki bir juft kuchga keltirish mumkinligi tekshirilsin (85-shakl).



85-shakl

Berilgan:

$a = 10\sqrt{3}$ m, F_1=10 N, F_2=12 N, F_3=10 N, F_4=$6\sqrt{3}$ N, F_5=$10\sqrt{7}$ N, $\alpha = 60^0, \beta = 30^0$.

Yechish:

Koordinata sistemasini 85-shaklda ko'rsatilgandek aniqlaymiz. Dastavval quyidagilarni aniqlaymiz:

$$b = a\cdot ctg\alpha = 10\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{3} = 10m;\; c = b\cdot ctg\beta = 10\sqrt{3}\,m;$$

$$AB = \sqrt{a^2+b^2+c^2} = 10\sqrt{7}\;\; m\;;\;\; \cos\gamma = \frac{OA}{AB} = \frac{2\sqrt{7}}{7};$$

$$\sin\gamma = \frac{C}{AB} = \frac{\sqrt{21}}{7}$$

Bosh vektorni koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini (6.14) formula yordamida aniqlaymiz:

$$R'_x = -F_2\sin\beta + F_3\cos\alpha + F_5\cos\alpha\cos\gamma = -12\cdot 0{,}5 + 10\cdot 0{,}5 +$$

$$+10\sqrt{7}\,\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot 0{,}5 = 9N.$$

$$R'_y = F_1 - F_3\sin\alpha + F_5\cos\gamma\sin\alpha = 10 - 10\frac{\sqrt{3}}{2} + 10\sqrt{7}\cdot\frac{2\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = 18{,}7N$$

$$R'_z = -F_2\cos\beta + F_4 - F_5\sin\gamma = -12\frac{\sqrt{3}}{2} + 6\sqrt{3} - 10\sqrt{7}\cdot\frac{21}{7} = -17{,}3N.$$

Bosh vektorning miqdori (6.15) formula yorlamida aniqlanadi:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y + R'^2_z} = \sqrt{730{,}7};\quad R' = 27N.$$

Bosh vektorning yo'nalishi (6.16) formula yordamida aniqlanadi:

$$\cos(\overline{R},\hat{\ } ox) = \frac{R'_x}{R} = \frac{1}{3} = 0{,}333$$

$$\cos(\overline{R},\hat{\ } oy) = \frac{R'_y}{R} = 0{,}693$$

$$\cos(\overline{R},\hat{\ } oz) = \frac{R'_z}{R} = -0{,}64$$

Bosh momentning koordinata o'qlaridagi proyeksiyalarini (6.17) formula yordamida aniqlaymiz:

$$M_{0x}=\sum_{k=1}^{n}m_x(F_k)=-F_1\cdot c-F_2\cdot\cos\beta\cdot a+F_3\cdot\sin\alpha\cdot c+F_4\cdot c-$$

$$-F_5\cdot\cos\gamma\cdot\sin\alpha\cdot c=-10\cdot10\sqrt{3}-12\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot10\sqrt{3}+6\sqrt{3}\cdot10\sqrt{3}-$$

$$-10\sqrt{7}\cdot2\frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot10\sqrt{3}=-3{,}23N\cdot m.$$

$$M_{0y}=\sum_{k=1}^{n}m_y(F_k)=F_3\cos\alpha\cdot c-F_4\cdot b+F_5\cdot\cos\gamma\cdot\cos\alpha\cdot c=10\cdot0{,}5\times$$

$$\times10\sqrt{3}-6\sqrt{3}\cdot10+10\sqrt{7}\cdot2\frac{\sqrt{7}}{7}\cdot0{,}5\cdot10\sqrt{3}=90\sqrt{3}=155{,}7N\cdot m.$$

$$M_{0z}=\sum_{k=1}^{n}m_z(F_k)=F_1\cdot b+F_2\cdot\sin\beta\cdot a-F_3\cdot\cos\alpha\cdot a=10\cdot10+12\cdot0{,}5\times$$

$$\times10\sqrt{3}-10\cdot0{,}5\cdot10\sqrt{3}=100+10\sqrt{3}=117{,}3N\cdot m.$$

Bosh moment miqdorini (6.18) formuladan foydalanib aniqlaymiz:

$$M_0=\sqrt{M_{0x}^2+M_{0y}^2+M_{0z}^2}=\sqrt{142330{,}78};\quad M_0\approx377N\cdot m$$

Bosh moment yo'nalishini (6.21) formuladan foydalanib aniqlaymiz:

$$\cos(\overline{M}_0\,\hat{}\,ox)=\frac{M_{ox}}{M_0}=0{,}857$$

$$\cos(\overline{M}_0\,\hat{}\,oy)=\frac{M_{oy}}{M_0}=0{,}413$$

$$\cos(\overline{M}_0\,\hat{}\,oz)=\frac{M_{oz}}{M_0}=0{,}311$$

Bosh vektor bilan bosh moment o'zaro perpendikulyarlik alomatlarini tekshiramiz

$$R'x\cdot M_{0x}+R'y\cdot M_{0y}+R'z\cdot M_{0z}=-2024{,}4\neq0$$

ya'ni R' va M_o vektorlar o'zaro perpendikulyar emaslar, demak bu kuchlar sistemasini bir teng ta'sir etuvchiga keltirib bo'lmaydi.

26-§. Fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Agar fazodagi kuchlar sistemasining bosh vektori $\overline{R}$ va bosh momenti M_0 lar nolga teng bo'lsa, u holda kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi. Shuning uchun fazodagi kuchlar sistemasining muvozanat shartlari quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\overline{R} = 0 ; \ \overline{M}_0 = 0$$

yoki:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{F}_k = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} m_0(\overline{F}_k) = 0 \qquad (6.25)$$

Fazodagi kuchlar sistemasi uchun (6.25) muvozanatning zarur va yetarli shartlaridir. Agar (6.25) tenglikni koordinata o'qlariga proyeksiyalasak, fazodagi kuchlar sistemasi muvozanat shartlarining analitik ifodasini olamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0 \qquad (6.26)$$

$$\sum m_x(\overline{F}_k) = 0; \ \sum m_y(\overline{F}_k) = 0; \ \sum m_z(\overline{F}_k) = 0; \qquad (6.27)$$

Agar (6.26) va (6.27) tengliklarda noma'lum reaksiya kuchlari ishtirok etsa u holda bu tengliklar muvozanat tenglamalari deyiladi va ulardan noma'lum bog'lanish reaksiya kuchlari aniqlanadi. Jismga ta'sir etuvchi kuchlar fazoda ixtiyoriy joylashgan bo'lib, bu kuchlar muvozanatiga oid masalalarda noma'lumlar soni oltitadan oshmasa, statik aniq masala deyiladi. Boshqa xususiy hollardagi kuchlar sistemasi uchun muvozanat sistemalari (6.26) va (6.27) lardan kelib chiqadi.

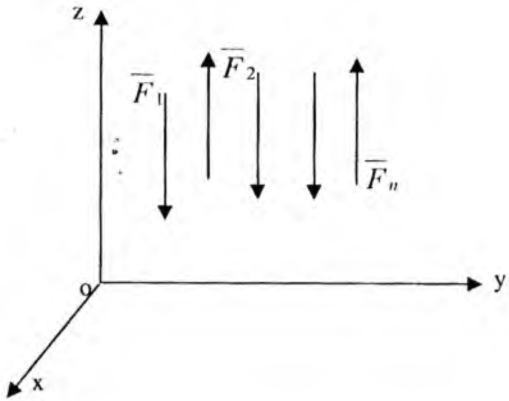
27-§. Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari

Berilgan kuchlar sistemasi OZ o'qiga parallel (86-shakl).

U holda bu kuchlar sistemasining har bir F_z kuchi OX va OY o'qlaridagi proyeksiyalari va OZ o'qiga nisbatan momentlari O ga teng, shuning uchun (6.26) va (6.27) tenglamalar sistemasidan faqat quyidagi tenglamalar qoladi:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_x(\overline{F}_k) = 0; \qquad \sum_{k=1}^{n} M_y(\overline{F}_k) = 0 \qquad (6.28)$$

Tenglamalar (6.28) fazoda parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari deyiladi.



86-shakl

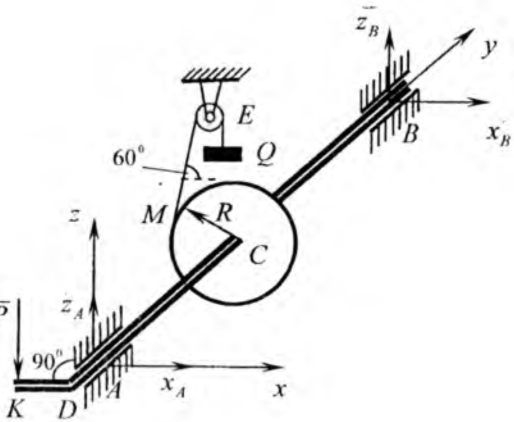
28-§. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi muvozanat shartlariga doir masalalar

21-masala

87-shakl sxematik tasvirlangan chig'iriq yordamida og'irligi Q=100kg bo'lgan yuk tekis ko'tariladi. Baraban radiusi R=5 sm dastaning uzunligi KD=40 sm, AD=30 sm, AC=40 sm, CB=60 sm. Arqon barabandan urinma bo'ylab gorizontga 60° burchak ostida tushadi. KD dastaning gorizontal holatida dastaga tushadigan $\overline{P}$ bosim hamda A va B tayanchlar reaksiyalari aniqlansin.

Yechish:

Koordinata o'qlarini shaklda ko'rsatilganidek o'tkazamiz va val, barabandan iborat sistemaga ta'sir qilayotgan kuchlarni tasvirlaymiz. Arqon ME ning taranglik kuchi miqdor jihatidan Q yuk og'irligiga teng bo'lib, ME bo'ylab yo'nalgan. Tayanchlar A va B lar silindrik sharnirlar. Shuning uchun bu tayanchlardagi reaksiya kuchlarini X va Z koordinata o'qlari bo'ylab tashkil etuvchilarga ajratamiz va X_A, Z_A lar bo'lgan belgilaymiz. Val, barabanlarga ta'sir etayotgan ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi o'zaro muvozanatlashadi, fazoda ixtiyoriy kuchlar sistemasining muvozanat tenglamalarini tuzamiz:



87-shakl

1. $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\; X_A + X_B + Q \cdot \cos 60^\circ = 0$;

2. $\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0;\; 0 = 0$;

3. $\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0;\; Z_A + Z_B - P + Q \cdot \sin 60^\circ = 0$;

4. $\sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) = 0;\; \mathrm{P} \cdot \mathrm{AD} + \mathrm{Q} \cdot \sin 60^0 \cdot AC + Z_B \cdot AB = 0$;

5. $\sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0;\; -\mathrm{P} \cdot K\mathrm{D} + \mathrm{Q} \cdot R = 0$;

6. $\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0;\; -\mathrm{Q}\cos 60^0 \cdot AC - X_B \cdot AB = 0$;

Tuzilgan tenglamalar sistemasini ketma-ket yechib quyidagilarni olamiz:

(5) tenglamadan: $P = \dfrac{Q \cdot R}{KP} = \dfrac{100 \cdot 5}{40} = 12{,}5$ N;

(6) tenglamadan: $X_B = -\dfrac{Q \cdot \cos 60^0 \cdot AC}{AB} = -\dfrac{100 \cdot 0{,}5 \cdot 40}{100} = -20$ N;

(1) tenglamadan: $X_A = -X_B - Q \cdot \cos 60^0 = 20 - 100 \cdot 0{,}5 = -30$ N;
(4) tenglamadan:

$$Z_B = -\frac{P \cdot AD + Q \cdot \sin 60^0 \cdot AC}{AB} = -\frac{12{,}5 \cdot 30 + 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 40}{100} = -38{,}4 \text{ N};$$

(3) tenglamadan

$$Z_A = P - Z_B - Q \cdot \sin 60^0 = 12{,}5 + 38{,}4 - 100 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -35{,}7 \text{ N};$$

X_A, X_B, Z_A, Z_B lar ishorasi manfiyligidan ularning shaklda ko'rsatilgan yo'nalishiga qarama-qarshi yo'nalishda ekanligini ko'rsatadi.

22-masala

ABCD kvadrat plitani ko'tarib turuvchi oltita tayanch sterjenlardagi zo'riqishlar aniqlansin. Plitaning AD tamoni bo'ylab gorizontal P kuch ta'sir qiladi, o'lchovlar 88-shaklda ko'rsatilgan.

Yechish:

Oltita tayanch sterjenlar ta'sirlarini ularning reaksiyalari bilan almashtiramiz. Sterjenlar o'zaro sharnirli bog'langani uchun, ularning reaksiyalarini, sterjenlarni cho'ziladi deb qaralib tugunlardan sterjen bo'ylab qar shi tomonga yo'naltiramiz. Hamma kuchlar fazoda ixtiyoriy joylashgan. Koordinata boshini ikki noma'lum S_1 va S_5 reaksiyalarni kesishgan nuqtasida tanlab olib, oltita muvozanat tenglamalarini tuzamiz.

1. $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \; -S_2 \cdot \cos\alpha - S_5 \cos\alpha = 0;$

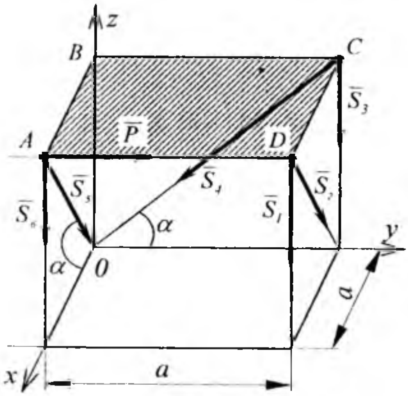
2. $\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \; P - S_4 \cdot \cos\alpha = 0;$

3. $\sum_{k=1}^{n} F_{kz} = 0; \; -S_1 - S_2 \cdot \sin\alpha - S_3 - S_4 \sin\alpha - S_5 \sin\alpha - S_6 = 0;$

4. $\sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) = 0; \; S_1 \cdot a - S_2 \cdot \sin\alpha \cdot a - S_3 \cdot a - P \cdot a = 0;$

5. $\sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0; \; S_1 \cdot a - S_6 \cdot a = 0;$

6. $\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k)=0;\ \mathrm{P}\cdot a+S_2\cdot\cos\alpha\cdot a=0;$



88-shakl

Shakldan ko'rinadiki $\alpha=45^0$ bo'lganda tenglamalar sistemasini ketma-ket yechib quyidagilarni topamiz:

(2) dan $S_4=\dfrac{P}{\cos\alpha}=P\sqrt{2}$;

(6) dan $S_2=-\dfrac{P}{\cos\alpha}=-P\sqrt{2}$;

(1) dan $S_5=-S_2=P\sqrt{2}$;

(5) dan $S_1+S_6=0$;

U holda (3) tenglikdan

$$S_5=-S_2\sin\alpha-S_4\cdot\sin\alpha-S_5\sin\alpha=(P\sqrt{2}-P\sqrt{2}-P\sqrt{2})\frac{\sqrt{2}}{2}=-P;$$

(4) dan $S_1=-P-S_3-S_2\sin\alpha=-P+P+\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=P$;

(5) dan $S_6=-S_1=-P$;

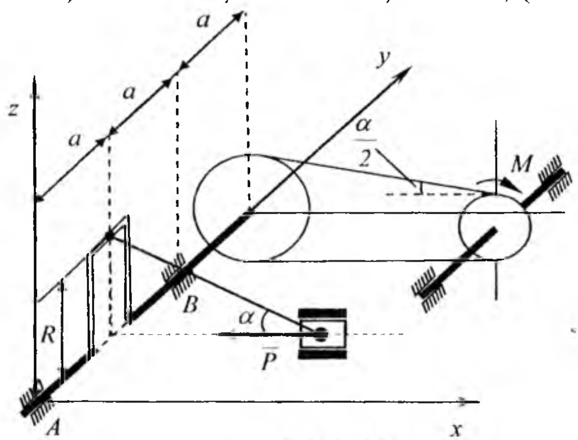
S_1, S_4, S_5 qiymatlarning musbat ishoraliligi ularning cho'zilishini ifodalaydi 2, 3, 6 -sterjenlar siqiladi.

23-masala:

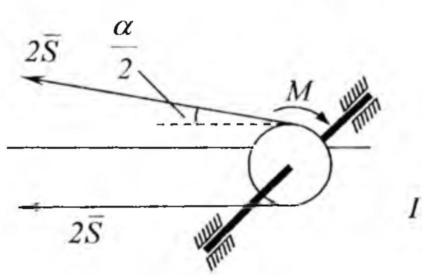
89-shaklda ko'rsatilgan mexanik sistema muvozanat holatda turibdi A va B tayanch reaksiyalari va boshqa noma'lum kuch P aniqlansin. Yetaklovchi tasmadagi tortishish kuchi yetaklanuvchi tasmadagi tortishish kuchidan ikki baravar katta.

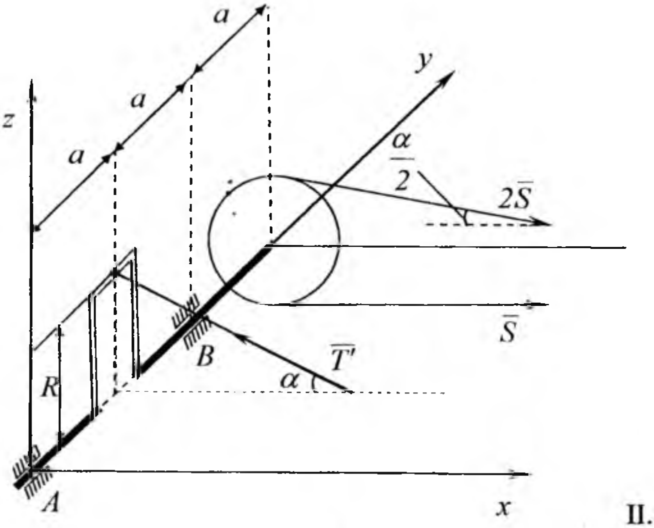
Berilgan:

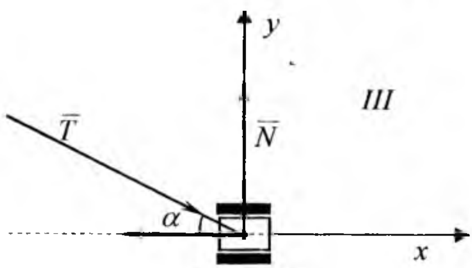
Q=10 sm, R=2r=8 sm, M=800 Nm; $\alpha = 30^{\circ}$, (89-shakl).



89-shakl







90-shakl

Yechish:

Masalani hal qilish uchun mexanik sistemani 3 qismga bo'lib har birini muvozanatini alohida tekshiramiz. Dastavval radiusi r bo'lgan kichik g'ildirakning bo'lagi muvozanatini tekshiramiz:

$$\sum_{k=1}^{n} m_y(\bar{F}_k) = 0; \qquad -M + 2\cdot S\cdot r - S\cdot r = 0$$

$$r = \frac{R}{2} = 4sm \text{ bundan } S = \frac{M}{r} = \frac{800}{4} = 200kN$$

Endi radiusi R bo'lgan g'ildirak bilan mahkamlangan valning muvozanatini tekshiramiz (II bo'lak).

1. $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ X_A + X_B + S\cos\frac{\alpha}{2} + T\cos\alpha = 0;$

2. $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ 0 = 0;$

3. $\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0;\ Z_A + Z_B - 2S\cos\frac{\alpha}{2} + S\sin\frac{\alpha}{2} + T\cos\alpha = 0;$

4. $\sum_{k=1}^{n} m_x(\overline{F}_k) = 0;\ Z_B \cdot 2a - S\cdot 3a(\sin\frac{\alpha}{2} + 2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}) + T\cdot\sin\alpha\cdot a = 0;$

5. $\sum_{k=1}^{n} m_y(\overline{F}_k) = 0;\ \mathrm{T}\cdot\cos\alpha\cdot R + \mathrm{S}\cdot R - 2S\cdot R = 0;$

6. $\sum_{k=1}^{n} m_z(\overline{F}_k) = 0;\ -X_B 2a - 2S'\cos\frac{\alpha}{2}3a - S'\cos\frac{\alpha}{2}3a + T'\cos\alpha = 0;$

Son qiymatlarini tenglamalarga qo'yib quydagilarni olamiz:

1. $X_A + X_B + 600\cdot\cos 15^0 - T'\cdot\cos 30^0 = 0;$
2. $Z_A + Z_B - 200\cdot\sin 15^0 + T'\cdot\sin 30^0 = 0;$
3. $2Z_B - 600\cdot\sin 15^0 + T'\cdot\sin 30^0 = 0;$
4. $T\cdot\cos 30^0 - 200 = 0;$
5. $-2X_B - 9\cdot 200\cdot\cos 15^0 + T'\cdot\cos 30^0 = 0;$

Ushbu tengliklardan:

$$T' = T = \frac{200}{\cos 30^0};\ \ T' = T = 230\ kN$$

$$Z_B = \frac{1}{2}(600\cdot\sin 15^0 - 200\cdot\sin 30^0);\ \ Z_B = 20{,}5kN;$$

$$X_B = \frac{1}{2}(230\cdot\cos 30^0 - 1800\cdot\cos 15^0);\ \ X_B = -765kN;$$

$$Z_A = 200\cdot\sin 15^0 - 230\cdot\sin 30^0 - 20.5;\ \ Z_A = 83kN;$$

$$X_A = 230\cdot\cos 30^0 - \cos 15^0 + 765);\ \ X_A = 389kN;$$

X_B va Z_B larning qiymatlari manfiy bo'ladi. Shuning uchun X_B va Z_B larning yo'nalishi shaklda ko'rsatilgan yo'nalishga qarama-qarshi yo'nalishda bo'ladi.

3. Porshenning (III bo'lak) muvozanat tenglamalarini yozamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} F_{kx} = 0; \quad T \cdot \cos\alpha - P = 0; \quad 230 \cdot \cos 30^0 - P = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} F_{ky} = 0; \quad N - T \cdot \sin\alpha = 0; \quad N - 230 \cdot \sin 30^0 = 0$$

Bulardan $P = 230 \cdot cos\, 300; P = 200kN$; $N = 230 \cdot \sin 30^0$;
$N = 115kN$

Takrorlash uchun savollar

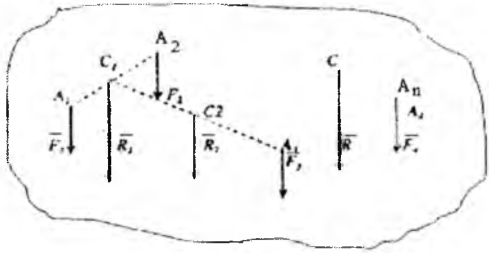
1. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasi deb qanday kuchlarga aytiladi?
2. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori deb qanday vektorga aytiladi?
3. Kuchning nuqtaga nisbatan momenti vektori qanday hisoblanadi?
4. Kuchning o'qqa nisbatan momenti deb nimaga aytiladi?
5. Kuchning o'qqa nisbatan momenti ishorasi qanday bo'ladi?
6. Kuchning o'qqa nisbatan momenti qachon nolga teng?
7. Kuchning o'qqa va shu o'qdagi nuqtaga nisbatan momentlari orasida qanday bog'lanishlar bor?
8. Fazodagi juft kuch momenti vektori nima?
9. Juft kuchni o'z tekisligiga parallel tekislikka ko'chirilsa uning jismga ta'siri qanday bo'ladi?
10. Kesishuvchi tekislikda joylashgan juft kuchlarni qanday qo'shish mumkin?
11. Bosh vektor va bosh moment deb qanday vektorlarga aytiladi?
12. Bosh vektor va bosh momentning analitik ifodalari qanday?
13. Bosh vektor va bosh moment bir markazga keltirilsa, qanday hollar bo'ladi?
14. Teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi Varin'on teoremasini aytib bering.
15. Fazoda ixtiyoriy joylashgan kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?
16. Fazodagi parallel kuchlar sistemasining muvozanat shartlari qanday?

VII BOB

Og'irlik markazi

29-§. Parallel kuchlarni qo'shish, parallel kuchlar markazi

Bir tekislikda yotmaydigan $(\overline{F_1}, \overline{F_2}, \overline{F_3})$ parallel kuchlar sistemasini ko'ramiz (91-shakl)



91-shakl

kuchlarni ketma-ket qo'shamiz $\overline{F_1}$ va $\overline{F_2}$ kuchlarni qo'shib, ularga parallel bo'lgan $\overline{R_1}$ teng ta'sir etuvchisini topamiz. Uning miqdori $R_1=F_1+F_2$ ga teng bo'lib, qo'yilish nuqtasi quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{A_1C_1}{A_2C_1} = \frac{F_2}{F_1}$$

Endi $\overline{R_1}$ va $\overline{F_3}$ kuchlarni qo'shamiz ularning teng ta'sir etuvchisi R_2ning miqdori quyidagiga teng:

$$R_2 = R_1 + F_3 = F_1 + F_2 + F_3$$

qo'yilish nuqtasi esa quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{C_1C_2}{A_3C_2} = \frac{F_3}{R_2}$$

Endi R_2 va F_4 kuchlarning teng ta'sir etuvchisining miqdori

$$R = R_2 + F_4 = F_1 + F_2 + F_3 + F_4$$

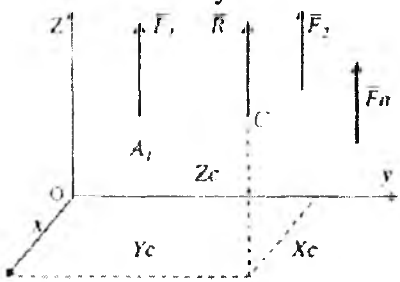
bo'lib, qo'yilish nuqtasi S nuqta quyidagi proporsiyadan aniqlanadi:

$$\frac{A_2C}{A_4C}=\frac{F_4}{R}$$

Yuqoridagi tavsifdan ko'rinadiki, n ta parallel kuchlar sistemasining teng ta'sir etuvchisi ularning yig'indisiga teng:

$$R=\sum_{k=1}^{n}F_k$$

Qo'yilish nuqtasi esa kuchlarning fazodagi yo'nalishlariga bog'liq bo'lmaydi, haqiqatan ham agar kuchlarning hammasini ularning qo'yilish nuqtalari atrofida teng burchakka bir tomonga bursak, ularning teng ta'sir etuvchisi ham shu burchakka C nuqta atrofida buriladi. Teng ta'sir etuvchi ta'sir chizig'i har doim parallel kuchlarning fazoda har qanday yo'nalishida ham C nuqtadan o'tadi. C nuqta parallel kuchlar markazi deyiladi.



92-shakl

Parallel kuchlar sistemasi markazining koordinatalarini aniqlash uchun koordinata sistemasi OZ o'qini berilgan kuchlar sistemasiga parallel qilib olamiz (92-shakl). Kuchlar qo'yilgan $A_1, A_2, A_3,...A_n$ nuqtalarning koordinatalarini mos ravishda $x_1, y_1, z_1', x_2, y_2, z_2',..., x_n, y_n, z_n'$. Parallel kuchlar markazi C nuqtaning kichik x, y, z koordinatalarini Xc, Yc, Zc deb belgilaymiz. Teng ta'sir etuvchining OX o'qiga nisbatan momenti haqidagi teoremani tatbiq qilamiz:

$$m_x(\overline{R})=\sum_{k=1}^{n}m_x(\overline{F_k}) \text{ yoki } R\cdot Y_c=F_1\cdot y_1+F_2\cdot y_2+...+F_n\cdot y_n$$

bundan $y_c = \dfrac{F_1 \cdot y_1 + F_2 \cdot y_2 + ... + F_n \cdot y_n}{R}$ yoki $y_c = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}$

Shu teoremani OY o'qiga nisbatan tatbiq qilib Xc koordinatani aniqlaymiz:

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}$$

Endi koordinatani aniqlash uchun hamma kuchlarni bir tomonga OY o'qiga parallel qilib 90^0 ga buramiz va teng ta'sir etuvchining momenti haqidagi teoremani OX o'qiga nisbatan tatbiq qilamiz. Shunday qilib parallel kuchlar markazi quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi.

$$x_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}; \quad y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k}; \quad z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} F_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^{n} F_k} \qquad (7.2)$$

Biror yo'nalishni musbat tanlab olib, (7.2) formula yordamida nuqta koordinatalari x_c, y_c, z_c larni aniqlanayotganda kuchlarning qiymatlari mos ishoralar bilan olinishi zarur.

30-§. Jism og'irlik markazining koordinatalari uchun umumiy formulalar

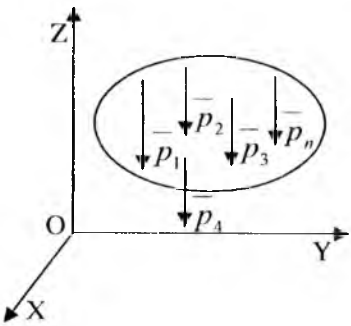
Jismni elementar bo'lakchalarga bo'lib, har bir bo'lakka ularning og'irlik kuchlarini qo'yamiz. U holda parallel kuchlar sistemasini hosil qilamiz (93-shakl). Parallel og'irlik kuchlar sistemasining markazi, jismning og'irlik markazi bo'ladi. Jismning og'irlik markazining koordinatalari (7.2) formulaga asosan quyidagicha aniqlanadi:

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot x_k}{\sum_{k=1}^{n} P}; \quad Y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot y_k}{\sum_{k=1}^{n} P}; \quad Z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} P_k \cdot z_k}{\sum_{k=1}^{n} P} \qquad (7.3)$$

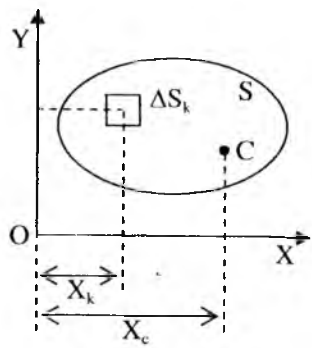
bu yerda R-jism og'irligi. Bir jinsli jism uchun

$$P_k = \gamma \Delta V_k; \; P = \gamma V$$

bu yerda ΔV_k-elementar bo'lakchaning hajmi, V-jism hajmi, γ-birlik hajmining og'irligi.



93-shakl



94-shakl

P_k va P larning qiymatlarini (7.3) formulalarga qo'yib quyidagilarni olamiz:

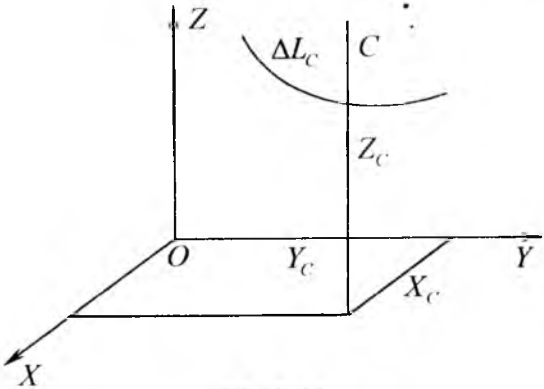
$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k \Delta V_k}{V}; \; Y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta V_k}{V}; \; Z_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} Z_k \Delta V_k}{V}; \qquad (7.4)$$

Agar jism yupqa bir jinsli plastinka bo'lsa, uning og'irlik markazi koordinatalari quyidagi formulalar bilan aniqlanadi (94-shakl):

$$X_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} X_k \Delta \rho_k}{\rho}; \; Y_c = \frac{\sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta \rho_k}{\rho} \qquad (7.5)$$

bu yerda ΔS_k-elementar bo'lakchaning yuzasi S-butun plastinka yuzasi. Agar jism bir jinsli chiziqdan (95-shakl) iborat bo'lsa, uning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$X_c = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} X_k \Delta L_k \ ; \ Y_c = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta L_k \ ; \ Z_c = \frac{1}{L}\sum_{k=1}^{n} Z_k \Delta L_k \qquad (7.6)$$



95-shakl

Quyidagi belgilarni kiritamiz:

$$S_k = \sum_{k=1}^{n} Y_k \Delta S_k \ ; \ S_y = \sum_{k=1}^{n} X_k \Delta S_k \qquad (7.7)$$

U holda (7.5) formulalarni quyidagi ko'rinishda yozamiz:

$$X_c = \frac{S_y}{S} \ ; \ Y_c = \frac{S_x}{S} \qquad (7.8)$$

Bu yerda S_x yuzaning OX o'qiga nisbatan statik momenti deb ataladi, S_y esa Oy o'qiga nisbatan yuzaning statik momenti deb ataladi. Agar yuza og'irlik markazining koordinatalari aniq bo'lsa, uning statik momenti quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$S_x = S \cdot Y_c ; \ S_y = S \cdot X_c \qquad (7.9)$$

31-§. Og'irlik markazini aniqlash usullari. Simmetrik jismlarning og'irlik markazi

Teorema:

Agar bir jinsli jism simmetriya tekisligi o'qi yoki markaziga ega bo'lsa, u holda uning og'irlik markazi mos ravishda shu tekislikda, o'q yoki markazda yotadi.

Isbot:

Jism simmetriya tekisligiga ega bo'lsin (96-shakl). U holda teoremaga asosan

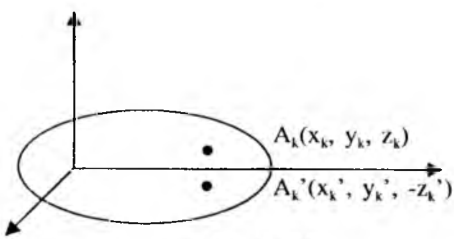
$$Z_c = 0 \text{ yoki } \sum_{k=1}^{n} Z_k \Delta V_k = 0$$

bo'ladi, shunga ko'ra jism elementar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bo'laklarining hajmlarini mos ravishda quyidagicha bo'lgan

$$\Delta V_1, \Delta V_2, \ldots, \Delta V_n$$

bo'lakchalarga bo'lamiz. Simmetriya o'qiga ega bo'lganligi sababli har qanday X_k, Y_k, Z_k koordinatali A_k bo'lakcha OXY tekisligiga nisbatan simmetrik bo'lgan A'_k nuqtaga mos keladi, uning koordinatalari X_k, Y_k, $-Z_k$ bo'ladi. Quyidagi ko'paytmalarni $Z_k \Delta V_k$ tuzib qo'shsak quyidagini olamiz:

$$\sum_{k=1}^{n} Z_k \Delta V_k = 0$$



96-shakl

u holda $Z_1 = 0$ bo'ladi. Xuddi shunday qolgan hollar ya'ni jism simmetrik o'q yoki markazga ega bo'lgan hollar isbot qilinadi.

2. Bo'laklarga ajratish (to'ldirish) usuli

Agar bir jinsli qattiq jismni og'irlik markazlari ma'lum bo'lgan chekli sonli geometrik shakllarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda uning og'irlik markazining koordinatalari (7.4), (7.5), (7.6) formulalar yordamida aniqlanadi. Agar qattiq jismda teshiklar mavjud bo'lsa, uning og'irlik markazini aniqlashda jismni to'liq deb qaraladi, teshiklar va yetishmovchi yuza yoki hajmga tegishli hadlar manfiy ishoralar bilan olinadi. Bu usulni manfiy yuzalar (hajmlar) usuli deb ataladi.

24-masala

97-shaklda tasvirlangan bir jinsli yupqa plastinka og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin.

Yechish:

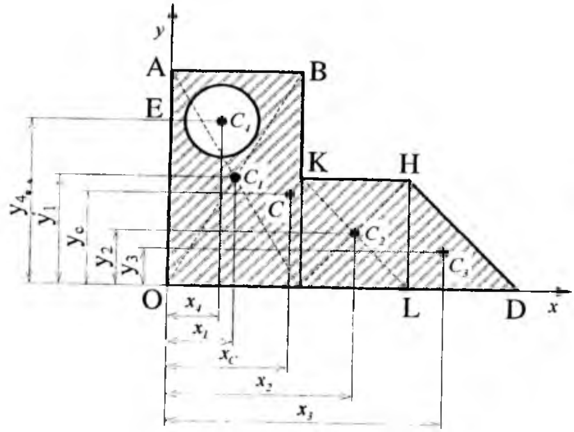
Plastinkani to'rtta bo'laklarga ajratamiz. Markazga $c_1,(x_1, y_1)$ nuqta bo'lgan to'rt burchak markazi $c_2(x_2,y_2)$ nuqta bo'lgan to'rtburchak markazi $c_3(x_3\ y_3)$ nuqta bo'lgan uchburchak va markazi $s_4(x_4,y_4)$ nuqta bo'lgan doira (teshik) shakldan c_1, c_2, c_3, c_4 nuqtalarining koordinatalari ma'lum o'lchovlari yordamida aniqlanadi. Bo'lakchalarning yuzalarini S_1, S_2, S_3, S_4 lar bilan belgilaymiz va ular osonlikcha aniqlanadi, (7.5)ga asosan quyidagi formuladan foydalanib, og'irlik markazining koordinatalarini topamiz.

$$\left.\begin{aligned} X_c &= \frac{S_1 \cdot x_1 + S_2 \cdot x_2 + S_3 \cdot x_3 + S_4 \cdot x_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \\ Y_c &= \frac{S_1 \cdot y_1 + S_2 \cdot y_2 + S_3 \cdot y_3 + S_4 \cdot y_4}{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} \end{aligned}\right| \qquad (7.10)$$

Agar OA=30 sm, OD=36 sm, OE=24sm, AB=10 sm, BK=20 sm, x_4=5 sm, y_4=24 sm, r=3 sm, x_1=5, x_2=17, y_1=15, y_2=5 bo'lsa

$$x_3 = 28;$$

$$y_3 = \frac{10}{3}.$$



97-shakl

Agar S_1=300, S_2=140, S_3=60, S_4=9π bo'lsa, (7.10) tenglikdan quyidagilarni topamiz:

$$x_c = \frac{300\cdot 5 + 140\cdot 17 + 60\cdot 28 - 9\pi\cdot 5}{300+140+60-9\pi} = \frac{5418,7}{471,7} \approx 11,5\ sm$$

$$y_c = \frac{300\cdot 15 + 140\cdot 5 + 60\cdot \frac{10}{3} - 9\pi\cdot 24}{300+140+60-9\pi} = \frac{4721}{471,7} \approx 10\ sm$$

3. Integrallash usuli

Agar bir jinsli qattiq jismni chekli sondagi sodda geometrik shakllarga ajratishning iloji bo'lmasa, u holda og'irlik markazi koordinatalarni (7.4), (7.5), (7.6) formulalar yordamida aniqlash uchun bu formulalarda bo'lakchalar soni n cheksizlikka intiladi, ularning o'lchovlari nolga intiladi. Bu formulalarda limitga o'tib hajm og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$X_c = \frac{1}{V}\int_{(x)} xdV;\ Y_c = \frac{1}{V}\int_{(x)} ydV;\ Z_c = \frac{1}{V}\int_{(x)} zdV \qquad (7.11)$$

Sirt og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$X_c=\frac{1}{S}\int_{(S)}xdS;\ Y_c=\frac{1}{S}\int_{(S)}ydS;\ Z_c=\frac{1}{S}\int_{(S)}zdS.$$

bu yerda S – sirt yuzasi.

Agar sirt tekis shakl bo'lsa va XOY tekislik shu shakl tekisligida olinsa, yuqoridagi formulalar quyidagicha yoziladi:

$$X_c=\frac{1}{S}\int_{(S)}xdS;\ Y_c=\frac{1}{S}\int_{(S)}ydS;\ Z_c=\frac{1}{S}\int_{(S)}zdS \qquad (7.12)$$

Ko'ndalang qirqim yuzalari o'zgarmas va bir jinsli moddadan iborat chiziqning og'irlik markazining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida aniqlanadi:

$$X_c=\frac{1}{L}\int_{(L)}xdl;\ Y_c=\frac{1}{L}\int_{(L)}ydl;\ Z_c=\frac{1}{L}\int_{(L)}zdl \qquad (7.13)$$

25-masala

Aylana qismi (yoyi) og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin. Markaziy burchagi 2α bo'lgan R radiusli AB aylana yoyini olamiz (98-shakl). Aylana yoyi simmetriya o'qiga ega OX koordinata o'qidir. Isbot qilingan teoremaga asosan yonning og'irlik markazi uning simmetriya o'qida yotishi kerak, ya'ni $Y_C=0$ koordinata X_C quyidagi formula yordamida aniqlanadi.

$$X_c=\frac{1}{L_1}\int_{(L_1)}xdl$$

og'irlik markazining abssissasi x bo'lgan yoydan cheksiz kichik elementar dl bo'lakchani ajratib olamiz. U holda

$$dl=R\cdot d\varphi,\ x=R\cdot\cos\varphi,\ L=R\cdot\alpha$$

quyidagi ifodalarni dl x va α (7.14) formulaga qo'yib, φ bo'yicha integrallab, quyidagini olamiz:

$$X_C=\frac{1}{2R\alpha}\int_{-a}^{a}R^2\cos\alpha d\varphi=\left(\frac{R}{2\alpha}\cdot\sin\varphi\right)\Big|_{-a}^{a}=\frac{R\sin\alpha}{\alpha}$$

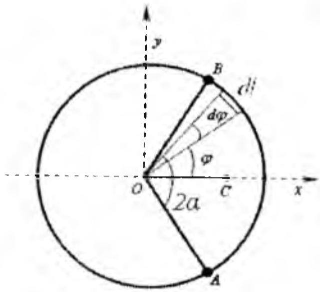
Demak

$$X_c=\frac{R\sin\alpha}{\alpha} \qquad (7.15)$$

yarim aylana uchun $\alpha = \frac{\pi}{2}$ bo'lganda

$$X_c = \frac{2R}{\pi} \approx 0{,}63r$$

bo'ladi (98-shakl).



98-shakl

26-masala

Doira shaklli sektor yuzaning og'irlik markazi koordinatlarini aniqlang. Ixtiyorimizda R radiusli va markaziy burchagi 2α bo'lgan doira sektor yuzi mavjud. 99-shakl sektor yuzasining simmetriya o'qini OX koordinata o'qi sifatida qabul qilib va OC=x masofani quyidagi formula yordamida aniqlaymiz:

$$X_c = \frac{1}{S}\int_S x dS \qquad (7.17)$$

markaziy burchagi $d\varphi$ bo'lgan cheksiz kichik Oab sektor yuzachani ajratamiz. Xuddi teng yonli uchburchak deb qaralgan bu elementar bo'lakchaning og'irlik markazi c' nuqtada bo'lib, bu masofa quyidagiga teng $OC' = \frac{2}{3}R$, bu c' markaz nuqtaning koordinatasi quyidagiga teng

$$X = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \cos\varphi$$

yuzacha

$$dS = \frac{1}{q} \cdot R^2 d\varphi$$

sektor yuzasi

$$S = \frac{1}{2} \cdot R^2 \cdot 2\alpha = R^2\alpha$$

olingan ifodalar S_1,dS larni (7.17) formulaga qo'yib va φ bo'yicha integrallab, quyidagini olamiz.

$$X_c = \frac{1}{R^2\alpha} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{1}{3} R^3 \cos\varphi d\varphi = (\frac{R}{3\alpha} \cdot \sin\varphi)\Big|_{-\alpha}^{\alpha} = \frac{2R\sin\alpha}{3\alpha}$$

demak,

$$X_c = \frac{2}{3} \cdot R \cdot \frac{\sin\alpha}{\alpha} \qquad (7.18)$$

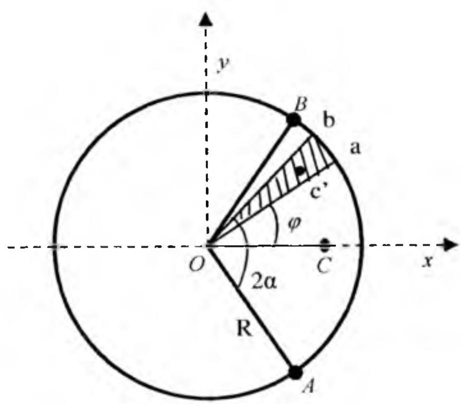
sektor o'rnida yarim doira bo'lsa

$$\alpha = \frac{\pi}{2}$$

bo'lib,

$$X = \frac{4R}{3\pi} = 0,2124$$

qiymatga ega

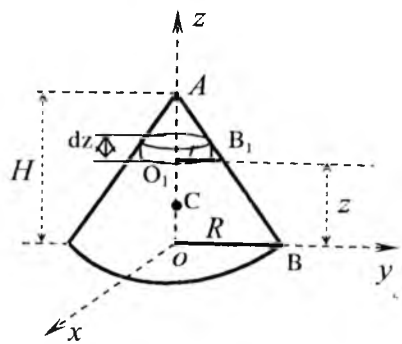


99-shakl

27-masala

Balandligi H va asosining radiusi R bo'lgan to'g'ri doiraviy konus og'irlik markazining koordinatalari aniqlansin, konusning simmetriya o'qini OZ koordinata o'qi sifatida olamiz. U holda $X_c = Y_c = 0$, Z_c koordinata quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$Z_c = \frac{1}{V}\int_V Z dv \qquad (7.20).$$



100-shakl

Konus asosidan Z masofa balandlik dz va radiusi r bo'lgan silindr ko'rinishdagi cheksiz kichik bir element hajmini ajratamiz(100-shakl). Bu element hajmi quyidagiga teng:

$$dV = \pi \cdot r^2 dz$$

radius r ni AOB va O_1AB_1 uchburchaklarning o'xshashligidan aniqlanadi:

$$\frac{r}{R} = \frac{H - z}{H}$$

bundan

$$r = \frac{R}{H}(H - z)$$

u holda

$$dV = \frac{\pi R^2}{H^2}(H - z)^2 dz$$

konusning hajmi quyidagiga teng: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot R^2\ H$ bo'lgani uchun (7.20) ga asosan

$$Z_C = \frac{\int_0^H z \frac{\pi(H-Z)^2 R^2}{H^2} dz}{\frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{1}{4}\pi\ H \qquad (7.21)$$

Takrorlash uchun savollar

1. Parallel kuchlar markazi qanday aniqlanadi?
2. Og'irlik markazini aniqlash formulalari qanday?
3. Hajmning og'irlik markazini aniqlash formulasini keltiring?
4. Yuzaning og'irlik markazi qanday aniqlanadi?
5. Chiziqning og'irlik markazi qanday aniqlanadi?
6. Og'irlik markazini aniqlashning qanday usullarini bilasiz?

Asosiy adabiyotlar

1. Шохайдарова П. ва бошқалар. Назарий механика. -Т.: Ўқитувчи, 1992.
2. Рашидов Т.Р. ва бошқалар. Назарий механика асослари. -Т.: Ўқитувчи, 1991.
3. Яхёев М.С., Мўминов К.Б. Назарий механика. -Т.: Ўқитувчи, 1990.
4. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. -М.: Высшая школа, 1990.
5. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механика. -М.: Высшая школа, 2002.
6. Мешчерский И.В. Назарий механикадан масалалар тўплами. -Т.: Ўқитувчи, 1990.
7. И.В. Мешчерский. Сборник задач по теоретической механике. -М.: Наука, 1986.
8. Анорқулов Т., Хусанов Қ., Комилжонов А. Назарий механикадан курс ишлари учун топшириқлар тўплами. -Т.: Зиё-нашр, 2002.
9. Зоиров Ж. Назарий механика. -Т.: Фан, 1998.
10. Назарий механикадан курс ишлари учун топшириқлар тўплами. -Т.: Ўқитувчи, 2002.
11. Муродов М.М., Иноятова Х.М., Уснатдинов К.У. Назарий механика. -Т.: Истиқлол, 2004.
12. Зозуля В.В., Мартыненко Л.В, Лукин А.Н. Теоретическая механика.-Харьков, 2004 244p. Russian djvu. 1971 KB 8.1 KB/p. 300dpi OCR lib.homelinux.org /файл/
13. Журавлев В.Ф. Основы теоретической механики. 2-е изд., Физматлит, 2001 321p.Russian djvu. 2901 KB 0,9 KB/p. 600dpi OCR lib.homelinux.org /файл/

Qo'shimcha adabiyotlar

1. Шообидов Ш.А, Хабибуллаева Х.Н, Файзуллаева Ф.Д. Статика. -Toshkent: ТошДТУ, 2004.
2. Йўлдошев К. Назарий механикадан курс ишларини бажаришга доир методик қўлланма. -Т.: Ўзбекистон, 1993.
3. Бать М.И., Джаналидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика в примерах и задачах. -М.: Наука, 1992.

MUNDARIJA

Shoobidov Shoraxmat Asqarovich
Xabibullayeva Xujasta Najibullayevna
Fayzullayeva Feruza Djarullayevna

Nazariy mexanika
(statika)
O'quv qo'llanma

Muharrir: Botirbekova M.M.

Bosishga ruxsat etildi 20.10.2006 y. Bichimi 60x84 1/16.
Shartli bosma tabog'i 8. Nusxasi 50 dona. Buyurtma № 473.
TDTU boamaxonasida chop etildi. Toshkent sh, Talabalar ko'chasi 54.