O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI XALQ TA'LIMI VAZIRLIGI

SH.N. ISMAILOV

SONLAR NAZARIYASI

Toshkent–2008

Sh.N. Ismailov. **Sonlar nazariyasi/** Toshkent, 2008 y.
Fizika –matematika fanlari doktori, professor A. A'zamov umumiy tahriri ostida.

Qo'llanmada sonlar nazariyasining asosiy faktlari, ularning isbotlari va qo'llanishiga doir turli matematik olimpiadalardagi masalalar keltirilgan.

Qo'llanma umumiy o'rta ta'lim maktablari, akademik litseylar va kasb–hunar kollejlarining iqtidorli o'quvchilari, matematika fani o'qituvchilari hamda pedagogika oliy o'quv yurtlari talabalari uchun mo'ljallangan.

Qo'llanmadan sinfdan tashqari mashg'ulotlarda, o'quvchilarni turli matematik musobaqalarga tayyorlash jarayonida foydalanish mumkin.

Taqrizchilar: TVDPI matematika kafedrasi mudiri, f.–m.f.n., dotsent Sh.B. Bekmatov
TVDPI boshlang'ich ta'lim metodikasi kafedrasi dotsenti, ped. f.n. Z. S. Dadanov

Ushbu qo'llanma Respublika ta'lim markazi qoshidagi matematika fanidan ilmiy-metodik kengash tomonidan nashrga tavsiya etilgan. (15 iyun 2008 y., 8 -sonli bayyonnoma)

Qo'llanmaning yaratilishi Vazirlar Mahkamasi huzuridagi Fan va texnologiyalarni rivojlantirishni muvofiqlashtirish Q'omitasi tomonidan moliyalashtirilgan (ХИД 1-16 – sonli innovatsiya loyihasi**)**

1-§. Bo'linish munosabati

<u>*Ta'rif*</u>. Agar nol'dan farqli a va b butun sonlar uchun $a=bq$ tenglikni qanoatlantiradigan q butun son mavjud bo'lsa, u holda *a son b songa qoldiqsiz bo'linadi* (*bo'linadi*) yoki *b son a sonni bo'ladi* deyiladi hamda $b \mid a$ kabi yoziladi.

$a=bq$ tenglikdagi a son *bo'linuvchi yoki b soniga karrali son, b* son a sonining *bo'luvchisi, q* son esa *bo'linma* deb yuritiladi.

Ravshanki, ikkita son umumiy bo'luvchiga ega bo'lsa, u holda ularning yig'indisi, ayirmasi va karralilari ham shu bo'luvchiga ega.

x, y va z butun sonlar bo'lsa, u holda quyidagi sodda hossalar o'rinli:

(a) $x \mid x$ (refleksivlik hossasi);

(b) Agar $x \mid y$ va $y \mid z$ bo'lsa , u holda $x \mid z$ (tranzitivlik hossasi);

(c) Agar $x \mid y$ va $y \neq 0$ bo'lsa , u holda $|x| \le |y|$;

(d) Agar $x \mid y$ va $x \mid z$ bo'lsa , u holda barcha butun α, β sonlar uchun

$x \mid \alpha y + \beta z$;

(e) Agar $x \mid y$ va $x \mid y \pm z$ bo'lsa , u holda $x \mid z$;

(f) Agar $x \mid y$ va $y \mid x$ bo'lsa , u holda $|x|=|y|$;

(g) $x \mid y \Leftrightarrow |x| \mid |y|$;

Izoh. Shuni aytish joizki, ohirgi (g) hossa bo'linish bilan bog'liq mulohazalarni butun sonlar uchun emas, balki natural sonlar uchun yuritishga imkon yaratadi.

2 ga karrali butun sonlar (ya'ni $2k$, $k \in Z$, ko'rinishdagi sonlar) *juft*, 2 ga karrali bo'lmagan butun sonlar (ya'ni $2k+1$, $k \in Z$, ko'rinishdagi sonlar) esa *toq* sonlar deb yuritiladi.

Bunda quyidagilar o'rinli:

a) Ikkita toq sonlarning yig'indisi va ayirmasi juft, ko'paytmasi esa toq son bo'ladi.

b) Ikkita juft sonlarning yig'indisi , ayirmasi va ko'paytmasi juft son bo'ladi.

1.1-masala. Berilgan yettita sondan ixtiyoriy oltitasining yig'indisi 5 ga bo'linadi. Bu sonlar har biri 5 ga bo'linishini isbotlang.

Yechilishi. Berilgan sonlarni a, b, c, d, e, f, g orqali, ularning yig'indisini esa m orqali belgilaymiz. Masalaning shartiga ko'ra

$$m - a, m - b, m - c, m - d, m - e, \ m - f, m - g$$

ayirmalar barchasi 5 ga bo'linadi. Ularni qo'shib

$$7m - (a + b + c + d + e + f + g) = 6m$$

tenglikni hosil qilamiz. Bundan $6m$ soni 5 ga bo'linishi kelib chiqadi. Bu esa m soni 5 ga bo'linganda bajariladi.

Shunday qilib, m va $m - a$ sonlar 5 ga bo'linadi, demak

$a = m - (m - a)$ son ham 5 ga bo'linadi.

Xuddi shunday, qolgan b, c, e, f va g 5 ga bo'linishi isbotlanadi. ▲

1.2-masala. a) $a + 1$ son 3 ga bo'linsa, $4 + 7a$ son ham 3 ga bo'linishini isbotlang.

b) $2 + a$ va $35 - b$ sonlar 11 ga bo'linsa, $a + b$ son ham 11 ga bo'linishini isbotlang.

Yechilishi.

a) $4 + 7a = 4(a + 1) + 3a$ bo'lgani uchun $4 + 7a$ son 3 ga bo'linadi.

b) $a + b = (2 + a) - (35 - b) + 33$ bo'lgani uchun $a + b$ son 11 ga bo'linadi. ▲

1.3-masala. a) 3 ta ketma–ket natural sonlarning ko'paytmasi 6 ga bo'linishini isbotlang.

b) 5 ta ketma–ket natural sonlarning ko'paytmasi 120 ga bo'linishini isbotlang.

Yechilishi. a) Berilgan sonlardan kamida bittasi juft son bo'lgani uchun, ko'paytma 2 ga bo'linadi. Xuddi shunday, berilgan sonlardan kamida bittasi 3 ga karrali bo'lgani uchun, ko'paytma 3 ga bo'linadi. Demak, ko'paytma $6 = 2 \cdot 3$ ga bo'linadi.

b) Berilgan sonlardan kamida bittasi 5 ga, kamida bittasi 3 ga, kamida ikkitasi 2 ga bo'linishi ravshan.

Bundan tashqari, 2 ga bo'linadigan sonlardan kamida bittasi 4 ga bo'lingani uchun son bo'lgani uchun, ko'paytma $5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 = 120$ ga bo'linadi. ▲

1.4-masala. Ma'lumki, *a, b, c, d* butun sonlar barchasi $ab–cd$ ga bo'linadi. $ab–cd$ ning qiymatini toping.

Yechilishi. *a, b, c, d* butun sonlar barchasi $ab–cd$ ga bo'lingani uchun

$$a=(ab–cd)a',\ b=(ab–cd)b',\ c=(ab–cd)c',\ d=(ab–cd)d'$$

tengliklar bajariladi, bu yerda a', b', c', d' – butun sonlar. Bundan

$$ab–cd = (ab–cd)a'(ab–cd)b'–(ab–cd)c'(ab–cd)d' = (ab–cd)^2(a'b'–c'd')$$

tengliklarni hosil qilamiz, ya'ni $ab–cd$ son $(ab–cd)^2$ ga bo'linadi.

Bu esa $ab–cd =1$ yoki $ab–cd = –1$ bo'lganda o'rinlidir.

Javob: $ab–cd =1$ yoki $ab–cd =–1$. ▲

1.5-masala. Ixtiyoriy natural k son uchun $7+7^2+...+7^{4k}$ yig'indi 400 ga bo'linishini isbotlang.

Yechilishi. Berilgan yig'indini quyidagicha yozamiz:

$$(7+7^2+7^3+7^4)+(7^5+7^6+7^7+7^8)+...+(7^{4k-3}+7^{4k-2}+7^{4k-1}+7^{4k}) =$$

$$=(7+7^2+7^3+7^4)(1+7^4+7^8+...+ 7^{4k-4})=(7+7^2+7^3+7^4)\cdot(1+7^4+7^8+...+ 7^{4k-4}) =$$

$$=7\cdot 400\cdot(1+7^4+7^8+...+ 7^{4k-4}).$$

Bundan $7+7^2+...+7^{4k}$ yig'indi 400 ga bo'linishi kelib chiqadi. ▲

1.6-masala . $n>1$ natural son berilgan bo'lsin.

a) 2^n son ikkita ketma–ket natural toq sonlar yig'indisi ko'rinishda ifodalanishini isbotlang.

b) 3^n son uchta ketma–ket natural sonlar yig'indisi ko'rinishda ifodalanishini isbotlang.

c) m,n sonlar 1 dan katta bo'lgan natural sonlar bo'lsin. m^n son m ta ketma–ket natural sonlar yig'indisi ko'rinishda ifodalanishini isbotlang.

Yechilishi. a) Agar ikkita ketma–ket toq sonlar mos ravishda $2k-1,\ 2k+1$ ko'rinishda bo'lsa ($k\in Z$), u holda

$$2^n=(2k-1)+(2k+1)$$

tenglikdan $k=2^{n-2}$ kelib chiqadi, ya'ni

$$2^n=(2^{n-1}-1)+(2^{n-1}+1).$$

b) Agar

$$3^n=(s-1)+s+(s+1)$$

bo'lsa, bu tenglikdan $s=3^{n-1}$ kelib chiqadi, ya'ni

$$3^n=(3^{n-1}-1)+3^{n-1}+(3^{n-1}+1).$$

c)

$$m^n=(2k+1)+(2k+3)+...+(2k+2m-1)$$

tenglik

$$m^n=2km+(1+3+...+2m-1)+m^2$$

tenglikka tengkuchli.

Bu yerdan

$$k=\frac{m(m^{n-2}-1)}{2}$$

ni topamiz.

$m, m^{n-2}-1$ sonlardan bittasi albatta juft son bo'lganligi bois bu son butun. ▲

1.7-masala . Ixtiyoriy m va n butun sonlar $mn(m+n)$ soni juft son bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. Agar m va n sonlardan birortasi juft bo'lsa, u holda $mn(m+n)$ soni juft son bo'lishi ravshan. Shuning uchun m va n sonlar ikkalasi ham toq bo'ladi deb faraz qilamiz. U holda ikkita toq sonlarning $m+n$ yig'indisi juft son bo'lganligi sababli $mn(m+n)$ soni juft bo'ladi. ▲

1.8-masala. n natural son uchun $3^{2^n}+1$ soni juft bo'lib, ammo 4 ga bo'linmasligini isbotlang.

Yechilishi. Ravshanki, 3^{2^n} soni toq, demak $3^{2^n}+1$ soni juft bo'ladi.

Quyidagiga egamiz:

$$3^{2^n}=(3^2)^{2^{n-1}}=9^{2^{n-1}}=(8+1)^{2^{n-1}}=8A+1\ ,$$

bu yerda A – natural son. Demak, $3^{2^n}+1=8A+2$. Ohirgi son esa 4 ga bo'linmaydi. ▲

1.9-masala. $1^{2009}+2^{2009}+....+16^{2009}$ natural son 17 ga bo'linishini ko'rsating.

Yechilishi. Ravshanki, ixtiyoriy k = 1,2,…,16 uchun

$$(17-k)^{2009}=17A-k^{2009}$$

tenglik o'rinli, bu yerda A – natural son. Demak, $k^{2009}+(17-k)^{2009}$ soni 17 ga bo'linadi.

$$1^{2009}+2^{2009}+....+16^{2009}=(1^{2009}+16^{2009})+(2^{2009}+15^{2009})+...$$

bo'lgani uchun, berilgan yig'indi ham 17 ga bo'linadi. ▲

1.10-masala. Barcha natural n soni va $m>2$ toq soni uchun $k=m^n$ sonni qaraymiz. $1^k+2^k+...+(m-1)^k$ sonini m ga bo'linishini isbotlang.

Yechilishi. Ravshanki, $k=m^n$ ko'rinishdagi son toq bo'ladi.

Demak, barcha natural $i=1,2,...,\dfrac{m-1}{2}$ sonlar uchun

$$i^k+(m-i)^k=m(i^{k-1}-i^{k-2}(m-i)+...+(m-i)^{k-1})$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Bu tengliklarni barchasini qo'shib chiqsak,

$$1^k+2^k+...+(m-1)^k$$

soni p ga bo'linishini hosil qilamiz. ▲

1.11-masala. x,y – butun sonlar bo'lsin. $2x+3y$ soni 17 ga bo'linishi uchun $9x+5y$ soni 17 ga bo'linishi zarur va yetarli bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. Quyidagilarga egamiz:

$$17\,|\,(2x+3y)\Rightarrow 17\,|\,(13(2x+3y))\Rightarrow 17\,|\,(26x+39y)\Rightarrow 17\,|\,(9x+5y)\,.$$

Demak, $2x+3y$ soni 17 ga bo'linsa, $9x+5y$ soni ham 17 ga bo'linadi. Boshqa tarafdan,

$$17\big|(9x+5y)\Rightarrow 17\big|(4(9x+5y))\Rightarrow 17\big|(36x+20y)\Rightarrow 17\big|(2x+3y).$$

Demak, $9x+5y$ soni 17 ga bo'linsa, $2x+3y$ soni ham 17 ga bo'linadi. ▲

1.12-masala. Ma'lumki, n^2+1 va $(n+1)^2+1$ sonlar (bu yerda n – natural son) bir vaqtda d natural songa bo'linadi. d sonini toping.

Yechilishi.

$$d\big|(n^2+1),\ d\big|((n+1)^2+1)\ \Rightarrow d\big|(n^2+1),\ d\big|(n^2+2n+2)\ \Rightarrow d\big|((n^2+2n+2)-(n^2+1))$$

$$d\big|(2n+1)\Rightarrow d\big|(4n^2+4n+1)\Rightarrow d\big|(4(n^2+2n+2)-(4n^2+4n+1))\Rightarrow d\big|(4n+7)$$

Demak, $d\big|((4n+7)-2(2n+1))\Rightarrow d|5$.

Ohirgi munosabat d=1 yoki d=5 bo'lgandagina bajariladi. Bu ikkita hol ham $n=2$ da o'rinli. ▲

1.13-masala. Barcha butun n sonlar uchun quyidagilarni isbotlang:

a) n^5-5n^3+4n soni 120 ga bo'linadi;

b) n^2+3n+5 soni 121 ga bo'linmaydi.

Yechilishi. a) $n^5-5n^3+4n=n(n^2-1)(n^2-4)=n(n-1)(n+1)(n-2)(n+2)$ bo'lgani uchun u 5 ta ketma–ket natural $n-2, n-1, n, n+1, n+2$ sonlarning ko'paytmasi bo'ladi. Bunday sonlar esa $5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$ soniga bo'linadi (tekshiring).

b) $n^2+3n+5=(n+7)(n-4)+33$ tenglik bajarilishini ko'rsatish qiyin emas.

Agar $11|n^2+3n+5$ bo'lsa, u holda $11\big|(n+7)(n-4)$, ya'ni $11|n+7$ yoki $11|n-4$ bo'ladi. $(n+7)-(n-4)=11$ bo'lgani uchun $121\big|(n+7)(n-4)$ bo'ladi. Ammo 33 soni 121 ga bo'linmagani uchun bu holda n^2+3n+5 soni 121 ga bo'linmaydi.

Agar n^2+3n+5 soni 11 ga bo'linmasa, u holda n^2+3n+5 soni 121 ga bo'linmaydi. ▲

2-§. Tub va murakkab sonlar

<u>Ta'rif</u>. Faqat ikkita turli bo'luvchiga ega bo'lgan natural son *tub son,* ikkitadan ko'p turli natural bo'luvchiga ega bo'lgan natural son *murakkab son* deyiladi.

Izoh. p tub son 1 dan farqli bo'lib, faqat 1 va p ga bo'linadi .
m murakkab sonning 1 va m bo'luvchilardan farqli kamida yana bitta bo'luvchisi mavjud. 1 soni na tub , na murakkab son hisoblanadi.

Misol. 2,3,5,7,11,13 –tub sonlar , 4,6,8,9,10,12 – murakkab sonlar.

<u>Ta'rif</u>. 1 dan farqli umumiy bo'luvchilarga ega bo'lmagan ikkita natural son *o'zaro tub sonlar* deyiladi.

2.1-masala. Quyidagilarni isbotlang.

a) Agar a son p tub songa bo'linmasa, u holda a , p sonlar o'zaro tub bo'ladi.

b) Agar bir nechta son ko'paytmasi p tub songa bo'linsa, u holda uni tashkil qilgan ko'paytuvchilardan kamida bittasi p ga bo'linadi.

Yechilishi. a) Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni a son berilgan p tub songa bo'linmasdan, u bilan 1 dan farqli umumiy bo'luvchiga ega bo'lsin. p son tub bo'lganligi bois bu umumiy bo'luvchi faqat p bo'la oladi, ya'ni a son p tub songa bo'linar ekan. Ziddiyat.

b) Agar bir nechta sonlarning ko'paytmasi p tub songa bo'linib, ko'paytuvchilar barchasi p ga bo'linmasa, ular a) hossaga ko'ra ular p tub soni bilan o'zaro tub bo'ladi. Demak, berilgan ko'paytma ham p tub soni bilan o'zaro tub. Ziddiyat. ▲

2.2-masala. Geometrik progressiyada birinchi, o'ninchi va o'ttizinchi hadlar natural sonlar bo'lsa, uning yigirmanchi hadi ham natural son bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ – berilgan geometrik progressiya, q – uning maxraji bo'lsin. Masala shartiga ko'ra a_1, $a_{10}=a_1q^9$ va $a_{30}=a_1q^{29}$ sonlar natural sonlar bo'ladi. Shuning uchun q^9 va q^{29} – musbat ratsional sonlar. Demak, $q^2=q^{29}/(q^9)^3$ va $q=q^9/(q^2)^4$ sonlar ham ratsional sonlar bo'ladi.

$q=m/n$ bo'lsin, bu yerda m va n natural o'zaro tub sonlar. $a_{30}=a_1m^{29}/n^{29}$ natural son, m^{29} va n^{29} o'zaro tub bo'lgani uchun a_1 son n^{29} ga bo'lingani kelib chiqadi. Demak, $a_{20}=a_1q^{19}=a_1m^{19}/n^{19}$ son natural son bo'ladi. ▲

2.3-masala. $p>3$ tub son uchun $24 \mid p^2-1$ munosabatni isbotlang.

Yechilishi. $p-1, p+1$ ketma–ket juft sonlardan bittasi 4 ga va bittasi 3 ga bo'linadi. Demak, $p^2-1=(p-1)(p+1)$ son 24 ga bo'linadi. ▲

2.4-masala. Ma'lumki, $p, p+10, p+14$ sonlar tub. p ni toping.

Yechilishi. $p, p+10, p+14$ sonlardan kamida bittasi 3 ga bo'linadi. Demak, $p=3$. ▲

2.5-masala. a, b, c natural sonlar uchun $p=b^c+a$, $q=a^b+c$, $r=c^a+b$ sonlar tub bo'lsa, p, q, r sonlardan kamida ikkitasi o'zaro teng bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. a, b, c sonlardan kamida ikkitasi bir vaqtda yoki juft, yoki toq bo'ladi. Aniqlik uchun bu sonlar a va b bo'lsin. U holda $p=b^c+a$ tub son juft bo'ladi, ya'ni $p=2$ va $a=b=1$. Bundan $q=1+c=r$ kelib chiqadi. ▲

2.6-masala. Ma'lumki, n natural son uchun $2n+1$ va $3n+1$ sonlar qandaydir sonlarning kvadratlari bo'ladi. $5n+3$ son murakkab son bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. $2n+1=k^2$, $3n+1=m^2$ bo'lsa,

$$5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-m^2=(2k+m)(2k-m)$$

tenglik o'rinli.

$2k–m\neq 1$ shart bajarilishini isbotlash yetarli.

Agar $2k–m=1$ bo'lsa,

$$5n+3=2m+1$$

va

$$(m–1)^2=m^2–(2m+1)+2=(3n+1)–(5n+3)+2=–2n<0$$

bo'ladi. Ziddiyat. ▲

2.7-masala. Agar tub p,q sonlar uchun $x^2-px+q=0$ kvadrat tenglama ikkita turli butun yechimga ega bo'lsa, p,q lar topilsin.

Yechilishi. Tenglamaning yechimlari $x_1<x_2$ shartni qanoatlantirsin. Viet formulalariga ko'ra $p=x_1+x_2, \quad q=x_1x_2$.

$q-$ tub son bo'lgani uchun ohirgi tenglikdan $x_1=1$ bo'ladi va bundan $q=x_2,\, p=1+x_2$ – ikkita ketma–ket tub son ekanligi kelib chiqadi. Bu esa faqat $q=2,\, p=3$ bo'lgandagina o'rinli. ▲

2.8-masala. Ixtiyoriy oltita ketma–ket natural sonlar uchun ulardan faqat bittasining bo'luvchisi bo'ladigan tub son topilishini isbotlang.

Yechilishi. Ketma–ket bo'lgan $n,\ n+1,\ n+2,\ n+3,\ n+4,\ n+5$ sonlarni olamiz. Agar n soni 5 ga bo'linmasa, $n+1, n+2, n+3, n+4$ sonlaridan faqat bittasi beshga bo'linadi. Agar n soni 5 ga bo'linsa, $n+5$ ham 5 ga bo'linadi. U holda 5 ga bo'linmaydigan $n+1, n+2, n+3, n+4$ sonlardan ikkitasi 2 ga bo'linmaydi. Shu ikkita toq sonlardan biri albatta 3 ga bo'linmaydi. Demak, 2 ga, 3 ga va 5 ga bo'linmagan shu son, 5 dan kattaroq tub songa bo'linadi. $n, n+1, ..., n+5$ sonlari orasida shu tub songa bo'linadigan son yagona. ▲

2.9-masala. Qanday natural n sonlar uchun $3n-4,\ 4n-5, 5n-3$ ko'rinishdagi uchta sonlar barchasi tub bo'ladi?

Yechilishi. Bu sonlarning $(3n-4)+(4n-5)+(5n-3)=12n-12=12(n-1)$ juft bo'lgani uchun, ulardan kamida bittasi albatta juft, ya'ni 2 ga teng bo'ladi. Ammo $4n-5$ toq bo'lganligi sababli, quyidagi hollarni qarashimiz yetarli.

$3n-4=2 \Leftrightarrow n=2$ yoki

$5n-3=2 \Leftrightarrow n=1$.

Agar $n=1$ bo'lsa, $4n-5$=–1.

Agar $n=2$ bo'lsa, $4n-5=3, 5n-3=7$.

Javob. $n=2$. ▲

2.10-masala. Nol'dan farqli va turli a, b va c raqamlari uchun $\overline{ab}$ soni c ga, $\overline{bc}$ soni a ga va $\overline{ca}$ soni b ga bo'linishi mumkinmi?

Yechilishi. Yo'q. Agar a, b, c raqamlardan bittasini juft va masala sharti bajariladi deb faraz qilsak, u sholda a, b va c raqamlarning barchasi juft bo'ladi va $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ raqamlari uchun ham masala sharti bajariladi. Lekin $\frac{a}{2}, \frac{b}{2}, \frac{c}{2}$ sonlar bir vaqtda juft raqamlar bo'la olmaydi. Demak, a, b, c raqamlarning barchasi toq bo'lgan holni qarash yetarli. Agar $a=5$ desak, $a|\overline{bc}$ bo'lgani uchun $c=5$ bo'ladi. Lekin, bu mumkin emas. Demak $a, b, c \in \{1,3,7,9\}$. U holda a, b, c raqamlardan bittasi 3 yoki 9 bo'lishi zarur. Aytaylik, bu raqam a bo'lsin. Unda $a|\overline{bc}$ munosabat faqat $\{b, c\}=\{3, 9\}$ bo'lganda bajarilishini tekshirib ko'rish qiyin emas. Bu esa a, b, c larning turli raqamlar ekanligiga ziddir. ▲

2.11-masala. Qaysi natural n son uchun n^5+n^4+1 son tub bo'ladi?

Yechilishi. $n=1$ bo'lsa, $n^5+n^4+1=3$ – tub son.

$$n^5+n^4+1=n^5+n^4+n^3-n^3-n^2-n+n^2+n+1=$$
$$=n^3(n^2+n+1)-n(n^2+n+1)+(n^2+n+1)=$$
$$=(n^3-n+1)(n^2+n+1)$$

munosabatlar o'rinli.

Ravshanki, $n>1$ bo'lganda $n^3-n+1>1, n^2+n+1>1$ bo'ladi. Demak, bu holda n^5+n^4+1 son ikkita birdan katta natural sonlar ko'paytmasiga yoyiladi, ya'ni u tub emas.

Javob. $n=1$. ▲

2.12-masala. $ab+bc+ac>abc$ tengsizlikni qanoatlantiradigan barcha tub a,b,c sonlarni toping.

Yechilishi. Umumiylikka putur yetkazmasdan $a\le b\le c$ deb faraz qilamiz. Agar $a\ge 3$ bo'lsa, u holda $ab+bc+ac\le 3bc\le abc$. Bu esa berilgan tengsizlikka zid. Demak, $a<3$. Bundan a tub bo'lgani uchun $a=2$ bo'ladi. Bu holda $ab+bc+ac>abc$ tengsizlik $2(b+c)>bc$ ko'rinishni oladi.

Bundan

$$\frac{1}{c}+\frac{1}{b}>\frac{1}{2}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

Ravshanki, $b\ge 5$ bo'lsa, $c\ge 5$ bo'lib

$$\frac{1}{2}<\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\le\frac{2}{5}$$

zid tengsizlikni hosil qilamiz.

Demak, $b<5$ bo'ladi.

b tub bo'lgani uchun qo'yidagi ikkita holni qarash yetarli:

1) $b=2$. Bu holda c sifatida ixtiyoriy tub sonni olish mumkin.

2) $b=3$. Bu holda c=3 yoki c=5 .

Javob. 1) $a=2$, $b=2$, c – ixtiyoriy tub son.

2) $a=2$, $b=3$, c=3 .

3) $a=2$, $b=3$, c=5 .

Qolgan yechimlar yuqoridagi (a,b,c) uchlikni o'rin almashtirishlar yordamida hosil bo'ladi. ▲

2.13-masala. a^4+4b^4 son tub son bo'ladigan barcha natural a,b sonlar topilsin.

Yechilishi.

$$a^4+4b^4=a^4+4b^4+4a^2b^2-4a^2b^2=(a^2+2b^2)^2-4a^2b^2=$$
$$=(a^2+2b^2+2ab)(a^2+2b^2-2ab)=[(a+b)^2+b^2][(a-b)^2+b^2].$$

Ravshanki , $(a+b)^2+b^2>1$. Demak, a^4+4b^4 son tub son bo'lishi uchun

$$(a-b)^2+b^2=1$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

Bu tenglik faqat $a=b=1$ bo'lganda bajariladi. Bu sonlar esa masala shartini qanoatlantiradi.

Javob. $a=b=1$. ▲

Izoh. Adabiyotlarda $a^4+4b^4=[(a+b)^2+b^2][(a-b)^2+b^2]$ ayniyat Sofi Jermen ayniyati deb yuritiladi[1].

2.14-masala. $P(x)$ – darajasi n ga teng bo'lgan natural koeffitsientli ko'phad uchun shunday butun k son topiladiki, natijada $P(k)$, $P(k+1)$, ..., $P(k+1996)$ sonlar barchasi murakkab bo'ladi.

Yechilishi. Koeffitsientlar natural bo'lganligi sababli $N>M>0$ larda $P(N)>P(M)$ tengsizlik bajariladi. Bundan tashqari, $N>0$ bo'lganda $P(N)>1$.

Ravshanki, agar $a \mid x-y$ bo'lsa, u holda $a \mid P(x)-P(y)$.

(bu $x^n-y^n=(x-y)(x^{n-1}+x^{n-2}y+...+y^{n-1})$ formuladan kelib chiqadi).

$$A=P(1)P(2)...P(1996)$$

Belgilashni kiritamiz. $P(k) \mid A$ dan $P(k) \mid P(A+k)-P(k)$ kelib chiqadi, bu yerda $k=1, ..., 1996$. Demak, $P(k) \mid P(A+k)$. Ammo $P(k)>1$ va $P(A+k)>P(k)$. Bundan $P(A+k)$ — murakkab son, $k=1, ..., 1996$. ▲

---

[1] Sofi Jermen (1776-1831) – fransiyalik matematik ayol. Matematik fizika sohasida ilmiy izlanishlarni olib borgan.

2.15-masala. Agar p tub son va $0 < k < p$ bo'lsa, u holda

$$C_p^k = \frac{1 \cdot 2 \cdots (p-1)p}{1 \cdot 2 \cdots (k-1)k \cdot 1 \cdot 2 \cdots \cdot (p-k-1)(p-k)}$$

binomial koeffitsient p tub songa bo'linadi.

Yechilishi. Binomial koeffitsient butun son bo'lgani bois, uni $1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ so'rati mahrajiga bo'linadi.

$0 < k < p$ bo'lgani uchun $1 \cdot 2 \cdots (k-1)k \cdot 1 \cdot 2 \cdots \cdot (p-k-1)(p-k) = k!(p-k)!$ soni p son bilan o'zaro tub. Shuning uchun $1 \cdot 2 \cdots (p-1)p$ so'ratning faqat $1 \cdot 2 \cdots (p-1)$ ko'patuvchisi mahrajga bo'linib ketadi. ▲

2.16-masala. Murakkab a sonining 1 dan farqli eng kichik bo'luvchisi $\sqrt{a}$ sonidan katta bo'lmagan tub son bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. Natural sonlarning to'plami quyidan chegaraganligidan a sonining 1 dan farqli eng kichik bo'luvchisini mavjud bo'lishi kelib chiqadi va biz uni b orqali belgilaymiz.

Avvalambor, b sonini tub son bo'lishini isbotlaymiz. Agar biz uni murakkab son deb faraz qilsak, u o'zidan kichik bo'lgan natural bo'luvchiga ega bulganligi kelib chiqadi va bu bo'luvchi a sonini ham bo'ladi. Bunday bo'lishi mumkin emas. Demak, b soni tub son bo'ladi. $a=bq$ tenglikdan q bo'linma a sonini natural bo'luvchisi ekanligi kelib chiqadi. Demak, b sonini ta'rifiga ko'ra $q \geq b$ tengsizlik bajariladi. Shu tengsizlikdan foydalanib, $a=bq \geq bb=b^2$ ga ega bo'lamiz. ▲

Izoh. Bu masala a sonidan katta bo'lmagan tub sonlarni topishda *Eratosfen g'alviri*[2] deb ataladigan oddiy usuldan foydalanishga imkon beradi. Uning mohiyati bilan tanishamiz.

1, 2, 3, … , a sonlar ichida 2,3,5,7,…, tub sonlari va ularga bo'linadigan sonlari ketma–ket o'chiriladi. Bunda :

a) p tub soniga bo'linadigan sonlarni o'chirish p^2 dan boshlash kerak;

[2] Eratosfen (m.a. 276-194 y.y.) – qadimiy yunonlik olim. Kubni ikkilash masalasini echishga doir maxsus qŏrilma (mezolyabiy)ni kashf qilgan.

b) o'chirish jarayonini $\sqrt{a}$ sonidan katta bo'lmagan tub sonlar uchun o'tkazish yetarli.

Natijada a sonidan katta bo'lmagan tub sonlar o'chirilmay qoladi.

2.17-masala. (Ruminiya, 2004). O'zaro teng bo'lmagan tub p,q,r sonlar va n natural son $p^n+q^n=r^2$ munosabatni qanoatlantirsa, $n=1$ bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. Ravshanki, $p^n+q^n=r^2$ munosabat bajarilishi uchun p,q,r lardan birortasi 2 ga teng bo'lishi kerak.

$r=2$ dan $p^n+q^n=4$ kelib chiqadi. Bu esa masala shartiga zid.

Umumiylikka putur yetkazmasdan, $p>q=2$ deb faraz qilamiz.

$n>1$ – toq bo'lgan holini qaraymiz. Bu holda

$$(p+2)(p^{n-1}-2p^{n-2}+2^2p^{n-3}-...+2^{n-1})=r^2.$$

Ko'rinib turibdiki

$p^{n-1}-2p^{n-2}+2^2p^{n-3}-...+2^{n-1}=2^{n-1}+(p-2)(p^{n-2}+2^2p^{n-4}+...)>1$

va $p+2>1$.

Demak,

$$(p+2)(p^{n-1}-2p^{n-2}+2^2p^{n-3}-...+2^{n-1})=r^2$$

tenglik

$$p+2=r,\ p^{n-1}-2p^{n-2}+2^2p^{n-3}-...+2^{n-1}=r$$

bo'lgandagina bajariladi.

Bundan

$$p^n+2^n=(p+2)^2=p^2+4p+4.$$

Bu esa $n\geq 3$ da bajarilmaydi.

Endi $n>1$ – juft bo'lgan holini qaraymiz. Bu holda $m\in N$ va a,b – o'zaro tub sonlar topiladiki, ular uchun

$$n=2m,\ p^m=a^2-b^2, 2^m=ab, r=a^2+b^2$$

tengliklar bajariladi. Bu esa faqat $b=1, a=2^{m-1}$ bo'lganda o'rinli.

$p^m=4^m-1<4^m$ dan $p=3$ tenglik kelib chiqadi.

$3^m = 4^{m-1} - 1$ tenglik $m = 1$ da bajariladi, vaholanki qolgan $m \geq 2$ lar uchun induksiya yordamida $3^m < 4^{m-1} - 1$ tengsizlik o'rinli bo'lishini ko'rsatish qiyin emas.

Demak, $n = 1$ holi qaralishi qoldi. Bu holda $p = 23, q = 2, r = 5$. ▲

2.18-masala. p – tub son bo'lsin.

a) p dan kichik va u bilan o'zaro tub bo'lgan natural sonlar nechta?

b) p^2 dan kichik va u bilan o'zaro tub bo'lgan natural sonlar nechta?

Yechilishi. a) Barcha p dan kichik natural sonlar u bilan o'zaro tub bo'ladi. Ularning soni esa $p – 1$ ga teng.

b) Barcha p^2 dan kichik va p ga karrali bo'lmagan natural sonlar p^2 bilan o'zaro tub bo'ladi.

p^2 dan kichik va p ga karrali sonlar $p, 2p, ..., (p – 1)p$ ko'rinishga ega. Ularning soni $p – 1$ ga teng. Demak, p^2 dan kichik va u bilan o'zaro tub bo'lgan sonlar

$$(p^2 - 1) - (p - 1) = p^2 - p$$

ta bo'ladi.

Javob. a) $p – 1$; b) $p^2 – p$. ▲

2.19-masala. Ma'lumki, $p \neq 2$ tub son $x^5 - y^5$ ko'rinishiga ega, bu yerda x, y natural sonlar.

$$\sqrt{\frac{4p+1}{5}} = \frac{q^2+1}{2}$$

tenglik bajarilishini isbotlang, bu yerda q – toq son.

Yechilishi. $p = x^5 - y^5 = (x-y)(x^4 + x^3y + x^2y^2 + xy^3 + y^4)$ va $p > 2$ bo'lgani uchun $x = y + 1$. Bundan, $t = y^2 + y$ almashtirish kiritib quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$p = (y+1)^5 - y^5 = 5y^4 + 10y^3 + 10y^2 + 5y + 1 =$$

$$= 5y(y^3 + 2y^2 + 2y + 1) + 1 = 5y(y+1)(y^2 + y + 1) + 1 = 5t(t+1) + 1 = 5(t + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Bundan

$$\sqrt{\frac{4p+1}{5}}=\sqrt{(2t+1)^2}=2y^2+2y+1=\frac{4y^2+4y+2}{2}=\frac{(2y+1)^2+1}{2}$$

Demak, $q=2y+1$ son masala shartini qanoatlantiradi. ▲

2.20-masala. (Ruminiya, 1999). Ma'lumki, nol'mas a,b,c sonlar

$$a\neq c \text{ va } \frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$$

shartlarni qanoatlantiradi. $a^2+b^2+c^2$ son murakkab son bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. $\frac{a}{c}=\frac{a^2+b^2}{c^2+b^2}$ tenglik $(a-c)(b^2-ac)=0$ tenglikka ekvivalent.

$a\neq c$ bo'lgani uchun $b^2=ac$. Bundan

$3\leq a^2+b^2+c^2=a^2+ac+c^2=a^2+2ac+c^2-b^2=(a+c)^2-b^2=(a+c-b)(a+c+b)$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

$a^2+b^2+c^2$ son tub bo'lsa, quyidagi 4 ta hol vujudga kelishi mumkin:

$$(1)\ a+c-b=1 \text{ va } a+c+b=a^2+b^2+c^2$$

$$(2)\ a+c+b=1 \text{ va } a+c-b=a^2+b^2+c^2$$

$$(3)\ a+c-b=-1 \text{ va } a+c+b=-(a^2+b^2+c^2)$$

$$(4)\ a+c+b=-1 \text{ va } a+c-b=-(a^2+b^2+c^2).$$

(1) va (2) hollarda $a^2+b^2+c^2-2(a+c)+1=0$ tenglikni hosil qilamiz.

Bu esa $(a-1)^2+(c-1)^2+b^2=1$ tenglikka ekvivalent. Bundan $a=c=1$ kelib chiqadi.

Bu esa masalaning berilishiga zid.

Qolgan hollarda xuddi shunday $(a+1)^2+(c+1)^2+b^2=1$ tenglikni hosil qilamiz.

Bundan $a=c=-1$ kelib chiqadi. Bu ham masalaning berilishiga zid.

Demak, $a^2+b^2+c^2$ son tub bo'la olmaydi. ▲

2.21-masala. (*Evklid teoremasi*)[3] . Tub sonlar cheksiz ko'pdir.

[3] Evklid (m.a. 356-300 y.y.) – qadimiy yunonlik olim. Geometriya fanining asoschilaridan biri.

Yechilishi. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni faqat n ta $p_1, p_2, ..., p_n$ tub sonlar mavjud bo'lsin . $b = p_1 p_2 ... p_n + 1$ sonini olaylik. U barcha $p_1, p_2, ..., p_n$ tub sonlardan katta bo'lgani uchun murakkab son bo'ladi. Demak, uning 1 dan farqli eng kichik p natural bo'luvchisi tub son bo'lib, u albatta $p_1, p_2, ..., p_n$ lardan birortasi bilan ustma–ust tushadi, ya'ni b va $p_1, p_2, ..., p_n$ sonlar p ga bir vaqtda bo'linadi.

Demak, 1 $= p_1 p_2 ... p_n - b$ soni p ga bo'linadi. Ziddiyat. ▲

Izoh. 2006 yilda $2^{32582657} - 1$ soni tub son bo'lishi tekshirildi. Bu son hozirgacha eng katta ma'lum bo'lgan tub son bo'lib, u o'nli pozitsion sistemada 9808358 ta raqamdan iborat.

2.22-masala. $p_1, p_2, ..., p_n$ tub sonlar uchun $b = p_1 p_2 ... p_n + 1$ soni albatta tub son bo'ladimi?

Yechilishi. $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 + 1 = 30031 = 59 \cdot 509$. Albatta emas. ▲

2.23-masala. $e_1 = 2$, $e_n = e_1 e_2 ... e_{n-1} + 1$ $(n \geq 2)$ tengliklar yordamida aniqlangan ketma–ketlik faqat tub sonlardan iborat bo'ladimi?

Yechilishi. Yo'q, $e_5 = 1807 = 13 \cdot 139$. ▲

2.24-masala. Ixtiyoriy natural n uchun n ta ketma–ket murakkab sonlar mavjudligini ko'rsating.

Yechilishi. $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n+1) + 2$ son 2 ga, $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n+1) + 2$,..., $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (n+1) + n + 1$ son $n+1$ ga bo'lingani uchun, bu sonlar masalani shartini qanoatlantiradi. ▲

2.25-masala. $3, 7, 11, ...,$ cheksiz arifmetik progressiyada tub sonlar cheksiz ko'p bo'lishini ko'rsating.

Yechilishi. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni berilgan progressiyada faqat n ta $p_1 = 3,\ p_2 = 7,\ ...,\ p_n$ tub sonlar mavjud bo'lsin . $b = 4 p_2 ... p_n + 3$ sonini olaylik. U barcha $p_1, p_2, ..., p_n$ tub sonlardan hech qaysisiga bo'linmasdan, $4k+3$ ko'rinishdagi p natural bo'luvchiga ega. Ziddiyat. ▲

2.26-masala. Faqat tub sonlardan iborat bo'lgan cheksiz arifmetik progressiya mavjud emasligini ko'rsating.

Yechilishi. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $p_1, p_2, ..., p_n$ progressiya barcha hadlari tub sonlardan iborat bo'lsin va uning ayirmasini d orqali belgilaymiz. Farazimizga ko'ra, $p_{k+1} = p_1 + kd$ son barcha k natural sonlar uchun tub son bo'ladi. k son sifatida $k = p_1$ deb olsak $p_{k+1} = p_1(1+d)$ murakkab sonni hosil qilamiz. Ziddiyat. ▲

Izoh. Tub sonlardan iborat bo'lgan chekli arifmetik progressiyalar mavjud. Masalan, 5, 11, 17, 23, 29 – beshta haddan iborat bo'lgan arifmetik progressiya, 7, 37, 67, 97, 127, 157 – oltita haddan iborat bo'lgan arifmetik progressiya.

2.27-masala. Koeffitsientlari butun sonlar bo'lgan $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ko'phad ($n \geqslant 1$, $a_n \neq 0$) berilgan bo'lsin. Barcha $x = 0, 1, 2, ...$ uchun $P(x)$ ko'pxad tub qiymatlarni qabul qilishi mumkinmi?

Yechilishi. $x = 0$ da berilgan ko'phad $a_0 = p$ tub qiymatni qabul qilsin. Ravshanki, $x_1 = p$, $x_2 = p^2$, $x_3 = p^3$,..., lar uchun $P(x_j)$ qiymati p ga bo'linadi. Demak, $P(x_j) = p$ ($j = 1, 2, ...$) , ya'ni $P(x)$ cheksiz ko'p nuqtalarda bitta qiymatni qabul qiladi. Bu esa faqat $P_n(x) = P_0(x) = a_0$ bo'lgandagina bajarilishi mumkin. ▲

Izoh. Bevosita tekshirish mumkinki $P(n) = n^2 + n + 41$ ko'phad $n = 0, 1, ..., 39$ larda tub qiymatlarni qabul qiladi. Ammo $n = 40$ va $n = 41$ larda uning qiymatlari murakkab sonlar bo'ladi (tekshiring).

2.28-masala. Koeffitsientlari natural sonlar bo'lgan $P(x) = a_n x^n + ... + a_1 x + a_0$ ko'phad ($n \geqslant 2$, $a_n \neq 0$) berilgan bo'lsin. Barcha tub $x = 2, 3, 5, ...$ sonlar uchun uchun $P(x)$ ko'pxad faqat tub qiymatlarni qabul qilishi mumkinmi?

Yechilishi. Agar $a_0=0$ bo'lsa, $P(x)=x(a_n x^{n-1}+a_{n-1}x^{n-2}+...+a_1)$, demak p tub sonda $P(p)$ son p ga bo'linadi. Boshqa tarafdan, $n \geqslant 2$ bo'lgani uchun $P(p)$ son p dan katta. Shuning uchun $P(p)$ – murakkab son.

Agar $a_0 \geq 2$ bo'lsa, p orqali a_0 ning birorta tub bo'luvchisini belgilaymiz. Bu holda $P(p)=(a_n p^{n-1}+a_{n-1}p^{n-2}+...+a_1)p+a_0$ son p ga bo'linib, undan katta bo'ladi. Shuning uchun $P(p)$ – murakkab son.

Shunday qilib, $a_0=1$ holi qaralishi yetarli.

Agar ixtiyoriy p tub son uchun $P(p)$ tub bo'lsa, u holda $P(P(p))$ son ham tub bo'ladi. Demak, $P(P(x))$ ko'phadning b_0 ozod hadi 1 ga teng bo'ladi. Ammo,

$$P(0)=a_0=1, P(P(0))= b_0 = a_n+a_{n-1}+...+a_1+1>1.$$

Ziddiyat. ▲

2.29-masala. (*Arifmetikaning asosiy teoremasi*). 1 dan katta har qanday butun son tub sonlar ko'paytmasiga yoyiladi va agar ko'paytuvchilarning yozilish tartibi nazarga olinmasa, bu yoyilma yagonadir.

Yechilishi. $a \geq 2$ bo'lsin. Isbotni a bo'yicha matematik induksiya usuli yordamida olib boramiz. $a = 2$ tub bo'lgani uchun induksiya bazasi o'rinli. Teorema barcha a dan kichik sonlar uchun o'rinli bo'lsin. Agar $a > 2$ bo'lsa , u holda shunday p_1 tub son mavjudki, u a ni bo'luvchisi bo'ladi, ya'ni $a= p_1 a_1$, bu yerda $1 \leq a_1 < a$.

Agar $a_1= 1$ bo'lsa, u holda $a= p_1$ – tub son. Agar $a_1>1$ bo'lsa, u holda induksiya faraziga ko'ra u tub sonlar ko'paytmasiga yoyiladi. Bundan $a= p_1 a_1$ sonini tub sonlar ko'paytmasiga yoyilishi kelib chiqadi.

Yagonalik isbotlash maqsadida a sonini murakkab deb olib,

$$a = p_1 p_2 ... p_n , a=q_1 q_2 ... q_k$$

ikkita turli yoyilma mavjudligini faraz qilamiz. Bu yerdan

$$p_1p_2 \ldots p_n = q_1\, q_2 \ldots q_k$$

kelib chiqadi. Demak, p_1 soni $q_1\, q_2 \ldots q_k$ ko'paytmani bo'luvchisi.

Ravshanki , q_1 , q_2 ,…,q_k sonlardan birortasi (masalan q_1) p_1 soniga bo'linadi. Bundan $q_1 = p_1$ kelib chiqadi, ya'ni $a_1 = p_2 \ldots p_n = q_2 \ldots q_k$. Lekin $a_1 < a$, demak, induksiya faraziga ko'ra $n=k$ va $p_2 = q_2$, …, $p_n = q_n$. ▲

Izoh. 1) 1 dan katta har qanday a butun son qo'yidagi *kanonik yoyilma* deb ataladigan $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ ko'rinishga ega, bunda $1 \le \alpha_k$, $k=1,2,\ldots,n$. Agar ko'paytuvchilarning yozilish tartibi nazarga olinmasa, bu kanonik yoyilma yagonadir.

2) a natural sonining kanonik yoyilmasi $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$ bo'lsin. U holda uning har qanday bo'luvchisi $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \ldots p_n^{\beta_n}$ ko'rinishga ega, bunda $0 \le \beta_k \le \alpha_k$, $k=1,2,\ldots,n$.

2.30-masala. 1001001001 sonning 10000 dan katta bo'lmagan tub bo'luvchilari–dan eng kattasini toping.

Yechilishi.

$$1001001001 = 1001\cdot 10^6 + 1001 = 1001\cdot(10^6+1) = 7\cdot 11\cdot 13\cdot(10^6+1) =$$
$$= 7\cdot 11\cdot 13\cdot(10^2+1)\cdot(10^4-10^2+1) = 7\cdot 11\cdot 13\cdot 101\cdot 9901 .$$

Javob. 9901 ▲

2.31-masala. $27195^8 - 10887^8 + 10152^8$ soni 26460 ga bo'linishini isbotlang.

Yechilishi. $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ kanonik yoyilmani hosil qilamiz.

$$A = 27195^8 - 10887^8 + 10152^8$$

sonini

$$27195^8 - (10887^8 - 10152^8)$$

ko'rinishda yozamiz. Bu son $5 \cdot 7^2$ ga bo'linadi. Haqiqatdan ham $27195 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 37$, $10887^8 - 10152^8$ ayirma esa $10887 - 10152 = 735 = 3 \cdot 5 \cdot 7^2$ ga bo'linadi.

Boshqa tarafdan, $A = (27195^8 - 10887^8) + 10152^8$ ko'rinishdan A soni $2^2 \cdot 3^3$ ga bo'linishi kelib chiqadi, chunki $27195^8 - 10887^8$ son $27195 - 10887 = 16308 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot$

151 ga bo’linadi, 10152 son esa $10152 = 2^3 \cdot 3^3 \cdot 47$ kanonik yoyilmaga ega. Shunday qilib, natijada A soni $5 \cdot 7^2$ ga va $2^2 \cdot 3^3$ soniga bo’linishini hosil qildik. Demak, u $26460 = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7^2$ soniga ham bo’linadi. ▲

2.32-masala. Shunday 50 ta natural sonlar topilsinki, ulardan hech biri boshqasiga bo’linmaydi, ammo ixtiyoriy ikkitasining ko’paytmasi qolgan 48 ta sonlardan barchasiga bo’linadi.

Yechilishi. $p_1, ..., p_{50}$ — turli tub sonlar bo’lsin.

$$A_1 = p_1^2 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{50},\ A_2 = p_1 \cdot p_2^2 \cdot p_3 \cdot ... \cdot p_{50}, ...,\ A_{50} = p_1 \cdot ... \cdot p_{49} \cdot p^2_{50}$$

sonlar masala shartini qanoatlantirishini ko’rsatamiz.

Haqiqatdan ham, agar $i \neq j$ bo’lsa, $A_i/A_j = p_i/p_j$ son butun bo’lmaydi. Bundan tashqari,

$$A_iA_j = (p_1 \cdot ... \cdot p_{50})^2 p_i \cdot p_j$$

son $A_1, ..., A_{50}$ sonlarning barchasiga bo’linadi. ▲

2.33-masala. Butun bo’lmagan, ammo rasional bo’lgan 2008 ta son topilsinki, ulardan ixtiyoriy ikkitasining ko’paytmasi butun son bo’ladi.

Yechilishi. Quyidagi sonlarni qaraymiz:

$$x_1 = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{2008}}{p_1^2}, \quad x_2 = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{2008}}{p_2^2}, \ . \ . \ . \ ,$$

$$x_k = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{2008}}{p_k^2}, \ . \ . \ . \ , \ x_{1998} = \frac{p_1 \cdot p_2 \cdot ... \cdot p_{2008}}{p_{1998}^2},$$

bu yerda $p_1, p_2, ..., p_{2008}$ — turli tub sonlar. Bu sonlar butun bo’lmasdan, masalaning shartini qanoatlantiradi . $x_ix_j = \dfrac{p_1^2 \cdot p_2^2 \cdot ... \cdot p^2_{2008}}{p_i^2 p_j^2}$ - butun son.

2.34-masala. Biror natural son "yaxshi" deyiladi, agar uning kanonik yoyilmasida ixtiyoriy tub ko'paytuvchining darajasi 2 dan katta bo'lsa. Ketma–ket joylashgan va har biri yaxshi bo'lgan natural sonlar juftliklarning soni cheksiz bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. Masalaning shartini qanoatlantiradigan juftliklar mavjud (masalan, (8,9), (288,289)). Faraz qilamiz m, $m+1$ sonlar yaxshi bo'lsin. Endi $4m(m+1)$, $4m(m+1)+1$ sonlarning yaxshiligini ko'rsatamiz. Haqiqatdan ham, $4m(m+1)=2^2m(m+1)$ son yaxshi bo'ladi, chunki m va m+1 sonlar yaxshi. Ravshanki $4m(m+1)+1=4m^2+4m+1=(2m+1)^2$ son ham yaxshi bo'ladi. (8,9) juftlikdan boshlab

$$(m,m+1)\rightarrow(4m(m+1),4m(m+1)+1)$$

algoritm yordamida masalaning shartini qanoatlantiradigan istagancha ko'p bo'lgan yangi juftliklarni hosil qilamiz. ▲

3-§. Eng katta umumiy bo'luvchi va eng kichik umumiy karrali. Evklid algoritmi.

3.1-masala. (*Qoldiqli bo'lish xaqida teorema*). a va $b(b\neq 0)$ butun sonlar bo'lsa, u holda $a=bq+r$ tenglikni qanoatlantiruvchi yagona q va r ($0\leq r<|b|$) butun sonlar mavjud.

Yechilishi.

$[x]$ orqali $x\in R$ sonining *butun qismini,* ya'ni x dan katta bo'lmagan eng katta butun sonini belgilaymiz.

$\{x\}=x-[x]$ tenglik bilan $x\in R$ sonining *kasr qismi* aniqlanadi.

Butun qism va kasr qism ta'riflaridan bevosita

$$\frac{a}{|b|}=\left[\frac{a}{|b|}\right]+\left\{\frac{a}{|b|}\right\}$$

tenglik kelib chiqadi. Demak,

$$a=\left[\frac{a}{|b|}\right]|b|+\left\{\frac{a}{|b|}\right\}|b|=bq+r,$$

bu yerda

$$q=\left[\frac{a}{|b|}\right]\operatorname{sgn} b,\ r=a-bq=\left\{\frac{a}{|b|}\right\}|b|.$$

Bundan $a=bq+r$ va $0\le r<|b|$.

Agar $a=bq_1+r_1$ tenglik bajarilsa ($0\le r_1<|b|$), u holda

$$b(q-q_1)=r_1-r$$

bo'ladi. $0\le r,\ r_1<|b|$ tengsizliklardan

$$|b|\,|q-q_1|=|r_1-r|<|b|$$

tengsizlik kelib chiqadi, bundan $|q-q_1|<1$. q, q_1 sonlar butun bo'lgani uchun $q=q_1$, $r_1=r$ ga ega bo'lamiz. ▲

Izoh. Yuqoridagi q son *to'liqsiz bo'linma,* r son esa a ni *b ga bo'linganda hosil bo'lgan qoldiq* deb yuritiladi.

Natija. a sonining biror bo'luvchisiga mos bo'lgan bo'linma yagonadir.

3.2-masala. $p>3$ tub son 6 ga bo'linganda hosil bo'lgan qoldiq 1 yoki 5 ga teng bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. p > 3 son 6 ga bo'linganda 2 va 4 qoldiqlar hosil bo'la olmaydi, aks holda p son juft bo'lar edi. p > 3 son 6 ga bo'linganda 3 qoldiq ham hosil bo'la olmaydi, aks holda p son 3 ga bo'linar edi. Demak , $p>3$ tub son 6 ga bo'linganda hosil bo'lgan qoldiq yoki 1 ga yoki 5 ga teng bo'lishi mumkin. ▲

Natija. $p>3$ tub son $6n\pm1$ ko'rinishga ega.

3.3-masala. $p>3$ tub sonning kvadrati 12 ga bo'linganda hosil bo'lgan qoldiq 1 ga teng bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. Oldingi masalaning natijasiga ko'ra $p=6n\pm1$ ko'rinishga , uning kvadrati esa $36n^2\pm12n+1$ ko'rinishga ega. ▲

a va *b* sonlarning ikkalasini ham bo'ladigan son shu sonlarning *umumiy bo'luvchisi* deyiladi. $D(a, b)$ orqali *a* va *b* sonlarning umumiy bo'luvchilari to'plamini belgilaymiz. Ravshanki, barcha *a* va *b* uchun $D(a, b)$ to'plam yuqoridan chegaralangan. Shuning uchun *a* va *b* sonlarining umumiy bo'luvchilari ichida eng kattasi mavjud bo'lib, shu sonlarning *eng katta umumiy bo'luvchisi* deyiladi va (a, b) orqali belgilanadi.

Hossalar.

a) p tub son bo'lsa, ixtiyoriy natural m son uchun $(p,m)=p$ yoki $(p,m)=1$ bo'ladi;

b) $d=(m,n), \quad m=dm', \quad n=dn'$ bo'lsa , u holda $(m',n')=1$ bo'ladi;

c) $d=(m,n), \quad m=d'm', \quad n=d'n'$ va $(m',n')=1$ bo'lsa , u holda $d=d'$ bo'ladi;

d) agar $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ va $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$ bo'lsa (bu yerda $p_1, p_2...p_k$ – tub sonlar, $\alpha_i, \beta_i \geq 0$), u holda

$$(m,n)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}...p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}$$

tenglik o'rinli.

e) *a* va *b* sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi shu sonlarning barcha umumiy bo'luvchilariga bo'linadi.

3.4-masala. Agar *a* soni *b* sonidan kichik bo'lmasdan, $a = bq + r$ $(0 \leq r< b)$ bo'lsa, u holda $(a, b)= (b, r)$ bo'ladi.

Yechilishi. $D(a, b)$ orqali *a* va *b* sonlarning umumiy bo'luvchilari to'plamini belgilaymiz. $a = bq + r$ $(0 \leq r< b)$ va $s \in D(a, b)$ bo'lsin. Demak, $r= a - bq$ soni *s* soniga bo'linadi, ya'ni $s \in D(b, r)$. Aksincha, $s \in D(b, r)$ bo'lsa, u holda $a = bq + r$ soni *s* ga bo'linadi, ya'ni $s \in D(a, b)$. Demak, agar *a* soni *b* sonidan katta bo'lmasdan, $a = bq + r$ $(0 \leq r< b)$ bo'lsa, u holda $D(a, b)$, $D(b, r)$ to'plamlar ustma–ust tushadi. Bundan ularning eng katta elementlari o'zaro teng bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni $(a, b)= (b, r)$. ▲

Izoh. Barcha a va b nol'mas sonlar uchun $a,b(a> b >0)$ sonlar uchun qoldiqli bo'lish haqida teoremaga ko'ra:

$$a = bq_1 + r_1.$$

Agar $r_1 = 0$ bo'lsa, u holda $(a, b) = b$.

Agar $r_1 \neq 0$ bo'lsa, u holda $b = r_1 q_2 + r_2$.

Agar $r_2 = 0$ bo'lsa, u xolda jarayonni to'xtatamiz, aks xolda (ya'ni $r_2 \neq 0$) davom ettiramiz: $r_1 = r_2 q_3 + r_3$.

$$b > r_1 > r_2 > r_3 > \ldots > 0$$

tengsizliklardan jarayon qoldiq nol'ga aylanganda tugashi kelib chiqadi.

Demak, qo'yidagi tengliklarga ega bo'lamiz :

$$\begin{aligned} a &= bq_1 + r_1 , \\ b &= r_1 q_2 + r_2 , \\ r_1 &= r_2 q_3 + r_3 , \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ r_{n-2} &= r_{n-1} q_{n-1} + r_n , \\ r_{n-1} &= r_n q_n . \end{aligned}$$

Bunda $(a, b) = (b, r_1) = (r_1, r_2) = \ldots = (r_{n-1}, r_n) = r_n$.

Shunday qilib, (a, b) ni topish uchun qoldiqli bo'lish jarayoni 0 ga teng qoldiq hosil bo'lguncha davom ettiriladi, 0 dan farqli eng kichik qoldiq a, b sonlarining eng katta bo'luvchisi bilan ustma–ust tushadi.

Mazkur jarayon *Evklid algoritmi* deyiladi.

Izoh. Agar a soni b sonidan kichik bo'lmasa, u holda

$$(a, b) = (b, a-b)$$

bo'ladi. ▲

3.5-masala. $(2n + 13, n + 7)$ ni toping.

Yechilishi. $(2n + 13, n + 7) = (n + 7, n + 6) = (n + 6, 1) = 1$. ▲

3.6-masala. (160, 72) – ?

Yechilishi. Evklid algoritmini qo'llaymiz:

$160 = 72\cdot 2 + 16$, $72 = 16\cdot 4 + 8$, $16 = 8\cdot 2$. Demak, $(160, 72) = 8$. ▲

3.7-masala. a va b sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi a va b sonlar orqali *chiziqli ifodalanishini* isbotlang, ya'ni shunday x va u sonlari mavjudligini ko'rsatingki, ular uchun

$$(a, b) = ax + bu$$

tenglik o'rinli bo'lsin.

Yechilishi. $(a, b) = d$ bo'lsin. Evklid algoritmini qo'llaymiz:

$a = bq_1 + r_1$, $b = r_1 q_2 + r_2$, $r_1 = r_2 q_3 + r_3$, . . . , $r_{n-2} = r_{n-1} q_{n-1} + r_n$, $r_{n-1} = r_n q_n$

Bunda r_k qoldiqlar uchun $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$ tengliklar bajarilishini ko'rsatamiz , bu yerda α_k , β_k – butun sonlar.

r_1 uchun ushbu mulohaza o'rinliligi $r_1 = a - bq_1$ dan kelib chiqadi. Faraz qilamiz, barcha $r_1, r_2, \ldots, r_{n-1}$ qoldiqlar $r_k = \alpha_k a + \beta_k b$ tenglikni qanoatlantirsin. U holda

$$r_n = \alpha_{n-2} a + \beta_{n-2} b - (\alpha_{n-1} a + \beta_{n-1} b)\, q_{n-1} = (\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})\, a + (\beta_{n-2} - \beta_{n-1} q_{n-1}) b.$$

x va u sonlari mos ravishda $(\alpha_{n-2} - \alpha_{n-1})$ va $(\beta_{n-2} - \beta_{n-1} q_{n-1})$ larga teng. ▲

3.8-masala. (160, 72) ni 160 va 72 sonlar orqali chiziqli ifodasini toping.

Yechilishi. $160 = 72\cdot 2 + 16$, $72 = 16\cdot 4 + 8$, $16 = 8\cdot 2$.

Ikkinchi tenglikdan $8 = 72 - 16\cdot 4$, birinchi tenglikdan esa $16 = 160 - 72\cdot 2$ kelib chiqadi. Shu tengliklarga ko'ra:

$8 = 72 - 16 \cdot 4 = 72 - (160 - 72 \cdot 2) \cdot 4 = (-4) \cdot 160 + 9 \cdot 72.$

Demak, $(160, 72) = 8 = (-4) \cdot 160 + 9 \cdot 72$. ▲

Ravshanki , o'zaro tub a,b sonlar uchun $(a, b) = 1$ tenglik bajariladi. Ayrim adabiyotlarda bu tenglik o'zaro tub sonlar ta'rifi sifatida qabul qilingan.

Qo’yidagi hossaga egamiz:

Hossa. a,b sonlari o’zaro tub bo’lishi uchun $am+bn=1$ zarur va yetarli, bu yerda m va n butun sonlar.

3.9-masala. Agar $(a, b)=d$ bo’lsa, u holda $\left(\frac{a}{d},\frac{b}{d}\right)=1$.

Yechilishi. $d=am+bn$ dan $\frac{a}{d}m+\frac{b}{d}n=1$ kelib chiqadi. ▲

3.10-masala. $(a, b) = 1$ va $a \mid bc$ bo’lsa, $a \mid c$ ni isbotlang.

Yechilishi. $(a, b) = 1$ bo’lsa, $am+bn=1$ bo’ladi, bu yerda m va n– butun sonlar.

Bundan $asm+bsn=s$ tenglik kelib chiqadi. Masalaning shartiga ko’ra bu tenglikning chap tarafi a soniga bo’linadi. Demak, bu tenglikning o’ng tarafi ham a soniga bo’linadi, ya’ni $a \mid c$. ▲

3.11-masala. $27x + 4$ va $18x + 3$ sonlar barcha natural x lar uchun o’zaro tub bo’lishini ko’rsating.

Yechilishi. $3(18x + 3) - 2(27x + 4) = 1$ bo’lgani uchun ular o’zaro tub bo’ladi. ▲

3.12-masala. a va b natural sonlar uchun ma’lumki, a^2+b^2 son ab ga bo’linadi. $a=b$ tenglikni isbotlang.

Yechilishi. $d = (a, b)$, $a = du$, $b = dv$.

d^2 ga qisqartirib, $u^2 + v^2$ soni uv ga bo’linishini hosil qilamiz. Ammo $(u^2 + v^2, uv) = 1$, chunki u va v o’zaro tub. Demak, $uv = 1$. Bundan $u = v = 1$, $a = b = d$ kelib chiqadi. ▲

3.13-masala. $m \geqslant n$ bo’lsin. Quyidagilarni isbotlang:

$$(a^m - 1, a^n - 1) = a^{(m,\,n)} - 1 \ (a > 1);$$

Yechilishi. Ravshanki, $(a^n, a^n - 1)=1$. Demak,

$(a^m - 1, a^n - 1) = (a^m - a^n, a^n - 1) = (a^n(a^{m-n} - 1), a^n - 1) = (a^{m-n} - 1, a^n - 1)$.

Shuning uchun $a^m - 1$, $a^n - 1$ sonlar uchun Evklid algoritmi m, n darajalar uchun Evklid algoritmiga o'tadi hamda (m, n) va 0 da tugallanadi. ▲

3.14-masala. Natural sonlardan tashkil topgan a_i ketma–ketlik uchun $i \neq j$ larda $(a_i, a_j) = (i, j)$ tenglik bajariladi. Barcha i lar uchun $a_i = i$ bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. Har bir a_i uchun $(a_i, a_{2i}) = (i, 2i) = i$ ga bo'linganligi bois $a_i \geq i$ bo'ladi . Faraz qilamiz biror i uchun $a_i > i$ tengsizlik bajarilsin. U holda

$$(a_{a_i}, a_i) = (a_i, i) = i .$$

Boshqa tomondan a_{a_i} son a_i ga bo'linganligi bois $(a_{a_i}, a_i) = a_i > i$. Ziddiyat. ▲

3.15-masala. (Rossiya, 2001). Ma'lumki, o'zaro teng bo'lmagan natural a, b sonlar uchun $ab \mid a^2 + ab + b^2$ munosabat o'rinli. $|a - b| > \sqrt[3]{ab}$ tengsizlikni isbotlang.

Yechilishi. $g = (a, b)$ deb olsak, $a = xg$, $b = yg$ tengliklarga ega bo'lamiz, bu yerda x, y – o'zaro tub bo'lgan sonlar. Bundan

$$\frac{ab(a+b)}{a^2 + ab + b^2} = \frac{xy(x+y)g}{x^2 + xy + y^2} \in Z$$

munosabatlarga ega bo'lamiz.

$(x^2 + xy + y^2, x) = (y^2, x) = 1,\ (x^2 + xy + y^2, y) = (x^2, y) = 1,\ (x + y, y) = 1$

tengliklardan

$$(x^2 + xy + y^2, x + y) = (y^2, x + y) = 1$$

tenglikni hosil qilamiz.

Shuning uchun eng katta umumiy bo'luvchining hossalaridan

$x^2 + xy + y^2 \mid g$ munosabatga ega bo'lamiz. Bundan $g \geq x^2 + xy + y^2$. Demak,

$$|a-b|^3=|g(x-y)|^3\; g=g^2\,|x-y|^3\; g\geq g^2\cdot 1\cdot(x^2+xy+y^2)>g^2xy=ab\,. $$ ▲

3.16-masala (1–XMO). Barcha natural n sonlar uchun $\frac{21n+4}{14n+3}$ kasr qisqarmas kasr bo'lishini ko'rsating.

Yechilishi. $3(14n+3)-2(21n+4)=1$ bo'lgani uchun $21n+4$ va $14n+3$ sonlar o'zaro tub, ya'ni $\frac{21n+4}{14n+3}$ kasr qisqarmas bo'ladi.▲

3.17-masala. *a*, *b*, *c* butun sonlar berilgan bo'lsin. Shunday o'zaro tub *k*, *l* sonlar topiladiki *ak* + *bl* son *c* ga bo'linadi. Isbotlang.

Yechilishi. | *a*| + | *b*| bo'yicha induksiyani qo'llab isbotlaymiz. *a* = 0 yoki *b* = 0 bo'lsa natija osonligicha kelib chiqadi. *k* va *l* sonlarning ishorasini o'zgartib, *a* > 0 va *b* > 0 deb olishimiz mumkin. Bu holda | *a*| + | *b*| > | *a* - *b*| + | *b*|. Induksiya faraziga ko'ra shunday o'zaro tub *k′* va *l′* sonlar topiladiki, ular uchun (*a* - *b*)*k′* + *bl′* son *c* soniga bo'linadi. Bundan *ak′* + *b*(*l′* - *k′*) son *c* soniga bo'linishi kelib chiqadi.

k′ va *l′* o'zaro tub bo'lgani uchun *k* = *k′* va *l* = *l′* - *k′* o'zaro tubligi kelib chiqadi. ▲

Ta'rif. *a* va *b* sonlarining musbat umumiy karralilari ichida eng kichigi shu sonlarning *eng kichik umumiy karralisi* deyiladi va u [*a, b*] orqali belgilanadi.

Hossalar.

a) $m=[a,b],\quad m=aa'=bb'$ bo'lsa , u holda $(a',b')=1$ bo'ladi;

b) Agar m' son a,b sonlarning umumiy bo'luvchisi bo'lib, $m'=aa'=bb',(a',b')=1$ tengliklar bajarilsa, u holda $m'=m$ bo'ladi;

c) Agar $a|s$ va $b|s$ bo'lsa, u holda $[a,b]|s$ bo'ladi;

d) agar $m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$ va $n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$ bo'lsa (bu yerda $p_1,p_2...p_k$ – tub sonlar, $\alpha_i,\beta_i\geq 0$), u holda

$$[m,n]=p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}...p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$$

tenglik o'rinli.

3.18-masala. Barcha *m* va *n* butun sonlar uchun

$$[m,n]\cdot(m,n)=|mn|$$

tenglikni isbotlang.

Yechilishi. $[a,b]=[\,|a|,|b|\,]$ bo'lgani uchun faqat natural *m* va *n* sonlar uchun isbotlaymiz.

$$m=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}\ \text{va}\ n=p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}...p_k^{\beta_k}$$

bo'lsin (bu yerda $p_1,p_2...p_k$ – tub sonlar, $\alpha_i,\beta_i\geq 0$), u holda

$$(m,n)=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}...p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}\quad \text{va}\quad [m,n]=p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}...p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}$$

tengliklar o'rinli. Bundan

$$(m,n)\,[m,n]=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)}p_1^{\max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)}p_2^{\max(\alpha_2,\beta_2)}...p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)}p_k^{\max(\alpha_k,\beta_k)}=$$

$$=p_1^{\min(\alpha_1,\beta_1)+\max(\alpha_1,\beta_1)}p_2^{\min(\alpha_2,\beta_2)+\max(\alpha_2,\beta_2)}...p_k^{\min(\alpha_k,\beta_k)+\max(\alpha_k,\beta_k)}=p_1^{\alpha_1+\beta_1}p_2^{\alpha_2+\beta_2}...p_k^{\alpha_k+\beta_k}=mn$$

kelib chiqadi. ▲

3.19-masala. Berilgan m va n natural sonlar uchun $(m,\ n)=d$, $[m,\ n]=v$ sonlar $3m+n=3v+d$ tenglikni qanoatlantirsa, u holda n soni m ning bo'luvchisi ekanligini isbotlang.

Yechilishi. Masala shartiga ko'ra, shunday m_1 va n_1 natural sonlari mavjudki, ular $m=dm_1$, $n=dn_1$, $(m_1,\ n_1)=1$ munosabatlarni qanoatlantiradi. U holda $v=m_1n_1d$ bo'ladi va berilgan tenglik $3m_1d+n_1d=3m_1n_1d+d$ ko'rinishni oladi. Bundan $3m_1+n_1=3m_1n_1+1$ va $(3m_1-1)(n_1-1)=0$ ni hosil qilamiz. Oxirgi tenglikdan $3m_1-1\neq 0$ bo'lgani uchun $n_1=1$ ekanligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $n=dn_1=d$ va $m=dm_1$ ya'ni $n|m$ ekan. ▲

3.20-masala. *a,b,c* – natural sonlar berilgan bo'lsin.

a) Agar $[a,a+5]=[b,b+5]$ bo’lsa, $a=b$ ni isbotlang.

b) $[a,b]=[a+s,b+s]$ tenglik o’rinli bo’lishi mumkinmi?

Yechilishi. b) punkt qaralishi kifoya. a) punkt uning hususiy holi sifatida qaralishi mumkin.

Faraz qilamiz, $[a, b] = [a + s, b + s]$ bo’lsin.

$$(a, b) = (a + s, b + s)$$

tenglikni isbotlaymiz.

$d = (a + c, b + c)$ belgilash kiritamiz. U holda $a – b$ va $[a, b]$ sonlar d ga bo’linadi.

d sonining kanonik yoyilmasida p^k uchrasa, u holda $[a, b]$ son p^k ga bo’linadi. Bundan a, b sonlardan kamida bittasi p^k ga bo’linishi kelib chiqadi. $a – b$ ayirma p^k ga karrali bo’lgani sababli, a, b sonlardan ikkalasi ham p^k ga bo’linishi kelib chiqadi.Shuning uchun (a, b) son $(a + c, b + c)$ ga karrali. Xuddi shunday $(a + c, b + c)$ son (a, b) ga bo’linishi isbotlanadi.

Demak,

$$(a, b) = (a + c, b + c).$$

$[m, n] \cdot (m, n) = mn$ formulani qo’llab

$$ab = (a + c)(b + c)$$

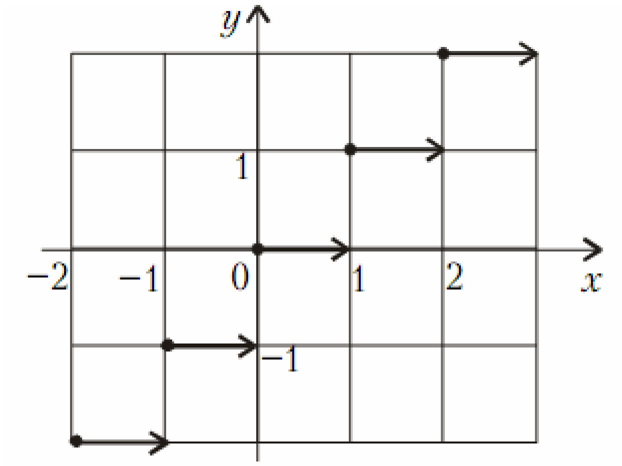
ziddiy tenglikni hosil qilamiz. ▲

4-§. Sonlar nazariyasida muhim funksiyalar

Ta'rif. $x \in R$ sonning $[x]$ *butun qismi* deb, x dan katta bo'lmagan eng katta butun songa aytiladi.

Masalan, [-1,5]=-2, [-1]= -1, [0]=0, [1,5]=1, [π]=3.

Umuman olganda, ta'rifga binoan, $[x]=k$ tenglik kuyidagini bildiradi: k son $k \le x < k+1$ shartni qanoatlantiradigan butun sondir.



1-rasm

$y=[x]$ funksiyaning grafigi zinasimon ko'rinishga ega (1-rasm).

$\{x\} = x - [x]$ tenglik bilan $x \in R$ soningning *kasr qismi* aniqlanadi.

Masalan, $\{-0,3\} = 0,7,\ \left\{-\frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2},\ \left\{\sqrt{2}\right\} = \sqrt{2} - 1,\ \{-2\sqrt{5}\} = 2 - \sqrt{2},\ \{1\} = 0.$

Xossalar:

$1)\,[x] \le x;\quad 2)\,[x+a] = [x] + a, 3)\ [x+y] \ge [x] + [y]$

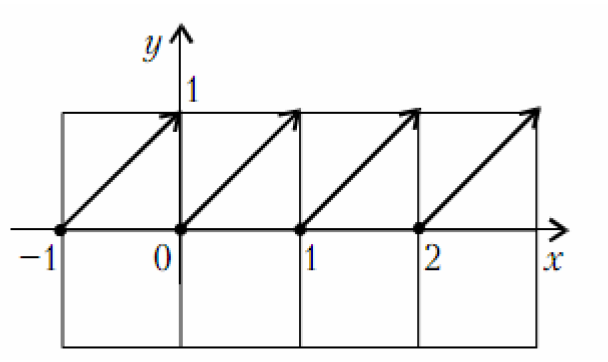
bu yerda a ixtiyoriy butun , x, y – ixtiyoriy sonlar.

3) $\{x\}=x$ tenglik $0 \le x < 1$ bo'lgandagina bajariladi;

4) $\{x\}=\{y\}$ tenglik $x-y=n$ (bu yerda n-butun son) bo'lgandagina bajariladi;

5) Ixtiyoriy x uchun $\{x+1\}=\{x\}$ bo'ladi.

Shunday qilib, $y=\{x\}$ funksiya eng kichik davri 1 ga teng bo'lgan davriy funksiyadir. Uning grafigi 2-rasmda keltirilgan.



2-rasm

4.1-masala . (II Soros olimpiadasi). $x^2-10[x]+9=0$ tenglamani yeching.

Yechilishi. Faraz qilaylik, $[x]=k$ bulsin. $k\geq 0$ ekanligi tushunarli.

$x \geq k$ bo'lganligi uchun $x\geq 0$. Natijada $x^2-10[x]+9\leq 0$ tengsizlikni hosil qilamiz.

Bundan $1\leq x\leq 9$ kelib chiqadi, bundan $1\leq k\leq 9$. x^2+9 son 10 ga bo'linuvchi butun sondir. Tekshirishlar shuni ko'rsatadiki, $1;\ \sqrt{61};\ \sqrt{71};\ \ 9$ sonlar tenglamani qanoatlantiradi.

Javob. $1;\ \sqrt{61};\ \sqrt{71};\ \ 9$. ▲

4.2-masala . $\left[\frac{2x+1}{3}\right]=[x]$ tenglamani yeching.

Yechilishi. Faraz qilaylik, $[x]=k$. U xolda

$$\begin{cases} k\leq \dfrac{2x+1}{3}<k+1 \\ k\leq x<x+1 \end{cases}$$

Teng kuchli sistemani yozamiz:

$$\begin{cases} \dfrac{3k-1}{2}\leq x<\dfrac{3k+2}{2} \\ k\leq x<x+1 \end{cases} \qquad (*)$$

Bundan k quyidagi tengsizlikni qanoatlantirishi kelib chiqadi:

$$\frac{3k-1}{2}<k+1,\quad k<\frac{3k+2}{2}.$$

Ya’ni: – $2<k<3$.

Shunday qilib, k -1; 0; 1; 2 qiymatlarga ega bo’lishi mumkin. Ushbu kiymatlarni ketma-ket (*) sistemaga quyib va hosil bo’lgan tengsiziklarni yechib, quyidagi javobni topamiz.

Javob. $-1\le x<-\frac{1}{2};\ \ 0\le x<2;\quad \frac{5}{2}\le x<3.$ ▲

4.3-masala . $[x^2]=2[x]$ tenglamani yeching.

Yechilishi. Faraz qilaylik, $[x]=k$, $\{x\}=\alpha$. U xolda $k\ge0$, $\alpha\ge0$ va

$$\left[\left(k+\alpha\right)^2\right]=2[k+\alpha],$$

Shundan so’ng quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$[2k\alpha+\alpha^2]=2k-k^2$$

Bu tenglamaning chap tomoni manfiy emas, k- butun son.

Demak, $2k-k^2\ge 0$ va k soni faqat 0, 1 yoki 2 qiymatlarga ega bo’lishi mumkin.

$k=0$ bo’lganda $0\le\alpha<1$. Bundan $[\alpha^2]=0$ ni hosil qilamiz. Demak, $0\le x<1$ kelib chiqadi.

$k=1$ bo’lganda quyidagi tenglamani hosil qilamiz:

$$[2\alpha+\alpha^2]=1$$

Bu $1\le 2\alpha+\alpha^2<2,\quad 0\le\alpha<1$ sistemani beradi, bundan $\sqrt{2}-1\le\alpha<1,\quad \sqrt{2}\le x<2$ kelib chiqadi.

Nixoyat, $k=2$ bo’lganda $\left[4\alpha+\alpha^2\right]=0$ tenglamaga ega bo’lamiz, bu esa $0<4\alpha+\alpha^2<1,\ 0<\alpha<1$ sistemaga teng kuchlidir. Uning yechimi – $0\le\alpha<\sqrt{5}-2,\quad 2\le x<\sqrt{5}$ kelib chiqadi.

Hosil bulgan $0\le x<1$, $\sqrt{2}\le x<2$ va $2\le x<\sqrt{5}$ oraliqlarni birlashtirib javobni yozamiz.

Javob. $0 \le x < 1,\qquad \sqrt{2} \le x < \sqrt{5}$. ▲

4.4-masala . (V Soros olimpiadasi). $\begin{cases} x+[y]+\{z\}=3,9 \\ y+[z]+\{x\}=3,5 \\ z+[x]+\{y\}=2 \end{cases}$ sistemani yeching.

Yechilishi. Faraz qilaylik, $a=[x]$, $\alpha=\{x\}$, $b=[y]$, $\beta=\{y\}$, $c=[z]$, $\gamma=\{z\}$, bu yerda a,b,s – butun sonlar, $0 \le \alpha < 1$, $0 \le \beta < 1$, $0 \le \gamma < 1$. Ushbu belgilashlardan so'ng sistema quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\begin{cases} a+\alpha+b+\gamma=3,9 \\ b+\beta+c+\alpha=3,5 \\ c+\gamma+a+\beta=2 \end{cases}$$

Tenglamalarni qo'shib quyidagini hosil qilamiz:

$$2(a+b+c+\alpha+\beta+\gamma)=9,4,$$

ya'ni:

$$a+b+c+\alpha+\beta+\gamma=4,7$$

Hosil bo'lgan tenglamadan birinchi, ikkinchi va uchinchi tenglamalarni ketma-ket ayirib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\begin{cases} c+\beta=0,8 \\ a+\gamma=1,2 \\ b+\alpha=2,7 \end{cases}$$

bundan $s=0$, $\beta=0,8$, $a=1$, $\gamma=0,2$, $b=2$, $\alpha=0,7$ ekanligi kelib chiqadi.

Javob. $x=1,7$; $u=2,8$; $z=0,2$. ▲

4.5-masala . Quyidagi ketma-ketlikni ko'ramiz 1,2,2,3,3,3,4,4,4,4, ... (Ketma-ketlikda bittta bir, ikkita ikki, uchta uch, to'rtta to'rt, beshta besh va xokazo). Qaysi son

a) 2002– nchi; b) n – nchi o'rinda turadi?

Yechilishi. Faraz qilaylik, $x_n=k$ - n – nchi had. Berilgan ketma-ketlikda k soni birinchi paydo bo'lguncha qadar 1+2+3+…+ k -1=$\frac{k(k-1)}{2}$ son ketma-ketligi yoziladi. Oxirgi k son $\frac{k(k+1)}{2}$ -nchi o'rinda turadi. Shuning uchun

$$\frac{k(k-1)}{2} < n \le \frac{k(k+1)}{2} .$$

Bundan

$$k^2 - k < 2n \le k^2 + k$$

kelib chiqadi.

Ohirgi hosil bo'lgan tengsizlikning ung va chap kismiga $\frac{1}{4}$ ni qo'shib quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$k^2 - k + \frac{1}{4} < 2n < k^2 + k + \frac{1}{4},$$

$$(k - \frac{1}{2})^2 < 2n < (k + \frac{1}{2})^2 .$$

U holda

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n} < k + \frac{1}{2},$$

Bundan:

$$k < \sqrt{2n} + \frac{1}{2} < k + 1 .$$

Natijada,

$$x_n = \left[\sqrt{2n} + \frac{1}{2} \right]$$

Berilgan ketma-ketlikning n-hadini hisoblash formulasini hosil qildik. Xususan, x_{2002}=63. ▲

Eslatma. Berilgan x sondan kichik va n natural songa bo'linadigan $k = \left[\frac{x}{n} \right]$ ta natural son mavjudligini aniqlash qiyin emas.

Bu sodda eslatma sonlar nazariyasi uchun muxim bitta formulani hosil qilish imkoniyatini beradi. Dastlab quyidagi masalani yechamiz.

4.6-masala . 100! son ikkining qaysi darajasiga bo'linadi?

Yechilishi. 1,2,…,100 sonlar orasida quyidagilar mavjud:

$$\frac{100}{2} = 50 \quad \text{ta} \quad \text{juft son,}$$

$$\frac{100}{4} = 25 \text{ ta 4 ga karrali son.}$$

$$\left[\frac{100}{8}\right] = 12 \text{ ta 8 ga karrali son.}$$

$$\left[\frac{100}{16}\right] = 6 \text{ ta 16 ga karrali son.}$$

$$\left[\frac{100}{32}\right] = 3 \text{ ta 32 ga karrali son.}$$

$$\left[\frac{100}{64}\right] = 1 \text{ ta 64 ga karrali son.}$$

Bundan $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot 100$ ko'paytmada jami 50+25+12+6+3+1=97 ta 2 soni katnashadi, ya'ni: 100! son 2^{97} bulinadi va 2^{98} ga bulinmaydi.

Javob. 97 . ▲

Bu masala natijasini umumlashtiramiz.

4.7-masala (Lejandr formulasi). $n!$ son p tub sonning qaysi darajasiga bo'linadi?

Yechilishi. Xuddi yuqorigidek, ixtiyoriy n va tub p uchun p ga, p^2 ga, …., p^k ga karrali $\left[\frac{n}{p}\right]$ ta son mavjud. Agar $p^m \le n < p^{m+1}$, bulsa, u xolda $n!$ ni kanonik yoyilmasida p ning daraja ko'rsatkichi $\left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + ... + \left[\frac{n}{p^m}\right]$ ga teng.

Ba'zi xolda kuyidagi yozuv qo'llaniladi:

$$\left[\frac{n}{p}\right]+\left[\frac{n}{p^2}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^k}\right]+\ldots,$$

chunki yozilgan yig'indida biror joydan boshlab barcha qo'shiluvchilar nol'ga teng bo'ladi. ▲

4.8-masala . Agar $x>0$ va n natural son bo'lsa, u holda $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$ bo'lishini isbotlang.

Yechilishi. Ravshanki, $(\alpha;\beta)$ oraliqda $[\beta]-[\alpha]$ ta butun sonlar joylashgan. Haqiqatdan ham, agar m butun son $\alpha<m<\beta$ tengsizlikni qanoatlantirsa, u holda $[\alpha]+1\le m<[\beta]$.

Huddi shunday, $(\alpha;\beta)$ oraliqda $\left[\frac{\beta}{x}\right]-\left[\frac{\alpha}{x}\right]$ ta berilgan $x>0$ ga karrali sonlar joylashgan.

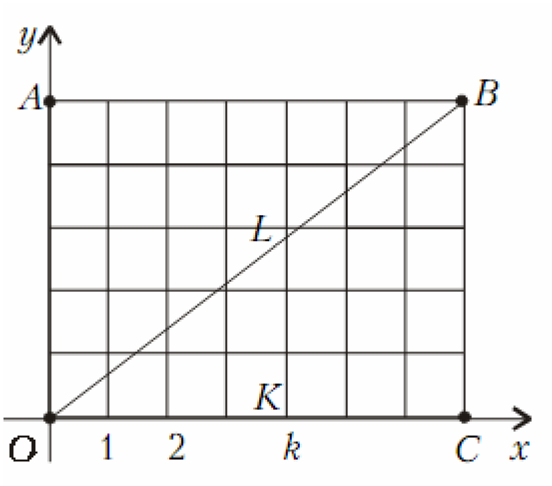
x dan kichik va n ga bo'linadigan natural sonlarni ko'ramiz. Bunday sonlar jami $\left[\frac{x}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]-\left[\frac{0}{n}\right]$ ta. Ammo $[x]$ dan katta bo'lmagan va n ga bo'linadigan sonlar ham $\left[\frac{x}{n}\right]$ ta. Tenglik isbotlandi. ▲

4.9-masala . p va q –uzaro butun tub sonlar uchun

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

ekanligini isbotlang.

Yechilishi. xOu tekislikda butun koordinatali $(x;u)$ nuktalar to'plamini ko'ramiz, bunda $1\le x\le q-1,\ 1\le y\le p-1$ shart bajarilsin.



3-rasm

Bu to’plam *OAVS* to’g’ri to’rtburchakning ichida yotib (3-rasm), jami $(p-1)(q-1)$ ta nuktalarga ega. Ushbu to’g’ri to’rtburchakning diagonalida *O* va *V* nuqtalardan boshqa butun koordinatalarga ega bo’lgan nuqtalar mavjud emas. Haqiqatdan ham , agar butun koordinatali (*t; p*) nuqta *OV* da yotsa (bu yerda 1<*m*<*q*), u holda $tg\angle BOC = \frac{n}{m} = \frac{p}{q}$, ya’ni: *qn=mp*. *q* va *p* o’zaro tub sonlar bo’lganligi sababli *n* son *p* ga, *m* son esa *q* ga karrali, ya’ni, *m≥q*, *n≥p*. Ziddiyat. Shuning uchun *OVS* uchburchakda qaralayotgan butun koordinatali nuqtalarning teng yarmi, ya’ni $\frac{(p-1)(q-1)}{2}$ yotadi,

Endi biz ushbu miqdorini boshqacha usul bilan hisoblaymiz.

x=*k* (*k* – o’zgaruvchi natural son) bo’lsa, u holda *KL* kesmada jami $\left[\frac{p}{q}k\right]$ ta butun koordinatali nuqta yotadi (3 rasm).

$1 \le x \le q-1,\ 1 \le y \le p-1$ bo’lgani uchun *k* sonni o’zgartirib, uchburchakda yotgan butun koordinatali nuqtalar umumiy sonini quyidagicha aniqlanadi:

$$\left[\frac{p}{q}\right] + \left[\frac{2p}{q}\right] + \ldots + \left[\frac{(q-1)p}{q}\right]$$

Demak,

$$\left[\frac{p}{q}\right]+\left[\frac{2p}{q}\right]+\ldots+\left[\frac{(q-1)p}{q}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

tenglik isbotlandi. ▲

Izoh. Xuddi shunday

$$\left[\frac{q}{p}\right]+\left[\frac{2q}{p}\right]+\ldots+\left[\frac{(p-1)q}{p}\right]=\frac{(p-1)(q-1)}{2}$$

formulani isbotlash mumkin.

4.10-masala (Xermit[4] formulasi). n - natural, x - haqiqiy sonlar uchun

$$[nx]=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]$$

tenglikni isbotlang.

Yechilishi. n sonini fiksirlab,

$$f(x)=[x]+\left[x+\frac{1}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]-[nx]$$

funksiyani qaraymiz.

U holda $f(x+\frac{1}{n})=\left[x+\frac{1}{n}\right]+\left[x+\frac{2}{n}\right]+\ldots+\left[x+\frac{n-1}{n}\right]+[x+1]-[nx+1]$.

Ixtiyoriy butun k uchun $[x+k]=[x]$ formulani qo'llab barcha haqiqiy x qiymatlarida

$$f(x+\frac{1}{n})=f(x)$$

tenglik bajarilishini hosil qilamiz.

Demak, $y=f(x)$ funksiya davriy funksiya bo'ladi va u $x\in\left[0,\frac{1}{n}\right)$ oraliqda aynan nol'ga teng bo'lishini tekshirish qiyin emas.

Bundan $y=f(x)$ funksiya barcha haqiqiy x qiymatlarida nol'ga teng bo'lishi kelib chiqadi. ▲

[4] Charli Xermit (1822-1901 y.y.)- fransiyalik matematik.

4.11-masala . $a)\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]$; $\left\{(2+\sqrt{3})^{2002}\right\}>\underbrace{0{,}9...9}_{1001}$ sonlar toq ekanligini isbotlang.

Yechilishi. $(2+\sqrt{3})^{2002}$ ifodada qavsni ochib $(2+\sqrt{3})^{2002}=A+B\sqrt{3}$ ni hosil qilamiz, bu yerda A va V – natural sonlar. Bundan

$$(2-\sqrt{3})^{2002}=A-B\sqrt{3}=\frac{1}{(2+\sqrt{3})^{2002}}.$$

Bu holda

$$(2+\sqrt{3})^{2002}+(2-\sqrt{3})^{2002}=2A$$

bo'ladi.

Bundan

$$(2+\sqrt{3})^{2002}=2A-1+1-(2-\sqrt{3})^{2002}$$

kelib chiqadi.

Natijada, $\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right]=2A-1$ - toq son, ya'ni

$$\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}=1-\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}$$

ekanligi kelib chiqadi.

Hosil bo'lgan tenglikning ung qismini baholaymiz:

$$\left(2-\sqrt{3}\right)^{2002}=\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}}=\frac{1}{\left(7+2\sqrt{3}\right)^{1001}}<\frac{1}{10^{1001}}\ .$$

Shuning uchun $\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^{2002}\right\}>\underbrace{0{,}9...9}_{1001}$. ▲

<u>Ta'rif</u>. $\vartheta : N\to R$ nol'mas funksiya *mul'tiplikativ* deyiladi, agar $a\ ,b$ o'zaro tub sonlar uchun $\vartheta(ab)=\vartheta(a)\vartheta(b)$ tenglik bajarilsa.

Misollar. a) $\vartheta(a)=1\ \forall\ a\in N$; $b)$ $\vartheta(a)=a\ \ \forall\ a\in N$, $b)$ $\vartheta(a)=a^{-1}\ \ \forall\ a\in N$ tengliklar bilan aniqlangan funksiyalar mul'tiplikativ bo'ladi.

4.12-masala. $\vartheta, \vartheta_1, \vartheta_2$ -mul'tiplikativ funksiyalar bo'lsin, u holda :

a) $\vartheta(1)=1$;

b) Mul'tiplikativ funksiyalar $\vartheta_1\, \vartheta_2$ ko'paytmasi mul'tiplikativ funksiya bo'ladi;

c) Agar $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ bo'lsa, u holda $\vartheta(a) = \vartheta(p_1^{\alpha_1})\, \vartheta(p_2^{\alpha_2}) \ldots \vartheta(p_n^{\alpha_n})$;

d) Agar $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ bo'lsa , u holda qo'yidagi *asosiy ayniyat* bajariladi.

$$\sum_{d|a} \vartheta(d) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \vartheta(p_i) + \vartheta(p_i^2) + ... + \vartheta(p_i^{\alpha_i}))$$

Yechilishi. a) ning isboti a va 1 soni o'zaro tub bo'lganidan kelib chiqadi.

b) a, b o'zaro tub sonlarni fiksirlaymiz. ϑ_1, ϑ_2 –mul'tiplikativ funksiyalar uchun qo'yidagi tengliklar bajariladi:

$$(\vartheta_1 \vartheta_2)(ab) = \vartheta_1(ab)\vartheta_2(ab) = \vartheta_1(a)\vartheta_1(b)\, \vartheta_2(a)\vartheta_2(b) = (\vartheta_1 \vartheta_2)(a)\, (\vartheta_1 \vartheta_2)(b)$$

Demak, ikkita mul'tiplikativ funksiya ko'paytmasi mul'tiplikativ funksiya bo'ladi. Induksiya usuli bilan ushbu mulohaza bir nechta ko'paytuvchilar uchun isbotlanishi ravshan.

c) ning rostligi $p_1^{\alpha_1}$, $p_2^{\alpha_2}, \ldots, p_n^{\alpha_n}$ sonlarining o'zaro tubligidan kelib chiqadi.

d) Agar a natural sonining kanonik yoyilmasi $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} ... p_n^{\alpha_n}$ bo'lsa, u holda a ning har qanday bo'luvchisi $d = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_n^{\beta_n}$ yoyilmaga ega bo'ladi, bunda

$0 \le \beta_k \le \alpha_k$, $k=1,2,\ldots,n$.

c) dan qo'yidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + \vartheta(p_i) + \vartheta(p_i^2) + ... + \vartheta(p_i^{\alpha_i})) =$$

$$= \sum_{0 \le \beta_k \le \alpha_k} \vartheta(p_1^{\beta_1})\vartheta(p_2^{\beta_2})...\vartheta(p_n^{\beta_n}) = \sum_{0 \le \beta_k \le \alpha_k} \vartheta(p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} ... p_n^{\beta_n}) = \sum_{d|a} \vartheta(d).$$

4.13-masala. $\theta(a)$ – ixtiyoriy mul'tiplikativ funksiya uchun

$$\chi(a) = \sum_{d|a} \theta(d),$$

funksiya ham mul'tiplikativ bo'ladi.

Yechilishi.

$(a,b)=1, a=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k}$, $b=p_{k+1}^{\beta_1}p_{k+2}^{\beta_2}...p_n^{\beta_n}$ bo'lsin. U holda

Asosiy ayniyatga ko'ra

$\chi(ab)=$

$$=\sum_{d|ab}\theta(d)=\prod_{i=1}^{n}(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+...+\theta(p_i^{\alpha_i}))=$$

$$=\prod_{i=1}^{k}(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+...+\theta(p_i^{\alpha_i}))\prod_{i=k+1}^{n}(1+\theta(p_i)+\theta(p_i^2)+...+\theta(p_i^{\alpha_i}))=$$

$$=\theta(a)\theta(b)$$

▲

<u>*Natija.*</u> Sonlar nazariyasida quyidagi mul'tiplikativ funksiyalar katta ahamiyatga ega: *a* natural sonining natural bo'luvchilar $\tau(a)$ soni va $\sigma(a)$ yig'indisi.

Ular qo'yidagicha aniqlanadi: $\tau(a)=\sum_{d|a} 1$, $\sigma(a)=\sum_{d|a} d$

($\sum_{d|a}$ belgi *a* ning barcha bo'luvchilar bo'yicha yig'indini bildiradi).

Asosiy ayniyat va geometrik progressiya hadlarining yig'indisini ifodalovchi formula bilan foydalanib *a* natural sonining natural bo'luvchilar $\tau(a)$ soni va $\sigma(a)$ yig'indisi uchun

$$\tau(a)=\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i) \text{ va } \sigma(a)=\prod_{i=1}^{n}(1+p_i+p_i^2+...+p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{n}\left(\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}\right)$$

formulalar o'rinliligiga amin bo'lamiz.

Haqiqatdan ham, $p_i^{\alpha_i}$ ning bo'luvchilari $1, p_i, ..., p_i^{\alpha_i}$ bo'lgani uchun

$$\tau(p_i^{\alpha_i})=\alpha_i+1,\ \sigma(p_i^{\alpha_i})=1+p_i+p_i^2+...+p_i^{\alpha_i}=\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$

bo'ladi. Funksiyalarni mul'tiplikativligidan

$$\tau(a)=\tau(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n})=\prod_{i=1}^{n}\tau(p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{n}(1+\alpha_i)$$

$$\sigma(a)=\sigma(p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_n^{\alpha_n})=\prod_{i=1}^{n}\sigma(p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{n}(1+p_i+p_i^2+...+p_i^{\alpha_i})=\prod_{i=1}^{n}\frac{p_i^{\alpha_i+1}-1}{p_i-1}$$

formulalar kelib chiqadi.

4.14-masala. p va q – turli tub sonlar bo'lsin. Quyidagi sonlar nechta natural bo'luvchiga ega?

a) pq;

b) p^2q;

c) p^2q^2;

d) p^mq^n?

Yechilishi. a) Ravshanki, pq sonning bo'luvchilari 1, p, q va pq sonlar bo'ladi. Demak, $\tau(pq)$=4.

b) p^2q sonning bo'luvchilari 1, p, p^2, q, qp, qp^2 sonlar bo'ladi. Demak, $\tau(p^2q)=6$

c) p^2q^2 sonning ikki qator bo'luvchilarini yozamiz:

$$1, p, p^2,$$
$$1, q, q^2.$$

Qolgan bo'luvchilar bu ikkita qatordagi aqalli bittadan olingan sonlarning ko'paytmalaridan hosil bo'ladi. Bunday sonlar jami 9 ta. Demak, $\tau(p^2q^2)=9$.

d) p^mq^n sonning ikki qator bo'luvchilarini yozamiz:

$1, p, p^2, ..., p^m,$

$1, q, q^2, ..., q^n.$

Qolgan bo'luvchilar bu ikkita qatordagi aqalli bittadan olingan sonlarning ko'paytmalaridan hosil bo'ladi. Bunday sonlar jami $(m+1)(n+1)$ ta. Demak,

$\tau(p^mq^n)=(m+1)(n+1)$.

Javob:

a) 4;

b) 6;

c) 9;

d) $(m + 1)(n + 1)$. ▲

4.15-masala. Shunday natural sonlar topilsinki, ular aynan oltita natural bo'luvchiga ega bo'lib, bu bo'luvchilarning yig'indisi 3500 ga teng.

Yechilishi. n natural son aynan oltita natural bo'luvchiga ega bo'lsa, u $n = p^5$ (bu yerda p – tub) yoki $n = p^2q$ (bu yerda p va q – turli tub sonlar) ko'rinishga ega. Birinchi holda

$$1 + p + p^2 + p^3 + p^4 + p^5 = 3500 \text{ yoki } p(1+p+p^2+p^3+p^4)=3500-1= 3499 .$$

3499 soni 2, 3, 5 va 7 ga bo'linmaydi, shuning uchun $p > 10$. Bunda $p+(1+p+p^2+p^3+p^4)>10^5>3499$ tengsizlik o'rinli.

Demak, bu hol o'rinli bo'lmaydi.

Ikkinchi holda $1+p+p^2+q+pq+p^2q = 3500$, ya'ni $(1+p+p^2)(1+q) = 5^3 \cdot 7 \cdot 4$. Birinchi ko'paytuvchi 2 ga va 5 ga bo'linmaydi. (Bu uchun qoldiqlarni tekshirish yetarli).

$1 + p + p^2 > 1$ bo'lgani uchun $1 + p + p^2 = 7$. Demak, $p = 2$ va $q = 499$. 2 va 499 sonlar tub bo'lgani uchun $n = 2^2 \cdot 499 = 1996$. ▲

4.16-masala . 30 ga bo'linadigan va aynan 30 ta turli bo'luvchiga ega bo'lgan natural sonlar topilsin.

Yechilishi. $n = p_1^{r_1} p_2^{r_2} ... p_k^{r_k}$ bo'lsin.

Bu son 30 ga bo'linganligi uchun kanonik yoyilmaga albatta $p_1 = 2, p_2 = 3$ va $p_3 = 5$ tub sonlar kiradi, demak $k \geq 3$.

Bundan $(r_1 + 1)(r_2 + 1)(r_3 + 1) \dots (r_k + 1) = 30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$ va $k \le 3$ kelib chiqadi. Demak, $k = 3$ va (r_1, r_2, r_3) uchlik 1, 2, 4 sonlarning o'rin almashtirishlar natijasida hosil bo'ladi. Bundan n uchun qo'yidagi qiymatlarni hosil qilamiz:

$2 \cdot 3^2 \cdot 5^4$, $2 \cdot 3^4 \cdot 5^2$, $2^2 \cdot 3 \cdot 5^4$, $2^2 \cdot 3^4 \cdot 5$, $2^4 \cdot 3 \cdot 5^2$, $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5$. ▲

4.17-masala . $\tau(1) + \tau(2) + \dots + \tau(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \dots + \left[\frac{n}{n}\right]$ ni isbotlang.

Yechilishi.

$\{1, 2, \dots, n\}$ to'plamda k natural soniga bo'linadigan sonlar $k, 2k, \dots, \left[\frac{n}{k}\right]k$ ko'rinishga ega bo'lib, ularning umumiy soni $\left[\frac{n}{k}\right]$ ga teng.

Demak,

1 ga karrali sonlar jami $\left[\frac{n}{1}\right]$ ta;

2 ga karrali sonlar jami $\left[\frac{n}{2}\right]$ ta;

....

n ga karrali sonlar jami $\left[\frac{n}{n}\right]$ ta bo'ladi.

Bularning yig'indisi $\tau(1) + \tau(2) + \tau(3) + \dots + \tau(n)$ ga teng. ▲

Yana bitta foydali munosabatni isbotlaymiz.

4.18-masala . $\sigma(1) + \sigma(2) + \dots + \sigma(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + 2\left[\frac{n}{2}\right] + \dots + n\left[\frac{n}{n}\right]$.

Yechilishi. $\{1,\ 2,\ ...,\ n\}$ to'plamda k natural soniga bo'linadigan sonlar $k, 2k, ..., \left[\frac{n}{k}\right]k$ ko'rinishga ega bo'lib, ularning umumiy soni $\left[\frac{n}{k}\right]$ ga teng. Shuning uchun aynan k ga teng bo'lgan bo'luvchilar yig'indisi $k\left[\frac{n}{k}\right]$ ga teng.

Demak, 1 ga teng bo'lgan bo'luvchilar yig'indisi $\left[\frac{n}{1}\right] = n$ ga , *2* ga teng bo'lgan bo'luvchilar yig'indisi $2\left[\frac{n}{2}\right]$ ga , ..., n ga teng bo'lgan bo'luvchilar yig'indisi $n\left[\frac{n}{n}\right]$ ga teng. Bularni hammasini qo'shib chiqsak, isbotlanilayotgan tenglikning chap kismini hosil qilamiz. ▲

4.19-masala. Istalgan n uchun $\sigma(6n) \le 12\sigma(n)$ tengsizlikni isbotlang.

b) n ning qanday qiymatlarida $\sigma(6n) = 12\sigma(n)$ tenglik bajariladi?

Yechilishi. a) n ning barcha bo'luvchilari $1 = d_1, d_2, ..., d_k = n$ bo'lsin. U holda $6n$ ning barcha bo'luvchilari $d_1, d_2, ..., d_k$, $2d_1, 2d_2, ..., 2d_k$, $3d_1, 3d_2, ..., 3d_k$, $6d_1, 6d_2, ..., 6d_k$ sonlar bo'ladi. Lekin ular orasida o'zaro tenglari bo'lishi mumkin. Agar n ning bo'luvchilari orasida 2 ham, 3 ham bo'lmasa, u holda ular orasida tenglari bo'lmaydi. Bundan, $\sigma(n) = d_1 + d_2 + ... + d_k$ bo'lgani uchun $\sigma(6n) \le \sigma(n) + 2\sigma(n) + 3\sigma(n) + 6\sigma(n) = 12\sigma(n)$.

b) $\sigma(6n) = 12\sigma(n)$ bo'lishi uchun n soni 2 ga ham, 3 ga ham bo'linmasligi kerak. ▲

4.20-masala. Ixtiyoriy $n \ge 2$ uchun

$$\tau(n) = \sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right]\right)$$

formula o'rinli.

Yechilishi.

$$\left[\frac{n}{k}\right] - \left[\frac{n-1}{k}\right] = \begin{cases} 1 & , k \mid n \\ 0, & k \nmid n \end{cases},$$

demak ,

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=\sum_{k|n}1=\tau(n)\,.\ \blacktriangle$$

Izoh. n tub bo'lganida $\tau(n)=2$ bo'lgani uchun, qo'yidagiga ega bo'lamiz.

n tub bo'lishi uchun

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=2$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

4.21-masala. Ixtiyoriy $n\geq 2$ uchun

$$\sigma(n)=\sum_{k=1}^{n}k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)$$

formula o'rinli.

Yechilishi.

$$\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]=\begin{cases}1 & ,k\,|\,n\\ 0, & k\nmid n\end{cases},$$

demak ,

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=\sum_{k|n}k=\sigma(n)\,.\ \blacktriangle$$

Izoh. n tub bo'lganida $\sigma(n)=n+1$ bo'lgani uchun, qo'yidagiga ega bo'lamiz.

n tub bo'lishi uchun

$$\sum_{k=1}^{n}k\left(\left[\frac{n}{k}\right]-\left[\frac{n-1}{k}\right]\right)=n+1$$

tenglik bajarilishi zarur va yetarli.

φ(x) orqali $\{1, 2, ..., x\}$ to'plam ichida joylashgan va x soni bilan o'zaro tub bo'lgan sonlar sonini belgilaymiz.

Adabiyotlarda *φ(x)* funksiya *Eyler*[5] *funksiyasi* deb yuritiladi.

[5] Eyler Leonard (1707-1783 y.y.) – shveytsariyalik matematik, mexanik, fizik, astronom. Kompleks ŏzgaruvchili funksiyalar nazariyasi va differentsial geometriya sohalarning asoschilaridan biri.

p – tub son bo'lsin. Yuqorida biz quyidagi tasdiqlarni isbotladik.

a) p dan kichik va u bilan o'zaro tub bo'lgan natural sonlar $p-1$ ta.

b) p^2 dan kichik va u bilan o'zaro tub bo'lgan natural sonlar p^2-p ta.

Demak, $\varphi(p)=p-1$, $\varphi(p^2)=p^2-p$.

Tub bo'lmagan

$$x=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$$

sonlardagi Eyler funksiyasining qiymati quyidagicha hisoblanadi:

$$\varphi(x)=x\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\dots\left(1-\frac{1}{p_k}\right).$$

Bu tenglikdan Eyler funksiyasi mul'tiplikativ funksiya bo'lishi hamda

$$\varphi(p^k)=p^k\left(1-\frac{1}{p}\right)=p^k-p^{k-1}$$

formula kelib chiqadi.

4.22-masala (Gauss ayniyati). $\sum_{d|x}\varphi(d)=x$ ayniyatni isbotlang.

Yechilishi. $x=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}$. Mul'tiplikativ funksiyalar uchun asosiy ayniyatga ko'ra,

$$\sum_{d|x}\varphi(d)=(1+\varphi(p_1)+\varphi(p_1^2)+\dots+\varphi(p_1^{a_1})\dots=$$

$$=\{1+(p_1-1)+(p_1^2-p_1)+\dots+(p_1^{a_1}-p_1^{a_1-1})\}\dots=$$

$$=p_1^{a_1}p_2^{a_2}\dots p_k^{a_k}=x.$$

Ayniyat isbotlandi. ▲

4.23-masala. Quyidagi tengliklarni isbotlang.

a) $\varphi(m)\varphi(n)=\varphi((m,n))\varphi([m,n])$;

b) $\varphi(mn)\varphi((m,n))=\varphi(m)\varphi(n)(m,n)$.

Yechilishi. a) Mul'tiplikativlikdan foydalanib, m va n sonlar bitta tub sonning darajalari bo'lgan holni qaraymiz: $m = p^{\alpha}$, $n = p^{\beta}$ ($\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$). U holda $\varphi(m)\varphi(n) = \varphi((m, n))\varphi([m, n])$ tenglik $[m, n] = m = p^{\alpha}$, $(m, n) = n = p^{\beta}$ tengliklardan kelib chiqadi.

b) Mul'tiplikativlikdan foydalanib, m va n sonlar bitta tub sonning darajalari bo'lgan holni qaraymiz: $m = p^{\alpha}$, $n = p^{\beta}$ ($\alpha \geqslant \beta \geqslant 0$). Berilgan tenglik

$$\varphi(p^{\alpha+\beta})\ \varphi(p^{\beta}) = \varphi(p^{\alpha})\ \varphi(p^{\beta})\ p^{\beta}.$$

tenglikka tengkuchli. Bu tenglik esa $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha-1}(p-1)$ tenglikdan kelib chiqadi. ▲

5-§. Modulyar arifmetika

<u>*Ta'rif*</u>. $m \in N$, $a, b \in Z$ conlar berilgan bo'lsin. Agar $a - b$ ayirma m coniga bo'linsa, u holda *a coni b coni bilan m modul' bo'yicha taqqoslanadi* deyiladi va ushbu munosabat $a \equiv b \pmod m$ orqali belgilanadi.

m modulni fiksirlaymiz.

$a = q_1 t + r_1$, $b = q_2 t + r_2$ bo'lsin (bu yerda r_1 , r_2 – qoldiqlar).

U holda

$$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow r_1 = r_2$$

Haqiqatdan ham,

$$a \equiv b \pmod m \Leftrightarrow m | a - b \Leftrightarrow m | (m(q_1 - q_2) + r_1 - r_2) \Leftrightarrow m | r_1 - r_2 .$$

$|r_2 - r_1| < |m|$ bo'lgani uchun bu faqat $r_1 = r_2$ bo'lgandagina bajariladi.

Hossalar. $a \equiv b \pmod m$ munosabat quyidagi hossalarga ega:

1) $a \equiv a \pmod m$

2) $a \equiv b \pmod m \Rightarrow b \equiv a \pmod m$

3) $a \equiv b \pmod m$ va $b \equiv s \pmod m \Rightarrow a \equiv s \pmod m$

4) m modul' bo'yicha taqqoslamalarni hadma-had qo'shish va ko'paytirish mumkin, ya'ni

$$\begin{cases} a \equiv b(\mathrm{mod}\, m) \\ c \equiv d(\mathrm{mod}\, m) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + c \equiv b + d(\mathrm{mod}\, m) \\ ac \equiv bd(\mathrm{mod}\, m) \end{cases}$$

5) Taqqoslamaning ixtiyoriy qismiga modulga karrali sonni qo'shish mumkin:

$a \equiv b$ (mod m) va $k,l \in Z \Rightarrow a+km \equiv s$ (mod m) va $a \equiv s+lm$ (mod m)

6) Taqqoslamaning ikkala qismini bir xil natural darajaga ko'tarish mumkin:

$$a \equiv b \text{ (mod } m\text{) va } k \in N \Rightarrow a^k \equiv b^k \text{ (mod } m\text{)}$$

7) Taqqoslamaning ikkala qismini bir xil butun songa ko'paytirish mumkin:

$$a \equiv b \text{ (mod } m\text{) va } k \in Z \Rightarrow ak \equiv sk \text{ (mod } m\text{)}$$

8) $x \equiv u$ (mod m_1) va $x \equiv u$ (mod m_2) $\Leftrightarrow x \equiv u$ (mod $[m_1, m_2]$)

9) $x \equiv u$ (mod m) va $a_k \in Z$ (k=0,1, ... , n) bo'lsa, u holda

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv a_0 u^n + a_1 u^{n-1} + \ldots + a_{n-1} u + a_n \text{ (mod } m).$$

10) $x \equiv u$ (mod m) va $a_k \equiv b_k$ (mod m) (k=0,1, ... , n) bo'lsa, u holda

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n \equiv b_0 u^n + b_1 u^{n-1} + \ldots + b_{n-1} u + b_n \text{ (mod } m)$$

11) $(a, p) = 1$ bo'lsin. $ax \equiv ay(\mathrm{mod}\, p) \Rightarrow x \equiv y(\mathrm{mod}\, p)$

12) Agar $a \equiv b$(mod d), $a \equiv b$(mod c), $(d,c) = 1$ bo'lsa, u holda $a \equiv b$(mod dc).

13) Agar $a \equiv b$(mod d) bo'lsa, u holda ixtiyoriy c □ **Z** uchun $ac \equiv bc$ (mod d).

14) Agar $ac \equiv bc$(mod d) va $(c,d) = 1$ bo'lsa, u holda $a \equiv b$(mod d).

5.1-masala. Ixtiyoriy natural n son uchun quyidagilarni isbotlang:

a) $n^2 \equiv 0$ yoki $n^2 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 3)$;

b) $n^2 \equiv 0$ yoki $n^2 \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\, 5)$;

c) $n^2 \equiv 0$ yoki $n^2 \equiv 1$ yoki $n^2 \equiv 4(\mathrm{mod}\, 8)$;

d) $n^3 \equiv 0$ yoki $n^3 \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\, 9)$;

e) $n^4 \equiv 0$ yoki $n^4 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 16)$.

Yechilishi.

a) Quyidagi hollarni qarab o'tamiz:

$n \equiv -1, 0, 1(\mathrm{mod}\, 3)$. Bu hollarda $n^2 \equiv 1, 0, 1(\mathrm{mod}\, 3)$

b) Quyidagi hollarni qarab o'tamiz:

$n \equiv -2,-1,0,1,2 (\mathrm{mod}\, 3)$. Bu hollarda $n^2 \equiv -1,1,0,1,-1 (\mathrm{mod}\, 3)$.

Shunga o'xshatib, c); d); e) lar ham tekshiriladi. ▲

5.2-masala *(Ferma[6] teoremasi).* p tub son uchun $a^p \equiv a (\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama o'rinli bo'ladi.

Isbot. a bo'yicha induksiyani qo'llaymiz. $a=1$ da natija ravshan. Faraz qilamiz, $p \mid a^p - a$. U holda N'yuton binomi formulasiga ko'ra

$$(a+1)^p - (a+1) = (a^p - a) + \sum_{k=1}^{p-1} C_p^k a^k .$$

$p \mid C_p^k, \quad k = 1,2,...,p-1$, munosabatdan (tekshiring) va induksiya faraziga ko'ra $p \mid (a+1)^p - (a+1)$. Demak, $(a+1)^p \equiv (a+1) (\mathrm{mod}\, p)$. ▲

Izoh. Agar $(a,p)=1$ bo'lsa, u holda Ferma teoremasidan qo'yidagi munosabat kelib chiqadi:

$$a^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p).$$

Taqqoslamalarning hossalariga ko'ra qo'yidagiga egamiz:

$$c_i \equiv d_i (\mathrm{mod}\, p), i = 1,2,...,n \Rightarrow c_1 c_2 ... c_n \equiv d_1 d_2 ... d_n (\mathrm{mod}\, p).$$

$(a,p)=1$ bo'lsin. Quyidagi sonlarni kiritamiz:

$$a, 2a, 3a, ..., (p-1)a .$$

bu ketma-ketlikda ikkita turli hadlari p modul bo'yicha taqqoslanmaydi. Haqiqatdan ham,

$$ia \equiv ja (\mathrm{mod}\, p) \Rightarrow i \equiv j (\mathrm{mod}\, p) \Rightarrow j = i .$$

Demak, $a, 2a, 3a, ..., (p-1)a$ sonlardan har biri $1,2,3,...,p-1$ sonlardan faqat bittasi bilan p modul bo'yicha taqqoslanadi. Demak,

$$a \cdot 2a \cdot 3a \cdot ... \cdot (p-1)a = a^{p-1} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot (p-1) (\mathrm{mod}\, p).$$

---

[6] Ferma P'er (1601-1655 y.y.) – frantsiyalik advokat va matematik. Analitik geometriyaning asoschisi.

$(1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (p-1), p)=1$ bo'lgani uchun

$$a^{p-1}\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$$

bo'ladi. ▲

5.3-masala. $ax\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ taqqoslamani qanoatlantiradigan barcha x sonlar topilsin.

Yechilishi. Ferma teoremasiga ko'ra bu son $x \equiv a^{p\text{-}2}$ (mod p) taqqoslama bilan aniqlanadi. ▲

5.4-masala. (Vil'son teoremasi) p son tub bo'lsa, $(p - 1)! \equiv - 1(\mathrm{mod}\, p)$ bo'ladi.

Yechilishi. $\{2,3,...., p - 2\}$ sonlar to'plamini qaraymiz. Oldingi masalaga ko'ra bu to'plamdagi ixtiyoriy a son uchun $ab\equiv 1(\mathrm{mod}\ p)$ taqqoslamani qanoatlantirdigan va shu to'plamga tegishli bo'lgan a dan farqli yagona b son topiladi. $\{2,3,...., p - 2\}$ to'plamdagi barcha sonlarni juft-jufti bilan ko'paytirib chiqsak,

$$1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (p-2)\equiv 1(\mathrm{mod}\, p)$$

ni hosil qilamiz. Bundan

$$(p-1)!\equiv (p-2)!(p-1)\equiv (p-1)\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$$

kelib chiqadi. ▲

5.5-masala. (Vil'son teskari teoremasi). Agar $n! + 1$ son $n + 1$ ga bo'linsa, u holda $n + 1$ son tub bo'ladi.

Yechilishi. Teskarisini faraz qilamiz. n+1 — murakkab son bo'lib, p - uning birorta tub bo'luvchisi bo'lsin. $p < n$+1 bo'lgani uchun $1,2,...,n$ sonlardan bittasi p ga teng bo'ladi, ya'ni $n!$ son p ga bo'linadi. Ziddiyat. ▲

5.6-masala. (Klement teoremasi). p va $p + 2$ sonlar ikkalasi ham tub bo'lishi uchun

$$4((p - 1)! + 1) + p \equiv 0 (\bmod p^2 + 2p)$$

bo'lishi zarur va yetarli.

Yechilishi. Vil'son teoremalariga ko'ra

$$p - \text{tub} \Leftrightarrow 4((p - 1)! + 1) + p \equiv 0 (\bmod p).$$

$p + 2$ tub bo'lishi $4((p - 1)! + 1) + p \equiv 0 (\bmod p + 2)$ taqqoslama bajarilishiga tengkuchli bo'lishini isbotlash qoldi.

Buning uchun dastlab $p \equiv - 2 (\bmod p + 2)$ taqqoslamaning ikkala tarafini $p + 1$ ga ko'paytiramiz:

$$p(p + 1) \equiv - 2(p + 1) = - 2((p + 2) - 1) \equiv 2 (\bmod p + 2).$$

Endi $2(p - 1)!$ ga ko'paytiramiz:

$$2(p + 1)! \equiv 4 (p - 1)! (\bmod p + 2).$$

Bu taqqoslamaning ikkala qismiga $p + 4$ ni qo'shamiz:

$$2((p + 1)! + 1) + (p + 2) \equiv 4((p - 1)! + 1) + p (\bmod p + 2).$$

Vil'son teoremalariga ko'ra

$p + 2 - \text{tub} \Leftrightarrow (p + 1)! + 1 \equiv 0 (\bmod p + 2) \Leftrightarrow 2((p + 1)!+1)+(p+2) \equiv 0 (\bmod p+2)$, bundan

$$4((p - 1)! + 1) + p \equiv 0 (\bmod p + 2). \blacktriangle$$

5.7-masala. p tub son barcha butun a, b sonlar uchun $ab^p - ba^p$ sonni bo'ladi.

Yechilishi. Ferma teoremasiga ko'ra $b^p \equiv b (\bmod p)$, $\quad a^p \equiv a (\bmod p)$ va

$$ab^p - ba^p \equiv ab - ab \equiv 0 (\bmod p) . \blacktriangle$$

5.8-masala. $p \geq 7$ tub son uchun $p - 1$ ta raqamdan tashkil topgan $11...1$ son p ga qoldiqsiz bo'linishini isbotlang.

Yechilishi. $(10, p) = 1$. Demak, Ferma teoremasiga ko'ra

$$11...1=\frac{10^{p-1}-1}{9}\equiv\frac{1-1}{9}\equiv 0(\mathrm{mod}\, p)$$ ▲

5.9-masala. p tub son uchun $(a+b)^p \equiv (a^p+b^p)(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama o'rinli bo'ladi.

Yechilishi. Ferma teoremasiga ko'ra

$a\equiv a^p(\mathrm{mod}\, p)$, $b\equiv b^p(\mathrm{mod}\, p)$, $(a+b)^p\equiv(a+b)\equiv a+b\equiv(a^p+b^p)(\mathrm{mod}\, p)$. ▲

5.10-masala. *(Eyler teoremasi).* Agar (*a, m*)=1 bo'lsa, u holda $a^{\varphi(m)}\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$.

$n=\varphi(m)$ belgilaymiz.

$x_1,x_2,...,x_n$ sonlar $\{1, 2, ..., m\}$ to'plam ichida joylashgan va *m* soni bilan o'zaro tub bo'lgan o'zaro teng bo'lmagan sonlarni ajratamiz. Ravshanki ular bir-biri bilan *m* modul bo'yicha taqqoslanmaydi.

Quyidagi sonlarni kiritamiz:

$$ax_1, ax_2, ..., ax_n.$$

Bu ketma-ketlikda ham ikkita turli hadlari *m* modul bo'yicha taqqoslanmaydi.

Haqiqatdan ham, $x_i\neq x_j$ va $x_i a\equiv x_j a(\mathrm{mod}\, m)$ bo'lsin. U holda (*a, m*)=1 bo'lgani uchun $x_i\equiv x_j(\mathrm{mod}\, m)$ bo'ladi. Bu esa $x_1,x_2,...,x_n$ sonlarning bir-biri bilan *m* modul bo'yicha taqqoslanmasligiga zid.

$(a,m)=1, (x_i,m)=1$ bo'lgani uchun $(ax_j,m)=1$ bo'ladi, ya'ni

$ax_i\equiv x_j(\mathrm{mod}\, m)$

Bu taqqoslamalarni $i=1,2,...,n$ bo'yicha ko'paytirib chiqsak

$$ax_1\cdot ax_2\cdot ...\cdot ax_n = a^n\cdot x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n\equiv x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n(\mathrm{mod}\, m).$$

ni hosil qilamiz.

$(x_1\cdot x_2\cdot ...\cdot x_n, m)=1$ bo'lgani uchun

$$a^n\equiv 1(\mathrm{mod}\, m)$$

bo'ladi. ▲

Izoh. $\varphi(p) = p-1$ bo'lgani bois Ferma teoremasi Eyler teoremasidan bevosita kelib chiqadi.

5.11-masala. Ma'lumki, a butun son uchun $a^{10}+1$ son 10 ga bo'linadi. a ni toping.

Yechilishi. Ravshanki $(a,\ 10) = 1$, aks holda $a^{10}+1$ va 10 sonlar o'zaro tub bo'ladi. $\varphi(10) = 4$ bo'lgani bois, Eyler teoremasiga ko'ra $a^{10}+1 \equiv 0 (\mathrm{mod}\ 10)$ taqqoslama $a^2+1 \equiv 0(\mathrm{mod}\ 10)$ taqqoslamaga tengkuchli. $a = \pm 1$, $a = \pm 3$ hollarni qarab chiqib, $a \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\ 10)$ yechimni topamiz.

Javob. $a \equiv \pm 3 (\mathrm{mod}\ 10)$. ▲

5.12-masala. $p>5$ - tub son bo'lsa, $p^8 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 240)$ ni isbotlang.

Yechilishi. $240 = 2^4 \cdot 3 \cdot 5$. Ferma teoremasiga ko'ra, $p^2 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 3)$ va $p^4 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 5)$. $\varphi(2^4) = 2^3$ bo'lgani bois, Eyler teoremasiga ko'ra $p^8 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 16)$.

Demak, $p^8 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, m),\quad m = 3,5,16$, ya'ni $p^8 \equiv 1 \,(\mathrm{mod}\, 240)$.▲

5.13-masala (XMO-2005). $a_n = 2^n + 3^n + 6^n - 1,\quad n = 1,2,....$ ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning barcha hadlari bilan o'zaro tub bo'lgan natural sonlarni toping.

Yechilishi. $n=1$ yagona yechim bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun ixtiyoriy tub son berilgan ketma-ketlikning qandaydir hadini bo'lishini isbotlasak yetarli.

Ravshanki, $p=2$ va $p=3$ sonlar $a_2 = 2^2+3^2+6^2-1 = 48$ ni bo'ladi.

Shuning uchun $p \geq 5$ holini qaraymiz. Ferma teoremasiga ko'ra $2^{p-1} \equiv 3^{p-1} \equiv 6^{p-1} \equiv 1 (\mathrm{mod}\, p)$.

Demak,

$$3 \cdot 2^{p-1} + 2 \cdot 3^{p-1} + 6^{p-1} \equiv 6 (\mathrm{mod}\, p) \text{ yoki } 6(2^{p-2} + 3^{p-2} + 6^{p-2}) \equiv 0 (\mathrm{mod}\, p).$$

Bundan $p \mid 6a_{p-2}$ kelib chiqadi. $(6,p)=1$ bo'lgani bois, $p \mid a_{p-2}$ bo'ladi. ▲

Mashqlar

1. (Rossiya, Sankt –Peterburg, 1998). Ixtiyoriy natural n soni uchun $(n^2,(n+1)^2)$ oraliqda $c|a^2+b^2$ shartni qanoatlantiradigan bir–biriga teng bo'lmagan a,b,c sonlar mavjudligini isbotlang.

2. (Rossiya , 2001). Ma'lumki, natural n sonning ikkita o'zaro tub bo'lgan a,b bo'luvchilari uchun $a+b-1$ son ham n sonning bo'luvchisi bo'ladi. n son topilsin.

3. (Rossiya, Sankt –Peterburg, 1996). Shunday natural n sonlar topilsinki, ular uchun $3^{n-1}+5^{n-1} \mid 3^n+5^n$ munosabat o'rinli.

4. (39–XMO). Shunday natural a,b sonlar topilsinki, ular uchun $ab^2+b+7 \mid a^2b+a+b$ munosabat o'rinli.

5. (Bolgariya, 1995). Shunday natural a,b sonlar topilsinki, ular uchun $\dfrac{a^2+b^2}{a-b}$ son butun bo'lib, 1995 soniga bo'linadi.

6. (25–XMO). Ma'lumki, $0<a<b<c<d$ va $ad=bc$ munosabatlarni qanoatlantiradigan a,b,c,d toq sonlar uchun $a+d=2^k$ va $b+c=2^m$ tengliklar bajariladi (bu yerda $k,m\in Z$). $a=1$ tenglik bajarilishini isbotlang.

7. (Irlandiya, 1995). 1995 dan kichik ixtiyoriy $n=p_1p_2p_3p_4$ ko'rinishdagi (bu yerda p_1,p_2,p_3,p_4 – o'zaro teng bo'lmagan tub sonlar) natural sonning $1=d_1<d_2<....<d_{16}=n$ natural bo'luvchilari uchun $d_9-d_8\neq 22$ bo'lishini isbotlang.

8. (28–XMO). $n\geq 2$ – natural son berilgan bo'lsin. Agar barcha $0\leq k\leq\sqrt{\dfrac{n}{3}}$ butun sonlar uchun k^2+k+n son tub bo'lsa, u holda barcha $0\leq k\leq n-2$ butun sonlar uchun ham k^2+k+n son tub son bo'lishini isbotlang.

9. (Bonse tengsizligi). $p_1=2, p_2=3,....$ tub sonlarning usuvchi ketma–ketligi uchun

$$p_1p_2...p_n > p_{n+1}^2$$

tengsizlikni isbotlang, bu yerda $n \geq 4$.

10. (42–XMO). $a > b > c > d$ natural sonlar

$$ac + bd = (b + d + a - c)(b + d - a + c)$$

tenglikni qanoatlantirsa, $ac + bd$ son tub bo'lmasligini isbotlang.

11. a_0, a_1, a_2, ...ketma- ketlik

$$a_0 = 0, \qquad a_{n+1} = P(a_n) \quad (n \geq 0)$$

formulalar yordamida aniqlansin, bu yerda $P(x)$ - $x \geq 0$ larda $P(x) > 0$ shartni qanoatlantiradigan butun koeffitsientli ko'phad. Barcha natural m va k lar uchun $(a_m, a_k) = a_{(m,k)}$ tenglikni isbotlang.

12. Tenglamani yeching

$$a)\left[\frac{x^2 - 3x}{2}\right] = 1; \qquad b)\left[\frac{3x-1}{3}\right] = 5; \quad c) \quad [x]^2 = \left[x^2\right].$$

13. Butun qismning quyidagi hossalarini isbotlang:

1) $[x] \leq x$; 2) $[x + a] = [x] + a$, bu yerda a –ixtiyoriy butun son;

3) $[x + y] \geq [x] + [y]$, bu yerda x va y–ixtiyoriy sonlar.

4) x–ixtiyoriy son uchun $[x+a]=[x]+[a]$ bo'lsa , u holda a – butun son.

14. $[x] + [y] + [x + y] \leq [2x] + [2y]$ ekanligini isbotlang.

15. Ixtiyoriy k natural son uchun $\{k\{x\}\} = \{kx\}$ ni isbotlang va $\{3\{x\}\}=x$ tenglamani yeching.

16. Tenglamani yeching: $a)\ \{3x\} = \frac{1}{2}$; $\quad b)\ \{6x\} + \{x\} = 1$.

17. $[x] \cdot \{x\} \geq 3$ tengsizlikni qanoatlantiradigan eng kichik x musbat sonini toping.

18. Ixtiyoriy $x \geq 0$ da $\left[\left[\sqrt{[x]}\right]\right] = \left[\sqrt{x}\right]$ ni isbotlang.

19. Ixtiyoriy n natural son uchun $\left\{\left(5 + \sqrt{26}\right)^n\right\} < \frac{1}{10^n}$ ekanligini isbotlang.

20. a) $n!$ soni qaysi n natural son uchun 2^n ga bulinadi?

b) Barcha n uchun $n!$ soni 2^{n-k} ga bo'linsa, k sonni toping.

c) Barcha n uchun $n!$ soni p^{n-k} ga bo'linsa, k sonni toping.

21. $(n+1)(n+2)\ldots(2n)$ son ikkining qaysi darajasiga bo'linadi?

22. $(n!)!$ ning $(n!)^{(n-1)!}$ ga bo'linishini isbotlang.

23. Quyidagi sonlar p tub sonning qaysi darajasiga bo'linadi:

a) $(2n)!! = 2\cdot 4\cdot\ldots\cdot(2n)$; b) $(2n-1)!! = 1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)$?

24. $[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$ ni isbotlang.

Manbaalar ro'yhati

1. Зарубежные математические олимпиады / С. В. Конягин, Г. А. Тоноян, И. Ф. Шарыгин и др.; под ред. И. Н. Сергеева – М. : Наука, Физматлит, 1987.
2. Mathematical Olympiads, Problems and solutions from around the world, 1998-1999. Edited by Andreescu T. and Feng Z. Washington. 2000.
3. A. Engel. Problem-Solving Strategies. Springer-Verlag New York Inc. 1998.
4. T. Andreescu, D. Andrica, Z. Feng. 104 Number Theory Problems. Boston: Birkhäuser, 2007.
5. Ayupov Sh., Rihsiyev B., Quchqorov O. «Matematika olimpiadalar masalalari» 1,2 qismlar. T.: Fan, 2004
6. «Математика в школе» (Россия), «Квант» (Россия), «Соровский образовательный журнал» (Россия), "Crux mathematicorum with mathematical Mayhem" (Канада), "Fizika, matematika va informatika" (Ўзбекистон) журналлари.
7. Канель-Белов А. Я., Ковальджи А. К. Как решают нестандартные задачи. М.: МЦНМО, 2008.
8. Василенко О. Н., Галочкин А. И. Сборник задач по теории чисел. — М.: изд-во Моск. ун-та, 1995.
9. Воробьев Н.Н. Признаки делимости. Серия «Популярные лекции по математике»— Вып. 39. — М.: Наука, 1963.
10. H. Lee. Problems in elementary number theory. http://my.netian.com/ideahitme/ eng.html
11. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ. М.: МЦНМО, 2002.
12. Math Links, http://www.mathlinks.ro
13. Art of Problem Solving, http://www.artofproblemsolving.com
14. Math Pro Press, http://www.mathpropress.com
15. Математические задачи, http://www.problems.ru

MUNDARIJA

1-§	Bo'linish munosabati..	3
2-§	Tub va murakkab sonlar	9
3-§	Eng katta umumiy bo'luvchi va eng kichik umumiy karrali. Evklid algoritmi	24
4-§	Sonlar nazariyasida muhim funksiyalar.. ...	34
5-§	Modulyar arifmetika..	52
	Mashqlar..	60
	Manbaalar ro'yhati…………..	62