Р. МАМАТҚУЛОВ, А.А. ТУРСУНОВ,
Б.Р. МАМАТҚУЛОВ

ТЕРМОДИНАМИКА ВА СТАТИСТИК ФИЗИКАДАН МАСАЛАЛАР

Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги олий ўқув юртлари талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

ТОШКЕНТ "ЎЗБЕКИСТОН" 2003

22.317
М 23

Тақризчилар:
физика-математика фанлари доктори,
профессор **М.С. Баҳодирхонов**
доцентлар: **А. Каримхўжаев, А. Бойдадаев**

Муҳаррир: **Ю. Музаффархўжаев**

Маматқулов Р. ва бошқ.
Термодинамика ва статистик физикадан масалалар /Р. Маматқулов, А.А. Турсунов, Б.Р. Маматқулов. — Т.: Ўзбекистон, 2003. 152 б.
1.2. Автордош.

Ушбу тўпламда термодинамика, статистик физика ва кинетика бўйича масалалар жамланган. Унга муаллифлар томонидан тузилган ҳамда Назарий физика соҳасида мавжуд бўлган тўпламлар ва ўқув қўлланмаларидан сайлаб олинган масалалар киритилган. Тўпламда масалалар ечиш учун зарур бўлган тушунчалар, қонуниятлар ва ифодалар қисқача баён этилган.

Мазкур тўплам физика фани асосий фан ҳисобланадиган олий ўқув юртларининг бакалавр ва магистратурада ўқийдиган талабалари учун тайёрланган. Шунингдек ундан физика-техника йўналишида таълим берувчи университетларнинг ўқитувчилари, академик лицей, касб-ҳунар коллежлари ва гимназия ўқитувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

ББК 22.317я73

М $\frac{1903010000-95}{351(04)2003}$ 2003

ISBN 5640-03050-х

СЎЗ БОШИ

Термодинамика ва статистик физика Назарий физиканинг муҳим ва энг мураккаб бўлимларидан ҳисобланади. Бу бўлимларни физика-техника соҳасидаги мутахассисларнинг мукаммал билиши катта самара беради.

Тавсия этилаётган тўплам назарий физика бўйича мавжуд сўнгги дастурга мос ҳолда тузилган бўлиб, термодинамика ва статистик физикадан ўзбек тилида ёзилган биринчи қўлланмадир. Тўпламни тузишда муаллифлар Тошкент давлат миллий университетида термодинамика ва статистик физика фанлари бўйича юқори курс талабалари билан олиб борилган иш тажрибаларидан фойдаланишди. Унга муаллифлар томонидан тузилган ҳамда Назарий физика соҳасида рус тилида мавжуд бўлган тўпламлар ва ўқув қўлланмаларидан фойдаланилган масалалар киритилган.

Ушбу тўплам 360 масалани ўз ичига олади. Унда масалаларни ечиш учун термодинамика, статистик физика ва кинетика бўйича зарур бўлган тушунчалар, қонуниятлар, тақсимот функциялари, ифодалар ва тенгламалар қисқача баён этилган.

Мазкур тўпламнинг афзаллик томони шундан иборатки, унда кўп масалаларнинг изоҳли ечими, кўрсатмалар ва жавоблар масала шартидан кейин бевосита берилган. Шунингдек, талабаларнинг фаоллигини оширишда уларга кўпчилик масалалардаги мураккаб математик ҳисоблашларни бажаришлари учун имконият берилган.

Муаллифлар тўплам қўлёзмасини кўриб чиққан барча тақризчиларга фойдали маслаҳатлари ва фикрлари учун чуқур миннатдорчилик билдирадилар.

АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАР, ҚОНУНЛАР ВА ФОРМУЛАЛАР

1. Термодинамика асосида унинг учта қонуни ётади. Термодинамиканинг биринчи қонуни *энергиянинг сақланиш ва айланиш қонуни бўлиб,* у иссиқлик жараёнлари учун қуйидагича ёзилади:

$$\delta Q = dE + \sum_i f_i d\lambda_i, \tag{1}$$

бу ерда f_i — умумлашган куч, λ_i — умумлашган параметр, δQ — тизимга берилган элементар иссиқлик миқдори, dE — тизим ички энергиясининг ўзгариши.

Термодинамикада иссиқлик сиғими $C = \frac{\delta Q}{\delta T}$ кўринишда ёзилади. C_{fi} ва $C_{\lambda i}$ орасида қуйидаги боғланиш мавжуд:

$$C_{fi} - C_{\lambda i} = \sum_i \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda_i}\right)_T + f_i\right]\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial T}\right)_{f_i}. \tag{2}$$

Оддий тизимлар учун ($i = 1$, унда $f_1 = f$, $\lambda_1 = \lambda$);

$$C_f - C_\lambda = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)_T + f\right]\left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f, \tag{3}$$

бу ерда C_{fi} ва $C_{\lambda i}$ — умумлашган куч ва умумлашган параметрлар доимий бўлгандаги иссиқлик сиғимлари. Агар $f = p$ ва $\lambda = V$ бўлса:

$$C_p - C_V = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \tag{3, a}$$

Термодинамик жараёнлар учун асосий тенглама политропа тенгламаси бўлиб ҳисобланади:

$$df_i + n\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial \lambda_i}\right)_{fi}}{\left(\frac{\partial T}{\partial f_i}\right)_{\lambda i}} d\lambda_i = 0, \qquad (4)$$

бу ерда $n = \frac{C_{fi} - C}{C_{\lambda i} - C}$ — политропа кўрсаткичи. Бошқа турдаги ҳамма термодинамик жараёнлар учун тенгламалар (4) ифодадан олинади.

Термодинамиканинг иккинчи қонуни энтропия тўғрисидаги қонун бўлиб, термодинамик жараёнларнинг йўналишини ифодалайди:

$$dS \geq \frac{\delta Q}{T}, \qquad (5)$$

бу ерда S — энтропия, тенглик ишораси қайтувчи, тенгсизлик ишораси эса қайтмас жараёнлар учун тааллуқли. (1) ва (5) ифодалардан термодинамиканинг асосий тенгламаси келиб чиқади:

$$TdS \geq dE + \sum_i f_i d\lambda. \qquad (6)$$

Термик ва калорик катталиклар орасида қуйидаги тенглик мавжуд:

$$T\left(\frac{\partial f_i}{\partial T}\right)_{\lambda_i} = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda_i}\right)_T + f_i. \qquad (7)$$

Термодинамиканинг учинчи қонуни, бу Нернстнинг **иссиқлик теоремасидир:** «*температура мутлақ нолга интилганда тизимнинг энтропияси термодинамик параметрларга боғлиқ бўлмай қолади ва ҳамма моддалар учун нолга интилади*, яъни бошқача қилиб айтганда, ноль изотермага ноль адиабата мос келади».

Термодинамик параметрларни аниқлашнинг иккита усули мавжуд: доиравий жараёнлар усули ва термодинамик потенциаллар усули. Бу усуллар юқорида келтирилган учта қонунга асосланади.

Термодинамик потенциаллар усули тизим ҳолатини характерловчи бир қатор термодинамик потенциалларни киритиш имконини беради. Қуйида асосий термодинамик потенциаллар ва уларнинг тўлиқ дифференциаллари ифодаларини келтирамиз.

• Зарралар сони ўзгармас бўлган тизим учун ички энергиянинг дифференциали

$$dE = TdS - \sum_i f_i d\lambda_i \tag{8}$$

бу ифодадан $\left(\frac{\partial T}{\partial \lambda_i}\right)_s = -\left(\frac{\partial f_i}{\partial S}\right)\lambda_i$.

Эркин энергия ва унинг дифференциали:

$$F = E - TS,\ dF = -SdT - \sum_i f_i d\lambda_i\ , \tag{9}$$

бу ифодадан $\left(\frac{\partial S}{\partial \lambda_i}\right)_T = \left(\frac{\partial f_i}{\partial T}\right)\lambda_i$.

• Гиббс термодинамик потенциали ва унинг дифференциали:

$$\Phi = F + \sum_i f_i \lambda_i\ ,\ d\Phi = -SdT + \sum_i \lambda_i df_i\ , \tag{10}$$

бу ифодадан $-\left(\frac{\partial S}{\partial f_i}\right)_T = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial T}\right) f_i$.

Энтальпия ва унинг дифференциали:

$$\chi = E + \sum_i \lambda_i f_i,\ d\chi = TdS + \sum_i \lambda_i df_i, \tag{11}$$

бу ифодадан $\left(\frac{\partial T}{\partial f_i}\right)_s = \left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial S}\right) f_i$.

Зарралар сони ўзгарувчан бўлган тизим учун юқорида келтирилган термодинамик потенциалларнинг ўзгариши қуйидаги кўринишни олади:

$$dE = TdS - \sum_i f_i d\lambda_i + \sum_j \mu_j dN_j. \tag{12}$$

$$dF = -SdT - \sum_i f_i d\lambda_i + \sum_j \mu_j dN_j \qquad (13)$$

$$d\Phi = -SdT + \sum_i \lambda_i df_i + \sum_j \mu_j dN_j \qquad (14)$$

$$d\chi = TdS + \sum_i \lambda_i df_i + \sum_j \mu_j dN_j \qquad (15)$$

Бу ҳол учун катта термодинамик потенциал тушунчаси киритилади:

$$B = E - TS - \sum_j \mu_j dN_j \qquad (16)$$

$$dB = -SdT - \sum_j f_j d\lambda_j - \sum_j \mu_j d\mu_j \qquad (17)$$

бу ерда μ — кимёвий потенциал.

(9) ва (10) ифодалардан фойдаланиб, Гиббс-Гельмгольц тенгламаларини олиши мумкин:

$$E = F - T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\lambda_i} \qquad (18)$$

$$\chi = \Phi - T\left(\frac{\partial \Phi}{\partial T}\right)_{f_i} \qquad (19)$$

Оддий тизим ($f_i = p, \lambda_i = V$) учун (18) ва (19) дан қуйидагилар келиб чиқади:

$$F = F_0 - T\int_0^T \frac{E - E_0}{T^2} dT, \qquad (20)$$

ва

$$\Phi = \Phi_0 - T\int_0^T \frac{\chi - \chi_0}{T^2} dT. \qquad (21)$$

Гиббс-Гельмгольц тенгламаларидан фойдаланиб, механик ва номеханик кучларнинг бажарган иши учун қуйидаги ифодаларни ёзиш мумкин:

$$A_{мех} = Q_V + T + \left(\frac{\partial A_{мех}}{\partial T}\right)_V \qquad (22)$$

ва

$$A_{номех} = Q_p + T\left(\frac{\partial A_{номех}}{\partial T}\right)_p \qquad (23)$$

Газларнинг қайтмас адиабатик жараёнда кенгайишида совиши ёки қизиши Жоуль-Томсон ҳодисаси ёрдамида аниқланади:

$$\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{C_p}, \qquad (24)$$

бу ерда $\Delta T = T_2 - T_1$; $\Delta p = p_2 - p_1 < 0$.

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = 0$$

тенглама **и н в е р с и я э г р и л и г и** дейилади. Ечимини аниқлайдиган нуқтага **и н в е р с и я н у қ т а с и** ва температурага эса **и н в е р с и я т е м п е р а т у р а с и** дейилади.

Термодинамик тизимларда мувозанат ва барқарорлик шартлари муайян тизимлар учун қаралади. Изоляцияланган тизимда барқарор мувозанатнинг умумий шарти — тизим энтропиясининг максимал бўлишидир, яъни

$$\Delta S < 0 \text{ ёки } \delta S = 0, \delta^2 S < 0. \qquad (25)$$

Масалан, бир компонентли икки фазали тизимда мувозанат шарти (25) ифодадан қуйидаги шартга олиб келинади: $T' = T''$, $p' = p''$, $\mu'(T, p) = \mu''(T, p)$. Бир жинсли тизимларда мувозанатнинг барқарорлик шарти

$$\Delta T \Delta S - \Delta p \Delta V > 0, \qquad (26)$$

ёки

$$\begin{vmatrix} \Delta T & \Delta p \\ \Delta V & \Delta S \end{vmatrix} > 0. \qquad (27)$$

(27) тенгсизликка **б а р қ а р о р л и к м а т р и ц а с и** дейилади. Бу ерда $\Delta T = T - T_1$, $\Delta p = p - p_1$, $V = V - V_1$, $\Delta S = S - S_1$ Гомоген тизимларда мувозанатлик шарти

$$\sum \nu_i \mu_i = 0 . \qquad (28)$$

Бу ифодадан фойдаланиб, идеал газлар аралашмаси учун таъсир этувчи массалар қонунини ёзиш мумкин:

$$\prod_i c_i^{\nu_i} = K_0(T, p), \qquad (29)$$

$K_0(T,p) = p^{-\Sigma \nu_i} exp\left[\frac{-1}{kT_i}\sum \nu_i \mu_{0i}(T)\right]$ — кимёвий мувозанат доимийлиги дейилади, ν_i — стехиометрик коэффициент бўлиб, реакцияга киришувчи моддалар учун мусбат, реакция натижасида олинган моддалар учун манфий бўлади, c_i —модда концентрацияси. n та фаза ва k та компонентли гетероген тизимлар учун мувозанат шарти қуйидагича ёзилади:

$$T' = T'' = ... = T^{(n)};$$
$$p' = p'' = ... = p^{(n)};$$
$$\mu_j^i = \mu_j^s \quad (j = 1, 2, ..., k;\ i, s = 1, 2, ..., n).$$

Термодинамикада биринчи хил ва иккинчи хил фаза ўтишлар қаралади. Биринчи хил фаза ўтишлар Клапейрон-Клаузиус формуласи билан ифодаланади:

$$\frac{dp}{dT} = \frac{i}{T(v''-v')}. \tag{30}$$

бу ерда $i = T(s'' - s')$ — бир моль моддага тўғри келган ўтиш иссиқлиги, $\Delta s = s'' - s'$ — солиштирма энтропиянинг ўзгариши, $\Delta v = v'' - v'$ — солиштирма ҳажмнинг ўзгариши.

Иккинчи хил фаза ўтишлар Эренфест формуласи билан ифодаланади:

$$\begin{cases} \Delta C_p = -T\left(\frac{\partial f_i}{\partial T}\right)^2 \Delta\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial f_i}\right)_T, \\ \Delta\left(\frac{\partial \lambda_i}{\partial T}\right)_{f_i} = -\frac{df_i}{dT}\Delta\left(\frac{\partial \lambda_i}{df_i}\right)_T, \end{cases} \tag{31}$$

Ўта ўтказувчанлик шароитида магнит майдон бўлмаган ҳол учун (31) дан ($f_i = -H$; $\lambda_i = M$) Рутгерс формуласи олинади:

$$\Delta C = C_s - C_n = \frac{T_c}{4\pi}\left(\frac{dH_c}{dT}\right)^2_{H_c=0}. \tag{32}$$

бу ерда H_c — магнит майдон кучланганлиги.

II. Статистик физикада тизимни ташкил қилувчи зарраларнинг тузилиш моделларига асосланиб статистик тизимнинг ҳолатини характерловчи термодинамик катталикларни аниқлаш формулалари олинади. Агар тизимни ташкил қилувчи зарралар квант механикаси қонунларига бўйсунса, у ҳолда термостатда жойлашган тизимнинг энергияли ҳолатларнинг бирортасида бўлиш эҳтимоллиги **Гиббснинг кичик каноник тақсимоти** орқали ифодаланади:

$$W_i = \frac{e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)}{\sum_i e^{-\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\varepsilon_i)}, \tag{33}$$

бу ерда $\mathcal{E}_i$ — i-сатҳдаги тизим энергияси, $\theta = kT$ — статистик температура, $\Omega(\mathcal{E}_i)$ — квант ҳолатлар сони; $z = \sum_i e^{\frac{\varepsilon_i}{\theta}}\Omega(\mathcal{E}_i)$ — ҳолат йиғиндиси, ёки ҳолат функцияси дейилади; $\frac{1}{\theta} = \frac{\partial \ln\Omega(\mathcal{E})}{\partial E}$.

Катта сондаги зарралардан ташкил топган тизим учун (27) ифодадан Гиббснинг квазиклассик ва классик тақсимотларига ўтиш мумкин:

$$dW = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}d\Omega}{\int e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}d\Omega} = p(q,p)d\Omega \tag{34}$$

$$dW = \frac{e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}d\Gamma}{\int e^{-\frac{\varepsilon}{\theta}}d\Gamma} = p(q,p)d\Gamma, \tag{35}$$

бу ерда $d\Omega = \frac{1}{h^{3N}}\cdot\frac{\partial 3}{\partial\mathcal{E}}d\mathcal{E} - \mathcal{E},\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ — энергия оралиғидаги квант ҳолатлар сони, $d\Gamma = dq_i dp_i (i = 1,3N)$ — фазалар фазосининг дифференциал элементар ҳажми, $p(q,p)$ —эҳтимоллий тақсимот зичлиги, $Z = \int e^{-\mathcal{E}/\theta}d\Omega$ ёки $Z = \int e^{-\varepsilon/\theta}d\Gamma$ — ҳолат интеграли, $\Gamma = \int\ldots\int dq_1\ldots dq_{3N}dp_1\ldots dp_{3N}$.

Изоляцияланган ёпиқ тизим энергияси ўзгармас катталик бўлади, яъни $H(p_i, q_i) = E$. Бу ҳолда эҳтимоллик зичлиги Диракнинг дельта-функцияси кўринишида ҳам ифода қилинади:

$$p(H) = \frac{\delta\left[H(q_i, p_i) - E\right]}{\Omega(E)}, \tag{36}$$

бу ерда $\Omega(E) = \frac{\partial \Gamma}{\partial E}$ ёки $\Omega(E) = \frac{1}{h^{3N}} \cdot \frac{\partial \Gamma}{\partial E}$.

Гиббснинг классик тақсимотидан Максвелл ва Больцман тақсимотларини олиш мумкин:

$$dW_M = \left(\frac{1}{2\pi mkT}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{p^2}{2mkT}} dp_x dp\_dp_z, \tag{37}$$

$$dW_B = \frac{e^{-\frac{U}{kT}} dV}{\int e^{-\frac{U}{kT}} dV}. \tag{38}$$

(37) формула ёрдамида идеал газ молекулалари тезликларининг $(v_x, v_x + dv_x)$; $(v_y, v_y + dv_y)$; $(v_z, v_z + dv_z)$ тезлик компоненталари оралиғида бўлиш эҳтимоллигини ҳамда идеал газ молекулалари энергиясининг $(dE, E + dE)$ энергия оралиғида бўлиш эҳтимоллигини олиш мумкин. Агар идеал газ Ернинг оғирлик кучи майдонида бўлса, у ҳолда (38) формула ёрдамида барометрик формула олинади:

$$dn(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}} dz; \quad n(z) = n_0 e^{-\frac{mgz}{kT}}; \quad p(z) = p_0 e^{-\frac{mgz}{kT}};$$

бу ерда n_0 ва p_0 мос равишда $z = 0$ текисликдаги зарралар концентрацияси ва босими.

Статистик тизим ҳолатини характерловчи термодинамик катталиклар учун статистик усул ёрдамида қуйидаги формулаларни олиш мумкин:

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z(T,V)}{\partial T}; \quad F = -kT \ln Z(T,V);$$

$$\Phi = -kT \ln Z(T,P);$$

$$S = \frac{E}{T} + k\ln Z(T,V) \text{ ёки } S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V;$$

$$p = kT\frac{\partial \ln Z(T,V)}{\partial V}; \quad V = -kT\frac{\partial \ln Z(T,p)}{\partial p}.$$

Термостатга жойлашган зарралари сони ўзгарувчан бўлган тизимнинг E_i энергияли ҳолатларнинг бирортасида бўлиш ва зарралари сони n га тенг бўлиш эҳтимоллиги Гиббснинг катта каноник тақсимоти орқали ифодаланади:

$$W_{in} = \frac{e^{\frac{\mu n - \mathcal{E}_i}{\theta}}\Omega(\mathcal{E}_i,n)}{\sum\limits_i\sum\limits_n e^{\frac{\mu n - \mathcal{E}_i}{\theta}}\Omega(\mathcal{E}_i,n)}. \tag{39}$$

(39) ифода ёрдамида тизимдаги ўзгарувчан зарраларнинг ўртача қиймати учун қуйидаги ифодани оламиз:

$$\bar{n} = \theta\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_i\sum_n e^{\frac{\mu n - \mathcal{E}_i}{\theta}}\Omega(\mathcal{E}_i,n). \tag{40}$$

Агар n_k та зарра ётган $\mathcal{E}_k$ энергияли ҳолатни олиб қарасак, у ҳолда (40) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$\bar{n}_k = \theta\frac{\partial}{\partial\mu}\ln\sum_{n_k}\left(e^{\frac{\mu - \mathcal{E}_k}{\theta}}\right)^{n_k}\Omega(n_k). \tag{41}$$

Квант ҳолатлар сони $\Omega(n_k)$ ни ҳисоблаш Максвеллнинг классик тақсимотига, Бозе-Эйнштейн ва Ферми-Дирак тақсимотларига олиб келади:

$$\bar{n}_k = e^{\frac{\mu - \mathcal{E}_k}{\theta}}, \tag{42}$$

$$\bar{n}_k = \frac{1}{e^{\frac{\mathcal{E}_k - \mu}{\theta}} \pm 1}, \tag{43}$$

бу ерда (–) ишора Бозе-Эйнштейн тақсимотига, (+) ишора эса Ферми-Дирак тақсимотига тегишли.

Узлуксиз энергетик спектрли ҳол учун (42) ва (43) ифодалар қуйидаги кўринишни олади:

$$d_n = e^{\frac{\mu-\mathcal{E}}{\theta}} d_\Omega\ , \tag{44}$$

$$d_n = g\, f(\mathcal{E}) d_\Omega\ . \tag{45}$$

бу ерда $d\Omega = \frac{dVdp_x dp_y dp_z}{h^3}$; $f(\mathcal{E}) = \frac{1}{e^{\frac{\mu-\mathcal{E}}{\theta}} \pm 1}$; $g = 2s + 1$, s — зарра спини.

Ҳолати λ параметр билан характерланувчи термостат ичида ётган тизимнинг λ, $\lambda + d\lambda$ ораликда флуктуацияга дучор бўлиш эҳтимоллиги:

$$dW = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta^2}} e^{-\frac{(\lambda-\lambda_0)^2}{2\Delta^2}} d\lambda, \Delta^2 = \frac{kT}{U''(\lambda_0)}.$$

Бир жинсли термодинамик тизимда ҳажм ва температуранинг флуктуацияга дучор бўлиш эҳтимолликлари қуйидагича бўлади:

$$dW = \frac{1}{\sqrt{2\pi\Delta_1^2}} e^{-\frac{(V-V_0)^2}{2\Delta_1^2}} dV;\quad dW = \sqrt{\frac{Cv}{2\pi KT_0^2}}\, e^{-\frac{(T-T_0)^2}{2T_0^2}} dT,$$

бу ерда $\Delta_1^2 = \left(\overline{\Delta V}\right)^2 = \frac{kT}{\left[\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right]}$; T_o — термостат температураси, $\delta L = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta L)^2}}}{L}$ — нисбий флуктуация.

Номувозанат ҳолатдаги тизимларнинг ҳолати асосан Фоккер-Планк ва Больцманларнинг кинетик тенгламалари ёрдамида қаралади.

Фоккер-Планк кинетик тенгламаси

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial y_i} = 0\ ,$$

бу ерда $J_i = a_i(y,t) f(y,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_k}\left[b_{ik}(y,t) \cdot f(y,t)\right]$ — олти ўлчовли ток зичлиги, $a_i(y, t)$ — олти ўлчовли вектор бўлиб, тасвирий нуқталарнинг ўртача тезлигини беради, b_{ik} — тасвирий нуқталарнинг i- ва k- проекциялари орасидаги корреляцияни беради; $f(y,t) = f(\vec{r}, \vec{p}, t)$ — тақсимот функцияси. Ташқи майдон бўлмаган ҳол учун Броун заррасининг флуктуацияси Фоккер-Планк тенгламасидан қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\overline{(\Delta x)^2} = b\tau = 2D\tau,$$

бу ерда D диффузия коэффициенти, τ — Броун заррасининг қайтиш вақти.

Больцманнинг кинетик тенгламаси:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m}\frac{\partial f}{\partial \vec{r}} + \vec{F}\frac{\partial f}{\partial \vec{p}} = \iint \upsilon_{н} \quad \sigma\left[f_2 f_3 - f f_1\right] d\vec{p}_1 \, dG,$$

бу ерда $\upsilon_н$ — нисбий тезлик, σ — эффектив кесим, G — фазовий бурчак, $\bar{F}$ — заррага таъсир этувчи ташқи куч.

МАСАЛАЛАР

ТЕРМОДИНАМИКА

1. Элементар иш учун $\delta A = \Sigma f_i d\lambda_i$ дифференциал ифода тизим ҳолат параметрлари қандайдир функциясининг тўлиқ дифференциали бўла олмаслиги кўрсатилсин.

Е ч и ш: Тизим ҳолати умумлашган куч f_i, температура T ва ташқи параметрлар $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$ орқали аниқланади. Элементар иш ифодасига температуранинг тўлиқ дифференциали кирмайди. Тўлиқ дифференциаллик шартидан $\frac{\partial f_i}{\partial T} = 0$ келиб чиқади. Бу эса термодинамиканинг дастлабки фикри — тизимнинг $f = f(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n; T)$ ҳолат тенгламасига зиддир.

2. 100°С ва нормал босимда бир моль сувнинг буғ ҳолатига ўтишидаги буғланиш иши ва сувга берилган иссиқлик миқдори ҳисоблансин.

Е ч и ш: Кенгайишда бажарилган иш $\delta A = pdV$. Буғланиш ўзгармас босим остида ўтаётир, шунга кўра бажарилган иш $A = p(V_2 - V_1)$, бу ерда V_1 ва V_2 — мос ҳолда сув ва буғнинг моляр ҳажмлари. $V_2 >> V_1$ бўлганлиги учун буғланишда бажарилган иш $A = pV_2 = p \cdot \frac{RT}{p} = RT = 3125{,}7\ Ж$. Бир моль сувнинг буғланишида берилган иссиқлик миқдори $Q = \lambda m = 40624$ Ж. Бу ерда $\lambda = 2258$ Ж/г — сув учун буғ ҳосил қилиш иссиқлиги.

3. Изотропик диэлектрикни қутблашда ташқи электр майдоннинг бажарган иши ҳисоблансин.

Ечиш: Юзаси S, ораларидаги масофа l га тенг бўлган ясси конденсатор кўринишидаги диэлектрикни олиб қарайлик. Ана шу диэлектрикни ташқи электр майдонга киритайлик. У вақтда dl заряд миқдорини конденсаторнинг бир қопламасидан иккинчи қопламасига кўчиришда бажарилган иш $\delta A = -(\varphi_2 - \varphi_1)dl = -\mathcal{E}lde = -\mathcal{E}lSd\sigma = -\mathcal{E}lS\frac{dD}{4\pi} = -V\cdot\frac{\mathcal{E}dD}{4\pi}$, чунки $e = \sigma S$, $V = lS$ — диэлектрик ҳажми, σ — заряднинг сирт зичлиги. Агар $D = \mathcal{E} + 4\pi P$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда бирлик ҳажмда диэлектрикни қутблаш иши $\delta A' = -\frac{\mathcal{E}}{4\pi}dD$ ва хусусий маънода қутблаш иши $\delta A'' = -\mathcal{E}dP$ бўлишини топамиз.

4. Ташқи параметр λ га қўшма бўлган, f умумлашган куч таъсиридаги ҳар қандай оддий тизим учун қуйидаги айниятлар ўринли эканлигини кўрсатинг:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f = -1 \text{ ва } \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda = \frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_\lambda}.$$

Ечиш: Термодинамиканинг иккинчи дастлабки фикри ҳолатнинг термик тенгламаси мавжудлигига олиб келади: $f = f(T, \lambda)$, бундан

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda dT + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T \cdot d\lambda; \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{df}{dT} = \left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda + \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T \frac{d\lambda}{dT}. \qquad (1)$$

Агар ташқи параметрнинг температура бўйича ўзгариши доимий умумлашган куч таъсирида рўй бераётир десак, у ҳолда (1) дан

$$\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_\lambda \left(\frac{\partial f}{\partial \lambda}\right)_T \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f = -1 \qquad (2)$$

ни оламиз. $f = p$ ва $\lambda = V$ бўлган ҳол учун (2) дан

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1. \qquad (3)$$

5. Термик коэффициентлар орасида $\alpha = P_0 \beta\gamma$ кўриниш-даги боғланиш мавжуд эканлиги кўрсатилсин. Бу ерда $\alpha = \frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — иссиқликдан кенгайиш коэффициенти,

$\beta = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$ — изотермик сиқилувчанлик коэффициенти,

$\gamma = \frac{1}{p_0}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ — босимнинг термик коэффициенти.

6. Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсунувчи газнинг критик параметрлари p_k, V_k, T_k ва критик коэффициент $s = RT_k/p_kV_k$ ҳисоблансин.

Жавоб: $V_k = 3b$, $T_k = 8a/27Rb$, $p_k = a/27Rb^2$, $s = 8/3$.

Кўрсатма: $\left(p_k + \frac{a}{V_k^2}\right)(V_k - b) = RT_k$; $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_{T=T_k} = 0$;

$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_{T=T_k} = 0$ тенгламалардан критик параметрлар ҳисобланади.

7. Дитеричининг биринчи тенгламаси $p(V-b) = RTe^{-\frac{a}{RTV}}$ га бўйсунувчи газнинг параметрлари p_k, V_k, T_k ва критик коэффициент $s = RT_k/p_kV_k$ ҳисоблансин. Катта ҳажмларда Дитеричи тенгламасининг Ван-дер-Ваальс тенгламасига ўтиши кўрсатилсин.

Жавоб: $p_k = a/4e^2b^2$; $V_k = 2b$; $T_k = a/4Rb$; $s = e^2/2$.

Катта ҳажмларда Дитеричининг биринчи тенгламасидан тўғридан-тўғри Ван-дер-Ваальс тенгламасига ўтилади. Бунинг учун $exp\left(-\frac{a}{RTV}\right)$ ни қаторга ёйиб, биринчи икки ҳади билан чегараланиш керак, у ҳолда

$$p(V-b)=RT\left(1-\frac{a}{RTV}\right)=RT-\frac{a}{V}.$$

Бундан

$$p(V-b)+\frac{a}{V}=\left[p+\frac{a}{V(V-b)}\right](V-b)\equiv\left(p+\frac{a}{V^2}\right)(V-b)=RT.$$

8. Дитеричининг иккинчи тенгламаси

$$\left(p+\frac{a}{V^{5/3}}\right)(V-b)=RT$$

га бўйсунувчи газнинг критик коэффициенти s ҳисоблансин ва олинган натижа унинг тажрибавий қиймати ҳамда Ван-дер Ваальс гази учун олинган қийматлари билан солиштирилсин.

Ж а в о б: $s=3{,}75$; $s_{эк}=3{,}5\div3{,}95$; $S_{в-д-в}=2{,}67$.

9. Клаузиус тенгламаси

$$\left(p+\frac{a}{T(V+C)^2}\right)(V-b)=RT$$

га бўйсунувчи газ учун критик параметрлар p_k, V_k, T_k ва критик коэффициент s ҳисоблансин.

Ж а в о б: $p_k=RT_k/8(b+C)$; $V_k=3b+2C$;

$$T_k=\sqrt{\frac{8a}{27R(b+C)}};\quad s=\frac{8(b+C)}{3b+2C}.$$

10. $\left(p+\frac{a'}{TV^2}\right)(V-b)=RT$ Бертло тенгламасидаги a', b ва R ўзгармас катталиклар p_k, V_k ва T_k критик параметрлар орқали ифодалансин.

Ж а в о б: $a'=3p_kT_kV_k^2$; $b=\frac{1}{3}V_k$; $R=\frac{8p_kV_k}{3T_k}$.

11. Ван-дер-Ваальс ва Бертло тенгламаларига бўйсунувчи газ учун ҳажмий кенгайиш коэффициенти α ва термик сиқилиш коэффициенти $\beta_т$лар топилсин.

12. Ҳамма газлар ва суюқликлар учун Ван-дер-Ваальс тенгламаси типидаги тенгламаларнинг $(\pi + 3/\omega^2)\cdot(3\omega - 1) = 8\tau$ кўринишда бўлиши кўрсатилсин (келтирилган Ван-дер-Ваальс тенгламаси). Бу ерда $\pi = p/p_k$; $\omega = V/V_k$; $\tau = T/T_k$. Шунингдек $V >> V_k$ бўлган ҳолда бу тенглама Клапейрон-Менделеев тенгламасига ўтиши кўрсатилсин.

Кўрсатма: $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ Ван-дер-Ваальс тенгламасидаги p, V, T, a, b ва R катталиклар p_k, V_k ва T_k лар орқали ифодаланиб, тенгламага келтирилиб қўйилади. $\omega = V/V_k >> 1$ ҳолда келтирилган Ван-дер-Ваальс тенгламасининг Клапейрон-Менделеев тенгламасига ўтиши кўрсатилади. Бу ҳолда келтирилган тенглама, $\pi\omega = \frac{8}{3}\tau$ кўринишни олади. Бу тенгликдан $\frac{p}{p_k}\frac{V}{V_k} = \frac{8}{3}\frac{T}{T_k} = s\frac{T}{T_k} = \frac{RT_k}{p_kV_k}\frac{T}{T_k}$ келиб чиқади, натижада $pV = RT$ ни оламиз.

13. $\pi = p/p_k$, $\omega = V/V$, $\tau = T/T_k$ ўзгарувчиларда Дитеричининг биринчи ва иккинчи тенгламаларининг юқорида келтирилган кўринишлари олинсин.

Кўрсатма: Олдинги масала кўрсатмасидан фойдалансин.

Жавоб: $\pi(2\omega - 1) = \tau e^{2\left(1 - \frac{1}{\tau\omega}\right)}$; $\left(\pi + \frac{4}{\omega^{5/3}}\right)(4\omega - 1) = 5\tau$.

14. p, pV диаграммаларда паст температуралар учун реал газнинг изотермаси Бойль нуқтасида минимумга эга бўлади. Температура ортиши билан Бойль нуқтаси аввал катта босим томонга, кейин эса кичик босим томонга силжийди. Бойль температураси деб аталувчи муайян температурада изотермадаги минимум ордината ўқи билан мос тушади ($p = 0$). Бойль температурасида реал газ иккинчи вириал коэффициентининг нолга тенглиги кўрсатилсин.

Ечиш:

$$\left[\frac{\partial(pV)}{\partial p}\right] = 0 \qquad (1)$$

тенгламадан Бойль эгрилиги аниқланади. $p = 0$ да (1) тенгламадан Бойль температураси топилади. Вириал кўриниши

$$pV = RT\left(1 + \frac{B}{V} + \frac{C}{V_2} + \frac{D}{V_3} + \ldots\right)$$

ҳолат тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$pV = RT\left(1 + \frac{Bp}{pV} + \frac{Cp^2}{(pV)^2} + \frac{Dp^3}{(pV)^3} + \ldots\right)$$

Бу тенгламанинг ҳар икки томонини ўзгармас температурада босим бўйича дифференциаллаб ва $\left[\frac{\partial(pV)}{\partial p}\right] = 0$ ҳамда $p = 0$ деб ҳисоблаб, $B = 0$ ни оламиз. Реал газларнинг иккинчи вириал коэффициенти Бойль температурасида нолга тенг бўлади.

Ван-дер-Ваальс гази ҳолида

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$$

ва

$$pV = \frac{RT}{V-b} - \frac{ap}{pV}, \quad \left(\frac{RT}{pV-pb} - 1\right)(pV)^2 = ap. \qquad (2)$$

(2) тенгламани босим бўйича дифференциаллаб, (1)ни ва $p = 0$ ни ҳисобга олиш натижасида $T_Б = a/Rb$ ни топамиз.

15. Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсинувчи газ учун иккинчи, учинчи, тўртинчи вириал коэффициентларнинг қийматлари ва Бойль температураси топилсин.

Е ч и ш: Газнинг ҳолат тенгламасининг вириал шакли

$$pV = RT\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{V^n}\right)$$

кўринишида ёзилади, бу ерда B_n вириал коэффициент деб юритилади. Ван-дер-Ваальс тенгламасининг вириал кўринишини олайлик:

$$p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2} = \frac{RT}{V}\left(\frac{1}{1-\frac{b}{V}} - \frac{a/RT}{V}\right) \approx$$

$$\approx \frac{RT}{V}\left(1 + \frac{b-a/RT}{V} + \frac{b^2}{V^2} + \frac{b^3}{V^3} + \ldots\right) = \frac{RT}{V}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{V}\right).$$

Бундан $pV = RT\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{V^n}\right)$; $B_1 = b - \frac{a}{RT}$; $B_2 = b^2$; $B_3 = b^3$ келиб чиқади. Бойль температурасига $B_1 = 0$ бўлганда эришилинади. Демак, Ван-дер-Ваальс гази учун $T_Б = a/Rb$.

16. Дитеричининг биринчи ва иккинчи тенгламаларига бўйсунувчи газлар учун иккинчи, учинчи ва тўртинчи вириал коэффициентлар ҳамда Бойль температураси ҳисоблансин.

17. Мослашган ҳолатлар қонунига бўйсунувчи моддалар учун $\frac{a_1}{a_2} = \frac{T_{k_2}}{T_{k_1}}$ ва $\frac{\beta_{T_1}}{\beta_{T_2}} = \frac{p_{k_2}}{p_{k_1}}$ ўринли эканликлари кўрсатилсин. Бу ерда α ва β лар икки модданинг ҳажмий кенгайиш ва термик сиқилиш коэффициентлари, $T_к$ ва $p_к$ лар эса мос ҳолда уларнинг критик температуралари ва критик босимлари.

Кўрсатма: Ҳажмий кенгайиш ва термик сиқилиш коэффициентлари келтирилган ўзгарувчанларда ифодалансин.

18. Нормал шароитда ($T = 273$ K ва р = 760 мм Hg) идеал газнинг ҳажмий кенгайиш коэффициенти 0,00368 1/градга ва термик сиқилиш коэффициенти 0,00132 1/мм Hg га тенглиги кўрсатилсин.

19. Оғирлик кучи майдонидаги Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсунувчи бир жинсли модданинг критик нуқта атрофидаги зичлик тақсимоти топилсин.

20. Термодинамиканинг биринчи қонуни газ ёки суюқликларнинг стационар оқимига татбиқ қилиниши натижасида солиштирма энтальпия ўзгармас ҳолга келиши кўрсатилсин.

Кўрсатма: 1) стационар оқимнинг узлуксизлик шартидан фойдаланиш керак;

2) вақт бирлигида иккита кўндаланг кесимдан газ ёки суюқликнинг оқиб ўтишида бажарилган ишни топиш керак;

3) жараён адиабатик ҳолда ўтади деб ҳисоблаш керак.

Жавоб: $d\left(\chi_0 + \frac{1}{2}v^2\right) = 0$, $\frac{1}{2}v^2 \ll \chi_0$ да $d\chi = 0$, $\chi_0 = E_0 + pV_0 = \text{Const}$. Бу ерда χ_0 солиштирма энтальпия, E_0 — солиштирма энергия, V_0 — солиштирма ҳажм.

21. Элементлардан сув ҳосил бўлишида ажралган иссиқлик миқдори $Q_1 = 287$ кЖ/моль, сувнинг буғланиш иссиқлиги эса $Q_2 = 40$ кЖ. Элементлардан сув буғи ҳосил қилиш учун керак бўладиган иссиқлик миқдори аниқлансин.

Ечиш: Элементлардан сув буғи ҳосил бўлишида керак бўладиган иссиқлик миқдори Q қуйидаги термохимиявий тенгламадан аниқланади:

$$\{H_2\} + \frac{1}{2}\{O_2\} - \{H_2O\} = Q.$$

Сувнинг ҳосил бўлиш ва буғланиш термохимиявий тенгламаси қуйидагича ёзилади:

$$\{H_2\} + \frac{1}{2}\{O_2\} - \{H_2O\} = Q_1, \ (H_2O) - \{H_2O\} = -Q_2.$$

Бу тенгламаларни қўшиш натижасида

$$\{H_2\} + \frac{1}{2}\{O_2\} - \{H_2O\} = Q_1 - Q_2.$$

Бундан сув буғининг ҳосил бўлиш иссиқлиги

$$Q = Q_1 - Q_2 = 247 \text{ кЖ/моль}.$$

22. Бир моль сув буғининг доимий босимда ҳосил бўлишидаги реакция иссиқлик эффекти ташқи иш бажарилмасдан кечган реакциядаги иссиқлик эффектидан қанчага фарқ қилиши аниқлансин.

Ечиш: Термодинамиканинг биринчи қонунидан

$p =$ Const бўлганда $\delta Q_p = d(E + pV) = d\chi$,

$V =$ Const бўлганда $\delta Q_V = dE$.

Шунинг учун $\delta Q_p - \delta Q_p = p_0 dV$. Бундан $Q_p - Q_v = p_0(V_2 - V_1) = p_0V_2 - p_0V_1 = RT(n_2 - n_1)$. Бу ерда n_1 ва n_2 реакцияга қадар ва реакциядан кейинги мольлар сони. $H_2 + \frac{1}{2}O_2 = H_2O$ реакция учун $n_1 = \frac{3}{2}, n_2 = 1$ ва $Q_p - Q = -\frac{RT}{2}$.

23. Доимий ҳажм ва доимий босимда кечувчи реакция иссиқлиги Q температурага боғлиқ. $(\delta Q/\partial T)_V$ ва $(\delta Q/\partial T)_p$ аниқлансин. Температура 1°С га ортганда бир моль водороднинг сув ҳосил қилиб ёнишидаги иссиқликнинг ўзгариши топилсин.

Е ч и ш: Реакция иссиқлигининг температурага боғлиқлиги Кирхгоф тенгламасидан аниқланади. Бунинг учун биринчи қонуннинг ифодасидан температура бўйича дифференциал олиш керак:

$$\delta Q = dE + pdV$$

$V = \text{Const}$ бўлганда $Q = E_2 - E_1$. Реакциянинг иссиқлик эффекти $Q_V = -Q = E_1 - E_2$. Бу ҳол учун Кирхгоф тенгламаси

$$\left(\frac{\delta Q_V}{dT}\right) = \left(\frac{\partial E_1}{\partial T}\right)_V - \left(\frac{\partial E_2}{\partial T}\right)_V = (C_V)_1 - (C_V)_2 .$$

$p = \text{Const}$ бўлганда эса $Q = (E_2 + pV_2) - (E_1 + pV_1) = \chi_2 - \chi_1$. $\chi = E + pV$ — энтальпия ёки иссиқлик функцияси дейилади. Бу ҳол учун Кирхгоф тенгламаси

$$\left(\frac{\delta Q_p}{dT}\right) = \left(\frac{\partial \chi_1}{\partial T}\right)_p - \left(\frac{\partial \chi_2}{\partial T}\right)_p = (C_p)_1 - (C_p)_2 ,$$

чунки

$$\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_p = \left(\frac{dE + pdV}{dT}\right)_p = \frac{d(E + pV)}{dT} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p .$$

Бу ерда $(C_p)_1$ — бир моль водород ва 0,5 моль кислороддан ташкил топган аралашманинг иссиқлик сиғими, $(C_p)_2$ — бир моль сувнинг иссиқлик сиғими ва $C_p = C_v + R$ ни ҳисобга олсак, $(C_p)_1 = 47{,}89$ Ж/К · моль, $(C_p)_2 = 75{,}42$ Ж/К · моль. Демак, температурани 1°С га оширганда бир моль водороднинг сув ҳосил қилиб ёнганида ажралган иссиқлик $(C_p)_1 - (C_p)_2 = -27{,}43$ Ж га камаяр экан.

24. Термодинамик тизимга механика қонунларини татбиқ қилиб, термодинамиканинг биринчи қонунининг миқдорий ифодаси олинсин. Бу ерда Гамильтон шаклидаги механика тенгламаларидан фойдаланилсин.

Е ч и ш: Термодинамик тизимнинг ҳаракат тенгламаси Гамильтон тенгламалар тизими кўринишида қуйидагича ёзилади:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} . \tag{1}$$

Бу ерда $H = H\left(q_i, p_i, \lambda_\kappa, q'_s p'_s\right)$, q_i, p_i — термодинамик тизимнинг умумлашган координаталари ва импульслари, λ_κ — ташқи параметрлар, q'_s, p'_s — термодинамик тизимни ўраган муҳит молекулаларининг ҳолати ва импульсларини аниқловчи умумлашган координаталар ва импульслар.

(1) ифоданинг биринчисини $\mathring{p}_i$ га ва иккинчисини $\mathring{q}_i$ га кўпайтириб ҳаммалари бўйича йиғинди оламиз:

$$\sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathring{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathring{q}_i\right) = 0\,. \tag{2}$$

Тизим энергияси $E = H$ дан вақт бўйича ҳосила оламиз:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{dE}{dt} = \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p_i}\mathring{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i}\mathring{q}_i\right) +$$

$$+\sum\frac{\partial H}{\partial\lambda_\kappa}\frac{d\lambda_\kappa}{dt} + \sum\left(\frac{\partial H}{\partial p'_s}\mathring{p}'_s + \frac{\partial H}{\partial q'_s}\mathring{q}'_s\right).$$

Бундан

$$dE = \sum\frac{dH}{d\lambda_k}d\lambda_k + \sum\left[\frac{dH}{dp_s}\mathring{p}'_s + \frac{dH}{dq'_s}\mathring{q}'_s\right] \tag{3}$$

(3) ни катта вақт оралиғида ўртачалаштирамиз ва термодинамика биринчи қонуни ифодаси билан солиштирсак, (3) қуйидаги кўринишни олади:

$$dE = -\sum_\kappa f_\kappa d\lambda_\kappa + \delta Q\,. \tag{4}$$

25. (T, V) ва (p, V) ўзгарувчанларда идеал газнинг политропа ва адиабата тенгламалари олинсин ва бошқа термодинамик жараёнлар учун таҳлил қилинсин.

Жавоб: $TV^{n-1} = \text{Const}$, $TV^{\gamma-1} = \text{Const}$,
$pV^n = \text{Const}$, $pV^\gamma = \text{Const}$.

26. Ҳар томонлама бир хил босим таъсири остида ётган ихтиёрий бир жинсли тизим учун $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{адиаб.} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_{из.}$ эканлиги кўрсатилсин. Бу ерда γ — адиабата кўрсаткичи.

К ў р с а т м а: Термодинамиканинг биринчи қонуни $\partial Q = dE + pdV$ дан ва иссиқлик сиғими тушунчасидан фойдаланилсин.

27. $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ нисбатни аниқлашнинг энг аниқ тажрибавий усулларидан бири ўрганиладиган газда товушнинг тарқалиш тезлиги v ни ўлчашдир. Агар, қайишқоқ (эластик) муҳитда товушнинг тарқалиш тезлиги $v = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$ (K — қайишқоқлик модули, ρ — муҳит зичлиги) маълум бўлса, товушнинг тезлиги, иссиқлик сиғимлар нисбати γ ва изотермик қайишқоқлик (эластиклик) модули орасидаги боғланиш топилсин.

Е ч и ш: Газда товуш тўлқинининг тарқалиш тезлиги адиабатик жараён бўлади, у ҳолда

$$v = \sqrt{\gamma \frac{K_{ad}}{\rho}}. \qquad (1).$$

Термодинамиканинг биринчи қонунидан адиабатик жараён учун

$$dp + \gamma \frac{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V} dV = 0 \qquad (2)$$

ифодани оламиз.

$T = T(p, V)$ термик ҳолат тенгламасини ҳисобга олсак, изотермик жараён учун

$$dp + \frac{\left(\frac{dT}{dV}\right)}{\left(\frac{dT}{dp}\right)_V} dV = 0 \qquad (3)$$

тенгламани оламиз. (2) ва (3) ифодалардан

$$\left(\frac{dp}{dV}\right)_{ad} = \gamma \left(\frac{dp}{dV}\right)_{изот.} \qquad (4)$$

тенгликни оламиз. Қайишқоқлик модули $K = V\frac{dp}{dV}$ ни ҳисобга олсак,

$$K_{ад.} = \gamma K_{изот.} \tag{5}$$

бўлади. (5) ни (1) га қўйиш натижасида қуйидаги ифодани оламиз: $\upsilon = \sqrt{\gamma\frac{K_{из}}{\rho}}$.

28. Олдинги масала натижасидан фойдаланиб идеал газда товуш тўлқини тарқалиш тезлигининг температурага боғлиқлиги топилсин. 0°С да ҳавода товуш тўлқинининг тарқалиш тезлиги ҳисоблансин.

Жавоб: $\upsilon = \sqrt{\gamma\frac{RT}{\mu}} = 331{,}6$ *м/с*.

29. Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсунувчи реал газда тарқалувчи товуш тўлқинининг тезлиги ϑ топилсин.

Жавоб: $\upsilon \approx \upsilon_{ид}\left(1 + \frac{b}{V}\right)$.

30. Иссиқлик сиғимлари нисбати γ ва товуш тўлқинининг тарқалиш тезлиги υ маълум деб, идеал газ ички энергияси ва энтальпияси ҳисоблансин.

Жавоб: $E = \mu\frac{\upsilon^2}{\gamma(\gamma-1)} + E_0$; $\chi = \mu\frac{\upsilon^2}{\gamma-1} + \chi_0$.

31. Ван-дер-Ваальс тенгламасидан фойдаланиб, товушнинг изотермик тарқалиш тезлиги аниқлансин.

Жавоб: $\upsilon_T = \sqrt{\frac{\mu RT}{\upsilon(\mu-b\rho)^2} - \frac{2a\rho}{\mu^2}}$. Бу ерда μ — бир грамм мольнинг массаси, ρ — газ зичлиги.

32. l узунликдаги стержень f куч таъсирида чўзилади. Деформацияни қайишқоқ деб ҳисоблаб, $\frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial f}$ изотермик ва адиабатик узайиш коэффициентлари $\left(\frac{\partial l}{\partial f}\right)_{ад} = \frac{C_l}{C_f}\left(\frac{\partial l}{\partial f}\right)_{изот.}$

муносабат орқали боғланганлиги кўрсатилсин. Бу ерда C_l ва C_f — стерженнинг l ва f доимий бўлган ҳолдаги иссиқлик сиғимлари.

Кўрсатма: Бу ҳол учун термодинамиканинг биринчи қонуни

$$\delta Q = dE - pdl \qquad (1)$$

кўринишни олади. (1) ифодада $E(T, l)$ ва $T(f, l)$ деб, адиабатик ва изотермик ҳол қаралади.

33. M куч моменти таъсирида стержень φ бурчакка бурилади. Адиабатик ва изотермик жараёнларда стерженнинг "буралиш қаттиқликлари" $\frac{\partial M}{\partial \varphi}$ нинг нисбати топилсин.

Жавоб: $\left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_{ad.} = \left(\frac{\partial M}{\partial \varphi}\right)_{izot.}$.

Кўрсатма: $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial T}\right)_{M=0} = 0$, чунки исишда буралмаган стержень фақат кенгаяди, бурилиш бурчаги эса ўзгармайди.

34. Политропик жараёнда газ кенгайганда 10 ккал иссиқлик олади. Агар газ ҳажми 10 марта кенгайса, босим 8 марта камаяди. Политропа кўрсаткичи, жараён коэффициенти ва ички энергиянинг ўзгариши ҳисоблансин.

Жавоб: $n = 0{,}9$; $\alpha = \frac{C_V}{C_P} = \frac{n-1}{n-\gamma} = \frac{1}{5}$; $\Delta E = 2$ ккал.

35. Идеал парамагнетик учун иссиқлик сиғимлари фарқи $C_H - C_M$ топилсин.

Ечиш:
$$C_f = C_\lambda + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)_T + f\right]\left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f. \qquad (1)$$

Парамагнетиклар учун $f = -H$, $\lambda = M$. Идеал парамагнетиклар учун $\left(\frac{\partial E}{\partial M}\right)_T = 0$ ва Кюри қонунига кўра $M = \frac{CH}{T}$ (C — Кюри доимийси). Натижада (1) дан $C_H - C_M = \frac{CH_2}{T_2}$ ни оламиз.

36. Идеал парамагнетикнинг адиабата тенгламаси топилсин.

Жавоб: $HM^{-\gamma} = \text{Const}$, бу ерда $\gamma = \frac{C_H}{C_M}$.

Кўрсатма: Ҳар қандай тизим учун умумий адиабата тенгламаси $\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_\lambda df + \gamma\left(\frac{\partial T}{\partial f}\right)_f d\lambda = 0$ дан парамагнит ҳоли учун $f = -H, \lambda = M$ деб қабул қилиб, термик тенгламаси $M = \frac{CH}{T}$ ни ҳисобга олиш керак.

37. Қуйидаги жараёнларда идеал газ иссиқлик сиғими аниқлансин: а) $pV^2 = \text{Const}$; б) $p^2V = \text{Const}$.

Ечиш: Термодинамиканинг биринчи қонуни $\delta Q = dE + pdV$ ва иссиқлик сиғим $C = \frac{\delta Q}{dt}$ лардан $E = E(T, x)$ ва $V = V(T, x)$ деб, қуйидаги ифодани оламиз:

$$C_X = C_V + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_x . \qquad (1)$$

Чунки, идеал газнинг ички энергияси $E = C_VT + E_0$, шунинг учун ҳар қандай доимий x да унинг иссиқлик сиғими C_V га тенг бўлади.

а) $x = pV^2 = \text{Const}$ да $PV = RT$, $pV^2 = RTV = \text{Const}$, $V = \frac{X}{RT}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_x = -\frac{x}{RT^2} = -\frac{V}{T}$. (1) ифодага кўра $C_{pV^2} = C_V - R$.

б) ҳолида $C_{p^2V} = C_V + 2R$.

38. Бир жинсли оғирлик кучи майдонида цилиндрда жойлашган, юқоридан чегараланмаган идеал газ устунининг иссиқлик сиғими C_p га тенглиги кўрсатилсин.

Ечиш: Иссиқлик мувозанатида устундаги газ температураси ҳамма жойда бир хил, босими эса h баландликка қараб пасаяди. Бу ҳолда $dp = -\rho g dh$, ρ — газ зичлиги.

$$pV = \frac{m}{M}RT, \quad pV = \frac{m}{V}\frac{1}{\mu}RT = \frac{\rho}{\mu}RT,$$

$$dp = \frac{1}{\mu}RTdp = -\rho g dh.$$

Бундан $\frac{dp}{\rho} = -\frac{\mu g}{RT}dh$, $\rho = \rho_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$ ва $p = p_0 e^{-\frac{\mu gh}{RT}}$. Цилиндрда идеал газ потенциал энергияси $U = \int_0^\infty \rho gShdn = RT$, S — кўндаланг кесим юзаси. Газ устунининг тўлиқ энергияси ички ва потенциал энергияларининг йиғиндисига тенг: $E_{тўла} = E + U = E(T) + RT$. Иссиқлик сиғими

$$C = \left(\frac{\partial E_{тўла}}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = C_V + R = C_p.$$

39. 5 м^3 ҳажмдаги ҳаво $p_1 = 4{,}052 \cdot 10^5$ Па босим ва $t = 60$°С температурада политропик ҳолда учланма ҳажмгача кенгаяди ва босими $p_2 = 1{,}013 \cdot 10^5$ Па бўлади. Политропа кўрсаткичи, кенгайиш иши, иссиқлик миқдори ва бу жараёнда ички энергия ўзгариши ҳисоблансин.

Е ч и ш: $p_1V_1^n = p_2V_2^n$ ёки $4\,V^n = (3V)^n$. Бундан политропа кўрсаткичи $n = \frac{ln4}{ln3} = 1{,}26$.

Политропик жараён вақтида бажарилган иш

$$W = \int_{V_1}^{V_2} pdV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{p_1V_1^n}{V^n}dV = \frac{pV^n}{(1-n)V^{n-1}}\Bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{pV}{(1-n)}\Bigg|_{V_1}^{V_2} = \frac{p_2V_2 - p_1V_1}{(1-n)}.$$

$$W = \frac{p_1V_1 - p_2V_2}{n-1} = \frac{4{,}052 \cdot 5 \cdot 10^5 - 1{,}013 \cdot 15 \cdot 10^5}{0{,}26}\text{ кЖ} = 1884{,}54\text{ кЖ}.$$

Политропик жараёнда иссиқлик миқдори $Q = mc(t_2 - t_1)$, бу ерда m — газ массаси, c —политропа солиштирма иссиқлик сиғими. Политропа кўрсаткичи $n = \frac{c_p - c}{c_V - c}$ дан $c = c_V\frac{n-\gamma}{n-1}$, натижада иссиқлик миқдори $Q = \frac{mc_V(t_2-t_1)(n-\gamma)}{(n-1)}$ кўринишни олади. $mc_V(t_2 - t_1) = \Delta E$ ички энергия ўзгариши эканлигини эслаб ва термодинамиканинг биринчи қонуни $\Delta E = Q - W$ дан фойдаланиб, $Q = W\frac{\gamma-n}{n-1} = 659,54$ кЖ ни ва $\Delta E = 1225$ кЖ ни топамиз.

40. Баландликка қараб тропосфера температурасининг пасайиш сабаби тушунтирилсин ва ҳавони идеал газ деб ҳисоблаб, атмосфераниг баландлик температура градиенти ҳисоблансин.

Ечиш: Ҳаво баландликка кўтарилганда, кичик босим соҳасига ўтиши туфайли кенгаяди. Бу кенгайишни адиабатик деб ҳисоблаш мумкин, чунки ҳавонинг иссиқлик ўтказувчанлиги жуда кичик. Адиабатик жараёнда $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = Const$. Бу ифодадан $\frac{dT}{T} + \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{dp}{p} = 0$. Иккинчи томондан, баландликка қараб босим ўзгариши $dp = -\rho g dh$, p — ҳаво зичлиги. Идеал газ ҳолат тенгламаси $pV = \frac{m}{\mu}RT$ дан $\rho = \frac{m}{V} = \frac{\mu p}{RT}$. у ҳолда $\frac{dp}{p} = \frac{\mu g}{RT}dh$ ёки $\frac{dT}{T} = -\frac{\gamma-1}{\gamma p}dp = \frac{1-\gamma}{\gamma}\frac{\mu g}{RT}dh$. Бундан $\frac{dT}{dh} = -\frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\mu g}{R}$. Ҳаво учун $\gamma = 1,4$; $\mu = 0,029$ кг/моль. Баландликка қараб атмосферада температура градиенти $\frac{dT}{dh} = -9,8\cdot10^{-5}$ К/м $\simeq 0,001$ К/см.

41. Ҳаво учун $C_p = 0,237$ кал/г · град ва $\gamma = \frac{C_p}{C_V} = 1,41$ эканлигини билган ҳолда иссиқликнинг механик эквиваленти топилсин. Ҳавонинг нисбий молекуляр массаси $\mu = 28,84$ г/моль.

Жавоб: $J = \frac{\gamma R}{\mu C_p(\gamma-1)} = 4,18$ *Ж/кал.*

42. Политропа кўрсаткичи n нинг қандай қийматларида идеал газ сиқишда қизийди, қандай қийматларида эса совийди?

Ж а в о б: $n > 1$ да қизийди, $n < 1$ да совийди.

43. Цилиндрнинг ён деворлари AC ва BD, унинг қопқоғи CD ва поршени MN адиабатик қобиқдан ташкил топган. Таги АВ иссиқлик ўтказади (1-расм). Поршень цилиндрда ишқаланишсиз ҳаракатланади. Поршень юқорисида ва остида иссиқлик сиғими C_V ва адиабата кўрсаткичи γ бир хилда бўлган бир мольдан идеал газ жойлашган. Цилиндрнинг пастки қисмидаги биринчи газ квазистатик ҳолда қизийди (ёки совийди), натижада MN поршень қўзғалади. Шундай жараёнда биринчи газ иссиқлик сиғими C_1 газ ҳажмлари V_1 ва V_2 орқали ифодалансин. Иккинчи газ иссиқлик сиғими нимага тенг?

Е ч и ш: Биринчи газ олган элементар иссиқлик миқдори $\delta Q = C_V dT_1 + p_1 dV_1 = C_V dT_1 + \frac{RT_1}{V_1} dV_1$. Иккинчи газ олган иссиқлик миқдори $\delta Q_2 = 0$. Шунинг учун $C_2 = 0$. p_1 ва p_2 босимлар тенглигидан $\frac{V_1}{V_2} = \frac{T_1}{T_2}$, бундан $\frac{dV_1}{V_1} + \frac{dV_2}{V_2} = \frac{dT_1}{T_1} - \frac{dT_2}{T_2} \times$ $\times V_1 + V_2 = \mathrm{Const}$ дан

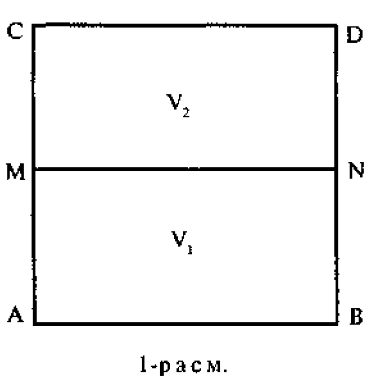
$$\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2} + \frac{R}{C_V}\right) dV_1 = \frac{dT_1}{T_1} \text{ ва } \delta Q = \left(C_V + R\frac{V_2}{V_2 + \gamma V_1}\right) dt.$$

$$\text{Демак } C_1 = C_V + \frac{V_2}{V_2 + \gamma V_1} R = \frac{V_1 + V_2}{V_2 + \gamma V_1} \gamma C_V .$$

44. Агар юқори қопқоқ CD иссиқлик ўтказувчи қилинса, цилиндрнинг юқори қисмидаги газнинг температураси доимий сақланса, олдинги масалада жавоб қандай ўзгаради?

Ж а в о б:

$$C_1 = \frac{V_1 + \gamma V_2}{V_1 + V_2} C_v, \; C_2 = \infty.$$



1-расм.

45. Агар газ ҳажми V_1 дан V_2 гача ўзгарса, политропик жараёнда бир моль идеал газнинг бажарган иши ҳисоблансин.

Ж а в о б: $W = \frac{p_1V_1}{n-1}\left[1-\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{n-1}\right] = \frac{p_2V_2}{n-1}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{n-1}-1\right]$.

46. Ҳар қандай бир жинсли моддада

$$(C_p - C_v)\frac{\partial^2 T}{\partial p \partial V} + \left(\frac{\partial C_p}{\partial_V}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p - \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = 1$$

муносабат ўринли эканлиги исботлансин.

47. Жисм (масалан, космик кема) идеал газда ϑ тезлик билан ҳаракатланаётган бўлсин. Жисмнинг қайси нуқтасида газ температураси максимал бўлади? Агар газни ўраган муҳит температураси T га тенг бўлса, ана шу температура аниқлансин.

Ж а в о б: $T_{макс} = T\left(1 + \frac{\upsilon^2}{2T_{ўр}}\right)$.

48. Термодинамиканинг биринчи қонунидан фойдаланиб, Клайперон-Менделеев тенгламасига бўйсунувчи газ учун $C_p - C_V = R + V \cdot \left(\frac{\partial C_V}{\partial V}\right)_p - p\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_V$ эканлиги кўрсатилсин.

49. Иссиқлик элементи δQ нинг дифференциал ифодаси фақат термик бир жинсли тизимлар учун голоном. Термик бир жинсли бўлмаган тизимлар учун δQ нинг голоном эмаслиги кўрсатилсин.

Е ч и ш: Иссиқлик сиғимлари C_1 ва C_2, ҳар қайсиси бир молдан олинган ва иссиқлик ўтказмайдиган поршень орқали бир биридан ажратилган ёпиқ қобиқдаги иккита газни олиб қарайлик. Бундай тизимлар учун

$$\delta Q = \delta Q_1 + \delta Q_2 =$$
$$= C_1 dT_1 + pdV_1 + C_2 dT_2 + pdV_2 = (C_1 + R)dT_1 + (C_2 + R)\times$$
$$\times dT_2 - \frac{R}{p}(T_1 + T_2)dp \qquad (1)$$

ифода тўла дифференциаллик шартини бажара олмайди. Демак, у голономмас. Бу натижа термик бир жинслимас тизимларда энтропияни махсус аниқлашни талаб қилади.

50. Дальтон қонунидан фойдаланиб идеал газ аралашмалари энтропияси тўғрисидаги Гиббс теоремаси исботлансин.

Ечиш: Дальтон қонуни бўйича, идеал газ аралашмасининг босими айрим газлар парциал босимларининг йиғиндисига тенг: $p = \sum_i p_i$. Шунинг учун идеал газлар аралашмасининг энтропияси $S = \int \frac{dE + pdV}{T} = \sum_i \int \frac{dE_i + p_i dV}{T} = \sum_i S_i$ бўлади. Бу эса идеал газлар аралашмаси учун Гиббс теоремасини ифодалайди.

51. 10^{-3}K ва 10^{-5}K орасидаги температуралар фарқи 3 K ва 300 K орасидаги температуралар фарқига эквивалентлиги, яъни Кельвин шкаласи бўйича тенг температуралар оралиғи (интервали) ΔT эквивалентмаслиги кўрсатилсин.

Ечиш: Берилган температуралар учун Карно циклларининг фойдали иш коэффициентлари бир-бирига тенг, демак эквивалент бўлади. Аммо тенг температуралар фарқи эквивалент бўла олмайди.

52. Идеал электрон газ ҳолатининг термик ва калорик ҳолат тенгламалари $pV = \frac{2}{3}E$ муносабат билан боғланган. Шу газ учун адиабата тенгламалари (p, V) ва (T, V) ўзгарувчанларда топилсин.

Ечиш: Биринчи қонун ифодаси $\delta Q = dE + pdV$ га кўра

$$\delta Q = \left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_V dp + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_p + p\right] dV \qquad (1)$$

ёки

$$\delta Q = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right] dV = $$
$$= \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV \qquad (2)$$

бўлади.

Адиабатик жараёнларда $\delta Q = 0$ эканлигини ҳисобга олсак, (1) ифодадан

$$pV = \frac{2}{3}E \qquad (3)$$

тенгликка кўра $pV^{5/3} = \mathrm{Const}$ ва (2) ифодадан $TV^{2/3} = \mathrm{Const}$ ларни оламиз.

53. Сувнинг ҳажмий кенгайиш коэффициенти α ҳарорат 4°С бўлгандаги ишорасини ўзгартиради. $0℃ < t < 4℃$ температура оралиғида манфий катталик бўлади. Шу температура оралиғида сув адиабатик сиқилганда бошқа суюқлик ва газлар каби қизимасдан, совиши кўрсатилсин.

Ечиш:

$$\delta Q = dE + pdV = CVdT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right]dV =$$

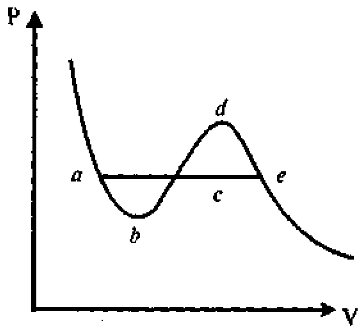
$$= C_V dT + T\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = C_V dT + \frac{T\alpha}{\beta}dV = 0,$$

бундан

$$dT = -\frac{T\alpha}{C_V\beta}dV. \qquad (1)$$

(1) ифодадан шу нарса кўринадики, сув $0℃ < t < 4℃$ температура оралиғида $\alpha > 0$ бўлганлиги учун, адиабатик сиқилганда совийди.

54. Термодинамиканинг асосий тенгламасидан фойдаланиб Максвелл қоидаси тиклансин: V,p диаграммада Ван-дер-Ваальс изотермасини тажрибавий тўғри изотерма-изобара ae (2-расм)ни кесишидан ҳосил бўлган суюқлик-буғ мувозанатига тегишли бўлган юзалар бир хил.



2-расм.

Ечиш: Термодинамиканинг асосий тенгламаси $TdS = dE + pdV$ ни $abcde$ изотермик циклга татбиқ қилсак $T\oint dS = \oint dS + \oint pdV$ ни беради. Бу ерда $\oint dS = 0$, $\oint dE = 0$, $\oint pdV = 0$. Демак, юзалар $S_{abca} = S_{cdes}$, яъни бир хил бўлар экан.

55. Ван-дер-Ваальс газининг энтропияси ҳисоблансин ва унинг адиабата тенгламаси (p, V) ўзгарувчанларда топилсин.

Е ч и ш: Термодинамиканинг асосий тенгламасидан

$$S = \int \frac{dE + pdV}{T} + S_0 = \int \frac{C_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right] dV}{T} + S_0 =$$
$$= \int C_V \frac{dT}{T} + \int \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV + S_0. \qquad (1)$$

(1) Ван-дер-Вальс тенгламасидан $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V_2}$. Бундан $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}$. Шунинг учун (1) дан Ван-дер-Ваальс газ энтропиясини ҳисоблаймиз: $S = \int C_V \frac{dT}{T} + R\ln(V-b) + S_0$, агар иссиқлик сиғими C_V нинг температурага кучсиз боғлиқлигини ҳисобга олсак

$$S = C_V \ln T + R \ln(V - b) + S_0. \qquad (2)$$

Адиабатик жараёнларда $S = \text{Const}$, шунинг учун адиабата тенгламаси (2) дан қуйидаги кўринишни олади:

$$T(V - b)^{R/C_V} = Const. \qquad (3)$$

Агар (p, V) ўзгарувчанларда ёзсак, (3) дан $\left(p + \frac{a}{V^2}\right) \times$ $\times (V - b)^{1+\frac{R}{C_V}} = Const$. $C_V \neq \text{Const}$ ҳол учун $(V - b)exp \times$ $\times (V - b)exp\left(-\int_0^T \frac{C_V}{T}\right) = Const.$

56. $C_p - C_V$ айирманинг ҳажмий кенгайиш коэффициенти α ва термик сиқилиш коэффициенти β билан боғлиқлиги кўрсатилсин.

Е ч и ш:

$C_p - C_V = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \frac{TV_0 a^2}{\beta}$, ч у н к и

$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1$ тенгликдан $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\alpha}{\beta}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = \alpha V_0$.

57. Ван-дер-Ваальс гази учун $C_p - C_V$ айирма ҳисоблансин.

$$C_p - C_V = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right]\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p =$$

$$= T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -T\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T}, \qquad (1)$$

чунки $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -1$ ифодадан $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V \times$

$$\times\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}.$$

Ван-дер-Ваальс тенгламасидан $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V_2}$. Ҳосилалари: $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{R}{V-b}$; $\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2\alpha}{V^3}$. Бу ифодаларни (1) га қўйиш натижасида $C_p - C_V = \frac{R}{1-\frac{2a}{RTV}\left(1-\frac{b}{V}\right)^2} \simeq \frac{R}{1-\frac{2a}{RTV}}$. Ўта сийраклашган газлар учун айирма қуйидаги кўринишни олади:

$$C_p - C_V = R\left(1 + \frac{2a}{RTV}\right).$$

58. Термодинамиканинг биринчи ва иккинчи қонунларидан фойдаланиб, қуйидаги муносабатлар исботлансин:

$$\frac{C_p}{C_V} = \frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s} = \frac{\beta}{\delta}; \qquad C_V = \frac{TV_0a^2\delta}{(\beta-\delta)\beta}; \qquad C_p = \frac{TV_0a^2}{\beta-\delta};$$

бу ерда α — ҳажмий кенгайиш коэффициенти, β_T — термик сиқилиш коэффициенти, δ — адиабатик термик сиқилиш коэффициенти.

Ечиш: 1. (p,V) ўзгарувчиларда адиабата тенгламаси
$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V dp+\gamma\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV=0$ дан

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s=-\gamma\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V}. \qquad (1)$$

$T=T(V,p)$ дан изотермик жараён учун

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T=-\gamma\frac{\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v}. \qquad (2)$$

(1) ва (2) дан

$$\frac{C_p}{C_V}=\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_s}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}=\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_s}=\frac{\beta}{\delta}. \qquad (3)$$

$$C_p-C_V=\frac{TV_0a^2}{\beta}. \qquad (4)$$

(3) ва (4) дан

$$C_V=\frac{TV_0a^2\delta}{(\beta-\delta)\beta}. \qquad (5)$$

(3) ва (5) дан

$$C_p=\frac{TV_0a^2}{\beta-\delta}. \qquad (6)$$

2. Бу масалани Якобианлар хоссаларидан фойдаланиб ечиш мумкин.

59. Якобианлар хоссасидан фойдаланиб (V, T) ва (p, T) ўзгарувчиларда C_p-C_v айирма топилсин.

Ечиш: I. а) $C_p=T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p=T\frac{\partial(S,p)}{\partial(T,p)}=T\frac{\partial(S,p)}{\partial(T,V)}\frac{\partial(T,V)}{\partial(T,p)}=$

$$=C_V-T\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}.$$

б) $C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V = T\frac{\partial(S,V)}{\partial(p,T)}\,\frac{\partial(p,T)}{\partial(T,V)} = C_p + T\frac{\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}$.

II. а) $C_p = C_V + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = C_V + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \times$

$$\times\left[-\frac{1}{\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_T}\right] = C_V - T\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}\cdot\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V\left(\frac{\partial P}{\partial V}\right)_T = -1.$$

б) $C_p = C_V + T\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T}$, чунки $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v = \frac{\alpha}{\beta}$.

60. Бир моль Ван-дер-Ваальс гази доимий p босим остида V_1 ҳажмдан V_2 ҳажмгача кенгайиши учун унга қанча иссиқлик миқдори берилиши керак?

Ечиш:

$$\delta Q = dE + pdV = C_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right]dV =$$

$$= C_V dT + T\cdot\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV\cdot\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V-b) = RT$$

дан

$$dT = \frac{1}{R}\left[p + \frac{a}{V^2} - \frac{2a}{V^3}(V-b)\right]dV;$$

$$Q = \int\left[C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV\right] = \frac{C_V}{R}\left[\left(p + \frac{a}{V_2^2}\right)(V_2 - b) - \left(p + \frac{a}{V_1^2}\right)\times\right.$$

$$\left.\times(V_1 - b) + a\left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_2}\right)\right] = \frac{C_V}{R}\left[p(V_2 - V_1) + ab\left(\frac{1}{V_1^2} - \frac{1}{V_2^2}\right)\right].$$

61. Изотермик ва адиабатик сиқилувчанликлар орасидаги боғланиш топилсин.

Ж а в о б: $\beta_T = \beta_s + \frac{TV_2}{C_p}$ (бу ерда a — ҳажмий кенгайиш коэффициенти).

62. Идеал парамагнетикларда ички энергия магнитланиш векторига боғлиқ эмаслиги кўрсатилсин.

Е ч и ш: Термик ва калорик ҳолат тенгламалари орасидаги боғланиш

$$T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)_T + f \qquad (1)$$

кўринишига эга. Парамагнетик ҳолида умумлашган куч $f = -H$, умумлашган параметр $\lambda = M$. Идеал парамагнетикнинг термик тенгламаси $M = æ\, H$ ва Кюри қонунига асосан $æ = \frac{C}{T}$ (С — Кюри доимийси). У ҳолда (1) дан

$$\left(\frac{\partial E}{\partial M}\right)_T = -T\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M + H = 0.$$

Демак $\mathcal{E}$ энергия M га боғлиқ эмас экан.

63. Доимий $\mathcal{E}$ ва D да диэлектрик иссиқликлар орасидаги фарқ $C_\varepsilon - C_p$ ҳисоблансин.

Е ч и ш: Диэлектрикни қутблаш ишини ҳисобга олганда термодинамиканинг I қонуни

$$\delta Q = dE_T - \frac{1}{4\pi}\mathcal{E}dD \qquad (1)$$

кўринишига эга бўлади. Иссиқлик сиғими $C = \frac{\delta Q}{dT}$ эканлигини ҳисобга олсак: $C_D = \left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_D$;

$C_\varepsilon = \left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_D + \left[\left(\frac{\partial E_T}{\partial T}\right)_D - \frac{\mathcal{E}}{4\pi}\right]\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)_\mathcal{E}$, $T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)_T + f$ тенгликдан $\lambda = D$ ва $f = -\frac{\mathcal{E}}{4\pi}$ ҳол учун $\left(\frac{\partial \mathcal{E}_T}{\partial D}\right)_T - \frac{\mathcal{E}}{4\pi} = -\frac{T}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_D$ бўлади. $D = \varepsilon(T)\mathcal{E}$ ифодадан $\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_D = D\frac{\partial(1/\varepsilon)}{\partial T} =$ $= -D\frac{1}{\mathcal{E}^2}\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T} = -\frac{\mathcal{E}}{\varepsilon}\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ келиб чиқади. У ҳолда

$$C_\varepsilon - C_D = -\frac{T}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_D\left(\frac{\partial D}{\partial T}\right)\mathcal{E} = \frac{T\mathcal{E}^2}{4\pi\varepsilon}\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial T}\right)^2$$

64. Диэлектрикнинг электр кутбланиши $\mathcal{P}$ ни майдон $\mathcal{E}$ ва температура Т нинг фукцияси деб фараз қилиб, энергия зичлиги $E(\mathcal{E}, T)$ учун ифода олинсин.

Е ч и ш: Термодинамиканинг асосий тенгламаси диэлектрик учун $TdS = dE_T - \mathrm{E}d\mathrm{P}$ кўринишда ёзилади. $S = S(\mathrm{E}, T)$ функция кўрнишида олсак, у ҳолда dS нинг тўла дифференциал шартига асосан $\left(\frac{\partial E}{\partial \mathcal{E}}\right)_T = \left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathcal{E}}\right)_T + T\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}\right)_\varepsilon$ ни оламиз. Бундан $E(\mathcal{E},T) = \int\limits_0^{\mathcal{E}}\left[\mathcal{E}\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial \mathcal{E}}\right)_T + T\left(\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}\right)_{\mathcal{E}}\right]d\mathcal{E} + E(O,T)$, бу ерда $E(O,T)$ - электр майдон бўлмагандаги диэлектрик энергияси. Агар бу формулани хусусий ҳол $\mathcal{P} = \frac{\mathcal{E}(T)-1}{4\pi}\mathcal{E}$ учун татбиқ қилсак, $E_{\text{тўла}} = E + \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} = \frac{\varepsilon\mathcal{E}^2}{8\pi}\left[1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right] + E(O,T)$ ни оламиз. Агар $\varepsilon - 1 = \frac{\text{const}}{T}$ бўлса, у ҳолда $E_{\text{тўла}} = \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} + E(O,T)$ бўлади.

65. Доимий ҳажм ва доимий индукция D да диэлектрик иссиқлик сиғимининг майдон кучланганлигига боғлиқлиги, майдонда ва майдон бўлмагандаги иссиқлик сиғимлар фарқи ҳисоблансин.

Е ч и ш: $\delta Q = dE_{\text{тўла}} - \frac{\mathcal{E}}{4\pi}dD.$

$$E_T = \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi}\left[\varepsilon + T\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right] + E(O,T) = \frac{D^2}{8\pi\varepsilon}\left(1 + \frac{T}{\varepsilon}\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right) + E(O,T).$$

$C_{V,D} = \left(\frac{\partial ET}{\partial T}\right)_\rho = -\frac{D^2}{8\pi}T\frac{\partial(1/\varepsilon)}{\partial T^2} + C_V$, бу ифодадан (бу ерда C_V— майдонсиз иссиқлик сиғими)

$$C_{V,D} - C_V = -\frac{\mathcal{E}^2}{8\pi}\frac{T}{\varepsilon^2}\frac{\partial^2(1/\varepsilon)}{\partial T^2} = \frac{\mathcal{E}^2 T}{8\pi\varepsilon^2}\left[\frac{2}{\varepsilon}\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial T}\right)^2 - \frac{\partial^2\varepsilon}{\partial T^2}\right].$$

66. Солиштирма ҳажм ўзгаришини ҳисобга олмасдан ва $\vec{\mathcal{P}} = \frac{\varepsilon(T)}{4\pi}\vec{\mathcal{E}} - \frac{1}{4\pi}\vec{\mathcal{E}}$ деб ҳисоблаб, майдон 0 дан $\mathcal{E}$ гача ўзгарганда диэлектрикнинг бир-бирлик ҳажмдаги изотермик қутбланиш иссиқлик эффекти ҳисоблансин.

Ечиш:

$$\delta Q = dE - \mathcal{E} d\mathcal{P} = \left(\frac{\partial E}{\partial \mathcal{E}}\right)_T d\mathcal{E} + \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_{\mathcal{E}} dT - \mathcal{E}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{E}}\right)_T d\mathcal{E} -$$

$-\left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_{\mathcal{E}} dT = \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon}\right)_T d\mathcal{E} - \mathcal{E}\left(\frac{\partial \rho}{\partial \mathcal{E}}\right)_T d\mathcal{E}$. 67 масаладан фойдалансак, у ҳолда

$$\delta Q = T\left[\frac{\partial \mathcal{P}}{\partial T}\right]_{\mathcal{E}} d\mathcal{E} = T\frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{\varepsilon(T)-1}{4\pi}\mathcal{E}\right] d\mathcal{E} = T\left[\frac{1}{4\pi}\frac{\partial E}{\partial T}\mathcal{E}\right] d\mathcal{E};$$

$Q = \int \delta Q = \frac{\mathcal{E}^2}{8\pi} T \frac{\partial \varepsilon}{\partial T}$ ни оламиз. Хусусий ҳолда, $\varepsilon = \frac{\mathrm{Const}}{T}$ ва $Q = -\frac{\mathcal{E}-1}{8\pi}\mathcal{E}^2 = -\frac{1}{2}\mathcal{P}\mathcal{E}$. $\frac{\partial \varepsilon}{\partial T} < 0$ ҳолида, изотермик қутбланиш жараёнида диэлектрик иссиқлик ажратар экан.

67. Идеал парамагнетик ҳолатининг термик тенгламаси $M = F\left(\frac{H}{T}\right)$ кўринишида бўлиши кўрсатилсин. Бу ерда M — магнитланганлик, H — магнит майдон кучланганлиги.

Ечиш: $T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)_T + f$. Бу тенгликдан магнетиклар учун $f = -H, \lambda = M$ деб $\left(\frac{\partial H}{\partial T}\right)_M = \frac{H}{T}$ ифодани оламиз. Чунки масаланинг шартига кўра ва парамагнетиклар учун (66-масала) $\left(\frac{\partial E}{\partial M}\right)_T = 0$. Олинган ифодадан интеграллаш натижасида

$$M = F\left(\frac{H}{T}\right) \tag{1}$$

ни оламиз. $F\left(\frac{H}{T}\right)$ ифоданинг кўринишини термодинамика аниқлай олмайди. (1) ифодадан парамагнетиклар учун Кюри қонуни $M = \frac{CH}{T} = \chi H$ келиб чиқади. Умуман, ички энергияси фақат температура функцияси бўлган идеал тизимлар ҳолатининг термик тенгламаси $\lambda = F\left(\frac{f}{T}\right)$ кўринишида бўлади.

68. Қаттиқ қайишқоқ стержень учун доимий кучланиш ва доимий деформацияда иссиқлик сиғимлар орасидаги фарқ $C_u - C_\varepsilon$ ҳисоблансин.

Ечиш: $C_f - C_\lambda = T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f$. Чўзиш иши $\sigma A = -Fdl = -uSdl$. Бу ерда S — стержень кўндаланг кесим юзаси, l — унинг узунлиги, u — кучланиш. Агар $f = -uS$, $\lambda = l\varepsilon$ десак, $C_u - C_\varepsilon = -T\cdot Sl\left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_u$. Бу ерда $\varepsilon = dl/l$ — нисбий деформация.

69. Ҳолат термик тенгламаси $F = CT\left[\frac{l}{l_0} - \left(\frac{l_0}{l}\right)^2\right]$ кўринишида бўлган резина найнинг доимий таранглик ва доимий узунликдаги иссиқлик сиғимлари $C_f - C_l$ орасидаги фарқ ҳисоблансин. Бу ерда F — таранглик, l — узунлик, $C = \text{Const} > 0$. Шундай резинанинг ички энергияси фақат температурага боғлиқлиги ва чўзишда уни исиши кўрсатилсин.

Ечиш: $C_f - C_\lambda = T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda \left(\frac{\partial \lambda}{\partial T}\right)_f$. Резина учун $\lambda = l$, $f = -F$, чунки $\sigma A = -Fdl$. $C_f - C_l = Cl_0\frac{\left[l/l_0 + (1/1)2\right]^2}{1+2(l_0/l)^9}$. Бундан $C_f - C_l$ температурага боғлиқ эмаслиги кўринади ва $C_f > C_l$

$$T\left(\frac{\partial f}{\partial T}\right)_\lambda = \left(\frac{\partial E}{\partial \lambda}\right)_T + f \qquad (1)$$

тенгламадан қараладиган ҳол учун $T\left(\frac{\partial E}{\partial l}\right)_T = -T\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_l + F = 0$, яъни резинанинг ички энергияси фақат температурага боғлиқ бўлади. Термодинамиканинг асосий тенгламаси $T\,dS = dE - F = C_l dT - F\,dl$ кўринишни олади. Бундан $\left(\frac{\partial T}{\partial l}\right)_s = \frac{F}{C_l} > 0$, демак чўзишда резина қизир экан.

70. Босими температура Т нинг чизиқли функцияси бўлган моддалар учун, C_V иссиқлик сиғимининг ҳажмга боғлиқ эмаслиги кўрсатилсин. Ван-дер-Ваальс гази учун $\frac{\partial C_V}{\partial V} = 0$ эканлиги олинсин.

Ечиш: $dS = \frac{dE + pdV}{T} = \frac{C_V dT + T(\partial p/\partial T)_V dV}{T}$ ифодадан $\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}$ шартга кўра $\frac{\partial}{\partial E}\left(\frac{C_V}{T}\right)_T = \frac{\partial}{\partial V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ ёки

$\frac{\partial C_V}{\partial V} = T\left[\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right]_V \cdot T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p$ ифодага асосан,

$\left(p + \frac{a}{V_2}\right)(V - b) = RT$. Вандер-Ваальс гази учун

$$\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p,$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial T \partial V} = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V,$$

$\frac{\partial^2 E}{\partial V \partial T} = \frac{\partial C_V}{\partial T} = T\left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2}\right)_V^2 = 0$, демак, $C_V = C_V(T)$, $p = aT + b$ кўринишда бўлади.

71. Сув учун $C_p = C_V$ тенглик бажарилиши мумкинми?

72. Доимий босим остида жисм кенгайишида унинг энтропия ўзгариши ҳисoблансин.

Е ч и ш: $S = S(p, V)$ бўлса,

$$(dS)_p = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p dV = \left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p dV = \frac{1}{T}\left(T\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p \times$$

$\times \frac{V}{V}\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p dV = \frac{Cp}{T\alpha V} dV$. Энтропия ўзгаришининг ишораси ҳажмий кенгайиш коэффициенти α нинг ишорасига боғлиқ.

73. Қайишқоқлик модули температурага боғлиқ бўлган қаттиқ қайишқоқ стерженнинг изотермик чўзилишида ютган иссиқлиги ҳисoблансин.

Ж а в о б: $\delta Q = -Tl\frac{\partial M}{\partial T}d\epsilon$, бу ерда $\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$ — деформация, М — қайишқоқлик модулининг кесимга кўпайтмаси, l — стерженнинг узунлиги.

74. Қайишқоқлик модули температурага боғлиқ бўлган қаттиқ қайишқоқ стерженнинг адиабатик чўзилишидаги температура ўзгариши ҳисoблансин.

Ж а в о б: $dT = -\frac{Tl\varepsilon}{C\varepsilon}\frac{\partial M}{\partial T}d\epsilon$.

75. Юқоридаги масалалардаги стержень учун доимий деформациядаги иссиқлик сиғими C_ε — доимий кучланишдаги иссиқлик сиғим C_α ҳисoблансин.

Ж а в о б: $C_\varepsilon = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_\varepsilon$, $C_U = \left[\frac{\partial (E - U\varepsilon)}{\partial T}\right]_u$.

$$C_u - C_\varepsilon = -Tl\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_U \left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_\varepsilon.$$

76. $V = V_0[1 + \alpha(T - T_0)]$; $\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = 0$; $C_p = \text{const}$ тенгламаларга бўйсинувчи газ энтропияси аниқлансин.

Ж а в о б: $S = S_0 + C_p \, lnT - aV_0P$.

77. Ҳолат тенгламаси $p = p_0(1 + \alpha T - bV)$; $C_V = \text{const}$ кўринишда бўлган газ учун адиабата тенгламаси топилсин.

Е ч и ш:

$$dS = \frac{\delta Q}{T} = \frac{dE + pdV}{T} = \frac{C_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right]dV}{T} = \frac{C_V dT}{T} + \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V.$$

$S = S_0 + \int C_V \frac{dT}{T} + \int \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV = S_0 + C_V \ln T + \alpha p_0 V$. Адиабатик жараёнда $S - S_0 = \Delta S = \text{const}$. Шунга кўра, $\ln T = \frac{\Delta S - \alpha p_0 V}{C_V}$.

$$T = e^{\frac{\Delta S - \alpha p_0 V}{C_V}}, \quad Te^{\frac{\alpha p_0 V}{C_V}} = const.$$

78. $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = \frac{p - T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{C_V}$ муносабат исботлансин.

Е ч и ш:

$$\delta Q = dE + pdV = C_V dT + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T + p\right]dV = C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV.$$

Бундан $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_E = \frac{p - T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V}{C_V}$. Берилган муносабатни якобиан хоссасидан фойдаланиб исботлаш мумкин.

79. Хонага ташқаридан совуқ жисм киритилади. Бу ҳолда жисмнинг ички энергияси хона ҳавоси ҳисобига ошмасдан, ташқи энергия ҳисобига ошиши ва иситишда хона ҳавосининг ички энергияси ва энтропиясининг камайиши кўрсатилсин.

Е ч и ш: Хонани иситишда 1 кг ҳавога узатилган энергия $\mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = C_V(T - T_0)$, энтропия ўзгариши эса $S - S_0 = C_p \ln(T/T_0)$ бўлади. У ҳолда хонадаги ҳаво ҳажмига тўғри келган энергия ва энтропия $\mathcal{E}_1 = \rho U = C_V \rho T + \rho(\mathcal{E}_0 - C_V T_0)$, $S_1 = \rho S = C_p \rho \ln T + \rho(S_0 - C_p \rho \ln T_0)$. бу ерда ρ — ҳаво зичлиги. Бундан ҳолат тенгламаси $p = \rho \frac{RT}{\mu}$ дан фойдаланиб қуйидагиларни оламиз:

$$\mathcal{E}_1 = \frac{C_V \mu p}{R} + \frac{\mu p(\varepsilon_0 - C_V T_0)}{RT}, \quad (1)$$

$$S_1 = \frac{Cp\mu p}{RT} \ln T + \frac{\mu p(S_0 - C_p \ln T_0)}{RT}, \quad (2)$$

(1) ва (2) ифодалардан шу нарса кўринадики, қиздириш натижасида хона ички энергияси ва энтропияси камаяр экан.

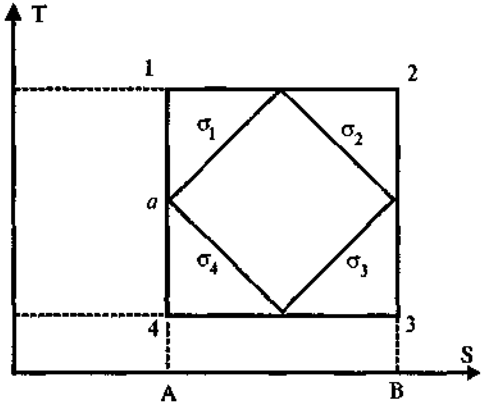
80. Бир хил температура оралиғида Карно цикли бошқа циклларга нисбатан энг катта ФИК эга бўлишлиги кўрсатилсин.

Ечиш: Фараз қилайлик, S, T диаграммада (3-расм) қандайдир $abcd$ цикл T_1 ва T_2 чегаравий изотермалар билан чегараланган бўлсин. Бу циклнинг фойдали иш коэффициенти $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\oint TdS}{\int TdS} = \frac{Юза\,abcda}{Юза\,AabcBA}$.

$$\eta = \frac{Юза\,12341 - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4}{Юза\,A12BA - \delta_1 - \delta_2} = \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1) - \delta_1 - \delta_2 - \delta_3 - \delta_4}{T_1(S_2 - S_1) - \delta_1 - \delta_2} <$$

$$< \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1) - \delta_1 - \delta_2}{T_1(S_2 - S_1) - \delta_1 - \delta_2} < \frac{(T_1 - T_2)(S_2 - S_1)}{T_1(S_2 - S_1)} = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta_K.$$

Демак, $\eta < \eta_s$.



3-расм.

81. Агар ишловчи жисмнинг ҳолат тенгламаси $V = V_0[1 + \alpha(T - T_0)]$, $\left(\frac{\partial V}{\partial P}\right)_T = 0$ кўринишида бўлса, Карно цикли бўйича ишловчи иссиқлик машиналарининг ФИК аниқлансин.

Жавоб: $\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$.

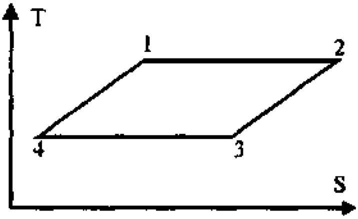
82. Иккита изотерма $T = T_1$ ва $T = T_2$, иккита изохора $V = V_1$ ва $V = V_2$ лардан ташкил топган Стирлинг цикли бўйича ишловчи ҳаво машинасининг ФИК ҳисоблансин ва уни шу температура оралиғида Карно цикли бўйича ишловчи машина ФИК билан солиштирилсин (4-расм).

Ечиш:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\oint TdS}{\int TdS} = \frac{\int_1^2 TdS + \int_2^3 TdS + \int_3^4 TdS + \int_4^1 TdS}{\int_4^1 TdS + \int_1^2 TdS}.$$

Идеал газ учун $dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{R}{V}dV$ эканлигини ҳисобга олсак:

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1 + C_V(T_1 - T_2)/R\ln(V_2 V_1)} < \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \eta_к.$$



4-расм.

83. 1–2 изохорик, 2–3 адиабатик ва 3—1 изобарик жараёнлардан ташкил топилган Ленуар циклининг ФИК ҳисоблансин (5-расм). Босимнинг ошиш даражаси $\delta = \frac{p_2}{p_1}$ цикл параметри бўлиб ҳисобланади.

Ечиш:

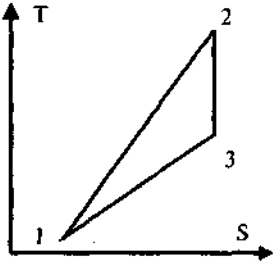
$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\oint TdS}{\int_1^2 TdS} = \frac{\int_1^2 TdS + \int_3^1 TdS}{\int_1^2 TdS} = 1 - \frac{\int_1^3 TdS}{\int_1^2 TdS}$$

Ишловчи жисмни идеал газ деб ҳисобласак, $dS = \frac{C_p}{T}dT - R\frac{dp}{p}$ бўлади.

$$\eta = 1 - \frac{C_p(T_3-T_1)}{C_p(T_2-T_1)} = 1 - \frac{T_3-T_1}{T_2-T_1} = 1 - \frac{\gamma\left(\delta^{1/\gamma}-1\right)}{\delta-1}.$$

Бу ерда $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, $\frac{T_2}{T_1} = \frac{p_2}{p_1} = \delta$, $\frac{T_9}{T_2} = \delta^{(1-\gamma)/\gamma}$, $\frac{T_9}{T_1} = \delta^{1/\gamma}$.

84. Ёқилғи аралашмани сиқиш ва кенгайтириш адиабатик ҳолда ўтказилади, унинг ёниши эса ўзгармас ҳажмда ўтувчи Отто цикли бўйича ишловчи ичдан ёнар двигателнинг ФИК топилсин (6-расм). Сиқиш даражаси $\varepsilon = V_1/V_2$ цикл параметри бўлиб ҳисобланади.



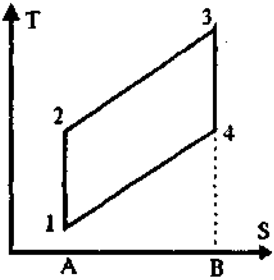
5-расм.

Ечиш:

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\oint TdS}{\int\limits_{A23B} TDS} = \frac{\int_2^3 TdS + \int_4^1 TdS}{\int_2^3 TdS} = 1 - \frac{\int_1^4 TdS}{\int_2^3 TdS}.$$

Аралашмани идеал газ деб ҳисобласак, $dS = \frac{C_V}{T}dT + R\frac{dV}{V}$ бўлади ва $TV^{\gamma-1} = \mathrm{const}$ эканлигини ҳисобга олсак: $\eta = 1 - \frac{C_V(T_4-T_1)}{C_V(T_3-T_2)} = 1 - \frac{T_4-T_1}{T_3-T_2} = 1 - \frac{1}{\varepsilon^{\gamma-1}}$.

85. Атмосфера ҳавосини 1—2 адиабатик сиқиш, 2—3 изобарик кенгайиш, 3—4 адиабатик кенгайиш, 4—1 изохорик совиш жараёнлардан иборат Дизель цикли бўйича ишловчи ичдан ёнар двигательнинг ФИК топилсин (7-расм). Сиқиш даражаси $\varepsilon = V_1/V_2$ ва дастлабки кенгайиш даражаси $\rho = V_3/V_2$ цикл параметрлари ҳисобланади.



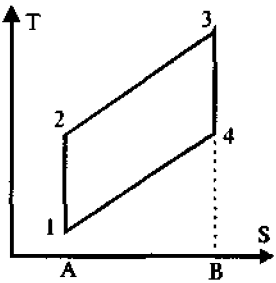
6-расм.

Е ч и ш: $\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{\oint TdS}{\int TdS} = \frac{\int_2^3 TdS + \int_4^1 TdS}{\int_2^3 TdS} = 1 - \frac{\int_1^4 TdS}{\int_2^3 TdS}$;

Ишловчи жисмни идеал газ деб ҳисобласак, у ҳолда

$$dS = \frac{C_p}{T} dT - R\frac{dp}{p} = \frac{C_V}{T} dT + R\frac{dV}{V}$$

ва $TV^{\gamma-1} = \text{const}$, $PV = \text{const}$, $\eta = 1 - \frac{1}{\lambda}\frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2} = 1 - \frac{1}{\gamma\varepsilon^{\gamma-1}}\frac{\rho\gamma - 1}{\rho - 1}$.



7-р а с м.

86. Ишловчи модда сифатида сувни олиб, Карно циклини бажариб қарайлик. Иссиқлик бериш ва иссиқлик қабул қилиш температуралари мос ҳолда 6°С ва 2°С га тенг: 6°С да сув изотермик кенгаяди, 2°С да изотермик сиқилади. $t < 4$°С да сувнинг табиати аномаллиги туфайли ҳар иккала температурада иссиқлик киритилади ва тўлиқ ҳолда ишга айлантирилади, ваҳоланки бу иккинчи бошланишга зиддир. Бу зиддият қандай ҳал этилади?

Е ч и ш: Термодинамиканинг асосий тенгламасига асосан

$$Tds = dE + pdV = C_V dT + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V dV. \quad (1)$$

Тизим адиабатик кенгайишида температура ўзгариши (1) дан қуйидаги кўринишни олади:

$$dT = -\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)}{C_V} dV. \quad (2)$$

(2) дан V, T текисликда адиабата қиялиги

$$\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_s = -\frac{T}{C_V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = -\frac{\alpha T}{\beta C_V}. \quad (3)$$

(3) дан шу нарса кўринадики, $t > 4$°С да адиабата қиялиги манфий ($a < 0$), $t > 0$ да мусбат ($a < 0$) ва $t = 4$°С да эса уринма адабиатага горизонтал бўлади. Юқоридаги мулоҳазалар шуни

кўрсатадики, $t = 6°C$ ва $t = 2°C$ даги изотермаларни бирлаштирувчи адиабата мавжуд бўлмас экан. Демак, масалада кўрсатилган Карно цикли мумкин эмас экан.

87. N_1 ва N_2 та зарралардан ташкил топган икки хил идеал газ аралашмасининг энтропия ўзгариши ҳисоблансин.

Е ч и ш: N та заррадан ташкил топган идеал газ энтропиясини $S = Nk\ln\frac{V}{N} + Nf(t)$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу ерда $f(T)$ энтропиянинг температурага боғлиқ бўлган қисми. У ҳолда турли хил идеал газларни аралаштиришга қадар энтропиялари $S_1^0 = N_1kln\frac{V_1}{N_1} + N_1f(T)$ ва $S_2^0 = N_2kln\frac{V_2}{N_2} + N_2f(T)$ бўлади. Аралаштиргандан сўнгги энтропияси

$$S^0 = S_1^0 + S_2^0. \quad (1)$$

Аралаштиргандан сўнг ҳар бир бўлак газ энтропиялари $S_1 = N_1k\ln\frac{V_1+V_2}{N_1} + N_1f(T)$ ва $S_2 = N_2k\ln\frac{V_1+V_2}{N_2} + N_2f(T)$ бўлади, аралашма энтропияси

$$S = S_1 + S_2. \quad (2)$$

Аралашма энтропиясининг ўзгариши

$$\Delta S = S - S^0 = N_1k\ln\frac{N_1+N_2}{N_1} + N_2K\cdot\ln\frac{N_1+N_2}{N_2}.$$

88. N_1 ва N_2 та заррадан ташкил топган бир хил иккита идеал газ аралашмасининг энтропия ўзгариши ҳисоблансин.

Ж а в о б: $\Delta S = 0$.

89. Қуйидаги жараёнларда энтропия ошиши кўрсатилсин: а) иссиқ сув шундай массали совуқ сувга иссиқлик беради ва температуралари тенглашади, б) турли хил босимлардаги бир хил массали идеал газларни сақловчи ташқи муҳитдан адиабатик изоляцияланган иккита бир хил идиш қувурча орқали кран билан бирлаштирилган, кран очилади ва газ ҳолати иккала идишда бир хил бўлиб қолади.

Е ч и ш: а) Аралашма температураси $T = \frac{T_1+T_2}{2}$ бўлади.

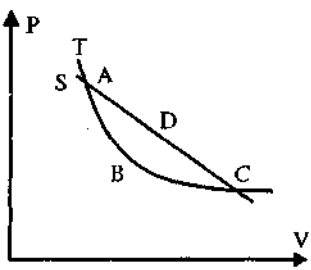
$$\Delta S = \int_{T_1}^{T} \frac{\delta Q}{T} + \int_{T_2}^{T} \frac{\delta Q}{T} = \int_{T_1}^{T} \frac{mCdT}{T} + \int_{T_2}^{T} \frac{mCdT}{T} = mC\ln\frac{(T_1+T_2)^2}{4T_1T_2} > 0.$$

б) Аралашгандан сўнг газ босими $p = \frac{p_1+p_2}{2}$ бўлади.

$$\Delta S = \int_{p_1}^{p} \frac{\delta Q}{T} + \int_{p_2}^{p} \frac{\delta Q}{T} = \int_{p_1}^{p} \frac{mC_VdT}{T} + \int_{p_2}^{p} \frac{mC_VdT}{T} = \int_{p_1}^{p} \frac{mC_VV/R}{PV/R}dp +$$

$$+\int_{p_2}^{p} \frac{mC_VV/R}{PV/R}dp = mC_V\ln\frac{(p_1+p_2)^2}{4p_1p_2} > 0.$$

90. Изотерма адиабатани икки марта кесиши мумкин эмаслиги исботлансин.



8-расм.

Ечиш: Фараз қилайлик, изотерма адиабатани A ва C нуқталарда (8-расм) икки марта кессин. Бу ҳолда ёпиқ контурдан $\oint pdV \neq 0$. Иккинчи томондан тизим энтропияси A ва C нуқталарда тенг, яъни $S_A = S_c$, шунинг учун $A = Q = \oint TdS = = T\int_{ABC} dS = 0$. Зидликка келдик. Демак, изотерма адиабатани икки марта кеса олмас экан.

91. Нернст теоремаси мутлоқ ноль температурага етишиш мумкин эмаслигига олиб келиши исботлансин.

92. Қуйидаги термодинамика учинчи қонунининг таърифларининг эквивалентлигини исботланг: а) исталган мувозанатдаги тизимнинг S энтропияси $T \to 0K$ да термодинамик параметрларга боғлиқ бўлмай қолади ва барча тизимлар учун фақат битта доимий қийматни қабул қилади, б) мутлоқ ноль температурага етишиб бўлмайди.

93. Термодинамиканинг учинчи қонуни бўйича парамагнетиклар учун Кюри қонуни (æ = C/T) исталган паст температуралар учун ҳаққоний эмаслигини кўрсатинг.

Е ч и ш: Парамагнетиклар учун термодинамиканинг асосий тенгламаси

$$TdS = dE - HdM \qquad (1)$$

кўринишда бўлади. (1) ифоданинг ҳар икки томонига тўлиқ дифференциал $d(-TS-HM)$ ни қўшамиз ва қуйидагини оламиз:

$$d(E - TS - HM) = -SdT - MdH. \qquad (2)$$

(2) дан $\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = -\left(\frac{\partial M}{\partial T}\right)_H$. Кюри қонунига кўра $M = æH = \frac{C}{T}H$, шунинг учун $\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T = -\frac{CH}{T^2}$. Бундан $T \to 0K$ да $\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T \to -\infty$ ни оламиз. Бу эса учинчи қонунга зиддир, чунки $T \to 0\ K$да $\left(\frac{\partial S}{\partial H}\right)_T \to 0$. Бу эса паст температура соҳасида Кюри қонуни ўринсизлигини кўрсатади.

94. V ҳажмни эгаллаган идеал электрон газнинг босими p ва E ички энергияси қуйидаги $pV = \frac{2}{3}E$ муносабат билан боғланган. Бундан фойдаланиб электрон газининг "нолинчи энергияси" электронлар концентрациясига боғлиқ эканлигини топинг.

Е ч и ш: Термодинамиканинг биринчи қонунидан, адиабатик жараёнларда $dE = -pdV$, $pV = \frac{2}{3}E$ ни ҳисобга олганда, $\frac{dE}{E} = -\frac{2}{3}\frac{dV}{V}$. Бундан

$$E = \text{const}\ V^{-2/3} = N^{-2/3}\text{const}(N/V)^{2/3} = \text{const}n^{-2/3}. \qquad (1)$$

Учинчи қонун бўйича ноль адиабата ноль изотермага мос тушади, шунинг учун (1) ифода "нолинчи энергия" нинг электронлар концентрациясига боғлиқлигини кўрсатади.

95. Термодинамиканинг асосий тенгламасидан фойдаланиб, адиабатик жараён шароитида босим ўзгартирилганда температура ўзгариши учун ифода топилсин ва учинчи қонундан фойдаланиб температурани тугалланмаган қийматигача ўзгартиришга зарур бўлган р босим ўзгариши $T \to 0\ K$ да чексиз ошиб бориши кераклиги кўрсатилсин.

Е ч и ш: Термодинамиканинг асосий тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$TdS = dE + pdV = \left[\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p\right]dT +$$

$$+\left[\left(\frac{\partial E}{\partial p}\right)_T + p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right]dp. \qquad (1)$$

Энтропияни ҳам T ва P боғланмаган параметрларнинг функцияси деб қарасак, (1) ифодадан: $T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_T + +p\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T = -T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_T$ ни оламиз ва (1) ифодани қуйидагича ёзамиз:

$$TdS = C_p dT - T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p pV = C_p dT - \alpha TVdp. \qquad (2)$$

Демак адиабатик жараёнда температура ўзгариши:

$$dT = T\frac{\alpha V}{C_p}dp. \qquad (3)$$

Учинчи қонунга кўра $T \to 0$ K да $C_p \to 0$ ва $\alpha \to 0$, аммо $\alpha V/C_p$ аниқ охирги чегарага интилади. Демак, температура чекли ўзгариши учун босим чексиз ўзгариши талаб этилар экан.

Энди, $\alpha V/C_p$ $T \to 0$ K да аниқ чегаравий қийматга интилишини кўрсатайлик. (2) ифодадан $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$. Шунинг учун

$$\alpha V = \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\frac{\partial}{\partial p_0}\int_0^T \frac{Cp}{T}dT = -\int_0^T \frac{\partial Cp}{\partial p}\frac{dT}{T}. \qquad (4)$$

Паст температурада

$$C_p = N^n(a + bT + cT^2 + \ldots), \qquad (5)$$

бу ерда $n > 0$, a, b, c, ... коэффициентлар эса босимга боғлиқ. (4) ифодани босим бўйича дифференциаллаб, интеграллаш натижасида қуйидагини оламиз:

$$\alpha V = -\int_0^T dT(a'T^{n-1} + b'T^n + \ldots) = -T^n\left(\frac{a'}{n} + \frac{b'T}{n+1} + \frac{c'T^2}{n+2} + \ldots\right). \qquad (6)$$

(6) ифодани (5) ифодага бўлсак ва $T \to 0$ га интилтирсак: $\frac{\alpha V}{C_p} = -\frac{\alpha n}{a'} = \text{const}$ бўлади.

96. Цикллар усули ёрдамида тўйинган буғ босимининг температурага боғланишини топинг.

Е ч и ш : Ишчи жисм, суюқлик ва тўйинган буғдан ташкил топган тизим Карно циклини бажарсин (9-расм). Бундай циклнинг ФИК $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$. Бу ерда $Q_1 - Q_2 = (\vartheta_1 - \vartheta_2)\, dp$, ϑ_2 ва ϑ_1 — буғ ва суюқликнинг солиштирма ҳажмлари, $Q_1 = \lambda$ — иситкичдан олинган иссиқлик миқдори. Иккинчи томондан Карно цикли учун ФИК $\eta = \frac{T-(T-dT)}{T} = \frac{dT}{T} = \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\lambda} dp$.

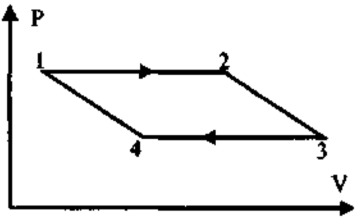
Бундан $\frac{dP}{dT} = \frac{\lambda}{T(\vartheta_2 - \vartheta_1)}$.

97. Цикллар усули ёрдамида гальваник элемент ЭЮК нинг температурага боғлиқлигини топинг.

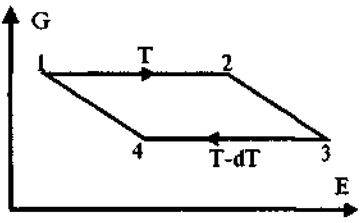
Е ч и ш: Қайтувчи гальваник элементда разрядланиш ва зарядланиш жараёни Карно цикли бўйича ўтсин дейлик (10-расм). У ҳолда бундай элементнинг ФИК $\eta = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \cdot Q_1 = E_2 - E_1 + A$, $A = e\mathcal{E}$, $E_2 - E_1 = -qe$ (q — ўтувчи бирлик зарядга тўғри келган иссиқлик эффекти). $Q_1 = -qe + e\mathcal{E} = e(\mathcal{E} - q)$; $Q_1 - Q_2 = ed\mathcal{E}$. Натижада

$$\eta = \frac{dE}{\varepsilon - q} \quad (1)$$

Иккинчи томондан $\eta = \frac{T-(T-dT)}{T} = \frac{dT}{T}$. Юқоридаги ифодалардан қайтувчи идеал гальваник элементлар ЭЮК нинг температурага боғлиқлигини берувчи Гельмгольц тенгламасини оламиз:



9-расм.

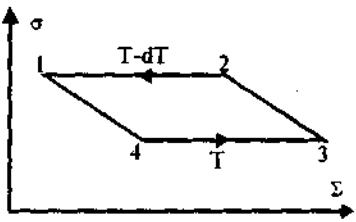


10-расм.

$$\mathcal{E} = q + T\frac{d\mathcal{E}}{dT}.$$

98. Цикллар усулидан фойдаланиб сирт таранглигининг температурага боғланганлигини топинг (11-расм).

Ечиш: Σ — плёнка сирти, δ — сирт таранглиги.
$\eta = \frac{A}{Q_1} = \frac{-(\Sigma_2-\Sigma_1)d\delta}{Q_1} = \frac{dT}{T}$. Бундан $\left(\frac{\partial\sigma}{\partial T}\right)_\Sigma = \frac{Q_1}{\Sigma_2-\Sigma_1}\,\frac{1}{T} = -\frac{\gamma}{T}$.



10-расм.

Бу ерда r — плёнка сиртини бир бирликка ошириш учун сарфланган иссиқлик миқдори.

99. Мутлоқ ноль температура яқинида гальваник элемент ЭЮКнинг температурага боғлиқ эмаслиги кўрсатилсин.

100. Бир атомли идеал газнинг моли учун F, Φ ва χ термодинамик потенциалларини топинг.

Ечиш: Термодинамик потенциалларни ҳисоблаш учун идеал газ ички энергиясини ва энтропиясини ёзиш керак. $E = C_V T + E_0$ ва $S = C_V \ln T + R\ln V + S_0'$. Шунда эркин энергия $F = F(T,V) = E - TS = C_V T(1 - \ln T) - RT\ln V - TS_0 + E_0$. Гиббс термодинамик потенциали $\Phi(T, p) = E - TS + pV = (C_p T(1 - \ln T) + RT\ln p - TS_0 + E_0$. Энтальпия $\chi(S, p) = E + pV = C_p T + E_0 = C_p p^{1-1/\gamma}\cdot \exp[S - S_0)/C_p] + E_0$.

101. Боғланмаган p, χ ва T, F ўзгарувчанларда термодинамик потенциаллар аниқлансин.

Ечиш: Энтальпия ўзгариши $d\chi = TdS + Vdp$, бундан p, χ ўзгарувчанларда термодинамик потенциал $S(p, \chi)$ энтропия бўлиб ҳисобланади:

$$dS = \frac{1}{T}d\chi - \frac{V}{T}dp \quad \text{ва} \quad T = \frac{1}{\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)_p}, \quad V = -\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_\chi}{\left(\frac{\partial S}{\partial \chi}\right)_p}.$$

Эркин энергия ўзгариши $dF = -SdT - pdV$ дан T ва F ўзгарувчанларда термодинамик потенциал ҳажм $V(T, F)$ бўлади: $dV = \frac{S}{p}dT - \frac{1}{p}dF$ ва $p = \frac{1}{(\partial V/\partial F)_T}$, $S = \frac{(\partial V/\partial T)_F}{(\partial V/\partial F)_T}$.

102. Ҳажм T температурага чизиқли боғланган моддаларда C_p иссиқлик сиғимининг босимга боғланмаганлиги аниқлансин.

Ечиш: $C_p = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p$, $\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = T\left(\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T}\right)$. Гиббс термодинамик потенциалининг ўзгариши $d\Phi = -Sdt + Vdp$ дан $\left(\frac{\partial S}{\partial P}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$. Бу ифодадан $\frac{\partial^2 S}{\partial p \partial T} = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial T^2}\right)_p$. Агар $V = a + bT$ — кўринишда боғланган бўлса, ҳақиқатдан ҳам $\left(\frac{\partial C_p}{\partial p}\right)_T = 0$ бўлади. Демак, агар ҳажм температурага чизиқли боғлиқ бўлса, C_p иссиқлик сиғими босимга боғлиқ эмас экан.

103. Идеал газ энтальпияси $\chi = C_p p^{(\gamma-1)/\gamma} e^{\frac{S-S_0}{C_p}}$ ни билган ҳолда унинг адиабата тенгламаси ва ҳолат тенгламаси топилсин.

Ечиш: $d\chi = TdS + Vdp$ дан адиабата тенгламаси $V = \left(\frac{\partial \chi}{\partial p}\right)_s$ олинади: $V = \frac{\gamma-1}{\gamma} C_p p^{-1/\gamma} e^{\frac{S-S_0}{C_p}}$, бу ифодадан $pV^\gamma = \text{const}$ ни оламиз.

$$\frac{V}{T} = \frac{(\partial\chi/\partial p)_S}{(\partial\chi/\partial S)_p} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{C_p\, p^{-1/\gamma}\, C_p}{C_p p^{(\gamma-1)/\gamma}} = \frac{C_p - C_V}{C_p} \frac{C_p}{p} = \frac{R}{T}; \; pV = RT.$$

104. Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсинувчи бир моль газнинг қайтувчи изотермик кенгайишида бажарилган иш ҳисоблансин.

Кўрсатма: $\delta A = -(dF)_T$ дан фойдаланилсин.

105. dS нинг тўлиқ дифференциаллигидан фойдаланиб, идеал газ солиштирма ички энергияси ва энтальпиясининг фақат температуранинг функцияси эканлиги кўрсатилсин.

Кўрсатма: $dE = TdS - pdV$ ва $d\chi = TdS + Vdp$ ифодалардан фойдаланилсин.

106. Адиабатик температуравий коэффициент $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_s$, босим ўзгармас бўлгандаги иссиқлик сиғими C_p ва ҳажмий кенгайиш коэффициенти α лар орасидаги боғланиш чиқарилсин.

Ечиш: $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p=-1$ айниятдан

$$\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S=-\frac{\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_p}=-\frac{T\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T}{C_p}. \qquad (1)$$

$d\Phi=-SdT+Vdp$. Бу ифодадан $-\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T=\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ ни (1) ифодага элтиб қўйсак $\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_S=\frac{TV\alpha}{C_p}$ ни оламиз.

107. $\left(\frac{\partial T}{\partial \chi}\right)_S$ ни S энтропия, C_p ва α орқали ифодаланг.

Ечиш:

$$d\Phi=-SdT+Vdp=dx-SdT-TdS. \qquad (1)$$

Бу ифодадан

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \chi}\right)_S=1-S\left(\frac{\partial T}{\partial \chi}\right)_S. \qquad (2)$$

$$d\chi=TdS+Vdp=\left[T+V\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T\right]dS+V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S dT. \qquad (3)$$

Бу ифодадан $\left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_S=V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S$. 106-масала натижасини ҳисобга олсак, $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \chi}\right)_S=1-\frac{ST\alpha}{C_p}$.

108. $\varphi=S-\frac{E}{T}$ Массье термодинамик потенциали V ва T характеристик ўзгарувчилар функцияси кўринишида берилган. Тизим ҳолатининг термик ва калорик тенгламалари аниқлансин.

Ечиш: $\varphi=S-\frac{E}{T}=\frac{TS-E}{T}=-\frac{F}{T}$, $F(T,\ V)=-T\varphi(T,\ V)$.

$E=T(S-\varphi)$. Термик ва калорик тенгламаларни олайлик:

$$dF=-SdT-pdV,\ S=-\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V=\varphi(T,V)+T\left(\frac{\partial \varphi}{\partial T}\right)_V;$$

$$E = T^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial T}\right)_V$$ — калорик ҳолат тенгламаси.

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial\varphi}{\partial V}\right)_T$$ — термик тенглама.

109. Планк $Y = S - \frac{E+pV}{T}$ характеристик функциясидан фойдаланган. Y агар p ва T ларнинг функцияси кўринишида берилган бўлса, тизимнинг V, E ва S лари топилсин. Планк термодинамик потенциалининг Гиббс энергиясининг ўртачаси билан боғланиши тиклансин.

Ечиш:

$$Y = S - \frac{E+pV}{T} = \frac{ST-E-pV}{T} = -\frac{\Phi}{T}. \qquad (1)$$

$$\Phi = -TY.\ d\Phi = -TdY - YdT = -\left[T\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_p + Y\right]dT -$$

$$-T\left(\frac{\partial Y}{\partial P}\right)_T dp = -SdT + Vdp.$$

Бундан

$$S = T\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_p + Y. \qquad (2)$$

$$V = -T\left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)_T. \qquad (3)$$

(1), (2) ва (3) ифодалардан:

$$E = TS - TY - PV = T^2\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_p + TY -$$

$$-TY + pT\left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)_T = T\left[T\left(\frac{\partial Y}{\partial T}\right)_p + p\left(\frac{\partial Y}{\partial p}\right)_T\right].$$

110. Баъзи тизимларда Гиббс энергиси $\Phi = \alpha T(1 - \ln T) + RT\cdot\ln p - TS_0$ — ўзгармас катталиклар. Шу тизимнинг термик ва калорик тенгламалари топилсин.

Ечиш: $\Phi = E - TS + pV$, $d\Phi = -SdT + Vdp$.

$$V = \left(\frac{\partial\Phi}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial p}\left[\alpha T(1-\ln T) + RT\ln p - TS_0\right]_T = \frac{RT}{p}.$$

$pV = RT$ — ҳолат тенгламаси.

$$E = \Phi + TS - pV = \Phi - T\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_p - p\left(\frac{\partial\Phi}{\partial T}\right)_T = \alpha T\,(1 - \ln T) +$$
$$+ RT\ln p - TS_0 - T\left[\alpha(1 - \ln T) - \alpha + R\ln p - S_0\right] - RT =$$
$$= (\alpha - R)T + E_0 \cdot E = (\alpha - R)T + E_0$$ — калорик тенглама.

111. $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S\left(\frac{\partial V}{\partial S}\right)_T - \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = 1$ ифода олинсин.

Ечиш: I усул.

$$p = p(T, V) \qquad (1)$$

$S = \mathrm{const}$ ҳолида (1) дан

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V - \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = 1. \qquad (2)$$

$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -1$ айниятни ҳисобга олсак (2) ифода

$$\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_S\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V + \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_S = 1 \qquad (3)$$

кўринишни олади. $dF = -SdT - pdV$ ва $d\Phi = -SdT + Vdp$ ифодалардан фойдаланиш натижасида берилган ифода олинади.

II усул. $C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ тенгликдан фойдаланиб чиқариш мумкин.

112. Паст температураларда металларда электрон газининг энтропияси термодинамик температурага мутаносиб. Шу температураларда электрон гази иссиқлик сиғимлар айирмаси $C_p - C_V$ нинг температурага боғлиқлиги топилсин.

Ечиш: $C_p - C_V = T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$, $dF = -SdT - Vdp$ ва $d\Phi = -SdT + Vdp$ ифодалардан $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_p$ ва $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T$ тенгликларни оламиз. Шартга асосан $S = dT$. Натижада $C_p - C_V = -T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -T_3\frac{\partial\alpha}{\partial V}\,\frac{\partial\alpha}{\partial p}$.

113. Дебай қонуни бўйича кристаллар иссиқлик сиғими C_V паст температураларда термодинамик температуранинг кубига мутаносиб: $C_V = \alpha T^3$. Кристалларда $C_p - C_V$ иссиқлик сиғимлар фарқи $T \to O\ K$да температуранинг еттинчи даражасига мутаносиблиги кўрсатилсин.

Ечиш: Шартга асосан $C_V = \alpha T^3$.

$$C_p - C_V = -T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -T. \quad C_V = T\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V.$$

$$S = \int_0^T \frac{C_V}{T} dT = \int_0^T \frac{dT^3}{T} dT = \frac{\alpha}{3} T^3; \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial V}\right)_T T^3$$

ва $\left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = \frac{1}{3}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T T^3$, натижада $C_p - C_V = -\frac{1}{9}\left(\frac{\partial \alpha}{\partial V}\right)_T \left(\frac{\partial \alpha}{\partial p}\right)_T T^7$.

114. ν_1 моль бир хил ва ν_2 моль бошқа хил компоненталардан ташкил топган идеал газлар аралашмасининг Гельмгольц энергияси олинсин. Бу газлар изотермик диффузияларида Гельмгольц энергиясининг ўзгариши топилсин.

Ечиш: Термодинамик потенциалларни аддитив қонуниятга бўйсинишини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$F(T, V, \nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n) = \sum_{i=1}^{n} F_i(T, V, \nu_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \nu_i \left[E_i - T\left(C_{Vi} \ln T + R \ln \frac{V}{\nu_i} + S_{oi}\right)\right]. \qquad (1)$$

(1) ифодага кўра изотермик диффузияда эркин энергия камаяди. Шартга кўра газ аралашмаси ν_1 моль ва ν_2 моль турли хил газлардан ташкил топган. Диффузияга қадар бу газлар аралашмасининг эркин энергияси

$F_1 = \nu_1 \left[E_1 - T\left(C_{V1} \ln T + R \ln \frac{V_1}{\nu_2} + S_{01}\right)\right] + \nu_2 \left[F_2 - T\left(C_{V2} \ln T +\right.\right.$
$\left.\left. + R \ln \frac{V_2}{\nu_2} + S_{02}\right)\right]$, диффузиядан кейинги энергияси $F_{11} =$
$= \nu_1 \left[E_1 - T\left(C_{V1} \ln T + R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} + S_{01}\right)\right] + \nu_2 \left[E_2 - T\left(C_{V2} \ln T +\right.\right.$
$\left.\left. + R \ln \frac{V_1 + V_2}{V_2} + S_{02}\right)\right]$. У ҳолда Гельмгольц энергиясининг ўзга

риши $\Delta F = F_{II} - F_I = -RT\left\{\nu_1 \ln\frac{V_1+V_2}{V_1} + \nu_2 \ln\frac{V_1+V_2}{V_2}\right\} < 0$. Агар $V_1 = V_2$ ва $\nu_1 = \nu_2 = 1$ бўлса, у ҳолда $\Delta F = -2RT\ln 2$ бўлади.

Агарда газлар аралашмаси айнан газларнинг икки порциясидан ташкил топган бўлса, $\Delta F = 0$. Турли хил аралашмасидан бир хил газлар аралашмасига ўтганда $\Delta F = 0$ дан $\Delta F = -2RT\ln 2$ ўзгаришига Гиббс парадокси дейилади.

115. ν_1 моль бир хил ва ν_2 моль бошқа хил компоненталардан ташкил топган идеал газлар аралашмасининг Гиббс энергияси олинсин. Бу газлар энергиясининг ўзгариши топилсин.

Ечиш: $\Phi = \sum_i \nu_i \Phi_i$ ифодага кўра

$$\Phi(T, p, \nu_1, \nu_2) = \nu_1 \Phi_1(T, p_1) + \nu_2 \Phi_2(T, p_2) =$$
$$= \nu_1[E_1 - T(C_{p1}\ln T - R\ln p_1 + S_{01}) + p_1 V] +$$
$$+ \nu_2[E_2 - T(C_{p2}\ln T - \ln p_2 + S_{02}) + p_2 V] =$$
$$= \nu_1\chi_1(T) + \nu_1 RT\ln p_2 + \nu_2\chi_2(T) + \nu_2 RT\ln p_2, \qquad (1)$$

Бу ерда $\chi(T) = E(T) - TC_p\ln T + RT + S_0$, p_1 ва p_2 эса биринчи ва иккинчи газлар ва аралашма босими.

Газлар идишда тўсиқ орқали ажратилган бўлсин, у ҳолда диффузияга қадар Гиббс энергияси $\Phi_1 = \nu_1\chi_1(T) + \nu_1 RT\ln p_1^0 + \nu_2\chi_2(T) + \nu_2 RT\ln p_2^0$. Бу ерда $p_1^0 = \nu_1 RT/V_1$ ва $p_2^0 = \nu_2 RT/V_2$.

Диффузиядан сўнг эса:

$$\Phi_{II} = \nu_1\chi_1(T) + \nu_1 RT\ln p_1 + \nu_2\chi_2(T) + \nu_2 RT\ln p_2.$$

Бу ерда $p_1 = \nu_1 RT/(V_1 + V_2)$ ва $p_2 = \nu_2 RT/(V_1 + V_2)$. У ҳолда Гиббс энергиясининг ўзгариши

$$\Delta\Phi = \Phi_{II} - \Phi_I = RT\left[\nu_1\ln\left(p_1/p_1^0\right) + \nu_2\ln\left(p_2/p_2^0\right)\right] < 0,$$

чунки $p_1/p_1^0 = V_1/(V_1 + V_2) < 1$, $p_2/p_2^0 = V_2/(V_1 + V_2) < 1$. Агар $V_1 = V_2$ ва $\nu_1 = \nu_2 = 1$ бўлса, у ҳолда $\Delta\Phi = -2RT\ln 2$. Бир моль бир хил иккита газ аралашмаси учун $\Delta\Phi = 0$ бўлади. Олдинги масаладаги каби Гиббс парадоксига келамиз.

116. Идеал газ ва Ван-дер-Ваальс тенгламасига бўйсинувчи газлар химиявий потенциали топилсин.

Кўрсатма: Газлар Гиббс термодинамик потенциали ҳисоблансин ва битта заррага тўғри келган Гиббс термодинамик потенциалига мос келган энергия химиявий потенциал эканлиги ҳисобга олинсин.

117. $U = U(x, y, z)$ ташқи потенциал майдонда ётган идеал газнинг химиявий потенциали топилсин.

Жавоб: $\mu = \mu_0 + U$. Хусусий ҳолда $\mu = \mu_0 + mgz$.

118. $N = V\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right)_{T,V}$; $\mu = V\left(\frac{\partial E}{\partial N}\right)_{S,V} = \left(\frac{\partial \chi}{\partial N}\right)_{S,p}$ тенгликлари кўрсатилсин.

Ечиш: $dE = TdS - pdV + \mu dN$, $d\chi = TdS + Vdp + \mu dN$, $dB = -SdT - pdV - Ndm$ ва $B = F - \Phi = -pV$. Ифодалардан масала топилиши керак бўлган катталикларни оламиз.

119. T, μ, V ўзгарувчанларда C_V ни топинг.

Жавоб: $C_V = kT\left[\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_\mu - \left(\frac{\partial N}{\partial T}\right)_\mu^2 \Big/ \left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_T\right]$.

120. Баъзи элементларнинг ЭЮК температурага боғлиқлиги $\varepsilon = [0{,}96446 + 1{,}74(t^\circ - 25)\cdot 10^{-4} + 3{,}8(t^\circ - 25)^2 \cdot 10^{-7}]$ В формула билан берилади. Элемент ЭЮК нинг қандай қисми иссиқлик резервуар орқали етказилиши ва 25°С да иссиқлик реакцияси нимага тенглиги аниқлансин.

Ечиш: $t = 25$°С да элементнинг ЭЮК $\mathcal{E} = 0{,}96446$ В. Гиббс-Гельмгольц тенгламасига асосан

$$\mathcal{E} = q + T\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p = \frac{Q_p}{e} + T\cdot\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p = \frac{Q_p}{zF} + T\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p.$$

Бу ерда z — валентлик, F — Фарадей сони, $T\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p$ — элемент ЭЮК нинг иссиқлик резервуар орқали етказиладиган қисми.

$$T\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p = T\cdot 1{,}74\cdot 10^{-4}\,\text{В} = 298\cdot 1{,}74\cdot 10^{-4}\,\text{В} = 4{,}585\cdot 10^{-2}\,\text{В}.$$

1 Кулон зарядга тўғри келган иссиқлик реакцияси

$$\frac{Q_p}{e} = \frac{Q_p}{zF} = \mathcal{E} - T\left(\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial T}\right)_p = 0{,}96446\,\text{В} - 4{,}585\cdot 10^{-2}\,\text{В} = 0{,}9188 \text{ Ж/Кл}.$$

121. Қайтувчи гальваник элементи ЭЮК нинг ташқи босимга боғлиқлиги топилсин.

122. Агар Ван-дер-Ваальс газининг зичлиги кичик бўлса, у ҳолда битта инверсия нуқтага эга бўламиз. Умумий ҳолда ҳар қандай зичликларда иккита инверсия нуқтаси мавжудлиги кўрсатилсин ва T, p диаграммада Ван-дер-Ваальс газининг инверсия эгрилиги графиги берилсин.

Е ч и ш: Жоул-Томсон эффектини характерловчи ифода $\frac{\Delta T}{\Delta p} = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_p - V}{C_p}$ дан инверсия нуқтасида $T\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_p - V = 0$ бўлади. Бундан Ван-дер-Ваальс гази учун $\frac{2a}{V^2} - \frac{RTb}{(V-b)^2} = 0$.

Бу ифодадан ҳажм V ни топиб олиб, Ван-дер-Ваальс тенгламасига элтиб қўйиш натижасида инверсия температураси T ни босим p нинг функцияси кўринишида топамиз:

$$T_i = \frac{8}{9Rb}\left(1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{3b^2}{a}p}\right)^2.$$

123. Сийраклашган Ван-дер-Ваальс газ инверсия температураси билан критик температураси орасидаги боғланиш ҳисоблансин.

124. Инверсия нуқтасида $C_p - C_V = V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ эканлиги кўрсатилсин.

Е ч и ш: Жоул-Томсон эффектига кўра инверсия нуқтасида $T \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = 0$ ёки $T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V$ бўлади. Шунинг учун $C_p - C_V = T \cdot \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ бўлади.

125. Ван-дер-Ваальс ва Дитеричининг иккинчи тенгламасига бўйсинувчи газлар учун $C_p - C_v$ айирма инверсия нуқтасида ҳисоблансин.

Е ч и ш: $C_p - C_V = V\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$.

1) $\left(p + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT$ дан $p = \frac{RT}{V-T} - \frac{a}{V_2}$.

$$C_p - C_V = V\frac{R}{V-b} = \frac{R}{1-\frac{b}{V}} \simeq R\left(1 + \frac{b}{V}\right).$$

2) $\left(p+\frac{a}{V^{5/9}}\right)(V-b)=RT$ дан $p=\frac{RT}{V-b}-\frac{a}{V^{5/9}}$.

$$C_p - C_V = V\frac{R}{V-b} \simeq R\left(1+\frac{b}{V}\right).$$

126. Кюри ва Кюри-Вейс қонунларига бўйсинувчи моддалар учун магнитокалорик эффект катталиги $\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_p$ топилсин.

Ечиш: $M = æH$, бу ерда $æ = \frac{C}{T}$ — Кюри қонунига кўра, $æ = \frac{C}{T-\theta}$ — Кюри-Вейс қонунига кўра, θ — Кюрининг парамагнит нуқтасидаги температура. Магнетиклар учун энтальпия ўзгариши $d\chi = TdS + Vdp - MdH$ дан $\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{S,p} = -\left(\frac{\partial M}{\partial S}\right)_{H,p}$. Бу ифодадан Кюри қонунига бўйсинувчи моддалар (парамагнетиклар) учун $\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{S,p} = \frac{CH}{C_{p,H}T}$ ва Кюри-Вейс қонунига бўйсинувчи моддалар (ферромагнетиклар) учун $\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{S,p} = \frac{CTH}{C_{p,H}(T-\theta)^2}$ ни оламиз.

127. Ташқи магнит майдон $\vec{H}$ бўйлаб жойлашган l узунликдаги стержень f куч билан тортилади. Тажрибадан маълумки, бу ҳолда стерженнинг магнитланганлиги $M = \text{const}\frac{lH}{F}$ формула билан берилади. Ана шундай магнитострикцияда стержень узунлигининг нисбий ўзгариши ҳисоблансин.

Ечиш: Гиббс термодинамик потенциалининг ўзгариши: $d\Phi = -SdT + Vdp - MdH$ кўринишни олади. Бу ифодадан $\left(\frac{\partial l}{\partial H}\right)_f = \left(\frac{\partial M}{\partial f}\right)$, муносабатни оламиз. Натижада қуйидаги ифодани оламиз: $\frac{\Delta l}{l} = -\text{const}\frac{H^2}{2f^2}(1-\alpha f)$. Бу ерда $\alpha = \frac{1}{l}\frac{\partial l}{\partial f}$ — чўзишдаги қайишқоқ коэффициенти.

128. Магнетик H магнит майдонда жойлаштирилган ва p ташқи босим остида ётибди. Ҳажм магнитострикция $\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_p$

ва “пьезомагнит” эффект $\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_H$ орасидаги боғланиш чиқарилсин. 0 дан H гача ошиб борувчи кучсиз майдондаги магнитострикция ҳажмининг нисбий ўзгариши ҳисоблансин.

Кўрсатма: $d\Phi = -SdT + Vdp - MdH$. $M = æHV$, бу ерда $æ$ — магнит қабул қилувчанлик, V — магнетик ҳажми.

Жавоб:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{p,T} = -\left(\frac{\partial M}{\partial p}\right)_{H,T} \text{ ва } \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_p = -H\left(V\frac{\partial æ}{\partial p} + æ\frac{\partial V}{\partial p}\right).$$

129. Агар нурланиш спектрал энергия зичлиги u_ν бўшлиқнинг девор моддасига боғлиқ бўлганда эди, бу ҳолда иккинчи хил доимий двигателни амалга ошириш мумкин бўлар эди. Ана шу ҳол кўрсатилсин.

130. Қора жисмнинг спектрал энергетик ёритувчанлиги ε_ν ва унинг мувозанат нурланиш спектрал энергия зичлиги u_ν орасидаги боғланиш ўрнатилсин.

Жавоб: $\varepsilon_\nu = \frac{cu_\nu}{4}$, бу ерда c — ёруғлик тезлиги.

131. Ёруғлик квантлари тўғрисидаги тасаввурга асосан ойна деворга берилган мувозанат нурланиш босими ҳисоблансин.

Жавоб: $p = \frac{u}{3}$.

132. Мувозанатли нурланиш учун C_ν, F, S, χ, Φ ва химиявий потенциал μ ҳисоблансин.

Ечиш: Стефан-Больцман қонунига кўра мувозанатли нурланиш энергияси $E = uV = \sigma T^4 V$. $C_\nu = \sigma T^3 V$. Энтропияни термодинамиканинг асосий тенгламасидан топамиз. $dS = \frac{dE + pdV}{T} = \frac{Vdu}{T} + \frac{p+u}{T}dV$. Мувозанатли нурланиш босими $p = \frac{u}{3} = \frac{\sigma T^4}{3}$.

$$dS = 4\sigma T^2 V + \frac{4}{3}\sigma T^3 V = d\left(\frac{4}{3}\sigma T^3 V\right).$$

Бундан $S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V$.

Мувозанатли нурланиш эркин энергияси

$$F = E - TS = -\frac{1}{3}\sigma T^4 V.$$

Мувозанатли нурланиш энтальпияси

$$\chi = E + pV = \frac{4}{3}\sigma T^4 V.$$

Мувозанатли нурланиш Гиббс термодинамик потенциали $\Phi = F + pV = -\frac{1}{3}\sigma T^4 V + \frac{1}{3}\sigma T^4 V = 0$.

Мувозанатли нурланиш химиявий потенциали

$$\mu = \frac{\Phi}{N} = 0.$$

133. Бир бирлик ҳажмда мувозанатли нурланиш учун C_p, C_V, $C_p - C_V$, $\frac{C_p}{C_V}$ аниқлансин ва идеал газ иссиқлик сиғими билан солиштирилсин.

Ечиш: $u = \sigma T^4$ дан $C_V = \left(\frac{\partial U}{\partial T}\right)_V = 4\sigma T^3$. $C_p = \left(\frac{\partial \chi}{\partial T}\right)_p$, бу ерда $\chi = u + p$ — солиштирма энтальпия. У ҳолда $\chi = \frac{4}{3}\sigma T^4$, $C_p = \frac{16}{3}\sigma T^3$. $C_p - C_V = \frac{4}{3}\sigma T^3$. $\gamma_{МН} = C_p/C_V = 1/3$.

Идеал газ солиштирма иссиқлик сиғимини топайлик. Идеал газнинг ҳажм бирлигидаги ички энергияси $u = \frac{3}{2}nkT$. $C_v = \frac{3}{2}nk$. $C_p = \frac{5}{2}nk$. $C_p - C_v = nk$. $\gamma_{ИД} = C_p/C_V = 5/3$. $\gamma_{ИД}/\gamma_{МН} = 5$.

134. Оқ деворли V ҳажмли бўшлиқдаги қора нурланиш худди шундай деворли ҳавоси тўла ҳолда сўриб олинган V_1 ҳажмли бўшлиқда кенгайтирилганда унинг энтропияси қанча марта кўпайиши аниқлансин.

Ечиш: Иш бажармасдан тизим адиабатик ҳолда кенгайтирилганда унинг ички энергияси ўзгармайди. Шунинг учун $E = \sigma T^4 V = \sigma T^4 V = \sigma T_1^4 (V + V_1)$ бўлади. Бундан $\frac{T}{T_1} = \sqrt[4]{(V + V_1)/V}$ бўлади. Нурланиш энтропияси: $S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V$ ва $S_1 = \frac{4}{3}\sigma T^3 (V + V_1)$ ёки $S = \frac{4E}{3T}$ ва $S_1 = \frac{4E}{3T_1}$, $\frac{S_1}{S} = \frac{T}{T_1}$. Демак, $\frac{S_1}{S} = \sqrt[4]{\frac{V+V_1}{V}}$ марта ортар экан.

135. Мувозанатли нурланишни адиабатик кенгайтиришда унинг частотасининг ўзгариши ва спектрал энергия зичлиги $\frac{\nu}{T} = \mathrm{const}$ ҳамда $\frac{u_\nu}{T^3} = \mathrm{const}$ муносабатлар билан аниқланиши кўрсатилсин.

Ечиш: Мувозанатли нурланиш электромагнит тўлқинлардан иборат. Бу тўлқинлар иккита кўндаланг тўлқинлардир. ν, $\nu + d\nu$ частоталар оралиғидаги тўлқинлар сони $g(\nu)d\nu = 2\frac{4\pi\nu^2 V}{c^3}d\nu$. Мувозанат нурланиш эгаллаган V ҳажмдаги ҳамма тўлқинлар сони $\frac{8\pi\nu^3 V}{3c^3}$ бўлади. Агар бўшлиқ ҳажмини адиабатик ҳолда ўзгартирсак ҳам, бу сон ўзгармасдан қолади:

$$\nu^3 V = \mathrm{const}. \quad (1)$$

Иккинчи томондан адиабатик кенгайтиришда $S = \frac{4}{3}\sigma T^3 V = \mathrm{const}$ ёки $T^3 V = \mathrm{const}$ бўлади. Бу ифодалардан $\frac{\nu}{T} = \mathrm{const}$ бўлиши келиб чиқади.

$u = \sigma T^4$ ва $S = \frac{4}{3}\sigma T^3$ ифодалардан шу келиб чиқадики, $\varepsilon(\nu, T)$ энергия ва $S(\nu, T)$ энтропия ҳар бир частотада $\varepsilon(\nu, T) = \mathrm{const}\cdot T\cdot \acute{S}(\nu, T) = \nu\varphi(\nu/T)$ муносабат билан боғланган. Мувозанатли нурланиш спектрал энергия зичлиги $u_\nu = \varepsilon(\nu, T)\, g(\nu) = \nu^3\varphi(\nu/T)\cdot \mathrm{const}$. Бундан адиабатик жараёнда $\frac{u_\nu}{T^3} = \mathrm{const}$ бўлиши келиб чиқади.

136. Ўзгармас ташқи босим остида адиабатик ҳолда изоляцияланган поршенли цилиндрда идеал газ мавжуд. Тўғридан-тўғри энтропия вариациялари δS ва $\delta^2 S$ ни ҳисоблаб мувозанат ҳолатда энтропия максималлиги кўрсатилсин.

Ечиш: Тизим мувозанатида $\Delta S < 0$, $\delta S = 0$ ёки $\delta^2 S < 0$ бўлиши керак. Термодинамиканинг асосий тенгламасига кўра идеал газ учун $dS = \frac{C_V}{T}dT + \frac{R}{V}dV$ ва $\delta Q = C_V dT + p_0 dV$. Цилиндр адиабатик изоляцияланганлигидан $C_V dT = -p_0 dV$. Шунинг учун энтропия дифференциали $dS = \frac{1}{T}\left(\frac{RT}{V} - p_0\right)\times \times dV = \frac{1}{T}(p - p_0)dV$, буерда $p = \frac{RT}{V}$ — газ босими, p_0 — ташқи босим. Бундан шу кўринадики, мувозанат ҳолат ($dS = 0$)

фақат $p = p_0$ да мумкин бўлади. Бу ҳолда газ энтропияси максимал ҳолатда бўлади. Идеал газ энтропияси $S = C_V \ln T + R \ln V + S_0$ бўлади.

Фараз қилайлик, газ ҳажми δV га, температураси эса δT га ўзгарсин. У ҳолда

$$\Delta S = C_V \ln \frac{T+\delta T}{T} + R \ln \frac{V+\delta V}{V} \simeq C_V \frac{\delta T}{T} + R \frac{\delta V}{V} - \frac{1}{2}\left[C_V \frac{\delta T^2}{T^2} + R \frac{\delta V^2}{V^2}\right] =$$

$$= \frac{1}{T}\left[\frac{RT}{V} - p_0\right]\delta V - \frac{1}{2}\left[C_V \frac{\delta T^2}{T^2} + R \frac{\delta V^2}{V^2}\right] = \frac{1}{T}(p - p_0)\delta V -$$

$$- \frac{1}{2}\left[C_V \frac{\delta T_2}{T_2} + R \frac{\delta V_2}{V_2}\right].$$ Бу ифодадан $\delta S = \frac{1}{T}(p - p_0)\delta V$ ва

$$\delta^2 S = -\left[C_V \frac{\delta T_2}{T_2} + R \frac{\delta V_2}{V_2}\right].$$ Бу ифодадан ҳар қандай δT ва δV

да $\delta^2 S < 0$ бўлиши келиб чиқади. Демак, мувозанат вақтида энтропия максимал қиймат қабул қилар экан.

137. S = const ва p = const бўлган тизимда мувозанат энтальпия χ нинг минимумида, S = const ва V = const бўлган тизимда эса мувозанат ички энергия E нинг минимумида юз бериши кўрсатилсин.

Ечиш: $d\chi < TdS + Vdp$ дан S = const ва p = const да $d\chi < 0$ ёки $\Delta\chi < 0$ бўлади. Демак, мувозанат энтальпия χ нинг минимумида юз беради.

$dE < TdS - pdV$ дан S = const ва V = const да мувозанат ички энергиянинг минимумида юз беради.

138. Турли хил моддали иккита фазанинг мувозанат шарти, яъни ҳар бир компонентаси битта фаза таркибига кирувчи икки фазали икки компонентали тизимнинг мувозанат шарти аниқлансин.

Ечиш: Турли хил моддалардан ташкил топилган (масалан: сув ва керосин) икки фазали тизим мувозанат ҳолатда бўлиши учун $\delta S < 0$ ёки $\delta S = 0$, $\delta^2 S < 0$ бўлиши керак. Икки фазали икки компонентали бундай тизим энтропияси $S = N's' + N''s''$ бўлади. Ички параметрлари N', N'', v', v'', E' ва E'' қуйидаги шартларни қаноатлантиради: N' = const, N'' = const, $E = E'N' + E''N''$ = const, $V = v'N' + v''N''$ = const. Ўзаро боғланмаган параметрлар деб v', E' ни қабул қиламиз.

Мувозанат шарти $\delta S = 0$ бўлганлиги учун ёзилган ифодалардан биринчи вариация олиб, термодинамиканинг асосий тенгламасидан олинган биринчи вариацияни $N'\frac{\delta E'+p'\delta v'}{T'} + N''\frac{\delta E''+p''\partial v''}{T''} = 0$ ифода билан биргаликда ечиш натижасида $\left(\frac{1}{T'}-\frac{1}{T''}\right)\delta E' + \left(\frac{p'}{T'}-\frac{p''}{T''}\right)\delta\vartheta' = 0$ ва $T' = T'', p' = p''$ ни оламиз. Химиявий потенциалга ҳеч қандай шарт қўйилмайди.

139. Ташқи майдондаги тизимнинг мувозанат шарти аниқлансин.

Е ч и ш: Бундай тизимнинг мувозанат шарти $\Delta\Phi > 0$ ёки $\delta\Phi = 0, \delta^2\Phi > 0$ бўлади. Ташқи майдон таъсири остида бўлган тизим энергияси $dE = TdS - pdV + \mu dN + \varphi dN$ бўлади. Бу ерда φ — битта заррага тўғри келган потенциал энергия. Бу ифодадан Гиббс термодинамик потенциалининг ўзгариши учун қуйидаги ифодани оламиз: $d\Phi = -SdT + Vdp + +(\mu + \varphi)dN$. Бу ифодадан $\left(\frac{\partial\Phi}{\partial N}\right)_{T,\varphi} = \mu+\varphi$ келиб чиқади. Бутун жисм термодинамик потенциали $\Phi = \int(\mu+\varphi)dn$ бўлади. Тизимда мувозанат шартига кўра $\delta\Phi = \int(\mu+\varphi)\delta(dN) = 0$. Агар тизимдаги тўла зарралар сони сақланса: $\int\delta(dn) = 0$. Демак, ташқи майдонда бўлган тизим мувозанатда бўлиши учун $\mu + \varphi = \text{const}$ бўлиши керак.

140. Мувозанатнинг барқарорлик шарти $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T < 0$, $\left(\frac{\partial T}{\partial S}\right)_p = \frac{T}{C_p} > 0$ катта бир жинсли тизимнинг кичик қисми учун чиқарилган. Бутун тизим учун улар қайси ҳолларда тўғри ва қайси ҳолларда нотўғри?

141. Ван-дер-Ваальс эгрилигида ўта совутилган буғнинг метастабил ҳолатига мос келадиган ва суюқликнинг метастабил ҳолатига мос келган қисмларини кўрсатинг ва охиргиси ўта қизиган суюқликка мос келмаслигини исботланг.

142. Агар изотроп магнетик ҳолати қуйидаги катталиклар билан характерланса:

а) H ва B, у ҳолда $dE = TdS - pdV + \frac{H}{4\pi}dB$,

б) H ва M, у ҳолда $dE = TdS - pdV + HdM$. Бу ерда $E' = E - \frac{H}{8\pi}$. Мувозанатнинг барқарорлик шартига кўра $\left(\frac{\partial f}{\partial l}\right)_T < 0$. Магнетик учун бу шарт қуйидаги кўринишни олади:

а) $\left(\frac{\partial H}{\partial B}\right)_T = \frac{1}{\mu} > 0 \quad \left(\lambda = B; f = \frac{H}{4\pi}\right)$, бу эса тажриба билан мос келади.

б) $\left(\frac{\partial H}{\partial M}\right)_T = \frac{1}{æ} > 0$, бу эса диамагнетикларнинг термодинамик барқарорлик шартини кўрсатувчи ($æ < 0$ диамагнетиклар учун) тажрибага зиддир.

Юзага келган қарама-қаршилик сабаби тушунтирилсин.

Кўрсатма: Ташқи магнит майдон таъсирида изотроп магнетикларнинг ҳажм бирлигида қутблаш иши $\delta A = -\frac{1}{4\pi}(HdB)$ ни ҳисобга олишда, парамагнетиклар учун $\bar{M} = \frac{\mu-1}{4\pi}H$ ва диамагнетиклар учун эса $\mu < 0$ эканлигига асосланиш керак.

143. Электрон эмиссияси натижасида металл ичидаги бўшлиқда электрон гази ҳосил бўлади. Мувозанат вақтида эркин энергия минимум бўлишига асосланиб, T температурада бўшлиқдаги электрон газининг зичлиги $\left(n = \frac{N}{V}\right)$ аниқлансин. Электроннинг чиқиш иши W, электрон газининг энтропияси эса бир атомли идеал газнинг энтропиясига тенг.

Ечиш: Ҳажм бирлигидаги электрон газининг ички энергияси ўртача кинетик энергия ва чиқиш ишининг йиғиндисига тенг бўлади:

$$E = \frac{3}{2}nkT + nW,$$

унинг эркин энергияси

$$F = E - TS = \frac{3}{2}nkT + nW - Tnk\left(\frac{3}{2}\ln T - \ln n + \ln b\right),$$

бу ерда n — электрон газининг мувозанат зичлиги, $b = 2\left(\frac{2\pi mk}{h^2}\right)^{3/2}$ — ўзгармас катталик. T температурада мувозанатли электрон зичлиги эркин энергиянинг минимумлик шарти $\left(\frac{\partial F}{\partial n}\right)_{T,V} = 0$ дан аниқланади: $n = bT^{\frac{3}{2}}e^{\frac{W}{kT}}$.

144. Мувозанатнинг барқарорлик шартига мувофиқ $T \to 0$ K да C_p ва C_V иссиқлик сиғимларининг $C = \alpha T^n (a = \text{const})$ кўринишидаги температурали боғланишида кўрсаткич $n \geq 1$ эканлиги кўрсатилсин.

Кўрсатма: Мувозанатнинг барқарорлик шартлари: $\frac{T}{C_p} > 0$ ва $\frac{T}{C_V} > 0$-ларга асосланиб, $n \geq 1$ лиги кўрсатилади.

145. Агар бир жинсли тизим баъзи барқарорлик ҳолатида $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$ бўлса, у вақтда бу ҳолатда $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0$, $\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_T < 0$ лиги кўрсатилсин.

Ечиш: Барқарорлик матрицаси $\Delta T \Delta S - \Delta p \Delta V > 0$ да ўзаро боғланмаган координаталар учун T ва V ни оламиз, у ҳолда $T = const$ да

$$\Delta p \Delta V = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T (\Delta V)^2 + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T (\Delta V)^3 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_T (\Delta V)^4 + \ldots < 0$$

Шартга кўра $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0$. Демак, $\Delta p \Delta V > 0$ бўлиши учун (1) ифодадан $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0$, $\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_m < 0$ бўлиши керак.

146. Агар баъзи барқарор ҳолатларда $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = 0$ бўлса, у ҳолда бу ҳолатларда $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial V^2}\right)_p = 0$, $\left(\frac{\partial^3 T}{\partial V^3}\right)_p$ эса мусбат ҳам ёки манфий ҳам бўлишлиги кўрсатилсин.

К ў р с а т м а:

$$\Delta T\Delta S - \Delta p\Delta V > 0\,. \qquad (1)$$

Бу ерда $T = T(V, p)$ ва $S = S(V, p)$ деб қараб, $\Delta S > 0$ ва $\Delta S < 0$ ҳоллар учун $\left(\frac{\partial^2 T}{\partial V^2}\right)_p = 0$, $\left(\frac{\partial^3 T}{\partial V^3}\right)_p \gtrless 0$ бўлиши олинади.

147. Агар баъзи ҳолатларда $\left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_T = 0$ бўлса, у вақтда бу ҳолат барқарор бўлиши учун бир вақтда иккинчи тартибли ҳосиласи ҳам нолга тенг бўлиши шарт, аммо $\left(\frac{\partial^3 p}{\partial S^3}\right)_T \gtrless 0$ бўлади.

К ў р с а т м а:

$$\Delta T\Delta S - \Delta p\Delta V > 0\,. \qquad (1)$$

$p = p(T,S)$ ва $V = (T, S)$ деб, $T = \text{const}$ да $\Delta V > 0$ ва $\Delta V < 0$ ҳоли учун $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial S^2}\right)_p = 0$, $\left(\frac{\partial^3 p}{\partial S^3}\right)_T \gtrless 0$ бўлади.

148. Бир жинсли тизимнинг баъзи ҳолатларида $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = 0$. Бу ҳолатнинг барқарорлик шарти қандай бўлади?

Е ч и ш: $\Delta T\Delta S - \Delta p\Delta V = 0$. $p = p(V,S)$ ва $T = T(V\ S)$ деб қараймиз. У ҳолда $S = \text{const}$ да

$$\Delta p\Delta V = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S \Delta V + \frac{1}{2!}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S (\Delta V)^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_S (\Delta V)^3 + \ldots < 0.$$

Демак, баъзи ҳолатларда $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S = 0$ бўлса, у ҳолда бу ҳолат барқарор бўлиши учун $\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_S = 0$ ва $\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_S < 0$ бўлиши керак.

149. Мувозанат доимийлигининг температурага боғлиқлиги Вант Гофф тенгламаси $\left(\frac{\partial \ln K_c}{\partial T}\right)_p = -\frac{Q_p}{RT^2}$ билан аниқланиши кўрсатилсин, бу ерда Q_p — доимий босимда реакция иссиқлик эффекти.

Е ч и ш: Изобарик-изотермик жараёнларда химиявий кучнинг бажарган иши Гиббс-Гельмгольц тенгламаси

$$A_p = Q_p + T\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_p \qquad (1)$$

ёрдамида аниқланади. Бу ерда Q_p — реакция иссиқлик эффекти. $d\Phi = -SdT + Vdp + \sum_i \mu_i dN_i$. Изобарик-изотермик жараёнларда $d\Phi = \sum_i \mu_i dN_i = \Delta n \sum_i \mu_i \nu_i$, бу ерда Δn — "якка реакция"лар сони. Бажарилган иш $A = -(\Delta\Phi)_{T,p} = -\Delta n \sum_i \nu_i \mu_i =$ $= -\Delta n \sum_i \nu_i \left[kT\ln c_i + kT\ln p + \mu_{0i}(T)\right]$. Таъсир этувчи масалалар қонунига кўра $kT\ln K_c(T,p) = -kT\sum_i \nu_i \ln p - \sum_i \nu_i \mu_{0i}(T)$. Бу ифодага асосан $A = \Delta nkT\left(\ln K_0 - \sum_i \nu_i \ln c_i\right)$. Бу ифодадан $\left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_p = \Delta nk \quad \left(\frac{\partial A}{\partial T}\right)_p = \Delta nk\left(\ln K_c - \sum_i \ln c_i\right)$. Олинган ифодаларни (1) формулага элтиб қўйиш натижасида $\left(\frac{\partial \ln K_c}{\partial T}\right)_p = -\frac{Qp}{RT^2}$.

150. n та фаза ва k та компонентали гетероген тизимда мувозанат шарти топилсин.

К ў р с а т м а: n та фаза ва k та компонентадан ташкил топган тизимнинг умумий мувозанат шарти $\delta\Phi = 0$ бўлади.

Ж а в о б: Гетероген тизимнинг мувозанатда температуралари ва босимлари ўзгармас бўлади ва ҳар бир компонентанинг химиявий потенциали ҳамма фазаларда тенг бўлади.

151. Сув газининг ҳосил бўлиш реакцияси $H_2O + CO = CO_2 + H_2$ да мувозанат $T = 1259$ Kда юз беради. Молекуляр мувозанат таркиби маълум: $m_{CO_2} = 0,7$ моль, $m_{CO} = 9,46$ моль, $m_{H_2O} = 9,46$ моль, $m_{H_2} = 80,38$ моль. Мувозанат доимийлиги K_p аниқлансин.

Ж а в о б: $K_p = 1,591$.

К ў р с а т м а: Таъсир этувчи массалар қонунидан фойдаланилсин.

152. Йодли водороднинг ҳосил бўлиш реакцияси $H_2 + I_2 \rightleftarrows 2HI$ га $T = 717$ K да эришилади. Йоднинг бошланғич моллар сони $m_{I_2} = 2{,}94$ моль ва водороднинг бошланғич моллар сони $m_{H_2} = 8{,}1$ *моль* ни билган ҳолда, мувозанат ҳолатда HI нинг моллар сони аниқлансин. $T = 717$ K да мувозанат доимийлиги маълум ва $K_c = K_p = 0{,}01984$.

Жавоб: $m_{HI} = 5{,}64$.

153. Ҳар қандай босимда унинг тажрибавий изотермаси $V(p)$ бўйича реал газнинг учувчанлиги ҳисоблансин.

Кўрсатма: Учувчанликни аниқлаш усулининг асосини ташкил этувчи қуйидаги тенгламадан фойдаланиш керак:

$$kT \ln \frac{f_2}{f_1} = \int_{p_1}^{p_2} \vartheta \, dp,$$

бу ерда ϑ — солиштирма ҳажм, f — учувчанлик.

154. Модданинг газ ва қаттиқ жисм ҳолатларининг мувозанат шартига асосланиб, идеал газнинг энтропия доимийлигини ҳисоблаш учун ифода топилсин.

Ечиш: Мувозанат шартиға асосан, агар қаттиқ жисм газ билан мувозанатда бўлса, унинг химиявий потенциаллари тенг бўлади:

$$\mu'(T, p) = \mu''(T, p).$$

$$\mu(T, p) = \frac{\Phi}{N} = \frac{E - TS + pV}{N} = E_0 - TS + pV.$$

$\mu'(T, p) = E_0' - T(C_p \ln T - R \ln p + S_0) + pv'$ — идеал газ учун $\mu''(T, p) = E_0'' - TS'' + pv''$ — қаттиқ жисм учун.

Бу ифодалардан:

$$RT \ln p = [E_0'' - E_0' + p(v'' - v')] + C_p T \ln T - T\Delta_0,$$

$$\Delta_0 = -\frac{Q}{T} - C_p \ln T + \int_0^T \frac{C_p}{T} dT + R \ln p.$$

Бу ерда $\Delta'' = \int_0^T \frac{C_p}{T} dT$ — термодинамиканинг учинчи қонунига кўра, $Q = E_0'' - E' + p(v'' - v')$ — қуруқ ҳайдаш иссиқлиги, Q, C_p, p ва T ларни тажрибада аниқлаб, газ энтропия доимийлиги Δ_0 ни аниқлаш мумкин.

155. Қуйидаги эритмалардан ташкил топган тизимлар термодинамик эркинлик даражасининг сони топилсин:

а) Сувдаги KCl ва NaCl нинг иккала тузининг кристаллари ва буғлари иштирокида;

б) Бу тузларнинг муз, иккала тузнинг кристаллари ва буғлари иштирокида;

в) Сувда ва керосинда қанд, муз ва буғ мавжудлигида.

Ечиш: Термодинамик озодлик даражасининг сони $f = k + 2 - n$ тенглама билан аниқланади. Бу ерда n — фазалар сони, k — компонентлар сони.

а) $n = 4$ (буғ, эритма, 2 та кристалл), $k = 3$ (H_2O, KCl, NaCl). Демак, $f = 1$.

б) $n = 5$ (эритма, 3 та кристалл, сув буғи), $k = 3$. Демак, $f = 0$. в) $n = 4$ (буғ, 3 та эритма, муз), $k = 3$ (сув, қанд, керосин). Демак, $f = 1$.

156. Ҳар бир компонент ҳамма фазаларга киради деган фараз асосида Гиббснинг фазалар қоидаси ўрнатилган. Агар ҳар бир компонент ҳамма фазаларга кирмаса, фазалар қоидаси қандай ўзгаради?

157. Сирт таранглигининг температурага боғлиқлигини билган ҳолда, плёнка (парда) нинг адиабатик кенгайишида температура ўзгариши ва уни изотермик кенгайишида ютилган иссиқлик миқдори топилсин.

Ечиш: Сирт эркин энергияси $F_\Sigma = \sigma\Sigma$, энтропияси $S_\Sigma = -\left(\frac{dE_\Sigma}{dT}\right) = -\Sigma\frac{d\sigma}{dT}$. Мувозанатли адиабатик жараёнда энтропия доимий бўлганлиги учун адиабатик кенгайишида температура ўзгариши $\Sigma\frac{d\sigma}{dT} = \text{const}$ тенгламадан аниқланади. Мувозанатли изотермик жараёнда юзаси Σ_1 дан Σ_2 га ортганда плёнка сирти томонидан ютилган иссиқлик миқдори $Q = T[S_\Sigma(T, \Sigma_2) - S_\Sigma(T, \Sigma_1) = -T\frac{d\sigma}{dT}(\Sigma_2 - \Sigma_1)$.

158. Томчи устидаги тўйинган буғ босимининг томчи радиусига боғлиқлиги аниқлансин.

Ечиш: Фараз қилайлик, r радиусли суюқлик томчиси буғи билан мувозанат ҳолатда бўлсин, у ҳолда $\mu'(p', T) = \mu''(p'', T)$. Бунда $\mu'(p', T) - \mu'(p, T) = \mu''(p'', T) - \mu''(p'', T)$ тенглик ўринли бўлади.

Сувнинг кам сиқилувчанлигини ҳисобга олсак ва буғни идеал газ деб қарасак, натижада $p'' = pe^{\frac{2\sigma\vartheta'}{rkT}}$ ифодани оламиз. Бу ерда ϑ' — сув фазадаги битта заррага мос келган ҳажм, r — томчи радиуси.

159. Жуда кичик зарядланган томчи фақат ўта тўйинган буғда ўсиб қолмасдан, балки тўйинишга етишмаган буғда ҳам ўсиб бориши кўрсатилсин.

Ечиш: Томчи-буғ фазасида Гиббс термодинамик потенциалининг ўзгариши $\Delta\Phi = (\mu'' - \mu')N'' + \sigma\Sigma$. Бу ерда $\mu'(p, T)$ — буғнинг химиявий потенциали, σ — сирт таранглиги, Σ — буғда ҳосил бўлган томчи сирт юзаси, N'' — томчидаги зарралар сони. $\Sigma = 4\pi r^2$, $N'' = \frac{4\pi r^3}{3\vartheta''}$, r — томчи радиуси, ϑ'' — томчининг солиштирма ҳажми. Натижада буғда ҳосил бўлган зарядланмаган томчи Гиббс термодинамик потенциалининг ўзгариши $\Delta\Phi = 4\pi r^3(\mu'' - \mu')/3\vartheta'' + 4\pi r^2\sigma$. Агар буғдаги томчи электр заряд қабул қилса, у ҳолда $\Delta\Phi = 4\pi r^3(\mu'' - \mu')/3\vartheta'' + 4\pi r^2\sigma + \Delta\Phi_e$ бўлади, бу ерда $\Delta\Phi_e$ — зарядланган томчининг ҳосил бўлишида электр майдоннинг Гиббс термодинамик потенциалининг ўзгариши:

$$\Delta\Phi_e = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{\alpha}^{r} \mathcal{E}_1^2 dV + \frac{1}{8\pi}\int_{r}^{\infty} \mathcal{E}^2 dV - \frac{1}{8\pi}\int_{\alpha}^{\infty} \mathcal{E}^2 dV = \frac{\varepsilon}{4\pi}\int_{\alpha}^{r} \mathcal{E}_1^2 dV -$$

$$-\frac{1}{8\pi}\int_{\alpha}^{r} \mathcal{E}^2 dV = \frac{e^2}{2}\int_{\alpha}^{r}\frac{dr}{\varepsilon r^2} - \frac{e^2}{2}\int_{\alpha}^{r}\frac{dr}{r^2} = \frac{e^2}{2r}\left(1-\frac{1}{\varepsilon}\right) + \frac{e^2}{2\alpha}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right).$$

Бу ерда e — томчи марказида ҳосил бўлган ион заряди, α — ион радиуси, $\mathcal{E}_1$ — томчидаги электр майдон кучланганлиги, $\mathcal{E}$ — томчидан ташқаридаги майдон кучланганлиги, ε — томчининг диэлектрик сингдирувчанлиги. Шундай қилиб,

$$\Delta\Phi = 4\pi r^3(\mu'' - \mu')\Big/3\vartheta'' + 4\pi r^2\sigma + \frac{e^2}{2}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\alpha}\right).$$

Бу ифодани таҳлил қилиш натижасида масаланинг саволига жавоб топасиз.

160. Ўтиш иссиқлиги λ ни доимий катталик деб ҳисоблаб, тўйинган буғ босими температура ўзгариши билан экспоненциал қонун бўйича ўзгариши кўрсатилсин.

Ечиш: Клапейрон-Клаузиус тенгламаси: $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda}{T\Delta V}$. Бу ерда λ — ўтиш иссиқлиги, $\Delta V = V_2 - V_1$, V_2 — тўйинган буғнинг моляр ҳажми, V_1 — суюқликнинг моляр ҳажми. $V_2 >> V_1$. Тўйинган буғни идеал газ деб қарасак, у ҳолда $\Delta V \approx V_2 = \frac{RT}{p}$. $\frac{dp}{dT} = \frac{\lambda p}{RT^2}$. Бу ифодадан $\frac{dp}{p} = \frac{\lambda dT}{RT^2}$; $\ln p = -\frac{\lambda}{RT} + i$ ва $p = \text{const}\, e^{\frac{-\lambda}{RT}}$. Бу ерда i — интеграллаш доимийси бўлиб, химиявий доимийлик деб юритилади.

161. 95°С да сув қандай босим остида қайнайди? Сувнинг буғланиш солиштирма иссиқлиги 22568,4 Ж/г.

Ечиш: Масаланинг ечими тўйинган буғ босимини топишга олиб келади. Олдинги масала ечимига кўра тўйинган буғ босими $p = \text{const}\, e^{\frac{-\lambda}{RT}}$. Бу ифодадан доимийлик $\text{const} = p_1 \exp\left[\frac{\lambda}{RT_1}\right]$, бу ерда $T_1 = 373$ K — нормал босим остида сувнинг қайнаш температураси, $p_1 = 1033,6$ гПа.

$$p = p_1 \exp\left[\frac{\lambda}{RT_1}\right] \exp\left[\frac{-\lambda}{RT}\right] = p_1 \exp\left[\frac{-\lambda}{R}\left(\frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}\right)\right].$$ Бу ерда

$T = 95°\text{C} + 273°\text{C} = 368$ K.

Жавоб: 745,9 гПа.

162. Фазовий ўтиш иссиқлигининг температурага боғлиқлиги $\frac{d\lambda}{dT}$ топилсин.

Ечиш: $\lambda = \lambda(T, p(T))$, чунки $\frac{d\lambda}{dT}$ ни мувозанат эгрилиги йўналишида ҳисоблаш керак. Шунинг учун

$$\frac{d\lambda}{dT} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT} = \left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)_T \frac{\lambda}{(V''-V')T}.$$

$\lambda = T\Delta S = T(S'' - S')$ ёки $\lambda = \chi'' - \chi'$, чунки фазовий ўтиш изотермик-изобарик жараёндир. У ҳолда

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial T}\right)_p = \frac{\partial}{\partial T}(\chi'' - \chi') = C_p'' - C_p';$$

$$\left(\frac{\partial\lambda}{\partial p}\right)_T = \frac{\partial}{\partial p}(\chi'' - \chi') = T\frac{\partial}{\partial p}(S'' - S') + V'' - V' \cdot \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -V\alpha$$

(α — иссиқликдан кенгайиш коэффициенти) эканлигини ҳисобга олсак $\frac{d\lambda}{dT} = C_p'' - C_p' + \frac{\lambda}{T} - \frac{\lambda(V'\alpha'' - V'\alpha')}{V'' - V'}$. Буғсимон ёки сублимация ҳолида иккинчи фазани идеал газ деб қабул қилсак $\left(V'' >> V', \alpha'' = \frac{1}{T}\right)$, у ҳолда $\frac{d\lambda}{dT} = C_p'' - C_p'$.

163. Тўйинган буғ иссиқлик сиғими учун ифода олинсин. 100°С да тўйинган сув буғини адиабатик сиққанда нима учун конденсацияланмаслиги тушунтирилсин.

Е ч и ш: Тизимнинг иссиқлик сиғими $C = \frac{\delta Q}{dT} = T\frac{dS}{dT}$. Тўйинган буғнинг иссиқлик сиғими C'' учун ифода олишда $\frac{dS''}{dT}$ ҳосилани суюқлик-буғ мувозанат эгрилиги йўналишида ҳисоблаш керак. $\frac{dS''}{dT} = \left(\frac{\partial S''}{\partial T}\right)_p + \left(\frac{\partial S''}{\partial p}\right)_T \frac{dp}{dT}$. Клапейрон-Клаузиус тенгламасидан фойдаланиб, $C'' = T\frac{dS''}{dT} = C_p'' - \frac{\lambda V''\alpha''}{V'' - V'}$ ни оламиз. Критик нуқтадан узоқда $V'' > V'$, буғни идеал газ деб қарасак $C'' = C_p'' - \frac{\lambda}{T}$. 162-масалада $C_p'' - C_p' = \frac{d\lambda}{dT}$ эканлигини ҳисобга олсак, $C_p'' - C_p' + \frac{d\lambda}{dT} - \frac{\lambda}{T}$. Ифода таҳлил қилинсин.

164. Паст температурада металларнинг иссиқлик сиғими C_p температурага пропорционал. Агар металл ўта ўтказувчанлик ҳолатга ўтса, у ҳолда унинг иссиқлик сиғими C_s температуранинг кубига пропорционал. Критик температурада $C_s = 3\,C_p$ бўлиши кўрсатилсин.

Е ч и ш: Масаланинг шартига кўра $C_n = \alpha T$, $C_s = \beta T^3$. $C = T\frac{dS}{dT}$. Бу ифодадан $ds = \frac{C}{T}dT$. Натижада

$$dSn = \frac{Cn}{T}dT = \frac{\alpha T}{T}dT = \alpha dT;\ S_n = \alpha T.$$

$dS_s = \frac{C_S}{T} dT = \frac{\beta T^3}{T} dT = \beta T^2 dT$, $S_s = \frac{1}{3}\beta T^3$. Критик температурада $S_n = S_s$ бўлади. Демак, $\alpha T_{кр} = \frac{1}{3}\beta T_{кр}^3$ ёки $C_s = 3C_p$.

165. Ўта ўтказувчанлик шароитида иссиқликдан кенгайиш коэффициентининг кескин ўзгариши $\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_s$ ва қайишқоқ модулининг кескин ўзгариши $\Delta K = K_n - K_s$ учун ифода топилсин.

Ечиш: Магнит майдондаги ўта ўтказувчанлик Гиббс термодинамик потенциали

$$\Phi_S(H,T) - \Phi_S(O,T) = \frac{V_S H_2}{8\pi}, \qquad (1)$$

ўзгариши эса $d\Phi_S = -S_S dT + V_S dp - M_S dH$; T, H = const да (1) дан

$$V_S(H,T) - V_S(O,T) = \frac{H^2}{8\pi}\left(\frac{\partial V_S}{\partial p}\right)_T. \qquad (2)$$

Ўта ўтказувчанлик учун термодинамиканинг тенгламаси $\Phi_n(H_S,T) - \Phi_S(O,T) = \frac{V_S H^2}{8\pi}$ дан

$$V_n(H_S,T) - V_S(O,T) = \frac{H_c^2}{8\pi}\left(\frac{\partial V_S}{\partial p}\right)_T \frac{V_S H_C}{4\pi}\left(\frac{\partial H_S}{\partial p}\right)_T \qquad (3)$$

(2) ифодадан (3) ифодани айириш натижасида ўтишда ҳажм ўзгаришини оламиз:

$$V_n(H_c,T) - V_S(H_c,T) = \frac{V_S H_S}{4\pi}\left(\frac{\partial H_S}{\partial p}\right)_T. \qquad (4)$$

(4) ифодадан T ва P бўйича ҳосила олиб, $T = T_s$ ва $H_s = 0$ да $\Delta\alpha = \alpha_n - \alpha_S = \frac{1}{4\pi}\frac{\partial H_S}{\partial T}\frac{\partial H_S}{\partial p}$, $\Delta K = K_n - K_S = \frac{K_S^2}{4\pi}\left(\frac{\partial H_S}{\partial p}\right)^2$ ифодаларни оламиз.

166. Критик майдон кучланганлиги эгрилигини $H_c(T) = H_0\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^{2}\right]$ парабола кўринишда аниқ тасаввур қилиш мумкин. Ана шу ифодадан фойдаланиб, солиштирма энтропия ва солиштирма иссиқлик сиғим қийматлари фарқи n- ва s- ҳолатларда топилсин.

Е ч и ш: H майдонда магнетик учун солиштирма Гиббс термодинамик потенциал ўзгариши

$$d\Phi = -SdT - MdH. \qquad (1)$$

Ўта ўтказувчанлик учун магнитлаш вектори $M_S = -\frac{1}{4\pi}$. (1) ифодани интеграллаш натижасида

$$\Phi_S(H) = \Phi_S(O) + \frac{1}{8\pi}H^2 \qquad (2)$$

ни оламиз. n ва s ҳолатлар мувозанатда бўладиган критик майдон эгрилиги йўналишида, солиштирма термодинамик потенциаллар иккала ҳолатда бир хил бўлиши учун

$$\Phi_n(H) = \Phi_S(H) = \Phi_S(O) + \frac{1}{8\pi}H_c^2,\ \Phi_n - \Phi_S(O) = \frac{1}{8\pi}H_c^2. \qquad (3)$$

Бу ифодадан T бўйича ҳосила оламиз, натижада солиштирма энтропия фарқини топамиз:

$$\Delta S = S_n - S_S = -\frac{H_C dH_C}{4\pi dT}. \qquad (4)$$

Бу ифодадан фойдаланиб, солиштирма иссиқлик сиғим фарқини оламиз:

$$\Delta C = C_S - C_n = T\frac{d}{dT}(S_s - S_p) = \frac{TH_c d^2H_c}{4\pi dT^2} + \frac{T}{4\pi}\left(\frac{\partial H_c}{\partial T}\right)^2. \qquad (5)$$

$T = T_c$ да критик майдон кучланганлиги $H_c = 0$, бу ҳолда (4) дан $S_n = S_S$ ни ва (5) дан $\Delta C = \frac{T}{4\pi}\left(\frac{dHc}{dT}\right)^2$ ни оламиз. $H_c(T) = H_o\left[1 - \left(\frac{T}{Tc}\right)^2\right]$ ифодадан $S_n - S_S = \frac{H_0^2 T}{2\pi T_c^2}\left[1 - \left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$, $C_n - C_S = \frac{H_0^2 T}{2\pi T_c^2}\left[1 - 3\left(\frac{T}{T_c}\right)^2\right]$ ифодаларни оламиз.

167. Критик нуқтада термодинамик тизим босимидан ҳажм ва температура бўйича олинган иккинчи тартибли ҳосиланинг нолдан фарқли эканлиги кўрсатилсин.

Е ч и ш: Критик нуқтада

$$\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = 0, \tag{1}$$

$$\left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T = 0, \tag{2}$$

$$\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right)_T < 0 \tag{3}$$

бўлади. Иккала ўзаро боғланмаган (1) ва (2) тенгламалардан критик параметрлар V_k ва T_k бир қийматли ҳолда аниқланади. Иккала тенгламада: $f(T, V) = 0$ ва $\varphi(T, V) = 0$ ўзаро боғланмаган бўлади, агарда $\frac{\partial(f, \varphi)}{\partial(T, V)} \neq 0$ бўлса. Бизнинг ҳолимизда $f = \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$, $\varphi = \left(\frac{\partial^2 p}{\partial V^2}\right)_T$, шунинг учун (1) ва (2) тенгламаларнинг ўзаро боғланмаганлик шартидан

$\frac{\partial(\partial p/\partial V, \partial^2 p/\partial V^2)}{\partial(V, T)} = \frac{\partial^2 p}{\partial V \partial T}\left(\frac{\partial^3 p}{\partial V^3}\right) \neq 0$ бўлади. (3) га асосан, критик нуқтада $\frac{\partial^2 p}{\partial V \partial T} \neq 0$ эканлиги келиб чиқади.

168. Буғ конденсациясида суюқлик томчисининг радиуси ҳисоблансин.

Ечиш: Фараз қилайлик буғда r радиусли суюқлик томчиси ҳосил бўлсин. Бу ҳолда Гиббс термодинамик потенциалининг ўзгариши

$$\Delta\Phi = \Phi - \Phi_0 = (\mu'' - \mu')N' + \sigma\sum. \tag{1}$$

Бу ерда N'' — томчидаги зарралар сони, σ — сирт таранглиги, $\sum$ — томчи сирт юзаси, μ'' — янги фазадаги (томчида) модда химиявий потециали, μ' — буғ химиявий потенциали. $\sum = 4\pi r^2$, $N'' = \frac{4\pi r^3}{3\vartheta''}$, бу ерда ϑ'' — томчи солиштирма ҳажми. Бу ифодаларни (1) га оборив қўйсак,

$$\Delta\Phi = \frac{4\pi r^3}{3\vartheta''}(\mu'' - \mu') + 4\pi r^2\sigma. \tag{2}$$

$\left.\frac{\partial(\Delta\Phi)}{\partial r}\right|_{r=r_{кр}} = 0$ ёки натижада $r_{кр} = \frac{2\sigma\vartheta''}{\mu' - \mu''}$.

169. Критик нуқтада Жоул-Томсон коэффициенти аниқлансин.

Ечиш:

$$\mu = \frac{T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V}{C_p}, \qquad (1)$$

μ — Жоул-Томсон коэффициенти. Критик нуқтада $C_p = \infty$. Шунинг учун (1) ифоданинг кўринишини ўзгартирамиз. Бунинг учун

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T = -1 \qquad (2)$$

ифодадан фойдаланамиз. У ҳолда

$$T\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p - V = -\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}\left[1 + \frac{V}{T}\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}\right], \qquad (3)$$

$$C_p = C_V + T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}\left[1 - \frac{C_V\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_T}{T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}\right] \qquad (4)$$

кўринишни олади. (3) ва (4) ифодаларни (1) ифодага қўйсак, критик нуқтада Жоуль-Томсон коэффициенти учун қуйидаги ифодани оламиз: $\mu = \frac{1}{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}$.

170. Критик нуқтада товуш тезлиги учун ифода топилсин.

Ечиш: $\vartheta = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_S} = V\sqrt{-\frac{1}{M}\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S}$, M — моляр масса. Барқарор мувозанат ҳолатда $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S < 0$ бўлади, аммо $T \to T_{кр}$ да $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S$ ҳам нолга яқинлашиб боради. Шунинг учун критик нуқтада товуш тезлиги нолга тенг бўлади.

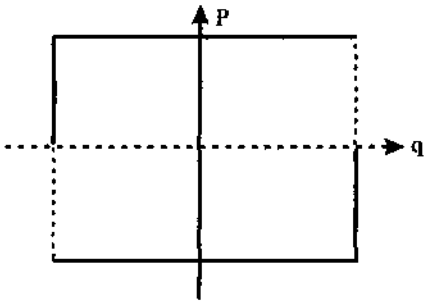
СТАТИСТИК ФИЗИКАДАН МАСАЛАЛАР

171. ϑ_0 тезлик билан инерцияси бўйича ҳаракатланувчи m массали зарра учун фазовий траектория аниқлансин.

Ж а в о б: $p = m\vartheta_0$.

172. p, q фазосида идеал қайтарувчи қути деворларига тик йўналишда доимий тезлик билан ҳаракатланувчи зарранинг фазовий траекторияси чизилсин. Қути ўлчамлари ҳаракат йўналишида $2a$.

Ж а в о б: 12-расмга қ.



12-расм.

173. z_0 нуқтадан бошланғич ϑ_0 вертикал юқорига йўналган тезлик билан оғирлик майдонида ҳаракатланувчи m массали жисмнинг фазовий траекторияси аниқлансин. Шу траектория чизилсин.

Ж а в о б:
$p^2 - p_0^2 = -2m^2 g(z - z_0)$.

174. Тортиш кулон кучи таъсири остида қўзғалмас $+e_1$ зарядга томон ҳаракатланувчи m массали $-e$ зарядга эга бўлган зарра учун фазовий траектория аниқлансин ва чизилсин. Зарра бошланғич импульси $p_0 = 0$ ва масофаси r_0.

Ж а в о б: $p = \pm\sqrt{2mee_1\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$.

175. $\gamma \ll \mu_0$ шартида $\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ тенглама билан тавсифланувчи чизиқли гармоник осцилляторнинг фазовий траекторияси аниқлансин ва чизилсин. Вақт ўтиши билан фазовий ҳажм ўзгариши топилсин. $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.

Е ч и ш: $\ddot{x} + \gamma x + \omega_n^2 x = 0$ тенгламани ечиш учун янги ўзгарувчан z ни киритиб, $x = ze^{-\frac{\gamma}{2}t}$ кўринишда қараймиз. Натижада $\gamma \ll \omega_o$ шартида тенгламанинг ечими

$$x = e^{-\frac{\gamma}{2}t}\left(x_0 \cos\omega t + \frac{\vartheta_0}{\omega}\sin\omega t\right) \tag{1}$$

бўлади. Бу ерда ϑ_0 ва x_0 мос ҳолда осцилляторнинг бошланғич вақт моментидаги тезлиги ва координатаси. (1) ифодадан

$$\left(x^2 + \frac{p^2}{k^2}\right) = \left(x_0^2 + \frac{p_0^2}{k^2}\right)e^{-\gamma t}, \qquad (2)$$

келиб чиқади. (2) ифода траектория тенгламаси бўлиб, эллиптик спирални тасвирлайди. Бу ерда $k = m\omega_0^2$. Фазовий ҳажмнинг вақтга қараб ўзгариши қуйидаги қонун бўйича юз беради:

$$\Gamma(t) = \iint dp dx = \iint \frac{D(p,x)}{D(p_0,x_0)} dp_0 dx_0 =$$

$$= e^{-\gamma t}\iint \begin{vmatrix} \cos\omega t & \frac{1}{m\vartheta}\sin\omega t \\ -m\vartheta\sin\omega t & \cos\omega t \end{vmatrix} dp_0 dx_0 = e^{-\gamma t}\Gamma(0),$$

яъни $\Gamma(t) = e^{-\gamma t}\Gamma(0)$.

176. Битта тўғри чизиқ бўйича ҳаракатланувчи иккита зарранинг қайишқоқ марказий тўқнашиш ҳоли учун Лиувилл теоремаси ўринли эканлиги текширилсин.

Е ч и ш: Импульс ва энергиянинг сақланиш қонунлари $\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1'\vec{p}_2'$ ва $\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p_2'^2}{2m_1} + \frac{p_2'^2}{2m_2}$ дан қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\vec{p}_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{p}_1 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{p}_2; \quad \vec{p}_2' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\vec{p}_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2}\vec{p}_1.$$

Энди алмаштириш Якобианини ҳисоблаймиз:

$$D = \frac{\partial(q_1', q_2', p_1', p_2')}{\partial(q_1, q_2, p_1, p_2)} = \frac{\partial(p', p_2')}{\partial(p_1, p_2)} = 1.$$

Демак фазовий ҳажм ўзгармай қолар экан.

177. Бошланғич ҳолати $A(p_0, z_0)$, $B(p_0, z_0 + a)$, $C(p_0 + b, z)$ фазовий нуқталар билан аниқланадиган, доимий оғирлик майдонида ҳаракатланувчи учта зарра учун Лиувилл теоремаси текширилсин.

Ж а в о б: $p_1 = p_0 - mgt$, $z_1 = z_0 + \frac{p_0}{m}t - \frac{gt^2}{2}$,

$$p_2 = p_0 - mgt, \; z_2 = z_1 + a,$$
$$p_3 = p_1 + b, \; z_3 = z_1 + \frac{b}{m}t.$$

Янги учбурчак юзаси $S = \frac{ab}{2} = S_0$ бўлади.

178. Иккита шарнинг абсолют ноқайишқоқ тўқнашиши учун Лиувилл теоремаси текширилсин.

Ечиш: $d\Gamma' = Dd\Gamma = 0$, чунки алмаштириш Якобиани нолга тенг: $D = \frac{\partial(q_1', q_2', p_1', p_2')}{\partial(q_1, q_2, p_1, p_2)} = 0$. Демак, фазовий ҳажм сақланмас экан.

179. Муҳитда ишқаланиш кучи тезликка мутаносиб бўлган эркин зарра учун (q, p) фазовий текисликда фазовий траектория топилсин ва dpdq фазовий ҳажмнинг вақт бўйича ўзгариши ҳисоблансин.

Ечиш: $\dot{p} + \frac{1}{\tau} p = 0$ ҳаракат тенгламасидан $p = p_0 e^{-t/\tau}$, $q = q_0 + \tau p_0(1 - e^{-t/\tau})$ ифодаларни оламиз. Бу ерда $\tau = \frac{1}{\gamma}$, γ — ишқаланиш коэффициенти. Бундан $q + \tau p = q_0 + \tau p_0$, яъни фазовий траектория (q, p) текислигида $-\frac{1}{\tau}$ бурчак коэффициентли тўғри чизиқлар оиласини ташкил этади. Ишқаланиш бўлмаганда $\left(\frac{1}{\tau} = 0\right)$ траектория координат ўқига параллел, чунки $p = \text{const}$. Алмаштириш Якобиани $D = \frac{\partial(q, p)}{\partial(q_0, p_0)} = e^{-t/\tau}$. Демак фазовий ҳажм вақт ўтиши билан экспоненциал ҳолда камаяди.

180. $\frac{d}{dt}\int f\{W(\Gamma, t)\}d\Gamma = 0$ эканлиги исботлансин. Бу ерда $f(W)$ ихтиёрий $W = 0$ да нолга айланувчи функция; $W(\Gamma, t)$ — фазовий ансамбл ҳаракат тенгламасини $\frac{\partial W}{\partial t} = [HW]$ қаноатлантирувчи фазовий эҳтимоллик зичлиги.

Ечиш:

$$\frac{d}{dt}\int f\{w(\Gamma, t)\}d\Gamma = \int \frac{df}{dW}\frac{\partial W}{\partial t}d\Gamma = \int f'[HW]d\Gamma =$$

$$\int\limits_{(\Gamma)} f'\sum_{i=1}^{3N}\left[\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial W}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial W}{\partial q_i}\right]d\Gamma = \sum_{i=1}^{3N}\int\limits_{(\Gamma)}\left[\frac{\partial H}{\partial q_i}\frac{\partial f}{\partial p_i} - \frac{\partial H}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial q_i}\right]d\Gamma.$$

Кинетик энергиянинг фақат импульсларга ва потенциал энергиянинг фақат координаталарга боғлиқлигини, яъни $H(q_i, p_i) = T(p_i) + U(q_i)$ эканлигини ҳисобга олсак, $W = 0$ да f функциянинг нолга интилиши, координаталар ёки импульсларнинг чексиз қийматларида $W(\Gamma, t) \to 0$ ни ҳисобга олсак, у ҳолда

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial p_i} dp_i = f \Big|_{p_i = -\infty}^{p_i = \infty} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_i}{\partial q_i} dq_i = f \Big|_{q_i = -\infty}^{q_i = \infty} = 0.$$

Шундай қилиб, ҳақиқатдан ҳам берилган интегралнинг вақт бўйича ўзгариши нолга тенг бўлади.

181. Бор квант постулати $\oint pdq = nh$ бажариладиган чизиқли гармоник осциллятор фазовий траекторияси тузилсин (бу ерда $n = 0, 1, 2, \ldots$ — квант сони, h — Планк доимийси).

Е ч и ш: Чизиқли гармоник осцилляторнинг ҳаракат тенгламаси:

$$\ddot{q} + \omega^2 q = 0, \tag{1}$$

бу ерда $\omega = \sqrt{\frac{\gamma}{m}}$. Ечими:

$$q = A \sin (wt + a) \tag{2}$$

$$p = A\, wm \cos (wt + a), \tag{3}$$

(2) ва (3) ифодалардан:

$$\left(\frac{q}{A}\right)^2 + \left(\frac{p}{A\omega m}\right)^2 = 1. \tag{4}$$

Бу эллипс тенгламаси, юзаси $S = \oint pdq = \pi ab = \pi m\omega A^2$.

Осциллятор энергияси: $\mathcal{E} = \frac{p^2}{2m} + \frac{\gamma q^2}{2} = \frac{\gamma}{2} A^2 = \frac{\gamma}{2\pi m\omega} \oint pdq.$

Натижада

$$\mathcal{E} = \nu \oint pdq, \tag{5}$$

ν — осциллятор тебраниш частотаси. Квант механикасидан маълумки осциллятор энергияси $\mathcal{E} = h\nu\left(n + \frac{1}{2}\right) \to h\nu n.$ Натижада

$$\oint pdq = hn \tag{6}$$

ифодани оламиз. Демак, Бор квант постулати ўринли бўлган осциллятор фазовий траекторияси умумий марказга эга бўлган эллипслар тизимидан иборат бўлар экан.

182. Энергия гиперсирти билан чегараланган $\mathcal{E}$ энергияли чизиқли гармоник осциллятор учун фазовий ҳажм Γ ҳисоблансин. Энергетик спектр формуласи $\mathcal{E}_n = h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right)$ дан фойдаланиб, элементар фазовий ҳажми баҳолансин, бу ерда $n = 0, 1, 2, \ldots$ — квант сони.

Е ч и ш: 181-масала натижасидан фойдалансак, фазовий ҳажм $\Gamma(\mathcal{E}) = h$. Демак, элементар ячейка ҳажми h га тенг бўлар экан.

Бу масалани қуйидагича ҳам ечиш мумкин: $\frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2 q^2}{2} \le \mathcal{E}$, ёки $\left(\frac{p}{a}\right)^2 + \left(\frac{q}{b}\right)^2 = 1\left(a = \sqrt{2m\mathcal{E}}, b = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m\omega^2}}\right)$. $\Gamma(\mathcal{E}) = \pi ab = \frac{2\pi\mathcal{E}}{\omega} =$

$$\Gamma(\mathcal{E}) = \pi ab = \frac{2\pi\mathcal{E}}{\omega} = \frac{\mathcal{E}}{\nu} = h.$$

183. V ҳажмда ҳаракатланувчи ва $\mathcal{E}$ энергияга эга, тинч ҳолатдаги массаси m_0 бўлган релятивистик зарра учун фазовий ҳажм $\Gamma(\mathcal{E})$ ҳисоблансин.

Е ч и ш: $\Gamma(\mathcal{E}) = \frac{4\pi}{3} V p^3(\mathcal{E})$. $\mathcal{E} = \sqrt{p^2c^2 + m_0c^4}$. Булардан: $\Gamma(\mathcal{E}) = \frac{4\pi}{3} V\left(\frac{\mathcal{E}^2}{c^2} - m_0^2c^2\right)^{3/2}$, бу ерда c — ёруғликнинг вакуумдаги тезлиги.

184. Потенциал қутиби эркин ҳаракатланувчи $\mathcal{E}$ энергияли зарра учун $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ энергия оралиғида квант ҳолатлар сони ҳисоблансин.

Е ч и ш:

$$d\Omega = \Omega(\mathcal{E})d\mathcal{E} = \frac{d\Gamma}{h^3} = \frac{1}{h^3}\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathcal{E}}d\mathcal{E}.$$

$$\Gamma = \int dxdydz \int dp_x dp_y \cdot dp_z = 4\pi V \int_0^{\sqrt{2m\mathcal{E}}} p^2 dp = \frac{4\pi}{3}(2m\mathcal{E})^{3/2} V.$$

$d\Omega = 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{3/2} \mathcal{E}^{1/2} d\mathcal{E}$. h — Планк доимийси.

185. Энергияси импульс билан $\mathcal{E} = cp$ муносабат орқали боғланган зарралар учун $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ энергия оралиғида квант ҳолатлар сони топилсин.

Ж а в о б: $A_S V_S \frac{\mathcal{E}^{S/3-1}}{h^S c^{S/3}} d\mathcal{E}$. Бу ерда A_S — ҳажм ва энергияга боғлиқ бўлмаган доимий, s — озодлик даражасининг сони.

186. E энергияли Гиббс микроканоник тақсимотига бўйсунувчи бир атомли идеал газнинг N та зарраси V ҳажмга қамалган. Ана шу тизим учун квант ҳолатлар сони топилсин.

Ечиш: $\Omega(E) = \frac{\Gamma(E,V)}{h^{3N}}$, $\Gamma(E,V) = \int dp_i dp_i = V^n \int dp_1 \ldots dp_{3N}$.

Импульслар фазосида интеграллаш соҳаси идеал газ учун $H(p_i, q_i) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\bar{p}_i^2}{2m} = E$ шарт билан аниқланади ва $p = \sqrt{2mE}$ радиусли $3N$ ўлчовли фазо деб қаралади. Бу ҳол учун ҳисоблаш натижаси $\Gamma(E,V) = A_N V^N E^{3N/2}$ ни беради $\Omega(E) = A_N V^N \times \times \left(\frac{E}{h^2}\right)^{3N/2}$. A_N — энергия ва ҳажмга боғлиқ бўлмаган доимий бўлиб, $A_N = (2m)^{3N/2} \int .. \int dx_1 \ldots dx_{3N}$. Бу ерда x_i янги ўзгарувчан. Интеграллаш $x_1^2 + x_2^2 + \ldots x_{3N}^2 = 1$ соҳада ўтказилади. Ҳисоблаш натижасида $A_N = \frac{(2\pi m)^{3N/2}}{\Gamma(3N/2+1)}$ кўринишини олади; $\Gamma(3N/2 + 1)$ — Эйлер гамма функцияси.

187. N та боғланмаган чизиқли осцилляторлар тўплами учун квант ҳолатлар сони $\Omega(E)$ ҳисоблансин.

Жавоб: $\Omega(H = E) = \frac{1}{N!}\left(\frac{2\pi mE}{\omega h}\right)^N$, $\omega = \sqrt{\frac{æ}{m}} = 2\pi\vartheta$.

188. Қуйидаги тизимлар: а) V ҳажмдаги қамалган бир атомли идеал газнинг N зарраси; б) N та боғланмаган чизиқли осцилляторлар тўплами учун эҳтимоллик зичлиги $\rho(H)$ аниқлансин.

Кўрсатма: Гиббснинг микроканоник тақсимотидан тизимнинг E, $E + dE$ энергия оралиғида бўлиш эҳтимоллик зичлиги $\rho(H) = \frac{\delta(H-E)}{\Omega(E)}$ формула ёрдамида топилади. Бу ерда $\delta(H - E)$ — Диракнинг дельта-функцияси, $\Omega(E)$ — квант ҳолатлар сони бўлиб уни нормалаштирувчи бўлувчи деймиз, шунда $\Omega(E) = \left.\frac{\partial\Gamma}{\partial E}\right|_{H=E}$ ва 186-, 187-масалалардан олинади.

189. Термостат модели сифатида 188- масаладаги тизимларни олиб, Гиббснинг каноник тақсимоти чиқарилсин.

Е ч и ш: а) Термостат ва тизим умумий ёпиқ тизимни ташкил этади. Бу ёпиқ *тизим* энергияси: $H_0(q_i', p_i') + H(q_i, p_i) = E$ бўлади. Эҳтимолликларни қўшиш қоидасига асосан,

$$\rho(H) = \int \rho(H_0, H) dp_i', dq_i', \quad \rho(H_0, H) = \frac{\delta(H_0 + H - E)}{\Omega(E)}.$$

Шунинг учун

$$\rho(H) = \frac{\Omega(E-H)}{\Omega(E)},$$

бу ерда $\Omega_0(E-H) = \left.\frac{\partial \Gamma_0}{\partial H_0}\right|_{H_0 = E-H}$, $\Omega(E) = \left.\frac{\partial \Gamma}{\partial E}\right|_{H=E}$ — нормалаштирувчи бўлувчилар. Бу ерда Γ_0 — доимий энергияли термостатнинг фазовий ҳажми, $\Gamma - E$ энергияли тизимнинг фазовий ҳажми. $\Omega(E-H) = \frac{3N}{2} \frac{(2\pi m)^{3N/2}}{\Gamma(3N/2+1)} (E-H)^{\frac{3N}{2}-1}$. $\Omega(E) = \frac{3N}{2} \frac{(2\pi m)^{3N/2}}{\Gamma(3N/2+1)} E^{\frac{3N}{2}-1}$. Энди зарралар сонини чексизликка интилтирайлик, бу ҳолда $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{E}{N} = \frac{3}{2}kT$; $\rho(H) = \mathrm{const} \lim\limits_{N\to\infty} \left(1 - \frac{H}{E}\right)^{\frac{3N}{2}-1} = \mathrm{const} \lim\limits_{N\to\infty} \left[\left(1 - \frac{2H}{3NkT}\right)^{\frac{3NkT}{2H}}\right]^{\frac{H}{kT}}$.

Бундан $\rho(H) = \mathrm{const}\, e^{\frac{-H}{kT}}$.

б) Бу ҳол ҳам а) ҳолга ўхшаш ечилади, аммо бу ерда $\lim \frac{E}{N} = kT$ деб қабул қилиш керак.

190. N та бир атомли молекулалардан ташкил топилган идеал газнинг ҳолат интеграли ҳисоблансин ва у битта молекуланинг ҳолат интеграли ёрдамида ифодалансин.

Е ч и ш: $Z(\theta) = \int e^{\frac{-H}{\theta}} d\Gamma, H = \sum\limits_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} = E$ ёки $Z(\mathrm{q}) = (z_i)^N$;

$$z_i = \int \exp\left(-\frac{p_i^2}{2mkT}\right) dp_i dq_i = \int esp\left(-\frac{p^2}{2mkT}\right) dx dy dz dp_x dp_y dp_z =$$

$$= (2\pi mkT)^{\frac{3}{2}} V \text{ ва } Z(\theta) = (2\pi mkT)^{\frac{3N}{2}} V^N.$$

191. Бир атомли молекуладан ташкил топган қуйидаги идеал тизимлар учун $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}+d\mathcal{E}$ энергия оралиғида Гиббс тақсимотининг кўриниши олинсин: а) битта заррадан ташкил топган; б) N та заррадан ташкил топган.

Жавоб: $dW = \frac{2}{\sqrt{\pi\theta^3}} e^{-\frac{\mathcal{E}}{\theta}} \mathcal{E}^{\frac{1}{2}} d\mathcal{E}$,

$$dW = \frac{1}{\theta^{3N/2}} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)} e^{-\frac{\mathcal{E}}{\theta}} \mathcal{E}^{\frac{3N}{2}-1} d\mathcal{E}.$$

192. Гиббс тақсимотига бўйсунувчи E энергияли идеал газнинг N та зарраси V ҳажмда қамалган. Ана шу тизимнинг энтропияси ва температураси ҳисоблансин. Ҳолат тенгламаси топилсин.

Ечиш: $S = k\ln\Gamma(\mathcal{E}, V)$. $\Gamma(\mathcal{E},V) = \int dq_i dp_i = A_N V^N \mathcal{E}^{3N/2}$. $S = k\ln A_N + kN\ln V + \frac{3kN}{2}\ln\mathcal{E}$. Идеал газнинг температураси термодинамиканинг асосий тенгламасидан топилади: $T = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}}\right)_V\right]^{-1} = \frac{2\mathcal{E}}{3k_0 N}$. $p = T\left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_{\mathcal{E}} = TkN\frac{1}{V}$. Бунда ҳолат тенгламаси $pV = kNT$.

193. E энергияли N та ўзаро таъсирлашмайдиган чизиқли осцилляторлар учун Гиббс микроканоник тақсимоти ўринли. Ана шундай *тизим* учун фазовий ҳажм $\Gamma(E)$, энтропия S ва температура ҳисоблансин.

Ечиш: $\Gamma(E) = B_N E^N$, B_N — E энергияга боғлиқ бўлмаган доимий. $S = k\ln\Gamma(E) = k\ln B_N + kN\ln E$.

$$T = \left[\left(\frac{\partial S}{\partial \mathcal{E}}\right)_V\right]^{-1} = \frac{E}{kN}.$$

194. Чизиқли гармоник осциллятор учун энергиялари бўйича классик яқинлашишда Гиббс тақсимоти ёзилсин ва унинг энергиясининг ўртача қиймати ҳисоблансин.

Ечиш: $dW = \frac{e^{\frac{-\mathcal{E}}{\theta}} d\Gamma}{Z(\theta)}$ — Гиббс тақсимоти. Чизиқли осциллятор учун $dW = \frac{e^{-\frac{\mathcal{E}}{\theta}} d\Gamma}{Z(\theta)h}$, $Z(\theta) = \int_\Gamma e^{\frac{-\mathcal{E}}{\theta}} d\mathcal{E} = \frac{\theta}{h\vartheta}$. Демак,

$dW(\mathcal{E}) = \frac{1}{kT} e^{\frac{-\mathcal{E}}{kT}} d\mathcal{E}$. Чизиқли гармоник осциллятор ўртача энергияси: $\bar{\mathcal{E}} = \int\limits_0^\infty \mathcal{E} dW(\mathcal{E}) = kT$.

195. N та ўзаро таъсирлашмайдиган жуда катта сондаги зарралардан ташкил топган тизим учун $\mathcal{E}$ ва $\bar{\bar{\mathcal{E}}}$ энергиялар ҳисоблансин. $\frac{\Delta\bar{\mathcal{E}}}{\mathcal{E}}$ нисбат топилсин.

Жавоб: $\mathcal{E} = \bar{\mathcal{E}} = \left(\frac{3}{2}N - 1\right)kT, \frac{\Delta\mathcal{E}}{\mathcal{E}} = \frac{4}{\sqrt{3N}}$.

196. Инерция бош ўқи атрофида ω_1, ω_2, ω_3 бурчакли тезлик билан айланувчи молекуланинг ω_1, $\omega_1 + d\omega_1$; ω_2, $\omega_2 + d\omega_2$; ω_3, $\omega_3 + d\omega_3$ оралиқда бўлиш эҳтимоллиги топилсин. Инерция бош моментлари мос ҳолда I_1, I_2, I_3. Атомларнинг ички молекуляр тебраниши ҳисобга олинмасин.

Жавоб:

$$dW = (2\pi mkT)^{\frac{-3}{2}} (I_1 I_2 I_3)^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2}{2kT}\right) d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3.$$

197. Бурчак тезликнинг ўртача квадратик қиймати $\sqrt{\overline{\omega^2}}$ ва молекуланинг айланиш кинетик моменти топилсин.

Жавоб: $\sqrt{\overline{\omega^2}} = \sqrt{\frac{kT(I_1 I_2 + I_2 I_3 + I_3 I_1)}{I_1 I_2 I_3}}, \sqrt{\overline{L_2}} = \sqrt{kT(I_1 + I_2 + I_3)}$.

198. Идеал газ гамильтонианини $H = \sum\limits_{i=1} H_i$ кўринишда тасаввур қилиш мумкин, бу ерда H_i битта молекуланинг Гамильтон функцияси. Ички энергия E, эркин энергия F, энтропия S ва босим p аниқлансин.

Ечиш: Идеал газ учун

$$H = \sum_{i=1} H_i\,, \quad H_i = \frac{\vec{p}_i^2}{2m} + U(\vec{r}_i) \quad U(\vec{r}_i) = \begin{cases} 0, \vec{r}_i \in V, \\ \infty, \vec{r}_i \notin V. \end{cases}$$

У ҳолда

$$Z = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \ldots \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\sum_{i=1} \frac{H_i}{kT}\right) dp_i dq_i = V^N \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{H_i}{kT}\right) dp_i\right]^N = V^N (z_i)^N.$$

Бу ерда $z_i = \int\limits_{-\infty}^{\infty} exp\left(-\frac{H_i}{kT}\right)dp_i = f(T)$ — импульслар фазосидаги битта зарранинг ҳолат интеграли.

Тизимнинг ички энергияси статистик усулга асосан ўртача энергияга тенг деб қабул қилинади. Шунга кўра,

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = NkT^2 \frac{\partial \ln f(T)}{\partial T},$$

$$F = -kT \ln Z(T,V) = -NkT \ln f(T) - NkT \ln V,$$

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = Nk \ln f(T) + NkT \frac{\partial \ln f(T)}{\partial T},$$

$$p = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_m = \frac{NkT}{V}.$$

199. V ҳажмда жойлашган N та ўзаро таъсирлашмайдиган зарралардан ташкил топган қуйидаги тизимлар учун E, S, p ва C_V лар аниқлансин: а) бир атомли газ; б) атомлар тебраниши тўхтатилган (қаттиқ ротатор) икки атомли газ; в) молекулада атомлар тебраниши ҳисобга олинган икки атомли газ (паст температуралар ҳоли қаралсин).

Ечиш:

а) $$Z(T,V) = \int \exp\left(-\frac{H}{kT}\right)d\Gamma = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\sum_{i=1} \frac{\vec{p}_i^2}{2mkT}\right)d\vec{p}_i d\vec{q}_i =$$

$$= V^N \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\frac{\vec{p}_i^2}{2mkT}\right)d\vec{p}_i\right]^N = V^N (2\pi mkT)^{3N/2} =$$

$$= \left[(2\pi mkT)^{3/2} V\right]^N = z_i^N.$$

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z(T,V)}{\partial T} = \frac{3}{2} NkT;$$

$$S = \frac{E}{T} + k \ln Z(T, V) = \frac{3}{2} Nk + \frac{3}{2} Nk \ln(2\pi \cdot mkT) + Nk \ln V$$

ёки $S = \frac{3}{2} Nk\left[\ln(2\pi mkT) + 1\right] + Nk \ln V;\quad p = \frac{NkT}{V}.$

б) $H_i = \frac{p_i^2}{2M} + \frac{1}{2\mu r_0^2}\left[p_i^2\theta + \frac{p_i^2\varphi}{\sin^2\theta}\right]$ — тизим энергияси. Бу ҳол

учун $Z = z_i^N, z_i = (2\pi mkT)^{3/2} V\, 8\pi^2 r_0^2 \mu kT$. Бу ерда $M = m_1 + m_2$;

$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$, r_0 — молекулада атомлар орасидаги мувозанат

масофа; натижада: $Z = V^N\left[A(kT)^{5/2}\right]^N$, $A = 8\pi^2 r_0^2 \mu (2\pi M)^{3/2}$.

Демак, $E = \frac{3}{2}NkT$; $S = \frac{5}{2}Nk[\ln(kT)+1]$; $p = \frac{NkT}{V}$; $C_V = \frac{5}{2}Nk$.

в) Кичик тебранишлар яқинлашишида

$$H_i = \frac{p_i^2}{2M} + \frac{1}{2\mu}\left[p_{ir}^2 + \frac{p_{i\theta}^2}{r^2} + \frac{p_i^2\varphi}{r^2\sin^2\theta}\right] + U(r_0) + \frac{\gamma}{2}(r-r_0)^2,$$

бу ерда атомларнинг потенциал энергияси

$$U(r) = U(r_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}(r-r_0)^2$$

кўринишида олинган, $\gamma = \left.\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\right|_{r=r_0}$ деб қабул қилинган. Интеграл тагидаги ифода r_0 нуқтада ўткир максимумга эга деб, паст температура учун $Z_i = VB(kT)^{7/2}$ ифода олинади. Бу ерда $B = (2\pi M)^{3/2}4\pi(2\pi\mu)^{3/2}r_2^0\sqrt{\frac{2\pi}{\lambda}}$. У ҳолда $E = \frac{7}{2}\cdot NkT$; $S = Nk\ln(VB) + \frac{7}{2}Nk[\ln(kT)+1]$; $p = \frac{NkT}{V}$; $Cv = \frac{7}{2}Nk$.

200. Жуда катта сондаги зарраларни ўз ичига олган квазиёпиқ тизим энтропиясининг Е ўртача энергияга яқин квант ҳолатлар сонининг логарифмига мутаносиблиги кўрсатилсин.

Ечиш:

$$Z(T,V) = \int \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)d\Omega(E) = \exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\Omega(E).$$

$$F = -kT\ln Z(T,V),$$

бу ифодадан $\Omega(E) = Z(T,V)\exp\left(\frac{E}{kT}\right) = \exp\left(\frac{E-F}{kT}\right) = \exp\left(\frac{S}{k}\right)$.

Демак, $S = k\ln\Omega(E)$.

201. Гиббснинг каноник тақсимотидан фойдаланиб энтропия S микроҳолатлар бўйича эҳтимоллик тақсимотининг фазовий зичлиги орқали $S = -k\overline{\ln p}$ формула билан ифодаланиши кўрсатилсин.

Е ч и ш: $S = k\ln\Omega(E)$. Нормалаштириш шартига кўра $\int \rho d\Omega(E) = \rho(E)\Omega(E) = \frac{1}{Z}\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)\Omega(E) = 1$. Бу ифодага кўра $S = k\ln\frac{1}{\rho(E)} = -k\ln\rho(E) = -k\,\overline{\ln\rho(E)}$.

202. Фараз қилайлик $W_i - \mathcal{E}_i$ эҳтимоллик i-ҳолатда бўлган тизимнинг эҳтимоллиги бўлсин. Агар энтропия $S = -k\sum W_i \ln W_i$ формула билан ифодаланса, у ҳолда энтропия максимал бўлгандаги W_i нинг қийматлари каноник тақсимотга бўйсунишини топинг.

Е ч и ш: $W_i = \frac{e^{-\beta\mathcal{E}_i}\Omega(\mathcal{E}_i)}{\sum_i e^{-\beta\mathcal{E}_i}\Omega(\mathcal{E}_i)}$, бу ерда $\sum_i \mathcal{E}_i W_i = \bar{\mathcal{E}} = E$ шартдан топилади.

203. Айрим зарралар энергияси $\vec{p}$ импульс билан $H = ap^l$ кўринишда боғланган ($a > 0$, $l > 0$) N та заррадан ташкил топган ва V ҳажмли идишда жойлашган идеал газнинг энергияси ва босими аниқлансин.

Е ч и ш:

$$E = kT^2\frac{\partial\ln Z}{\partial T};\quad p = kT\frac{\partial\ln Z}{\partial V}.\quad H = \sum_i H_i.\quad Z = z_i^N,$$

бу ерда

$$z_i = \int\exp\left(-\frac{ap^l}{kT}\right)dp_i\,dq_i = 4\pi V\int_0^\infty \exp\left(-\frac{ap^l}{kT}\right)p^2dp =$$

$$= \frac{4\pi V}{l}\frac{\Gamma(3/l)}{a^{3/2}}\cdot(kT)^{3/l}.$$

Демак, $Z = V^N(kT)^{3N/l}\left[\frac{4\pi}{a^{3/2}l}\Gamma(3/l)\right]^{\frac{3N}{l}}$; босим $p = kT\frac{\partial\ln Z}{\partial V} =$

$$= \frac{1}{3}\frac{E}{V};\quad E = kT^2\frac{\partial\ln Z}{\partial T} = \frac{3}{l}NkT.$$

204. Релятивистик идеал газ учун ҳолат интеграли ҳисоблансин. Норелятивистик ва ултрарелятивистик зарралар чегаравий ҳоллари қаралсин. Кейинги ҳол учун ўртача энергия ва босим ҳисоблансин.

Ечиш: Идеал газ учун $Z = z_i^N$, $z_i = \int e^{\frac{-\varepsilon}{kT}} dp_i dq_i = 4\pi V \times$
$$\times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}\right) p^2 dp = 4\pi V(m^2ckT)\left[K_0\left(\frac{mc^2}{kT}\right) + 2\frac{kT}{mc^2}K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right)\right],$$
бу ерда K_0 ва K_1 — мавҳум аргументли Бессел функциялари.

$K_n(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} e^{-x}$, агар $x >> 1$ бўлса ва $K_n(x) \simeq \frac{1}{x}$, агар $x << 1$ бўлса.

Норелятивистик идеал газ ҳолида $x \simeq \frac{mc^2}{kT} >> 1$ ва $Z = e^{\frac{-Nmc^2}{kT}} \times$ $\times (2\pi mkT)^{3N/2} V^N$. Ультрарелятивистик газ учун $kT >> mc^2$ ва $Z = \left(\frac{8\pi}{c^3}\right)^N \cdot (kT)^{3N} V^N$ бўлади. $E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = 3NkT$; $p = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{1}{3}\frac{E}{V}$.

205. Гиббснинг катта каноник тақсимотидан фойдаланиб N та заррадан ташкил топган бир атомли идеал газ учун p, E, S ва μ қийматлар топилсин.

Ечиш: Газ ҳолатини характерловчи катталикларни ҳисоблаш учун ҳолат функция Z ни ҳисоблаш керак. Гиббснинг катта каноник тақсимоти $\bar{Z} = \sum_i \sum_N e^{\frac{\mu N - E_i}{\theta}} \Omega(E_i, N)$ қуйидаги кўринишни олади: $\bar{Z} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{kT}} \int e^{\frac{-E}{kT}} d\Omega' = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{kT}} \frac{1}{N!} \times$
$$\times \int e^{\frac{-E}{kT}} \frac{d\Gamma}{h^{3N}} = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{kT}} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} V^N = \sum_{N=0}^{\infty} e^{\frac{\mu N}{kT}} \frac{1}{N!}\left(\frac{V}{\lambda^3}\right)^N$$ ёки
$\bar{Z} = exp\left(e^{\frac{\mu}{kT}} \frac{V}{\lambda^3}\right)$, бу ерда $\frac{h}{\sqrt{2\pi mkT}} = \lambda$ — де Бройльнинг "иссиқлик" тўлқин узунлиги.

Идеал газда зарраларнинг ўртача сони $N = \int e^{\frac{\mu - E}{kT}} \times$ $\times \frac{dp_x dp_y dp_z dV}{h^3} = V\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu}{kT}}$. Бу ифодадан
$$\mu = kT \ln \frac{N\lambda^3}{V}, \quad p = kT \frac{\partial \ln Z}{\partial V} = \frac{kTN}{V},$$

$$E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{3}{2} kTN, \quad S = \frac{E}{T} + k \ln Z = \frac{3}{2} Nk + Nk \ln \frac{eV}{N\lambda^3}.$$

206. Гиббснинг катта каноник тақсимоти ёрдамида N та ўзаро таъсирлашмайдиган зарралардан ташкил топган тизимнинг эҳтимоллиги Пуассон тақсимоти билан аниқланишини кўрсатинг.

Е ч и ш: $W_{in} = \frac{e^{\frac{\mu n - H_i}{kT}} \Omega(H_i, n)}{\sum\limits_i \sum\limits_n e^{\frac{\mu n - H_i}{kT}} \Omega(H_i, n)}$, $H_i = E_i$ да. Ўзаро таъсирлашмайдиган зарралар ҳолида (208-масала)

$$W_N = \frac{e^{\frac{\mu N}{kT}} \int e^{\frac{-H}{kT}} d\Omega'}{Z} = \frac{e^{\frac{\mu N}{kT}} \frac{1}{N!} \left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3N}{2}} V^N}{\exp\left(e^{\frac{\mu N}{kT}} \frac{V}{\lambda^3}\right)}.$$ Ўртача зарралар сонининг ифодасини эслаб, Пуассон формуласига келамиз: $W_N = \frac{1}{N!} N^N e^{-\bar{N}}$.

207. Катта каноник тақсимотнинг умумий хоссаларидан фойдаланиб $pV = kT \ln \tilde{Z}$ эканлигини исботланг. Бу ерда $\tilde{Z}$ катта статистик йиғинди.

Е ч и ш: $F = E - TS$; $\Phi = F + pV$; $F - \Phi = -pV = B$ — катта термодинамик потенциал. $B = -kT \ln \tilde{Z}$. $pV = kT \ln \tilde{Z}$.

208. Тизим бир бутун ҳолда Ω бурчак тезлик билан айланади. Айланувчи тизим координатасида Гиббс тақсимоти топилсин.

Е ч и ш: Айланувчи тизим координатасига нисбатан зарра тезлиги ва координатаси $\vec{v}_i'$ ва $\vec{r}_i'$ десак, у ҳолда тизимнинг энергияси қуйидагича бўлади:

$H = H(\vec{\vartheta}_i', \vec{r}_i') - \frac{1}{2} \sum m[\vec{\Omega}\vec{r}_i']^2$. Гиббс тақсимоти

$$\rho(H) = C \exp\left(-\frac{H(\vec{\vartheta}_i', \vec{r}_i') - \frac{1}{2}\sum m[\vec{\Omega}\vec{r}_i']^2}{kT}\right).$$

209. Асоси R радиусли бўлган h баландликдаги цилиндр идеал газ билан тўлдирилган. Цилиндр асосига тик бўлган ва унинг маркази орқали ўтувчи айланиш ўқига нисбатан $\vec{\Omega}$ бурчак тезлик билан айланади. Агар газнинг умумий зарралар сони N, айрим зарралар массаси m бўлса, цилиндрнинг ён сиртига таъсир этувчи газ босими топилсин.

Ечиш: Битта зарранинг ҳолат функцияси

$z = \int \exp\cdot\left(-\frac{H(\vec{\vartheta},\vec{R})}{kT}\right)\exp\left(\frac{m\Omega^2R^2}{2kT}\right)d\Omega$, тизимнинг ҳолат функцияси $Z = z^N$, $F = -kT$,

$$\ln Z = -NkT\ln\int exp\left(-\frac{H(\vec{\vartheta},\vec{R})}{kT}\right)d\Omega - NkT\ln\int\exp\left(\frac{m\Omega^2R^2}{kT}\right)d\Omega =$$

$$= F_0 - NkT\cdot\ln\left[\frac{2kT}{m\Omega^2R^2}\left(e^{\frac{m\Omega^2R^2}{2kT}} - 1\right)\right].$$

Агар $dV = 2\pi hRdR$ эканлигини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$p = -\frac{NkT}{V}\frac{U(R)}{kT}\frac{e^{\frac{-U}{kT}}}{e^{\frac{-U}{kT}}-1}, \text{ бу ерда } U = -\frac{m\Omega^2R^2}{2}.$$

210. N та заррадан ташкил топган бир атомли идеал газ учун ўртача қиймат $\overline{H^n}$ $(n > 0)$ аниқлансин.

Ечиш: $\overline{H^n} = \int H^n\,dW$, $dW = \dfrac{e^{-\frac{H}{\theta}}d\Omega}{\int e^{-\frac{H}{\theta}}d\Omega} = \dfrac{e^{-\frac{H}{\theta}}d\Gamma}{\int e^{-\frac{H}{\theta}}d\Gamma}$,

$d\Gamma = dq_1...dq_{3N}dp_1...dp_{3N}$. $H = E$ бўлган ҳол учун $H^n = E^n$, натижада

$$\overline{H^n} = \frac{\int_0^\infty E^{\frac{3N}{2}+n-1}e^{\frac{-E}{\theta}}dE}{\int_0^\infty E^{\frac{3N}{2}-1}e^{\frac{-E}{\theta}}dE} = \theta^n\frac{\Gamma\left(\frac{3N}{2}+n\right)}{\Gamma\left(\frac{3N}{2}\right)}.$$

211. Катта сондаги зарралардан ташкил топган тизим учун иссиқлик сиғими $C_V = aT^n (a > 0,\ n > 1)$. Ана шундай тизим учун квант ҳолатлар сони Ω(E) аниқлансин.

Е ч и ш: $$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = k\left(\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_V = aT^n = a\left(\frac{\theta}{k}\right)^n; \qquad (1)$$

$\Omega(E) = e^{\sigma(E)}$; $\ln\Omega(E) = \delta(E)$; $\theta = \left(\frac{\partial E}{\partial \sigma}\right)_{r_i=0}$. Бу ифодадан

$d\sigma = \frac{dE}{\theta}$; $d\ln\Omega(E) = d\sigma(E) = \frac{1}{\theta}dE$; $\ln\Omega(E) = \frac{E}{\theta}$. Бу ифодадан:

$$\Omega(E) = e^{\frac{E}{\theta}}. \qquad (2)$$

(1) ифодадан $dE = a\frac{\theta^n}{k^{n+1}}d\theta$ ни оламиз. Бу ифодани интеграллаб, $\theta = \frac{k}{a^{1/(n+1)}}(n+1)^{1/(n+1)} E^{1/(n+1)}$ ифодани оламиз, (2) ифодага қўйиш натижасида $\Omega(E) - \exp\left[\frac{a^{1/(n+1)}}{k(n+1)^{1/(n+1)}} E^{n/(n+1)}\right]$.

212. Энтропия $S = k\ln\Gamma(E)$ ёки $S = k\ln\Omega(E)$ кўринишда аниқланади. Катта сондаги зарралар тизими учун бу иккала ифоданинг эквивалент эканлиги кўрсатилсин.

Е ч и ш: Фараз қилайлик, тизим N та заррадан ташкил топган идеал газ бўлсин. Бу ҳолда фазалар фазоси

$$\Gamma(E) = \int dq_1 ... dq_{3N} dp_1 ... dp_{3N} = A_N E^{\frac{3N}{2}} V^N.$$

Квант ҳолатлар сони $\Omega(E) = \frac{\Gamma(E)}{h^{3N}} = B_N E^{\frac{3N}{2}} V^N$.

Агар энтропияни ҳисоблашда тизимни ўзгармас катталиклар A_N ва B_N дан иборат деб ҳисобласак, у ҳолда ҳар иккала ҳол учун ҳам $S = \frac{3}{2}Nk\ln E + Nk\ln V$ ифодани оламиз.

213. Муайян тизим учун x, y ва z катталиклар қийматларининг x, $x + dx$; y, $y + dy$ ва z, $z + dz$ ораликларда ётиш эҳтимоллиги

$$dW(x,y,z) = C\,e^{-a(x^2+y^2+z^2)}dxdydz$$

ифода кўринишида берилади. x, y, z ўзгарувчиларнинг ўзгариш соҳаларини $[-\infty, \infty]$ деб ҳисоблаб, нормалаштириш доимийси топилсин.

Ж а в о б: $C = \left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{3/2}$.

214. Олдинги ҳол учун x катталик қийматларининг x, $x + dx$ оралиқда бўлиш эҳтимоллиги топилсин.

Ж а в о б: $dW(x) = \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{-\alpha x^2} dx$.

215. Гиббс тақсимотидан фойдаланиб қуйидаги Максвелл тақсимотлари олинсин:

1) Ихтиёрий зарранинг тезлиги $[\vartheta_x, \vartheta_x + d\vartheta_x]$, $[\vartheta_y, \vartheta_y + d\vartheta_y]$, $[\vartheta_z, \vartheta_z + d\vartheta_z]$ тезлик оралиқларида бўлиш эҳтимоллиги;

2) Ихтиёрий зарра тезлиги абсолют қийматининг $[\vartheta, \vartheta + d\vartheta]$ оралиқда бўлиш эҳтимоллиги;

3) Ихтиёрий зарра кинетик энергиясининг $[\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon]$ оралиқда бўлиш эҳтимоллиги.

Е ч и ш: 1) $dW = \frac{e^{\frac{-\varepsilon}{kT}} d\Omega}{Z}$ дан $d\rho(\vartheta_x, \vartheta_y, \vartheta_z) =$ $= Ce^{\frac{-(\vartheta_x^2+\vartheta_y^2+\vartheta_z^2)}{2kT}} d\vartheta_x d\vartheta_y d\vartheta_z$. Нормалаш шарти $\int\limits_{-\infty}^{\infty} d\rho(\vec{\vartheta}) = 1$ дан $C = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}$, демак

$$d\rho(\vec{\vartheta}) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{\frac{-m\vartheta^2}{2kT}} d\vartheta_x d\vartheta_y d\vartheta_z.$$

2) $d\vartheta_x d\vartheta_y d\vartheta_z = \vartheta^2 d\vartheta \sin^2\theta d\theta d\varphi$ эканлигини ҳисобга олсак,

$$d\rho(\vartheta) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} e^{\frac{-m\vartheta^2}{2kT}} \vartheta^2 d\vartheta.$$

3) $\mathcal{E} = \frac{m\vartheta^2}{2}$ ва $\vartheta = \sqrt{\frac{2\mathcal{E}}{m}}$ га эканлигини ҳисобга олсак,

$$d\rho(\mathcal{E}) = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} e^{\frac{-\mathcal{E}}{kT}} \mathcal{E}^{1/2} d\mathcal{E}.$$

216. Илгариги масала натижасидан фойдаланиб қуйидаги катталиклар топилсин: а) $\overline{\vartheta^n}$, $n > -2$; б) $\overline{\vartheta}$ ва $\overline{\vartheta^2}$; в) зарранинг энг катта эҳтимолликка мос келган $\vartheta_э$ тезлик қиймати.

Ечиш: а) $\overline{\vartheta^n} = \int\limits_0^\infty \vartheta^n d\rho(\vartheta) = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \int\limits_0^\infty \vartheta^{n+2} e^{\frac{-m\vartheta^2}{2km}} d\vartheta.$

Гамма функцияси таърифидан фойдаланиб, қуйидагини топамиз:

$$\overline{\vartheta^n} = \frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right). \tag{1}$$

б) (1) ифодадан $n = 1$ да $\overline{\vartheta} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$, $n = 2$ да $\overline{\vartheta^2} = \frac{3kT}{m}$,

в) $\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(e^{\frac{-m\vartheta^2}{2kT}}\vartheta^2\right) = 0$ дан $\vartheta_э = \sqrt{\frac{2kT}{m}}$.

217. $\overline{\mathcal{E}}$ ва зарра кинетик энергиясининг энг катта эҳтимолли қиймати $\mathcal{E}_э$ топилсин. Бу қийматларнинг тенг эмаслик сабаби тушунтирилсин.

Ечиш: $\overline{\mathcal{E}} = \int \mathcal{E} d\rho(\mathcal{E}) = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} \int\limits_0^\infty e^{\frac{-\mathcal{E}}{kT}} \mathcal{E}^{\frac{3}{2}} d\mathcal{E} = \frac{3}{2}kT.$

$\frac{\partial}{\partial\mathcal{E}}\left(e^{\frac{-\mathcal{E}}{kT}}\mathcal{E}^{\frac{1}{2}}\right) = 0$ дан $\mathcal{E}_0 = \frac{kT}{2}$, $\overline{\mathcal{E}} \neq \mathcal{E}_0$, сабаби шундаки

битта зарра учун ҳисоблаш бажарилди. Агар катта сондаги зарралардан ташкил топган тизим учун ҳисоблаш бажарилса, у ҳолда $\overline{\mathcal{E}} = \mathcal{E}_0$,

218. Идеал газ молекуласи кинетик энергиясининг берилган ε қийматдан катта бўлмаслик эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш: $d\rho(\mathcal{E}) = \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} e^{\frac{-\mathcal{E}}{kT}} \mathcal{E}^{1/2} d\mathcal{E}.$ $\rho(\mathcal{E} < E) = \int\limits_0^{\mathcal{E}} \frac{2}{\sqrt{\pi(kT)^3}} \times$

$\times e^{\frac{-\mathcal{E}}{kT}}\mathcal{E}^{1/2}d\mathcal{E}\cdot\frac{\mathcal{E}}{kT}=\xi^2$ ўзгарувчан киритамиз, натижада $\rho(\mathcal{E}<E)=\Phi\left(\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{kT}}\right)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{\mathcal{E}}{kT}}e^{\frac{-\mathcal{E}}{kT}}$. Бу ерда $\Phi(\xi)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\xi}e^{-\xi^2}d\xi$ — хатоликлар интеграли.

219. Агар ҳамма зарралар сони N бўлса, идеал газда тезлиги $0\le\vartheta\ge\vartheta_э$ оралиқда бўлган зарралар сони $N_э$ ҳисоблансин.

Ечиш:

$$N_{0<\vartheta<\vartheta_э}=N_э=4\pi N\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\vartheta_э}e^{-\alpha\vartheta^2}\vartheta^2d\vartheta,\quad \vartheta_э=\sqrt{\frac{2kT}{m}},\quad \alpha=\vartheta_э^{-2}.$$

Натижада: $N_э=N\left[\Phi(1)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\right]$. $\Phi(x)=\int_0^x e^{-y^2}dy$.

$$\frac{N_э}{N}=\Phi(1)-\frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-1}\approx 43\%.$$

220. Газ молекулаларининг қандай қисми ўртача кинетик энергия $\mathcal{E}=\frac{3}{2}kT$ дан катта бўлган илгариланма ҳаракат кинетик энергияга эга бўлади?

Жавоб: $\frac{N_1}{N}=\sqrt{\frac{6}{\pi}}e^{\frac{-3}{2}}+1-\Phi\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\approx 0{,}39$. Бу ерда $N_1=N\int_{\bar{\varepsilon}}^{\infty}d\rho(\mathcal{E})$ энергияси $\mathcal{E}\ge\frac{3}{2}kT$ бўлган зарралар сони.

221. Идиш сиртининг бирлик юзасига 1 секундда газ молекулаларининг урилиш сони $\nu=\frac{1}{4}n\bar{\vartheta}$ кўринишда бўлиши кўрсатилсин (n — бирлик ҳажмдаги зарралар сони).

Ечиш: $d\nu=\vartheta_x dn_{\vartheta_x}=n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\alpha\vartheta_x^2}\vartheta_x d\vartheta_x$, $\alpha=\frac{m}{2kT}$.

$$\nu=n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\int_0^{\infty}e^{-\alpha\vartheta_x^2}\vartheta_x d\vartheta_x=n\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}=\frac{1}{4}n\bar{\vartheta}.$$

222. Ҳавоси сўрилган идишнинг тор тирқишидан молекулалар дастаси чиқаётир. Дастадаги зарраларнинг ўртача ва ўртача квадратик тезлиги топилсин.

Е ч и ш: Сферик координаталар тизимида Максвелл тақсимоти функциясидан фойдаланамиз:

$$dn(\vartheta,\theta,\varphi)=\frac{1}{V}dN(\vartheta,\theta,\varphi)=n\left(\frac{\alpha}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\alpha\vartheta^2}\vartheta^2\ \sin\theta d\theta d\varphi d\vartheta,$$

$\alpha=\frac{m}{2kT}$. У ҳолда, идиш сиртининг 1 см^2 юзасига 1 секундда урилган ва аниқ тезлик қийматига эга бўлган молекулалар сони $dn(\vartheta)=\pi n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{-m\vartheta^2}{2kT}}\vartheta^3 d\vartheta$ бўлади. Дастада тезлиги ϑ бўлган молекулаларнинг $d\vartheta$ оралиқда ошкорлаш эҳтимоллиги $d\rho(\vartheta)=\frac{dn(\vartheta)}{v}$, бу ерда $v=\frac{1}{4}n\bar{\vartheta}$. Шунинг учун дастадаги молекулаларнинг ўртача ва ўртача квадратик тезликлари учун қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$\vartheta=\int_0^\infty\vartheta\,d\rho(\vartheta)=\sqrt{\frac{9\pi kT}{8m}},\quad\sqrt{\overline{\vartheta^2}}=\left[\int_0^\infty\vartheta^2 d\rho(\vartheta)\right]^{\frac{1}{2}}=\sqrt{\frac{4kT}{m}}.$$

223. Релятивистик газ заррасининг энергияси импульс билан $\mathcal{E}=c\sqrt{p^2+m^2c^2}$ кўринишда боғланган. Берилган ҳол учун Максвелл тақсимоти ёзилсин.

Е ч и ш: $d\rho(\vec{p})=C\,e^{\frac{-\mathcal{E}}{kT}}dp_x dp_y dp_z=C\,e^{\frac{-c\sqrt{p^2+m^2c^2}}{kT}}dp_x dp_y dp_z$.

Нормаллаш шарти $\int d\rho(\vec{p})=1$ дан ўзгармас катталик C топилади:

$$C=\left\{4\pi(mc)^3\left[\frac{kT}{mc^2}K_0\left(\frac{mc^2}{kT}\right)+2\left(\frac{kT}{mc^2}\right)K_1\left(\frac{mc^2}{kT}\right)\right]\right\}^{-1}.$$

224. Агар тизим бир бутун ҳолда $\vec{u}$ тезлик билан ҳаракатни бажараётган бўлса, Максвелл тақсимоти қандай ўзгаради?

Ж а в о б: $d\rho(\vec{\vartheta},\vec{u})=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{-m}{2kT}(\vec{\vartheta}-\vec{u})^2}d\vartheta_x d\vartheta_y d\vartheta_z$.

225. Иккита зарра нисбий ҳаракат тезлиги $\vec{\vartheta}'=\vec{\vartheta}_1-\vec{\vartheta}_2$ нинг абсолют қийматининг ϑ', $\vartheta'+d\vartheta'$ оралиқда бўлиш эҳтимоллиги топилсин. ϑ' ўртача аниқлансин.

Ечиш: $d\rho(\vec{\vartheta}_1,\vec{\vartheta}_2)=Ce^{-\frac{m_1\vartheta_1^2+m_2\vartheta_2^2}{2kT}}d\vec{\vartheta}_1 d\vec{\vartheta}_2 \cdot d\vec{\vartheta}_1=4\pi\vartheta_1^2 d\vartheta_1$, $d\vec{\vartheta}_2=4\pi_2^2 d\vec{\vartheta}_2$ ва нормалаш шартидан фойдаланиб қуйидаги ифодани оламиз:

$$d\rho(\vartheta_1,\vartheta_2)=16\pi^2\left(\frac{m_1m_2}{4\pi^2k^2T^2}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m_1\vartheta_1^2+m_2\vartheta_2}{2kT}}\vartheta_1^2\vartheta_2^2 d\vartheta_1 d\vartheta_2.$$

Янги ўзгарувчиларга ва белгилашларга ўтамиз:

$$\vec{\vartheta}'_1=\vec{\vartheta}_1-\vec{\vartheta}_2;\quad \vec{\vartheta}_0=\frac{m_1\vec{\vartheta}_1+m_2\vec{\vartheta}_2}{m_1+m_2};\quad M=m_1+m_2;\quad \frac{1}{\mu}=\frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2}.$$

Натижада тақсимот қуйидаги кўринишни олади:

$$d\rho(\vartheta',\vartheta_0)=4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{M\vartheta'^2}{2kT}}\vartheta'^2 d\vartheta' 4\pi\left(\frac{M}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{M\vartheta_0^2}{2kT}}\vartheta_0^2 d\vartheta_0.$$

Бу ифодадан

$$d\rho(\vartheta')=4\pi\left(\frac{\mu}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{\mu\vartheta'^2}{2kT}}\vartheta'^2 d\vartheta' \qquad (1)$$

келиб чиқади. (1) ифодадан фойдаланиб, $m_1=m_2=m$ ҳолида нисбий тезликнинг ўртача қийматини топамиз:

$\overline{\vartheta'}=\int_0^\infty \vartheta' dp(\vartheta')=\sqrt{2}\bar{\vartheta}$, $\bar{\vartheta}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$ — газ зарраларининг ўртача ҳаракат тезлиги.

226. Фараз қилайлик, $4\pi\vartheta^2 f(\vartheta^2)d\vartheta$ катталик молекулалар тезликларининг ϑ, $\vartheta+d\vartheta$ тезлик оралиғида бўлиш эҳтимоллигини берсин, бу ерда $f(\vartheta^2)$ — дифференциалланувчи функция бўлиб, кўриниши берилмаган. Эҳтимоллик тақсимоти декарт тизими учун тезлик вектори компонентлари ўзаро боғланмаган деб фараз қилиб, тезликлар бўйича Максвелл тақсимоти олинсин.

Жавоб: $f(\vartheta^2)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{-\frac{m\vartheta^2}{2kT}}$.

227. Битта молекуланинг бирлик вақт давомида барча молекулалар билан тўқнашиш тўла сони топилсин. Молекулалар R_0 радиусли мутлақ қайишқоқ шарлар деб қаралсин. Ўртача югуриш йўли топилсин.

Е ч и ш: Фараз қилайлик, газнинг битта молекуладан бошқа қолган барча молекулалари қўзғалмас бўлсин. Ажратилган молекула қолган қўзғалмас молекулаларга нисбатан ϑ' тезлик билан ҳаракатланади. Бу молекула бирлик вақт давомида ϑ' га тенг йўлни ўтади ва қолган барча молекулалар билан $\sigma\vartheta'$ ҳажмли цилиндрда тўқнашади. Ана шундай тўқнашишлар сони $d\nu = \sigma\vartheta' dn(\vartheta')$ бўлади. Бу ерда $4\pi R_0^2$ — сочилишнинг тўла эффектив кесими, $dn(\vartheta') = n\, d\rho(\vartheta')$, n — ҳажм бирлигидаги молекулалар сони, $\overline{\vartheta'} = \sqrt{2}\,\overline{\vartheta}$.

Бирлик вақт давомида молекуланинг тўла тўқнашиш сони:

$$\nu = \int d\nu = \int \sigma\vartheta' n\, d\rho(\vartheta') = 4\pi\left(\frac{m}{4\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \sigma n \int_0^\infty e^{-\frac{m\vartheta'^2}{4kT}} \vartheta'^3 d\vartheta' = 4\pi\sigma\sqrt{\frac{kT}{\pi m}}.$$

Ўртача югуриш йўли $\lambda = \dfrac{\overline{\vartheta}}{\nu} = \dfrac{1}{4\sqrt{2}n\pi R_0^2}$.

228. Икки ўлчамли ҳолда (сирт устида) битта молекуланинг қолган молекулалар билан бир секундда тўқнашишлар сони топилсин.

Ж а в о б: $\nu = \sqrt{2} n_0' \sigma \overline{\vartheta}$, бу ерда $n_0' = \dfrac{N}{S}$, $\overline{\vartheta}$ — икки ўлчамли ҳолда ўртача тезлик, N — сиртдаги тўла зарралар сони, S — сирт юзаси.

229. $\mathcal{E}_1 = kT$ берилган энергиядан кичик ва катта энергияларга эга бўлган зарралар сонининг нисбати аниқлансин.

Ж а в о б: $$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(1) - \dfrac{1}{e}}{\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} + \dfrac{1}{e} - \dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\Phi(1)}.$$

230. Газнинг ҳар бир атоми λ_0 тўлқин узунлигига ва J_0 интенсивликка эга монохроматик ёруғлик нурлантиради. N та атомдан иборат газ нурланишининг интенсивлиги λ тўлқин узунлиги функцияси кўринишида топилсин.

Ечиш: Атомлар турли хил тезлик билан ҳаракатланганлиги учун, Доплер эффектига кўра қабул қилинган нурланишнинг тўлқин узунлиги $\lambda = \lambda_0\left(1+\frac{\vartheta_z}{c}\right)$ бўлади, кузатувчи Oz ўқида турибди деб қаралади. $\lambda, \lambda + d\lambda$ тўлқин узунлиги оралиғидаги ёруғлик интенсивлиги $Jd\lambda = \alpha\, dn(\lambda)$ бўлади, α — ўзгармас катталик бўлиб, $\int J(\lambda)d\lambda = NJ_0$ шартдан топилади.

$$dn(\lambda) = dn(\vartheta_z) = N\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{m\vartheta_z^2}{2kT}} d\vartheta_z = N\left(\frac{mc^2}{2\lambda_0^2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{mc^2(\lambda-\lambda_0)^2}{2kT\lambda_0^2}} d\lambda.$$

Натижада $J(\lambda)d\lambda = \frac{\alpha N}{\sqrt{\pi\delta^2}} e^{-(\lambda-\lambda_0)^2/\delta^2} d\lambda$, бу ерда $\delta = \sqrt{\frac{2kT\lambda_0^2}{mc^2}}$, $\alpha = J_0$. Демак: $J(\lambda) = \frac{J_0 N}{\sqrt{\pi\delta^2}} e^{-(\lambda-\lambda_0)^2/\delta^2}$.

231. Металл ичидаги электроннинг потенциал энергияси унинг ташқарисида бўлган ҳолдаги энергиясидан $W = e\varphi$ миқдор кам деб ҳисоблаб, термоэлектрон эмиссия токининг зичлиги аниқлансин. Металлдаги электрон зичлиги n_0, массаси m.

Ечиш: $\vec{J} = en\vec{\vartheta}$ — термоэлектрон токининг зичлиги. ox йўналишдаги термоэлектрон токининг зичлиги

$$J_x = en_0\bar{\vartheta}_x = en_0\int_{\vartheta_{0x}}^{\infty}\vec{\vartheta}_x d\rho(\vartheta_x)\cdot\int_0^{\infty}\int_0^{\infty} d\rho(\vartheta_y,\vartheta_x) = en_0\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\times$$

$$\times\int_{\vartheta_{0x}}^{\infty}\vartheta_x e^{-\frac{m\vartheta_x^2}{2kT}}d\vartheta_x\int_{-\infty}^{\infty}\int^{\infty} e^{-\frac{m(\vartheta_y^2+\vartheta_z^2)}{2kT}}d\vartheta_y d\vartheta_z = \frac{en_0\vec{\vartheta}}{4}e^{\frac{m\vartheta_{0x}^2}{2kT}},$$

ϑ_{ox} тезлик электроннинг металлдан чиқиш иши шарти $\frac{m\vartheta_{ox}^2}{2} = e\varphi$дан аниқланади, бу ерда $e\varphi$ — электроннинг металлдан чиқиш иши. Натижада $J_x = \frac{en_0\bar{\vartheta}}{4}e^{-\frac{e\varphi}{kT}}$ ифодани оламиз. Бу термоэлектрон ҳодисасининг Ричардсон классик формуласидир.

232. $\mathcal{E} = \mathcal{E}(\bar{p})$ қонунга эга идеал газ учун босим $p = \frac{4\pi}{3}\frac{N}{V}\cdot\int_0^{\infty}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial(\vec{p})}|\vec{p}|\, f(\vec{p})\, d\vec{p}$ ифода билан аниқланиши кўрсатилсин, бу ерда $f(\vec{p})$ импульслар бўйича зарралар тақсимоти, яъни зарранинг $(\vec{p})$ импульсга эга бўлиш эҳтимоллиги.

233. Гиббс тақсимотидан фойдаланиб, ташқи $U(x, y, z)$ потенциал куч майдонига жойлаштирилган идеал газ ихтиёрий зарра координаталари $[x, x+dx]$, $[y, y+dy]$, $[z, z+dz]$ оралиқларида ётиш эҳтимоллиги топилсин.

Ечиш: Гиббс тақсимоти $dW = \dfrac{e^{-\frac{E}{kT}}d\Omega}{\int e^{-\frac{E}{kT}}d\Omega} = \dfrac{e^{-\frac{E_{кин}+U}{kT}}d\Gamma}{\int e^{-\frac{E_{кин}+U}{kT}}d\Gamma}$ ни

зарралар импульси бўйича интеграллаймиз, натижада:

$$d\rho(\vec{r}) = C\,e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}dxdydz$$

ифодани оламиз. Шундай зарралар сони бирлик ҳажмда

$$dn(\vec{r}) = n_0\,e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}dxdydz\,.$$

234. Агар эркин тушиш тезланиши $\vec{g}$, молекула массаси m, газ температураси T бўлса, бир жинсли оғирлик майдонига жойлаштирилган идеал газ устунининг масса маркази топилсин.

Ечиш: $d\rho_Б = \dfrac{e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}dxdydz}{\int e^{-\frac{U(x,y,z)}{kT}}dxdydz}$ — Больцман тақсимоти.

$$\bar{z} = z_0 = \int z\,d\rho_Б = \frac{\int\limits_0^\infty z e^{-\frac{mgz}{kT}}dxdydz}{\int\limits_0^\infty e^{-\frac{mgz}{kT}}dxdydz} = \frac{kT}{mg}.$$

235. Бир хил сондаги, лекин ҳар хил $m_1, \ldots, m_k, \ldots, m_l$ массали зарралардан тузилган l та идеал газлар аралашмаси радиуси R ва баландлиги h бўлган цилиндрда Ернинг оғирлик майдонида жойлашган. Шу тизимнинг масса маркази топилсин.

Е ч и ш: Йўналишни z ўқи бўйича оламиз. Шунда k турли зарралар оғирлик маркази $\bar{z}_k$ тенг бўлади:

$$\bar{z}_k = \int z_k d\rho_Б = \frac{\int_0^h z_k e^{-\frac{m_k g z_k}{kT}} dz_k}{\int_0^h e^{-\frac{m_k g z_k}{kT}} dz_k} = \frac{kT}{m_k g} - \frac{h}{e^{-\frac{m_k g h}{kT}} - 1}.$$

$z_{0k} = \dfrac{kT}{m_k g}$ белгилаш киритамиз, у ҳолда $z_k = z_{0k} - \dfrac{h}{e^{h/z_{0k}} - 1}$.

Бутун тизимнинг умумий оғирлик маркази z_0 қуйидагича топилади:

$$z_0 = \frac{\sum_{k=1}^{l} N m_k \bar{z}_k}{\sum_{k=1}^{l} N m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{l} N m_k \bar{z}_{0k}}{\sum_{k=1}^{l} N m_k} = \frac{\sum_{k=1}^{l} N m_k \frac{h}{e^{h/z_{0k}} - 1}}{\sum_{k=1}^{l} N m_k}.$$

$M = \sum\limits_k N m_k$ десак, у ҳолда $z_0 = \dfrac{lkT}{gM} - \dfrac{1}{M} \sum\limits_{k=1}^{l} \dfrac{h m_k}{e^{h/z_{0k}} - 1}$.

236. h баландликдаги мувозанат ҳолатдаги газ устунининг битта молекула потенциал энергиясининг ўртача қиймати аниқлансин. Газ бир жинсли оғирлик майдонида жойлаштирилган.

Е ч и ш: $U = mg\bar{z} = mg \dfrac{\int_0^h z e^{-\frac{mgz}{kT}} dz}{\int_0^h e^{-\frac{mgz}{kT}} dz} = kT\left(1 - \dfrac{mgh}{kT} \dfrac{1}{e^{mgh/kT} - 1}\right)$.

237. Чексиз баландликдаги газ устунининг потенциал энергиясининг ўртача қиймати аниқлансин. Газ бир жинсли оғирлик майдонида жойлаштирилган, температураси T га тенг, зарралар сони N.

Е ч и ш: $U = N\bar{u} = Nmg \dfrac{\int_0^\infty z e^{-\frac{mgz}{kT}} dz}{\int_0^\infty e^{-\frac{mgz}{kT}} dz} = NkT$.

238. Бир жинсли оғирлик кучи майдонида жойлаштирилган h баландликдаги газ устунининг оғирлиги топилсин.

Жавоб: $\mathcal{P} = SkT(n_0 - n_h)$, бу ерда $n_h = n_0 e^{-\frac{mgh}{kT}}$, S — газ устунининг кесим юзаси.

239. *Мос ҳолда m_1 ва m_2 массали N_1 ва N_2 молекуладан* ташкил топган иккита идеал газлар аралашмаси асос юзаси S, баландлиги h бўлган цилиндрда қамалган. Аралашма оғирлик майдонида ётади. Идиш деворига таъсир этувчи босим ҳамда масса маркази вазияти топилсин.

Жавоб:

$$P(h) = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k}{S} \frac{m_k h}{e^{\frac{m_k gh}{kT}} - 1}, \quad z_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{N_k}{Mg}\left(kT - \frac{m_k gh}{e^{\frac{m_k gh}{kT}} - 1} \right).$$

240. 300 K температурада Ер атмосферасидаги кислород (O_2) молекулаларининг қандай қисми Ернинг гравитацион майдонини енга олиши мумкин?

Ечиш: *m массали кислород молекуласи* Ер гравитацион майдонида $U = mgr_0^2\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)$ потенциал энергияга эга бўлади, бу ерда $r_0 = 6{,}4 \cdot 10^8$ см — Ер радиуси, r — молекуладан Ер марказигача бўлган масофа. Бирлик жисмоний бурчакда баландлик бўйича зарралар сонининг тақсимоти қуйидагича бўлади:

$$n(r) = n_0 e^{-\frac{mgr_0^2}{kT}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r}\right)}, r \to \infty \text{ да } n_\infty = n_0 e^{-\frac{mgr_0}{kT}},$$

$$\frac{n_\infty}{n_0} = e^{-\frac{mgr_0}{kT}} = e^{-\frac{Nmgr_0}{RT}} = e^{-800} \simeq 10^{-344}.$$

241. Доимий Ω бурчак тезлик билан айланувчи R радиусли центрифугада ётган идеал газ молекуласининг ўртача потенциал энергияси топилсин.

Ечиш: $\left|\vec{F}\right| = m\Omega^2 r$, бу ерда r — айланиш ўқидан молекулагача бўлган масофа. Молекуланинг потенциал энергиясини ҳисоблаймиз.

$$m\Omega^2 r = -\frac{dU}{dr}, \quad U = -\frac{m\Omega^2 r^2}{2}.$$

Больцман тақсимотига кўра r, φ, z цилиндрик координатали нуқтада молекулани ошкоралаш эҳтимоли:

$$dW(r,\varphi,z) = Be^{-\frac{U}{kT}}dV = Be^{\frac{m\Omega^2 r^2}{kT}} r dr d\varphi dz.$$

Бу ифодадан r бўйича тақсимот функциясини топамиз:

$$dW(r) = Ae^{\frac{m\Omega^2 r^2}{kT}} r dr.$$

Демак, $U = \int U dW(r) = -\frac{m\Omega^4}{2kT}\left(e^{\frac{m\Omega^2 r^2}{2kT}} - 1\right)\int\limits_0^R e^{\frac{m\Omega^2 r^2}{2kT}} r^3 dr.$ Бу

ифодадан $U = -kT\dfrac{1+\left(\dfrac{m\Omega^2 r^2}{2kT}-1\right)e^{\frac{m\Omega^2 r^2}{2kT}}}{e^{\frac{m\Omega^2 r^2}{2kT}}-1}.$

242. Доимий Ω бурчак тезлик билан айланувчи R радиусли центрифугада молекулалари m_1 ва m_2 массаларга эга бўлган газлар аралашмасини ажратиш ўтказилади. Ажратиш коэффициенти $q = \dfrac{(n_1/n_2)_{r=R}}{(n_1/n_2)_{r=0}}$ топилсин.

Ж а в о б: $q = \dfrac{(n_1/n_2)_{r=R}}{(n_1/n_2)_{r=0}} = e^{\frac{(m_1-m_2)\Omega^2 r^2}{2kT}}.$

243. m массали N та молекуладан ташкил топган мувозанатдаги бир атомли газ Ω бурчак тезлик билан текис айланувчи R радиусли центрифугада жойлашган. Газ температураси T. Газнинг энергияси ва иссиқлик сиғими топилсин.

Ж а в о б: $E = E_0 + NkT\left[1 + \dfrac{m\Omega^2 R^2}{2kT}\dfrac{\exp\left(\dfrac{m\Omega^2 R^2}{2kT}\right)}{1-\exp\left(\dfrac{m\Omega^2 R^2}{2kT}\right)}\right],$

$$C_V = C_V^0 + Nk\left[1-\left(\frac{m\Omega^2R^2}{2kT}\right)^2\right].$$

Бу ерда E_0 ва $C_V^0 - \Omega = 0$ да газ энергияси ва иссиқлик сиғими.

244. g тезланишли бир жинсли оғирлик майдонида Ω бурчак тезлик билан ўз ўқи атрофида айланувчи R радиусли ва h баландликли вертикал цилиндрда ётган газ молекулаларининг тақсимоти олинсин.

Ж а в о б: $$\frac{dn(r,z)}{N} = \frac{g\left(\frac{m\Omega}{kT}\right)^2 e^{-\frac{mgz}{kT}} e^{\frac{m\Omega^2R^2}{2kT}}}{\left(1-e^{-\frac{mgh}{kT}}\right)\left(e^{\frac{m\Omega^2R^2}{2kT}}-1\right)} rdrdz.$$

245. Босим ва температуралари мос ҳолда p_1, T_1 ва p_2, T_2 да сақланиб турувчи икки идиш S кесимли қисқа найча билан туташган. Агар газ молекуласининг массаси m, $p_1 = 2p_2$ ва $T_1 = 2T_2$ бўлса, бир идишдан иккинчисига оқиб ўтган газ массаси аниқлансин.

Ж а в о б: $M = \frac{Sp_2}{\sqrt{2\pi mkT_2}} \cdot 0{,}41.$

К ў р с а т м а:

$$M = S(n_1\overline{\vartheta_{1x}} - n_2\overline{\vartheta_{2x}}) = Sn_1\int_0^{\infty}\vartheta_x e^{\frac{-m\vartheta_x^2}{2kT_1}}d\vartheta_x\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-m(\vartheta_y^2+\vartheta_z^2)}{2kT_1}} \times$$

$$\times d\vartheta_y d\vartheta_z\left(\frac{m}{2\pi kT_1}\right)^{\frac{3}{2}} - Sn_2\int_0^{\infty}\vartheta_x e^{\frac{-m\vartheta_x^2}{2kT_2}}d\vartheta_x\iint_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-m(\vartheta_y^2+\vartheta_z^2)}{2kT_2}}d\vartheta_y d\vartheta_z\left(\frac{m}{2\pi kT_1}\right)^{\frac{3}{2}}$$

Бу ерда $n_1 = \frac{p_1}{kT_1}$, $n_2 = \frac{p_2}{kT_2}$.

246. Идеал газ жойлаштирилган идишда S юзали юмалоқ тешик ўйилган. Тирқишдан h масофада жойлаштирилган R радиусли юмалоқ диск устига тушаётган зарралар сони топилсин. Диск текислиги тешик текислигига параллел. S юза ва диск марказлари юзаларга тик йўналган чизиқда ётибди. Газ молекулалари Максвеллнинг тезликлар бўйича тақсимотига бўйсунади.

$$\text{Жавоб: } N=\int_0^{\theta_0} dN(\theta)=S\frac{N}{2V}\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}}\frac{R^2}{R^2+h^2}.$$

247. Сийраклашган газ p босимда идишда жойлашган. Кичкина S_0 юзали тирқишдан оқиб чиқаётган газ тезлиги u аниқлансин. Бунда газ молекулалари Максвеллнинг тезликлар бўйича тақсимот қонунига бўйсунади деб ҳисоблансин.

Ечиш: $u=-\frac{dN}{dt}$, $-dN=dt\,S_0 n_0\overline{\vartheta_x}$. Бу ерда

$$\overline{\vartheta_x}=\int\vartheta_x\cdot dp(\vartheta)=\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\infty}\vartheta_x e^{\frac{-m\vartheta_x^2}{2kT}}d\vartheta_x\iint_{-\infty}^{+\infty}e^{\frac{m(\vartheta_y^2+\vartheta_z^2)}{2kT}}d\vartheta_y d\vartheta_z=$$

$$=\sqrt{\frac{kT}{2\pi m}}=\frac{1}{4}\bar{\vartheta}.$$

Демак, $u=\frac{p}{4kT}S_0\bar{\vartheta}.$

248. Идеал газ ҳаракатланувчи поршень билан ёпилган идишда жойлашган. Поршень M масса билан юкланган. Берилган ҳол учун газнинг ҳолат тенгламаси аниқлансин.

Ечиш: Бу ҳол учун тизимнинг Гамильтон функцияси

$$H=H(p_i,q_i)+\frac{p_M^2}{2M}+Mgz$$

бўлади. Бу ерда p_M, z — мос равишда M массали поршеннинг импульси ва координатаси. Ҳар доим $Mg=pS$ шарт бажарилиши керак. У ҳолда $Mgz=psz=pV$, бу ерда S — поршень юзаси. Барометрик формулани ҳисобга олмаганда (газ устуни унча катта эмас) $H(p_i,q_i)=\sum_{i=1}^{N}\frac{p_i^2}{2m}$. Тизимнинг статистик интеграли:

$$Z=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-p_M^2}{2MkT}}dp_M\int_0^{\infty}e^{-\frac{pV}{kT}}dV\int_{-\infty}^{\infty}e^{\frac{-\sum p_i^2}{2mkT}}dpdq=$$

$$=N!(2\pi m)^{\frac{3N+1}{2}}(kT)^{\frac{5N+3}{2}}\sqrt{\frac{M}{m}}p^{-N-1}.$$

$$\Phi = -kT\ln Z.\ V = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)_T = \frac{N+1}{p}kT, pV = (N+1)kT.$$

249. Ихтиёрий $f(q_1, ..., q_N; p_1, ..., p_N)$ физик катталик учун $\overline{f\frac{\partial H}{\partial q_i}} = kT\,\overline{\frac{\partial f}{\partial q_i}}$; $\overline{f\frac{\partial H}{\partial q_i}} = kT\,\overline{\frac{\partial f}{\partial p_i}}$ тенгликлар ўринли эканлиги исботлансин.

Ечиш. $\overline{f\frac{\partial H}{\partial q_i}} = \int f\frac{\partial H}{\partial q_i}dW_\Gamma = \int f\frac{\partial H}{\partial q_i}e^{\frac{F-H}{kT}}d\Gamma = -kT\int fe^{\frac{F-H}{kT}}d\Gamma'\Big|_{-\infty}^{\infty} +$
$+kT\int\frac{\partial f}{\partial q_i}e^{\frac{F-H}{kT}}d\Gamma = kT\,\overline{\frac{\partial f}{\partial q_i}}$. Бу ерда $d\Gamma' = dq_1...dq_{i-1}\times$
$\times\, dq_{i+1}...dq_N dp_1...dp_N$.

Шунга ўхшаб: $\overline{f\frac{\partial H}{\partial P_i}} = kT\,\overline{\frac{\partial f}{\partial p_i}}$ эканлиги исботланади.

250. N та молекуладан ташкил топган бир атомли квант идеал газ эркин энергияси, босими, энтропияси ва Гиббс термодинамик потенциали топилсин.

Ечиш: $F = -kT\quad lnZ;\quad p = kT\frac{\partial lnZ}{\partial V};\ S = kT\frac{\partial lnZ}{\partial T};$

$$\Phi = F + pV.\quad Z = \frac{z^N}{N!}; z = \int e^{\frac{-p^2}{2mkT}}d\Omega;\ d\Omega = \frac{1}{h^3}\frac{\partial\Gamma}{\partial\mathcal{E}}d\mathcal{E}.$$

Жавоб: $F = -NkT\left[\ln\frac{V}{N} + \frac{3}{2}\ln\frac{2\pi mkT}{h^2} + 1\right],\ p = \frac{NkT}{V},$

$$S = Nk\left[\ln\left(\frac{2\pi m}{p^{2/3}h^2}\right)^{3/2} + \frac{5}{2}\right] + C_p\ln kT,$$

$$\Phi = NkT\ln\left[p\left(\frac{h^2}{2\pi m}\right)^{\frac{3}{2}}\right] - C_p\cdot T\ln kT.$$

251. Энергияси импульси билан $\mathcal{E} = cp^4$ муносабат орқали боғланган зарралардан ташкил топган бир атомли идеал газнинг ҳолат тенгламаси келтириб чиқарилсин.

Ечиш: $p = kT\frac{\partial\ln Z}{\partial V}$. Битта зарранинг ҳолат функцияси қуйидагича бўлади:

$$z=\int e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}d\Omega=\int e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}\frac{d\Gamma}{h^3}=\frac{V}{h^3}\int\limits_0^\infty e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}4\pi p^2dp=$$

$$=\frac{\pi V}{h^3}c^{\frac{3}{4}}\int\limits_0^\infty e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}\varepsilon^{-1/4}d\varepsilon=\Gamma^{(3/4)}(kT)^{3/4}.$$

$$Z=\frac{z^N}{N!}=\frac{1}{N!}\left(\frac{V}{h^3}\right)^N(kT)^{\frac{3N}{4}}\left[\pi c^{-\frac{3N}{4}}\Gamma(3/4)\right]^N.$$

$p=kT\frac{\partial \ln Z}{\partial V}=\frac{NkT}{V}$ — Менделеев-Клапейрон тенгламаси билан мос келади.

252. Зарралари учун энергия ва импульс орасида $\varepsilon = cp$ муносабат ўринли бўлган бир атомли идеал ультрарелятивистик газнинг эркин энергияси ва ҳолат тенгламаси топилсин.

Ж а в о б: $F=-NkT\left(\ln\frac{8\pi k^3T^3V}{Nc^3h^3}+1\right);p=\frac{NkT}{V}.$

253. N та заррадан ташкил топган бир атомли идеал газ энтропияси S энергия E ва ҳажм V га қандай боғланганлиги топилсин.

Ж а в о б: $S=\frac{3}{2}Nk\ln E+Nk\ln V+\text{const}.$

254. Бир ўлчовли ҳаракатда идеал газ учун эркин энергия F ва энтропия S ифодалари топилсин.

Ж а в о б: $F=-NkT\ln\left[\frac{L}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}+1\right],$

$$S=Nk\ln\left[\frac{Le}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right].$$

Бу ерда L — соҳанинг ҳаракат йўналишидаги чизиқли ўлчами.

255. Бир ўлчовли оғирлик кучи майдонида жойлашган баландлиги h ва асос юзаси S бўлган бир атомли идеал газ устунининг эркин энергияси топилсин. Зарралар сони N, массаси m, температураси T ва оғирлик кучи майдонининг тезланиши g деб ҳисоблансин.

Ж а в о б:

$$F=-NkT\ln\left[\frac{e}{N}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right]-NkT\ln\left[\frac{kTS}{mg}\left(1-e^{-\frac{mgh}{kT}}\right)\right].$$

256. $\frac{1}{2}q_i\frac{\partial H}{\partial q_i}$ катталик i эркинлик даражаси учун вириал дейилади. Агар $q_i\to\pm\infty$ да $H\to\infty$ бўлса, битта эркинлик даражаси вириалининг ўртача қиймати $\frac{1}{2}kT$ га тенглиги кўрсатилсин.

Е ч и ш:

$$\overline{\frac{1}{2}q_i\frac{\partial H}{\partial q_i}}=\int\frac{1}{2}q_i\frac{\partial H}{\partial q_i}dW_\Gamma=\int\frac{1}{2}q_i\frac{\partial H}{\partial q_i}e^{\frac{F-H}{kT}}d\Gamma=\frac{1}{2}kT\times$$

$$\times\int q_ie^{\frac{F-H}{kT}}d\Gamma'\Big|_{q_i=-\infty}^{\infty}+\frac{1}{2}kT\int e^{\frac{F-H}{kT}}\frac{\partial q_i}{\partial q_i}d\Gamma=\frac{kT}{2}\frac{\int_0^\infty e^{\frac{-H}{kT}}d\Gamma}{\int_0^\infty e^{\frac{-H}{kT}}d\Gamma}=\frac{kT}{2}.$$

257. Эркинлик даражаси бўйича кинетик энергиянинг тенг тақсимоти тўғрисидаги ва $\overline{q_i\frac{\partial H}{\partial q_i}}=\overline{p_i\frac{\partial H}{\partial p_i}}$ кўринишдаги вириал ҳақидаги теоремалардан фойдаланиб чизиқли гармоник осцилляторнинг ўртача энергиясини ҳисобланг.

Ж а в о б: $\bar{\varepsilon}=kT$.

258. Эркинлик даражаси бўйича кинетик энергиянинг тенг тақсимоти ва вириал тўғрисидаги теоремалардан фойдаланиб $U(q)=\alpha\cdot q^{2n}$ (n — натурал сон, $\alpha=\mathrm{const}$) потенциал энергияли ташқи майдонда бир ўлчовли ҳаракат бажарувчи зарранинг ўртача энергияси топилсин.

Ж а в о б: $\bar{\varepsilon}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)kT$.

259. Бир атомли ультрарелятивистик бир моль квант идеал газнинг иссиқлик сиғими C_V топилсин.

Ж а в о б: $C_V^{\text{реал}}-2C_V^{\text{ид}}$.

260. Гиббснинг катта каноник тақсимотидан фойдаланиб Ферми-Дирак ва Бозе-Эйнштейн тақсимот функциялари олинсин.

Жавоб: $dn = gf(\mathcal{E})d\Omega$; $f(\mathcal{E}) = \dfrac{1}{e^{\frac{\mathcal{E}-\mu}{kT}} \pm 1}$.

Бу ерда $d\Omega$ — $\mathcal{E}$, $\mathcal{E} + d\mathcal{E}$ энергия оралиғидаги квант ҳолатлар сони, μ — химиявий потенциал, $q = 2s + 1$ — статистик вазн, s — зарра спини.

261. Зарралар тўқнашишини қараб чиқиб, Паулининг тақиқлаш тимойилини ҳисобга олган ҳолда Ферми-Дирак тақсимоти чиқарилсин.

Ечиш: Фараз қилайлик, $W(E_k)$ — заррани E_k энергияли ҳолатда топиш эҳтимоллиги бўлсин. E_1 ва E_2 энергияли иккита зарра тўқнашишидан кейин E_3 ва E_4 энергияли ҳолатларга ўтиши учун кейинги ҳолатлар тақиқланмаган бўлсин. У ҳолда $E_1 + E_2 \rightleftarrows E_3 + E_4$ жараён учун қуйидаги функционал тенгламани оламиз:

$W(E_1)[1-W(E_3)]W(E_2)[1-W(E_4)] = W(E_3)[1-W(E_1)]W(E_4)[1-W(E_2)]$, $f(E) = W^{-1}(E) - 1$ функцияни киритиб, $f(E_3)\,f(E_4) = f(E_1)\,f(E_2)$ ифодани оламиз. Бу тенгламанинг ечими бўлиб $f(E) = A\,e^{\alpha E}$ кўринишдаги функция хизмат қилади. Натижада $f(E) = A\,e^{\alpha E} = \dfrac{1}{W(E)} - 1$ дан $W(E) = \dfrac{1}{A\,e^{\alpha E}+1}$ Ферми-Дирак тақсимотини оламиз.

262. Ферми-Дирак ёки Бозе-Эйнштейн статистикасига бўйсунувчи $\mathcal{E} = \dfrac{p^2}{2m}$ энергияли эркин зарралар учун $B = -\dfrac{2}{3}E$ ўринли эканлиги исботлансин. Бу ерда B — катта термодинамик потенциал.

Ечиш: $B = -kT\ln Z$, $Z = \sum\limits_i \sum\limits_n e^{\frac{\mu n - \mathcal{E}_i}{kT}}$.

$$B_{iБ} = -kT\ln\sum_{n_i=0}^{\infty} e^{\frac{(\mu-\mathcal{E}_i)}{kT}n_i} = kT\ln\left(1 - e^{\frac{\mu-\mathcal{E}_i}{kT}}\right),$$

$$B_{iФ} = -kT\ln\sum_{n_i=0}^{1} e^{\frac{(\mu-\mathcal{E}_i)}{kT}n_i} = -kT\ln\left(1 + e^{\frac{\mu-\mathcal{E}_i}{kT}}\right).$$

i ҳолатдаги зарралар учун бу иккала ифодани бирлаштириб, ёзамиз:

$B_{i\text{БФ}} = \pm kT \ln\left(1 \pm e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{kT}}\right)$. Барча ҳолатлар бўйича йиғиш натижасида қуйидагини топамиз:

$$B_{\text{БФ}} = \pm kT\sum_i \ln\left(1 \mp e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{kT}}\right) = \pm kT\int \ln\left(1 \mp e^{\frac{\mu-\varepsilon_i}{kT}}\right)d\Omega.$$

$d\Omega = g_s\frac{d\gamma}{h^3} = g_s\frac{4\pi p^2 dp}{h^3}V$, $p = \sqrt{2mE}$ эканлигини ҳисобга олиб, бўлаклаб интеграллаш натижасида $B_{\Phi\text{Б}} = -\frac{2}{3}E$ ни оламиз.

263. Энергия бўйича тақсимот функциясига асосланиб ярим спинли фермионлар учун тезликлар бўйича тақсимот олинсин. $T = 0K$ да бу функция графиги чизилсин.

Ечиш: $dn = gf(\varepsilon)\,d\Omega$, $d\Omega = \frac{d\gamma}{h^3} = \frac{1}{h^3}4\pi p^2 dp = \frac{4\pi}{h^3}m^3\vartheta^2 d\vartheta$.

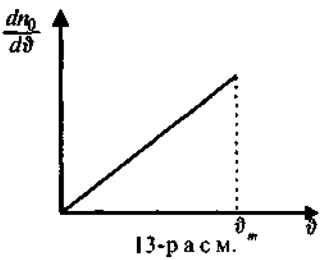
Фермионлар учун $g = 2$, $\varepsilon = \frac{m\vartheta^2}{2}$ тенгликларини ҳисобга олсак, у ҳолда тақсимот функцияси

$$dn(\vartheta) = \frac{8\pi m^3}{h^3}\frac{\vartheta^2 d\vartheta}{\exp\left[\left(\frac{m\vartheta^2}{2} - \mu\right)\frac{1}{kT}\right]+1}$$

кўринишни олади. Бундан $T = 0K$ температурада:

$$dn_0(\vartheta) = \begin{cases} \frac{8\pi m^3}{h^3}\vartheta^2 d\vartheta, \vartheta < \vartheta_m & \text{да;} \\ 0 \qquad\qquad , \vartheta > \vartheta_m & \text{да.} \end{cases}$$

Бу ерда $\vartheta_m = \sqrt{\frac{2\mu_0}{m}}$, μ_0 — $0K$ даги Ферми энергияси (13-расм).



13-расм.

264. Олдинги масала натижасидан фойдаланиб, $T = 0$ да электрон газининг $\overline{\vartheta}, \overline{\vartheta^2}$ ва $\left(\frac{1}{\vartheta}\right)$ катталиклари аниқлансин.

Ж а в о б:

$$\bar{\vartheta}=\frac{3}{4}\vartheta_m;\quad \overline{\vartheta^2}=\frac{3}{5}\vartheta_m^2;\quad \left(\frac{1}{\vartheta}\right)=\frac{3}{2}\frac{1}{\vartheta_m}.$$

265. Мутлақ ноль температурада электрон газининг зарралар сони ва ички энергияси топилсин.

Е ч и ш: $N=\int\limits_0^{\varepsilon_m}dn=\int\limits_0^{\varepsilon_m}2f(\varepsilon)d\Omega=\frac{8\pi V}{3}\left(\frac{2m\varepsilon_m}{h^2}\right)^{3/2}.$

$$E=\int\limits_0^{\varepsilon_m}\varepsilon dn=\int\limits_0^{\varepsilon_m}2\varepsilon f(\varepsilon)d\Omega=4\pi V\left(\frac{2m}{h_2}\right)^{\frac{3}{2}}\int\limits_0^{\varepsilon_m}\varepsilon^{3/2}de=\frac{3}{5}N\varepsilon_m.$$

266. $T=0K$да электрон газининг босими аниқлансин.

Ж а в о б: $p=\frac{h_2}{5m}(3\pi)^{\frac{2}{3}}\left(\frac{N}{V}\right)^{\frac{5}{3}}.$

267. Мутлақ ноль температурадан фарқли температурада норелятивистик айниган электрон газининг энергияси аниқлансин.

Е ч и ш:

$$E=\int\limits_0^{\infty}\varepsilon dn=\int\limits_0^{\infty}2\varepsilon f(\varepsilon)\,d\Omega=2\cdot 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}V\int\limits_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{\frac{3}{2}}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}.\qquad (1)$$

Бу интегрални ҳисоблаш учун $I=\int\limits_0^{\infty}f(\varepsilon)\varepsilon^n d\varepsilon\ (n>0)$ кўринишдаги интегрални ечиш керак. Бу интегрални бўлаклаб интеграллаймиз, функцияни қаторга ёямиз ва натижада жадвалдаги интеграллардан фойдаланамиз. Шунда

$$I\approx\frac{\mu^{n+1}}{n+1}\left[1+\frac{(n+1)n}{6}\pi^2\left(\frac{kT}{\mu}\right)^2\right]\qquad (2)$$

ифодани оламиз.

Бизнинг ҳолимиз учун $n=\frac{3}{2}$. Натижада (1) ифода қуйидаги кўринишни олади:

$$E=4\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}V\left[\frac{2}{5}\mu^{\frac{5}{2}}+\frac{\pi^2}{4}\mu^{\frac{1}{2}}(kT)^2\right].\qquad (3)$$

Агар $\mu = \mu_0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]$ ифодани (3) га қўйсак электрон газ энергиясини оламиз:

$$E = \frac{3}{5}N\varepsilon_m\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_m}\right)^2\right].$$

Бу ерда $\mu_0=\varepsilon_m$ $0K$ да Ферми сатҳи.

268. Мутлақ ноль температурадан фарқли температурада айниган электрон газнинг Ферми сатҳи топилсин.

Жавоб: $\mu = \mu_0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]$.

Кўрсатма:

$$N = \int_0^\infty dn = \int_0^\infty 2f(\varepsilon)d\Omega = 2\cdot 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}V\int_0^\infty \frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1}$$

ифодадан фойдаланилсин.

269. Мутлақ ноль температурадан фарқли температурада норелятивистик айниган газ иссиқлик сиғими ва энтропияси топилсин.

Жавоб: $C_V = \frac{\pi^2}{2\mu_0}nk^2T\left[1 - \frac{3\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right]$,

$$S = \frac{\pi^2}{2\mu_0}nk^2T\left[1 - \frac{\pi^2}{10}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right].$$

270. $T = 0K$ да металлдаги ўтказувчи электронларнинг қандай қисми $0{,}5\varepsilon_m$ дан катта кинетик энергияга эга бўлиши аниқлансин.

Ечиш: $N = \int 2f(\varepsilon)d\Omega = 2\cdot 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}V\int_0^{\varepsilon_m}\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon = AV\frac{2}{3}\varepsilon_m^{\frac{3}{2}}$.

$$N_1 = \int 2f(\varepsilon)d\Omega = AV\int_0^{0,5\varepsilon_m}\varepsilon^{1/2}d\varepsilon = AV\frac{2}{3}(0{,}5\,\varepsilon_m)^{\frac{3}{2}}.$$

$0{,}5\,\varepsilon_m$ энергиядан катта энергияга эга бўлган ўтказувчи электронлар сони

$$N' = N - N_1 = \frac{2}{3} A\varepsilon^{\frac{3}{2}}(1 - 0,5^{\frac{3}{2}}) = \frac{2}{3} A\varepsilon^{\frac{3}{2}})0,65 \cdot \frac{N'}{N} = 65\%$$

ни ташкил қилади.

271. 18°C температурада металлда Ферми энергия сатҳидан 0,01 эВ пастда жойлашган энергетик сатҳни электрон билан тўлдирилиш эҳтимоллиги қандай?

Жавоб: $W(\varepsilon) \approx f(\varepsilon)\left[1 - f(\varepsilon)\right] \approx e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}} = 0,6.$

272. $T \neq 0$K температурада айниган Ферми гази термодинамик потенциали Φ, эркин энергияси F ва энтальпияси аниқлансин.

Жавоб:

$$\Phi = N\mu_0\left[1 - \frac{\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right], \quad F = \frac{3}{5} N\mu_0\left[1 - \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right],$$

$$\chi = N\mu_0\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right].$$

273. $\frac{kT}{\mu} \ll 1$ шартда айниган электрон газининг босими топилсин.

Жавоб: $p = \frac{2}{5}\frac{N}{V}\mu_0\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\mu_0}\right)^2\right].$

274. Ферми статистикасига бўйсунувчи ва металлдан чиқиш иши $A = e\varphi$ бўлган электронларнинг термоэлектрон эмиссия токи аниқлансин. $A - \mu \gg kT$ деб ҳисоблансин.

Ечиш: $J_x = en\overline{v_x}$, $\overline{\vartheta_x} = \int \vartheta_x dn(\vartheta) = \left(\frac{m}{h}\right)^3 \iint\limits_{-\infty}^{+\infty} d\vartheta_y\, d\vartheta_z \times$

$\times \int\limits_{\vartheta_{0x}}^{\infty} \frac{\vartheta_x d\vartheta_x}{\exp\left[\left(\frac{m\vartheta^2}{2} - \mu\right)\frac{1}{kT}\right] + 1}$. Интегрални ҳисоблаш натижасида

ва $\frac{m\vartheta_{0x}^2}{2} = e\varphi$ тенгликдан фойдаланиб, қуйидаги ифодани оламиз: $J_x = \frac{4\pi enm}{h^3}(kT)^2 e^{-\frac{e\varphi}{kT}}$ — Ричардсоннинг квант формуласи.

275. $T = 0K$ температурада 1 см^3 цезийда ўтказувчи электронларнинг йиғинди кинетик энергияси ҳисоблансин.

Ечиш:

$$E=\int_0^\infty \varepsilon dn=\int_0^{\varepsilon_m}\varepsilon 2f(\varepsilon)d\Omega=2\cdot 2\pi\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}V\int_0^{\varepsilon_m}\varepsilon^{\frac{3}{2}}d\varepsilon=\frac{3}{5}N\varepsilon_m.$$

$T=0$ да $\mu_0=\varepsilon_m=E_{\text{Ферми}}-\frac{h^2}{8m}\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$. Бу ерда цезийдаги электронлар концентрацияси $n=\frac{N_A\rho}{M}$ ифодадан топилади, ρ — цезийнинг зичлиги, $M=132{,}9$ кг/моль, $N_A=6{,}02\cdot 10^{26}$ кмоль$^{-1}$.

Жавоб: $E=1280$ Ж.

276. $T=0K$ температурада алюминий учун Ферми энергияси ва битта электрон энергияси ҳисоблансин. Алюминийнинг ҳар бир атомига учта эркин электрон тўғри келади деб ҳисоблансин.

Жавоб: $E_{\text{Ферми}}=12$ эB; $E=7{,}2$ эB.

277. $T=0$ Kда кумуш учун Ферми энергияси ҳисоблансин. Кумуш металлида эркин электронлар концентрацияси $5\cdot 10^{22}$ см$^{-3}$ га тенг. Электронларнинг эффектив массаси эркин электронларнинг массасига тенг деб фараз қилинсин.

Жавоб: $E_{\text{Ферми}}\simeq 5$эB.

278. $T=0$ Kда норелятивистик электрон газида электронларнинг девор билан тўқнашиш сони топилсин.

Жавоб: $\nu=\frac{h}{32m\pi^{1/3}}\left(\frac{3N}{V}\right)^{\frac{4}{3}}$, $N-V$ ҳажмдаги электронлар сони.

279. Мутлақ ноль температурада ультрарелятивистик ($\varepsilon=cp$) газ учун квант ҳолатлар сони $g(\varepsilon)$, чегаравий импульс p_0 ва Ферми энергияси аниқлансин.

Жавоб:

$$g(\varepsilon)=\frac{4\pi V}{(ch)^3}\varepsilon^2;\quad p_0=h\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{\frac{1}{3}};\quad E_{\text{Ферми}}=hc\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{\frac{1}{3}}.$$

280. Айниган ультрарелятивистик ($\varepsilon=pc$) электрон газининг иссиқлик сиғими топилсин.

Е ч и ш: $N = \int g f(\varepsilon) d\Omega = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\Omega(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \times$

$\times \left[\int_0^\mu \Omega(\varepsilon) d\varepsilon + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \Omega'(\mu) + \ldots \right]$. $E \approx \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \int_0^\infty \frac{\Omega(\varepsilon) d\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon-\mu}{kT}}+1} = \frac{8\pi V}{h^3 c^3} \times$

$$\times \left[\int_0^{\mu_0} \Omega(\varepsilon) d\varepsilon + (\mu - \mu_0)\mu_0 \Omega(\mu_0) + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \Omega(\mu_0) + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \mu_0 \Omega(\mu_0) + \ldots \right];$$

$$E = E_0 + \frac{8\pi V}{h^3 \vartheta^3} \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \Omega(\mu_0) \qquad (1).$$

Бу ерда $\Omega(\varepsilon) = \varepsilon^2$; $\Omega(\mu_0) = \mu_0^2$ $\mu = \mu_0 - \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \left[\frac{\partial \ln \Omega(\bar{\varepsilon})}{\partial \varepsilon} \right]_{\varepsilon = \mu_0}$

μ_0 нинг $T = 0K$ даги қиймати $\frac{8\pi V}{h^3 c^3} \int_0^\infty \Omega(\varepsilon) d\varepsilon = N$ ифодадан топилади, натижада

$$\mu_0' = hc \left(\frac{3N}{8\pi V} \right)^{\frac{1}{3}} \qquad (2).$$

(2) ифодани (1) га қўямиз:

$$E = E_0 + \frac{(kT)^2}{6hc} N (3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \left(\frac{N}{V} \right)^{\frac{1}{3}}, \quad C_V = N(3\pi^2)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{3ch} \left(\frac{V}{N} \right)^{\frac{1}{3}}.$$

281. Фараз қилайлик $g(\varepsilon)$ — бир заррали ҳолат зичлиги бўлсин. Ферми-Дирак статистикасига бўйсунувчи газнинг иссиқлик сиғими, $kT << \mu_0$ да $C_V = \frac{\pi^2}{3} k^2 T g(\mu_0)$ формула билан берилиши кўрсатилсин.

Е ч и ш: $E = \int_0^\infty \varepsilon g f(\varepsilon) d\Omega = \int_0^\infty \frac{\varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon}{\exp\left(\frac{\varepsilon - \mu}{kT} \right) + 1}$. (1)

Бу ерда $g(\varepsilon) d\varepsilon = g d\Omega = g \frac{d\gamma}{h^3} = g \frac{dV dp_x dp_y dp_z}{h^3}$. (1) ифодани муайян температура учун қаторга ёямиз:

$$E = \int_0^{\mu_0} \varepsilon g(\varepsilon) d\varepsilon + (\mu - \mu_0)\mu_0 g(\mu_0) + \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 g(\mu_0) +$$

$$+ \frac{\pi^2}{6}(kT)^2 \mu_0 g'(\mu_0) + \ldots = E_0 + \frac{\pi}{6}(kT)^2 g(\mu_0).$$

Бу ифодадан $C_V = \frac{\pi^2}{3} k^2 T g(\mu_0)$.

282. $kT << \mu_0$ шартда металлардаги айниган электрон газининг иссиқлик сиғими ҳисоблансин.

Жавоб: $C_V^{эл} = \frac{\pi^2 Nk}{2} \frac{kT}{\mu_0}$.

283. $kT << \mu_0$ шартда металларда айниган электрон газининг иссиқлик сиғими ёйилиш зонасидаги эффектив электронлар сони n_{ef} билан боғланиши кўрсатилсин.

Жавоб: $C_V^{эл} = \frac{3}{2} kn_{ef}$.

284. Айниган Ферми гази учун босим p, энергия E ва ҳажм V орасида $pV = \frac{2}{3}E$ муносабат бажарилиши кўрсатилсин.

Кўрсатма: 265-масала натижасидан фойдаланилсин.

285. $\varepsilon = \sqrt{p^2c^2 + m^2c^4}$ энергияли тўла айниган релятивистик электрон газининг ҳолат тенгламаси топилсин.

Жавоб:

$$p = \frac{c}{8\pi^2 h^3}\left[p_0\left(\frac{2}{3}p_0^2 - m^2c^2\right)\sqrt{p_0^2 + m^2c^2} + (mc)^4 \cdot \mathrm{arcSh}\,\frac{p_0}{mc}\right],$$

бу ерда $p_0 = (3\pi^2)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{N}{V}\right)^{1/3}$ — Ферми зарраси учун чегаравий импульс.

286. Гиббснинг катта каноник тақсимотидан фойдаланиб Бозе-Эйнштейн ва Ферми-Дирак статистикасига бўйсунувчи идеал газ учун энтропия S нинг n_i га боғлиқлиги топилсин.

Жавоб: Фермионлар учун

$$S = -k\sum_i\left[\overline{n_i}\ln\overline{n_i} + (1 - \overline{n_i})\ln(1 - \overline{n_i})\right],$$ бозонлар учун:

$$S = -k\sum_i\left[\overline{n_i'}\ln\overline{n_i'} - (1 + \overline{n_i'})\ln(1 + \overline{n_i'})\right].$$

Бу ерда $\overline{n_i} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) + 1}$, $\overline{n_i'} = \frac{1}{\exp\left(\frac{\varepsilon_i - \mu}{kT}\right) - 1}$,

287. Тизим энергиясини ε_i сатҳлар билан $E=\sum_i n_i \varepsilon_i$ кўринишда аниқлаб, қайтувчи жараёнларда δA ва δQ қандай маъноларга эга бўлиши кўрсатилсин. $\overline{n_i}$ — i-ҳолатнинг ўртача бандлиги.

Ечиш: $E=\sum_i \overline{n_i}\,\varepsilon_i$, ўзгариши $dE=\sum_i \overline{n_i}\,d\varepsilon_i+\sum_i \varepsilon_i d\overline{n_i}$. Бу йиғиндининг иккинчи қўшилувчиси муҳит зарраларидан тизим зарраларига берилган энергия, биз бу катталикни иссиқлик миқдори деймиз. У ҳолда

$$\delta Q=\sum_i \varepsilon_i d\overline{n_i}=dE-\sum_i \overline{n_i}\,d\varepsilon_i;\quad dB_i=-SdT-f_i d\lambda_i-\overline{n_i}\,d\mu_i.$$

Натижада

$$-\sum_i \overline{n_i}\,d\varepsilon_i=\sum_i\left(\frac{\partial B}{\partial\mu_i}\right)_{T,\lambda_i}d\varepsilon_i=\sum_i\left(\frac{\partial B}{\partial\mu_i}\right)_{T,\lambda_k}\sum\left(\frac{\partial\varepsilon_i}{\partial\lambda_k}\right)_T d\lambda_k=$$

$$=\sum_k\frac{\partial\Sigma B_i}{\partial\lambda_k}d\lambda_k=\sum_k f_k d\lambda_k=\delta\bar{A}$$ — тизимда элементар ишни оламиз.

Демак, $\delta Q=dE+\delta\bar{A}$ термодинамиканинг биринчи қонунини беради.

288. Ультрарелятивистик газ учун қуйидагилар топилсин: а) $T=0K$ да битта зарранинг тўла ва ўртача энергиси; б) босим ва тўла энергия орасидаги боғланиш.

Жавоб: а) $E=\frac{3}{4}N\mu_0$; $E=\frac{3}{4}\mu_0$; б) $p=\frac{1}{3}\frac{E}{V}$.

289. Бозе газининг конденсация температураси T_0 аниқлансин.

Ечиш: $N=\int gf(\varepsilon)d\Omega$; $f(\varepsilon)=\dfrac{1}{\exp\left(\dfrac{\varepsilon-\mu}{kT}\right)-1}$, $g=2s+1$, s — зарра спини, $d\Omega=\dfrac{dVdp_xdp_ydp_z}{h^3}$, $\dfrac{\varepsilon}{kT}=x$ ва $z=\dfrac{\mu}{kT}$ — ўзгарувчи киритамиз, натижада

$$N=2\pi(2s+1)\left(\frac{2mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}}V\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{e^{x-z}-1}$$

ифодани оламиз. Конденсация температурасида Бозе гази химиявий потенциали $\mu = 0$ бўлади, у ҳолда

$$N = 2\pi(2s+1)\left(\frac{2mkTo}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V \cdot 2{,}33 \qquad (1)$$

тенгликдан конденсация температураси T_0 ни топамиз:

$$T_0 = 0{,}084\frac{h^2}{km}\left(\frac{N}{V(2s+1)}\right)^{2/3}.$$

290. $T < T_0$ да мусбат энергияли ($\varepsilon > 0$) ҳолатлардаги бозонлар сонини аниқловчи тақсимот функция

$$dN(\varepsilon) = 2\pi(2s+1)\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1}$$

эканлигини ҳисобга олган ҳолда, энергия нолга тенг бўлган ҳолатдаги зарралар сони топилсин. Ҳамма зарралар сони N.

Ечиш: $\varepsilon > 0$ энергияли тўла зарралар сони:

$$N' = 2\pi(2s+1)\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V\int_0^{\infty}\frac{\varepsilon^{\frac{1}{2}}d\varepsilon}{e^{\varepsilon/kT}-1} = 2\pi(2s+1)\left(\frac{2mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{e^x-1}.$$

Олдинги масалага асосан $N = 2\pi(2s+1)\left(\frac{2mkT_0}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{1}{2}}dx}{e^x-1}.$

Шунда изланаётган зарралар сони

$$N'' = N - N' = N\left[1-\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{3}{2}}\right].$$

291. $T < T_0$ температурада Бозе газининг тўла энергияси E ва иссиқлик сиғими аниқлансин.

Ечиш: $E = \int \varepsilon f(\varepsilon)d\Omega$, $\varepsilon > 0$ ҳол учун янги ўзгарувчан киритиш натижасида тўла энергия E қуйидагича ёзилади:

$$E = 2\pi(2s+1)\left(\frac{2m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V(kT)^{\frac{5}{2}}\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{e^x-1}. \qquad (1)$$

$$\int_0^{\infty}\frac{x^{\frac{3}{2}}dx}{e^x-1} = 1{,}78. \qquad (2)$$

(1) ва (2) ифодалардан:

$$E = 0,128(2s+1)\left(\frac{m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V(kT)^{\frac{5}{2}},\ C_V = 0,32(2s+1)\left(\frac{m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} V(kT)^{\frac{3}{2}}.$$

292. $T < T_0$ температурада Бозе газининг энтропияси S, босими p, эркин энергияси F ва Гиббс термодинамик потенциали Φ нинг температурага боғлиқлиги аниқлансин.

Ечиш: 262-ва 291-масалаларга асосланиб катта термодинамик потенциал B ни ёзамиз:

$$B = -\frac{2}{3}E = -\alpha T^{5/2};\ \alpha = 0,085(2s+1)\left(\frac{m}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} Vk^{\frac{5}{2}}.$$

$$dB = -Sdt - pdV - Nd\mu.$$

Жавоб: $S = \frac{5}{2}\alpha T^{3/2};\ p = \frac{2}{3}\frac{\alpha}{V}T^{5/2};\ F = -\frac{2}{3}\alpha T^{5/2};\ \Phi = 0.$

293. $T < T_0$ температурада Бозе-Эйнштейн гази учун қайтувчи адиабатик жараён тенгламаси олинсин.

Жавоб: $VT^{3/2} = \text{const}$ ёки $pV^{5/3} = \text{const}.$

294. Агар ^{4}He атомларининг спини нолга тенглиги, моляр ҳажми эса 27,6 см^3 ни ташкил этиши маълум бўлса, Бозе гази конденсация температураси зарралар зичлиги орқали ифодалансин ва у гелий-4 изотопи учун баҳолансин.

Жавоб: $T_0 = 0,084\frac{h^2}{km}\left(\frac{N}{V(2s+1)}\right)^{\frac{2}{3}};\ T_0^{He} = 3,13\,K.$

295. Бозе-Эйнштейн статистикасига бўйсинувчи идеал газнинг босими p, ҳажми V ва тўлиқ энергияси E орасидаги боғланиш топилсин.

Жавоб: $p = \frac{2}{3}\frac{E}{V}.$

296. Идеал газ ҳолат тенгламасида квант статистика билан боғланган биринчи тузатма ҳисоблансин.

Жавоб: $pV = NkT\left[1 \mp \frac{1}{2g}\frac{N}{V}\left(\frac{\pi h}{mkT}\right)^{\frac{3}{2}}\right]$, бу ерда "+" белги фермионларга "−" белги бозонларга тегишли, $g = 2s + 1$, s — зарра спини.

297. Иккита квант ҳолатда ётган N та заррадан ташкил топган бир атомли квант идеал газ ички энергияси ва иссиқлик сиғими ҳисоблансин.

Ечиш: $E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$ ва $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \cdot$ $Z = \frac{z^N}{N!}$;

$$z = \sum_{i=0}^{1} e^{\frac{-\varepsilon_i}{kT}} g(\varepsilon_i) = g_0 e^{\frac{-\varepsilon_0}{kT}}\left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{\frac{-\Delta E}{kT}}\right).$$

$$E = N\varepsilon_0 + \frac{N g_1 \Delta\varepsilon e^{\frac{-\Delta\varepsilon}{kT}}}{g_0\left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{\frac{-\Delta E}{kT}}\right)}; \quad C_V = Nk\left(\frac{g_1}{g_0}\right)\left(\frac{\Delta\varepsilon}{kT}\right)^2 \frac{e^{\frac{-\Delta E}{kT}}}{\left(1 + \frac{g_1}{g_0} e^{\frac{-\Delta\varepsilon}{kT}}\right)^2}.$$

298. ε_0 ва ε_1 энергияли иккита квант ҳолатида ётган тизимнинг энтропияси топилсин.

Ечиш: $S = \frac{E}{T} + k \ln Z$.

Жавоб: $S = k\left[\ln \frac{\varepsilon}{\varepsilon - E} + \frac{E}{\varepsilon} \ln \frac{\varepsilon - E}{E} \frac{g_1}{g_0}\right]$, $\varepsilon = \varepsilon_1 - \varepsilon_0$.

299. Тизим айнимаган $\varepsilon_l = l\varepsilon$, $l = 0, 1, 2, ..., n - 1$ энергетик спектрга эга. Тизимнинг ўртача энергияси аниқлансин.

Ечиш: $\bar{\varepsilon} = E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \sum_{l=0}^{n-1} e^{\frac{-l\varepsilon}{kT}} g(\varepsilon_l) =$

$$= kT^2 \frac{\partial}{\partial T} \ln \frac{1 - e^{\frac{-n\varepsilon}{kT}}}{1 - e^{\frac{-\varepsilon}{kT}}} = \frac{\varepsilon}{e^{\frac{\varepsilon}{kT}} - 1} - \frac{n\varepsilon}{e^{\frac{n\varepsilon}{kT}} - 1}.$$

300. Ҳар бири $n + 1$ каррали айниган $\varepsilon_n = (n + 1)h\nu$ энергетик сатҳларга эга бўлган N та ўзаро боғланмаган гармоник осцилляторлардан ташкил топилган тизимнинг иссиқлик сиғими аниқлансин ($n = 0, 1, 2, ...$).

Ечиш: $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$; $E = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$. N та ўзаро боғланмаган икки ўлчовли гармоник осцилляторлардан ташкил топган статистик йиғинди Z қуйидагича бўлади:

$$Z=\frac{1}{N!}\left[\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)e^{\frac{-h\nu(n+1)}{kT}}\right]=\frac{1}{N!}\left[\frac{\partial}{\partial\beta}\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\beta(n+1)}\right]=\frac{1}{N!}\left[\frac{\partial e^{-\beta}}{\partial\beta_1-e^{-\beta}}\right]=$$

$$=\frac{1}{N!}\frac{e^{\beta}}{(e^{\beta}-1)^2}\cdot \text{ Демак, } Z=\frac{1}{N!}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)^2}.$$

$$E=kT^2\frac{\partial\ln Z}{\partial T}=N\left(h\nu+\frac{2h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\right);\quad C_V=\frac{Nk}{2}\left(\frac{h\nu}{kT}\right)^2\frac{1}{sh^2\left(\frac{h\nu}{kT}\right)}.$$

301. N та икки атомли зарралардан ташкил топган квант идеал газнинг тебранма ҳаракатига тўғри келган иссиқлик сиғими аниқлансин.

Ечиш: $C_V^{\text{тебр}}=\left(\frac{\partial E_{\text{тебр}}}{\partial T}\right)_V;\quad E_{\text{тебр}}=kT^2\frac{\partial\ln Z_{\text{тебр}}}{\partial T};$

$$Z_{\text{тебр}}=(z_{\text{тебр}})^N;\quad Z_{\text{тебр}}=\sum_i e^{\frac{-\varepsilon_{\text{тебр}}}{kT}}g(\varepsilon_{\text{тебр}});\quad \varepsilon_{\text{тебр}}=h\nu\left(n+\frac{1}{2}\right);$$

$$z_{\text{тебр}}=e^{\frac{-h\nu}{2kT}}\sum_{n=0}^{\infty}e^{\frac{-h\nu n}{kT}}=\frac{e^{\frac{-h\nu}{2kT}}}{1-e^{\frac{-h\nu}{kT}}}=\frac{e^{\frac{-T_c}{2T}}}{1-e^{\frac{-T_c}{T}}};\quad T_c=\frac{h\nu}{k}$$ — характеристик температура дейилади.

$$E_{\text{тебр}}=\frac{NkT_c}{2}\operatorname{cth}\frac{T_c}{2T};\quad C_V^{\text{тебр}}=\frac{Nk}{4}\left(\frac{T_c}{T}\right)^2\frac{1}{sh^2\left(\frac{T_c}{2T}\right)}.$$

302. N та икки атомли заррадан ташкил топган квант идеал газнинг тебранма ҳаракатига тўғри келган эркин энергия ва энтропия аниқлансин.

Жавоб: $F_{\text{тебр}}=\frac{NkT_c}{2}+NkT\ln\left(1-e^{\frac{-T_c}{T}}\right);$

$$S_{\text{тебр}} = Nk\left(\frac{T_c}{T}\right)\frac{1}{\exp\left(\frac{T_c}{T}\right)-1} - Nk\ln\left[1-e^{\frac{-T_c}{T}}\right].$$

303. Паст температурада ($T << T_c$) N та икки атомли зарралардан ташкил топган квант идеал газнинг айланма ҳаракатига тўғри келувчи ички энергия ва иссиқлик сиғим аниқлансин.

Ечиш:

$$E_{\text{айл}} = NkT^2\frac{\partial}{\partial T}\ln Z_{\text{айл}};\quad C_V^{\text{айл}} = \left(\frac{\partial E_{\text{айл}}}{\partial T}\right)_V;$$

$$z_{\text{айл}} = \sum\exp\left(\frac{-\varepsilon_{\text{айл}}}{kT}\right)g(\varepsilon_{\text{айл}}) = \sum(2j+1)e^{\frac{-T_c j(j+1)}{T}};$$

$g(\varepsilon_{\text{айл}}) = 2j+1$; $\varepsilon_{\text{айл}} = \frac{h^2}{8\pi^2 I}J(J+1)$; $J = 0, 1, 2, 3...$ — квант сон;

$$T_c = \frac{\varepsilon_{\text{айл}}}{K};\quad z_{\text{айл}} \simeq 1+3\exp\left(\frac{-2T_c}{T}\right);\quad E_{\text{айл}} \simeq \frac{3Nh^2}{4\pi^2 I}\exp\left(\frac{-2T_c}{T}\right);$$

$$C_V^{\text{айл}} \simeq 12Nk\left(\frac{T_c}{T}\right)^2\exp\left(\frac{-2T_c}{T}\right).$$

304. $T << T_c = \frac{h^2}{8\pi^2 Ik}$ температурада орто- ва параводороднинг мувозанатли концентрациялари қандай бўлади? I — водород молекуласининг инерция моменти.

Ечиш: $$\frac{N_{\text{орт}}}{N_{\text{пар}}} = \frac{\sum\limits_{j=1,3,5,...} e^{\frac{-T_c}{T}j(j+1)}(2j+1)g_{\text{орт}}}{\sum\limits_{j=0,2,4,...} e^{\frac{-T_c}{T}j(j+1)}(2j+1)g_{\text{пар}}};$$

$$\frac{g_{\text{орт}}}{g_{\text{пар}}} = \frac{(2s+1)_{\text{орт}}}{(2s+1)_{\text{пар}}} = \frac{2\cdot 1+1}{2\cdot 0+1} = 3\cdot T << T_c = \frac{h^2}{8\pi^2 Ik}$$ да

$$\frac{N_{\text{орт}}}{N_{\text{пар}}} \simeq 3\frac{3e^{\frac{-2T_c}{T}}+7e^{\frac{-12T_c}{T}}}{1+e^{\frac{-10T_c}{T}}} = 9e^{\frac{-2T_c}{T}}.$$

305. Мувозанатли нурланиш учун Планк формуласи

$$\rho(\nu,T)d\nu = \frac{8\pi\nu^3 d\nu}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)}$$

чиқарилсин.

306. Мувозанатли нурланишнинг спектрал энергия зичлиги ρ_λ га мос келувчи тўлқин узунлиги λ_m ва ρ_λ максимум функцияга мос келувчи частота ν_m бири-бирига мос келмаслиги, яъни $\lambda_m \cdot \nu_m \neq c$ эканлиги кўрсатилсин.

Ечиш:

$$\rho_\nu d\nu = \rho_\lambda d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5}\frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right)-1}. \qquad (1)$$

$\left.\frac{\partial\rho(\lambda,T)}{\partial\lambda}\right|_{\lambda=\lambda_m} = 0$ шартдан

$$\frac{xe^x}{e^x-1} = 5 \qquad (2)$$

бўлади. Бу ерда $x = \frac{h_c}{kT\lambda_m}$. (2) формуладан $x = 4{,}9651$ ни топамиз. $\left.\frac{\partial\rho(\nu,T)}{\partial\nu}\right|_{\nu=\nu_m} = 0$ шартдан $\frac{xe^x}{e^x-1} = 3$, бу тенгламадан $x = 2{,}8412$ эканлигини топамиз. Демак, $\lambda_m T = 0{,}002896$ м · К ва $T/\vartheta_m = 0{,}005097$ м · К ни оламиз.

307. λ, $\lambda + d\lambda$ ёки ν, $\nu + d\nu$ спектрал қисмда энг катта нисбий нурланиш энергия зичлиги тўғри келувчи температура T_m аниқлансин.

Ечиш: Планк формуласи бўйича λ, $\lambda + d\lambda$ ёки ν, $\nu + d\nu$ спектрал қисмга тўғри келган нурланиш энергия зичлиги

$$du = \rho(\nu,T)d\nu = \frac{8\pi\nu^3 d\nu}{c^3\left(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1\right)},$$

ёки

$$du = \rho(\lambda,T)d\lambda = \frac{8\pi hc\, d\lambda}{\lambda^5\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}}-1\right)}.$$

Тўла нурланиш энергия зичлиги эса $u = \sigma T^4$. Демак, λ, $\lambda + d\lambda$ ёки ν, $\nu + d\nu$ спектрал қисмга тўғри келган нисбий нурланиш энергия зичлиги

$$\delta = \frac{u_\lambda d\lambda}{\sigma T^4} = \frac{8\pi k^4}{c^3 h\sigma\lambda}\frac{x^4}{e^x - 1}d\lambda; \quad \delta = \frac{u_\nu d\nu}{\sigma T^4} = \frac{8\pi k^4}{c^3 h^3\sigma\nu}\frac{x^4}{e^x - 1}d\nu;$$

$\left.\frac{\partial\delta}{\partial x}\right|_{x=x_m} = 0$ шартдан $\frac{x^4}{e^x - 1} = 4$, бу тенгламадан

$$x = \frac{hc}{\lambda k T_m} = 3{,}9207 \quad \text{ва} \quad \lambda T_m = 0{,}3668.$$

308. Планк формуласидан фойдаланиб, V ҳажмдаги мувозанатли нурланишнинг Гиббс термодинамик потенциали аниқлансин.

Жавоб: $\Phi = F + pV = 0$.

309. Планк формуласидан фойдаланиб Виннинг силжиш қонуни $\lambda_m T = b$ олинсин.

310. Икки ўлчовли ҳолда мувозанатли нурланишнинг спектрал зичлиги учун формула чиқарилсин.

Жавоб: $\rho(\nu, T) = \frac{2\pi h}{c^2}\frac{\nu^2}{e^{h\nu/kT} - 1}$.

311. Планк формуласидан фойдаланиб, λ, $\lambda + d\lambda$ тўлқин узунлиги оралиғида бирлик ҳажмдаги фотонлар сони топилсин.

Жавоб: $dn(\lambda, T) = \frac{8\pi}{\lambda^4}\frac{d\lambda}{\exp\left(\frac{hc}{\lambda kT}\right) - 1}$.

312. 100 K температурада мувозанатли нурланиш билан тўлдирилган бўшлиқнинг ҳажм бирлигидаги фотонларнинг тўла сони аниқлансин.

Жавоб: $n_\phi = 19{,}24\pi\left(\frac{kT}{hc}\right)^3 = 5\cdot 10^8 см^{-3}$.

313. Қаттиқ жисмнинг қайишқоқ тебранишларини Дебай моделидаги Бозе статистикасига бўйсинувчи фононлар гази деб, унинг энергияси ва иссиқлик сиғимини топинг. Жисм ҳажми V, бўйлама ва кўндаланг тўлқинларнинг тарқалиш тезликлари мос ҳолда c_l ва c_t. Кичик температуралар ҳоли қараб чиқилсин.

Ечиш: $3N = \sum_{\nu=0}^{\nu_{max}} g(\nu_i)d\nu_i;\quad g(\nu_i)d\nu_i = \left[\frac{4\pi\nu_i^2}{c_l^3}d\nu_i + 2\times\right.$

$\times \frac{4\pi \nu_t^2}{c_t^3} d\nu_t \Bigg]$ V — частоталари ν_l, $\nu_l + d\nu_l$ ва ν_t, $\nu_t + d\nu_t$ оралиқдаги бўйлама ва кўндаланг тўлқинлар сони. Агар, $\nu_l = \nu_t$ ва $c_l = c_t$ деб фараз қилсак, у ҳолда $g(\nu)d\nu = \frac{12\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu$ ва қаттиқ жисм энергияси

$$E = \int_0^{\nu_{max}} \bar{\varepsilon} g(\nu)d\nu = \int_0^{\nu_{max}} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\frac{12\pi V}{c^3}\nu^2 d\nu = \frac{12\pi V}{c^3}\left(\frac{kT}{h}\right)^4 h\int_0^{\tilde{\nu}} \frac{x^3 dx}{e^x-1},$$

$\tilde{\nu} = \frac{h\nu_{max}}{kT}$. Паст температураларда $\frac{h\nu_{max}}{kT} \to \infty$ ва $\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x-1} = \frac{\pi^4}{15}$.

$$E = \frac{4\pi^5 k^4 V}{5c^3 h^3}T^4 = \frac{3\pi^4 Nk}{5\theta^3}T^4; \quad C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V = \frac{12\pi^4 Nk}{5\theta^3}T^3;$$

$\theta = \frac{h\nu_{max}}{k}$ — Дебай температураси.

314. Олдинги масала натижасидан фойдаланиб паст температуралардаги қаттиқ жисмнинг эркин энергияси, энтропияси, босими ва Гиббс термодинамик потенциали аниқлансин.

315. $T << \theta \frac{\hbar\omega_m}{k}$ да қаттиқ жисмлар учун квант ҳолатлар сони $\Omega(E)$ аниқлансин.

Ечиш: $S = k\ln\Omega(E)$ дан $\Omega(E) = e^{\frac{S}{k}}$. Бу ерда S — қаттиқ жисм энтропияси. Олдинги масалада $E = \frac{3\pi^4 Nk}{5\theta^3}T^4$. Қаттиқ жисмнинг эркин энергияси $F = -T\int_0^T \frac{E}{T^2}dT = -\frac{\pi^4 Nk}{5\theta^3}T^4$.

$$S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = \frac{4}{5}\frac{\pi^4 Nk}{\theta^3}T^3. \text{ Демак, } \Omega(E) = e^{\frac{4N\pi^4}{5}\left(\frac{T}{\theta}\right)^3}.$$

316. Электрон газининг иссиқлик сиғими литий кристалл панжарасининг иссиқлик сиғимига тенг бўлгандаги температура аниқлансин. Литий учун Дебай температураси $\theta = 404$ K, ундаги эркин электронлар концентрацияси $n = 4{,}66 \cdot 10^{28}$ м$^{-3}$.

Ечиш:

$$C_V^{эл} = \frac{Nk\pi^2}{2}\frac{kT}{\varepsilon_{max}}; \quad C_V^{панж} = \frac{12Nk\pi^4}{5\theta^3}T^3, \quad \varepsilon_{max} = \frac{h^2}{8m}\cdot\left(\frac{3n}{\pi}\right)^{\frac{2}{3}},$$

$C_V^{эл} = C_V^{панж}$ шартдан $T = \sqrt{\frac{5k\,\theta^3}{24\pi^2\varepsilon_{max}}} = 5K$. $m_e = 9{,}1\cdot10^{-31}$ кг; $h = 6{,}6\cdot10^{-34}$ Ж/с.

317. 300 *К*да кумуш кристаллида фононнинг эркин югуриш йўли ўртача узунлиги ҳисоблансин. Кумушнинг иссиқлик ўтказувчанлик коэффициенти $æ = 418$ Втм$^{-1}$К$^{-1}$, товушнинг тарқалиш тезлиги $\vartheta_T = 3700\,\frac{м}{с}$.

Ечиш: $\bar{l} = \frac{3æ}{C'_\mu \vartheta_T}$; $C'_\mu = \frac{C\mu}{V\mu} = C_\mu\frac{\rho}{\mu}$ — солиштирма иссиқлик сиғими, $C_\mu = \frac{12\pi^4 Nk}{5\theta^3}T^3$; $\mu = \mu_{Ag} = 107{,}87\,\frac{кг}{кмоль}$; $\rho_{Ag} = 10{,}5\cdot10^3\,\frac{кг}{м^3}$; $\theta = 225$K; $Nk = N_A k \approx 2$ кал/мольК. Натижада: $\bar{l} = 1{,}47\cdot10^{-5}$см.

318. Атомлар тебранишини ангармоник деб ҳисоблаб, қаттиқ жисмнинг моляр иссиқлик сиғими ҳисоблансин. Чизиқли ангармоник осцилляторнинг Гамильтон функцияси қуйидаги кўринишда:

$$H(q,p) = \frac{p^2}{2m} + \alpha q^2 - \beta q^4,\ \text{бу ерда}\ \beta \ll \frac{\alpha^2}{kT}.$$

Ечиш: $C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V$; $E = kT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T}$. Қаттиқ жисмни ўзаро боғланмаган $3N$ чизиқли ангармоник осцилляторлар тўплами деб қараш мумкин. Бу ҳолда тизимнинг ҳолат интеграли:

$$Z = \frac{z^N}{N!}\ \text{ва}\ z = \int e^{\frac{-H(p,q)}{kT}}\frac{dpdq}{h^3} = \frac{1}{h^3}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-p^2}{2mkT}}dp\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\alpha q^2}{kT}+\frac{\beta q^4}{kT}}dq,$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-p^2}{2mkT}}dp = (2\pi mkT)^{\frac{1}{2}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\alpha q^2}{kT}+\frac{\beta q^4}{kT}}dq = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{-\alpha q^2}{kT}}\left(1+\frac{\beta q^4}{kT}+\dots\right)dq = \left(\frac{\pi kT}{\alpha}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{3}{4}\frac{\beta kT}{\alpha^2}+\dots\right),$$

чунки $q^2 \le \frac{kT}{\alpha}$, аммо шу соҳада $\frac{\beta q^4}{kT} \ll \frac{\alpha^2 q^4}{(kT)^2} \le 1$. Шунинг учун интеграл тагидаги иккинчи экспонентани қаторга ёйилди.

Демак, берилган қаттиқ жисмнинг ҳолат интеграли қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$Z = \frac{1}{N!h^{3N}}\left(\frac{2m}{\alpha}\right)^{\frac{3N}{2}}\left[\pi kT\left(1+\frac{3}{4}\frac{\beta}{\alpha^2}kT+...\right)\right]^{3N}.$$ Бир моль қаттиқ жисм энергияси $E \approx 3RT\left(1+\frac{3}{4}\frac{\beta}{\alpha^2}kT+...\right)$; моляр иссиқлик сиғими: $C_V = 3R\left(1+\frac{3}{2}\frac{\beta}{\alpha^2}kT+...\right)$.

319. Кристаллар учун Ми-Грюнейзен муносабати: $3V\alpha = \gamma\beta C_V$ ўринли эканлиги кўрсатилсин. Бу ерда $\alpha = \frac{1}{3V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$ — ҳажмнинг чизиқли кенгайиш коэффициенти, $\beta = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)$ — термик сиқилиш коэффициенти, $\gamma = -\frac{\partial \ln \nu_i}{\partial \ln V}$ – ν_i ҳамма частоталар учун ўзгармас бўлган катталик.

Ечиш: $p = kT\frac{\partial \ln Z(T,V)}{\partial V}$; $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{3\alpha}{\beta}$. Гармоник яқинлашишда қаттиқ жисмнинг ҳолати ҳажм V ва осцилляторлар тўплами ($n_i = 0, 1, 2, ...$) билан аниқланади. Ана шу яқинлашишда кристалл энергияси $E = E_0(V) + \sum_{i=1}^{3N-6}\left(\overline{n}_i+\frac{1}{2}\right)h\nu_i(V)$ бўлади, $E_0(V)$ — кристаллнинг қўзғалмас Nта зарраларининг ўзаро таъсир энергияси.

$$Z_i = \sum e^{\frac{-\varepsilon_i}{kT}}\Omega(\varepsilon_i) = \sum \exp\left(-\frac{\varepsilon_0(V)+(n_i+1/2)h\nu_i(V)}{kT}\right) =$$

$$\exp\left(-\frac{\varepsilon_0(V)}{kT}\right) = \exp\left(-\frac{h\nu_i(V)}{2kT}\right)\sum \exp\left(-\frac{n_i h\nu_i(V)}{kT}\right) =$$

$$\exp\left(\frac{\varepsilon_0(V)}{kT}\right)\exp\left(-\frac{h\nu_i(V)}{2kT}\right) = \frac{1}{1-e^{-h\nu_i/kT}} = \exp\left(-\frac{\varepsilon_0(V)}{kT}\right)\frac{1}{2sh\frac{h\nu_i}{2kT}};$$

$$Z = \prod_{i=1}^{3N-6} Z_i = \exp\left(-\frac{E_0(V)}{kT}\right)\cdot\prod_{i=1}^{3N-6}\frac{1}{2sh\frac{h\nu_i}{2kT}};$$

$$p = kT\frac{\partial \ln Z(T,V)}{\partial V} = -\left(\frac{\partial E_0}{\partial V}\right)_T - \frac{1}{V}\sum_{i=1}^{3N-6}\left(\frac{1}{2}h\nu_i + \frac{h\nu_i}{e^{\frac{h\nu_i}{kT}}-1}\right)\cdot\frac{\partial \ln \nu_i}{\partial \ln V};$$

$$p = -\frac{\partial E_0}{\partial V} + \frac{\gamma(E-E_0)}{V}$$

Бу ифодадан $\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V = \frac{\gamma}{V}\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_V = \frac{\gamma}{V}C_V = \frac{3\alpha}{\beta}$. Демак, $3V\alpha = \gamma\beta C_V$.

320. Агар тақиқланган зона кенглиги температура ўзгариши билан $E_g = E_g^0 - \zeta T(\zeta > 0)$ қонун бўйича ўзгарса, хусусий яримўтказгичда Ферми сатҳининг вазияти аниқлансин.

Ечиш: Айнимаган яримўтказгичда ўтказиш зонасидаги электронлар сони ва валент зонадаги тешиклар сони мос ҳолда қуйидагича бўлади:

$$n = 2\left(\frac{2\pi m_n kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{\frac{\mu-E_0}{kT}}; \qquad p = 2\left(\frac{2\pi m_p kT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{\mu-E_v}{kT}}.$$

Бу ерда E_0 — ўтказиш зонасининг энг пастки чегараси, E_v — валент зонасининг энг юқори чегараси, μ — химиявий потенциал ёки Ферми сатҳи деб юритилади, $E_g = E_c + E_v$. Квазинейтраллик шарти $n = p$ дан:

$$\mu = \frac{E_g}{2} + \frac{3}{4}kT\ln\left(\frac{m_n}{m_p}\right) = \frac{E_g^0-\zeta T}{2} + \frac{3}{4}kT\ln\left(\frac{m_n}{m_p}\right).$$

321. $\vec{\mathcal{E}}$ кучланганликли бир жинсли ташқи электр майдонда ётган ўзгармас $\bar{p}_0$ моментли Nта дипол молекулалардан ташкил топган идеал газнинг электр қутбланиши $\mathcal{P}$ ҳисоблансин.

Ечиш: $d\Phi = -SdT + \mathcal{P}d\mathcal{E} + Vdp$; $\Phi = -kT\ln Z(T, p, \mathcal{E})$. Битта молекуланинг Гамильтон функцияси

$$H_i = \frac{p_i^2}{2m} - (\vec{p}_0\vec{\mathcal{E}}) = \frac{p_i^2}{2m} - p_0\mathcal{E}\cos\theta.$$

$$\mathcal{P} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \mathcal{E}}\right)_{T,p} = -kT\frac{\partial \ln Z}{\partial \mathcal{E}}. \quad Z = z_i^N;$$

$$z_i = \int e^{\frac{-H_i}{kT}}d\Gamma = \varphi(T)\int_0^{\pi} e^{\frac{p_0\mathcal{E}\cos\theta}{kT}}\sin\theta d\theta = \varphi(T)\frac{kT}{p_0\mathcal{E}}\left(e^{\frac{p_0\mathcal{E}}{kT}} - e^{-\frac{p_0\mathcal{E}}{kT}}\right).$$

$\mathscr{P}= Np_0 L\left(\frac{p_0\mathscr{E}}{kT}\right)$. Бу ерда $L(x) = cthx - \frac{1}{x}$ — Ланжевен функцияси деб юритилади.

322. Олдинги масаладан фойдаланиб ўзгармас $\vec{p}_0$ моментли N та диполь молекуладан ташкил топган идеал газ учун диэлектрик сингдирувчанлик аниқлансин.

Ечиш: $\varepsilon = 1 + 4\pi æ$, ε — диэлектрик сингдирувчанлик, æ — қутбланувчанлик, чунки $\vec{\mathscr{P}} = \frac{\varepsilon-1}{4\pi}\vec{\mathscr{E}} = æ\vec{\mathscr{E}}$, $\mathscr{P} = Np_0 L\left(\frac{p_0\mathscr{E}}{kT}\right)$. Ланжевен функцияси катта температурада ва кучсиз майдонда $L(x) = cthx - \frac{1}{x} = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} = \frac{1}{x} = \frac{x}{3}$ қаторга ёйилади. Бу ҳолда бирлик ҳажмдаги газ дипол моменти $\mathscr{P}_0 = \frac{\mathscr{P}}{V} = \frac{1}{3} n \frac{p_0^2\mathscr{E}}{kT} = æ\mathscr{E}$. Демак, $\varepsilon = 1 + \frac{4\pi}{3} n \frac{p_0^2}{kT}$.

323. Молеклаларнинг қутбланувчанлиги æ ни ташқи майдон катталигига боғланмаган деб ҳисоблаб, олдинги масала учун диэлектрик сингдирувчанлик аниқлансин.

Жавоб: $\varepsilon = 1 + 4\pi\left(næ + \frac{1}{3}\frac{np_0^2}{kT}\right)$.

324. $\vec{æ}$ кучланганликли бир жинсли ташқи магнит майдонда ётган ўзгармас $\vec{м}$ магнит моментли N та молекуладан ташкил топган идеал газнинг магнитланиши $\vec{M}$ ҳисоблансин.

Ечиш:

$$dW_Б = \frac{dN}{N} = \frac{e^{\frac{-u(\theta)}{kT}} \sin\theta d\theta d\varphi}{\int e^{\frac{-u(\theta)}{kT}} \sin\theta d\theta d\varphi}.$$

Бу ерда $u(\theta) = -(\vec{м}\vec{æ}) = -мæ\cos\theta$; $0 \le \varphi \le 2\pi$; $0 \le \theta \le \pi$. $\beta = \frac{1}{kT}$ деб белгиласак, $\frac{dN(\theta)}{N} = \frac{exp(\beta мæ\cos\theta)\sin\theta\theta}{Z(\beta)}$; $Z(\beta) = \int_0^\pi exp(\beta мæ\cos\theta)\sin\theta d\theta$. Магнит майдон йўналиши бўйича магнит моменти проекциясининг ўртача қиймати:

$$\overline{M_z} = \overline{м\cos\theta} = \int м\cos\theta \frac{dN(\theta)}{N} = м\frac{\int \exp(\beta мæ\cos\theta)\cos\theta\sin\theta d\theta}{\int \exp(\beta мæ\cos\theta)\sin\theta d\theta} =$$

$$= \frac{1}{æ}\frac{\partial}{\partial\beta}\ln\frac{sh(\beta мæ)}{\beta} = м\left[\mathrm{cth}(\beta мæ) - \frac{1}{\beta мæ}\right]\cdot M = \overline{м\cos\theta}N =$$

$= NмL\left(\frac{мæ}{kT}\right)$. Бунда $L(x) = \mathrm{cth}x - \frac{1}{x}$ — Ланжевен функцияси.

325. N та молекуладан ташкил топган сийраклантирилган газ зарралари қуйидаги қонун бўйича таъсирлашади:

$$U(r) = \begin{cases} 0, r > \rho; \\ -U_0, \rho > r > d; \\ \infty, r \le d. \end{cases}$$

Ана шундай газнинг иссиқлик сиғими аниқлансин. r — ўзаро таъсир сфера радиуси.

Ечиш:

$$C_V = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V; \quad E = kT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T}.$$

Берилган ҳол учун реал газнинг ҳолат функцияси

$$Z = Z_{ид}\left(1 + \frac{N^2\beta}{2V}\right); \qquad \beta = 4\pi\int_0^\infty\left(e^{\frac{-U(r)}{kT}}\right)\cdot r^2dr = -8\vartheta_0 + \frac{8U_0\vartheta_0}{kT};$$

$\vartheta_0 = \frac{4\pi}{3}r_0^3$; $r_0 = \frac{d}{2}$ — молекула радиуси. Агар, $n = \frac{N}{V}$ — зичлик ва $b = 4\vartheta_0 N$ — хусусий ҳажм эканлигини ҳисобга олсак,

бу ҳолда:

$$E = kT^2\frac{\partial \ln Z_{ид}}{\partial T} + kT^2\frac{\partial\ln\left(1 + \frac{N^2\beta}{2V}\right)}{\partial T} = E_{ид} - \frac{nbU_0}{1 + nb\left(\frac{U_0}{kT} - 1\right)}.$$

$$C_V = C_{Vид} - k\left(\frac{nbU_0}{kT}\right)^2\frac{1}{\left[1 + nb\left(\frac{U_0}{kT} - 1\right)\right]_\vartheta^2}.$$

Демак, сийраклантирилган реал газларда температура ортиши билан иссиқлик сиғими камаяр экан.

326. Ўзаро таъсир потенциал энергияси $U(r) = \frac{\alpha}{r^n}\times$ $\times(\alpha > 0, n > 3)$ бўлган газлар учун иккинчи вириал коэффициент ҳисоблансин.

Ечиш: $B(T) = -\frac{1}{2}\beta = 2\pi\int_0^\infty \left(1 - e^{\frac{-U}{kT}}\right) r^2 dr.$ Бўлаклаб интеграллаш натижасида қуйидаги ифодани оламиз:

$$B(T) = \frac{2\pi}{3} \times \left(\frac{\alpha}{kT}\right)^{\frac{3}{n}} \Gamma\left(\frac{n-3}{n}\right).$$

327. Ван-дер-Ваальс газининг Гиббс термодинамик потенциали учун ифода топилсин.

Жавоб:

$\Phi = \Phi_{ид} + \frac{2n^2}{V}(RbT - \alpha)$, бу ерда $n = \frac{N}{N_0} = \frac{m}{M_{моль}}$ — газнинг моляр сони, a ва b — параметрлар.

328. Ван-дер-Ваальс гази учун энтропия ифодаси олинсин.

Жавоб: $S = kN_0 n\left[\ln \frac{V}{nN_0}\left(\frac{2\pi mkT}{h^2}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2}\right] - \frac{n^2 Rb}{V}.$

329. Зарралар орасидаги ўзаро таъсир потенциал энергияси

$$\begin{cases} \infty & 0 \le r \le r_0 \\ -U_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^n, & 2r_0 < r < \infty \text{ да} \end{cases}$$

кўринишда бўлган ҳол учун Ван-дер-Ваальс тенгламасидаги ўзгармас параметр a ҳисоблансин. Бу ерда r_0 — зарра радиуси.

Жавоб: $\alpha = \frac{12}{(n-3)2^n} N_0^2 U_0 \vartheta_0, \ \vartheta_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3.$

330. Зарралари

$$U(r) = \begin{cases} \infty, & 0 \le r \le d \text{ да;} \\ -\frac{\alpha}{r^n}, & r \ge d \text{ да} \end{cases}$$

қонун бўйича ўзаро таъсирлашувчи сийраклантирилган газ учун ҳолат тенгламасига тузатма ҳисоблансин. Бу ерда d — зарра диаметри, $a > 0$, $n > 3$.

Жавоб: $p_{\text{у.т.}} = \frac{2\pi}{3} d^3 \left(\frac{N}{V}\right)^2 kT \left(1 - \frac{3}{n-3} \frac{\alpha}{kTd^n}\right)$.

331. Ван-дер-Ваальс газ ҳолатининг калорик тенгламаси олинсин ва эркин энергияси ҳисоблансин.

Жавоб: $E = E_{\text{иа}} - \frac{n^2\alpha}{V}$; $F = F_{\text{иа}} + \frac{n^2}{V}(RbT - \alpha)$.

332. Тебранишни ангармоник деб ҳисоблаб, икки атомли молекуланинг қўшимча иссиқлик сиғими топилсин. Молекуланинг потенциал энергияси $U = \frac{\alpha}{2} q^2 + \beta q^3 + \gamma q^4$, бу ерда α, β, γ — ўзгармас катталиклар.

Жавоб: $C_V^{\text{қў}} = 2k^2 T\left(\frac{15}{2}\frac{\beta^2}{\alpha^3} - \frac{3}{\alpha^2}\gamma\right)$.

333. Ҳар қайсиси N та $-e$ ва $+e$ зарядли зарядланган зарралардан ташкил топган ва V ҳажмни эгаллаган сийраклаштирилган плазманинг ички энергияси ҳисоблансин.

Ечиш: $E_{\text{иа}} = E_{\text{иа}} + E_e$; $E_{\text{иа}} = C_V T + E_0$; $E_e = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{2N} e_i \varphi_i$. Бу ерда φ_i — i заряд турган нуқтада қолган ҳамма зарядлар томонидан ҳосил қилинган майдон потенциали. Плазма икки сортдаги қарама-қарши зарядлардан ташкил топганлиги учун

$$E_e = \frac{1}{2} Ne\varphi_+(0) - \frac{1}{2} Ne\varphi_-(0).$$

Заряд зичлиги $\rho(r) = e(n_+ - n_-)$, $n_+ = n_0 e^{-e\varphi/kT}$, $n_- = n_0 e^{e\varphi/kT}$. Ҳамма зарядлар ҳосил қилган майдон Пуассон тенгламаси $\Delta\varphi(r) = -4\pi\rho(r)$ дан топилади:

$$\Delta\varphi(r) = 4\pi e n_0 (e^{e\varphi/kT} - e^{-e\varphi/kT}).$$

Сийраклантирилган плазма учун экспонентани қаторга ёйиб тенгламанинг ечимини топамиз:

$$\varphi(r) = \frac{C_1}{r} e^{-\varkappa r} + \frac{C_2}{r} e^{\varkappa r}.$$

Бу ерда $\varkappa = \sqrt{\frac{8\pi e^2 n_0}{kT}}$. Чегаравий шартларни қўллаб $C_1 = e$ ва $C_2 = 0$ эканлигини топамиз. Марказий заряд майдонини чиқариб ташлаб, қолган зарядлар майдони учун; $\varphi_+(0) = -e\ae$; $\varphi_-(0) = e\ae$ ни топамиз. Шунда,

$$E_0 = \frac{1}{2}Ne(e\chi) - \frac{1}{2}Nee\ae = -Ne^2\chi = -Ne^2\sqrt{\frac{8\pi e^2 N}{VkT}};$$

$$E_{\text{пл}} = E_{\text{ид}} - Ne^3\sqrt{\frac{8\pi N}{VkT}}.$$

334. Сийраклантирилган плазманинг эркин энергияси, энтропияси, босими ва иссиқлик сиғими аниқлансин.

Ечиш: Олдинги масала натижасига кўра сийраклантирилган плазма ички энергиясидан фойдаланамиз. Эркин энергия $F = -T\int_0^T \frac{E}{T^2}dT$, чунки ўта сийраклантирилган плазма учун $\left(\frac{N}{V} \to 0\right)$ интеграллаш доиймиси билан боғланган ҳад нолга интилади. Натижада:

$$F_{\text{пл}} = F_{\text{ид}} - \frac{2}{3}Ne^3\sqrt{\frac{8\pi N}{VkT}}; \quad S_{\text{пл}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = S_{\text{ид}} - \frac{1}{3}Ne^3\sqrt{\frac{8\pi N}{VkT^3}};$$

$$p_{\text{пл}} = -\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = \frac{NkT}{V} - \frac{1}{3}Ne^3\sqrt{\frac{8\pi N}{kTV^3}};$$

$$C_V = (C_V)_{\text{ид}} + \frac{1}{2}Ne^3\sqrt{\frac{8\pi N}{3VkT^3}}.$$

335. φ_0 потенциалгача зарядланган қандайдир жисм электронлардан (заряди $-e$) ва ионлардан (заряди $+e$) ташкил топган плазмага жойлаштирилган. Электронлар температураси $T_э$ ва ионлар температураси $T_и$ ҳар хил деб ҳисоблаб, Дебай экранлаш радиуси аниқлансин. Плазма квазинейтрал деб ҳисоблансин, ионлар концентрацияси n_0.

Жавоб: $\ae = \sqrt{\frac{kT_э T_и}{4\pi n_0 e^2 (T_э + T_и)}}$;

336. Бир жинсли термодинамик тизимда ҳажмнинг ўртача квадратик флуктуацияси аниқлансин.

Ечиш: $\overline{(\Delta V)^2} = \int (V - V_0)^2 dW = \sqrt{\frac{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|}{2\pi kT}}\int_{-\infty}^{\infty}(V - V_0)^2 \times$

$$\times e^{-\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|\frac{(V-V_0)^2}{2kT}} dT.\quad \overline{(\Delta V)^2} = \frac{kT}{\left|\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T\right|}.$$

337. Термостат ичида жойлаштирилган тизимда температуранинг ўртача квадратик флуктуацияси аниқлансин.

Ечиш:

$$\overline{(\Delta T)^2} = \int (T-T_0)^2 dW = \sqrt{\frac{C_V}{2\pi k T_0^2}}\int_0^{\infty}(T-T_0)^2 e^{\frac{-C_V(T-T_0)^2}{2kT_0^2}} dT.$$

$\overline{(\Delta T)^2} = \frac{kT_0^2}{C_V}$, T_0 — термостат температураси.

338. Ўзаро боғланмаган T ва V ўзгарувчанларда энергиянинг ўртача квадратик флуктуацияси топилсин.

Ечиш:

$$\Delta E = \left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_V \Delta T + \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \Delta V.$$

$$\overline{(\Delta E)^2} = C_V^2\overline{(\Delta T)^2} + \left[\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T\right]^2 \cdot \overline{(\Delta V)^2} + 2C_V\left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T \overline{\Delta T \Delta V};$$

$\overline{\Delta T\Delta V} = 0;\ \left(\frac{\partial E}{\partial V}\right)_T = T\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_V - p$ ва олдинги масалалар натижасидан фойдаланиб қуйидаги ифодани оламиз:

$$\overline{(\Delta E)^2} = C_V k T^2 + \left[T\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V - p\right]^2 kT\left|\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T\right|.$$

339. Ўзаро боғланмаган T ва V ўзгарувчанларда $\overline{\Delta T \Delta p}$ топилсин.

Жавоб: $\overline{\Delta T\Delta p} = \frac{k^2T^2}{C_V}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$.

340. T ва V ўзгарувчанларда $\overline{\Delta V\Delta p}$, $\overline{\Delta S\Delta V}$, $\overline{\Delta S\Delta T}$ топилсин.

Жавоб: $\overline{\Delta V\Delta p} = -kT$; $\overline{\Delta S\Delta V} = kT\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$; $\overline{\Delta S\Delta T} = kT$.

341. Ўзаро боғланмаган p ва S ўзгарувчанларда $\overline{\Delta A^2}$ топилсин.

Жавоб: $\overline{\Delta A^2} = k^2T^2C_p - kTV^2\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S$.

342. $\overline{\Delta S^2} = kC_p$; $\overline{\Delta S \Delta p} = 0$; $\overline{\Delta p^2} = -kT\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_S$ эканлиги кўрсатилсин.

343. Гиббс тақсимоти ўринли бўлган термостатда ётган тизим учун энергия флуктуацияси топилсин.

Ечиш: $\overline{\Delta E^2} = \overline{E^2} - (\bar{E})^2$.

$$\bar{E} = \sum_i E_i W(E_i) = \frac{\sum E_i e^{\frac{-E_i}{\theta}}\Omega(E_i)}{\sum e^{\frac{-E_i}{\theta}}\Omega(E_i)} = \frac{\theta^2}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right)_V;$$

$$\overline{E^2} = \frac{\sum E_i^2 e^{\frac{-E_i}{\theta}}\Omega(E_i)}{\sum e^{\frac{-E_i}{\theta}}\Omega(E_i)} = \theta^2\left[\frac{2\theta}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial \theta}\right)_V + \frac{\theta^2}{Z}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial \theta^2}\right)_V\right].$$

$$\overline{\Delta E^2} = \theta^2\left(\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_V \text{ ёки } \overline{\Delta E^2} = kT^2C_V.$$

344. Паст температурада металлардаги электрон гази энергиясининг нисбий флуктуацияси топилсин.

Ечиш: $\delta_E = \frac{\sqrt{\overline{\Delta E^2}}}{\bar{E}}$. $\bar{E} = \frac{3}{5}N\varepsilon_{\max}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_{\max}}\right)^2\right]$;

$$\varepsilon_{\max} = \frac{h^2}{2m}\left(\frac{3}{8\pi}\frac{N}{V}\right)^{\frac{2}{3}}.$$

$$\overline{\Delta E^2} = \theta^2\left(\frac{\partial E}{\partial \theta}\right)_V = kT^2\frac{\partial}{\partial T}\left\{\frac{3}{5}N\varepsilon_{\max}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_{\max}}\right)^2\right]\right\}.$$

$$\overline{\Delta E^2} = \frac{\pi}{4\varepsilon_{\max}}Nk^3T^2; \quad \delta_E = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{\pi}{N}}\frac{kT\sqrt{k}}{\sqrt{\varepsilon_{\max}^3}\left[1 + \frac{5\pi^2}{12}\left(\frac{kT}{\varepsilon_{\max}}\right)^2\right]}.$$

345. Паст температураларда қаттиқ жисм энергиясининг нисбий флуктуацияси топилсин.

Жавоб: $\delta_E = \sqrt{\frac{5\theta_c^3}{3\pi^4 NT^3}}$.

346. Фотон газида энергия флуктуацияси топилсин.

Ечиш: $\overline{\Delta E_\omega^2} = \theta^2 \left(\frac{\partial \overline{E_\omega}}{\partial T}\right)_V = kT^2 \left(\frac{\partial \overline{E_\omega}}{\partial T}\right)_V$. Мувозанатли нурланиш учун Планк формуласи ўринли: $E_\omega = \frac{Vh}{\pi^2 c^3}\frac{\omega 3\Delta\omega}{e^{h\omega/kT}-1}$,

$\overline{(\Delta E_\omega)^2} = h\omega\overline{E_\omega} + \frac{\pi^2 c^3}{V\omega^2\Delta\omega}(\overline{E_\omega})^2$.

347. Икки сатҳли тизимда энергия флуктуацияси ҳисоблансин.

Ечиш: $\overline{\Delta E^2} = \overline{E^2} - (\bar{E})^2$. $\bar{E} = kT^2\frac{\partial \ln Z}{\partial T} = \frac{kT^2}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_V$;

$$Z = \sum_i e^{-\varepsilon_i/\theta} g_i = e^{-\varepsilon_1/\theta} g_1 + e^{-\varepsilon_2/\theta} g_2 = \left(g_2 + g_1 e^{\frac{\varepsilon_2-\varepsilon_1}{\theta}}\right) e^{-\varepsilon_2/\theta}.$$

$$\overline{E^2} = k^2T^2\left[\frac{2T}{Z}\left(\frac{\partial Z}{\partial T}\right)_V + \frac{T^2}{Z}\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial T^2}\right)_V\right]. \quad \overline{(\Delta E)^2} = \frac{g_1 g_2 \Delta\varepsilon^2 e^{\Delta\varepsilon/kT}}{(g_2+g_1 e^{\Delta\varepsilon/kT})^2}.$$

348. Гиббснинг катта каноник тақсимотидан фойдаланиб, $(\Delta N)^2 = kT\left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V}$ тенглик исботлансин.

Ечиш: $W_{i,n} = \frac{e^{\frac{\mu n-\varepsilon_i}{kT}}\Omega(\varepsilon_i, n)}{\sum_i\sum_n e^{\frac{\mu n-\varepsilon_i}{kT}}\Omega(\varepsilon_i, n)}$ ёки $W = e^{\frac{\mu n-\varepsilon_n N_n+G}{kT}}$ кўринишида ёзилади. Бу ерда G нормалаш шарти $\sum_N\sum_n e^{\frac{\mu n-\varepsilon_n N_n+G}{kT}} = 1$ дан топилади. Зарраларнинг ўртача сони $\bar{N} = \sum_N\sum_n e^{\frac{\mu n-\varepsilon_n N_n+G}{kT}}$.

Бу ифодадан

$$\left(\frac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V} = \frac{1}{kT} e^{\frac{G}{kT}}\sum_N\left(N^2 + N\frac{\partial G}{\partial \mu}\right) e^{\frac{\mu n}{kT}}\sum_n e^{\frac{-\varepsilon_n N_n}{kT}} = \frac{1}{kT}\left(\overline{N^2} + \bar{N}\frac{\partial G}{\partial \mu}\right).$$

Нормалаш шартидан $\frac{\partial G}{\partial \mu} = -\bar{N}$ тенгликни топамиз. Натижада:

$$\overline{(\Delta N)^2} = kT\left(\frac{\partial N}{\partial \mu}\right)_{T,V}.$$

349. H гамильтонианга эга ихтиёрий тизим моляр иссиқлик сиғими $C_v = \overline{(H-\bar{H})^2}/(kT)^2$ эканлигини исботланг.

Ечиш: $\bar{E} = \int E(p_i, q_i, \lambda_i) dW = \dfrac{\int E(p_i, q_i, \lambda_i) e^{\frac{-H}{kT}} dq_i dp_i}{\int e^{\frac{-H}{kT}} dq_i dp_i}.$

$\overline{(E-\bar{E})(H-H)} = \overline{EH} - \bar{E}\bar{H}$, агар $E = H$ десак, у ҳолда $\overline{(E-\bar{E})(H-\bar{H})} = \overline{(H-\bar{H})^2} - \overline{E^2} - \bar{E}^2 = kT^2 C_V$. Бу ифодадан масала шарти олинади.

350. а) Больцман, б) Ферми-Дирак, в) Бозе-Эйнштейн тақсимотлари ўринли бўлган идеал газлардаги зарралар сони учун нисбий флуктуация топилсин.

Ечиш: $\delta_N = \dfrac{\sqrt{\overline{(\Delta N)^2}}}{\bar{N}}$; $\overline{(\Delta N)^2} = kT\left(\dfrac{\partial \bar{N}}{\partial \mu}\right)_{T,V}$.

а) $\bar{N} = e^{\frac{\mu-\varepsilon}{kT}}$; $\overline{(\Delta N)^2} = \bar{N}$; $\delta_N = \dfrac{1}{\sqrt{\bar{N}}}$. б) $\bar{n}_i = \dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{kT}}+1}$;

$\overline{(\Delta n_i)^2} = \bar{n}_i(1-\bar{n}_i)$; $\delta_{ni} = \sqrt{\dfrac{1-\bar{n}_i}{\bar{n}_i}}$; в) $\bar{n}_i = \dfrac{1}{e^{\frac{\varepsilon_i-\mu}{kT}}-1}$;

$$\overline{(\Delta n_i)^2} = \bar{n}_i(1+\bar{n}_i); \quad \delta_{ni} = \sqrt{\frac{1+\bar{n}_i}{\bar{n}_i}}.$$

351. Дебай моделидаги кристалл учун панжара атомининг квадратик ўртача силжиши аниқлансин. Кристалл элементар ячейка ўз ичига битта атомни олади.

Ечиш: Кристаллни ω_j частотали $3N$–6 та нормал тебранишларнинг тўплами деб қараш мумкин. Ҳар бир тебраниш билан боғланган ўртача энергия $\bar{\varepsilon}_j = \hbar\omega_j\left(\bar{n}_j + \frac{1}{2}\right)$. J осцилляторга тўғри келган энергия $MN\omega_j^2 r_j^2 = h\omega_j\left(\overline{n_j} + \frac{1}{2}\right)$, M — атом массаси. r_j — атом силжишига j — нормал тебраниш қўшган ҳиссаси.

$$\overline{r^2} = \sum_j \overline{r_j^2} = \frac{h}{MN}\sum_j \frac{\left(\overline{n_j}+\frac{1}{2}\right)}{\omega_j} = \frac{h}{MN}\int \frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{e^{\frac{h\omega}{kT}}-1} + \frac{1}{2}\right)g(\omega)d\omega.$$

Бу ерда $g(\omega) = \frac{9N\omega^2}{\omega_{max}^3}$, чунки $\int\limits_0^{\omega_{max}} g(\omega)d\omega = 3N$. $T_D = \frac{h\omega_{max}}{k}$ Дебай температурасини киритамиз ва $T << T_D$ ҳол учун интегрални ҳисоблаш натижасида

$$\overline{r^2} = \frac{9h^2}{4MkT_D}\left(1 + \frac{2\pi^2 T^2}{3T_D^2}\right)$$

ифодани оламиз.

352. Идиш деворининг кичик тирқиши орқали вакуумга учиб чиқаётган классик идеал газ зарралар сони оқимининг нисбий флуктуацияси аниқлансин.

Е ч и ш: $\delta_{jx} = \frac{\sqrt{\overline{(\Delta J_x)^2}}}{\overline{J_x}}$. Битта зарранинг ҳосил қилган оқими $(J_x)_i = \frac{1}{V}(\vartheta_x)_i$; тўла оқими:

$$\overline{J_x} = \sum_{i=1}^{N}\overline{(J_x)_i} = \frac{N}{V}\int\limits_0^{\infty}\vartheta_x\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{1}{2}} e^{\frac{-m\vartheta_x^2}{kT}}\, d\vartheta_x = n\left(\frac{kT}{2\pi m}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Зарралар сони оқимининг флуктуацияси:

$$\overline{(\Delta j_x)^2} = \sum_i\sum_j \frac{1}{V^2}\left[\overline{(\vartheta_x)_i(\vartheta_x)_j} - \overline{(\vartheta_x)_i}\,\overline{(\vartheta_x)_j}\right] = \sum_i \frac{1}{V^2}\overline{(\Delta\vartheta_x)_i^2}.$$

$\vartheta_x > 0$ соҳада Максвелл тақсимоти ёрдамида ўртачалаш натижасида қуйидагини оламиз: $\overline{(\Delta j_x)^2} = \frac{1}{N}n^2\frac{kT}{2\pi m}(\pi - 1)$.

$\delta_{jx} = \frac{\sqrt{\pi - 1}}{\sqrt{N}} \simeq \frac{1,42}{\sqrt{N}}$.

КИНЕТИКАДАН МАСАЛАЛАР

353. η коэффициентли ёпишқоқ муҳитда ҳаракатланувчи m массали Броун заррасининг ўртача квадратик силжиши аниқлансин. Зарра радиуси r_0.

Е ч и ш: $\Delta = \sqrt{\overline{(\Delta x)^2}}$. Фоккер-Планк тенгламаси: $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial y_i} = 0$; $J_i = \alpha_i(y,t)\, f(y,t) - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y_k}[b_{ik}(y,t) f(y,t)]$, бу ерда $y \to (\bar{\vartheta}, \bar{r})$. Агар ташқи майдон бўлмаса, у ҳолда $a_i(y, t) = 0$; $b_{ik}(y, t) = b\delta_{ik}$. $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} b\ \nabla^2 f$, $i = k$ ҳолида $b_{ii} = \frac{1}{\tau}\int (y - x)^2 \cdot W \times$ $\times(|y - x|, \tau)dx = b$, $\overline{\Delta x^2} = \tau b$. Агар ташқи майдон таъсир этаётган бўлса ва мувозанат ҳолатда Броун зарралари Больцман қонунига бўйсунса, у ҳолда $f = f_0 e^{\frac{-U(x,y,z)}{kT}}$ ва $\bar{J} = f_0 \times$ $\times\left(\bar{a} - \frac{b\bar{F}}{2kT}\right)e^{\frac{-U}{kT}} = 0$ $\bar{a} = \frac{b\bar{F}}{2kT} = q\bar{F}$ — Стокс формуласи. $q = \frac{1}{C\mu r_0}$; сферик зарра учун $q = \frac{1}{6\pi\eta r_0}$; $b = 2kTq$, $\overline{(\Delta x)^2} = b\tau =$ $= 2kTq\tau = \frac{kT}{3\eta r_0}\tau$. $\Delta = \sqrt{\overline{(\Delta x)^2}} = \sqrt{\frac{kT\tau}{3\eta r_0}}$ — Смолуховский ва Эйнштейн олган ифода.

354. Оғирлик майдонида ётган Броун зарраси учун квадратик ўртача силжиш аниқлансин.

Е ч и ш: Фараз қилайлик, оғирлик кучи z ўқи бўйича таъсир этаётган бўлсин. $U = mgz$. Броун заррасининг тезлиги $a = qF = -q \cdot \frac{\partial U}{\partial z} = -qmg$. Иккинчи томондан Фоккер Планк тенгламасига кўра $a = \frac{1}{\tau}\overline{(z - z_0)}$; $\overline{(z - z_0)} = a\ \ \tau = -\, qmg\tau$. $\overline{(z - z_0)^2} = b\tau = 2D\tau$ — агарда оғирлик кучи майдони бўлмаса. Оғирлик кучи майдони таъсир этаётган бўлса, ҳолда $\overline{(z - z_0)^2} = 2D\tau - 2q\overline{(z - z_0)}F = 2D\tau + (qmg)^2 \cdot \tau^2$. Бу ерда D —

диффузия коэффициенти. $q = \frac{1}{6\pi\eta r_0}$ эканлигини ҳисобга олсак: $\overline{(z - z_0)^2} = 2D\tau + \left(\frac{mg}{6\pi\eta r_0}\right)^2 \tau^2$.

355. Массаси m ва радиуси r_0 бўлган Броун заррасининг τ вақт давомида квадратик ўртача силжиши $\overline{(\Delta x)^2}$ га тенг бўлса, Авогадро сони N_A аниқлансин.

Жавоб: $N_A = \frac{RT\tau}{3\pi\eta r_0 \overline{(\Delta x)^2}}$.

356. Стационар режимда зарралар бир ўлчовли потенциал тўсиқ $U(x)$ орқали диффузияланади. Агар x_1 ва x_2 кесимларда зарралар сонининг зичлиги маълум бўлса, зарралар оқимининг зичлиги топилсин.

Ечиш: $\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial J_i}{\partial y_i} = 0$ — Фоккер-Планк тенгламаси. Зарралар диффузияси ҳолида $\frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = 0$ кўринишни олади.

$$J_x = -\left(D\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{Dn}{kT}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -D\left(\frac{\partial n}{\partial x} + \frac{n}{kT}\cdot\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -De^{\frac{-U}{kT}}\frac{\partial}{\partial x}\left(ne^{\frac{U}{kT}}\right).$$

Суратини ва махражини x_1 ва x_2 чегарада интеграллаб қуйидагини топамиз:

$$J_x = -D\frac{n(x_2)\exp\left(\frac{U(x_2)}{kT}\right) - n(x_1)\exp\left(\frac{U(x_1)}{kT}\right)}{\int_{x_1}^{x_2}\exp\left(\frac{U(x)}{kT}\right)dx}.$$

357. Берилган ўртача энергия ва зарралар сонида бир жинсли газ учун H-функциясининг минимумлик шарти Максвелл тақсимотига олиб келиши кўрсатилсин.

Ечиш:

$$S = -kH;\ H = \iint f(\vec{r},\vec{\vartheta},t)\ln f(\vec{r},\vec{\vartheta},t)d\vec{r}d\vec{\vartheta}. \qquad (1)$$

Мувозанат ҳолатида тизимнинг энтропияси максимум бўлади, H-функциянинг биринчи вариацияси $\delta H = 0$ ва иккинчи вариацияси $\delta^2 H >> 0$ бўлиши керак. Қўшимча шартлар:

$$\iint\left[\frac{m\vartheta^2}{2}+U(\vec{r})\right]f(\vec{r},\vec{\vartheta},t)\,d\vec{r}d\vec{\vartheta}=E\,; \qquad (2)$$

$$\iint f(\vec{r},\vec{\vartheta},t)\,d\vec{r}d\vec{\vartheta}=N\,; \qquad (3)$$

$$\frac{\partial}{\partial N}(S+\alpha E+\lambda N)=0 \qquad (4)$$

— энтропиянинг максимумлик шарти. Қуйидаги ёрдамчи функционални тузамиз:

$$H'=\iint\left\{\beta\left[\frac{m\vartheta^2}{2}+U(\vec{r})\right]+\ln f(\vec{r},\vec{\vartheta},t)+\lambda\right\}f(\vec{r},\vec{\vartheta},t)d\vec{r}d\vec{\vartheta}. \qquad (5)$$

Биринчи вариациясини нолга тенглаштирамиз:

$$\frac{\delta H'}{\partial f}=\beta\left[\frac{m\vartheta^2}{2}+U(\vec{r})\right]+(\lambda+1)+\ln f(\vec{r},\vec{\vartheta},t)=0. \qquad (6)$$

Иккинчи вариацияси нолдан катта бўлиши керак: $\frac{\delta^2 H'}{\delta^2 f}=\frac{1}{f}>0$. Бу эса минимумлик шарти. (6) ифодадан

$$f=Ae^{-\beta\left[\frac{m\vartheta^2}{2}+U(\vec{r})\right]}. \qquad (7)$$

$A=e^{-\lambda-1}$ нормалаш шартидан топилади, $\beta=\frac{1}{kT}$. (7) ифода Максвелл-Больцман тақсимотини ифодалайди.

358. Ташқи майдон $U(\vec{r})$ нинг мавжудлигида Больцман кинетик тенгламасининг стационар ечими Максвелл-Больцман тақсимоти функцияси эканлиги кўрсатилсин.

Ечиш: Ташқи майдон $U(\vec{r})$ нинг қатнашишида Больцман кинетик тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial f}{\partial t}+\vec{\vartheta}\frac{\partial f}{\partial r}-\frac{1}{m}\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial\vec{r}}\frac{\partial f}{\partial\vec{v}}=I_{тўқ}\,. \qquad (1)$$

Максвелл-Больцман тақсимот функцияси

$$f(\vec{r},\vec{\vartheta})=Ae^{-\frac{1}{kT}\left[\frac{m\vartheta^2}{2}+U(\vec{r})\right]} \qquad (2)$$

Больцман кинетик тенгламаси (1) нинг чап томонини нолга айлантиради. Тўқнашиш интеграли $I_{ўк} = 0$ бўлади, чунки

$$f(\vec r,\vec\vartheta_2')f(\vec r,\vec\vartheta_1') = f(\vec r,\vec\vartheta_2')f(\vec r,\vec\vartheta_1')$$

бажарилади.

359. T температурада m массали зарралар R радиусли шар ичида ρ_0 доимий зичлик билан тақсимланган. $t = 0$ вақт моментида шар қобиғи йўқолади ва зарраларнинг эркин учиши бошланади. $t = 0$ вақт моментида шар марказидан r масофада зарралар сонининг зичлиги $\rho(\vec r, t)$ топилсин. Тўқнашиш ҳисобга олинмасин.

Ечиш: Тўқнашиш ва ташқи майдон бўлмаган ҳол учун Больцман кинетик тенгламаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{\partial f(\vec r,\vec\vartheta,t)}{\partial t} + \vec\vartheta\,\frac{\partial f(\vec r,\vec\vartheta,t)}{\partial \vec r} = 0.$$

Масаланинг шартига кўра $t = 0$ вақт моментида $f(\vec r_0,\vec\vartheta_0,t) = \rho_0(\vec r_0)\cdot f_0(\vec\vartheta)$; бу ерда $\rho_0(\vec r_0)$ ифода $t = 0$ вақт моментида зарралар сонининг зичлиги, $f(\vec\vartheta)$ — Максвелл тақсимоти. t вақт моментида зарра ҳолати $\vec r = \vec r_0 + \vec\vartheta t$, бундан

$$\vec r_0 = \vec r_0 - \vec\vartheta t \text{ ва } f(\vec r,\vec\vartheta,t) = \rho_0(\vec r - \vec\vartheta t)\cdot f_0(\vec\vartheta).$$

$$\rho(\vec r,t) = \int f(\vec r,\vec\vartheta,t)\,d\vec\vartheta = \int \rho_0(\vec r - \vec\vartheta t) f_0(\vec\vartheta)\,d\vec\vartheta =$$

$$= \frac{1}{t^3}\int \rho_0(\vec r_0)\cdot f_0\left(\frac{\vec r - \vec r_0}{t}\right)d\vec r_0;$$

$$f_0\left(\frac{\vec r - \vec r_0}{t}\right) = \left(\frac{m}{2kt^2}\right)^{\frac{3}{2}}\exp\left[-\frac{m}{2kt^2}(\vec r^2 + \vec r_0^2 - 2\vec r\vec r_0)\right];$$

$(\vec r\vec r_0) = rr_0\cos\theta$, бу ифодаларни ўрнига қўйиб бурчак бўйича интеграллаш натижасида қуйидаги ифодани оламиз:

$$\rho(\vec r,t) = \left(\frac{m}{2\pi kTt^2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\int_0^\infty e^{\frac{-m}{2kTt^2}(r_0 - r)^2} - \int_0^\infty e^{\frac{-m}{2\pi kTt^2}(r_0 + r)^2}\right]\frac{\rho_0(r_0)}{r}r_0\,dr_0.$$

Масала шартиға кўра $\rho_0(r_0) = \begin{cases}\rho_0, r_0 < R;\\ 0, r_0 > R.\end{cases}$ Шунинг учун

$$\rho(\bar{r},t)=\left(\frac{m}{2\pi kTt^2}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\rho_0}{r}\left[J(r)-J(-r)\right];$$

бу ерда $J(r)=\int\limits_0^{\infty} e^{\frac{-m}{2\pi kTt^2}(r_0-r)^2} r_0 dr_0$. Интегрални ҳисоблаш натижасида шар марказидан r масофада t вақт моментида зарралар сони зичлигини топамиз:

$$\rho(r,t)=\frac{\rho_0}{2}\left\{\frac{1}{\rho\sqrt{\pi}}\left[e^{-(\rho+\alpha)^2}-e^{-(\rho-\alpha)^2}\right]+\Phi(\rho+\alpha)-\Phi(\rho-\alpha)\right\},$$

бу ерда

$$\alpha=\left(\frac{m}{2\pi kTt^2}\right)^{\frac{1}{2}}R;\quad \rho=\left(\frac{m}{2\pi kTt^2}\right)^{\frac{1}{2}}r;\quad \Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\sqrt{\pi}}^{\infty} e^{-x^2}dx\ —$$

Лаплас функцияси.

360. Металлдаги айнимаган электрон гази учун электр ўтказувчанлик коэффициентлари аниқлансин, агар Ox ўқи бўйича стационар температура градиенти мавжуд ва ε майдон қўйилган бўлса, $\tau=A\cdot\vartheta^{l}(A>0;\ l>-7)$.

Ечиш: Берилган масала учун Ox ўқи бўйича ток зичлиги J_x ни ва иссиқлик оқими Q_x ни аниқлаймиз:

$$J_x=\int e\vartheta_x f d\vec{\vartheta};\quad Q_x=\int\frac{m\vartheta^2}{2}\vartheta_x f d\vec{\vartheta}.$$

Тақсимот функция кинетик тенгламасидан:

$$f=f_0-\tau\left(\frac{e\mathcal{E}}{m}\frac{\partial f_0}{\partial\vartheta_x}+\vartheta_x\frac{\partial f_0}{\partial x}\right);\ \text{бу ерда}\ f_0=n\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}e^{\frac{-m\vartheta^2}{2kT}}.$$

Майдон $\mathcal{E}$ ва $\frac{\partial T}{\partial x}$ тақсимот функцияни кам ўзгартиради, бу ҳолда $f=f_0+\frac{\tau e\mathcal{E}}{kT}\vartheta_x f_0-\frac{\tau\vartheta_x}{kT^2}\left[\varepsilon-\frac{3}{2}kT\right]f_0\frac{\partial T}{\partial x}$. Бу ифодани ўрнига қўйиб, интеграллаш натижасида қуйидаги ифодаларни оламиз:

$$J_x=\frac{4enA}{3m\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{l+5}{2}\right)\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{l}{2}}kT\left[e\mathcal{E}-\left(\frac{l}{2}+1\right)k\frac{\partial T}{\partial x}\right],$$

—

$$O_x = \frac{4\pi A}{3m\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right)\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{l}{2}} kT\left[e\mathcal{E} - \left(\frac{l}{2}+2\right)k\frac{\partial T}{\partial x}\right]$$

ёки

$$J_x = L_{11}\mathcal{E} + kL_{12}\frac{\partial T}{\partial x};\ \ Q_x = L_{21}\mathcal{E} + kl_{22}\frac{\partial T}{\partial x}.$$

$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$ шартидан: $\sigma = \frac{4}{3}\frac{e^2 nA}{m\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{l+5}{2}\right)\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{l}{2}}$; $J_x = 0$ шартидан: æ $\frac{nA}{m\sqrt{\pi}}\Gamma\left(\frac{l+7}{2}\right)\left(\frac{2kT}{m}\right)^{\frac{l}{2}} kT.$

Фойдаланилган адабиёт

1. *И.П. Базаров*. Термодинамика. — М.: Выгсшая школа. — 1983 г.

2. *Л.Г. Гречко, В.И. Сугаков, О.Ф. Томасевич, А.М. Федорченко*. Сборник задач по теоретической физике. — М.: Внсшая школа. — 1984 г.

3. *Ф.Г. Серова, А.А. Янкина*. Сборник задач по теоретической физике. — М.: Просвешение. — 1979 г.

4. *В.Л. Гинзбург, Л.М. Левин, Д.В. Сивухин, И.А. Яковлев*. Сборник задач по обшему курсу физики. Термодинамика и молекулярная физика. — М.: Наука. — 1976 г.

5. *М.А. Леонтович*. Введение в термодинамику. — М., Л.: Гос. изд-во технико-теоретической литературьт. — 1950 г.

6. *Л.Д. Ландау, Е.М. Лифшиц*. Статистическая физика. — М.: Вмсшая школа. — 1976 г.

7. *Я.П. Терлецкий*. Статистическая физика. М.: Вьюшая школа. — 1973 г.

8. *А. Бойдадаев*. Номувозанатли статистик физика асослари. Тошкент, «Ўқитувчи», 1992 й.

МУНДАРИЖА

Масалалар

Р. Маматқулов, А.А. Турсунов, Б.Р. Маматқулов

ТЕРМОДИНАМИКА ВА СТАТИСТИК
ФИЗИКАДАН МАСАЛАЛАР

Ўзбек тилида

Бадиий муҳаррир *Ҳ. Меҳмонов*
Техник муҳаррир *У. Ким*
Мусаҳҳиҳ *Н. Умарова*
Компьютерда тайёрловчи *Ф. Тугушева*

Теришга берилди 15.05.02. Босишга рухсат этилди 14.10.03.
Бичими 84x108'/$_{32}$. "Таймс" гарнитурада офсет босма усулида
босилди. Шартли бос.т. 7,98. Нашр т. 7,09. 1500 нусхада чоп этилди.
Буюртма №147. Баҳоси шартнома асосида.

"Ўзбекистон" нашриёти, 700129, Тошкент, Навоий кўчаси, 30.
Нашр № 141-2001.

Ўзбекистон Матбуот ва ахборот агентлигининг Тошкент китоб-
журнал фабрикасида босилди. Тошкент, 700194. Юнусобод даҳаси,
Муродов кўчаси 1.