O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

Matematikanaliz kaferdrasi

“DIFFERENSIAL GEOMETRIYA VA TOPOLOGIYA”

fanidan

O’QUV–USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi: **500 000-Tabiiy fanlar, matematika va statistika**
Ta’lim sohasi: **540 000-Matematika va statistika**
Ta’lim yo’nalishi: **60540100-Matematika**

Namangan 2023

O’quv uslubiy majmua 202_-yil O’ROO’MTV tomonidan № ___- raqami bilan 202_-yil __-avgustdagi __-sonli buyrug’i bilan tasdiqlangan fan dasturi asosida ishlab chiqilgan.

Tuzuvchilar: O’.Mamadaliev, PhD, Algebra va MO‘M kafedrasi dotsenti.
A.Mashrabboyev, Matematik analiz kafedrasi mudiri, f.-m. f.n., dotsent.

Taqrizchilar: M.Xolmurodov, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.
N.Xatamov, fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

O’quv uslubiy majmua "Matematik analiz" kafedrasining 2023 yil 27.08.2023 dagi "1" - son yig’ilishida muhokamadan o’tgan va fakul’tet kengashida muhokama qilish uchun tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: **A.Mashrabboyev**

O’quv uslubiy majmua "Matematika" fakultet kengashida muhokama etilgan va foydalanishga tavsiya qilingan (2023-yil 27.08 dagi 1 -sonli bayonnoma).

Fakultet dekani: **X.Mavlyanov**

MUNDARIJA

SO‘Z BOSHI

Mazkur o‘quv uslubiy majmua “Differensial geometriya va topologiya” fanidan “60540100-Matematika” ta’lim yo‘nalishi uchun mo‘ljallangan bo‘lib, matematika fakultetining “Matematik analiz” kafedrasi o`qituvchisi N. Malikov va Algebra va matematika o‘qitish metodikasi kafedrasi dotsenti O‘.Mamadaliyevlar tomonidan ishlab chiqilgan. “Differensial geometriya va topologiya” fani o‘quv uslubiy majmuasini yaratishda yetakchi xorijiy OTMlari o‘quv dasturlariga asosiy adabiyotlar ro‘yxatiga kiritilgan Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry (1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America), Izu Vaisman Analytical Geometry (World Scientific 1997), M.A.Arstrong, Basic Tpology (Springer, 1998 y) adabiyotlardan foylalanildi.

“Differensial geometriya va topologiya” fani “60540100-Matematika” ta’lim yo‘nalishi o‘quv rejasiga asosan 3- va 4-semestrlarda mos ravishda 30 soat ma`ruza va 30 soat amaliy mashg`ulot auditoriya soatlarda o‘qitiladi.

Ushbu o‘quv uslubiy qo‘llanma beshta qismdan iborat bo‘lib, o`quv materiallari, mustaqil ta`lim mashg`ulotlari, kurs ishi va kurs loyihasi, glossariy va ilovalar (namunaviy va ishchi o‘quv dastur, nazorat savollari va test savollari)dan tashkil topgan.

KIRISH

Differensial geometriya kursida uch o‘lchamli fazodagi chiziqlar va sirtlar matematik analiz yordamida o’rganiladi. Ma’lumki, analitik geometriya kursida chiziqlar va sirtlarni o‘rganish ularning tenglamalarini tekshirish yordamida amalga oshiriladi. Shuning uchun algebraik metodlar analitik geometriya kursida asosiy ro‘l o‘ynaydi. Differensial geometriya kursida biz chiziq va sirtlarni tenglamalar yordamida emas, balki fazodagi ma’lum xossalarga ega bo’lgan figuralar sifatida aniqlaymiz va ularni matematik analiz yordamida o‘rganish uchun differensialanuvchi funksiyalar yordamida parametrlaymiz. Geometriyada matematik analiz metodlarini tadbiq qilishga Peterburg fanlar akademiyasi a’zosi L.Eyler katta hissa qo‘shdi. U chiziqni parametrlash, sirt nuqtasida bosh yo‘nalishlar kabi muhim tushunchalarni kiritdi va juda ajoyib teoremalarni isbot qildi. Differentsial geometriyaning asosiy masalalari sistematik ravishda yoritilgan birinchi asarni Gaspar Monj yozdi. Uning «Cheksiz kichiklar analizining geometriyaga tadbiqi» nomli kitobi 1795 yili chop etildi. G. Monjning shogirdlari Dyupen, Menye ham sirtlar nazariyasiga katta hissa qo‘shdilar. Geometriya fani XIX asrda juda tez rivojlandi. 1826 yili buyuk matematik N.I. Lobachevskiy Evklid geometriyasidan farqli geometriya mavjud ekanligini ko‘rsatdi. Bu geometriyada geodezik uchburchak ichki burchaklari yig‘indisi 180^0 dan kichikdir. 1827 yili Gauss sirtning to‘liq egriligi uning ichki geometriyasiga tegishli ekanligini isbotladi. 1854 yili B.Riman Lobachevskiy geometriyasini ham o‘z ichiga oluvchi yangi geometriyani asoslab berdi. Bu geometriya Riman geometriyasi deb ataladi. Riman geometriyasida geodezik uchburchaklar ichki burchaklar yig‘indisi 180^0 dan katta ham, kichik ham bo‘lishi mumkin. XX asrda differensial geometriyaning rivojlanishida chiziqlar va sirtlar o‘rniga har xil differensial strukturalar kiritilgan silliq ko‘pxilliklarni o‘rganish tendensiyasi paydo bo‘ldi va rivojlandi. Bu obyektlarni (silliq ko‘pxilliklarni) o‘rganish qulayligi shundaki, ular chiziqlar va sirtlar kabi Evklid fazosining qism to‘plamlari sifatida emas, balki differensial struktura kiritilgan abstrakt topologik fazolar sifatida aniqlanadi. Ko‘pxilliklar nazariyasida chiziqlar va sirtlar mos ravishda bir o‘lchamli va ikki o‘lchamli ko‘pxilliklarni tashkil etadi.

GLOSSARIY

Absolyut buralish. Tabiiy parametrlashtirilgan chiziq $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(S)$ tenglamasi orqali berilgan bo`lsin. $P(S),\ Q(S+\Delta S) \in \gamma$ cheksiz yaqin nuqtalarida chiziqqa yopishma tekisliklar o`tkazaylik. Yopishma tekisliklar tashkil etgan burchakni $\Delta Q = <(\Pi_p \cdot \Pi_Q)$ belgilaylik. Yopishma tekisliklar tashkil etgan ΔQ burchak P va Q nuqtalardagi $\vec{\beta}(S),\ \vec{\beta}(S+\Delta S)$ binormal vektorlar tashkil etgan burchakka teng, ya`ni $\Delta Q = \angle(\vec{\beta}(S), \vec{\beta}(S+\Delta))$. $\gamma$ chiziqning $P$ va $Q$ nuqtalar bilan chegaralangan kesmasi (yoyi)ning uzunligi $|\Delta S|$ bo`lsin.

γ chiziqning P nuqtasidagi absolyut buralishi deb, $\Delta Q : |\Delta S|$ nisbatning Q nuqta chiziq bo`ylab P nuqtaga intilgandagi limitiga aytiladi va

$|K_2| = \lim\limits_{Q \to P} \dfrac{\Delta Q}{|\Delta S|}$ ko`rinishda belgilanadi.

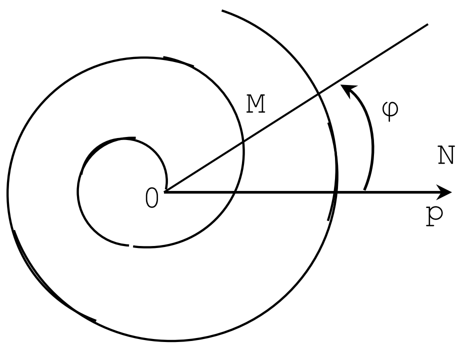
Akslantirish. X, Y ixtiyoriy to'plamlar bo'lib, X ning har bir elementiga Y ning bitta elementi mos qo'yilgan bo'lsa X ni Y ga akslantiruvchi moslik yoki akslantirish berilgan deyiladi va $f : X \to Y$ ko'rinishida yoziladi.

Ajraluvchan topologik fazo. Agar topologik fazoning har qanday ikki nuqtasi uchun o'zaro kesishmaydigan atroflar mavjud bo'lsa, u holda ushbu fazoning ajraluvchan yoki xausdorf fazosi deyiladi. Bittadan ortiq nuqtaga ega bo'lgan antidiskret fazo ajralmaydi.Diskret fazo ajraluvchanlik xossaga ega. Har qanday metrik fazolar ajraluvchan.

Asimptota. Egri chiziq ustidagi nuqta chiziq bo`ylab cheksiz uzoqlashganda, bu nuqta bilan birorta to`g`ri chiziq orasidagi masofa nolga intilsa, u holda bu to`g`ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

Aylana. Tekislikdamarkaz deb ataluvchiberilgan M nuqtadanbirxil r>0 masofadaturuvchinuqtalartiplaminiaylana deb ataladi.

Arximedspirali. M nuqta ON to`g`richiziqbo`yalabharakatlansin. $ON$ to`g`richiziqesa $O$ nuqta atrofidaaylansin. Qutb atrofidatekisaylanayotganto`g`richiziqilgarlanmatekis harakat qiluvchinuqtaningchizganizigaArximedspiralideyiladi. Arximedspiraliningqutbkordinatalaribo`yicha tenglamasi $r = a\varphi$.



Aylanmasirt. $\gamma : x = \varphi(u),\ z = \psi(u)$ tenglamalar orqali berilgan chiziqning (OZ) o`q atrofida aylanishidan hosil bo`lgan sirt aylanma sirt deyiladi.

**Asimptotikyo`nalish.**Sirtdagi biror $(du:dv)$ yo`nalishda K_n normal egrilik nolga aylansa, bu holda ushbu yo`nalishni asimptotik yo`nalish deyiladi. Normal egrilikning

Asimptotik chiziq. Sirtga qarashli biror chiziqning har bir nuqtasidagi urinma yo`nalishshi asimptotik yo`nalishi bo`lsa, bu holda ushbu chiziqni sirtning asimptotik chizig`i deb ataladi.

Binormal. Chiziqning yopishma tekisligiga perpendikulyar normali chiziqning binormali deb ataladi. Binormalning yo`naltiruvchi ort vektori $\vec{\beta}=\dfrac{\left[\vec{r}'_t\,\vec{r}''_{t^2}\right]}{\left|\left[\vec{r}'_t\,\vec{r}''_{t^2}\right]\right|}$

Bog'lanishli to'plam. (X,τ)-topologik fazo, $A\subset X$-qism to'plam bo'lsin. Ikkita G_1 va G_2 ochiq qism to'plamlar mavjud bo'lib:

1) $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$
2) $(A\cap G_1)\cap(A\cap G_2)=\varnothing$
3) $A\cap G_1\neq\varnothing, A\cap G_2\neq\varnothing$

shartlar bajarilsa, A to'plam bog'lanmagan to'plam deyiladi. Ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi G_1 va G_2 ochiq to'plamlar mavjud bo'lmasa, A to'plamni bog'lanishli to'plam deyiladi.

Bosh normal. Chiziqning yopishma tekisligida yotuvchi normali chiziqning bosh normali deb ataladi. Bosh normalning yo`naltiruvchi ort vektori $\vec{\nu}=\dfrac{\left[\left[\vec{r}'_t\vec{r}''_{t^2}\right]\vec{r}'_t\right]}{\left|\left[\left[\vec{r}'\vec{r}''_{t^2}\right]\vec{r}'_t\right]\right|}$

**Bir parametrli chiziqlar oilasini o`ramasi.** $F(x,y,c)=0$bir parametrli chiziqlar oilasining o`ramasini $F(x,y,c)=0$ va $F'_c(x,y,c)=0$tenglamalar sistemasini yechib F'_x va F'_y bir vaqtda nolga aylanmasa diskiriminant chiziq tarkibidan aniqlanadi.

Buralish teoremasi. Regulyar (uch marta uzluksiz differensiallanuvchi) chiziq o`zining $K_1$ (egrilik) noldan farqli bo`lgan har bir nuqtasida ma`lum bir absolyut buralish $|K_2|$da ega. Agar chiziq $\gamma:\vec{r}=\vec{r}(S)$ ko`rinishdagi tenglama orqali berilganbo`lsa, uy holda $|K_2|=\dfrac{|(\dot{\vec{r}}\ \ddot{\vec{r}}\ \dddot{\vec{r}})|}{K_1^{\,2}}$ ko`rinishdabelgilanadi.

Differensiyallashqoidalari(vektorfunksiya). $\vec{r}_i(t),\ (i=1,2,3)$ va f(t) funksiyalardifferensiallanuvchibo`lsa, u holdaquyidagidifferensiallashqoidalario`rinli.

a) $\left(\vec{r}_1(t)\pm\vec{r}_2(t)\right)'_t=\vec{r}_1'(t)\pm\vec{r}_2'(t),$

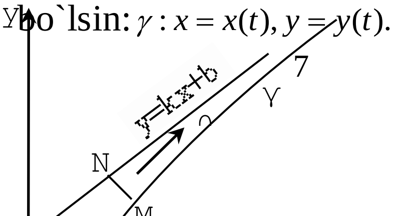
b) $\left(f(t)\vec{r}_i(t)\right)'_t=f'_t(t)\vec{r}_i(t)+f(t)\vec{r}_i'(t),$

c) $\left(\vec{r}_1(t)\ \vec{r}_2(t)\right)'_t=\vec{r}_t'(t)\vec{r}_2(t)+\vec{r}_1(t)\vec{r}_2'(t),$

d) $\left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t)\right)'_t=\left(\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t)\right)+\left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2'(t)\vec{r}_3(t)\right)+\left(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3'(t)\right),$

Egri chiziqningasimptotasi.

Tekisegrichiziqquyidagiparametriktenglamalariorqaliberilgan bo`lsin: $\gamma:x=x(t),y=y(t)$.



Birorta ℓ to`g`richiziqmavjudbo`lib , $\gamma$ chiziqustidagi M(t) nuqta chiziqbo`ylabcheksizuzoqlashganda, ushbunuqtadan ℓ to`g`richiziqqachamasofanolgaintilsa , u holda ℓ to`g`richiziqniberilgan γ chiziqningasimptotasi deb ataladi.

$Ax + By + C = 0$,

to`g`richiziqni $\gamma : x = x(t), y = y(t)$.chiziqqaasimptotabo`lishsharti:

$\lim\limits_{t\to T}|Ax(t) + By(t) + C| = 0.$

Asimptota $y = kx + b$, ko`rinishdagitenglamagaegabo`lsa, koeffitsientlarniquyidagichatopiladi $k = \lim\limits_{t\to T}\frac{y(t)}{x(t)},\ b = \lim\limits_{t\to T}[y(t) - kx(t)].$

$\gamma : x = x(t), y = y(t)$.egrichiziqvertikalasimptotagaegabo`lsa ,uningtenglamasi $a = \lim\limits_{t\to T}x(t)$,

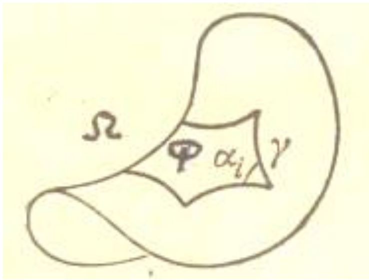
$\lim\limits_{t\to T} y(t) = \infty$. Gorizontalasimptotauchun $\lim\limits_{t\to T} x(t) = \infty,\ b = \lim\limits_{t\to T} y(t)$.

Tekischiziq $y = f(x)$, tgenglamaorqaliberilganbo`lsa, asimptotauchun $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$,

$b = \lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x) - kx\right]$ koeffisientlarnihisoblaymiz.

Elementarsirt. TekislikdagiochiqsohaniR^{3}fazogatopologikakslantirishnatijasidahosilqilingannuqtalarto`plamigaelementarsirtdeyiladi. Elementarsirtgatekislik, elliptikvagiperbolikparaboloidlarvaparabologiksilindrmisolbo`laoladi.

Elliptik nuqta. Agar sirtningbirornutasidagiyopishmaparaboloidielliptik paraboloid bo`lsa, u holdabunuqtanielliptik nuqta deyiladi.



Evolyuta. Berilganchiziqegrilikmarkazlariningeometriko`rnievolyutabo`lib, uningtenglamasi $X = x - y_t'\dfrac{x_t'^2 + y_t'^2}{\begin{vmatrix} x_t' & y_t' \\ x_{t^2}'' & y_{t^2}'' \end{vmatrix}}$, $Y = y + x_t'\dfrac{x_t'^2 + y_t'^2}{\begin{vmatrix} x_t' & y_t' \\ x_t'' & y_t'' \end{vmatrix}}$. ko`rinishdabo`ladi.

Evolventa. Evolyutagao`tkazilganurinmalarningortogonaltraektoriyasigauningevolventasideyiladi. Evolventatenglamasi: $\overline{p} = \overline{r}(s) + (\lambda - s)\overline{\tau}(s)$.

Freneformulalari. 1) $\dot{\vec{\tau}}(S) = K_1\vec{v}(S)$ 2) $\dot{\vec{v}}(S) = -K_1\vec{\tau} - K_2\vec{\beta}$

3) $\dot{\vec{\beta}}(S) = +K_2\vec{v}(S)$; buyerda K_1va K_2chiziqninqmosravishdaegriligivaburalishi;

Gauss – Bonne teoremasi. : Sirtning doiraga gomeomorf Φ sohasi γ regulyar chiziq bilan chegaralangan bo`lsin. U holda $\int\limits_{\gamma} K_g ds = 2\pi - \iint\limits_{\Phi} Kd\delta$ formulaning chap qismida integral $\gamma \in \Omega$ chiziqning $S = \int\limits_{\bar{u}_1}^{\bar{u}_2} d\bar{u} = \bar{u}_2 - \bar{u}_1$ yoy uzunligi bo`yicha olinsa o`ng tamonida $\Phi$ sohaning yuzi bo`yicha olinadi. Kg musbat yoki manfiy qiymatli bo`lishi mumkin. Bu sohaning qavariq yoki botiqligiga bog`liq.

Agar γ regulyar chiziqlar yoylarining kesishmasidan iborat bo`lib uchlaridagi ichki burchaklari $\alpha_i$ bo`lsa, $\int\limits_{\gamma} K_g ds + \sum\limits_i (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \iint\limits_{\Phi} K d\delta$

Topologik fazo. **X** ning qism to'plamlar oilasi $\tau = \{G_\alpha\}$ dan quyidagi shartlarni bajarilishini talab qilaylik.

1) τ oilaga tegishli to'plamlar ixtiyoriy sistemasining birlashmasi τ ga tegishli bo'lsin
2) τ oilaga tegishli har qanday ikkita to'plamning umumiy qismi (kesishmasi) τ ga tegishli bo'lsin.
3) Ø bo'sh to'plam τ ga tegishli bo'lsin
4) X to'plam τ ga tegishli bo'lsin.

U holda τ oilani X dagi topologik struktura deyiladi. X to'plamda biror τ topologik struktura aniqlangan bo'lsa, holda (X, τ) juftlikka **topologik fazo** deyiladi.

Topologik fazo bazisi. (X, τ) fazoning ixtiyoriy ochiq qism to'plamini B oilaga tegishli to'plamlar yig'indisi sifatida yozish mumkin bo'lsa, B oila (X, τ) topologik fazoning bazasi deyiladi.

Uzluksiz almashtirish. Agar *f* almashtirish $x \in F$ nuqtani $x' \in F'$ nuqtaga o`tkazsa va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ cheksiz kichik son uchun $\delta > 0$ cheksiz kichik son mavjud bo'lsaki, $\rho(x, y) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday $y \in F$ nuqta $\rho_1(x', y') < \varepsilon$ tengsizlikka qanoatlantiruvchi $y' \in F'$ nuqtaga o`tsa, u holda *f* ni uzluksiz almashtirish deyiladi.

Vektor funksiya. Agar skalyar o`zgaruvchi t ning $[a, b]$ kesmadagi har bir qiymatiga biror qoida asosida aniq bir $\vec{r}$ vektor mos kelsa, u holda bu vektor t parametrning vektor funktsiyasi deyiladi va qisqacha $\vec{r} = \vec{r}(t)$ shaklda ifodalanadi.

O`QUV MATERIALLARI (Ma`ruza)

1.1 YEVKLID FAZOSI. YEVKLID METRIKASI

Reja

1. R^n fazoda ikki nuqta orasidagi masofa formulasi.
2. Masofaga qo'yilgan talablar
3. Ochiq va yopiq shar tushunchasi
4. Teoremalar.
5. Chiziqli R^n fazo
6. Evklid fazosi

Tayanch iboralar. Yevklid fazosi, ochiq shar, yopiq shar, R^n fazo, ochiq to`plam, yopiq to`plam.

Xaqiqiy sonlar to'plami R^1,bo'yicha $R^n = R^1 x R^1 x....R^1$ (n marta) fazo quraylik. n ≥ 1 uchun Ω^n $\{(x^1\ x^2,\ \dots\ ,\ x^n)$ $x^i \in (a^i, b^i), i = 1,2..,n\}$ $\Omega^n \subset R^1.(a^i, b^i)$ – sonli intervallar bo'lib R^1 ga qism. R^n to'plamda $x=(x^1,x^2..x^n)$ va $y=(y^1,y^2..,y^n)$ nuqtalar orasidagi masofani

$$d(x,y) = \sqrt{(y^1 - x^1)^2 + (y^2 - x^2)^2 + ... + (y^n - x^n)^2} \qquad (1.1)$$

formula bilan aniqlaymiz. $d : R^n x R^n \to R^1$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1) musbat aniqlangan, ya'ni $\forall x, y \in R^n$ uchun x=y bo'lsa d(x,y)=0, $x \neq y$ bo'lganda d(x,y)>0 munosabatning bajarilishi zarur va Yetarli.

2) Simmetrik, ya'ni $\forall x, y$ uchun d (x,y)=d(y,x).

3) Uchburchak tengsizligini qanoatlantiradi, ya'ni $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Matematik tahlilkursidan, shuningdek analitik geometriyadan bizgaquyidagi Koshi tengsizligi ma'lum

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(a^i + b^i)^2\right]^{\frac{1}{2}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a^{i2}\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{i=1}^{n} b^{i2}\right)^{\frac{1}{2}} (1.2)$$

Ushbutengsizlikasosidauchburchaktengsizliginiisbotlashmumkin. $x=(x^1,x^2,\dots,x^n)$, $y=(y^1,y^2,\dots y^n)$, $z =$ $(z^1,z^2,\ ..\ z^n)$ nuqtalarniolib, $a^i = x^i - z^i$, $b^i = z^i - y^i$ belgilashkiritsak, Koshitengsizligidand(x,y)≤d(x, z)+d(z,y) tengsizlikkelibchiqadi.

R^ndaikkinuqtaorasidagimasofani (1.1) formulabo'yichakiritishbilanunimetrikfazogaaylantiramiz. R^ndaochiqto'plamtushunchasiniochiqkoordinatparallelopipediyokiochiqsharorqalikiritishmumkin.

1- ta'rif.R^ndaochiqkoordinatparallelopipedideb $\Omega^n = \{M(x^1, x^2,..., x^n)/$ $a^i < x^i < b^i, i = 1,2,..n\}$ nuqtalarto'plamigaaytiladi.

2- ta'rif.R^ndayopiqkoordinatparallelopipedideb $\Omega^n = \{M(x^1, x^2,..., x^n)/$

$a^i \le x^i \le b^i, i=1,2,..n\}$ nuqtalarto’plamigaaytiladi.

Yevklidfazosida $x_o(x_o^1, x_0^2,..., x_o^n)$ markazlivar> o radiuslishartushunchasigata’rifberaylik.

3-ta’rif. $\overline{U}(x_o,r)=\{x(x^1,x^2,..,x^n)/(x^1-x_0^1)^2+..+(x^n-x_o^n)^2<r^2\}$ nuqtalarto’plamiga x_o-markazlivarradiusliochiqshardeyiladi.

4-ta’rif $\overline{U}(x_o,r)=\{x(x^1,x^2,..,x^n)/(x^1-x_0^1)^2+..+(x^n-x_o^n)^2\le r^2\}$ nuqtalarto’plamigayopiqshardeyiladi. Sono’qidaochiqshar (x_o-r, x_o+r) ochiqintervaldanyopiqsharesa [x_o-r, x_o+r] kesmadaniboratbo’ladi.

Yevklidfazasidaberilgan x markazlivar>oradiusliochiksharvayopiqshartushunchalarigaquyidagichata’rifberishha mmumkin.

$3'$-ta’rif. V_r (x)={y$\in$R^n: d(x,y)<r} to’plammarkazi x nuqtadavaradiusirgatengochiqshardebataladi.

$4'$- ta’rif. $\overline{B_r}$ (x)={y$\in$R^n: d(x,y) $\le$r} to’plamesamarkazi x nuqtadavaradiusirgatengyopiqshardebataladi.

OchiqshardanfoydalanibR^{n}daochiqto’plamtushunchasinikiritaylik.

5-ta’rif. Berilgan A to’plamvaungategishliharqandaynuqtauchunshundayr>osonmavjudbo’lib, B_r(a)$\subset$ Abo’lsa, a nuqta A to’plamningichkinuqtasideyiladi.

6-ta’rif. Hammanuqtalariichkinuqtalaribo’lganto’plamochiqto’plamdeyiladi. Xulosashuki, xarqandayochiqshar B_r(a) ochiqto’plamdir, ya’ni $\forall x \in B_r(a)$ uchun $d(a,x)<r \Rightarrow r-d(a,x)=r_x>o.x$ nuqtavauningr$_x$atrofiuchun $B_{r_x}(x)\subset B_r(a)$ niko’rsatishimiztalabqilinadi.

$\forall y \in B_{r_x}(x)$ niolib, $y \in B_r(a)$ niko’rsataylik $d(y,a)\le d(y,x)+d(x,a)<r_x+d(x,a)=r_x+r-r_x=r$ ya’ni $d(y,a)<r \Rightarrow y\in B_{rx}(x)\subset B_r(a)$. Bo’shto’plamni Ø simvolbilanbelgilaymiz.

Ø- to’plamniharqandayto’plamningqismto’plamidebkelishamiz. To’plamningochiqqismto’plamlariuchunushbuteoremao’rinlidir.

1-Teorema 1) R^{n}fazoochiqto’plamdir;

2) Ø to’plamochiqto’plamdir;

3) Cheklisondagiochiqqismto’plamlarningkesishmasiochiqto’plamdir.

4) Harqandayochiqqismto’plamlaroilasiuchunbuoiladagiharqandayochiqto’plamlaryigindisiochiqto’plamdir.

Isboti:Teoremaningikkinchitalablariisbotlashimizshartemas, chunki Ø-ochiqto’plam. Birinchitalabniisbotlashuchun $\forall a \in R^n$element (nuqta)niolamiz$\forall$ r> o sonuchun

B_r (a)$\subset R^n$ har doim o’rinli bo’lganidan R^n-fazo ochiq to’plamdir. Endi uchinchi talab ya’ni A_1, A_2…, A_n larning har biri ochiq to’plam bo’lsa, $A=\bigcap_{i=1}^{n} A_i$ to’plamning ochiq bo’lishini ko’rsatamiz.

A=$\varnothing \Rightarrow$A – ochiq to’plam. Shuning uchun A ≠ Ø deb faraz qilib, A ga tegishli $\forall a$no’ktaning ichki nuqta ekanligini ko’rsataylik.

Agar a ∈ A ⇒ a ∈ A_i – barcha i-larda o’rinli. Har bir A_i ochiq to’plam bo’lgani uchun shunday r_i>o soni mavjudki $B_{ri}(a) \in A_i$ bajariladi.

$\bigcap_{i=1}^{n} r_i = r$ belgilasak, $B_{r_a}(a) \subset R_{ri}(a) \subset A_i \Rightarrow B_r(a) \subset A$ va a nuqta A to’plamning ichki nuqtasidir. Endi teoremadagi to’rtinchi da’voni isbot qilaylik. $\{A_\propto\}$ - ochiq to’plamlar sistemasi bo’lsin. $A = \underset{\propto}{U} A_\propto$ yig’indining ochiq to’plam ekanligini ko’rsataylik $\forall a \in A$ nuqtani olib, uning ichki nuqta ekanligini ko’rsatamiz. $a \in A$ nuqta $\{A_\propto\}$ to’plamning kamida birorta elementiga tegishli bo’ladi.

Faraz qilaylik $a \in A_{\alpha g}$ bo’lsin $A_{\alpha g}$ to’plam ochiq bo’lganidan, biror $r > o$ son mavjud bo’lib, $B_r(a) \subset A_{\alpha o} \Rightarrow B_r(a) \subset A.$. Bundan a ning A to’plam uchun ichki nuqta bo’lishi kelib chiqadi. Endi yopiq to’plam tushunchasini kiritaylik.

7-ta’rif. CA=$R^n \setminus A$ to’plamga A to’plamning to’ldiruvchisi deyiladi.

8-ta’rif CA to’plam ochiq to’plam bo’lsa, A ni yopiq to’plam deb ataladi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiraylik.

2-Teorema.1) R^n fazo yopiq to’plamdir

2) Ø bo’sh to’plam yopiq to’plamdir

3) Har qanday yopiq qism to’plamlar oilasi uchun shu oiladagi ixtiyoriy yopiq to’plamlar sistemasining kesishmasi yopiq to’plamdir.

4) Chekli sondagi yopiq to’plamlarning yig’indisi yopiq to’plamdir.

Teoremani $\underset{\alpha}{U} \underset{\alpha}{C}A = C(\bigcap_{\alpha} A_\alpha) ва \bigcap_{\alpha} CA_\alpha = C(\underset{\alpha}{U} \underset{\alpha}{A})$ ikkilanganlik qonunlariga asoslanib, 3-§ da isbotlashga aloxida to’xtalamiz R^n da $\vec{x} = \{x^1, x^2,.., x^n\}, \vec{y} = \{y^1, y^2,.., y^n\}$ elementlarni olib, ular orqali $\vec{x} + \vec{y} = \{x' + y', x^2 + y^2,..., x^n + y^n\}, \lambda \vec{x} = \{\lambda x', \lambda x^2,..\lambda x^n\}$ qoidalar bilan yangi $\vec{x} + \vec{y} \in R^n$, $\lambda \vec{x} \in R^n$ elementlarni aniklashimiz mumkin. Shunday amallarga nisbatan R^n chiziqli fazo bo’ladi. $\vec{x}, \vec{y}$– elementlarni vektorlar deyiladi. $\vec{x} = \vec{XY}$ belgilasak, X ni $\vec{x}$ vektorning boshlangich nuqtasi Y ni esa oxiri deyiladi. R^n

chiziqli fazoda $\vec{x}\ ва\ \vec{y}$ vektorning skalyar ko'paytmasi $(\vec{x},\vec{y})$ kiritilsa, R^n- Yevklid fazosiga aylanadi. Yevklid fazosida affin almashtirishni $\vec{y}=A\vec{x}+\vec{a}$ formula bilan berish mumkin. Bunda $\vec{x}=\begin{pmatrix} x' \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}$. $\vec{a}=\begin{pmatrix} a' \\ a^2 \\ \dots \\ a^n \end{pmatrix}$, A=$\|(a_{ij})\|$, $\left(A\vec{x},A\vec{y}\right)=(\vec{x}\,\vec{A}^T,A\vec{y})=(\vec{x},\vec{y})\ A^T A=E$

. E-birlik matritsa, A^T esa transponirlangan matritsa, A-ortogonal matritsa bo'lib, detAq1 bo'lganda affin almashtirish harakatga o'tishi mumkin. Harakat natijasida masofa o'zgarmaydi, shu bilan birga fazoda orientratsiya (aylanish) ham saqlanadi.

Agar A matritsaning har bitta ustuni uchun barcha elementlar kvadratlarining yig'indisi birga teng bo'lib, turlicha ikkita ustunlar uchun mos elementlar ko'paytmalarining yig'indisi nolga teng bo'lsa, u holda A ni ortogonal matritsa deyiladi.

Agar B=$\left\{0,\vec{e}_1,\vec{e}_2,..,\vec{e}_n\right\}$-ortonormallashgan reper, ya'ni

$(\vec{e}_i\,\vec{e}_j)=\vec{b}_{ij}=\begin{cases} 1, агар-i=j \\ 0, агар-i\neq j \end{cases}$ bo'lsa,

u holda shu reperga nisbatan $\vec{y}=A\vec{x}+\vec{a}$ ko'rinishda berilgan akslantirishning harakatdan iborat ekanligi bizga analitik geometriya ko'rsidan ma'lum.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. R^n da ochiq to`plam tushunchasi qanday to`plamlar orqali kiritilishi mumkin?
2. R^n da nuqtalar orasidagi masofa qanday shartlarni qanoatlantiradi?
3. Yevklidfazosidaochiqto`plam deb nimagaaytiladi?
4. Yevklidfazosidayopiqto`plam deb nimagaaytiladi?
5. Yevklidfazosidato`plamningichkinuqtasi deb qandaynutagaaytiladi?
6. Cheklisondagiochiqqismto`plamlarningkesishmasidanqandayto`plamhosilbo`ladi?
7. To`plamningto`ldiruvchisi deb qandayto`pamgaaytiladi?+
8. Ihtiyoriysondagiyopiqqismto`plamlarningkesishmasidanqandayto`plamhosilbo`ladi?

Glossariy

R^n fazo – n o'lchovlidekartkoordinatalarisistemasidaniboratbo'lganfazo.

Yevklid fazosi – R^n to’plamda $x=(x^1,x^2..x^n)$ va $y=(y^1,y^2..,y^n)$ nuqtalar orasidagi masofani

$$d(x,y)=\sqrt{(y^1-x^1)^2+(y^2-x^2)^2+...+(y^n-x^n)^2} \qquad (1.1)$$

formula bilan aniqlaymiz. $d: R^n x R^n \to R^1$ funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) musbat aniqlangan, ya’ni $\forall x,y\in R^n$ uchun x=y bo’lsa d(x,y)=0, $x\neq y$ bo’lganda d(x,y)>0 munosabatning bajarilishi zarur va yetarli.

2) simmetrik, ya’ni $\forall x,y$ uchun d (x,y)=d(y,x).

3) uchburchak tengsizligini qanoatlantiradi, ya’ni $d(x,y)\le d(x,z)+d(z,y)$.

U holda, bundayfazoYevklidfazosideyiladi.

Ochiq to`plam - hammanuqtalariichkinuqtalarbo’lganto’plam.

Yopiq to`plam - $R^n\setminus A$ to’plambo’lsa, A niyopiqto’plamdeyiladi.

Ochiq shar - $V_r(x)=\{y\in R^n: d(x,y)<r\}$ to’plam.

Yopiq shar - $\overline{B_r}(x)=\{y\in R^n: d(x,y)\le r\}$ to’plam.

1.2.METRIK FAZOLAR.METRIK FAZODA OCHIQ VA YOPIQ TO`PLAMLAR. METRIK TOPOLOGIYA

Reja

1. Metrikfazo.
2. Metrikfazogamisollar.
3. Ochiqvayopiqto`plamlar
4. Metriktopologiya

Tayanchiboralar: Metrikfazo, metrika,ochiqto`plam, yopiqto`plam.

1. Metrikfazo.

Metrik fazolar topologik fazolarning juda muhim sinfini tashkil etadi. Bu fazolarda ixtiyoriy ikki nuqta uchun ular orasidagi masofa tushunchasi kiritiladi.

X - ixtiyoriy to’plam $X\times X=X^2$ to’g’ri ko’paytmada $\rho: X\times X \to R^1$ funksiya aniqlangan bo’lib, qo’yidagi shartlarni qanoatlantirsin.

1) $\rho(x,y)\ge 0, \forall x,y\in x$

2) $\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y, \forall x,y\in X$

3) $\rho(x,y)=\rho(y,x), \forall x,y\in X$

4) $\rho(x,y)\le\rho(x,z)+\rho(z,y) \ \forall x,y,z\in X$

Yuqoridagi shartlar metrik fazo aksiomalari deyiladi. (X,ρ) juftlikni metrik fazo deyiladi. (X,ρ) –metrik fazo, $x\in X, r>0$ bo’lsa, markazi X nuqta va radiusi r ga

teng ochiq shar $U_r(x)$ qo'yidagicha aniqlanadi:
$U_r(x)=\{y\in X / \rho(x,y)<r\}$.
Ochiq shar yordamida metrik fazoda ochiq to'plam tushunchasini kiritish mumkin.
$A\subset X$ –qism to'plam, $x\in X$ bo'lib birorta $r>0$ son uchun $U_r(x)\subset A$ bo'lsa, x nuqta A to'plamning ichki nuqtasi deyiladi. Hamma nuqtalari ichki nuqtalar bo'lgan to'plam ochiq to'plam deyiladi. Agar τ oila sifatida (X,ρ) metrik fazoning hamma ochiq qism to'plamlari va bo'sh to'plamdan iborat oilani olsak natijada
(X,ρ) –juftlik topologik fazoga aylanadi.
Bu topologiya (X,ρ) fazoga ρ metrika yordamida kiritilgan topologiya deb ataladi.
Endi τ oilaning topologik fazo aksiomalarini qanoatlantirishini tekshiraylik.
1) $x\in X$ va $r>0$ixtiyoriy son bo'lsa, $U_r(x)\subset X$ bo'lgani uchun X to'plam τ oilaga tegishlidir.
2) Bo'sh to'plam ham τ oilaning elementi.
3)$A_1, A_2\in\tau$ bo'lsin. Agar $A_1\cap A_2\neq\phi$ bo'lsa, ikkinchi shartga ko'ra $A_1\cap A_2\in\tau$
Faraz qilaylik, $A_1\cap A_2\neq\phi$ va $x\in A=A_1\cap A_2$ bo'lsin.
A_1,A_2 to'plamlar ochiq bo'lgani uchun shunday $r_1>0$, $r_2>0$ sonlar mavjudki, $U_{r_1}(x)\subset A_1$, $U_{r_2}(x)\subset A_2$ munosibatlar bajariladi.
Agar $0<r<\min(r_1,r_2)$ bo'lsa,$U_r(x)\subset A=A_1\cap A_2$ munosibat bajariladi. Demak,$A=A_1\cap A_2\in\tau$
4) $\{A\alpha\}$ - τ ga tegishli to'plamlar oilasi bo'lsin.
$\bigcup_a A\alpha\in\tau$ ekanini ko'rsataylik. Buning uchun $x\in A=\bigcup_\alpha U_\alpha$ nuqtani qaraylik. x nuqtaning yig'indiga qarashliligidan shunday indeks α_0 mavjudki, $x\in A\alpha_0$ munosibat o'rinli. $A\alpha_0$ to'plamning ochiqligidan shunday $r>0$ son mavjudki, $U_r(x)\subset A\alpha_0\subset A$ munosibat bajariladi. Demak τ oila topologik fazoning 1)-4) aksiomalarini qanoatlantiradi.
2. **Metrikfazogamisollar**
<u>1-misol</u> $X=R^1$, $\rho(x,y)=|x-y|$ to'g'ri chiziqning standart metrikasi
<u>2-misol</u> $X=R^n$, $\rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x^i-y^i)^2}$, bu erda $\rho(x,y)$ $x=(x^1,x^2,\dots,x^n)$, $y=(y^1,y^2,\dots,y^n)$ nuqtalar orasidagi evklid bo'yicha oddiy masofa. 4)- aksioma Koshi tengsizligi [$\sum_{i-1}^{n}(a^i+b^i)^2]^{\frac{1}{2}}\leq(\sum_{i=1}^{n}a^{i^2})^{\frac{1}{2}}+(\sum_{i=1}^{n}b^{i^1})^{\frac{1}{2}}$ dan foydalanib tekshiriladi.

3-misol. X=C[a,b] [a,b] kesmada aniqlangan uzluksiz funksiya-lar to'plami bo'lsin. Bu to'plamda x(t), y(t) funksiyalar uchun r(x,y)=sup/y(t)-x(t)/,t$\in$[a,b] formula bo'yicha metrika kiritamiz. Bu holda r funksiya uchun metrik fazo aksiomalarini tekshirish engil, shuning uchun bu mashg'ulot talabalarga tavsiya etiladi.

Metrik fazo uchun ichki,chegaraviy va urinish nuqtalarini quyidagicha kiritish mumkin. $A\subset X$- qism to'plam ,$x\in X$ bo'lib, ixtiyoriy r>0 uchun $U_r(x)\cap A\neq\varnothing$ va $U_r(x)\cap(X/A)\neq\phi$ bo'lsa,x nuqta A to'plamning chegara nuqtasi deyiladi.

Agar ixtiyoriy r>0 uchun faqat $U_r(x)\cap A\neq\phi$ bo'lsa x nuqta A to'plamning urinish nuqtasi deyiladi.

Biror r>0 son uchun $U_r(x)\subset A$ munosabat bajarilsa , x nuqta A uchun ichki nuqta deyiladi.

Metrik fazolar shunday bir ajoyib xususiyatga egaki, bu xususiyat Xausdorf aksiomasi deyiladi. $x,y\in X, x\neq y, (X\ \rho)$- metrik fazo bo'lsin. Agar d=ρ (x,y),0<r<$\frac{d}{2}$ bo'lsa, $U_r(x)$, Ur(y) sharlar o'zaro kesishmaydi. Topologik fazolar uchun ham Xausdorf aksiomasining bajarilishi talab qilinadi.

Xausdorf aksiomasi. (X, τ)-topologik fazo, x, $y\in X$ va $x\neq y$ bo'lsa, x va y nuqtalarning o'zaro kesishmaydigan atroflari mavjud.

Xausdorf aksiomasi bajaraladigan topologik fazolar Xausdorf fazolari deyiladi. Hamma topologik fazolar uchun ushbu aksiomaning har vaqt bajarilishi talab qilinadi. Jumladan, metrik fazolar (X, τ)-topologik fazo $\{x_n\}\in X$, n=1,2,.... va x $\in X$ bo'lsin.

Ta'rif. x nuqtaning ixtiyoriy U atrofi uchun shunday N>0 son mavjud bo'lib, n>N da $x_n\in U$ munosabat bajarilsa, $\{x_n\}$ketma-ketlik x nuqtaga yaqinlashadi deyiladi va

$\underline{\lim_{n->\infty}} x_n$ = x$\langle$ $(x_n -> x)_{n->\infty}$ ko'rinishda yoziladi.

10-Teorema. Xausdorf fazosida har qanday yaqinlashuvchi ketma-ketlik yagona limitga egadir.

Isbot. $\{x_n\}$ -yaqinlashuvchi ketma-ketlik va $\underline{\lim_{n->\infty} x_n}$ =x bo'lsin .Agar x_n->y va $y\neq x$ bo'lsa, x va y nuqtalarning o'zaro kesishmaydigan atroflarini U_1 va U_2 bilan belgilasak, $\{x_n\}$-ketma-ketlik x va y nuqtalarga yaqinlashganligi uchun shunday N_1,N_2 sonlar mavjudki, n>N_1 da $x_n\in U_1$, $n > N_2$ ∂a $x_n \in U_2$ bo'lib, $n\geq\max\{N_1 N_2\}$ olinsa $x_n\in U_1\cap U_2\neq\phi$ munosabat kelib chiqadi. Ko'ramizki, $U_1\cap U_2\neq\phi$ .Bu ziddiyatdan $y=x$ limitning yagonaligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Bizgabo'shbo'lmaganbiror*X*to'plamvamanfiybo'lmaganhaqiqiysonlarto'pla mi$R_+=[0, \infty)$ berilsin.

Ta’rif. X to‘plamning o‘zini o‘ziga dekart ko‘paytmasi $X\times X$ ni $R_+=[0, \infty)$ to‘plamga aksettiruvchi ρ funksiyaga X to‘plamdagi **metrika** deb ataladi, agarda u quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) X to‘plamdagi ixtiyoriy x, y elementlar uchun $\rho(x, y)\geq 0$ bo‘lib, $\rho(x, y)=0$ munosabat $x=y$ bo‘lgandagina bajarilsa;

2) X to‘plamdagi ixtiyoriy x, y elementlar uchun $\rho(x, y)= \rho(y, x)$;

3) X to‘plamdagi ixtiyoriy x, y, z elementlar uchun $\rho(x, y)\leq \rho(x, z)+\rho(z, y)$.

Ta’rif. ρ metrika bilan berilgan X to‘plamga **metrik fazo** deb ataladi va (X, ρ) bilan belgilanadi.

X to‘plamning elementlarini **nuqtalar** deb ataladi. Manfiy bo‘lmagan $\rho(x, y)$ sonni metrik fazodagi x va y nuqtalar orasidagi **masofa** deb ataladi. Metrika ta’rifidagi uchta shartni **metrik fazo aksiomalari** deb ataladi.

Misollar. 1. R to‘plam sonli to‘g‘ri chiziq bo‘lsin. x va y nuqtalar orasidagi masofa ushbu $\rho(x, y)=|x-y|$ ko‘rinishda kiritilsa, R to‘plam metrik fazo bo‘ladi.

Haqiqatan, 1 va 2-aksiomalarning bajarilishi o‘z-o‘zidan ravshan. Biz 3-aksiomaning bajarilishini tekshiramiz. x, y, z lar R sonlar to‘g‘ri chizig‘iga tegishli uchta nuqta bo‘lsin. U vaqtda

$$|x-z|=|x-y+y-z|\leq|x-y|+|y-z|.$$

Shunday qilib $\rho(x, y)\leq \rho(x, z)+\rho(z, y)$.

2. X ixtiyoriy to‘plam bo‘lsin. Ushbu

$$\rho(x, y)=\begin{cases}1, \text{ agar } x\neq y \text{ bo'lsa,}\\ 0, \text{ agar } x=y \text{ bo'lsa}\end{cases}$$

funksiya metrik fazo aksiomalarini qanoatlantiradi.

Bu misol har qanday bo‘shmas to‘plamda metrika kiritish mumkin ekanligini ko‘rsatadi. Demak, har qanday bo‘shmas to‘plamdan metrik fazo hosil qilish mumkin ekan.

Metrik fazo topologik fazo bo‘lishini ko‘rsatamiz. Buning uchun (X, ρ) metrik fazoda ochiq to‘plamlar tushunchasini shunday kiritishimiz kerakki, ulartopologiyaninguchtaaksiomasiniqanoatlantirsin.

Ta’rif. (X, ρ) metrikfazoda$a$nuqtaning***r*sharliatrofi** deb, $\rho(a, x)<r$ munosabatniqanoatlantiruvchibarcha$x\in(X, \rho)$ nuqtalarto‘plamigaaytamizva$u(a, r)$ bilanbelgilaymiz, buyerda$r>0$ bo‘lgan son.

3. **Ochiqvayopiqto`plamlar.**

Ta’rif. (X, ρ) metrikfazoda**ochiqto‘plam**deb, shunday$W$to‘plamniaytamizki, uningistalgannuqtasiningshu$W$to‘plamgategishlibirorsharliatrofimavjudbo‘lsa.

Elementlari (X, ρ) metrikfazoningbarchaochiqto‘plamlaridaniboratto‘plamtopologiyaninguchtaaksiomasi niqanoatlantiradivauni$\tau_\rho$bilanbelgilaymiz.

1-aksiomaning bajarilishinitekshiramiz. Ø to‘plambirorta ham nuqtanio‘zichigaolmaganiuchun, bo‘shto‘plamo‘ziningbarchanuqtalariniularningsharliatrofibilano‘zichigaoladideyishm umkin. Shu sababli, ta’rifgako‘ra Ø to‘plamochiqto‘plambo‘lib, $\varnothing\in\tau_\rho$bo‘ladi.

Har birto‘plamo‘ziningqismto‘plamiva$\tau_\rho$to‘plam$X$to‘plamningbarchaochiqqismto‘plamlarid antuzilganiuchun$X\in\tau_\rho$bo‘ladi.

2-aksiomaning bajarilishinitekshiramiz. $W_\alpha$to‘plamlar (X, ρ) metrikfazodagiochiqto‘plamlarbo‘lsin, ya’ni$W_\alpha\in\tau_\rho$.Ularningistalgancondagisiningyig‘indisiochiqto‘plambo‘lishiniko‘rsatamiz.

$W=\bigcup_\alpha W_\alpha$ bo‘lsin. $W$to‘plamdaixtiyoriyx_0 nuqta olaylik. U vaqtdashundayW_{α_o} to‘plammavjudki $x_0\in W_{\alpha_o}$ bo‘ladi. Ma’lumkiW_{α_o} ochiqto‘plam. Shuninguchununing$x_0$nuqtasiuchunshunday$u(x_0,r)$ sharliatrofmavjudki$u(x_0,r)\subset W_{\alpha_o}$ bo‘ladi. Lekin $W_{\alpha_o}\in W$. Shu sababli$u(x_0,r)\subset W$. Demak, $W$to‘plamdagiistalganx_0 nuqta uchunshunday$u(x_0,r)$ sharliatrofmavjudekanki, busharliatrofto‘laligicha$W$to‘plamgategishlibo‘ladi, ya’ni$W$to‘plamochiqto‘plambo‘ladi.

3-aksiomaning bajarilishiniikkitato‘plamuchunko‘rsatsakyetarli. W_1vaW_2ochiqto‘plamlarberilsin. Agar $W_1\cap W_2=\varnothing$ bo‘lsa, $\varnothing\in\tau_\rho$bo‘lganiuchun 3-

aksiomaning bajarilishikelibchiqadi. Endi $W_1 \cap W_2 \neq \emptyset$ bo‘lsin. U vaqtda $W_1 \cap W_2 = W_o$ deb belgilaymiz. $W_o$to‘plamdaixtiyoriy$a$ nuqta olaylik. U vaqtda$a \in W_1$va$a \in W_2$bo‘ladi. W_1vaW_2ochiqto‘plamlarbo‘lganiuchun, shunday $r_1 > 0$ va $r_2 > 0$ sonlarmavjudbo‘ladiki$u(a, r_1) \subset W_1$va$u(a, r_2) \subset W_2$bo‘ladi. Agar $r = min\{r_1, r_2\}$ deb olsak , u vaqtda

$$u(a,r) \subset u(a, r_1) \subset W_1,$$

$$u(a,r) \subset u(a, r_2) \subset W_2.$$

Demak,

$$u(a,r) \subset W_o.$$

Shundayqilib$W_o$to‘plamo‘zining har birnuqtasi
Bilan birgashunuqtaning (u,r) sharliatrofini ham
o‘zichigaolmoqda. Demak, ta’rifgaasosanW_o
Ochiqto‘plambo‘ladi.
Shundayqilib$\tau_\rho$to‘plamtopologiyaninguchtaaksiomasiniqanoatlantirarekan.

4. **Metriktopologiya**

Ta’rif.$\tau_\rho$topologiyaga (X, ρ) metrikfazoda**ρ metrikabilanyaratilgantopologiya**yokisoddaqilib**(X, ρ) metrikfazodagitopologiya** deb ataladi.

Bizgabiror (M, τ) topologikfazoberilsin.

Ta’rif. Agar $M$to‘plamdashundayρmetrikamavjudbo‘lsaki, bumetrika$M$to‘plamdaberilgan τ topologiyaniyaratsa, u vaqtda (M, τ) fazoga**metrikalashtirilgantopologikfazo** deb ataladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1) Metrikfazo deb nimagaaytiladi?
2) Metrikfazolargamisollarkeltiring.
3) Metrikfazodaochiqto`plam deb qandayto`plamgaaytiladi?

4) Metrikfazodayopiqto`plam deb qandayto`plamgaaytiladi?
5) Metrikfazodasonliketma-ketlikkamisollarkeltirng.
6) Metriktopologiya deb nimagaaytiladi?
7) Metrikfazouchunichki,chegaraviyvaurinishnuqtalarto`plamlarigamisollarkeltiring.

Glossariy

Metrik fazo - bu ixtiyoriy ikki nuqta uchun ular orasidagi masofa bilan aniqlangan fazo.

Metrika - X - ixtiyoriy to'plam va $X\times X = X^2$ to'g'ri ko'paytmada $\rho: X\times X\to R^1$ funksiya aniqlangan bo'lib, qo'yidagi shartlarni qanoatlantirsin:

1) $\rho(x,y)\geq 0, \forall x,y \in x$

2) $\rho(x,y)= 0 \Leftrightarrow x=y, \forall x,y \in X$

3) $\rho(x,y)= \rho(y,x), \forall x,y \in X$

4) $\rho(x,y)\leq \rho(x,z)+\rho(z,y), \forall x,y,z \in X$

U holda, (X, ρ) juftlikni metrika deyiladi.

2.1. TOPOLOGIK FAZOLAR. TOPOLOGIK FAZOLARDA OCHIQ VA YOPIQ TO`PLAMLARNING ASOSIY XOSSALARI.

Reja

1.To`plarlar oilasi.
2.Topologik fazo.
3.Yopiq to`plamlar.

Tayanchiboralar:to`plamlaroilasi, topologiya,ochiqto`plam, yopiqto`plam.

Biror X to'plam va uning qism to'plamlaridan iborat $\tau=\{G_\alpha\}$oila berilgan bo'lsin. Bu oila chekli sondagi elementlarga ega bo'lishi ham mumkin. Jumladan, τ oilaga X to'plamning barcha qism to'plamlari tegishli bo'lishi mumkin. Shundan kelib chiqib, quyi α indeksning qabo'l qilishi lozim bo'lgan qiymatlari qanday to'plamga tegishli ekanligini ko'rsata olmaymiz. X to'plam elementlarini nuqtalar deyiladi.

Ta'rif. Xning qism to'plamlar oilasi $\tau=\{G_\alpha\}$ dan quyidagi shartlarni bajarilishini talab qilaylik.

1) τ oilaga tegishli to'plamlar ixtiyoriy sistemasining birlashmasi τ ga tegishli bo'lsin

2) τ oilaga tegishli har qanday ikkita to'plamning umumiy qismi (kesishmasi) τ ga tegishli bo'lsin.

3) Ø bo'sh to'plam τ ga tegishli bo'lsin

4) X to'plam τ ga tegishli bo'lsin.

U holda τ oilani X dagi topologik struktura deyiladi. X to'plamda biror τ topologik struktura aniqlangan bo'lsa, holda (X, τ) juftlikka **topologik fazo** deyiladi. Biror to'plamni topologik fazoga aylantirish uchun uning yuqoridagi to'rtta shartlarni qanoatlantiruvchi qism to'plamlaridan iborat birorta oilani aniqlash etaridir. (X, τ) topologik fazo bo'lsa, Xning elementlarini nuqtalar deb, τ ga tegishli Xning qism to'plamlarini esa ochiq to'plamlar deb ataladi. 1)-4)-shartlarni topologik fazo aksiomalari deyiladi. Endi misollar keltiraylik.

1-misol. X ixtiyoriy to'plam, τ oila bo'sh to'plam (Ø) va X dan iborat bo'lsa, (X, τ) juftlik topologik fazo bo'ladi. Bu fazoda faqat ikkita ochiq qism to'plam mavjud. Bu fazoni trivial yoki antidiskret topologik fazo deyiladi.

2-misol. X ixtiyoriy to'plam, R(x)q τ Xning barcha qism to'plamlari oilasi bo'lsa, (X, τ) juftlik topologik fazo bo'lib, uni diskret topologik fazo deyiladi. Bitta nuqtadan iborat diskret topologik to'plamning ochiq to'plam bo'lishi 4) dan kelib chiqadi. 1)-4)-aksiomalar bajarilishini tekrishish o'quvchiga tavsiya etiladi.

3-misol. X=[0,∞) nur bo'lib, τ oila Ø, x va {[a, ∞), a$\geq$0} nurlardan iborat bo'lsa, 1)-4)-aksiomalarni tekshirish mumkin.(x, τ) fazoni strelka (yo'nalish) deyiladi.

4-misol. X=R^n bo'lsin. R^n da ochiq to'plam deb, har bir nuqtasi shu to'plamga tegishli biror sharning markazi bo'la oladigan to'plamga aytiladi. Ya'ni ixtiyoriy $G \in R^n$ to'plamni olsak, bu to'plam ochiq bo'lishi uchun har bir $x_0 \in G$ nuqta uchun r>0 son mavjud bo'lib, U(x_0,r)$\in G$ bo'lishi talab qilinadi, bunda U(x_0,r)={ $x \mid d(x_0, x) < r$ }. Masofani koordinatalar orqali ifodalasak

$$x(x^1, x^2, ..., x^n) \in R^n, x_0(x_o^{\,1}, x_o^{\,2}, ..., x_o^n) \in R^n$$

$$d(x_o x) = \sqrt{(x^1 - x_o^{\,1})^2 + (x^2 - x_o^{\,2})^2 + ...(x^n - x_o^{\,n})^2} < r \quad (1 \cdot 1)$$

(R^n, τ) juftlikkatabiiytopologiyadeyiladiva E^norqali belgilanadi

2-aksiomaning bajarilishinitekshiraylikG_1va$G_2$$E^n$daochiqto'plamlarbo'lsinG=G_1 $\cap$ G_2belgilaylik $x \in G \Rightarrow x \in G_1, x \in G_2$. U xoldar$_1$>o,r$_2$>osonlarmavjudbo'lib, U(x,r$_1$) $\in G_1, U(x, r_2) \subset G_2$. $\min(r_1, r_2) = r$ belgilasaq, ko'ramizki, $U(x,r) \subset G \Rightarrow G$ - ochiqto'plam.

5-misol $X = R^n$. Xfazodagiochiqto'plamlardebmarkazifiksirlangan (mahkamlangan) $x_o$nuqtadabo'lgan {U (x_o,r)} sharlaroilasiga, Xgava Ø gaaytiladi. 1)-2) aksiomalarnitekshiraylik {U(x_o,r$_2$)} – ochiqto'plamlarsistemasibo'lsa, $U(x_o, r) = \underset{\alpha}{U}\, u(x_o, r_\alpha)$, bunda $r = \sup\limits_{\alpha} r_\alpha$ ($\sup\limits_{\alpha} r_\alpha = \infty$ bo'lsa, $U(x_o, r) = X$)

$U(x_o, r) \subset X$

U(x_o,r$_1$) vaU(x_o,r$_2$) ikkita to'plamlarkesishmasini

$U(x_o,r)=U(x_o,r_1)$ $\cap U$ $(U(x_o,r_2)$ belgilasaq, $r=\min(r_1,r_2)$ bo'lib, $U(x_o,r)$ $\subset X$ BundaytopologiyaniR^{n}dakonsentrikdebnomlanadi.

6-misol A_2affintekislikda R=ABCDparalellogrammniolaylik

$\overset{o}{P}=\{k/\overrightarrow{AK}=\lambda\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AD},O<\lambda,,\beta<1\}$ to'plamgaPningichkarisideyiladi. $F\subset A_2$bo'lib, Fto'plamningharqaysi M nuqtasiuchun R paralellogrammmavjudva $M\in\overset{o}{P}\subset F$ bo'lsa, Fniochiqto'plamdeyiladi. A_2dagibarchaochiqto'plamlarsistemasi τ uchuntopologikfazoning 1)–4)aksiomalario'rinlidir.

Demak (A_2, τ)-topologikfazo.

X-ixtiyoriyto'plam, Funingqismto'plamibo'lsa, u holda$X\backslash F=C_xF$ F ni X gacha to'ldiruvchito'plamdeyiladi. quyidagilaro'rinlidir: $F\cap c_xF=\varnothing$, $FUC_XF=X$, $C_x(C_xF)=F$

Shubilanbirgaikkilanganlikformulalaridebataluvchi qo'yidagiformulalarengillikbilantekshiriladi.

$\underset{\lambda}{U}C_xF_\lambda=C_x(\bigcap_\lambda F_\lambda$ (1.3) $\bigcap_\lambda C_xF_\lambda=C_x(\underset{\lambda}{U}F_\lambda$ $(1\bullet4)$

Ta'rif (X, τ) – topologikfazoda $F\subset X$ to'plamuchununingto'ldiruvchisi X\Fochiqto'plambo'lsa, Fto'plamniyopiqto'plamdebataladi.

Masalan: $[a,\infty)$ tuplam $(-\infty,a)$ ochiqto'plam to'ldiruvchisisifatidayopiq.Topologikfazaaksiomalaridanva $(1\bullet3)$, $(1\bullet4)$ formulalardanyopiqto'plamlaruchunquyidagixossalarnikeltirishmumkin.

1. Yopiqto'plamlarixtiyoriysistemasiningkesishmasiyopiqto'plamdir.
2. Cheklisondagiyopiqto'plamlarningbirlashmasiyopiqto'plamdir.
3. X fazoyopiqto'plamdir.
4. Ø-bo'shto'plamyopiqto'plamdir.

1)-2) xossalarniisbotlaylik

F_λ- `yopiqto'plamlaroilasining $\{F_\lambda\}$ sistemasiniqaraylik$C_x F_\lambda=$ $X\backslash F_\lambda$ tuldiruvchito'plamharbirλuchunochiqto'plambo'lganligidan $\{G_\lambda=C_xF_\lambda\}$ – ochiqto'plamlarsistemasinitashqiletadi.

$$C_xG_\lambda=F_\lambda\Rightarrow F=\bigcap_\lambda F_\lambda=\bigcap_\lambda C_xG_\lambda=C_x(\underset{\lambda}{U}G_\lambda)$$

Ko'ramizkiFyopiqto'plamdir, chunki$\underset{\lambda}{U}G_\lambda$-ochiqto'plambo'lib, Funingto'ldiruvchisidir.

Ikkinchixossaniisbotlashuchun$\lambda=1,2$holniqaraylik $\{F_1,F_2\}$- yopiqto'plamlarsistemasi

$G_\lambda=C_xF_\lambda=X\backslash F_\lambda$to'ldiruvchini$\lambda=1$ va$\lambda=2$ qiymatlardaochiqto'plambo'lishiravshan.

$F=\overset{2}{\underset{\lambda=1}{U}}C_xG_\lambda-C_x(\bigcap_{\lambda=s}^{2}G_\lambda);\ G_1\cap G_2=(X\backslash F_1)\cap(X\backslash F_2)\Rightarrow$ikkitaochiq to’plamlarningkesishmasisifatidaochiqto’plam (2-aksiomaga binoan), FesaG$_1 \cap$ G$_2$ ning to’ldiruvchisisifatidayopiq to’plamdir. Uchinchi vaturtinchixossalarningisbotio’quvchiga tavsiyaetiladi

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. To`plamlarningqandayoilasitopologiyatashkiletadi?
2. Topologikfazolargamisollarkeltiring.
3. Diskrettoplogiyagamisollarkeltiring.
4. Trivial toplogiyagamisollarkeltiring.
5. Toplogikfazodaochiqto`plam deb nimagaaytiladi?
6. Toplogikfazodayopiqto`plam deb nimagaaytiladi?

Glossariy

Topologik fazo- X ning qism to’plamlar oilasi $\tau = \{G_\alpha\}$ dan quyidagi shartlarni bajarilsin:

1) τ oilaga tegishli to’plamlar ixtiyoriy sistemasining birlashmasi τ ga tegishli bo’lsin

2) τ oilaga tegishli har qanday ikkita to’plamning umumiy qismi (kesishmasi) τ ga tegishli bo’lsin.

3) Ø bo’sh to’plam τ ga tegishli bo’lsin

4) X to’plam τ ga tegishli bo’lsin.

U holda τ oilani X dagi topologik struktura deyiladi va (X, τ) juftlikka topologik fazo deyiladi.

To`plamlar oilasi - Biror X to’plamning qism to’plamlaridan iborat $\tau = \{G_\alpha\}$ to’plam, to’plamlar oilasi deyiladi.

2.2.TO’PLAMNING ICHKI, CHEGARAVIY TASHQI VA URINISH NUQTALARI

Reja

1.Atrof tushuchasi.

2.Ichki nuqta.

3.Urinish nuqta.

4.Chegaraviy nuqta.

Tayanchiboralar:nuqtaningatrofi, ichki nuqta, chegara nuqta,urinish

nuqta.

(X, τ)-topologik fazo va a$\in X$ biror nuqta.

Ta’rif. Agar U ochiq to’plami bo’lib, A va a$\in U$ bo’lsa, U ni a nuqtaning atrofi deyiladi. X fazoda A to’plamni olaylik.

Ta’rif: a nuqtaning U atrofi mavjud bo’lib, a$\in U \subset F$ munosabat o’rinli bo’lsa, a ni F to’plamning ichki nuqtasi deyiladi. F to’plamning barcha ichki nuqtalar to’plami int F orqali belgilanadi.

Ta’rif: a nuqtaning U atrofi mavjud bo’lib, shu atrofda F to’plamga tegishli nuqtalar mavjud bo’lmasa, u holda a ni F to’plamning tashqi nuqtasi deyiladi va ext F orqali belgilanadi.

A F to’plam uchun tashqi nuqta bo’lsa, X \F uchun ichki nuqta bo’ladi.

Ta’rif: Agar a € X nuqtaning har qanday U atrofida F ga va X\F ga tegishli nuqtalar mavjud bo’lsa u holda *a* ni F to’plamning chegara nuqtasi deyiladi.

F to’plamning barcha chegara nuqtalar to’plamiga F ning chegarasi deyiladi va ∂F belgilanadi. To’plamining ichki va tashqi va chegara nuqtalari tarifidan xar qanday F to’plam uchun X fazo Int F, ext F, va ∂F dan iborat 3ta to’plamga ajraladi. Bu to’plamlar juft- jufti bilan umumiy nuktalarga ega bo’lmaydi, yani

$\operatorname{int} f \bigcap extf = extF \bigcap \partial h = \operatorname{int} f \bigcap \partial h = 0\,(1.5)$

Shu bilan birga $\operatorname{int} FUext\, FU \bigcup \partial F = X$ (1.6)

Ko’ramizki, $\operatorname{int} F = extC_x F,\ extF = \operatorname{int} C_x F,\ extF = \operatorname{int} C_x F(1,7).$

$\operatorname{int} F \subset F,\ extF \subset C_x F$ (1.8)

Teorema. Har qanday F to’plam uchun int F - ochiq to’plamdir.

Isboti: a$\in \operatorname{int} F$ ixtiyoriy nuqtani olaylik. a nuqtaning shunday atrofi U_a ni aniqlash mumkinki $U_a \subset F$. Ochiq to’plam o’zini har qanday nuqtasini atrofi ekanligidan $\operatorname{int} F = \bigcup Ua$ va topologik fazoning 1- aksiomasiga ko’ra $a \in \operatorname{int} F$- ochiq to’plamdir.

Ushbu teorema va (1.7) munosibatdan quyidagi teorema kelib chiqadi:

Teorema:Har qanday F to’plam uchun ext F ochiq to’plamdir.

teorem:F to’plam ochiq bo’lishi uchun u o’zining ichkarisi int F bilan ustma-ust tushishi zarur va Yetarli.

<u>Zaruriyligi:</u> Ochiq to’plam shu to’plamga tegishli ixtiyoriy nuqtasining atrofi bo’lganligi uchun F $\subset$ int F(*)

(1.8) dan int F $\in$ F(**) •

(*) va (**)dan F=int F kelib chiqadi.

<u>Yetarliligi</u>: int F- ochiq to’plam bo’lgani uchun 3- teoremaga ko’ra
F –ochiq to’plamdir.

1-misol: X= R; F=]a,b[bo’lsin a,b –haqiqiy sonlar va a<b

int F =]a,b[bo’lib, $\partial F = \{a, b\}$

2-misol:X=R;F- hamma ratsional sonlar to’plami bo’lsin. ∂F –qanday to’plam?

Yechish: ∂F=X,chunki ixtiyoriy haqiqiy son uchun unga yaqinlashuvchi ratsional sonlar ketma-ketligi mavjud.

Ta'rif:F $\in$ X, x $\in$ X bo'lib, x nuqtaning ixtiyoriy atrofida F to'plamga tegishli nuqtalar mavjud bo'lsa, x nuqta F to'plamning urinishi nuqtasi deyiladi.F to'plamning hamma urinishi nuqtalari to'plami $\bar{F}$ bilan belgilanadi va F ning yopilmasi deyiladi.

Ta'rifdan: $\bar{F}$ = int F$\bigcup$. $\partial F = C_x(extF)$ (1.9)

Ko'ramizki F to'plamning yopilmasi to'plamning ichki va chegaraviy nuqtalaridan iborat bo'lib, tashqi qism uchun to'ldiruvchi to'plamdir. 4- teoremaga ko'ra F – ochiq to'plam bo'lib, uning yopilmasi F – yopiq to'plamdir.F to'plamning har qanday nuqtasi uning yopilmasi $\bar{F}$ ga tegishliligidan F $\in$ $\bar{F}$ (1.10)
munosabat o'rinlidir.

To'plamning qoplamasi haqidagi teoremalar

Teorema:F yopiq to'plam bo'lish uchun u o'zining qoplamasi bilan ustma- ust tushishi zarur va Yetarlidir.

Isboti: Zaruriyligi.F yopiq to'plam bo'lsin.

F=$\bar{F}$ bo'lishini ko'rsatamiz.C_xF – ochiq bo'lgani uchun 5 – teoremaga va (1.7) tenglikka asoslansak,

C_xF = intC_xF= ext F (1.11).

(1.9), (1.11) va 2-§dan (1.2) bo'yicha F=$\bar{F}$ kelib chiqadi.

Yetarliligi: Har qanday to'plam uchun uning qoplamasi yopiq to'plam bo'lishidan kelib chiqadi.

Natija: To'plamning ikki karrali qoplamasi uning bir karrali qoplamasi bilan ustma – ust tushadi.

$(\bar{\bar{F}}) = \bar{F}$ (1.12).

7-Teorema. Agar $A\ F$ yopiq to'plamga qism to'plam bo'lsa, u xolda $\bar{A} \subset F$

Isbot: $A \subset F$ => $\bar{A} \subset \bar{F}$. 6-teoremadan $\bar{F}$ =F Shuning uchun $\bar{A} \subset F$.

Natija F to'plamining qoplamasi $\bar{F}$,F ni o'z ichiga oluvchi barcha yopiq to'plamlar kesishmasidan iboratdir.

8- Teorema: Har qanday F nuqtaning chegarasi ∂F yopiqdir.

Isbot: 4 –§ da keltirilgan (1.5) va (1.6) tengliklardan

∂F intF U ext F larning X fazoga to'ldiruvchi to'plam ekanligi kelib chiqadi.3 va 4 teoremalar bo'yicha int FUextF - ochiq to'plam. Ma'lumki, ∂F = C_x (intFUextF) =>> ∂F – yopiq.

9-Teorema:Ikki to'plam birlashmasining qoplamasi shu to'p-lamlar qoplamalarining birlashmasiga teng, ya'ni $\overline{A\bigcup B}=\bar{A}\bigcup\bar{B}$ (1.13)

Isbot: (1.5) tenglikka ko'ra (1.13)ni qo'yidagicha ifodalash mumkin. $C_x(\overline{A\bigcup B})=C_x(\bar{A}\bigcup\bar{B})$ (1.14) => (1,8) asosida $C_x(\overline{A\bigcup B})=(C_x\bar{A})\cap(C_x\bar{B})$ (1.15) ga (1.9) tenglikni qo'llab, ext(AUB)= ext A$\cap$extB (1.16) tenglikni hosil qilamiz. Ushbu (1.16) tenglik (1.13)ga teng kuchli bo'lib,teoremani isbotlash uchun (1.16) tenglikni isbotlash Yetarlidir. a $\in$ ext (AUB) bo'lsa a nuqtaning U atrofi mavjud bo'lishi mumkinki U$\bigcap$(AUB)= ϕ => U$\bigcap$A= ϕ va U$\bigcap$B=ϕ $\Rightarrow$a A.

va B to'plamlariga nisbatan tashqi nuqtadir.

Ext(AUB) $\subset$ $extA\bigcap\ extB$ (1.17),a $\in$ extA$\bigcap$ extB bo'lsin. U holda a nuqtaning U va V atroflari mavjud bo'lib, U$\bigcap$A=ϕ ,V$\bigcap$B=ϕ ,W=U$\bigcap$B to'plam ham a nuqtaning atrofi bo'lib, $W\bigcap A=\varnothing$ $W\bigcap B=\varnothing$ va W$\bigcap$(AUB)$\neq$ ϕ =>a $\in$ ext(AUB)=>ext A$\bigcap$ext B $\subset$ ext (AUB) (1.18. (1.17) va (1.18) tengliklardan (1.16) kelib chiqadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Topologikfazodanuqtaningatrofinikeltiring.
2. Topologikfazodato`plamningtashqinuqtasi deb qandaynuqtagaaytiladi.
3. Qanday nuqta toplogikfazodato`plamningchegaranuqtasideyiladi?
4. Toplogikfazodato`planningbarchatashqinuqtalarto`plamiqandayto`plambo`ladi?
5. ToplogikfazodaTo`plamningichi deb qandayto`plamgaaytiladi?
6. Toplogikfazodachegaraviyvaurinishnuqtalarto`plamlarigamisollarkeltiring.
7. Toplogikfazodato`plamningzichligigamisollarkeltiring.

Glossariy

Nuqtaningatrofi – biror A to'plamningixtiyoriy a nuqtasiuchun∀a$\in U$ munosabatbajariladiganbiror U ochiqto'plam.

Ichki nuqta - a nuqtaning U atrofi mavjud bo'lib, a$\in U\subset F$ munosabat o'rinlibo'ladiganixtiyoriy nuqta F to'plamningichkinuqtasideyiladi.

Chegara nuqta - Agar a € X nuqtaning har qanday U atrofida F ga va X\F ga tegishli nuqtalar mavjud bo'lsa u holda *a* ni F to'plamning chegara nuqtasi deyiladi.

Urinish nuqta - F $\in$ X, x $\in$ X bo'lib, *x* nuqtaning ixtiyoriy atrofida F to'plamga tegishli nuqtalar mavjud bo'lsa, x nuqta F to'plamning urinishi nuqtasi deyiladi.

3. TOPOLOGIK FAZOLARNI QURISH:KO`PAYTMA, QISM FAZOLAR VA FAKTOR FAZOLAR.

Reja

1.Topologik fazolarniqurish
2.Qism fazolar.
3. Qismfazogamisollar.
3.Faktor fazolar.

Tayanchiboralar:Topologikfazo, qismfazo, faktorfazo.

Bizga(X, τ) topologikfazoberilsin.

1-teorema. (X, τ) topologikfazo$A$qismto'plaminingshutopologikfazodagibarchaochiqto'plamlarbilankesishmalaridantuzilgan$\tau_A=\{V_\alpha \cap A;\ V_\alpha \in \tau\}$ to'plamtopologikstrukturaaksiomalariniqanoatlantiradi.

Isbot. 1-aksiomaning bajarilishiniko'rsatamiz. $\varnothing \in \tau$ va$A \in \tau$ to'plamlarushun $\varnothing=\varnothing \cap A \in \tau_AvaA=X \cap A \in \tau_A$bo'ladi.

2-aksiomani tekshiramiz. $\tau_A$to'plamgategishli$\{V_\alpha\}_{\alpha \in I}$ to'plamlarniqaraylik. Har bir$V_\alpha$to'plam$X$to'plamdagibiror$W_\alpha$ochiqto'plambilan$A$to'plamningkesishmasidaniboratdir: $V_\alpha = W_\alpha \cap A$.

$V_\alpha$to'plamlarning $\bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$ birlashmasi$\tau_A$to'plamgategishliekanliginiko'rsatishuchun, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha$ to'plamnibirnechaochiqto'plamlarning$A$to'plambilankesishmasishaklidaifodalashimizkerak. Haqiqatan, $\bigcup\limits_{\alpha \in I} V_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha \in I} (W_\alpha \cap A) = \left(\bigcup\limits_{\alpha \in I} W_\alpha \right) \cap A$, buyerda $\bigcup\limits_{\alpha \in I} W_\alpha$ to'plambirnechtaochiqto'plamlarbirlashmasisifatidaochiqto'plamdir.

3-aksiomani tekshiramiz. Bu aksiomaningikkitato‘plamushunbajarilishiniko‘rsatsakyetarli. V_1vaV_2ikkito‘plam$\tau_A$to‘plamdanolinganbo‘lsin. Ularning$V_1 \cap V_2$kesishmasi$\tau_A$to‘plamgategishliekanliginiko‘rsatishuchun, $V_1 \cap V_2$to‘plamni$A$to‘plambilan$X$fazodagiochiqto‘plamlarningkesishmasishaklidaifodalaymiz. Faraz qilaylik$V_1=W_1 \cap A$ va$V_2=W_2 \cap A$bo‘lib, W_1va$W_2$to‘plamlarochiqto‘plamlarbo‘lsin. U vaqtda$V_1 \cap V_2=(W_1 \cap A) \cap (W_2 \cap A)=(W_1 \cap W_2) \cap A$. Bu yerda$W_1 \cap W_2$to‘plamikkitaochiqto‘plamningkesishmasisifatidaochiqto‘plambo‘ladi.

Shundayqilib, biz ko‘rsatdikki$\tau_A$to‘plam$A$ to‘plamdatopologiyabo‘ladi.

$\tau_A$topologiyaberilgan τ topologiyadanyaratilganbo‘lib, uni**yaratilgantopologiya** deb ataladi.

Yaratilgantopologiyabilanta’minlangan$A$ to‘plamni (X, τ) topologikfazoning**topologikqismfazosi**deb ataladiva (A, τ_A) bilanbelgilanadi.

Misollar. 1. Ratsionalto‘g‘richiziqtopologiyasibarcharatsionalbutunsonlarto‘plami$\boldsymbol{Z}$ da diskrettopologiyaniyaratadi. Chunki$\left(n-\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}\right)$ ochiqintervallarbilan$\boldsymbol{Z}$to‘plamningkesishmalari $\{n\}$ to‘plamlarbo‘ladi.

2. E_2evklidtekisliktopologiyasi, elementlarishutekislikkategishli γ aylanalarbilantekislikdagiochiqto‘plamlarkesishmalaridaniborat$\boldsymbol{T}$topologiyaniyaratadi.

$\tau_A$to‘plamningelementlaribo‘lganto‘plamlarni$A$to‘plamdagi**ochiqto‘plamlar** deb ataladi. Demak, $A$to‘plamdagiochiqto‘plamlar, shu$A$to‘plambilan$X$ to‘plamdagiochiqto‘plamlarkesishmalaridaniboratto‘plamlarbo‘ladi.

Agar $A$to‘plamgategishli$G$to‘plamning$A \backslash G$to‘ldiruvchisi$A$to‘plamdaochiqto‘plambo‘lsa, u vaqtda$G$to‘plamni$A$to‘plamda**yopiqto‘plam** deb ataladi.

2-teorema. (A, τ_A) qismfazodagi$G$to‘plamyopiqbo‘ladifaqatvafaqatshuvaqtdaki, agarda u $A$to‘plambilan (X, τ) fazodagiyopiqto‘plamningkesishmasibo‘lsa.

Isbot. Faraz qilaylik$G=A\cap H$bo‘lib, $H$to‘plam (X, τ) fazodagiyopiqto‘plambo‘lsin. U vaqtda$A\backslash G=A\cap(X\backslash H)$ to‘plam (A, τ_A) qismfazodaochiqto‘plambo‘ladi, chunki$X\backslash H$to‘plam (X, τ) fazodagiochiqto‘plamdir. Demak, $G$to‘plam (A, τ_A) qismfazodagiyopiqto‘plambo‘ladi.

Aksincha, $G$to‘plam (A, τ_A) qismfazodagiyopiqto‘plambo‘lsin. U vaqtdauningto‘ldiruvchisibo‘lgan$F=A\backslash G$to‘plam (A, τ_A) qismfazodaochiqto‘plambo‘ladi. Shuninguchun τ topologiyadashunday$F_o$ochiqto‘plammavjudki$F=A\cap F_o$bo‘ladi. Lekin, u vaqtda$G=A\cap G_o$bo‘lib, buyerdagi$G_o=X\backslash F_o$to‘plam (X, τ) fazodagiyopiqto‘plambo‘ladi.

3-teorema. Agar $B=\{B_\alpha\}$ to‘plam (X, τ) topologikfazoningtopologikbazasibo‘lsa, u vaqtda $B'=\{A\cap B_\alpha\}$ to‘plam (A, τ_A) qismfazoningtopologikbazasibo‘ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Topologikfazoningqismfazosinikeltiring.
2. Topologikfazodato`plamningtashqinuqtasi deb qandaynuqtagaaytiladi.
3. Qanday nuqta toplogikfazodato`plamningchegaranuqtasideyiladi?
4. Toplogikfazodato`planningbarchatashqinuqtalarto`plamiqandayto`plambo`ladi?
5. ToplogikfazodaTo`plamningichi deb qandayto`plamgaaytiladi?
6. Toplogikfazodachegaraviyvaurinishnuqtalarto`plamlarigamisollarkeltiring.
7. Toplogikfazodato`plamningzichligigamisollarkeltiring.

Glossariy

yopiqto‘plam- Agar $A$to‘plamgategishli$G$to‘plamning$A\backslash G$to‘ldiruvchisi$A$to‘plamdaochiqto‘plambo‘lsa.

Ochiqto`plamlar -$\tau_A$to‘plamningelementlaribo‘lganto‘plamlardir

Chegara nuqta - Agar a € X nuqtaning har qanday U atrofida F ga va X\F ga tegishli nuqtalar mavjud bo'lsa u holda *a* ni F to'plamning chegara nuqtasi deyiladi.

Urinish nuqta - F $\in$ X, x $\in$ X bo'lib, *x* nuqtaning ixtiyoriy atrofida F to'plamga tegishli nuqtalar mavjud bo'lsa, x nuqta F to'plamning urinishi nuqtasi deyiladi.

4. TOPOLOGIYA BAZASI. AJRALUVCHAN (XAUSDORF) TOPOLOGIK FAZO.

Reja

1.Topologiyabazasi
2. T_0 fazo.
3.T_1fazo.
4.T_2fazo.

Tayanchiboralar:Topologiyabazasi,T_0fazo,T_1fazo, T_2fazo.Topologikbaza.

Bizga (X, τ) topologikfazoberilsin. Elementlarishufazoning$A_\beta$ochiqto'plamlaridaniboratto'plamni$A=\{A_\beta\}$ bilanbelgilaymiz.

Ta'rif. Agar (X, τ) topologikfazoningistalganochiqto'plamini$A$to'plamgaqarashlibirnechaochiqto'plamlarningbirlashmasisifatidaifodalashmumkinbo'lsa, u vaqtda A to'plamga (X, τ) topologikfazoning**topologikbazasi** deb ataladi.

Misollar. 1. Elementlaribirnuqtalito'plamlarbo'lganto'plamdiskrettopologiyabazasibo'ladi.

2. Har qanday τ topologiyabazagaega. Chunki$A=\tau$ bo'lishi ham mumkin.

3. Barcha chekliochiqintervallarto'plami$R$ topologikfazoningbazasibo'ladi.

Shuni ham aytibo'tishkerakki, elementlariixtiyoriyochiqto'plamlarbo'lganto'plam har doim ham topologikfazoningbazasibo'lavermaydi.

Teorema. Elementlariochiqto'plamlarbo'lgan$A$to'plam (X, τ) topologikfazoningbazasibo'lishiuchun$X$to'plamningistalgan$x$nuqtasivabunuqtaningixtiyoriy$B_x$atrofiuchun$A$to'plamdashunday$A_x$to'plammavjudbo'lishizarurvayetarlikи$x\in$

$A_x$va $A_x \subset B_x$ bo‘lsin.

Isbot.Zarurligi. Faraz qilaylik$x$ nuqta $X$to‘plamningixtiyoriynuqtasi, $B_x$to‘plamuningixtiyoriyatrofiva$A$to‘plamtopologikbazabo‘lsin. Ma’lumki$B_x \in \tau$, shuninguchun$B_x$to‘plam$A$bazadagibirnechato‘plamlabningbirlashmasibo‘ladi. $x \in B_x$bo‘lganiuchun, bubirlashmadashunday$A_x$to‘plamtopiladiki, x nuqta shuto‘plamgategishlibo‘ladi. Demak, $x \in A_x$, $A_x \in B_x$.

Yetarliligi. Faraz qilaylik$B_x$to‘plam τ topologiyadagiixtiyoriyochiqto‘plambo‘lsin. Ma’lumki$B_x$to‘plamdagiixtiyoriy$x$ nuqta uchun$B_x$to‘plamatrofbo‘ladi. Shu sababli$A$ to‘plamdashunday$A_x$to‘plammavjudki$x \in A_x$va $A_x \in B_x$bo‘ladi. Bu yerdanesa$B_x$to‘plam$A$to‘plamdagibirnechato‘plamningbirlashmasibo‘lishligikelibchiqadi.

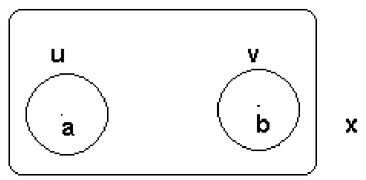
Ta’rif. Agar topologik fazoning har qanday ikki nuqtasi uchun o’zaro kesishmaydigan atroflar mavjud bo’lsa, u holda ushbu fazoning ajraluvchan yoki xausdorf fazosi deyiladi.

Ta’rifni qo’yidagicha talqin qilish mumkin: (X,τ)-Xausdorf topologik fazo bo’lsa, ixtiyoriy $a,b \in X$, $a \neq b$ nuqtalar uchun $U,V \in \tau$ to’plamlar mavjud bo’lib, $a \in U$, $b \in V$ va $U \cap V = \varnothing$ bajariladi.

U va V atroflar a va b nuqtalarni bir-biridan ajratadi.

Ta’rifdan natijalar:

1-Teorema. (X,τ) Xausdorf topologik fazoda har biriga bittadan nuqta qarashli bo’lgan qism to’plamlar yopiqdir.



1-chizma

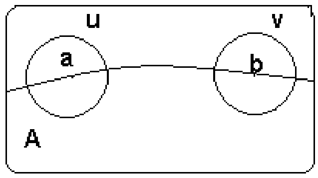
Isbot. $x_0 \in X$ bo’lsin. $\{x_0\}$-ning yopiqligini ko’rsatish uchun $X \setminus \{x_0\}$ to’ldiruvchi to’plamning ochiqligini tekshirish Yetarlidir. Haqiqatda ham, har qanday $y \in X \setminus \{x_0\}$ nuqta V atrofga ega bo’lib, $x_0 \overline{\in} V$, chunki X– ajraluvchan fazo. Ko’ramizki, $y \in X \setminus \{x_0\}$ ga ichki nuqta $y \in V \subset X \setminus \{x_0\} \Rightarrow X - \{x_0\}$ - ochiq to’plam. U holda $\{x_0\}$-yopiq bo’ladi.

Natija. Xausdorf fazosida chekli to’plamlar yopiqdir.

2-Teorema. Xausdorf fazosi X ning har qanday A qism fazosi ajraluvchan fazodir.

Isbot. Agar $a,b \in A$ ikkita turli nuqtalar bo’lib, $U,V \subset X -$ularning kesishmaydigan atroflari bo’lsa, $U \cap A$ va $V \cap A$ ushbu nuqtalarning A qism fazodagi kesishmaydigan atroflaridir.

1-misol. Bittadan ortiq nuqtaga ega bo’lgan antidiskret fazo ajralmaydi.



2-misol. Diskret fazo ajraluvchanlik xossaga ega.

3-misol. Har qanday metrik fazolar ajraluvchan (5-§).

Ajraluvchan fazoda elementlar sonining ikkitadan kam bo’lmasligi talab etiladi.

Xausdorf fazosi aksiomalarini keltiraylik:

AA_0: Fazoda (T_0) turlicha nuqtalarining har bir jufti uchun, nuqtalardan biri ikkinchisini o’z ichiga olmaydigan atrofga egadir.

AA_1: Fazoda ikkita turlicha nuqtalarning har bittasi ikkinchisini o’z ichiga olmaydigan atrofga ega (T_1-fazo).

AA_2: Fazoda har qanday ikkita turlicha nuqtalar uchun kesishmaydigan atroflar mavjuddir (T_2-fazo).

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Qandayfazoajraluvchanfazodeyiladi?
2. QandayfazoXausdorffazosideyiladi?
3. Xausdorffazosiuchunteoremaniaytibbering.
4. T_0fazoningta`rifinikeltiring.
5. T_1fazoningta`rifinikeltiring.
6. Qanday fazoda har qanday ikkita turlicha nuqtalar uchun kesishmaydigan atroflar mavjuddir?
7. Topologiyabazasita`rifinikeltiring.

Glossariy

T_0 fazo -Fazoda turlicha nuqtalarining har bir jufti uchun, nuqtalardan biri ikkinchisini o’z ichiga olmaydigan atrofga ega.

T_1 fazo - Fazoda ikkita turlicha nuqtalarning har bittasi ikkinchisini o’z ichiga olmaydigan atrofga ega.

T_2 fazo - Fazoda har qanday ikkita turlicha nuqtalar uchun kesishmaydigan atroflar mavjud.

5.BOG’LANISHLILIK VA CHIZIQLI BOG`LANISHLILIK. CHIZIQLI BOG`LANISHLI TO’PLAM VA UNING XOSSALARI HAQIDAGI TEOREMALAR

Reja

1.Bog`lanmagan fazo.

2.Bog`lanishli fazo.

3.Bog`lanishlilik komponentasi.

Tayanchiboralar:bog`lanishlito`plam, bog`lanishsizto`plam, bog`lanishlilikkomponentasi.

(X,τ)-topologik fazo, $A\subset X$-qism to’plam bo’lsin. Ikkita G_1 va G_2 ochiq qism to’plamlar mavjud bo’lib:

1) $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$

2) $(A\cap G_1)\cap(A\cap G_2)=\varnothing$

3) $A\cap G_1\neq\varnothing, A\cap G_2\neq\varnothing$

shartlar bajarilsa, A to’plam bog’lanmagan to’plam deyiladi. Ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi G_1 va G_2 ochiq to’plamlar mavjud bo’lmasa, A to’plamni bog’lanishli to’plam deyiladi.

A=X holni qaraylik. Bu holda $X\cap G_1=G_1, X\cap G_2=G_2$ bo’lganligi uchun 1)-3) shartlarni qo’yidagicha yozish mumkin:

1') $X=G_1\cup G_2$

2') $G_1\cap G_2=\varnothing$

3') $G_1\neq\varnothing, G_2\neq\varnothing$

xulosa shuki,

G_1 va G_2 ochiq qism to’plamlar mavjud bo’lib, ular 1'), 2'), 3') shartlarni qanoatlantirsa, X ni bog’lanmagan topologik fazo deb ataladi. Aks holda, X ni bog’lanishli topologik fazo deb ataymiz.

Diskret topologik fazo bog’lanmagan fazoga misol bo’la oladi. X da bittadan ortiq nuqta mavjuddir. Har qanday $U\neq X, U\neq\varnothing$ to’plamni olsak, $V=X\setminus U$ uning to’ldiruvchisi bo’lib, shu bilan X bo’sh bo’lmagan ikkita ochiq to’plamlarga ajratiladi.

Agar bog’lanmagan X fazo umumiy qismga ega bo’lmagan ikkita U va V bo’sh bo’lmagan ochiq to’plamlarga ajratilsa, u holda $U=CV$ va $V=CU$.

Shu asosda bog’lanishli to’plamga qo’yidagicha ta’rif berish mumkin:

Ta’rif. Agar X fazo yoki bo’sh to’plam bir vaqtda ochiq va yopiq to’plam bo’lsa, u holda X fazoni bog’lanishli deyiladi.

1-Teorema. Topologik fazo bog’lanishli bo’lishi uchun uning har qanday ikki nuqtasi biror bog’lanishli to’plamga tegishli bo’lishi zarur va Yetarli.

Isbot. Zaruriyligi bog’lanishlilik ta’rifiga ko’ra o’z-o’zidan tushunarli.

Yetarliligi X-topologik fazo bo'lib, ixtiyoriy ikki nuqtasi birorta bog'lanishli to'plamda yotsin. X ni bog'lanmagan bo'lsin deb faraz qilaylik, ya'ni $G_1 \cup G_2, G_1, G_2$- ochiq to'plamlar, $G_1 \neq \varnothing, G_2 \neq \varnothing, G_1 \cap G_2 = \varnothing$ $a \in G_1, b \in G_2$ nuqtalarni olaylik. $K \subset X$ a va b nuqtalarni o'z ichiga oluvchi bog'lanishli to'plam bo'lsin. U holda G_1 va $G_2 K$ ning qoplamasi bo'lib, $G_1 \cap K \neq \varnothing, G_2 \cap K \neq \varnothing,$ lekin $G_1 \cap G_2 \cap K = \varnothing.$ Bunday munosabada K bog'lanmagan bo'ladi. Qarama-qarshilik kelib chiqdi. Teorema to'la isbot qilindi.

2-Teorema. Bog'lanishli to'plamning qoplamasi ham bog'lanishli to'plamdir.

Isbot (X,τ)-topologik fazo, $A \subset X$ bog'lanishli qism to'plam bo'lsin. Agar A ning qoplamasi $\bar{A}$ bog'lanmagan to'plam bo'lsa, G_1 va G_2 ochiq qism to'palmlar mavjud bo'lib, qo'yidagi

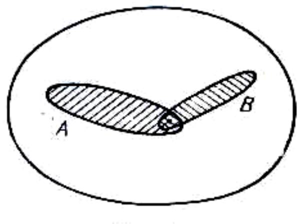
$\bar{A} = (G_1 \cap \bar{A}) \cup (G_2 \cap \bar{A}),\ (G_1 \cap \bar{A}) \cap (G_2 \cap \bar{A}) = \varnothing,\ G_1 \cap \bar{A} \neq \varnothing, G_2 \cap \bar{A} \neq \varnothing$ bo'lganligi uchun

$$(G_1 \cap \bar{A}) \cap A = G_1 \cap \bar{A}, (G_2 \cap \bar{A}) \cap A = G_2 \cap A,\ (G_1 \cap A) \cup (G_2 \cap A) = A$$

tengliklar o'rinlidir $G_1 \cap \bar{A} \neq \varnothing,\ G_2 \cap \bar{A} \neq \varnothing,\ G_1 \cap G_2 \cap \bar{A} = \varnothing$.

A bog'lanishli bo'lgani uchun A ning G_1 va G_2 larning biri bilan kesishmasi bo'sh to'plam. $G_1 \cap A = \varnothing$ bo'lsin. Bundan A ni $X \setminus G_1$ yopiq to'plamga tengli bo'lishi kelib chiqadi, ya'ni $A \in X \setminus G_1$. U holda A ning qoplamasi $\bar{A}$ ham $X \setminus G_1$ ga qism bo'ladi. Ko'ramizki, $\bar{A} \cap G_1 = \varnothing$. Bu qarama-qarshilikdan A ning bog'lanishli ekanligi kelib chiqadi.

3-Teorema. Kamida bitta umumiy nuqtaga ega bo'lgan ikkita bog'lanishli to'plamlarning yig'indisi bog'lanishli to'plamdir (3-shakl).



3-shakl.

Isbot. A, B X topologik fazoning $A \cap B \neq \varnothing$ shartni qanoatlantiruvchi bog'lanishli qism to'plamlari bo'lsin, ya'ni $C \in G_1 \cup G_2$ bunda G_1 va $G_2 C$ to'plam bilan umumiy nuqtalarga ega bo'lgan ochiq to'plamlar bo'lib, G_1, G_2 va C larning kesishmasi $\varnothing$ to'plam: $G_1 \cap C \neq \varnothing, G_2 \cap C \neq \varnothing, G_1 \cap G_2 \cap C = \varnothing$. U holda A va B larning bog'lanishliligidan A va B larning har biri G_1 va G_2 lardan birining ichida to'laligicha yotishi va ikkinchisi bilan kesishmasligi kelib chiqadi. $A \in G_1$ bo'lsin. $D \in G_1$ desak, u holda $C \subset G_2 = \varnothing,\ B \subset G_2$ bo'lsa $A \cap B \subset G_1 \cap G_2 \cap C = \varnothing$. Har ikki farazimiz zidlikka uchradi. Teorema isbotlandi.

Natija: Teorema talabi bog'lanishli to'plamlarning ixtiyoriy oilasi uchun o'rinli bo'lib, ular kesishmasining bo'sh to'plam ($\varnothing$) dan farqli bo'lishligi talab qilinadi.

4-Teorema. Umumiy nuqtaga ega bo'lgan bog'lanishli to'plamlar oilasining birlashmasi bog'lanishidir.

Isboti. X dagi bog'lanishli to'plamlarning ixtiyoriy oilasi $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ bo'lsin $x_0 \in \bigcap\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ -umumiy nuqta. Bog'lanishlilik kriteriyasi bo'yicha $\bigcup\limits_{\alpha\in I} A_\alpha$ ning bog'lanishli bo'lishini isbotlash uchun uning ikkita a va b nuqtalari uchun $\bigcup\limits_{\alpha\in I} \bar{A}_\alpha$ to'plamning ushbu nuqtalarni o'z ichiga oluvchi bog'lanishli qism to'palmini ko'rsatish kifoya. Masalan, $a \in A_\alpha$ va $b \in A_\beta,\ \alpha,\beta \in I$ bo'lsa, a va b lar $A_\alpha \cup A_\beta$ to'plamga tegishlidir. $A_\alpha \cup A_\beta$ 18-teoremaga ko'ra bog'lanishli to'plam. Teorema isbotlandi.

Har qanday antidiskret fazo, haqiqiy to'g'ri chiziq R^1, (0,1)-interval bog'lanshili to'plamlardir. N-natural sonlar to'plami, Q-ratsional sonlar to'plami va har qanday chekli to'plamlar bog'lanishsiz to'plamlardir.

Agar $A \subset R$ to'plam a va b nuqtalarni o'z ichiga olib a va b nuqtalar oralig'idagi biror c nuqta ($a<c<b$) A ga tegishli bo'lmasa, u holda A bog'lanmagan bo'ladi. Haqiqatan ham

$G_1 = (-\infty, c),\ G_2 = (c, \infty)\ G_1 \cap G_2 = \varnothing,\ G_1 \cap A \neq \varnothing,\ G_2 \cap A \neq \varnothing, G_1 \cap G_2 \cap A = \varnothing$. To'g'ri chiziq $(-\infty,\infty)$ interval orqali tasvirlanadi. a X topologik fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. 18-teoremaga ko'ra a ni o'z ichiga oluvchi bog'lanishli qism to'plamlar orasida eng kattasi mavjud. Bu to'plamga a ni o'z ichiga oluvchi har qanday qism to'plam tegishlidir.

Ta'rif.a ni o'z ichiga oluvchi eng katta bog'lanishli qism to'plamga a nuqtani Xdagi komponentasi deyiladi.

Agar н_a va $\text{н}_\text{в}$$a$ va b nuqtalarning komponentalari bo'lib, $H_a \cap H_в \neq \varnothing$ bo'lsa, u holda 18-teorema va komponenta ta'rifidan $H_a \cup H_в = H_a = H_в$.

Xulosa qo'yidagicha: Turli ikkita nuqtalarning komponentalari yoki kesishmaydi yoki ustma-ust tushadi.

Bundan har qanday X topologik fazo o'z nuqtalarining juft-jufti bilan kesishmaydigan komponentalari yig'indisiga ajralishi kelib chiqadi. X fazodagi nuqtalarning bog'lanishli komponentalarini X ning komponentalari deyiladi. Qo'yidagi teoremani mustaqil isbotlashga qoldiriladi.

5-Teorema. X fazo komponentalari yopiq to'plamlardir.

Ta'rif. X fazodagi bog'lanishli ochiq to'plamga soha deyiladi. Soha yopilmasga yopiq soha deyiladi.

Antidiskret fazo har qanday bog'lanishli to'plamdagi kabi bitta komponentaga (fazoning o'zi) ega. Diskret fazoda har biri bitta nuqtadan tashkil topgan qism to'plamlar alohida komponentalardir.

Q-ratsional sonlar to'plamida har bir nuqta alohida komponentani tashkil etadi (ochiq bo'lmagan komponentalar).

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

8. Topologiya bazasi qandayto`plamlargaaytiladi?
9. Xausdorf, regulyar, tixonov va normal fazolarga misollar keltiring.
10. Chiziqli bog'lanishli to'plam deb qandayto`plamgaaytiladi?
11. Chiziqli bog'lanishsiz to'plam deb qandayto`plamgaaytiladi?
12. Nuqtaningkomponentasi deb nimagaaytiladi?
13. Regulyar, tixonovfazolarigamisollarkeltiring.
14. Qandayfazobog`lanishlideyiladi?
15. Qandayfazobog`lanishsizdeyiladi?

Glossariy

Bog'lanishli to'plam. (X,τ)-topologik fazo, $A\subset X$-qism to'plam bo'lsin. Ikkita G_1 va G_2 ochiq qism to'plamlar mavjud bo'lib:

1) $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$
2) $(A\cap G_1)\cap(A\cap G_2)=\varnothing$
3) $A\cap G_1\neq\varnothing, A\cap G_2\neq\varnothing$

shartlar bajarilsa, A to'plam bog'lanmagan to'plam deyiladi. Ushbu shartlarni qanoatlantiruvchi G_1 va G_2 ochiq to'plamlar mavjud bo'lmasa, A to'plamni bog'lanishli to'plam deyiladi.

6.KOMPAKT TO'PLAMLAR VA TIXONOV TEOREMASI. TOPOLOGIK FAZOLARNING KOMPAKTIFIKATSIYASI.

Reja

1. To`plamning qoplamasi.
2. Kompakt to`plamlar.
3. Kompakt to`plamxossalari.

Tayanchiboralar:ochiqqobig`, chekliqoplama, kompaktto`plam.

(X,τ)-topologik fazo, $A\subset X$ qism to'plam va birorta $\{A_\alpha\}$-ochiq to'plamlar oilasi berilgan bo'lsin.

Birinchi oila uchun $\underset{\alpha}{U}\, A_\alpha\supset A$ munosabat bajarilsa, $\{A_\alpha\}$oila A to'plamning ***ochiq qobig'i*** deyiladi. Agar qobiq chekli sondagi to'plamlardan iborat bo'lsa, u chekli qobiq deyiladi.

Ta’rif. A to’plamning ixtiyoriy ochiq qobig’idan chekli qobiq ajratish mumkin bo’lsa, A to’plam kompakt to’plam deb ataladi.

A=X uchun kompakt fazo tushunchasi qo’llaniladi. $\{A_\alpha\}$ oila X uchun qobiq bo’lsa, unda $\underset{\alpha}{U}\ A_\alpha \supset X$ munosabat yoziladi.

1-Teorema. X-kompakt fazo, $A \subset X$ yopiq to’plam bo’lsa, A kompakt to’plamdir.

Isbot. $\sum=\{A_\alpha\}$-oila X da A to’plam uchun ochiq qobiq bo’lsin. A yopiq bo’lgani uchun X\A ochiq to’plam. $\{A_\alpha\}$ ga X\A ni qo’shib, X ning ochiq qobig’i $\sum'$ ni hosil qilamiz. $\sum'$ dan X fazoning $\sum''$ chekli qobig’ini tanlaymiz. $\sum''$ da X\A qatnashmasa, u holda $\sum''\sum$ ning chekli qismi bo’lib, A uchun qobiq bo’ladi. $X \setminus A \in \sum''$ bo’lsa, u holda $\sum''$ dan X\F ni chiqarib, A ni qobig’idan iborat bo’lgan $\sum$ ning qism sistemasini hosil qilamiz. A ning kompaktligi ta’rifdan kelib chiqadi.

2-Teorema. F X Xausdorf fazosining kompakt qism to’plami bo’lib, $a \overline{\in} F$ bo’lsin. U holda $F \subset G_1$ va $A \subset G_2$ kesishmaydigan ochiq to’plamlar mavjuddir.

Isbot. Har qanday $x \in F$ nuqta uchun kesishmaydigan $x \in \Omega_x(x)$ va $a \in \Omega_a(x)$ atroflar mavjud.

$\sum=\{\Omega_x\}$ F ning ochiq qobig’i. F kompakt bo’lgani uchun $\sum$ dan chekli sondagi $\Omega_{x_1}, \Omega_{x_2}, ..., \Omega_{x_k}$ qism qobiqni ajratish mumkin.

$G_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{k} \Omega_{x_i}, G_2 = \bigcap\limits_{i=1}^{k} \Omega_a(x_i)$ izlangan to’plamlardir.

3-Teorema. X-Xausdorf fazo, $A \subset X$ kompakt to’plam va $x \in X \setminus A$ bo’lsa, shunday ochiq kesishmaydigan G_1 va G_2 to’plamlar mavjudki, $A \in G_1,\ x \in G_2$ bo’ladi.

Isbot. A ga tegishli ixtiyoriy y nuqtani olsak, Xausdorf aksiomasiga ko’ra $x \in G_x,\ y \in G_y$ bo’ladi. $\{G_y : y \in A\}$ oila A to’plam uchun ochiq qobiq bo’ladi va A ning kompaktligidan bu oiladan A uchun chekli qobiq ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qobiqqa tegishli to’plamlar $G_{y_1}, G_{y_2}, ..., G_{y_m}$ bo’lsin. Bu ochiq to’plamlar bilan kesishmaydigan x nuqtaning atroflari mos ravishda $G_x(y_1), G_x(y_2), ..., G_x(y_m)$ to’plamlar bo’lsin. Agar $G_1 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} G_{y_i}, G_2 = \bigcup\limits_{i=1}^{m} G_x(y_i)$ bo’lsa, ravshanki $A \subset G_1,\ x \subset G_2$ va $G_1 \cap G_2 = \varnothing$ o’rinli.

4-Teorema. X-Xausdorf fazo, $A \in X$ -kompakt to’plam bo’lsa, A yopiq to’plamdir.

Isbot. A ning yopiq ekanligini ko’rsatish uchun X\$A$ ning ochiq ekanligini ko’rsatamiz. Agar $x \in X \setminus A$ bo’lsa, shunday ochiq G to’plam mavjudki, $x \in G \subset X \setminus A$ munosabat bajariladi. Demak x nuqta $X \setminus A$ uchun ichki nuqta va x ning ixtiyoriyligidan $X \setminus A$ ning ochiq to’plam ekanligini kelib chiqadi. U holda A yopiq bo’ladi.

5-Teorema. $X = R^n, A \subset X$ bo’lsa A ning kompakt to’plam bo’lishi uchun A ning yopiq va chegaralangan to’plam bo’lishi zarur va Yetarli.

Isbot. Zaruriyligi. Metrik fazoda to’plam birorta shar ichida yotsa, uni chegaralangan to’plam deyiladi. A kompakt to’plam bo’lsa, R^n ning Xausdorf fazo ekanligidan A ning yopiq to’plam ekanligi kelib chiqadi (24-teorema). Endi A ni chegaralanganligini ko’rsataylik. Buning uchun birorta $x \in A$ nuqtani olib, markazi shu nuqtada bo’lgan $\{B_n(x)\}$ sharlar oilasini qaraymiz ($n = 1, 2...$). Bu oila A uchun ochiq qobiq bo’ladi va A ning kompaktligidan bu oiladan chekli qobiq ajratish mumkin. Agar chekli qobiq $B_{n_1}(x), B_{n_2}(x), ..., B_{n_k}(x)$ sharlardan iborat bo’lsa, N bilan $\max\limits_{1 \le i \le k}\{n_i\}$ ni belgilasak, $B_N(x)$ markazi x nuqtada radiusi n bo’lgan ochiq shar bo’lib, $A \subset B_n(x) \Rightarrow A$ chegaralangan. Yetarliligini isbotlash o’quvchiga tavsiya etiladi. Kompakt to’plamga misollar keltiraylik.

1-misol. Har qanday antidiskret fazo kompakt.

2-misol. Har qanday chekli topologik fazo kompakt.

3-misol. Chekli ochiq to’plamlardan iborat har qanday fazo kompakt, son o’qi R^1 nokompaktdir.

4-misol. Cheksiz nuqtalarga ega diskret fazo nokompakt.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. To`plamningochiqqobig`i deb qandayto`plamgaaytiladi?
2. Qandayto`plamkompaktto`plamdeyiladi? Misollarkeltiring.
3. Qandayfazolar lokal kompakt fazolardeyiladi? Misollarkeltiring.
4. Yevklid fazolarida kompaktlik deb nimagaaytiladi?
5. Kompaktto`plamyopiqto`plambo`lishimumkinmi? Misollarkeltiring.
6. Har qandaycheklitoplogikfazokompaktbo`ladimi? Misollarkeltiring.
7. Yevklidvazosidato`plamqandayshartlarnibajarsa, doimkompaktto`plambo`ladi?

8-9.UZLUKSIZ AKSLANTIRISHLAR VA UNDAGI BOG`LANISHLILIK VA KOMPAKTLIK.

Reja

1.Akslantirish tushunchasi.

2.Uzluksiz akslantirish.

3.Uzluksiz akslantirishningxossalari.

Tayanchiboralar: akslantirish,akslantirishningobrazi, uzluksizakslantirsh, ochiqakslantirish.

X,Y ixtiyoriy to'plamlar bo'lib, X ning har bir elementiga Y ning bitta elementi mos qo'yilgan bo'lsa X ni Y ga akslantiruvchi moslik yoki akslantirish berilgan deyiladi va $f:X\to Y$ ko'rinishida yoziladi.

Agar $f:X\to Y$ akslantirish berilgan bo'lsa $x\in X$ uchun $y=f(x)$ element x ning aksi (obrazi) $y\in Y$ uchun $f^{-1}(y)$ $\{x\in X: f(x)=y\}$ y ning asli (proobrazi) deyiladi.

$A\subset X$ qism to'plam uchun uning aksi $f(A)=B\subset Y$ bo'lib B ning asli (proobrazi) $f^{-1}(B)$ qism to'plamdir. Agar $f(X)=Y$ bo'lsa f ni ustlama akslantirish $f(X)\subset Y$ bo'lganda esa ichiga akslantirish deyiladi.

Birorta $f:X\to Y$ ustlama akslantirish uchun $x_1,x_2\in X$ va $x_1\neq x_2$ dan $f(x_1)\neq f(x_2)$ kelib chiqsa f ni o'zaro bir qiymatli akslantirish deyiladi.

X, Y topologik fazalar bo'lsin.

Ta'rif: $f:X\to Y$ akslantirish berilgan bo'lib x X ning biror nuqtasi bo'lsin $(x\in X)$ $f(x)\in Y$ nuqtaning har bir V atrofi uchun $x\in X$ nuqta shunday U atrofga ega bo'lsaki $f(U)\subset V$ munosabat bajarilsa f akslantirishni x nuqtada uzluksiz deyiladi.

Ta'rif: Agar f akslantirish $A\subset X$ to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, u holda uni A to'plamda uzluksiz deyiladi.

To'plamda uzluksiz akslantirish ta'rifida to'plamning barcha nuqtalari uchun akslantirishning uzluksizligi ko'zda tutiladi. Agar f akslantirish X ning hamma nuqtalarida uzluksiz bo'lsa uni uzluksiz akslantirish deyiladi.

1-teorema $f:X\to Y$ akslantirish X da uzluksiz bo'lishi uchun $G\subset Y$ ochiq to'plamning proobrazi $f^{-1}(G)$ X da ochiq bo'lishi zarur va Yetarli

Isbot. Zaruriyligi f uzluksiz akslantirish $G\subset Y$ ochiq to'plam bo'lsin $f^{-1}(G)$ ni ochiq ekanligini ko'rsatishimiz kerak.

Agar $x\in f^{-1}(G)$ bo'lsa $f(x)\in G$ bo'ladi.

f akslantirish x nuqtada uzluksiz bo'lgani uchun x ning shunday U atrofi mavjudki, $U\subset f^{-1}(G)$ bo'ladi.

Bundan esa $x\in U\subset f^{-1}(G)$ kelib chiqadi. Demak, $f^{-1}(G)$ ochiq to'plamdir.

Yetarliligi. Endi ixtiyoriy $G\subset Y$ ochiq to'plam uchun $f^{-1}(G)$ ochiq to'plam, $x\in X$ bo'lsin.

$y=f(x)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofi V ni qarasak $U=f^{-1}(V)$ ochiq to'plam bo'lib x nuqtaning atrofidir. $f(U)=V$ bo'lgani uchun $f\,x$ nuqtada uzluksiz akslantirish. x ning ixtiyoriyligidan teorema to'la isbot qilindi. Yopiq to'plamlar uchun teorema to'ldiruvchi to'plamlarga o'tish orqali isbot qilinadi.

2-teorema X,Y,Z topologik fazalar bo'lsin. $f:X\to Y,\ g:Y\to Z$ akslantirishlar uzluksiz bo’lsa u holda $h = g \odot f : X \to Z$ akslantirish uzluksiz akslantirish bo’ladi.

Isbot: W Z da ixtiyoriy ochiq to’plam bo’lsin. 26-teoremadan $V = g^{-1}(W)$ va $U = g^{-1}(V)$ lar ochiq. $V = h^{-1}(W)$ bo’lgani uchun 26-teoremani qayta tadbiq etish bilan h ning uzluksizligi isbot bo’ladi.

Uzluksiz akslantirishda yopiq (ochiq) to’plamning aksi yopiq (ochiq) bo’lmasligi ham mumkin.

Masalan $U = e^x \cos y$, $V = e^x \sin y$ qoida asosida $(x, y) \in X$ nuqtalarning $(u, v) \in Y$ nuqtalarga akslantirishni qaraylik.

Bu akslantirish X dagi $x \le 0, y = 0$ nur (yopiq to’plam)ni Y dagi $0 < u \le 1, v = 0$ yopiq bo’lmagan to’plamga akslanishini ko’ramiz.

Agar akslantirishda barcha nuqtalarning obrazlari ustma-ust tushsa (o’zgarmas akslantirish) ochiq to’plamning obrazi ochiq emasligini ko’ramiz.

3-teorema. X, Y topologik fazolar $f : X \to Y$ uzluksiz akslantirish $A \subset X$ kompakt to’plam bo’lsa $f(A) \subset Y$ ham kompakt to’plamdir.

Isbot: $\{U_\alpha\}$ oila $f(A)$ to’plamning ochiq qobig’i bo’lsin.

f uzluksiz akslantirish bo’lgani uchun $V_\alpha = f^{-1}(U_\alpha)$ to’plam hamma α lar uchun ochiq to’plam bo’ladi. Demak $\{V_\alpha\}$ oila A uchun ochiq qobiq bo’ladi. A kompakt to’plam bo’lganligi uchun bu qobiqdan chekli qobiq ajratish mumkin. Ajratilgan chekli qobiq elementlari $V_{a_1}, V_{a_2}, ..., V_{a_m}$ bo’lsin. Shunda ularning obrazlari $U_{\alpha_1}, U_{\alpha_2}, ..., U_{\alpha_m}$ to’plamlar $f(A)$ to’plam uchun $\{U_\alpha\}$ oiladan ajratilgan chekli qobiqni tashkil etadi. Bundan $f(A)$ ning kompaktligi kelib chiqadi.

4-teorema. X, Y topologik fazolar $f : X \to Y$ uzluksiz akslantirish $A \subset X$ bog’lanishli to’plam bo’lsa $f(A)$ ham bog’lanishli to’plamdir.

Isbot: Agar $f(A)$ bog’lanishsiz to’plam bo’lsa bo’sh bo’lmagan G_1 va G_2 ochiq to’plamlar mavjud bo’lib,

$f(A) = (f(A) \cap G_1) \bigcup (f(A) \cap G_2), (f(A) \cap G_1) \bigcap (f(A) \cap G_2) = \varnothing$ va

$f(A) \bigcap G_1 \ne \varnothing$, $f(A) \bigcap G_2 \ne \varnothing$ munosabatlar o’rinli

f akslantirish uzluksiz bo’lgani uchun $A_1 = f^{-1}(G_1)$ *ва* $A_2 = f^{-1}(G_2)$ to’plamlar X ning ochiq qism to’plamlaridir.

$f(A) \cap G_1 \ne \varnothing$ va $f(A) \cap G_2 \ne \varnothing$ munosabatlardan $A_1 \cap A \ne \varnothing$ va $A_2 \cap A \ne \varnothing$ kelib chiqadi. Ko’ramizki $(A_1 \cap A) \cap (A_2 \cap A) \ne \varnothing$, $A = (A_1 \cap A) \cup (A_2 \cap A)$. Bundan A ning bog’lanmaganligi aniqlanadi. Bu ziddiyatdan teoremaning isboti kelib chiqadi.

5-teorema. $I = [a, b]$ yopiq kesma bog’lanishli to’plamdir.

Isbot: Faraz qilaylik $[a, b]$ bog’lanmagan bo’lsin. U holda ochiq va bo’sh bo’lmagan U_1 va U_2 to’plamlar mavjud bo’lib $I = (I \cap U_1) \cup (I \cap U_2), I \cap U_1 \ne \varnothing, I \cap U_2 \ne \varnothing$

va $(I\cap U_1)\cap(I\cap U_2)=\varnothing$ munosabatlar o'rinli bo'ladi.

Endi I ni topologik fazoga aylantiraylik. Buning uchun I ning qism to'plami A uchun R^1 da ochiq G to'plam mavjud bo'lib, $A=I\cap G$ bo'lsa, A ni ochiq to'plam deb qabul qilamiz. Hosil bo'lgan I ning ochiq qism to'plamlari oilasi I da topologiya hosil qiladi va I topologik fazoga aylanadi. Bu topologiyada I va $\varnothing$ ochiq to'plamlardir.

Agar I bog'lanmagan bo'lsa I da ochiq va bo'sh bo'lmagan $U_1\cap U_2$ to'plamlar mavjud bo'lib $U_1\cap U_2=\varnothing$ va $I=U_1\cup U_2$ munosabatlar bajariladi. Endi $f(x)=\begin{cases}0, x\in U_1\\ 1, x\in U_2\end{cases}$ qoida bilan berilgan f akslantirishni qaraylik.

Agar $G\subset R^1$ ochiq to'plam bo'lsa $f^{-1}(G)=\begin{cases}I\ agar\ \ 0,1\in G\\ \varnothing, agar\ \ 0\notin G,1\notin G\\ U_1, agar\ \ 0\in G,1\notin G\\ U_2, agar\ \ 0\notin G,1\in G\end{cases}$

tenglik o'rinlidir. $I,\varnothing,U_1,U_2$ to'plamlar ochiq bo'lganligi uchun 26-teoremaga ko'ra f uzluksiz funksiyadir. Koshi teoremasiga ko'ra funksiya 0 va 1 oralig'idagi hamma qiymatlarni qabul qilishi kerak. Bundan I ning bog'lanishliligi kelib chiqadi. Bu ziddiyatdan teoremaning isboti kelib chiqadi. X topologik fazo $f:[0,1]\to X$ uzluksiz akslantirish bo'lsin. Bu erda $[0,1]$ kesmadagi topologiya 30-teorema isbotidagi kabi evklid topologiyasi yordamida aniqlanadi.

Agar $x=f(0)$, $y=f(1)$ bo'lsa x va y nuqtalar x yo'l yordamida tutashtirilgan deb ataymiz.

Ta'rif: Agar $A\subset X$ qism to'plamning har qanday ikki nuqtasini shu to'plamda yotuvchi yo'l yordamida tutashtirish mumkin bo'lsa A to'plam chiziqli bog'lanishli to'plam deyiladi.

6-teorema. Chiziqli bog'lanishli to'plam bog'lanishli to'plamdir.

Isbot: X-topologik fazo $A\subset X$-chiziqli bog'lanishli to'plam bo'lsin. Ta'rifga ko'ra A ga tegishli ixtiyoriy x,y nuqtalar uchun uzluksiz $f:I\to X$ akslantirish mavjud bo'lib $f(0)=x,\ f(1)=y\ \textit{ва}\ f(I)\subset A$ bo'ladi. Agar A bog'lamagan to'plam bo'lsa, ochiq bo'sh bo'lmagan G_1 va G_2 to'plamlar mavjud bo'lib, $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$, $A\cap G_1\neq\varnothing$, $A\cap G_2\neq\varnothing$ munosabatlar bajariladi.

$A\cap G_1$ to'plamdan x nuqtani $A\cap G_2$ to'plamdan y nuqtani olaylik. A chiziqli bog'lanishli bo'lgani uchun $f:I\to X$ yo'l mavjud bo'lib, $f(0)=x$, $f(1)=y$ va $I=[0,1]$2 va 3 teoremalarga ko'ra $I=[0,1]$ bog'lanishli. Lekin $A=(A\cap G_1)\cup(A\cap G_2)$ tenglikdan $f(I)=(f(I)\cap G_1)\cup(f(I)\cap G_2)$ tenglikni yozish mumkin.

$x \in f(I) \cap G_1,\ y \in f(I) \cap G_2 \Rightarrow f(I) \cap G_1 \neq \varnothing,\ f(I) \cap G_2 \neq \varnothing$

Bundan $f(I)$ ning bog'lanmaganlikni ko'ramiz. +arama-qarshilik kelib chiqdi. Demak A bog'lanishli to'plam.

7-teorema X -chiziqli bog'lanishli fazo bog'lanishlidir.

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik. U holda bir vaqtda ham ochiq, ham yopiq bo'lgan U va V to'plamlar mavjud bo'lib $U \cup V = X$ va $U \cap V = \varnothing$ $a \in U, b \in V$ nuqtalarni qaraylik.

$L: I \to X$ a va b nuqtalarni tutashtiruvchi yo'l $f[l]$ bog'lanishli (nega?). Ikkinchi tomondan $L_u = L(I) \cap U$ va $L_v = L[1] \cap V$ induksiyalangan topologiyada ham ochiq ham yopiq bo'lib $L_u \cup L_v = I$ va $L_u \cap L_v = \varnothing$. Hosil qilingan qarama-qarshilikdan teoremaning isboti kelib chiqadi.

X birorta topologik fazo bo'lsin. $X_1, X_2 \subset X$ ikkita chiziqli bog'lanishli fazolar bo'lib, umumiy nuqtaga ega bo'lsa, ravshanki $X_1 \cup X_2$ qism fazo ham chiziqli bog'langan bo'ladi. Bundan X ning o'zaro kesishmaydigan chiziqli bog'lanishli qism fazolar birlashmasi ko'rinishda ifodalanishi kelib chiqadi. Bunday qism fazolarni X fazoning chiziqli bog'lanishli komponentlari deyiladi.

X fazoning har bir chziqli bog'langanlik komponentasi nuqtalarning shunday to'plamidirki, ularning har birini ushbu komponentaning ixtiyoriy nuqtasi bilan yo'llar orqali tutashtirish mumkin. Komponentlar ta'rifidan qo'yidagi teorema kelib chiqadi.

8-teorema. X bog'lanishli topologik fazo bo'lib, har bir nuqtasi chiziqli bog'langanlik munosabatidagi atrofga ega bo'lsa, u holda X chiziqli bog'langandir.

Isbot. $a \in X$ bo'lib U a nuqtaning chiziqli bog'langanlik komponentasi bo'lsin. Teorema shartidan U va $X \setminus U$ larning ochiq to'plamlar bo'lishi kelib chiqadi. Bundan ularning yopiqligi ravshan. $U \neq \varnothing$ bo'lib, X ning bog'lanishliligidan $U = X$ kelib chiqadi, ya'ni X -chiziqli bog'langan fazo.

9-teorema. $f: X \to Y$ uzluksiz akslantirish $f(X) = Y$ bo'lib X -bog'lanishli bo'lsa, Y ham bog'lanshli to'plamdir.

Isbot: Y bog'lanmagan deb faraz qilaylik. U holda bir vaqtda ochiq va yopiq bo'sh bo'lmagan U_1 va U_2 to'plamlar mavjud bo'lib $U_1 \cup U_2 = Y$ va $U_1 \cap U_2 = \varnothing$. f uzluksiz akslantirish bo'lgani uchun $V_1 = f^{-1}(U_1)$ *ва* $V_2 = f^{-1}(U_2)$ bo'sh bulmagan to'plamlar bir vaqtda ham ochiq, ham yopiqdir.

$V_1 \cup V_2 = X$, $V_1 = X \setminus V_2 \Rightarrow X$ - bog'lanishsiz. Kelib chiqqan qarama-qarshilikdan teoremaning isboti kelib chiqadi.

1-misol. Diskret topologiyalik X fazoning ixtiyoriy Y fazoga akslantirishning uzluksizligi isbotlansin.

Yechish: $\forall x \in X$ nuqtani qaraylik V $f(x)$ nuqtaning ixtiyoriy atrofi bo'lsin.

$U = f^{-1}(V) \subset X$ to'plam x nuqtaning atrofi bo'lib $f(U) = f(f^{-1}(V)) \subset V$. x nuqtani atrofi uchun shu nuqtaning o'zini olish ham mumkin. U holda $f(U) = f(x) \subset V$

2-misol. Har qanday X fazoning trivial topologiyalik Y to'plamga ixtiyoriy akslantirishning uzluksizligini isbotlang.

Yechish: $\forall x \in X$ nuqtani qaraylik $f(x)$ nuqta uchun Y ni atrof deb olish mumkin. $f^{-1}(Y) = X$ ochiq to'plam bo'lib uni x nuqtaning atrofi deb qarash mumkin. $f(X) \subset Y$ munosabat o'z-o'zidan ravshan.

3-misol. Tekislikning $O(0,0)$ va $A(0,1)$ nuqtalaridan farqli bo'lgan har bir nuqtasini o'z-o'ziga O ni A ga va A ni O ga o'tkazuvchi $f : E^2 \to E^2$ akslantirishning uzluksiz bo'lmasligini ko'rsating.

Yechish: f akslantirish 0 nuqtani A ga f^{-1} akslantirish A nuqtani 0 nuqtaga o'tkazadi. O nuqta atrofidagi nuqtalar A nuqtaning atrofidagi nuqtalarga o'tmaydi. 0 ning atrofidagi nuqtalarga A ning atrofidagi nuqtalar o'tmaydi. 0 ning atrofi U , A ning atrofi V bo'lsa, $f(U) \subset V$ o'rinli emas, shuningdek $f^{-1}(V) \subset U$ munosabat o'rinni emas. $\Rightarrow f$ uzluksizakslantirishemas.

4-misol. (Bolsano-Koshi teoremasi)

f sonlifunksiya bog'lanishli X to'plamdaaniqlangan vauzluksizbo'lsin. Agar a va b X ningnuqtalari va $\omega \in [f(a), f(b)]$ bo'lsa u holda X da kamida bittashunday x nuqta mavjudki, $f(x) = \omega$

Isbot: $f(X)$ R^1 da bog'lanishli to'plam Y $[f(a), f(b)]$ ni o'z ichiga oladi.

$x \in X \xrightarrow{f} \omega \in [f(a), f(b)]$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Qandayakslantirishlaruzluksiz akslantirishlardeyiladi? Misollarkeltiring.
2. Uzluksizlik haqidagi teoremalarniaytibbering.
3. O`zarobirqiymatliakslantirishlar deb qandayakslantirishlargaytiladi? Misollarkeltiring.
4. Ichigaakslantirishlar deb qandayakslantirishlargaaytiladi? Misollarkeltiring.
5. Uzluksizakslantirishdakompaktto`plamningobraziqadayto`plambo`ladi?
6. Chizqlibog`lanishlito`plam deb qandayto`plamgaaytiladi?
7. Chiziqlibog`lanishlito`plambog`lanishlito`plambo`ladimi? Misollarkeltiring.

10. TOPOLOGIK AKSLANTIRISHLAR(Gomeomorfizmlar). Stereografik proeksiya

Reja

1.Uzluksiz akslantirish.
2.Teskari akslantirish.
3.Topologik akslantirish.
4. Stereografik proeksiya

Tayanchiboralar: uzluksizakslantirish, teskariakslantirish, gomeomorfizm.

Uzluksiz akslantirishlar orasida eng muhimi topologik akslantirishlardir. Topologik akslantirishni gomeomorfizm deb ham ataladi.

Ta'rif: X,Y topologik fazolar $f:X\to Y$ akslantirish berilgan bo'lsin. Agar f akslantirishga teskari akslantirish f^{-1} mavjud va f, f^{-1} akslantirishlar uzluksiz bo'lsa, f topologik akslantirish yoki gomeomorfizm deb ataladi.

Gomeomorfizmga eng sodda misol qilib $f(X)=X$ qoida bilan aniqlangan $f:X\to X$ ayniy akslantirishni olish mumkin. Ta'rifdan agar f topologik akslantirish bo'lsa unga teskari akslantirish f^{-1} ham topologik akslantirish ekanligi kelib chiqadi. Endi f uchun teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun zaruriy va Yetarli shartlarga e'tibor beraylik.

Teskari akslantirish Y ning har bir nuqtasiga X ning bitta nuqtasini mos qo'yadi.

Demak ixtiyoriy $y\in Y$ nuqta uchun birorta $x\in X$ nuqta mavjud bo'lib $f(x)=y$ tenglik bajariladi.

Bundan tashqari f^{-1} teskari akslantirish ustlama akslantirish bo'lib $y\in Y$ nuqtaga bitta $x\in X$ nuqtani mos qo'yganligidan $x_1\neq x_2$ bo'lganda $f(x_1)\neq f(x_2)$ bo'lishi ya'ni uning o'zaro bir qiymati akslantirish ekanligi aniqlanadi.

Shunday qilib, f ga teskari akslantirish f^{-1} mavjud bo'lishi uchun f ustlama va o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lishi zarur va Yetarli.

Agar X va Y topologik fazolar uchun $f:X\to Y$ topologik akslantirish mavjud bo'lsa X va Y topologik fazolar o'zaro gomeomorf yoki topologik ekvivalent fazolar deb ataladi.

Topologik fazolarning topologik akslantirishda saqlanib qoladigan (biridan ikkinchisiga o'tadigan) xossalari topologik xossalar deb ataladi. Topologiya figuralar va topologik fazolarning topologik xossalarini o'rganish bilan shug'ullanadi.

1-teorema. $f:X\to Y$ $g:Y\to Z$ gomeomorfizmlar bo'lsa $h=g\odot f:X\to Z$ ham gomeomorfizmdir.

Isbot: f va g akslantirishlar biektiv va uzluksiz bo'lgani uchun h akslantirish ham biektiv va uzluksizdir. f va g topologik akslantirishlar bo'lganidan ularga teskari akslantirishlar f^{-1}va g^{-1} ham uzluksizdir. Shuning uchun $(f \odot g)^{-1} = f^{-1} \odot g^{-1}$ akslantirishning biektiv va uzluksizligidan h ning gomeomorfizm ekanligi kelib chiqadi.

2-teorema. $f : X \to Y$ uzluksiz akslantirish X kompakt fazo Y-Xausdorf fazosi va f ga teskari akslantirish f^{-1} mavjud bo'lsa, f gomeomorfizmdir.

Isbot. Teoremani isbotlash uchun f^{-1} ning uzluksizligini ko'rsatishimiz kerak. Buning uchun ixtiyoriy ochiq $G \subset X$ to'plamning f^{-1} akslantirishga nisbatan proobrazi Y da ochiq ekanligini ko'rsatishimiz kerak.

Agar G ochiq bo'lsa $X \setminus G$ yopiq to'plamdir. $X \setminus G$ ning f^{-1} ga nisbatan proobrazi $f(X \setminus G)$ to'plamdan iborat.

$X \setminus G$ yopiq va X kompakt bo'lganligidan 28-teoremaga ko'ra $f(X \setminus G)$ ham kompakt $f(X \setminus G) \subset Y$ Xausford fazosi bo'lganligi uchun 24-teoremaga ko'ra $f(X \setminus G)$ yopiq to'plamdir. $f(G) = Y \setminus f(X \setminus G)$ tenglikdan $f(G)$ ning ochiqligi kelib chiqadi.

Endi bir nechta misollar keltiraylik.

1-misol. $X = (a,b)$, $Y = (c,d)$ bo'lib X Y fazolarda topologiya R^1 dagi topologiya yordamida aniqlanadi.

Shunda $f : X \to Y$ akslantirishni $f(x) = \frac{d-c}{b-a}(X-a) + c$ formula yordamida Aniqlasak f gomemomorfizm bo'ladi, chunki f chiziqli funksiya uzluksiz va unga teskari funksiya ham uzluksizdir.

2-misol. $X = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, $Y = [-1;1]$ bo'lsin.

Ma'lumki $f(x) = \sin x$ uzluksiz unga teskari funksiya xqarcsiny $[-1,1]$ da aniqlangan va uzluksizdir. shuning uchun $f : X \to Y$ gomeomorfizmdir.

3-misol (a,b) interval va son o'qi R^1 gomeomorfizmdir. $y = tg\left(\frac{\pi(x-a)}{b-a} - \frac{\pi}{2}\right)$ funksiya orqali $X = (a,b)$ va $Y = R^1$ orasidagi gomeomorfizmni o'rnatishimiz mumkin.

4-misol. Sfera va kubning sirti gomeomorfizmdir. Gomemorfizmni o'rnatish uchun sferaga ichki chizilgan kubni olib umumiy markazga nisbatan markaziy proeksiyalash orqali moslik o'rnatish kifoya.

5-misol. Bitta nuqtasini o'yib tashlangan sfera tekislikka gomeomorf.

Tekislikni sferaga o'yib tashlangan nuqtaga diametral qarama-qarshi nuqtada urinadigan qilib o'tkaziladi. O'yilgan nuqtani proeksiya markazi uchun olib sferani tekislikka proeksiyalanadi.

6-misol. Tekislikdagi $D^2 = \{(x,y) / x^2 + y^2 < R^2\}$ ochiq doira tekislikka gomemorf.

Bu erda $f(x,y)=\left\{\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{R-\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$ formula bilan $f:D^2\to R^2$ akslantirishni aniqlasak f gomemorfizm bo'ladi. Bu akslantirishning uzluksizligi $\nu(x,y)=\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}}$

$h(x,y)=\frac{x}{R-\sqrt{x^2+y^2}}$ funksiyalarning uzluksizligidan

kelib chiqadi. Teskari akslantirishni $f^{-1}(x,y)=\left\{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}},\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$ formula bilan aniqlaymiz .

Bu akslantirishning uzluksizligi $\mu(x,y)=\left\{\frac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$, $\varphi(x,y)=\left\{\frac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}\right\}$ funksiyalarning uzluksizligidan kelib chiqadi. Endi $f^{-1}(x,y)$ akslantirish haqiqatdan ham f ga teskari akslantirish ekanligini ko'rsataylik. Buning uchun $f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=(x,y)$ tenglikni isbotlaymiz.

$$f(\mu(x,y),\varphi(x,y))=\left\{\frac{\mu(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}},\ \frac{\varphi(x,y)}{R-\sqrt{\mu^2(x,y)+\varphi^2(x,y)}}\right\}=$$

$$=\left\{\frac{\dfrac{Rx}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\dfrac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}},\frac{\dfrac{Ry}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}{R-\dfrac{R\sqrt{x^2+y^2}}{1+\sqrt{x^2+y^2}}}\right\}=(x,y)$$

Demak f akslantirishgomeomorfizmdir. X va Y topologikfazalar $f:X\to Y$ uzluksizakslantirishbo'lib
bu fazolar o'zaro gomeomorf munosabatda bo'lmasligi mumkin.

7-misol. $X=(0.1)$ interval bo'lib $\varphi:X\to E^2$ 4-shakldagi figura bo'lsin. $Y=\varphi(x)$ Y dagi topologiya E^2 topologiyasining induksiyalash orqali kiritiladi. $f:X\to Y$ akslantirish $\forall x\in(0.1)$ uchun $f(x)=\varphi(x)$ qoida asosida o'rnatiladi.

f uzluksiz va teskarilanuvchiakslantirish lekin f^{-1} akslantirish $a=f\left(\frac{1}{2}\right)$ nuqtada uzluksiz emas. Shunday qilib X va Y orasidagi moslik gomeomorfizm emas.

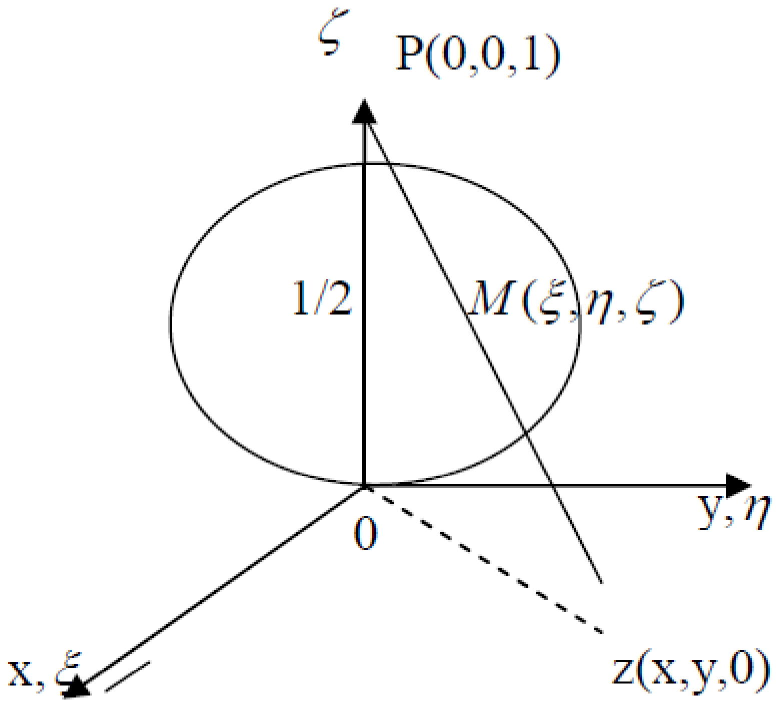
4^0.Stereografik proeksiya.Riman sferasi.Kompleks sonni sferadagi nuqta bilan ham tasvirlash mumkin. Buning uchun ξ, η, ς Dekart ortogonal koordinatalarga ega bo`lgan E_3 Evklid fazosida markazi $(0,0,\frac{1}{2})$ nuqtada, radiusi $\frac{1}{2}$ ga teng ushbu

$$S=\left\{(\xi,\eta,\zeta)\in E^3:\quad \xi^2+\eta^2+\left(\zeta-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\right\} \tag{3.5}$$

sferani qaraymiz. Ravshanki, bu sfera $O\zeta$ o`qni $O(0,0,0)$ hamda $P(0,0,1)$ nuqtalarda kesadi.

Ta`rif-4.2. Sferaning $P(0,0,1)$ nuqtasini qutb deb ataladi.

$\varsigma=0$ tekislikni z kompleks tekislik sifatida qabul qilamiz, bunda $O\xi\ (\eta=0,\varsigma=0)$ hamda $O\eta\ (\xi=0,\varsigma=0)$ koordinata o`qlari mos ravishda kompleks tekislikdagi $y=0$ haqiqiy hamda $x=0$ mavhum o`qlar bilan ustma-ust tushsin (3.1-chizma).



3.1-chizma

$P(0,0,1)$ nuqtadan S sferani P nuqtadan farqli $M(\xi,\eta,\varsigma)$ nuqtada kesuvchi nur o`tkazamiz. Bu $PM$ nur kompleks tekislikni biror $z=x+iy$ nuqtada kesib o`tsin.

Ta`rif-4.3. M nuqta z kompleks sonning P qutbli S sferadagi stereografik tasviri(proeksiyasi) deyiladi.

Keltirilgan qoidaga ko`ra kompleks tekislikdagi har bir nuqtaga (kompleks songa) $S \setminus \{P\}$ sferada bitta nuqta mos keladi va aksincha.

Demak, stereografik proeksiya kompleks tekislikdagi barcha nuqtalar to`plami $C$ bilan $S \setminus \{P\}$ sferaning nuqtalari to`plami o`rtasida o`zaro bir qiymatli moslik o`rnatar ekan.

Shuni ta`kidlash lozimki, kompleks tekislikdagi z nuqta koordinata boshidan uzoqlashgan sari $M(\xi,\eta,\varsigma)$ nuqta P qutbga yaqinlasha boradi.

Agar kompleks tekislikni shartli ravishda $z=\infty$ kompleks songa mos keluvchi cheksiz uzoqlashgan nuqta bilan to`ldirsak va unga $S$ sferadagi $P$ nuqtani mos qo`ysak, u holda $\overline{C} = C \cup \{z=\infty\}$ to`plam $S$ sfera nuqtalaridan iborat to`plam bilan o`zaro bir qiymatli moslikda bo`ladi: $S \sim \overline{C}$

Bu moslik kompleks tekislikning stereografik proeksiyasi deyiladi.

***Ta`rif-4.4.*** $\overline{C}$ to`plam kengaytirilgan kompleks tekislik , S sirt esa Riman sferasi deyiladi.

Riman sferasidagi $M(\xi,\eta,\varsigma)$ nuqta koordinatalari bilan kompleks tekislikdagi unga mos z nuqta koordinatalari orasidagi bog'lanishni topish uchun quyidagi teoremani isbotlaymiz.

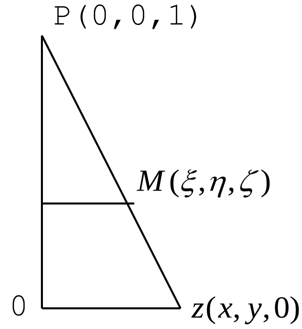
Teorema-4.1. Stereografik proeksiyada kompleks tekislikning $z = x + iy$ nuqtasiga (3.5) formula bilan berilgan S sferaning quyidagi

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \quad \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \quad \varsigma = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}$$

koordinatalarga ega bo`lgan $M(\xi,\eta,\zeta)$ nuqtasi mos qo`yiladi.

Isboti. Ravshanki, $P(0,0,1), M(\xi,\eta,\varsigma)$ va $z(x,y,0)$ nuqtalar orqali o`tuvchi to`g'ri chiziq tenglamasi quyidagicha

$$\frac{\xi-0}{x-0} = \frac{\eta-0}{y-0} = \frac{\varsigma-1}{0-1} \qquad (3.6)$$



3.2-chizma

bo`ladi(3-chizma).

Bundan

$$x = \frac{\xi}{1-\varsigma}, \; y = \frac{\eta}{1-\varsigma}. \qquad (3.7)$$

Endi $|z|^2 = x^2 + y^2$ formula va sferaning (3.5) tenglamasidan foydalanib ς ni topamiz:

$$|z|^2 = x^2 + y^2 = \left(\frac{\xi}{1-\varsigma}\right)^2 + \left(\frac{\eta}{1-\varsigma}\right)^2 = \frac{\varsigma - \varsigma^2}{(1-\varsigma)^2} = \frac{\varsigma}{1-\varsigma} \Rightarrow \varsigma = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \qquad (3.8)$$

Oxirgi tenglikni (3.7) ga qo`ysak,

$$x = \frac{\xi}{1-\varsigma} = \frac{\xi}{1-\frac{|z|^2}{1+|z|^2}} = \xi(1+|z|^2), \; y = \frac{\eta}{1-\varsigma} = \frac{\eta}{1-\frac{|z|^2}{1+|z|^2}} = \eta(1+|z|^2) \qquad (3.9)$$

larni hosil qilamiz. (3.8) va (3.9) lardan quyidagi stereografik proeksiya formulalariga ega bo`lamiz:

$$\xi = \frac{x}{1+|z|^2}, \; \eta = \frac{y}{1+|z|^2}, \; \varsigma = \frac{|z|^2}{1+|z|^2}. \qquad (3.10)$$

Demak, sferadagi M nuqtaning koordinatalari ξ, η, ζ lar ma`lum bo`lganda tekislikdagi z nuqtaning koordinatalari x va y lar (3.7) formulalar yordamida topiladi.

Endi, kompleks tekislikda $z_1 = x_1 + iy_1, \; z_2 = x_2 + iy_2$ nuqtalarni olaylik. Bu nuqtalarga mos keluvchi sferadagi nuqtalar, ya`ni stereografik proeksiyalari $M_1(\xi_1, \eta_1, \varsigma_1), \; M_2(\xi_2, \eta_2, \varsigma_2)$ bo`lsin.

Ta`rif-4.5. Ushbu

$$d(z_1, z_2) = |z_1 - z_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

miqdor z_1 va z_2 nuqtalarorasidagimasofa (Evklidmasofasi) deyiladi.

Ta`rif-4.6. $M_1(\xi_1, \eta_1, \varsigma_1)$ va $M_2(\xi_2, \eta_2, \varsigma_2)$ nuqtalarorasidagimasofa z_1 va z_2

nuqtalarorasidagisferikmasofadebataladivau $\rho(z_1, z_2)$ kabibelgilanadi.

Ravshanki, $M_1(\xi_1,\eta_1,\varsigma_1)$ va $M_2(\xi_2,\eta_2,\varsigma_2)$ nuqtalar orasidagi masofa

$$\rho(z_1,z_2)=\sqrt{(\xi_2-\xi_1)^2+(\eta_2-\eta_1)^2+(\zeta_2-\zeta_1)^2}$$

bo`ladi.

Yuqorida keltirilgan (3.10) formulaga ko`ra

$$\xi_1=\frac{x_1}{1+|z_1|^2},\ \eta_1=\frac{y_1}{1+|z_1|^2},\ \zeta_1=\frac{|z_1|^2}{1+|z_1|^2},\quad \xi_2=\frac{x_2}{1+|z_2|^2},\ \eta_2=\frac{y_2}{1+|z_2|^2},\ \zeta_2=\frac{|z_2|^2}{1+|z_2|^2}$$

bo`lishini e`tiborga olib z_1 va z_2 nuqtalar orasidagi sferik masofani topamiz:

$$\rho(z_1,z_2)=\frac{|z_1-z_2|}{\sqrt{1+|z_1|^2}\cdot\sqrt{1+|z_2|^2}} \tag{3.11}$$

Kengaytirilgan komplek tekislik $\overline{C}$ da $z_2=\infty$ bo`lgan holda (3.11) formula

$$\rho(z,\infty)=\frac{1}{\sqrt{1+|z|^2}} \tag{3.12}$$

ko`rinishda bo`ladi.

Xossa-4.1. Stereografik proeksiya natijasida tekislikdagi har qanday aylananing aksi sferaga aylana bo`lib tushadi va aksincha.

Mashq. Xossani isbotlang, bunda shuni e`tiborga olish kerakki, $P$ qutb orqali o`tuvchi aylanaga tekislikda to`g’ri chiziq mos keladi va uni markazi cheksiz nuqtada bo`lgan aylana deb qaraladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Qandayakslantirishlartoplogikakslantirishlardeyiladi?
2. Teskariakslantirishmavjudbo`lishiuchunzarurvayetarlishartlarniayting.

3. Qandayfazolar topologic ekvivalentfazolardeyiladi?
4. Gomeomorfakslantirishlarningkompozitsiyasiqandayakslantirishbo`ladi? Misollarkeltiring.
5. Ayniyakslantirish deb qandayakslantirishgaaytiladi?
6. Gomeomorfakslantirishlargamisollarkeltiring.
7. Qandayfazolaro`zarogomeomorffazolar deb ataladi?

SKALYAR ARGUMENTLI VEKTOR FUNKTSIYA

Reja:

1. Ta’rifi va belgilanishi
2. Vektor funktsiya $\vec{r}(t)$ ning koordinatalari
3. CHeksiz kichik o’zgaruvchi vektor
4. O’zgaruvchi vektorning limiti
5. Limitlar haqidagi teoremalar
6. $\vec{r}(t)$ vektor funktsiyaning uzluksizligi
7. Vektor funktsiya orttirmasi
8. Misollar

Tayanch iboralar: vektor-funksiya, godograf, limit,uzluksizlik,cheksiz kichik funksiya.

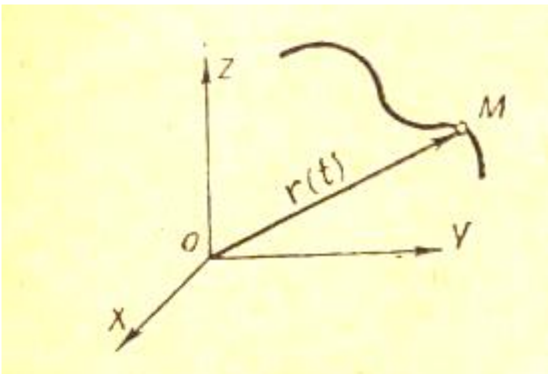
Mavzuning bayoni:

Fazoda 0 markazlidekartkoordinatalarsistemasinibelgilaymiz.

1-ta’rif: Agar skalyaro’zgaruvchi t ning $[a,b]$ kesmadagiharbirqiymatigabirorqoidaasosidaaniqbir $\vec{r}$ vektormoskelsa, u holdabuvektor t parametrningvektorfunktsiyasideyiladivaqisqacha

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ (1)

shakldaifodalanadi.



1-chizma

2-ta’rif: Uzunliginolgaintiluvchivektorcheksizkichikvektordeyiladiva $\vec{\alpha} = \vec{\alpha}(t)$ belgilanadi. $|\vec{\alpha}(t)| \to 0$

Agar $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ OX, OY, OZ koordinato’qlariningyo’naltiruvchi ort vektorlaribo’lsa, u holda

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \qquad (2)$$

yoyilma o'rinlidir, bunda $x(t), y(t), z(t)$ skalyar funktsiyalar bo'lib $\vec{r}(t)$ vektorning o'qlardagi proektsiyalaridir. $x(t), y(t), z(t)$- larni $\vec{r}(t)$ vektorfunktsiyaningkoordinatalari deb ataymiz. $\vec{r}(t)$ vektor $[a,b]$ segmentdaberilganbo'lsin.

3-ta'rif: Agar biroro'zgarmas $\vec{a}$ vektormavjudbo'lib t parametr $t_0 \in [a,b]$ gaintilganda $\vec{r}(t) - \vec{a}$ ayirmacheksizkichik $\vec{\alpha}(t)$ o'zgaruvchivektorbo'lsa, u holda $\vec{a}$ vektor $\vec{r}(t)$ o'zgaruvchivektorninglimitideyiladiva u

$$\lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} \qquad (3)$$

belgilanadi.

Ko'ramizki,

$$\vec{r}(t) - \vec{a} = \vec{\alpha}(t) \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| = |\vec{\alpha}(t)|$$

$$|\vec{\alpha}(t)| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0 \Rightarrow |\vec{r}(t) - \vec{a}| \to 0 \Rightarrow \vec{a} = \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t)$$

4-ta'rif: Vektorlarning $\{\vec{r}_n\}$ ketmaketligiuchun $\lim_{n \to \infty} |\vec{r}_n - \vec{a}| = 0$ tengliko'rinlibo'lsa, u holdao'zgarmas $\vec{a}$ vektor $\{\vec{r}_n\}$ ninglimitideyiladi.

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektorfunktsiya $t \in [a,b]$ segmentdaaniqlanganbo'lib $x(t),\ y(t),\ z(t)$ uningkoordinatalaribo'lsin. $\vec{a}$ o'zgarmasvektor $\vec{r}(t)$ ninglimitibo'lib α, β, γ - koordinatalargaegabo'lsin. Ya'ni $\vec{a} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$.

1-teorema:O'zgarmas $\vec{a}$ vektor $\vec{r}(t)$ vektorfunktsiyaninglimitibo'lishiuchun $t_0 \in [a,b]$ da $\vec{a}$ vektorkoordinatalari $\vec{r}(t)$ vektorkoordinatalarininglimitibo'lishizarurvayetarlidir.

Isbot: Zaruriyligi $\lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0$ bo'lsin

$$|x(t) - \alpha| \le |\vec{r}(t) - \vec{a}|;\ |y(t) - \beta| \le |\vec{r}(t) - \vec{a}|; |z(t) - \gamma| \le |\vec{r}(t) - \vec{a}| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{t \to t_0} |x(t) - \alpha| = 0,\ \lim_{t \to t_0} |y(t) - \beta| = 0,\ \lim_{t \to t_0} |z(t) - \gamma| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} x(t) = \alpha,$$

$$\lim_{t \to t_0} y(t) = \beta,\ \lim_{t \to t_0} z(t) = \gamma .$$

Etarliligi: $|\vec{r}(t) - \vec{a}| = \sqrt{(x(t) - \alpha)^2 + (y(t) - \beta)^2 + (z(t) - \gamma)^2} \le |x(t) - \alpha| +$

$$|y(t) - \beta| + |z(t) - \gamma| \xrightarrow[t \to t_0]{} 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{a}| = 0 \Rightarrow \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \vec{a} .$$

teoremaisbotbo'ldi.

2-teorema: Bir nechavektoryig'indisininglimitishuvektorlarlimitlariningyig'indisigateng.

Isboti: $n = 2$ holniqaraylik

$\lim_{t \to t_0} \vec{r}_1(t) = \vec{a}_1,\ \lim_{t \to t_0} \vec{r}_2(t) = \vec{a}_2$ bo'lsin

$\vec{r}_1(t) - \vec{a}_1 = \vec{\alpha}_1(t),\ \vec{r}_2(t) - \vec{a}_2 = \vec{\alpha}_2(t)$ bo'lib

$$(\vec{r}_1(t) + \vec{r}_2(t)) - (\vec{a}_1 + \vec{a}_2) = \vec{\alpha}_1(t) + \vec{\alpha}_2(t)$$

$|(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))-(\vec{a}_1+\vec{a}_2)|=|\vec{\alpha}_1(t)+\vec{\alpha}_2(t)|\to 0$

$|\vec{\alpha}_1(t)+\vec{\alpha}_2(t)|\le 2|\vec{\alpha}_2(t)|\to 0$ buyerda $|\vec{\alpha}_1(t)|\le|\vec{\alpha}_2(t)|$ olindi.

SHundayqilib, $\lim\limits_{t\to t_0}|(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))-(\vec{a}_1+\vec{a}_2)|=0\Rightarrow$

$\lim(\vec{r}_1(t)+\vec{r}_2(t))=\lim(\vec{a}_1+\vec{a}_2)=\lim\vec{a}_1+\lim\vec{a}_2=\lim\vec{r}_1(t)+\lim\vec{r}_2(t)$

Qo'shiluvchilarsoni n ta bo'lganholda ham teoremao'rinli. Quyidagiteoremaniisbotsizkeltiramiz.

3-teorema: Agar $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_1(t)=\vec{a}_1, \lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_2(t)=\vec{a}_2, \lim\limits_{t\to t_0}\lambda(t)=\lambda_0$ bo'lsa u holda

1) $\lim\limits_{t\to t_0}(\lambda(t)\vec{r}_1(t))=\lambda_0\vec{a}_1,$

2) $\lim\limits_{t\to t_0}(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t))=(\vec{a}_1\,\vec{a}_2),$

3) $\lim\limits_{t\to t_0}[(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t))]=[\vec{a}_1\,\vec{a}_2],$

Agar $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}_3(t)=\vec{a}_3$ bo'lsa, u holda

4) $\lim\limits_{t\to t_0}([\vec{r}_1\,\vec{r}_2]\cdot\vec{r}_3)=(\vec{a}_1\,\vec{a}_2\,\vec{a}_3)$

$\vec{r}(t)$ vektorfunktsiyaninguzluksizligigaskalyaranalizdagikabita'rifberishmumkin.

5-ta'rif: Agar $t\to t_0$ da $\vec{r}(t)$ ninglimiti $\vec{r}(t_0)$ gatengbo'lsa, ya'ni $\lim\limits_{t\to t_0}\vec{r}(t)=\vec{r}(t_0)$ bo'lsa, u holda $\vec{r}(t)$ vektorfunktsiya $t=t_0$ qiymatdauzluksizdeyiladi.

$\vec{r}(t)$ vektor (a,b) intervaldauzluksizbo'lishiuchunshuintervalningharbirnuqtasidauzluksizbo'lishikerak. Vektor funktsiyaorttirmasi deb $\Delta\vec{r}=\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)$ (4) ayirmagaaytiladi.

Funktsiyauzluksizbo'lsa argument t – ningcheksizkichik Δt orttirmasigafunktsiya $\vec{r}(t)$ ning $\Delta\vec{r}$ orttirmasimoskelishiva $\Delta t\to 0$ dan $\Delta\vec{r}(t)\to 0$ kelibchiqishikerak, ya'ni $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\Delta\vec{r}=0$. Quyidagiteoremalarniisbotsizkeltiramiz.

4-teorema: $\vec{r}(t)$ vektorfunktsiya t_0 nuktadauzluksizbo'lishiuchununingkoordinatalari $x(t),\ y(t),\ z(t)$ ning t_0 nuqtadauzluksizbo'lishizarurvayetarlidir.

5-teorema: Agar $\vec{r}_1(t), \vec{r}_2(t), \vec{r}_3(t)$ funktsiyalar $[a,b]$ oralikdauzluksizbo'lsa, u holda

1) $\vec{r}(t)=\lambda_1(t)\vec{r}_1(t)+\lambda_2(t)\cdot\vec{r}_2(t)+\lambda_3(t)\cdot\vec{r}_3(t);$

2) $f(t)=(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t));$

3) $\vec{r}(t)=[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)];$

4) $g(t)=(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t))$

ko'paytmalaruzluksizbo'ladi, bunda $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ lar ham $[a,b]$ da uzluksizfunktsiyalardir.

Misollar:

1. $\vec{r}=\vec{a}t+\vec{b}.\vec{a},\vec{b}$ (o'zgarmasvektorlar $-\infty<t<\infty$) to'g'richiziqtenglamasi.

2. $\vec{r} = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$, $(0 \le t \le 2\pi)$ birlikaylanatenglamasi.

3. $\vec{r} = a\cos t\,\vec{i} + a\sin t\,\vec{j} + b\vec{k}$ $(0 \le t \le \infty)$ vintchiziqtenglamasi

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazorat savollari

1. Skalyar argumentli vektor funksiyani tarifini ayting.
2. Vektor funktsiyaning limit tushunchasini ayting va misollar keltiring.
3. Qanday vektor funksiya uzluksiz vektor funksiya deyiladi? Misollar keltiring.
4. Bir nechta vektor funkisiya godogrflarini chizib ko`rsating.
   Qanday vektor funksiyalar cheksiz kichik o'zgaruvchi vektor funksiya deyiladi?
5. Vektor funksiya uchun limit teoremalarini keltring.
6. Vektor funksiyaning koordinatalari nimani ifoda etadi?
7. Qanday qiymatga vektor funksiyaning ortirmasi deyiladi?

11.VEKTOR-FUNKTSIYANING HOSILASI VA INTEGRALI.

Reja :

1. Hosilata'rifi
2. Hosilaninggeometrikma'nosi
3. Vektornidifferentsiallashqoidalari
4. Moduli va yo'nalishi doimiy vektorlar
5. O'zgaruvchi vektorni Teylor qatoriga yoyish

Tayanchiboralar:funksiyaortirmasi, differensiallash, teylorformulasi.

Mavzunibayoni:

$[a,b]$segmentda $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektorfunktsiyaberilganbo'lsin.

Ta'rif: Agar vektorfunktsiyaning $\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$ orttirmasini $\Delta t = t - t_0$ argument orttirmasigabo'lishdanchiqqannisbatning $\Delta t \to 0$ dagilimiti ($\lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$) mavjudbo'lib, bitta limit vektorgaintilsa, u holdabu limit $\vec{r}(t)$ vektorfunktsiyaning t argument bo'yichahosilasideyiladiva $\vec{r}\,'(t) = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} \to$ belgilanadi. $\vec{r}\,'(t) = \frac{d\vec{r}}{dt}$.

Hosilasimavjudbo'lganvektorfunktsiyanidifferentsiallanuvchideyiladi. Vektor funktsiyahosilasiga $t = t_0$ nuqtadata'rifberishham mumkin. Hosilasimavjudbo'lganvektor-funktsiyauzluksizdir.

Teorema: Agar $\vec{r}(t)$ vektor-funktsiyaning $t_0 \in [a,b]$ nuqtadahosilasimavjudbo'lsa, u holdashunuqtadavektorkoordinatalarininghosilalarimavjudbo'ladiva $\vec{r}'(t_0)=x'(t_0)\vec{i}+y'(t_0)\vec{j}+z'(t_0)\vec{k}$ yoyilmao'rinlibo'ladi.

Teorema: $\vec{u}(t),\vec{\upsilon}(t),\vec{w}(t)$ funktsiyalar $[a,b]$ oraliqdadifferentsiallanuvchifunktsiyalarbo'lsa $(\vec{u}(t)+\vec{\upsilon}(t)+\vec{w}(t))'=\vec{u}'(t)+\vec{\upsilon}'(t)+\vec{w}'(t).$

Differentsiallashningquyidagiqoidalarniisbotsizkeltiramiz.

1. $(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t))'=(\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t))+(\vec{r}_1(t)\vec{r}_2'(t));$
2. $[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2(t)]'=[\vec{r}_1'(t)\vec{r}_2(t)]+[\vec{r}_1(t)\vec{r}_2'(t)];$
3. $(\lambda(t)\vec{r}(t))'=\lambda'(t)\vec{r}(t)+\lambda(t)\vec{r}'(t).$

Agar $\vec{r}(t)$ vektorfunktsiya $[a,b]$ oraliqda k-marta $(k\geq 1)$ uzluksizdifferentsiallanuvchibo'lsa, u holdashuoralikdavektorfunktsiyaning k-tartibligachauzluksizhosilagaegadeyiladi.

$\vec{r}(t)\in C^{(k)}[a,b]$ - belgilaymiz.

Agar $\vec{r}(t)$ vektorfunktsiyasining $[a,b]$ oraliqdahosilasimavjudbo'lsa, y R reperdagikoordinatalariganisbatanham hosilagaegabo'ladivaaksincha $\vec{r}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{k}$ vektorfunktsiyakoordinatalarining $t_0\in[a,b]$ nuqtada Teylor qatorigayoyilmasiberilganbo'lsa,
ya'ni

$$\Delta x=x(t)-x(t_0)=x'(t_0)\Delta t+\frac{(\Delta t)^2}{2}x''(t_0)+...+x^{(n)}(t_0)\frac{(\Delta t)^n}{n!}+\varepsilon_1(t_0\Delta t)(\Delta t)^n$$

$$\Delta y=y(t)-y(t_0)=y'(t_0)\Delta t+y''(t_0)\frac{(\Delta t)^2}{2}+...+y^{(n)}(t_0)\frac{(\Delta t)^n}{n!}+\varepsilon_2(\Delta t)^n$$

$$\Delta z=z(t)-z(t_0)=z'(t_0)\Delta t+z''(t_0)\frac{(\Delta t)^2}{2}+...+z^{(n)}(t_0)\frac{(\Delta t)^n}{n!}+\varepsilon_3(\Delta t)^n$$

u holda

$$\Delta r=\Delta r\vec{i}+\Delta y\vec{j}+\Delta z\vec{k}=\vec{r}'(t_0)\Delta t+r''(t_0)\frac{(\Delta t)^2}{2}+...+\vec{r}^{(n)}(t_0)\frac{(\Delta t)^n}{n!}+\varepsilon(\Delta t)^n$$

Bu formula $\vec{r}(t)$ vektorfunktsiyaning $t_0\in[a,b]$ nuqta atrofida Teylor qatorigayoyilmasiniifodaetadi. Bu yerda $\Delta t\to 0\Rightarrow\vec{\varepsilon}(t_0,\Delta t)\to 0$ gae'tiborberiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazorat savollari

1. Vektor funksiya uchun hosila ta`rifini aytib bering.
2. Vektor funsiya hosila haqidagi teoremani keltiring.
3. Differensiallash qoidalariga ayting va misollar keltiring.

4. Vektor funksiya uchun Teylor qatorini yozing va misollarda ko`rsating.
5. Vektor funksiya uchun argument ortirmasi qanday formula bilan beriladi?

16.1CHIZIQLAR VA ULARNING BERILISH USULLARI

Reja:

1. Topologikalmashtirishlar
2. Ta’riflar
3. CHiziq tenglamasi
4. Misollar
5. Regulyar chiziq

Tayanch iboralar:topologik akslantirish, elementar chiziq, sodda chiziq, regulyar chiziq.silliq chiziq, tekis chiziq, chiziqning parametrik tenglamalari, chiziqning vektor tenglamasi, chiziqning oshkormas tenglamalari.

Mavzu bayoni:

Tekislikda F figurani olaylik. Agar F figuraning har bir nuqtasi biror qoida asosida siljitilsa, ya’ni F' figura kelib chiqsa F', F figurani almashtirish bilan hosil bo’ladi.

Agar *f* almashtirish F ning cheksiz yaqin nuqtalarini F' ning cheksiz yaqin nuqtalariga, o’tkazsa, u holda bu almashtirishni uzluksiz deb ataladi.

1-Ta’rif: Agar *f* almashtirish $x \in F$ nuqtani $x' \in F'$ nuqtaga o’tkazsa va ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ cheksiz kichik son uchun $\delta > 0$ cheksiz kichik son mavjud bo’lsaki, $\rho(x, y) < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi har qanday $y \in F$ nuqta $\rho_1(x', y') < \varepsilon$ tengsizlikka qanoatlantiruvchi $y' \in F'$ nuqtaga o’tsa, u holda *f* ni uzluksiz almashtirish deyiladi.

2-Ta’rif: $f : F \to F'$ almashtirishda

1) $x \neq y$ nuqta $x' \neq y'$ nuqtaga o’tsa,

2) *f* va $f^{-1} : F' \to F$ (teskari almashtirish) uzluksiz bo’lsa,

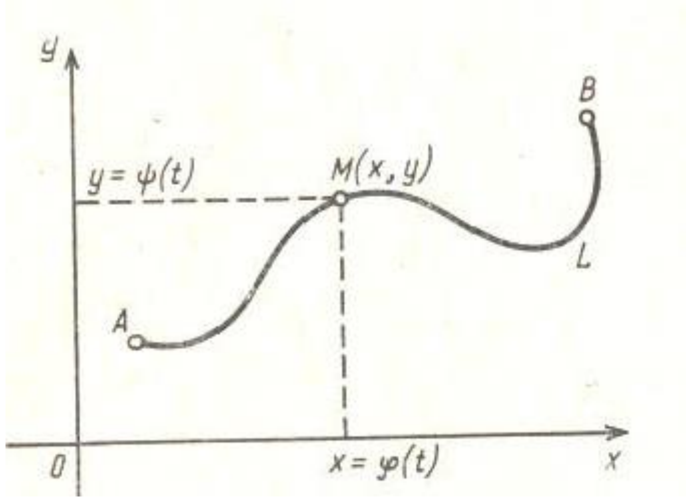
u holda *f* ni topologik almashtirish deyiladi.

$[\alpha, \beta]$ sigmentda uzluksiz $\varphi(t), \psi(t)$ funktsiyalarni qaraylik. F figura uchun L – to’plamni olaylik.

$\forall M(x, y) \in L$ nuqta koordinatalari

$$x = \varphi(t), \;\; y = \psi(t) \quad \alpha \le t \le \beta \qquad (1)$$

ifodalar bo’yicha aniqlangan bo’lsin.



2-chizma

3-Ta'rif: t ning $[\alpha,\beta]$ segmentdagi turli qiymatlariga L ning turli nuqtalari mos kelsa, u holda L ni elementar yoy deyiladi.

4-Ta'rif: Ochiq kesmani topologik almashtirish natijasida hosil bo'lgan figuraga elementar chiziq deyiladi. Elementar yoy, elementar chiziq tushunchalari ba'zan ustma ust tushadi.

Elementar chiziqda o'z-o'zini kesish nuqtalari, ustma ust tushgan qicmlari mavjud bo'lmaydi. Intervalning α,β - chegaraviy qiymatlariga mos A, B nuqtalarni L elementar chiziqning chegaraviy nuqtalari deyiladi.

Elementar chiziq parametrik tenglamasini $x=t, y=f(t)\ \alpha\le t\le\beta$ ko'rinishda olish ham mumkin. L - chiziqning parametrik tenglamasi turlicha bo'lishi mumkin. Masalan (1) ko'rinishda. To'g'ri chiziq, parabola, yarim aylana elementar chiziqlardir.

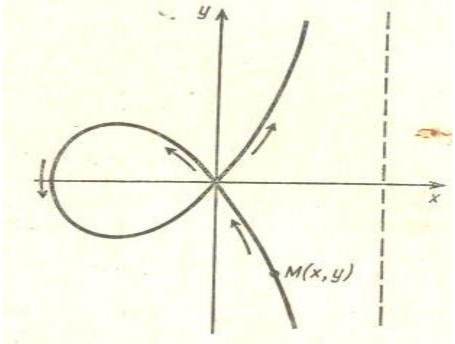
5-Ta'rif: Agar L figuraning har bir nuqtasi, fazoviy atrofga ega bo'lib, uning shu atrofdagi qismi elementar chiziq bo'lsa, u holda L figurani sodda chiziq deb ataladi.

$x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ a>0,\ 0\le t\le 2\pi$ aylanasoddachiziqqamisolbo'laoladi.

6-Ta'rif: Soddachiziqnilokaltopologikalmashtirishnatijasidahosilbo'lganchiziqqaumumiy chiziqdeyiladi.

Umumiychiziqdao'zo'zinikesishnuqtalarimavjudbo'lishimumkin.

$x=a\dfrac{t^2-1}{t^2+1},\qquad y=at\dfrac{t^2-1}{t^2+1},\qquad a>0$ strofoida.



3-chizma

$t=-1$ *ва* $t=1$ da (0, 0) nuqtadakesishadi. CHiziqniikkitasirtlariningkesishishchizigisifatidaolishham mumkin.

$$\begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases} \qquad (2)$$

$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y} & \frac{\partial F_1}{\partial z} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y} & \frac{\partial F_2}{\partial z} \end{vmatrix} \neq 0$ shartbajarilsa (2) sistemaniyechsak $y=\psi(t)$ $z=\varphi(t)$ funktsiyalarhosilqilinadi.

Masalanvivianichizig'i.

$$x^2+y^2+z^2=a^2, \quad x^2+y^2-ax=0$$

sferabilan*a*diametrlidoiraviytsilindrningkesishishchizig'i:

$$x=t \quad y=\pm\sqrt{at-t^2}, \quad z=\pm\sqrt{a^2-at}, \quad 0\le t\le a$$

Fazoviy chiziq parametrik tenglamasini

$$x=x(t), \quad y=y(t), \quad z=z(t) \qquad (3)$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

Bu funktsiyalar uzluksiz bo'lib, $t_1\neq t_2$ uchun $(x(t_2)-x(t_1))^2+(y(t_2)-y(t_1))^2+(z(t_2)-z(t_1))^2\neq 0$

Regulyar chiziq

γ chiziq regulyar (k marta differentsiallanuvchi) deyiladi, agar uni (3) ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lib, bu funktsiyalar regulyar (k-marta differentsiallanuvchi) bo'lsa va $x'^2+y'^2+z'^2\neq 0$ shart bajarilsa. $k=1$ bo'lganda γ ni silliq chiziq deyiladi.

Ba'zan γ ni $y=f(x)$, $z=\varphi(x)$ ko'rinishda ifodalash ham mumkin.

Haqiqatan ham, $x'(t)\neq 0$ bo'lsa, $x=x(t)$ teskarilanuvchi bo'ladi, ya'ni

$x'(t)\neq 0 \Rightarrow t=\psi(x)$, u holda $y=y(\psi(x))=f(x)$ $\quad z=z(\psi(x))=\varphi(x)$.

Evklidfazosidabo'shmas, elementlarinuqtalarbo'lgan*X*va*Y* to'plamlarberilsin.

Ta'rif. *X* to'plamning*x* elementlaribilan*Y* to'plamning*y* elementlariorasidagi $y = f(x)$ bog‘lanishga X to‘plamni Y to‘plamga **aksIantiruvchi** deb ataladivaquyidagichabelgilanadi:

$$f: X \to Y.$$

y elementni x elementning f akslantirishdagi **aksi**, x elementniesa y elementning **asli** deyiladi. X to‘plambarchaelementlariningakslarito‘plami $f(X)$ kabibelgilanib, uni f akslantirishdagi X to‘plamning **aksi** deyiladi.

Ta’rif. X to‘plamni Y to‘plamga f akslantiruvchini **birqiymatliakslantirish** deb ataladi, agardabuakslantirishda X to‘plamning har xilnuqtalari Y to‘plamning har xilnuqtalarigamoskelsa.

Ta’rif. Agar f: $X \to Y$ akslantirishbirqiymatlibo‘lsa, u vaqtda Y to‘plamgaqarashli har bir y nuqtaga X to‘plamdagianiqbir x nuqtanimoskeltiruvchi f^{-1} akslantirishmavjudbo‘lib, bu f^{-1} akslantirishni f akslantirishga **teskariakslantirish** deb ataladi.

x va x_o nuqtalar X to‘plamningelementlaribo‘lib, $y = f(x)$ va $y_o = f(x_o)$ nuqtalar, ularning Y to‘plamdagiakslaribo‘lsin. x va x_o nuqtalarorasidagimasofani $\rho(x, x_o)$ bilan, $y = f(x)$ va $y_o = f(x_o)$ nuqtalarorasidagimasofani $\rho(y, y_o)$ bilanbelgilaymiz.

Ta’rif. $\varepsilon > 0$ son har qandaybo‘lganda ham, uninguchunshunday $\delta > 0$ son mavjudbo‘lsaki, $\rho(x, x_o) < \delta$ bo‘lganda $\rho(y, y_o) < \varepsilon$ bo‘lsa, f akslantirishni x_o nuqtada **uzluksiz** deb ataladi.

Agar f akslantirish X to‘plamning har birnuqtasidauzluksizbo‘lsa, u vaqtda f akslantirish X to‘plamda **uzluksiz** deb ataladi.

Ta’rif. Birorintervalningucho‘lchovli E_3 fazodagiuzluksiz, birqiymatlivateskarisi ham uzluksizakslantirishdagiaksiga **elementarchiziq** deb ataladi.

Masalan, to‘g‘richiziqelementarchiziqbo‘ladi.

Haqiqatan, E_3 fazoda ℓ to‘g‘richiziq

$$\left.\begin{aligned} x &= a_1 t + x_o, \\ y &= a_2 t + y_o, \\ z &= a_3 t + z_o \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

parametriktenglamalaribilanberilsa, u vaqtda (1) chiziqlifunksiyalarbilananiqlangan$f$bog‘lanish, $(-\infty, +\infty)$ intervalva ℓ to‘g‘richiziqnuqtalariorasidagiuzluksiz, birqiymatli, teskarisihamuzluksizakslantirish bo‘ladi.

Evklidfazosidaginuqtalar to‘plami$G$**ochiq to‘plam**debataladi, agardabu to‘plamningharbir$x$nuqtasiuchunshunday$\varepsilon > 0$ sonmavjud bo‘lsaki, fazoning$x$nuqtadanεdankichikmasofadajoylashganbarchanuqtalari$G$to‘plamgategishli bo‘lsa.

Bu ta’rifdankelibchiqadiki, istalgansondagiochiqto‘plamlarningbirlashmasiochiqto‘plambo‘ladi.

x nuqtanio‘zichigaolgan har qandayochiqto‘plamni, x nuqtaning**atrofi** deb ataladi.

Evklidfazosidaginuqtalarto‘plami$W$ **tutash**deb ataladi, agarda$W$ to‘plamniikkiW_1vaW_2qismgaajratuvchivaW_1qismto‘plamfaqatG_1ga, W_2qismto‘plamG_2gategishlibo‘lgan, G_1vaG_2ochiqto‘plamlarmavjudbo‘lmasa.

Ta’rif. Evklidfazosidaginuqtalarto‘plami$Q$ tutashbo‘lib, uning har birnuqtasishundayatrofgaegabo‘lsaki, $Q$to‘plamningbuatrofgategishliqismielementarchiziqbo‘lsa, u vaqtda$Q$ to‘plamni**oddiychiziq**deb ataladi.

Masalan,aylanaoddiychiziqbo‘ladi.

Haqiqatan, E_3fazodaaylanayotgantekislik, Oxy tekisligibo‘lgan$O\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ dekartkoordinatalarsistemasinitanlasak, u vaqtda

$$\left.\begin{aligned} x &= R\cos t + a, \\ y &= R\sin t + b, \\ z &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (2),$$

buyerda$t \in [0,\ 2\pi]$, tenglamalar – markazi$M_o(a;\ b;\ 0)$ nuqtadavaradiusi$R$ gatengbo‘lganaylananingparametriktenglamalaribo‘ladi. Agar $N(t_o)$ nuqta aylananing $(R\cos t_o + a;\ R\sin t_o + b;\ 0)$ nuqtasibo‘lsa, u vaqtdayetarlidarajadakichik$\varepsilon > 0$ uchun (2) tengliklarbilananiqlangan$f$ bog‘lanish $(t_o - \varepsilon,\ t_o + \varepsilon)$ intervalniuningaksigauzluksiz, birqiymatlivateskarisi ham uzluksizakslantiruvchibo‘ladi. Demak, aylananingixtiyoriy$N(t_o)$ nuqtasiningyetarlikichikatrofigategishliqismielementarchiziqbo‘ladi.

Ta’riflardanko‘rinadiki, har qandayelementarchiziqoddiychiziqbo‘ladi. Lekin oddiychiziq har doim ham elementarchiziqbo‘laolmaydi.

E_3 fazoda $O\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}$ dekartkoordinatalarsistemasiniolamiz. γelementarchiziq, ℓto‘g‘richiziqdagi (a, b) intervalniuzluksiz, birqiymatlivateskarisi ham uzluksizbo‘lgan$f$akslantirishnatijasidahosilqilinganbo‘lsin. γelementarchiziqning, (a, b) intervalgategishliixtiyoriy$t$nuqtagamoskeluvchinuqtasini$N = f(t)$ bilanbelgilaylik. Agar Nnuqtaningkoordinatalarini$x$, y, $z$bilanbelgilasak, $f$akslantirish

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

tenglamalarsistemasibilananiqlanadi. $f$akslantirishuzluksiz, birqiymatlivateskarisihamuzluksizbo‘lganiuchun$x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ ifodalar (a, b) intervalda$t$ ninguzluksiz, birqiymatlivateskarisihamuzluksizfunksiyalaribo‘ladi.

(3) tenglamalarniγelementarchiziqning**parametriktenglamalari** deb ataladi, t o‘zgaruvchiniγelementarchiziqning**parametri**deyiladi. Parametrning har xilqiymatlarigaγelementarchiziqning har xilnuqtalarimoskeladi. $f$akslantirishgaγelementarchiziqni**parametrlash**deb ataladi. Bitta elementarchiziqdabirnechta har xilparametrlashmavjudbo‘lishimumkin. Parametrlashbilanta’minlanganchiziqni**parametrlanganchiziq**deb ataladi.

(3) tenglamalarsistemasiningbirinchitenglamasini $\vec{i}$ ga, ikkinchisini $\vec{j}$ ga, uchinchisini $\vec{k}$ gako‘paytirib, natijanihadma-had qo‘shamiz:

$$x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}.$$

Bu yerda

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

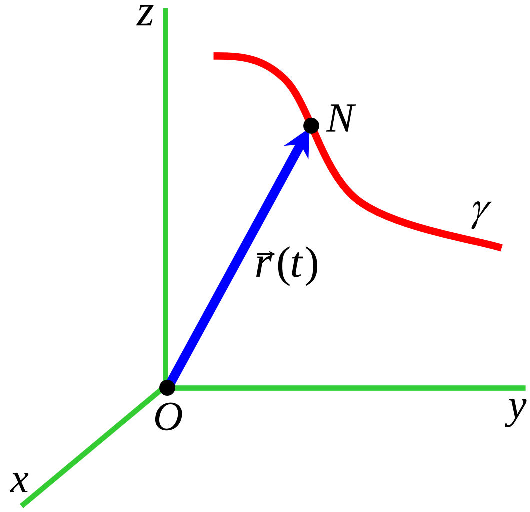
va

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

belgilashlarnikiritsak

$\vec{r} = \vec{r}(t)$ (4)

tenglamahosilbo‘ladi. (4) tenglamagaelementarchiziqning**vektor tenglamasi**deyiladi. Bu yerda $\vec{r}(t)$ – koordinatalari $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ bo‘lganva (a, b) intervaldaniqlangan vektorfunksiyadir. Demak, γelementarchiziqni $\vec{r}(t)$ vektorfunksiyaning godografisifatidaqarash mumkinekan (6–chizma).



6–chizma.

Ta’rif.γelementar chiziqni**regulyarchiziq** deb ataladi, agarda u $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ parametriktenglamalaribilanberilib, $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funksiyalar$k$marta $(k\geq1)$differensiallanuvchibo‘lib,

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0$$

shartibajarilsa.

Agar $k = 1$ bo‘lsa, u vaqtdaγelementarchiziqni**silliqchiziq**deyiladi.

Chiziq**analitik** deb ataladi, agardauningparametriktenglamalarianalitikfunksiyalardaniboratbo‘lsa.

Ba’zichiziqlarningtenglamalarini

$$\left.\begin{aligned} x &= t, \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

buyerda$t\in(a, b)$, yoki

$$\left.\begin{array}{l} y = y(x), \\ z = z(x) \end{array}\right\} \qquad (6)$$

buyerda $x \in (a, b)$, ko‘rinishdayozishmumkin. Ayrimmasalalarniyechishdachiziqningbundaytenglamalariqulayliktug‘diradi. Shu sababli, qandayhollardachiziqningtenglamasini (5) yoki (6) ko‘rinishdayozishmumkin, degansavoltug‘iladi. Bu savolgaquyidagiteoremajavobberadi.

1-teorema. Agar $x=f_1(t)$, $y=f_2(t)$, $z=f_3(t)$ ifodalar γ regulyarchiziqning, parametrning $t=t_o$ qiymatigamoskeluvchi $M_o(x_o; y_o; z_o)$ nuqtasiatrofidaparametriktenglamalaribo‘lib, $f_1'(t_o) \neq 0$ bo‘lsa, u vaqtda $M_o(x_o; y_o; z_o)$ nuqtaningbiroratrofida γ chiziqtenglamalarini

$$\left.\begin{array}{l} y = y(x), \\ z = z(x) \end{array}\right\}$$

shakldayozishmumkin.

Isbot. Oshkormasfunksiyalarhaqidagiteoremalargaasosan, x_o qiymatningshunday $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ atrofitopiladiki $(\delta>0)$, buatrofdaaniqlanganbirqiymatli, uzluksiz $t = \lambda(x)$ funksiyamavjudbo‘lib, u $t_o = \lambda(x_o)$ va $x=f_1(\lambda(x))$ tenglamalarniqanoatlantiradi. Oxirgitenglikni $x=x_o$ qiymatdadifferensiallasak

$$1 = f_1'(\lambda(x_o))\cdot\lambda'(x_o).$$

Teoremashartigaasosan $f_1'(t_o) \neq 0$ bo‘lganiuchun $\lambda'(x_o) \neq 0$ ekanligikelibchiqadi. Bu tengsizlikesa $\lambda(x)$ funksiyaning $(x_o-\delta, x_o+\delta)$ intervaldamonotonekanliginibildiradi. Shu sababli biz $t=\lambda(x)$ funksiyada t ningo‘rniga x niparametrqilibolishimizmumkin. $t=\lambda(x)$ ifodaniteoremashartidagi $y = f_2(t)$ va $z = f_3(t)$ tenglamalargaqo‘ysak

$$y = f_2(\lambda(x)) = y(x),$$

$$z = f_3(\lambda(x)) = z(x)$$

kelibchiqadi, buyerda $x_o-\delta < x < x_o+\delta$. Teoremaisbotbo‘ldi.

Analitikgeometriyadanma’lumki, fazodato‘g‘richiziqni, shuto‘g‘richiziqnuqtalarining x, y, z

koordinatalariganisbatanikkitabirgalikdabo‘lganchiziqlitenglamalarsistemasiorqaliberishmumkinedi. Shu sababli tabiiy ravishda quyidagi savol tug‘iladi.

Qanday hollarda ushbu

$$\left.\begin{array}{l}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{array}\right\} \qquad (7)$$

tenglamalar sistemasi biror chiziqni ifodalaydi ? Bu savolga quyidagi teorema javob beradi.

2-teorema. Agar G to‘plam koordinatalari (7) sistemani qanoatlantiruvchi nuqtalar to‘plami bo‘lib, $M_o(x_o;\ y_o;\ z_o)\in G$ nuqtaning biror B_o atrofida $\varphi(x, y, z)$, $\psi(x, y, z)$ funksiyalar uzluksiz va birinchi tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo‘lib, M_o nuqtada

$$\text{rang}\begin{pmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z\\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z\end{pmatrix}=2$$

bo‘lsa, u vaqtda M_o nuqtaning shunday $B'_o\subset B_o$ atrofi mavjudki, G to‘plamning bu atrofdagi qismi silliq chiziq bo‘ladi.

Isbot. Umumiylikni cheklamasdan, M_o nuqtada

$$\begin{vmatrix}\varphi'_y & \varphi'_z\\ \psi'_y & \psi'_z\end{vmatrix}\neq 0$$

bo‘lsin deb faraz qilaylik. U vaqtda oshkormas funksiyalar haqidagi teoremalarga asosan, shunday δ_1, δ_2, δ_3 musbat sonlar topiladiki, $(x_o-\delta_1,\ x_o+\delta_1)$ intervalga tegishli har bir x uchun (7) tenglamalar sistemasi yagona $y=y(x)$, $z=z(x)$ yechimga ega bo‘lib, bu yechimlar

$$|y_o-y(x)|<\delta_2,\ \ |z_o-z(x)|<\delta_3$$

tengsizliklarni qanoatlantiradi. Shuningdek $y(x)$ va $z(x)$ funksiyalar mos ravishda $(y_o-\delta_2,\ y_o+\delta_2)$ va $(z_o-\delta_3,\ z_o+\delta_3)$ intervalda birinchi tartibli uzluksiz hosilaga ega. Demak, M_o nuqtaning $B'_o=\{(x;y;z): |x_o-x|<\delta_1,\ |y_o-y|<\delta_2,\ |z_o-z|<\delta_3\}$ atrofida G to‘plam

$$\left.\begin{array}{l}x=t,\\ y=y(t),\\ z=z(t)\end{array}\right\}$$

parametriktenglamalarbilananiqlanuvchisilliqchiziqbo‘ladi, buyerda$x_o – \delta_1 < t < x_o + \delta_1$. Teoremaisbotbo‘ldi.

(7) tenglamalarsistemasiniEvklidfazosidagichiziqning**oshkormastenglamalari** deb ataladi.

Ta’rif. Hamma nuqtalaribirtekislikkategishlibo‘lganchiziqni**tekischiziq** deb ataladi.

Tekischiziqnuqtalaritegishlibo‘lgantekislikni*Oxy*tekisligi deb hisoblanadi. Shu sabablitekischiziqning**parametriktenglamalari**quyidagichabo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \qquad (8).$$

(8) tenglamalarsistemasida*t*niyo‘qotsak

$$f(x, y) = 0 \qquad (9)$$

tenglamahosilbo‘ladi. (9) tenglamanitekischiziqning**oshkormastenglamasi** deb ataladi.

(9) tenglamani*y*ganisbatanyechsak

$$y = y(x) \qquad (10).$$

(10) tenglamatekischiziqning**oshkortenglamasi** deb ataladi.

Oshkormasfunksiyalarhaqidagiteoremalargaasosan, agar tekischiziqparametriktenglamalaribilanberilib, parametrning$t=t_o$ qiymatibilananiqlanuvchi$N_o(x_o; y_o)$ nuqtada

$$x'(t_o) \neq 0 \quad \text{yoki} \; y'(t_o) \neq 0$$

shartbajarilsa, u vaqtdatekischiziqbunuqtaningbiroratrofidamosravishda

$$y = y(x) \text{yoki} \; x = x(y)$$

ko‘rinishdagioshkortenglamalarningbiribilanifodaetiladi.

Xuddishuningdek, agar tekischiziqoshkormastenglamasibilanberilib,$N_o(x_o; y_o)$ nuqtada

$$f_x'(x_o; y_o) \neq 0 \quad \text{yoki} \; f_y'(x_o; y_o) \neq 0$$

shartibajarilsa, u vaqtdatekischiziqbunuqtaningbiroratrofidamosravishda

$$y = y(x) \text{yoki} \; x = x(y)$$

ko‘rinishdagioshkortenglamalardanbiribilanifodaetiladi.

Shundayqilibtekischiziqning

$$x'(t_o) = 0, \quad y'(t_o) = 0$$

yoki

$$f_x'(x_o; y_o) = 0, \quad f_y'(x_o; y_o) = 0$$

tengliklarniqanoatlantiruvchi$M_o(x_o; y_o)$ nuqtalariningatrofidachiziqoshkortenglamabilanifodaetilmayqolishimumkinekan. Bunday nuqtalarmaxsusnuqtalar deb ataladi. Tekischiziqningmaxsusnuqtasiatrofidagituzilishinikeyinroqo‘rganamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazorat savollari

1. Chiziqvauningturlariniaytibbering.
2. Elementarchiziq deb nimagaaytiladi? Misollarkeltiring.
3. Sooda chiziqlarniaytibbering.
4. Oshkormasko`rinishdaberilganchiziqlargamisollarkeltiring.
5. Parametrikko`rinishdaberilganchiziqqamisollarkeltiringvachiziqgrafiginichizing.
6. Qandayakslantirishlaruzluksizakslantirishlardeyiladi? Misollarkeltiring.
7. Umumiychiqqamisollaraytibbering.
8. Elementarchiziqningta’rifi.
9. Oddiychiziqningta’rifi.
10. Regulyarchiziqningta’rifi.
11. Qandaychiziqqasilliqchiziq deb ataladi ?
12. E_3fazodachiziqningparametriktenglamalari.
13. Evklidfazosidachiziqningvektortenglamasi.
14. Regulyarchiziqhaqidagiteorema.
15. E_3fazodachiziqningoshkormastenglamalari.
16. Tekischiziqningta’rifi.
17. Tekischiziqningparametriktenglamalari.
18. Tekischiziqningoshkormastenglamasi.
19. Tekischiziqningoshkortenglamasi.
20. Tekischiziqningvektortenglamasi.

16.2.CHIZIQNING ODDIY VA MAXSUS NUQTALARI

Reja:

1. Regulyaryoy
2. Oddiyvamaxsus nuqta ta'rifi
3. Oshkormas funktsiyaning mavjudlik teoremasi
4. CHiziq nuqtasining oddiy bo'lishi uchun yetarli shart
5. Karrali maxsus nuqtalar
6. Maxsus nuqta atrofida chiziqning tuzilishi
7. Maxsus nuqta tiplari
8. Misollar

Tayanch iboralar: regulyar yoy, oddiy nuqta, maxsus nuqta, ajralgan maxsus nuqta, tugun maxsus nuqta, I-tur qaytish maxsus nuqtasi, II-tur qaytish maxsus nuqtasi.

Mavzuningbayoni:

CHiziqoshkormasko'rinishda, ya'ni

$F(x, y) = 0$ (1)

oshkormasfunktsiyaorqaliberilganbo'lsin.

Ba'zan (1) tenglamani y ganisbatanyechib

$y = f(x) \quad (a \le x \le b)$ (2)

nikeltiribchiqarishimizmumkin.

Ta'rif: Agar (2) funktsiya

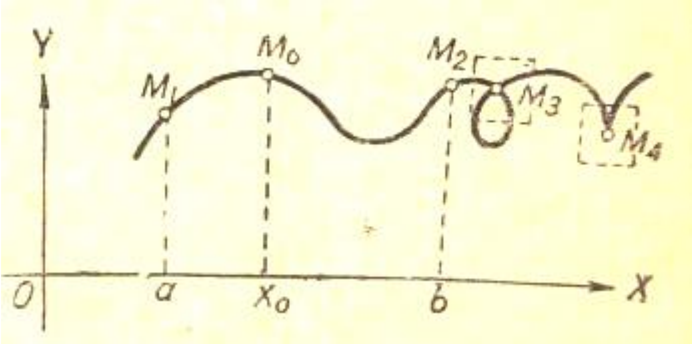
1) bir qiymati 2) uzluksiz va 3) tegishli tartibli uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, u holda (2) tenglamani qanoatlantiruvchi nuqtalar to'plamiga (1) chiziqning regulyar yoyi deyiladi.

Agar (1) chiziqdagi nuqtaning yetarlicha kichik atrofi regulyar yoy bo'lsa, bunday nuqtani chiziqning oddiy nuqtasi deb ataladi.

CHiziqning oddiy bo'lmagan barcha nuqtalarini uning maxsus nuqtalari deyiladi.

$M_0(x_0, y_0)$ oddiy nuqta atrofida (1) va (2) tenglamalartengkuchlidir.

4-chizmadagi chiziqda $[a, b]$ segmentdaaniqlangan M_1M_2 yoyningbarchanuqtalarioddiynuqtalarbo'lib M_3 maxsusnuqtadir.



4-chizma

$f'(x)$ - uzluksizbo’lganidanchiziqningharbiroddiynuqtasidatayinurinmao’tkazishmumkinvanuqtaregulyaryoybo’ylibo’zgarsa, urinmahamyo’nalishinio’zgartiradideyishgaasosbo’ladi. M_3 maxsusnuqtadanikkitaregulyaryoyo’tadi.

SHunuqtadaurinmaikkita. Buesa $f(x)$ funktsiyaningbirqiymatliliktalabigazidbo’ladi. (1) chiziqnuqtasiningoddiybo’lishiuchunyetarlishartnimatematikanalizdagioshkormasfunktsiyaningmavjudlikteoremasiorqaliifodalashmumkin.

Teorema: Agar $M_0(x_0, y_0)$ nuqta (1) chiziqdayotib $F(x,y)$ funktsiyaM$_0$nuqtaatrofidauzluksizxususiyhosilalargaegava $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$ bo’lsa, uholdafaqatbitta $y = f(x)$ funktsiyamavjudki, uM$_0$nuqtaningbiroratrofida (1) tenglamaniqanoatlantiradiva $x = x_0$ da $y = y_0$ qiymatqabulqiladi.

$y = f(x)$ funktsiyashuatrofdauzluksizhosilagaegabo’lib,

$$\frac{dy}{dx} = f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}..$$

Agar M_0 nuqtada $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$ lekin, $\frac{\partial F}{\partial x} \neq 0$ bo’lsa,ham teoremao’rinlibo’ladi.

Teoremashartiniqismano’zgartirishmumkin.

Masalan: M_0 nuqtada F'_x, F'_y hosilalarbirdaniganolgaaylanmasa, ya’ni $F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2} \neq 0$ bo’lsa, $F(x,y) = 0$ niyechibyuqoridagiuchtashartlarniqanoatlantiruvchi $y = f(x)$ funktsiyanianiqlashmumkin.

Ta’rif: Agar (1) chiziqdagibiror $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada $F_x^{\ 2} + F_y^{\ 2} \neq 0$ bo’lsa, M_0 nuqta oddiybo’ladi.

$M_0(x_0, y_0)$ nuqta (1) chiziqningmaxsusnuqtasibo’lsa $F(x_0, y_0) = 0,$

$$\frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial x}=0 \qquad \frac{\partial F(x_0,y_0)}{\partial y}=0 \qquad (3)$$

tengliklar o'rinli bo'lishi kerak.
Oddiy nuqtada urinma tenglamasi

$$(x-x_0)F_x'(x_0,y_0)+(y-y_0)F_y'(x_0,y_0)=0 \qquad (4)$$

bo'lib, normal tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{F_x'(x_0,y_0)}=\frac{y-y_0}{F_y'(x_0,y_0)} \qquad (5).$$

Endi chiziq maxsus nuqtalarini va maxsus nuqtalar atrofida chiziqning tuzilishini tekshiraylik. (1) chiziq uchinchi tartibligacha xususiy hosilalarga ega bo'lsin. $F_x', F_y', F_{xx}'', F_{xy}'', F_{yy}''...$

Maxsus nuqtada (3) tengliklar o'rinli bo'lib, ikkinchi tartibli xususiy hosilalar orasida aqalli bittasi nolga teng bo'lmasin.

Masalan: $F_{yy}''\neq 0$. CHiziqning (3) shart bajariladigan $M_0(x_0,y_0)$ maxsus nuqtasini ikki karrali (qo'shaloq) nuqta deyiladi.

Agar (3) dan tashqari ikkinchi tartibli xususiy hosilalar $M_0(x_0,y_0)$ nuqtada nolga aylanib uchinchi tartibli xususiy hosilalar orasida nolmasi mavjud bo'lsa, u holda M_0 maxsus nuqtani uch karrali deyiladi.

Faraz qilaylik, M_0 maxsus nuqtadan chiziqning regulyar yoyi o'tsin. CHiziqning $M_0(x_0,y_0)$ maxsus nuqtasi orqali o'tuvchi regulyar yoyi (2) ko'rinishdagi tenglamaga ega bo'lsin. (1) ga (2) ni qo'ysak $F(x,f(x))=0$ ayniyat kelib chikadi. Bu ayniyatni x bo'yicha ikki marta differentsiallaymiz.

$$F_x'+F_y'f'(x)=0$$

$$F_{xx}''+2F_{xy}''f'(x)+F_{yy}'' \quad f^2(x)+F_y'f''(x)=0$$

Bu tenglamalardanbirinchisi M_0 nuqtadaayniyatdaniborat, chunki

$F_x'(x_0,y_0)=0,\ F_y'(x_0,y_0)=0$.

Ikinchisidanesa

$$F_{xx}''(x_0,y_0)+2F_{xy}''(x_0,y_0)f'(x_0)+F_{yy}''(x_0,y_0)f^2(x_0)=0$$

kelibchiqadi.

$$f'(x_0)=k,\ F_{xx}''(x_0,y_0)=a_{11},\ \ F_{xy}''(x_0,y_0)=a_{12}\ F_{yy}''(x_0,y_0)=a_{22}$$

Belgilash kiritsak

$$a_{22}k^2+2a_{12}k+a_{11}=0 \qquad (6)$$

kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz. k ning har bir qiymati (1) chiziq regulyar yoy urinmasining mos yo'nalishini aniqlab beradi. Demak, M_0 maxsus nuqtadan ikkitadan ortiq bo'lmagan regulyar yoy o'tadi. Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1) $D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$ (6) tenglama ikkita turlicha haqiqiy ildizga ega. M_0

nuqtadan chiziqning ikkita rerulyar yoyi o'tadi.

2) $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ (6) tenglamaning ildizlari qo'shma kompleks. M_0nuqtadan chiziqning regulyar yoyi o'tmaydi.

3) $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ tenglama karrali ildizga ega. M_0 maxsus nuqtadan o'tuvchi regulyar yoylar umumiy urinmaga ega bo'ladi.

Birinchi holda M_0 maxsus nuqtni tugun nuqta, ikkinchi holda ajralgan nuqta deyiladi. Uchinchi holda esa M_0 maxsus nuqta yoki regulyar yoylarning urinish nuqtasi, yoki birinchi tip qaytish nuqtasi yoki ikkinchi tip qaytish nuqtasi bo'lishi mumkin.

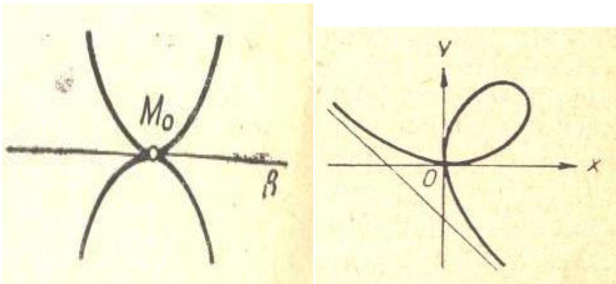
Yuqoridagi 3- ta holgamisolkeltiraylik:

a) $y^2 - x^4 = 0$ $(0,0)$ maxsus nuqta.

b) $x^3 - y^3 - 3axy = 0.$ $(0,0)$ maxsus nuqta.

Dekartyaprog'i uchun $k_1 = 0,\ k_2 = \infty$ $a^2{}_{12} - a_{11}a_{12} = 9a^2 > 0$ (0,0)tugun nuqta

v) $F(x,y) = x^4 - 4x^2 - y^2 = 0$ $(0,\ 0)$ maxsus nuqta



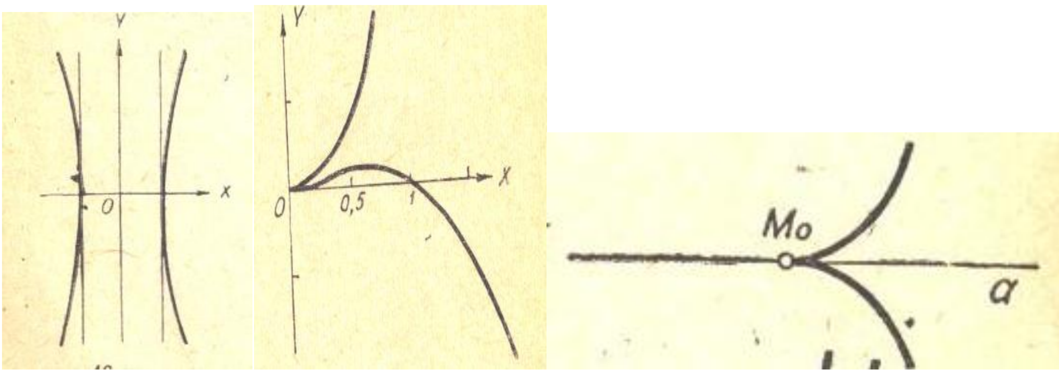
a) b)

5-chizma

$a^2{}_{12} - a_{11} \cdot a_{22} = 0 - 16 < 0$ ajralgan nuqta

g) $0(0,0)$ $-$ 2 tip qaytishnuqtasi.

d) $0(0,0) -$ 1 tip qaytishnuqtasi.



a) b) d)

5-chizma

Agar $a_{11} = 0,\ a_{12} = 0,\ a_{22} = 0$ bo'lsa,

$$F'''_{xxx} + 3F'''_{xxy} f'(x_0) + 3F'''_{xyy} f^2(x_0) + F'''_{yyy} f^3(x_0) = 0$$

yoki

$$a_{222}k^3 + 3a_{122}k^2 + 3a_{112}k + a_{111} = 0 \qquad (7)$$

tenglamaningildizlariyokiuchtaturlichahaqiqiyyokibittahaqiqiyvabirjuft qo'shmakomplekssonlardaniboratbo'lishimumkin.

Mos ravishda $M_0(x_0, y_0)$ - maxsus nuqta uchkarralibo'lishimumkinyoki M_0 nuktadanchiziqningfaqatbittaregulyaryoyio'tishimumkin.

Masalan: $(x^2 + y^2)^2 - ax(x^2 - y^2) = 0$

Uchyaproqli gul deyiladi. $a_{111} = 2a \neq 0,\ k_1 = 1, k_2 = -1,\ k_3 = \infty$

Urinmatenglamalari: $x = y,\ y = -x,\ x = 0$

γtekischiziq$f(x, y) = 0$ oshkormastenglamasibilanberilganbo'lsin. Oshkormasfunksiyalarhaqidagiteoremagaasosan, agar chiziqdagibiror$M_o(x_o; y_o)$ nuqtada$f_x$va$f_y$xususiyhosilalarningkamidabittasinoldanfarqlibo'lsa, u vaqtda$M_o(x_o; y_o)$ oddiy nuqta bo'ladi.

Demak, $M_o(x_o; y_o)$ nuqta chiziqningmaxsusnuqtasibo'lsa, bunuqtada

$$f'_x(x_o; y_o) = 0, \qquad f'_y(x_o; y_o) = 0$$

tengliklarbajariladi.

Endi$f(x, y)$ funksiyauchinchitartibgachauzluksizxususiyhosilalargaegadebfarazqilib, maxsusnuqtaatrofidachiziqningtuzilishinitekshiramiz.

Chiziqning$M_o$maxsusnuqtasidaikkinchitartibliuchtaf_{xx}, f_{xy}, f_{yy}hosiladanaqallibittasinoldanfarqlibo'lsin, masalan, $f_{yy} \neq 0$. Agar $f_{yy} = 0$ bo'lsa, koordinatao'qlariniburib, f_{yy}ningnoldanfarqlibo'lishigaerishishmumkin. Chiziqningbundaynuqtasini**ikkikarrali nuqta** deb ataladi.

$M_o$maxsusnuqtadabirinchivaikkinchitartiblibarchaxususiyhosilalarnolgaaylanib, uchinchitartiblif_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy}xususiyhosilalardankamidabittasinoldanfarqlibo'lsa, bundaynuqtani**uchkarrali nuqta** deb ataladi.

Biz $M_o$nuqtadanchiziqningbirorregulyaryoyio'tadi deb farazqilaylik. Bu yoy$y = y(x)$ tenglamabilanifodalanganbo'lsin, bunday$y_o = f(x_o)$. y o'rniga$y(x)$ niqo'ysak, tekischiziqning$f(x, y) = 0$ oshkormastenglamasiayniyatgaaylanadi, chunki$y = y(x)$ chiziqqaqarashliregulyaryoydir.

Shuninguchunchiziqningoshkormastenglamasini$x$bo‘yichaikkimartadifferensiallashmumkin:

$$f_x + f_y \cdot y' = 0 \qquad (1),$$

$$f_{xx} + 2 f_{xy} \cdot y' + f_{yy} \cdot y'^2 + f_y \cdot y'' = 0 \qquad (2).$$

(1) tenglikayniyatdaniborat, chunki

$$f_x^o = 0, \quad f_y^o = 0.$$

(2) tenglikushbuko‘rinishnioladi

$$f_{xx}^o + 2 f_{xy}^o \cdot y_o' + f_{yy}^o \cdot y_o'^2 = 0 \qquad (3).$$

Demak, qilinganfarazе’tiborgaolinsa, ya’nichiziqning$M_o$maxsusnuqtasidano‘tadigan$y = y(x)$ regulyaryoyibordebqaralsa, uningshunuqtasidagi$y'(x_o)$ burchakkoeffitsiyenti (3) kvadrattenglamaniqanoatlantiradi.

Agar

$$a_{11} = f_{xx}^o, \quad a_{12} = f_{xy}^o, \quad a_{22} = f_{yy}^o, \quad k = y'(x_o)$$

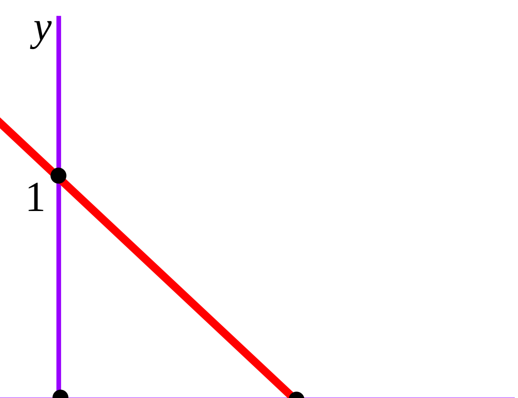
deb belgilashlarkiritsak, u vaqtda (3) tenglamaquyidagiko‘rinishnioladi:

$$a_{11} + 2a_{12}k + a_{22}k^2 = 0 \qquad (4).$$

(4) tenglama$k$ganisbatanikkinchidarajalibo‘lganiuchunikkikarrali$M_o$nuqtasidanutuvchivaburchakkoeffitsiyentlari (4) tenglamaniqanoatlantiruvchiregulyaryoyikkitadanortiqemasdir. (4) kvadrattenglamaniyechishdaquyidagiuchholl bo‘lishimumkin.

1) $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0.$

Bu holda (4) kvadrattenglamaningildizlariqo‘shmakomplekssonlarbo‘ladi. Demak, M_o nuqtaorqalihaqiqiyregulyaryoyo‘taolmaydi. Chunkiaksholdauningburchakkoeffitsiyentikompleks son bo‘laredi. $M_o$nuqtanibu holda**ajratilgan nuqta**deb ataladi.



Masalan,

$$\left(x^2+y^2\right)(x+y-1)=0$$

chiziqqaqarashli$O(0;\ 0)$

nuqta ajratilgan nuqtabo‘ladi.

Bu chiziqkoordinataboshi

bo‘lgan$O(0;\ 0)$ nuqta va

koordinataboshidano‘tmagan

$x+y=1$ to‘g‘richiziqdan

iborat (28–chizma).28–chizma.

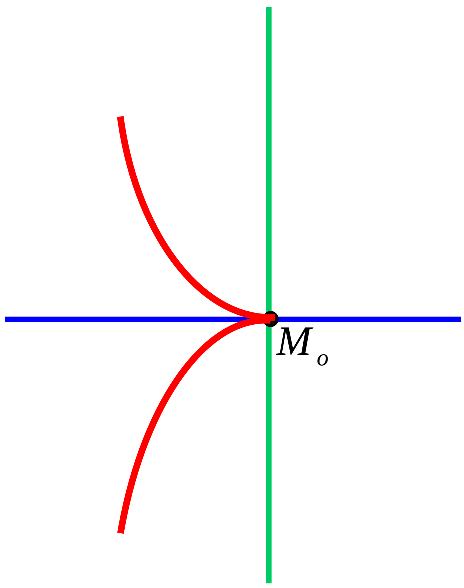
2) $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0.$

Bu holda (4) tenglamaikkita har xil$k_1$va$k_2$haqiqiyildzigaegabo‘ladi. M_o nuqtaorqalichiziqningikkitaregulyaryoyio‘tadi. Bu regulyaryoylar har xilurinmalargaegabo‘lib, buurinmalarningburchakkoeffitsiyentlari$k_1$va$k_2$bo‘ladi. $M_o$nuqtanibuholda**tugun nuqta** deb ataladi.

Masalan,

$$\left(x^2+y^2\right)^2-2a^2\left(x^2-y^2\right)=0$$

Bernullilemniskatasiuchunkoordinataboshitugunnuqtadir.



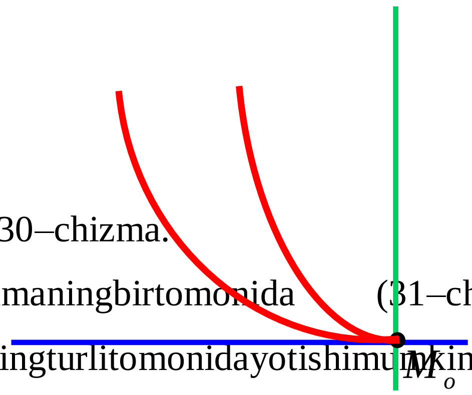
3) $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$

Bu holda (4) tenglamaningildizihaqiqiyvakarralidir: $k_1=k_2$. Shu sababli$M_o$nuqtadachiziqbittahaqiqiyurinmagaega. Lekin $M_o$nuqtadaurinmachiziqyoylarigaturlichaurinishimumkin. Bu yerdaquyidagihollarbo‘ladi.

a) $M_o$nuqtadaikkalayoyshunuqtadagiurinmaningturlitarafidajoylashib, normaldanbirtomondayotadi (29–chizma). $M_o$nuqtanibu holda**birinchi tip qaytishnuqtasi**deyiladi.

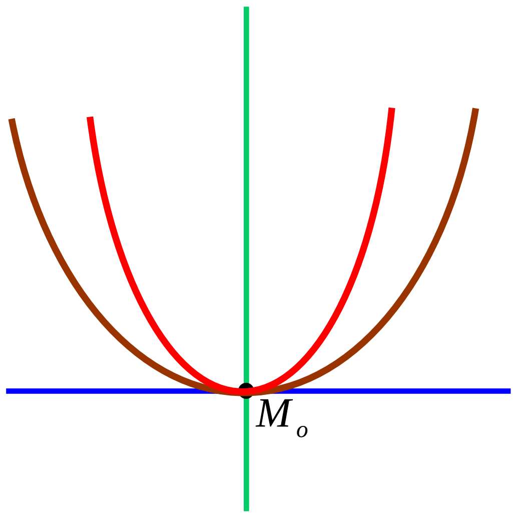
29–chizma.

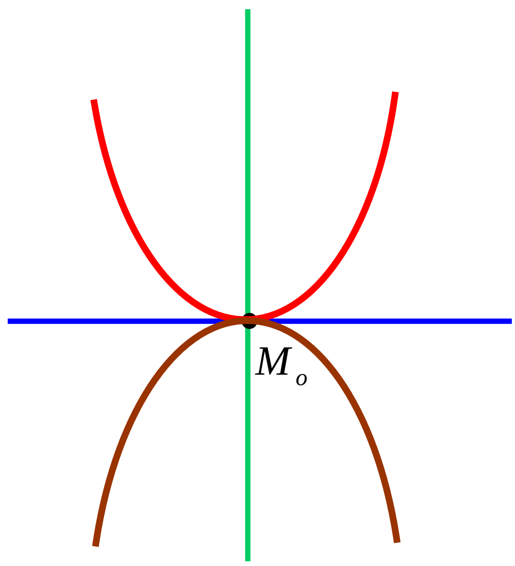
b) $M_o$nuqtadaikkalayoy ham urinmabilannormalningbirtomonida yotadi (30–chizma). $M_o$nuqtanibu holda**ikkinchitip qaytishnuqtasi** deyiladi.



30–chizma.

v) $M_o$nuqtadachiziqningyoylariurinmaningbirtomonida (31–chizma) yokiturlitomonida (32–chizma), lekinnormalningturlitomonidayotishimumkin. Bu holda$M_o$nuqtanichiziqning**o‘z–o‘zigaurinishnuqtasi**deyiladi.





31–chizma. 32–chizma.

g) M_o nuqtaatrofidachiziqningshunuqtadanboshqabirorta ham nuqtasibo‘lmasligimumkin. Bu holdaM_o nuqta**ajratilgan nuqta** bo‘ladi.

Masalan, $y^2 - x^4 - x^6 = 0$ chiziquchun$O(0;\ 0)$ nuqtada$D = 0$ bo‘lsa ham, bu nuqta ajralgannuqtadir.

Endi uchkarralinuqtalargato‘xtabo‘tamiz. Bu holda

$$f_x = f_y = f_{xx} = f_{xy} = f_{yy} = 0 \qquad (5)$$

bo‘lib, uchinchitartibli

$$f_{xxx},\ f_{xxy},\ f_{xyy},\ f_{yyy}$$

xususiyhosilalardankamidabittasinoldanfarqlibo‘lsindeymiz, masalan,

$$f_{yyy} \neq 0$$

bo‘lsin. U vaqtda (2) tenglamay'_ovay''_olarganisbatanayniyatgaaylanib, natijabermaydi. Bunday holda (2) tenglamani$x$ganisbatandifferensiallab, (5) tengliklarnie’tiborgaolib,

$$y'_o = y'(x_o)$$

nianiqlashuchunuchinchidarajalitenglamahosilqilamiz:

$$f^o_{xxx} + 3f^o_{xxy} \cdot y'_o + 3f^o_{xyy} \cdot y'^2_o + f^o_{yyy} \cdot y'^3_o = 0 \qquad (6).$$

Demak, chiziqninguchkarrali$M_o$nuqtasidano‘tuvchiyoylargao‘tkazilganurinmalarningburchakkoeffitsiyentlarishunuqtada (6) uchinchidarajalitenglamaniqanoatlantiradi. Butenglamaningildizlarik_1, k_2, k_3 bo‘lsin.

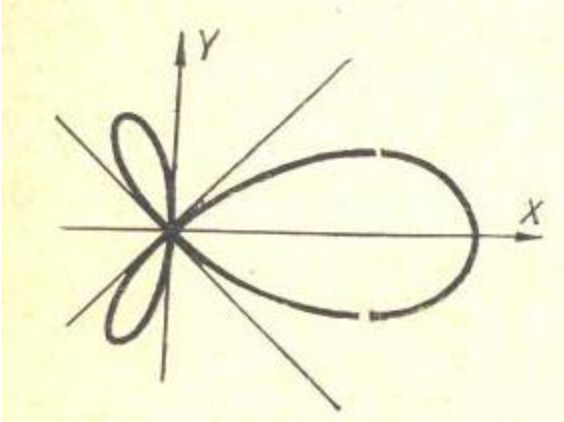
(6) tenglamaningharbirsoddaildizigachiziqningbittayoyimoskelib, u shumaxsusnuqtadano‘tadivaungao‘tkazilganurinmaningburchakkoeffitsiyenti, tenglamaningshusoddaildizigatengbo‘ladi. Bu yerdaquyidagihollaryuzberadi.

a) k_1, k_2, $k_3$ildizlarhaqiqiyvahirxil. Bu holda$M_o$nuqtadanchiziqninguchtayoyio‘tadi.

b) k_1 – haqiqiyson, k_2, k_3 – kompleks sonlar. $M_o$nuqtadanchiziqningbittayoyio‘tadi.

v) $k_1 = k_2 = k_3$. Bu holanchamurakkabbo‘lib, $M_o$nuqtadachiziqningtuzilishiturlichabo‘ladi. Biz ungato‘xtabo‘tirmaymiz.

Endi parametrikko’rinishdaberilganchiziqning P maxsusnuqtasiatrofidatuzilishinitekshiraylik.



6-chizma

$\gamma : x = x(t),\ \ y = y(t),\ \ z = z(t)$ bo’lib (8)

$x'^2 + y'^2 + z'^2 \neq 0$ (9)

bo’lsa $P(t_0)$ - oddiynuqtabo’ladi. Agarchiziqni (8) ko’rinishdaifodalabbo’lmasa $P(t_0)$ maxsusnuqtabo’ladi.

Bizgabirorγchiziqberilganbo‘lib, $M_o$ungategishli nuqta bo‘lsin.

Ta’rif. Agar γchiziq$M_o$nuqtasiatrofidasilliqparametrlansa, u vaqtda$M_o$nuqtaniγchiziqning**oddiynuqtasi** deb ataladi.

Agar γchiziq$M_o$nuqtasiatrofidasilliqparametrlanmasa, u vaqtda$M_o$nuqtaniγchiziqning**maxsusnuqtasi**deb ataladi.

Biz faqattekischiziqlarningmaxsusnuqtalariatrofidagituzilishinitahlilqilamiz. Ma’lumkitekischiziqparametrik, oshkorvaoshkormastenglamalaribilanberilishimumkin. Bu hollarning har birinialohidaqarabchiqamiz.

1. Agar γtekischiziq$y = y(x)$ oshkortenglamasibilanberilsa, u vaqtda$x = t$ almashtirisholib, tekischiziqningoshkortenglamasini har doim

$$\left.\begin{aligned} x &= t, \\ y &= y(t) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

ko‘rinishdayozishmumkin. (1) tenglamalarsistemasi

$$x'^2 + y'^2 = 1 + y'^2 \neq 0$$

shartniqanoatlantirganiuchun, buchiziqninghammanuqtalaridasilliqparametrlashmavjudbo‘ladi. Demak, oshkortenglamasibilanberilgantekischiziqninghammanuqtalarioddiy nuqta bo‘lib, maxsusnuqtalaribo‘lmasekan.

2. Agar γtekischiziq$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametriktenglamalaribilanberilib, $M_o(t_o)$ nuqta atrofida$\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalarningbirortasinoldanfarqlibo‘lsa, u vaqtda

$$\varphi'^2 + \psi'^2 \neq 0$$

shartbajarilab, silliqchiziqta’rifigaasosan, $M_o(t_o)$ nuqta γchiziqningoddiynuqtasibo‘ladi.

Demak, γtekischiziq$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametriktenglamalaribilanberilib, $M_o(t_o)$ nuqta γchiziqningmaxsusnuqtasibo‘lsa, u vaqtdabu$M_o(t_o)$ maxsusnuqtagamosparametrning$t_o$qiymati

$$\left.\begin{array}{l}\varphi'(t_o) = 0,\\ \psi'(t_o) = 0\end{array}\right\}$$

tenglamalarniqanoatlantirishikerak.

Parametriktenglamalaribilanberilgantekischiziqningoddiyvamaxsusnuqtalarihaqidagiquyidagiteoremamuhimahamiyatgaega.

Teorema.γtekischiziq$x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ parametriktenglamalaribilanberilib, $\varphi(t)$va$\psi(t)$ funksiyalarning$M_o(t_o)$ nuqtasidagibirinchinoldanfarqlihosilasiningtartibitoqbo‘lsa, $M_o$oddiynuqta, birinchinoldanfarqlihosilasiningtartibijuftbo‘lsa, $M_o$maxsusnuqtabo‘ladi.

Isbot. Umumiyliknisaqlaganholda, $M_o$nuqtanikoordinataboshi, $t$parametrning$M_o$nuqtagamoskeluvchiqiymatininoldebqabulqilamiz. U vaqtda Teylor formulasigaasosan:

$$x = \frac{t^n}{n!}\left(\varphi^{(n)}(0) + \varepsilon_1(t)\right), \; y = \frac{t^m}{m!}\left(\psi^{(m)}(0) + \varepsilon_2(t)\right).$$

Aniqlikuchun$n \leq m$ deb olamiz. Aks holdakoordinatao‘qlarinialmashtirishmumkin.

Agar $n$toqbo‘lsa, u vaqtda$t$ningo‘rniga$\tau = t^n$parametrnikiritamiz, buyerdaτparametr$t$ningmonotonfunksiyasidir. Bu kiritilganparametrdachiziqsilliqbo‘ladi, chunki:

$$\left.\frac{d\varphi}{d\tau}\right|_{M_o} = \lim_{t\to 0}\frac{\varphi(t)}{t^n} = \lim_{t\to 0}\frac{t^n\left(\varphi^{(n)}(0)+\varepsilon_1(t)\right)}{t^n\cdot n!} =$$

$$= \lim_{t\to 0}\frac{\varphi^{(n)}(0)+\varepsilon_1(t)}{n!} = \frac{\varphi^{(n)}(0)}{n!} \neq 0.$$

Demak, $n$toqbo‘lganda$M_o$oddiy nuqta bo‘larekan.

Endi $n$juftbo‘lsin. Bu holda$\varphi(t)$funksiyaM_o nuqta atrofidaishorasinio‘zgartmaydi, ya’ni$\varphi^{(n)}(0)$ningishorasibo‘ladi. Demak, M_o nuqtaatrofidachiziq$x > 0$ yarimtekislikdayotadi, agarda$\varphi^{(n)}(0) > 0$ bo‘lsa, yoki$x < 0$ yarimtekislikdayotadi, agarda$\varphi^{(n)}(0) < 0$ bo‘lsa.

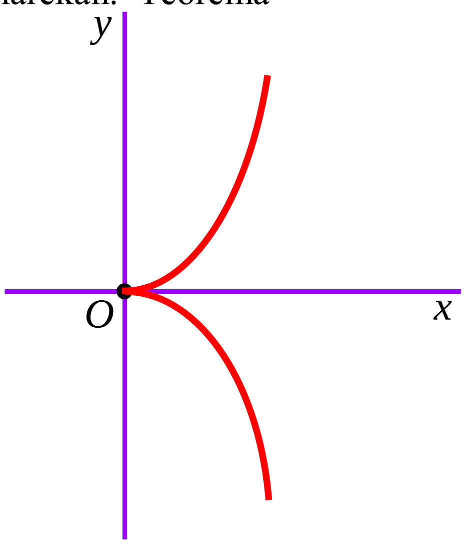
Faraz qilaylik$M_o$oddiy nuqta bo‘lsin. U vaqtdachiziqnibu nuqta atrofidasilliqparametrlashmumkin, ya’nichiziqtenglamasini$x = \varphi_1(\tau)$, $y = \psi_1(\tau)$ parametrikshakldayozib, $\varphi_1(\tau)$ va$\psi_1(\tau)$ funksiyalar

$$\varphi_1'^2 + \psi_1'^2 \neq 0 \qquad (2)$$

shartniqanoatlantiradi.

(2) tengsizlikdanva$\varphi_1$funksiyaningdarajasi$\psi_1$funksiyaningdarajasidanyuqoribo‘lmagani ($n \leq m$) uchun$M_o$nuqtada$\varphi'_1 \neq 0$ bo‘ladi.

Demak, $\varphi_1(\tau)$ funksiya$M_o$nuqta atrofidaishorasinio‘zgartirarekan. Shu sababliγchiziq$M_o$nuqta atrofida$x > 0$ va$x < 0$ yarimtekisliklarning har ikkisida ham joylashadi. Biz $M_o$oddiy nuqta bo‘lsin deb, qarama–qarshilikkakeldik. Shundayqilib$n$juftbo‘lganda$M_o$maxsus nuqta bo‘larekan. Teorema isbotbo‘ldi.



Agar $n = m$ bo‘lsa, u vaqtdakoordinatao‘qlariniburish bilan, buholni, yuqoridako‘rib chiqqanikkiholgakeltirish mumkin. Shuninguchunbuholni biz qarabo‘tirmaymiz.

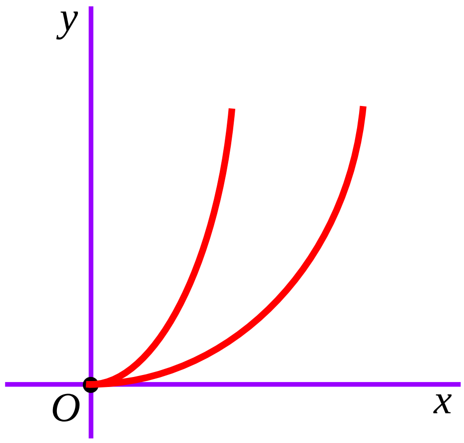
Ta’rif.n juftva$m$toq

bo‘lgandamaxsusnuqtani**birinchi tip qaytishnuqtasi** deb ataladi.

Bu holdachiziqurinmaning turlitomonida, normalningesabir tomonidajoylashadi (26–chizma).

26–chizma.

Ta’rif. n va m juft $(n < m)$ bo‘lgandamaxsusnuqtani **ikkinchi tip qaytishnuqtasi** deb ataladi.



Bu holdachiziqurinmaningvanormalningbirtomonidajoylashadi (27–chizma).

Parametriktenglamalaribilanberilganchiziqningmaxsusnuqtalari ana shuikkitipdaniboratxolos.

Teorema: Yassi chiziq $x = x(t),\ y = y(t)$ parametrikko’rinishdaberilganbo’lsin. Agar $P(t_0)$ nuqtadaginoldanfarqli $x^{(n)}(t_0),\ y^{(m)}(t_0)$ hosilatoqtartiblibo’lsa $P(t_0)$ oddiy nuqta, aksholdamaxsus nuqta bo’ladi.

n-juft, m-toqbo’lib, $n \le m$ bo’lsa P – birinchi tip qaytish nuqta, n - juft, m – juftbo’lsa, P – ikkinchi tip qaytish nuqta bo’ladi.

Masalan: $x = t - \sin t \ \ y = 1 - \cos t$ tsikloidauchun $(0,0)$ birinchi tip qaytishnuqtasibo’ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Chizqningoddiy nuqta ta`rifiniaytibbering.
2. Chiziqningmaxsus nuqta t`rifiniayting. Chiziqgrafikdaoddiyvamaxsusnuqtalarniajratibbering.
3. Chizqningqo`shaloq nuqta at`rifiniaytibbering.
4. Maxsus nuqta tiplarniaytibbering. Grafikdamaxsus nuqta tiplariniajratibbering.
5. Chiziqningkarralinuqtalarigamisollarkeltiring.

6. Parametrikko`rinishdaberilganchiziqningmaxsus nuqta tiplarinianiqlashuchununiqandayshartlargatekshirishkerak?
7. Oshkormasko`rinishdaberilganchiziqningmaxsus nuqta tiplarinianiqlashuchununiqandayshartlargatekshirishkerak?

15.TEKIS CHIZIQ ASIMPTOTALARI.ALGEBRAIK CHIZIQ ASIMTOTALARI.

Reja:

1. Asimptotata'rifi
2. $Ax + By + C = 0$ to'g'richiziqningasimptotabo'lishsharti
3. CHiziqning koordinat o'qlariga parallel asimptotalari
4. Asimptota urinmaning limit vaziyati
5. Algebraikchiziqasimptotalari
6. Misollar

Tayanchiboralar:verticalasimptota, gorizantalasimptota, og`maasimptota, algebraic chiziq.

Mavzuningbayoni:

Tekislikdaegrichiziqningregulyaryoyi

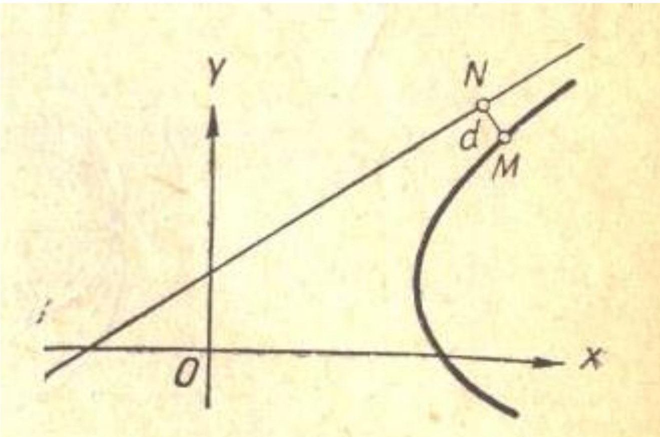
$x = x(t), y = y(t),\ t_0 \le t \le T$ (1)

parametriktenglamasiorqaliberilganbo'lsin. $t \to T$ da $M(t)$ chiziqbo'ylabcheksizlikkaintiladi.

$$\rho(M_0, M) = \sqrt{(x(t) - x_0)^2 + (y(t) - y_0)^2} \xrightarrow[t \to T]{} \infty \qquad (2).$$

1-Ta'rif: (1) egri chiziq ustidagi nuqta chiziq bo'ylab cheksiz uzoqlashganda, bu nuqta bilan birorta to'g'ri chiziq orasidagi masofa nolga intilsa, u holda bu to'g'ri chiziq egri chiziqning asimptotasi deyiladi.

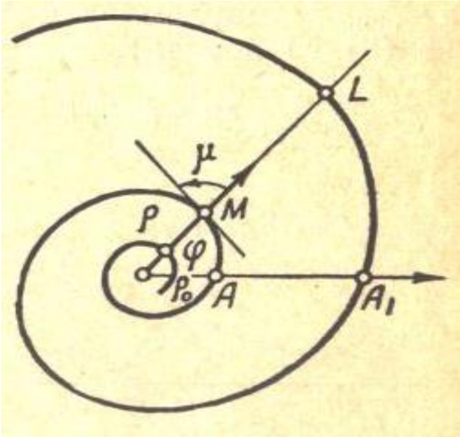
$\rho(M, N) \xrightarrow[t \to T]{} 0$, bunda $MN \perp l$.



8-chizma

Harqandaychiziquchun (2) shartningbajarilishigaqaramay, asimptotamavjudbo'lmasligimumkin. Jumladan $\rho = e^{\alpha\varphi}$

logarifmikspiralningasimptotasiyo’q. Logarifmik spiral deb hamma radius vektorlarnibirxilburchakostidakesibo’tadiganchiziqqaaytiladi.

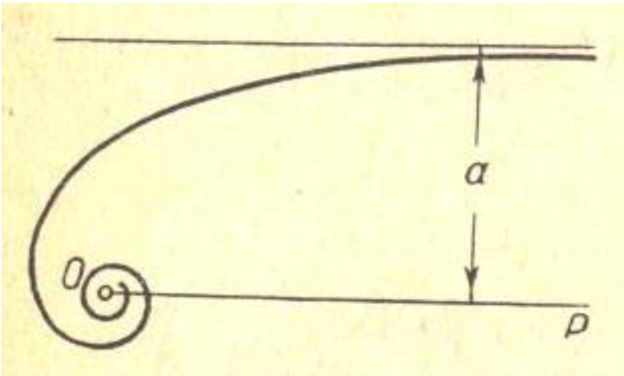


9-chizma

Boshlang’ichnuqtaatrofidaistalganchaaylanib, qanchauzoqlashmasin, harakatdaginuqtayaqinlashaoladiganto’g’richiziqmavjudemas.

$\rho = \frac{a}{\varphi}$ (3)

tenglamaorqaliberilgangiperbolik spiral uchunasimptotamavjud. Ordinatao’qigaparallelbo’lmaganasimptotaniqidiraylik.



10-chizma

Asimptotatenglamasi

$Ax + By + C = 0$ (4)

ko’rinishda bo’lsin. (1) chiziqda biror $M(x(t), y(t))$ nuqtani olib, shu nuqtadan (4) to’g’ri chiziqgacha bo’lgan $\rho(M,N)$ masofani hisoblaymiz. Analitik geometriyadan ma’lumki $\rho(M,N)$ masofa

$$\rho(M,N) = \frac{|Ax(t) + By(t) + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \quad (5)$$

(4) to’g’ri chiziq asimptota bo’lishi uchun $t \to T$ da $\rho(M,N) \to 0$ bajarilishi kerak. (5) da maxrajo’zgarmas son bo’lganiuchun

$\lim_{t \to T} |Ax(t) + By(t) + C| = 0$ (6)

kasrsuratininglimitinolgatengligikelibchiqadi. Biz (4) niasimptotabo’lishiuchunzaruriyvayetarlishartnianiqladik.

Endi chiziqasimptotasini $y-kx-b=0$ko’rinishdaolib, $t\to T$ da k va$b$ larnihisoblashformulalarinianiqlaylik. (6) kabiquyidagitengliklaro’rinlidir.

$$\lim_{t\to T}[y(t)-kx(t)-b]=0 \qquad (7)$$

$$\lim_{t\to T}\left\{x(t)\left[\frac{y(t)}{x(t)}-k-\frac{b}{x(t)}\right]\right\}=0 \quad \lim_{t\to T}x(t)=\infty \text{ bo'lganiuchun}$$

$$\lim_{t\to T}\left[\frac{y(t)}{x(t)}-k-\frac{b}{x(t)}\right]=0 \Rightarrow \lim_{t\to T}\frac{y(t)}{x(t)}-k-\lim_{t\to T}\frac{b}{x(t)}=0 \Rightarrow \lim_{t\to T}\frac{b}{x(t)}=0$$

$$k=\lim_{t\to T}\frac{y(t)}{x(t)} \qquad (8)$$

k – ni (7) gaqo’ysak

$$b=\lim_{t\to T}[y(t)-kx(t)] \, (9)$$

kelibchiqadi.

Agar (8) va (9) ningcheklilimitimavjudbo’lmasaasimptotani $y-kx-b=0$ ko’rinishidaifodalabbo’lmaydi. Agar (1) chiziqningasimptotasiordinatao’qiga parallel bo’lsa, u holdaasimptotaningtenglamasi

$$x-a=0 \qquad (10)$$

ko’rinishga ega bo’ladi. $t\to T$ da $x(t)-a\to 0 \Rightarrow x(t)\xrightarrow[t\to T]{} a$.

Agar $\lim x(t)$ mavjud bo’lmasa, asimptota aniqlanmaydi. Abstsissa o’qiga prallel asimptota uchun

$$y-m=0 \qquad (11)$$

ga ega bo’lamiz.

Agar chiziq $y=f(x)$ ko’rinishda berilgan bo’lsa, $x=t, y=f(t)$ parametr kiritish mumkin.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{y(t)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}(y(x)-kx) \qquad (12)$$

Asimptotaning boshqa ta’rifi ham mavjud.

2-Ta’rif: CHiziqdagi nuqta shu chiziq bo’ylab cheksizlikka intilganda urinmaning limit vaziyati mavjud bo’lsa, limitda hosil qilingan to’g’ri chiziq asimptotadir.

Lekin asimptotaurinmaning limit vaziyatibo’lmasligiham mumkin. Haqiqatanham, $t\to T$ da $x(t)\to\infty,\ y(t)\to\infty$ bo’lganholda $\frac{y(t)}{x(t)}$ nisbatga $t\to T$ da Lopitalqoidasiniqo’llaymiz.

$$k=\lim_{t\to T}\frac{y(t)}{x(t)}=\lim\frac{y'(t)}{x'(t)},\quad b=\lim_{t\to T}[y(t)-x(t)\frac{y'(t)}{x'(t)}] \quad y=kx+b \text{ga } k \text{ va } b$$

larniqo’yishmumkin.

Agar chiziq $y = f(x)$ shakldaberilganbo'lsa,

$$k = \lim_{t \to T} f'(x), \quad b = \lim_{t \to T} [y - x f'(x)] \qquad (13)$$

k va b chekli sonlar bo'lsa, asimptota mavjud bo'lib uning tenglamasi $y = kx + b$ ko'rinishida bo'ladi.

SHunday chiziq mavjud bo'lishi mumkinki, uning tenglamasiga Lopital qoidasini qo'llab bo'lmaydi.

Masalan: $y = \frac{\cos x^2}{x^2}$ chiziq $x \to \infty$ da OX o'qdan iborat asimptotaga ega, lekin bu chiziq urinmasining burchak koeffitsienti $y'(x) = -2\sin x^2 - \frac{\cos x^2}{x^2}$, $x \to \infty$ da xech qanday limitga intilmaydi. $\left(\frac{\cos x^2}{x^2} \xrightarrow[x \to \infty]{} 0\right)$ lekin $\sin x^2$ ni limiti yo'q (-1) va $(+1)$ orasida tebranib turadi.

Endi algebraik ifoda orqali berilgan chiziq asimptotasini aniqlash masalasini qaraylik. $F(x, y) = 0$ funktsiya ko'pxad bo'lib, kasrlardan va radikallardan ozod qilingan, ya'ni $Ax^p y^q$ ko'rinishidagi birhadlarning yig'indisidan iborat bo'lsin.

CHiziqning asimptotasi sifatida, urinish nuqtasi cheksizlikka intilganda urinmaning limit vaziyatini qabul qilishimiz mumkin. Bu to'g'ri chiziq ustma ust tushgan cheksiz uzoq ikki nuqtadan o'tadi.

Ikki holni qaraymiz.

1) asimptota OY o'qqa parallel bo'lmasin.

$$\begin{cases} y = kx + b \\ F(x, y) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} y + a_2 x^{n-2} y^2 + \ldots + a_n y^n + b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} y + \ldots + b_{n-1} y^{n-1} + \ldots = 0 \end{cases} \qquad (14)$$

(14) da y o'rniga $kx + b$ niqo'ysak

$$A_0(k) x^n + A_1(k, b) x^{n-1} + \ldots + A_n = 0 \qquad (15)$$

tenglamahosilbo'ladi.

Bu tenglamacheksizkattaikkitaildizgaegabo'lishikerak, chunkiurinishnuqtasicheksizuzoqdadir.

Algebradanma'lumkibundayholda

$$A_0(k) = 0 \quad \text{ва} \quad A_1(k, b) = 0 \qquad (16)$$

tenglamalar o'rinli bo'lib, k va b lar aniqlanadi.

Misollar. 1. Dekartyaprog'i $x^3 + y^3 - 3axy$ berilganbo'lsin. Bu tenglama $x = \frac{3at}{t^3 + 1}$ $y = \frac{3at^2}{t^3 + 1}$ gatengkuchlidir.

a) $t = -1$ da $x = \infty, y = \infty$ $k = \lim_{t \to t_0} \frac{y(t)}{x(t)} = \lim_{t \to -1} t = -1$

$b = \lim_{t = -1} \left[\frac{3at^2}{t^3 + 1} + \frac{3at}{t^3 + 1} \right] = -a$ asimptota $y = -x - a$ to'g'richiziqdaniborat.

b) $\begin{cases} y = kx + b \\ x^3 + y^3 - 3axy = 0 \end{cases} \Rightarrow 1 + k^3 = 0,\ k^2 b - ka = 0 \Rightarrow k = -1, b = -a$

2) Algebraikchiziqningasimptotasiordinatao'qiga parallel bo'lsa $F(x, y) = 0$ *ва* $x = a$ tenglamalarnibirgalikdayechib y ganisbatan

$$B_0 y^n + B_1(a) y^{n-1} + B_2(a) y^{n-2} + ... + B_n = 0 \quad (7)$$

tenglamanihosilqilinadi.

B_0 koeffitsient a gabog'liqemas. SHubilanbirga $B_0 = 0,\ B_1(a) = 0$ tengliklarbajariladi. $B_1(a) = 0$ dan a nianiqlashmumkin.

Masalan: $x(x^2 + y^2) = ay^2$

y^3 – oldidagikoeffitsientnolgatengbo'lib,

$(x - a)y^2 + x^3 = 0 \Rightarrow x = a \neq 0$

Asimptotatenglamasi $x - a = 0$ ko'rinishgaega.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Tekischiziqasimptotasita`rifiniaytibbering.
2. Tekischiziqasimptotasiuchunasosiyteoremanikeltirng.
3. Qandayasimptotaog`maasimptotadeyiladi? Misollarkeltirng.
4. Qandayasimptotagorizontalasimptotadeyiladi? Misollarkeltirng.
5. Qandayasimptotavertikalasimptotadeyiladi? Misollarkeltirng.
6. Algebraik chiziq asimptotalarigamisollaraytingvaularnigrafikdaberilishinichizing.

17.1 CHIZIQ URINMASI VA NORMAL TEKSILIGI

Reja:

1. Ta'riflar
2. Asosiyteorema
3. Urinmaningturlichatenglamalari
4. Normal tekislik tenglamasi
5. Misollar

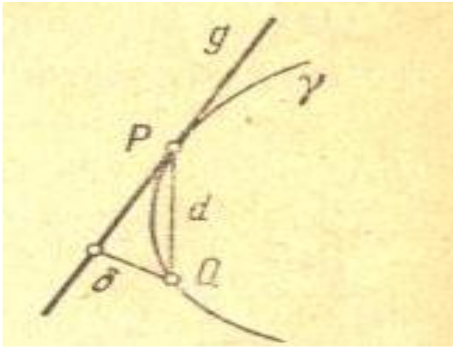
Tayanchiboralar: chiziqrinmasi, normal tekisligi, parametric tenglamasi, oshkortenglama, oshkormastenglama.

1-Ta'rif: Berilgan chiziqning P nuqtasidagi urinmasi deb P va unga cheksiz yaqin chiziq ustidagi Q nuqta orqali utuvchi (PQ) kesuvchining $Q \to P$ dagi limit vaziyatiga aytiladi.

Tekislikdachiziq

$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$(1)

parametriktenglamasiorqaliberilganbo'lsin. P nuqtadagiurinmani g-orqalibelgilaylik $Q \in \gamma$ nuqtadanggaQRperpedikulyaro'tkazamiz. P nuqtadanQgachamasofani d orqaliQnuqtadan g gachamasofani δ orqalibelgilaymiz.



7-chizma

2-Ta'rif: $\lim\limits_{Q \to p} \frac{\delta}{d} = 0$tenglikbajarilsa g to'g'richiziqni γ ning P nuqtasidagiurinmasideyiladi. PQR uchburchakdan $\frac{\delta}{d} = \sin \varphi,\ \varphi = \angle (PQ, PR)$.Ko'ramizki

$\frac{\delta}{d} \to 0 \Leftrightarrow \varphi \to 0$.

Teorema: (1) ko'rinishdaberilgansilliqchiziqo'ziningharbirnuqtasidabirdanbirurinmagaega; $\vec{r}'(t)$ uningyo'naltiruvchivektori.

Isbot: $g - \gamma -$ning P nuqtasidagiurinmasibo'lsin. $P(t),\ Q(t + \Delta t)$ desak $d = |\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)|$

$\delta = |[\vec{P}Q\vec{\tau}]|$ - bo'lib, $\vec{\tau} - g$ ningyo'naltiruvchi ortvektori $\frac{\delta}{d} = \frac{|[\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)]\vec{\tau}|}{|\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)|} \to \frac{|[\vec{r}'(t)\vec{\tau}]|}{|\vec{r}'(t)|} = 0 \Rightarrow \vec{r}'(t) = \lambda \vec{\tau},\ \vec{r}'(t)$ va $\vec{\tau}$ - kollinear.

Mavjudligi $\frac{\delta}{d} \to \frac{|[\vec{r}'(t)\vec{\tau}]|}{|\vec{r}'(t)|} = 0 \Rightarrow \lim\limits_{Q \to P} \frac{\delta}{d} = 0$ya'ni g urinma to'g'richiziq.

Fazoda to'g'richiziqningkanoniktenglamasianalitikgeometriyadanma'lum:

$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k}$.

Bunda $M_0(x_0, y_0, z_0)$ - boshlang'ich nuqta, $\vec{p}\{m, n, k\}$ to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori. Agar chiziq (1) ko'rinishda berilgan bo'lsa, u holda $P(t_0) \in \gamma$ nuqtadagi urinmasi

$\vec{r}(t) = \vec{r}(t_0) + \lambda \vec{r}'(t_0)$ (2)

tenglamaga ega.

Bu tenglamanikoordinatko’rinishdayozsak

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)} \quad (3)$$

kelibchiqadi.

Tekislikdaesaurinmatenglamasi

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)} \qquad (4)$$

ko’rinishda bo’ladi.

Agar chiziq

$$\gamma : y=f(x),\ z=\varphi(x) \qquad (5)$$

Ko’rinishda bo’lsa, urinma tenglamasi

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0),\ z=\varphi(x_0)+\varphi'(x_0)(x-x_0) \quad (6)$$

ko’rinishda bo’ladi.

Agar chiziq oshkormas ko’rinishda berilgan bo’lsa, ya’ni

$$\varphi(x,y,z)=0, \quad \psi(x,y,z)=0 \qquad (7)$$

U holda urinma tenglamasi

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\varphi_y & \varphi_z\\ \psi_y & \psi_z\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\varphi_z & \varphi_x\\ \psi_z & \psi_x\end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\varphi_x & \varphi_y\\ \psi_x & \psi_y\end{vmatrix}_{M_o}} \qquad (8)$$

3-Ta’rif: $P(t_0)$ nuqta orqali o’tuvchi va urinmaga perpendikulyar tekislikka normal tekislik deyiladi.

Normal tekislik

$$(x-x_0)F'_x+(y-y_0)F'_y+(z-z_0)F'_z=0 \, (9)$$

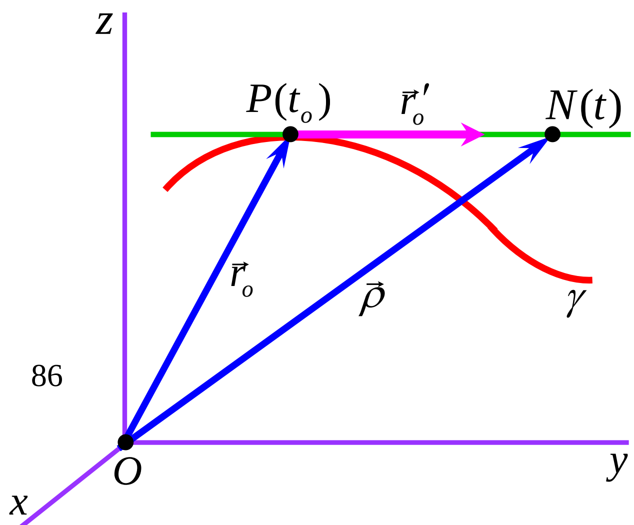
ko’rinishdagitenglamagaegabo’ladi.

Evklidfazosidaγregulyarchiziq $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektortenglamasibilanberilganda, uning $P(t_o)$ nuqtasidagiurinmasiningtenglamasinituzamiz. Buning uchunurinmadaixtiyoriy N nuqta olib, uning radius vektorini $\vec{\rho}$ bilanbelgilaymiz (23–chizma). $P(t_o)$ nuqtaning radius vektoriesa $\vec{r}(t_o)=\vec{r}_o$ bo‘ladi.

U vaqtda

$$\overline{PN}=\vec{\rho}-\vec{r}_o \qquad (1).$$

γ regulyarchiziqning $P(t_o)$ nuqtasidagiurinmasi $\vec{r}'(t_o)=\vec{r}'_o$ vektorga parallel



bo‘lganiuchun $\overline{PN}$ va $\vec{r}_o'$

vektorlarkollinearbo‘ladi:

$\overline{PN} = \lambda \cdot \vec{r}_o'.$

Bu yerda (1) tenglikni e’tiborgaolsak

$\vec{\rho} - \vec{r}_o = \lambda \cdot \vec{r}_o'$

yoki

23–chizma.

$\vec{\rho} = \vec{r}_o + \lambda \cdot \vec{r}_o'$ (2)

tenglikkelibchiqadi. (2) formula γchiziqning$P(t_o)$ nuqtasidagiurinmasining**vektortenglamasi** deb ataladi.

Evklidfazosidaγregulyarchiziq$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametriktenglamalaribilanberilganbo‘lsin. Chiziqning$P(t_o)$ nuqtasidagiurinmasiningtenglamasinituzaylik. Bizgama’lumki, chiziqparametriktenglamalaribilanberilganda$P(t_o)$ nuqtaning radius vektori

$$\vec{r}_o = \vec{r}(t_o) = x(t_o) \cdot \vec{i} + y(t_o) \cdot \vec{j} + z(t_o) \cdot \vec{k} = x_o \cdot \vec{i} + y_o \cdot \vec{j} + z_o \cdot \vec{k},$$

$\vec{r}_o'$ vektoresa

$$\vec{r}_o' = \vec{r}'(t_o) = x'(t_o) \cdot \vec{i} + y'(t_o) \cdot \vec{j} + z'(t_o) \cdot \vec{k} = x_o' \cdot \vec{i} + y_o' \cdot \vec{j} + z_o' \cdot \vec{k},$$

bo‘laredi. Agar urinmadaolinganixtiyoriy$N$nuqtaningkoordinatalarini$x$, y, z bilanbelgilasak, uning radius vektori

$$\vec{\rho} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

bo‘ladi.

Teng vektorlarningmoskoordinatalaritengbo‘lganiuchun, (2) formulagaasosan,

$$\vec{\rho} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$$

va

$$\vec{r}_o + \lambda \cdot \vec{r}_o' = (x_o + \lambda \cdot x_o') \cdot \vec{i} + (y_o + \lambda \cdot y_o') \cdot \vec{j} + (z_o + \lambda \cdot z_o') \cdot \vec{k}$$

Vektorlarningmoskoordinatalaritengbo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_o + \lambda x'_o, \\ y &= y_o + \lambda y'_o, \\ z &= z_o + \lambda z'_o \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

(3) formula chiziqurinmasining**parametriktenglamalari**deyiladi, bu yerdaλ – parametr.

Biz chiziqurinmasiningvektortenglamasinikeltiribchiqarishda $\vec{\rho} - \vec{r}_o$ va $\vec{r}_o\,'$ vektorlarkollinearbo‘ladideganedik. Koordinatalaribilanberilganikkivektorningkollinearlikshartigaasosan,

$$\vec{\rho} - \vec{r}_o = (x - x_o)\cdot\vec{i} + (y - y_o)\cdot\vec{j} + (z - z_o)\cdot\vec{k}$$

va

$$\vec{r}_o\,' = x'_o\cdot\vec{i} + y'_o\cdot\vec{j} + z'_o\cdot\vec{k}$$

vektorlarkollinearbo‘lganiuchun, ularningkoordinatalariproporsionalbo‘ladi

$$\frac{x - x_o}{x'_o} = \frac{y - y_o}{y'_o} = \frac{z - z_o}{z'_o} \qquad (4).$$

(4) formula chiziqurinmasining**kanoniktenglamalari** deb ataladi.

γchiziqEvklidfazosida$y = y(x)$, $z = z(x)$ tenglamalaribilanberilganbo‘lsin. Bizgama’lumki, buvaqtdaγchiziqningtenglamalari$x = t$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametriktenglamalaribilanekvivalentbo‘ladi. Shu sababli (4) formulagaasosanchiziqningabssissasi$x_o$bo‘lgannuqtasitdagiurinmasiningtenglamasiquyidagichabo‘ladi:

$$\frac{x - x_o}{1} = \frac{y - y_o}{y'_o} = \frac{z - z_o}{z'_o} \qquad (5),$$

buyerda$y_o = y(x_o)$, $z_o = z(x_o)$, $y'_o = y'(x_o)$, $z'_o = z'(x_o)$.

Evklidfazoda γchiziq

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= 0, \\ \psi(x, y, z) &= 0 \end{aligned}\right\}$$

oshkormastenglamalaribilanberilib, $P(x_o; y_o; z_o)$ nuqtada

$$rang\begin{pmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \end{pmatrix} = 2$$

bo‘lsin. Bizgama’lumki, buvaqtdaγchiziqningoshkormastenglamalariniP(x_o; y_o; z_o) nuqtaningbiroratrofidaregulyarparametrlashmumkin. $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ tenglamalarγchiziqningP(x_o; y_o; z_o) nuqta atrofidagibirorparametriktenglamalaribo‘lib, t_o– parametrningshunuqtagamosqiymatibo‘lsin. Bu tenglamalarnichiziqningoshkormastenglamalarigaqo‘yamiz:

$$\varphi(x(t), y(t), z(t)) = 0,$$
$$\psi(x(t), y(t), z(t)) = 0.$$

Butenglamalarnidifferensiallaylik:

$$\varphi'_x \cdot x' + \varphi'_y \cdot y' + \varphi'_z \cdot z' = 0,$$
$$\psi'_x \cdot x' + \psi'_y \cdot y' + \psi'_z \cdot z' = 0.$$

Bu tenglamalaresa $\vec{r}\,' = \{x'; y'; z'\}$ vektor $\vec{a} = \{\varphi'_x; \varphi'_y; \varphi'_z\}$ va $\vec{b} = \{\psi'_x; \psi'_y; \psi'_z\}$ vektorlargaperpendikulyarekanliginibildiradi. Shu sababli $\vec{r}\,'$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarningvektorko‘paytmasigakollinearbo‘ladi. Demak, (4) formuladagi $\vec{r}\,' = \{x'; y'; z'\}$ vektorningkoordinatalarisifatida

$$[\vec{a} \cdot \vec{b}] = \left\{ \begin{vmatrix} \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_y & \psi'_z \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \varphi'_z & \varphi'_x \\ \psi'_z & \psi'_x \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y \\ \psi'_x & \psi'_y \end{vmatrix} \right\}$$

vektorningkoordinatalariniolishmumkinekan. Shundayqilib, (4) formulagaasosan, γchiziqningP(x_o; y_o; z_o) nuqtasidagiurinmasiningtenglamasiquyidagichabo‘ladi:

$$\frac{x - x_o}{\begin{vmatrix} \varphi^o_y & \varphi^o_z \\ \psi^o_y & \psi^o_z \end{vmatrix}} = \frac{y - y_o}{\begin{vmatrix} \varphi^o_z & \varphi^o_x \\ \psi^o_z & \psi^o_x \end{vmatrix}} = \frac{z - z_o}{\begin{vmatrix} \varphi^o_x & \varphi^o_y \\ \psi^o_x & \psi^o_y \end{vmatrix}} \qquad (6),$$

buyerda $\varphi^o_x, \varphi^o_y, \varphi^o_z, \psi^o_x, \psi^o_y, \psi^o_z$ lar $\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z, \psi'_x, \psi'_y, \psi'_z$ hosilalarningP(x_o; y_o; z_o) nuqtadagiqiymatlaridir. (6) formula fazodaoshkormastenglamalaribilanberilgan**chiziqurinmasiningkanoniktenglamalari** deyiladi.

Endi γchiziqtekischiziqdaniboratbo‘lib, u $x = x(t)$, $y = y(t)$ parametriktenglamalaribilanberilsin. U vaqtdachiziqning $P(t_o)$ nuqtasidagiurinmasiningtenglamasiquyidagichabo‘ladi:

$$\frac{x - x_o}{x'_o} = \frac{y - y_o}{y'_o} \qquad (7).$$

Agar tekischiziq $y = y(x)$ oshkortenglamasibilanberilsa, chiziqningabssissasi x_o bo‘lgannuqtasidagiurinmasiningtenglamasi

$$y = y_o + y'_o(x - x_o) \qquad (8)$$

bo‘ladi.

Agar tekischiziq $f(x, y) = 0$ oshkormastenglamasibilanberilsa, uning $P(x_o; y_o)$ nuqtasidagiurinmasiningtenglamasi

$$(x - x_o)\, f_x^o + (y - y_o)\, f_y^o = 0$$

bo‘ladi. Bu yerda f_x^o, f_y^o lar f'_x, f'_y hosilalarning $P(x_o; y_o)$ nuqtadagiqiymatlaridir.

1-misol. $x = t^3 - 2t$, $y = t^2 + 1$ tekischiziqning $P(t_o=1)$ nuqtasidagiurinmasiningtenglamasinituzing.

Yechish. Berilgantenglamatekischiziqningparametriktenglamalaribo‘lganiuchun (7) formuladanfoydalanamiz. Berilgantenglamalardanhosilaolamiz:

$$x' = 3t^2 - 2, \quad y' = 2t.$$

Berilgantenglamalardagi x, y larninghamdabuhosilalarning $P(t_o=1)$ nuqtadagiqiymatlarinitopamiz:

$$x_o = 1^3 - 2\cdot 1 = -1, \quad y_o = 1^2 + 1 = 2,$$

$$x'_o = 3\cdot 1^2 - 2 = 1,\ y'_o = 2\cdot 1 = 2.$$

Topilganbuqiymatlarni (7) formulagaqo‘yamiz:

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{2}.$$

2-misol. $y = x^2 + 4x + 3$ chiziqqa $P(1; 8)$

nuqtadao‘tkazilganurinmatenglamasinituzing.

Yechish. Berilgantenglamatekischiziqningoshkortenglamasibo‘lganiuchun (8) formuladanfoydalanamiz. Berilganfunksiyadanhosilaolamiz:

$$y' = 2x + 4.$$

Bu hosilaning $P(x_o=1;\, y_o=8)$ nuqtadagiqiymatinitopamiz:

$$y'_o = 2\cdot 1 + 4 = 6.$$

Topilganqiymatlarni (8) formulagaqo‘yamiz:

$$y = 8 + 6(x-1)$$

yoki

$$y = 6x + 2.$$

3-misol. $x = e^t\cos t$, $y = e^t\sin t$, $z = e^t$ chiziqning $P(t_o=0)$ nuqtasigao‘tkazilganurinmaningtenglamasinituzing.

Yechish. Berilgantenglamalarfazodagichiziqningparametriktenglamalari. Shuninguchun (4) formuladanfoydalanamiz. Berilganfunksiyalardanhosilaolamiz

$$x' = e^t\cos t - e^t\sin t, \quad y' = e^t\sin t + e^t\cos t, \qquad z' = e^t.$$

Bu hosilalarning va berilganfunksiyalarning $P(t_o=0)$ nuqtadagiqiymatlarinitopamiz:

$x_o = 1$, $y_o = 0$, $z_o = 1$,

$x'_o = 1$, $y'_o = 1$, $z'_o = 1$.

Demak, urinmaningtenglamasi

$$x - 1 = y = z - 1.$$

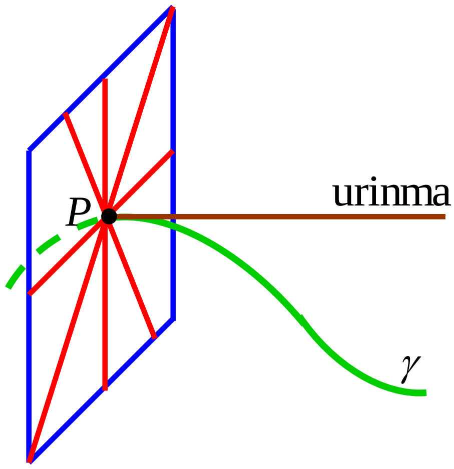
17.2 CHIZIQNING NORMALI VA NORMAL TEKISLIGI.

Tayanchtushunchavamunosabatlar. Chiziqningnormali, chiziqning normal tekisligi, chiziq normal tekisliginingtenglamalari, tekischiziqnormaliningtenglamalari.

Ta’rif. Chiziqningberilgannuqtasidano‘tib, uningshunuqtadagiurinmasigaperpendikulyarbo‘lganto‘g‘richiziqqachiziqningberilgan nuqtasidagi**normali** deb ataladi.

Tekislikda, berilgannuqtadanberilganto‘g‘richiziqqafaqatbittaperpendikulyarto‘g‘richiziqo‘tganiuchun, tekischiziqning har birnuqtasidafaqatbitta normal mavjudbo‘ladi. Agar berilganchiziqfazoviybo‘lsa, uning har birnuqtasidacheksizko‘pnormallarmavjudbo‘lib, ularbirtekislikdayotadi.

Ta’rif. Chiziqning berilgannuqtasidano‘tuvchi vauningshunuqtasidagi urinmasigaperpendikulyar tekislikka, chiziqningberilgan nuqtasidagi**normal tekisligi** deb ataladi.



Demak, fazoviy chiziqningberilgannuqtasidagi normallari, chiziqningshu nuqtasidagi normaltekisligini tashkiletarekan (24–chizma).

24–chizma.

Evklidfazosidaγregulyarchiziq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektortenglamasibilanberilganbo‘lsin. Uning$P(t_o)$ nuqtasidagi normal tekisligininingtenglamasinituzaylik. Buning uchun normal tekislikda, radius vektori $\vec{\rho}$ bo‘lgan, ixtiyoriy$N$ nuqta olamiz. $P(t_o)$ nuqtaning radius vektoriesa $\vec{r}_o = \vec{r}(t_o)$ bo‘lib,

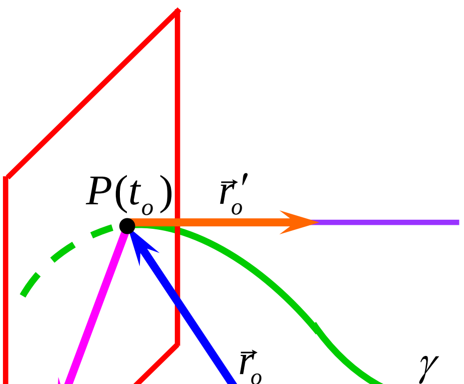
$$\vec{r}_o' = \vec{r}\,'(t_o)$$

vektorchiziqning$P(t_o)$ nuqtasidagiurinmasiga parallel bo‘ladi.

Normal tekislikta’rifigaasosan $\overline{PN}$ vektor $\vec{r}_o'$ vektorgaperpendikulyarbo‘ladi. Shuninguchunularningskalyarko‘paytmasi nolgatengdir (25–chizma):

$$\overline{PN} \cdot \vec{r}_o' = 0.$$

Buyerda



$$\overline{PN} = \vec{\rho} - \vec{r}_o$$

bo‘lganiuchun

$$(\vec{\rho} - \vec{r}_o) \cdot \vec{r}_o' = 0 \qquad (1)$$

kelibchiqadi.

(1) formulanichiziq normal tekisligining**vektortenglamasi** deb ataladi.

Evklidfazosidaγregulyarchi ziq$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$

25–chizma.

parametriktenglamalaribilanberilganda, uning $P(t_o)$ nuqtasidagi normal tekisligriningtenglamasinituzaylik. Chiziqparametriktenglamalaribilanberilganda

$$\vec{\rho} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_o = x_o \cdot \vec{i} + y_o \cdot \vec{j} + z_o \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_o' = x_o' \cdot \vec{i} + y_o' \cdot \vec{j} + z_o' \cdot \vec{k}$$

bo‘lganiuchun, (1) vektortenglamanikoordinatalarorqaliyozsak, quyidagitenglamahosilbo‘ladi:

$$(x - x_o) \cdot x_o' + (y - y_o) \cdot y_o' + (z - z_o) \cdot z_o' = 0 \qquad (2).$$

(2) formula parametriktenglamalaribilanberilganchiziq normal tekisligriningtenglamasibo‘ladi.

Evklidfazosidaγchiziq$y = y(x)$, $z = z(x)$ tenglamalaribilanberilca, chiziqningabssissasi$x_o$bo‘lgannuqtasidagi normal tekisligriningtenglamasiquyidagichabo‘ladi:

$$(x - x_o) + (y - y_o) \cdot y_o' + (z - z_o) \cdot z_o' = 0 \qquad (3),$$

buyerda$y_o = y(x_o)$, $z_o = z(x_o)$, $y'_o = y'(x_o)$, $z'_o = z'(x_o)$.

Evklidfazosidaγchiziq

$$\left.\begin{aligned}\varphi(x,y,z)=0,\\ \psi(x,y,z)=0\end{aligned}\right\}$$

oshkormastenglamalaribilanberilib, $P(x_o; y_o; z_o)$ nuqtada

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix}\varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z\\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z\end{pmatrix}=2$$

bo'lsa, u vaqtdachiziqningP(x_o; y_o; z_o) nuqtasidagi normal tekisliginingtenglamasiquyidagichabo'ladi:

$$\begin{vmatrix}x-x_o & y-y_o & z-z_o\\ \varphi_x^o & \varphi_y^o & \varphi_z^o\\ \psi_x^o & \psi_y^o & \psi_z^o\end{vmatrix}=0 \qquad (4),$$

buyerda$\varphi_x^o,\ \varphi_y^o,\ \varphi_z^o,\ \psi_x^o,\ \psi_y^o,\ \psi_z^o$ lar $\varphi'_x,\ \varphi'_y,\ \varphi'_z,\ \psi'_x,\ \psi'_y,\ \psi'_z$ hosilalarningP(x_o; y_o; z_o) nuqtadagiqiymatlaridir.

Yuqoridata'kidlaganimizdek, tekischiziqning har birnuqtasidafaqatbitta normal mavjudbo'lganiuchun, tekischiziqningberilgannuqtasidaginormaliningtenglamasinituzishmumkin.

Tekischiziq$x = x(t)$, $y = y(t)$ parametriktenglamalaribilanberilca, uningP(t_o) nuqtasidaginormaliningtenglamasiquyidagichabo'ladi:

$$(x-x_o)\cdot x'_o+(y-y_o)\cdot y'_o=0 \qquad (5).$$

Agar tekischiziq$y = y(x)$ oshkortenglamasibilanberilsa, uningP(x_o; y_o) nuqtasidaginormaliningtenglamasiquyidagichabo'ladi:

$$y=y_o-\frac{1}{y'_o}(x-x_o) \qquad (6).$$

Agar tekischiziq$f(x, y) = 0$ oshkormastenglamasibilanberilsa, uningP(x_o; y_o) nuqtasidaginormaliningtenglamasiquyidagichabo'ladi:

$$\frac{x-x_o}{f_x^o}=\frac{y-y_o}{f_y^o} \qquad (7),$$

buyerda $f_x^o,\ f_y^o$ lar $f'_x,\ f'_y$ hosilalarningP(x_o; y_o) nuqtadagiqiymatlaridir.

1-misol. $y = x^3 + 2x^2 - 1$ tekischiziqningP(1; 2) nuqtasidaginormaliningtenglamasinituzing.

Yechish. Berilganfunksiyatekischiziqningoshkortenglamasi. Shuninguchun (6) formuladanfoydalanamiz. Dastlabberilganfunksiyadanhosilaolamiz:

$$y' = 3x^2 + 4x.$$

Bu hosilaga$P$nuqtaningabssissasibo‘lganx_o= 1 qiymatniqo‘yamiz:

$$y' = 3\cdot 1^2 + 4\cdot 1 = 7.$$

P nuqtaningkoordinatalari$x_o = 1$, $y_o = 2$. Bu topilganqiymatlarni (6) formulagaqo‘yamiz:

$$y = 2 - \frac{1}{7}(x-1)$$

yoki

$$x + 7y - 15 = 0.$$

Natijadanormalningtenglamasihosilbo’ladi.

2-misol.$x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$chiziqning$t = 1$ nuqtasidagi normal tekisligliningtenglamasinituzing.

Yechish. Berilganfunksiyalarfazodagichiziqningparametriktenglamalaridir, shusababli (2) formuladanfoydalanamiz. Dastlabberilganfunksiyalardanhosilaolamiz:

$$x' = 1, \quad y' = 2t, \qquad z' = 3t^2.$$

Bu hosilalarninghamdaberilganfunksiyalarning$t = 1$ dagiqiymatlarinihisoblaymiz:

$$x_o = 1, \quad y_o = 1, \qquad z_o = 1.$$

$$x'_o = 1,\ y'_o = 2,\ z'_o = 3.$$

Topilganqiymatlarni (2) formulagaqo‘ysak, normal tekisliktenglamasihosilbo‘ladi:

$$(x-1)\cdot 1 + (y-1)\cdot 2 + (z-1)\cdot 3 = 0$$

yoki

$$x + 2y + 3z - 6 = 0.$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.

2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

NAZORAT SAVOLLAR.

№ 1. Chiziqnormaliningta’rifi.

№ 2. Chiziq normal tekisliginingta’rifi.

№ 3. Chiziq normal tekisliginingvektortenglamasi.

№ 4. Parametriktenglamalaribilanberilganchiziq normal tekisliginingtenglamasi.

№ 5. Oshkormastenglamalaribilanberilganchiziq normal tekisliginingtenglamasi.

№ 6. Parametriktenglamalaribilanberilgantekischiziqnormaliningtenglamasi.

№ 7. Oshkortenglamasibilanberilgantekischiziqnormaliningtenglamasi.

№ 8. Oshkormastenglamasibilanberilgantekischiziqnormaliningtenglamasi.

№ 9. Chiziqningnormalideb:

1) Chiziqningberilgannuqtasidano‘tib, shunuqtasidagiurinmaga parallel bo‘lganchiziqqaaytiladi.

2) Chiziqningberilgannuqtasidano‘tib, shunuqtasidagiurinmagaperpendikulyarbo‘lganto‘g‘richiziqqaaytiladi.

3) Chiziqningberilgannuqtasidano‘tib, shunuqtasidagiurinmagaortogonalbo‘lganto‘g‘richiziqqaaytiladi.

A. 1); B. 2); C. 3); D. 2) va 3); E. 1) va 3).

№ 10. Chiziqning normal tekisligi deb:

1) Chiziqningurinmasigaperpendikulyartekislikkaaytiladi.

2) Chiziqningberilgannuqtasidan, shunuqtasidagiurinmagaperpendikulyarbo‘libo‘tuvchitekislikkaaytiladi.

3) Chiziqningberilgannuqtasidan, shunuqtasidagiurinmagaortogonalbo‘libo‘tuvchitekislikkaaytiladi.

4) Chiziqningurinmasiga parallel bo‘libo‘tuvchitekislikkaaytiladi.

A. 1); B. 1) va 2); C. 3); D. 2) va 3); E. 4).

17.CHIZIQLAR OILASINING O’RAMASI

Reja:

1. Bir parametrlivaikkiparametrlichiziqlaroilasi
2. O’ramata’rifi
3. O’ramaningparametriktenglamasi
4. Diskriminantchiziq
5. Misollar

Mavzuningbayoni:

$y^2 = 2px$, p – parametrga bog’liq uchi $0(0{,}0)$ nuqtada bo’lib, simmetriya o’qi abstsissalar o’qidan iborat parabolalar oilasini ifoda etadi.

$y = kx,$ k – parametrga bog’liq $0(0{,}0)$ nuqta orqali o’tuvchi to’g’ri chiziqlar oilasini aniqlaydi.

$y = kx + b,$ ikki parametrli to’g’ri chiziqlar oilasi bo’lsa, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$, uch parametrli aylanalar oilasining tenglamasidir.

Umumlashtirsak, bir parametrli chiziqlar oilasini $F(x, y, c) = 0$ ko’rinishda, ikki parametrli chiziqlar oilasini $F(x, y, c_1, c_2) = 0$ ko’rinishda ifodalash mumkin.

n – ta parametrgabog’liqchiziqlaroilasiesa

$F(x, y, c_1, c_2 ..., c_n) = 0$ (1)

oshkormas tenglama orqali ifodalanadi.

$c_1, c_2, ..., c_n -$ parametrlarni aniqlash uchun esa n – ta nuqta berilishi kerak.

Bizgabirparametrlichiziqlaroilasi

$F(x, y, c) = 0$ (2)

oshkormastenglamasiorqaliberilganbo’lsin.

Oilaningbirorchizig’inihosilqilishuchun s parametrga $c_1 < c < c_2$ oraliqdanma’lumbirqiymatberishkerak.

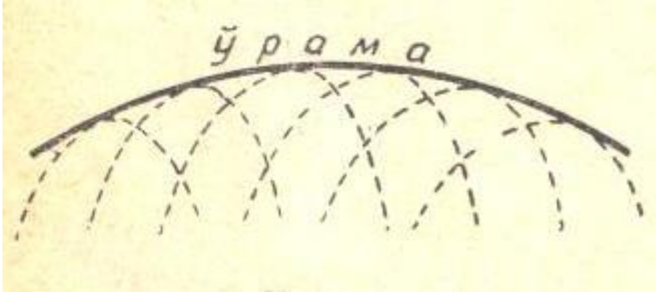
Bir parametrlioilachiziqlariuchunba’zanshundaychiziqtopiladiki, uningharbirnuqtasidan (2) oilaningkamidabittachizigiurinibo’tadi.

Ta’rif: Harbirnuqtasida (2) oilaningkamidabittachizig’igaurinuvchivao’zishuurinishnuqtalardaniboratbo’lgantekislikdagichiziqqabirparametrlichiziqlaroilasiningo’ramasi deb ataladi.

Agar (2) oilao’ramasimavjudbo’lsa, uningtenglamasini

$x = x(c),\ \ y = y(c)$ (3)

bo’lsindebolamiz.



12-chizma

(2) ga (3) niqo'ysakayniyatkelibchikadi.

$$F(x(c), y(c), c) = 0 \qquad (4)$$

Bu ayniyatni s bo'yichadifferentsiallaymiz.

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dc} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dc} + \frac{\partial F}{\partial c} = 0 \qquad (5)$$

Ta'rifga ko'ra oilachizig'ivao'ramabir-birigaurinadi. Oshkormastenglamasiorqaliberilganchiziqning $M_0(x_0, y_0)$ nuqtasidagiurinmasiningtenglamasi

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial x}\cdot(x - x_0) + \frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial y}\cdot(y - y_0) = 0 \qquad (6)$$

ko'rinishgaega.

(3) orqaliberilganchiziqningshunuqtasidagiurinmasining

$$\frac{x - x_0}{x_c'} = \frac{y - y_0}{y_c'} = \lambda \qquad (7)$$

tenglamasidan

$$x - x_0 = \lambda x_c', \; y - y_0 = \lambda y_c' \qquad (8)$$

kelibchiqadi. (8) ni (6) ga qo'yamiz.

$$\lambda(F_x'(x_0, y_0)x_c' + F_y'(x_0, y_0)y_c') = 0 \qquad (9)$$

(5) va (9) umumiy $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada teng kuchli tenglamalar bo'lishi uchun shu nuqtada

$$\frac{\partial F(x_0, y_0)}{\partial c} = 0 \qquad (10)$$

tenglik bajarilishi kerak.

SHunday qilib, agar (2) oilaning o'ramasi mavjud bo'lsa, uning ixtiyoriy $M(x, y)$ nuqtasi

$$F(x, y, c) = 0, \quad F_c'(x, y, c) = 0 \qquad (11)$$

tenglamalarni yechishdan topiladi.

Ba'zan $M_0(x_0, y_0)$ nuqtada $F_c'(x_0, y_0) = 0, \quad F_x'(x_0, y_0) = 0$ bo'lib urinmaning burchak koeffitsienti $K = \dfrac{dy}{dx}$ ni aniqlab bo'lmaydi.

Bunday nuqtani (2) oilaningmaxsusnuqtasideyiladi. Agar (3) chiziqmaxsusnuqtalardantashkiltopganbo'lsa, unidiskriminantchiziqdeymiz. Diskriminantchiziqo'ramabo'lishiuchununingnuqtalarioddiynuqtalarbo'lishikerak. O'ramani (11) tenglamalarniyechishorqalitopiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Bir parametrlichiziqlaroilasiningo`ramasita`rifiniaytibbering.
2. Ikki parametrlivaikkiparametrlichiziqlaroilasiningo`ramasitushunchasinikeltiring .O`ramanimisollarbilanishlabko`rsating.
3. Diskriminantchiziqta`rifiniayting.
4. O`ramavadiskiriminantchiziqfarqiniko`rsating.
5. Chiziqningo`ramasichiziqgrafigibilanqandayholatdajoylashadi?
6. Parametrikko`rinishdaberilganchiziqningo`ramatenglamasinikeltiring.

18.YOPISHMA TO'G'RI CHIZIQ VA YOPISHMA AYLANA.

Reja:

1. Ikki vauchparametrlichiziqlaroilasiningyopishmachizig'i
2. Yopishmachiziqta'rifi
3. Yopishma to'g'richiziq
4. Yopishmaaylana
5. Misollar

Mavzuningbayoni:

$$\gamma : x = x(t), \quad y = y(t) \qquad (1)$$

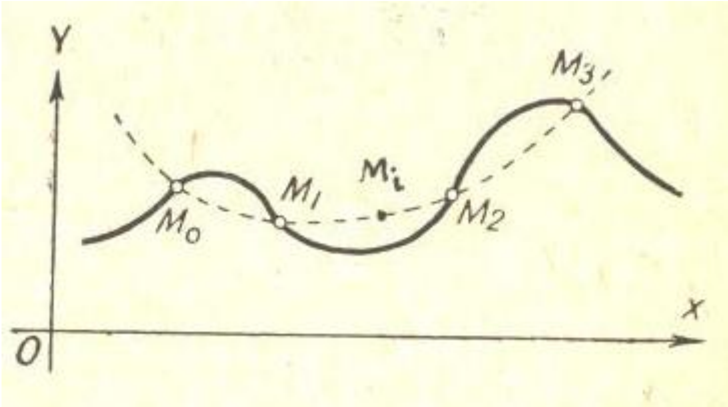
chiziqni olaylik. $M_0(t_0) \in \gamma$ chiziq nuqtasi atrofidagi yoyining xossalarini tekshirish maqsadida shu nuqtadan o'tgan va γ chiziqqa yaqin aloqador bo'lib, tuzilishi soddaroq bo'lgan ikkinchi chiziqni olib kerakli xossalarni tekshiramiz. SHu maqsadda uch parametrli chiziqlar oilasiga murojat etamiz.

$$F(x, y, c_1, c_2, c_3) = 0 \qquad (2)$$

(2) oiladan (1) ga M_0 nuqtasida yaqinroq turgan chiziqni ajratib olishimiz kerak.

$M_0,\ M_1,\ M_2$nuqtakoordinatalari (2)-niqanoatlantiradi.

$F(x(t_0),\ y(t_0), C_1,\ C_2,\ C_3) = 0$
$F(x(t_1),\ y(t_1), C_1,\ C_2,\ C_3) = 0$
$F(x(t_2),\ y(t_2), C_1,\ C_2,\ C_3) = 0$



13-chizma

Ammo (2)-ni (1)-ningharqandaynuqtasi (masalan M_i) qanoatlantirmaydi.
(2) ga (1)-ni qo'ysakyordamchifunktsiyakelibchiqadi.
$f(t) = F(x(t),\ y(t), C_1, C_2, C_3)$ (3)

$f(t)$ funktsiya va uning hosilalari t – parametrga nisbatan uzluksiz bo'lib, t_0, t_1, t_2-qiymatlarda nolga teng.

$f(t_0) = 0, f(t_1) = 0, f(t_2) = 0.$

$f(t_0, C_1, C_2, C_3) = 0,\ f(t_1, C_1, C_2, C_3) = 0$ funktsiyalarga*Pol*teoremasini qo'llasak, shunday t_0' - qiymatmavjudbo'ladiki $t_0 < t_0' < t_1$ bo'lib, $f'(t_0', C_1, C_2, C_3) = 0$.
SHuningdek $f'(t_1', C_1, C_2, C_3) = 0$, $t_1 < t_1' < t_2$.
Endi Pol teoremasini $f'(t_0', C_1, C_2, C_3) = 0$, $f'(t_1', C_1, C_2, C_3) = 0$ funktsiyalarga qo'llaymiz.
SHunday t_0'' $(t_0' < t_0'' < t_1')$ qiymatmavjudki $f''(t_0'', C_1, C_2, C_3) = 0$.

Agar t_1, t_2, t_0-gaintilsa, t_0', t_1', t_0''-lar ham va t_0 gaintiladi. M_0, M_1, M_2 nuqtalarorqalio'tganoilasiljibyokiegilib limit holatgaintiladi.
SHuvaqtda c_1, c_2, c_3 parametrlarham a,b,c-largaintiladi. Quyidagisistemahosilbo'ladi:

$$\begin{cases} f(t_0, a,b,c) = F(x(t_0), y(t_0), a,b,c) = 0 \\ f'(t_0, a,b,c) = F'(x(t_0), y(t_0), a,b,c) = 0 \\ f''(t_0, a,b,c) = F''(x(t_0), y(t_0), a,b,c) = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

(4) sistemaniyechibtopilgan a,b,c-parametrlarni (2) ga qo'ysakizlanganchiziqningtenglamasikelibchiqadi.

$F(x, y, a,b,c) = 0$ (5)

(5) – tenglamayopishmachiziqniifodaetadi.

Ta'rif: Berilgan γ chiziqningberilgan $M(t_0)$ nuqtasidagiyopishmachizig'i deb $F(x,y,c_1,c_2,c_3)=0$ oilagaqarashlibo'lgan γ chiziqning M_0, M_1, M_2 nuqtalaridano'tganchiziqning M_1, M_2 nuqtalar M_0 nuqtagaintilgandagi limit vaziyatigaaytiladi.

Yopishmachiziqtenglamasinianiqlashuchunyordamchifunktsiyatuzib, undanbirinchivaikkinchitartiblihosilaolamiz. So'ngrabufunktsiyavauninghosilalaridagi t o'rniga t_0 ni qo'yib (4) tenglamalarsistemasinihosilqilamiz. Sistemaniyechib a,b,c -larnianiqlab, ularnioilatenglamasiga qo'yamiz. n -parametrgabog'liqchiziqlaroilasiniolibyuqoridagimuloxazalarnitakrorlashorqaliyopishmachiziqnianiqlashham mumkin.

Endi (1) chiziqning $M_0(t_0)$ nuqtasidagiyopishma to'g'richizig'inianiqlaylik.

To'g'richiziqlaroilasiningtenglamasiikkiparametrlibo'lganiuchununi

$y-kx-b=0$ (6)

ko'rinishda olamiz.

$$f(t)=y(t)-k(x(t))-b \qquad (7)$$

yordamchi funktsiya tuzamiz.

(4) sistemaquyidagiko'rinishdabo'ladi.

$$\begin{cases} f(t_0)=y(t_0)-kx(t_0)-b=0 \\ f'(t_0)=y'(t_0)-ktx'(t_0)=0 \end{cases} \qquad (8)$$

Bulardan

$$k=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)},\ b=y(t_0)-\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}x(t_0) \qquad (9)$$

(9) ni (6) ga qo'ysak yopishma to'g'ri chiziq tenglamasi

$$y-y(t_0)=\frac{y'(t_0)}{x'(t_0)}(x-x(t_0)) \qquad (10)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Demak yopishma to'g'ri chiziq urinma ekan. Endi yopishma aylanani ko'rib o'tamiz. Aylanalar oilasini

$$(x-a)^2+(y-b)^2-R^2=0 \qquad (11)$$

formula orqali ifodalaymiz. SHu oiladan shunday aylanani aniqlaymizki, u berilgan (1) chiziqning M_0 nuqtasidagi yopishma aylanasi bo'lsin. Yordamchi funktsiya tuzamiz.

$$f(t,a,b,R)=(x(t)-a)^2+(y(t)-b)^2-R^2 \qquad (11)$$

Parametrlar soni uchta bo'lgani uchun ikki marta hosila olib (4) sistemani tuzamiz.

$$f(t_0,a,b,R)=(x(t_0)-a)^2+(y(t_0)-b)^2-R=0$$
$$f''(t_0,a,b,R)=2(x(t_0-a)x'(t_0)+2(y(t_0)-b)y'(t_0)=0$$
$$f''(t_0,a,b,R)=(x(t_0)-a)x''(t_0)+(y(t_0)-b)y''(t_0)+x'^2(t_0)+y'^2(t_0)=0$$

Sistemayechsak

$$a=x(t_0)-\frac{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}_{M_0}}y'(t_0)$$

$$b=y(t_0)+\frac{x'^2(t_0)+y'^2(t_0)}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}_{M_0}}x'(t_0) \quad (12)$$

$$R=\frac{[x'^2(t_0)+y'^2(t_0)]^{3/2}}{\begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}_{M_0}}$$

a,b,R larni (11) ga qo'yibyopishmaaylanatenglamasinitopamiz.

$0(a,b)$ -chiziqningegrilikmarkazi $k=\frac{1}{R}$ esa M_0 nuqtadagiegriligidir.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Yopishmachiziqta`rifiqanday?
2. Yopishmato`g`richizqta`rifiniayting.
3. Ikki vauchparametrlichiziqlaroilasiningyopishmachizig'igamisollarkeltiring.
4. Yopishmaaylanata`rifiniayting.
5. Oshkormasko`rinishdaberilganchiziqningyopishmaaylanasigamisollarkeltiring.
6. Oshkormasko`rinishdaberilganchiziqningyopishmato`g`richizig`igamisollarkeltiring.
7. Chiziqningegriligidegandanimanitushunishmumkin?

19.CHIZIQNING YOPISHMA TEKISLIGI

Reja:

1. Yopishmatekislikta'rifi
2. Asosiyteoremavauningisboti

3. Yopishmatekisliktenglamasi
4. Bosh normal va binormal
5. To’g’rilovchitekislik
6. Misollar

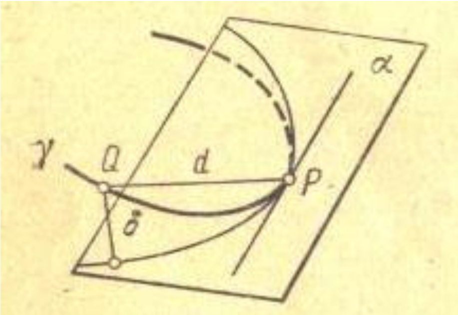
Tayanchiboralar: yopishmatekislik, binormal, boshnormal, to`g`rilovchitekislik, normal tekislik, urinma.

Mavzuningbayoni:

Fazoviy γ chiziq

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

parametrikformulasiorqaliberilganbo’lsin. $P(t) \in \gamma$ nuqta orqalio’tuvchi Π tekislikniolaylik. P va Q orasidagimasofa $\rho(P,Q) = d$, Q nuqtadan Π tekislikgachamasofa $\rho(Q,\Pi) = \delta$ bo’lsin.



11-chizma

1-Ta’rif: Agar $Q \to P$ *ва* $\dfrac{\delta}{d^2}$ nisbatnolgaintilsa, u holda Π tekislikni γ chiziqning P nuqtasidagiyopishmatekisligidebataladi.

Yopishmatekisliktushunchasinifazoviy γ chiziqningcheksizyaqinuchta M, N, K nuqtalariorqalio’tuvchitekislikningnuqtalaridanikkitasichiziqbo’ylabuchinchinuqtagay aqinlashgandagitekislikninglimitvaziyatidebqarashimizmumkin.

Teorema: (1) ko’rinishdaberilganikkimartadifferentsiallanuvchichiziq, o’zingharbirnuqtasidayokibirdanbiryopishmatekislikkaegabo’libnokollinear $\vec{r}\,'(t)$, $\vec{r}\,''(t)$ vektorlargaparallelbo’ladiyokiurinmaorqalio’tuvchitekisliklardastasiningixtiyoriytekisl igiyopishmatekislikbo’lishihammumkin.

Isboti: Π – yopishmatekislikbo’lsin. Fazodaixtiyoriy 0 nuqta (polyus) tanlaymiz. $\vec{r}(t) = \overrightarrow{OP}(t)$, $\vec{r}(t+\Delta t) = \overrightarrow{OQ}(t+\Delta t)$ bo’lsin. U holda $\overrightarrow{PQ} = \Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$, $\delta = |\overrightarrow{PQ}| = |\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)|$ Π tekislikningbirliknormalvektori $\vec{n}$ bo’lsin. $\vec{n}^2 = 1$ Q nuqtadan $QR \perp \Pi$ tushiramiz.

$\vec{n}$ - ni R nuqtagako’chiraylik. $\overrightarrow{RQ}$ va $\vec{n}$ -kollinearvektorlarbo’lib, $(\overrightarrow{PQ}\vec{n}) = |\overrightarrow{PQ}| \cdot |n| \cos\varphi = |\overrightarrow{PQ}| \cos\varphi = d\cos\varphi = \delta$

Bunda $\varphi = \angle(PQR) \quad QRP = 90^0$

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{|(\vec{n}(\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t))|}{|\vec{r}(t+\Delta t)-\vec{r}(t)|} = \frac{|(\vec{n}(\vec{r}\,'(t)\cdot\Delta t+\vec{r}\,''(t)\frac{\Delta t^2}{2!}+\vec{\varepsilon}_1\Delta t^2))|}{(\vec{r}^{\,1}(t)\cdot\Delta t+\varepsilon_2\Delta t)^2} =$$

$$= \frac{\left|\frac{(\vec{n}\vec{r}\,'(t))}{\Delta t}+\frac{(\vec{n}\vec{r}\,''(t))}{2!}+\varepsilon_1\right|}{\vec{r}\,'^2(t)+\varepsilon_3} \xrightarrow[\Delta t\to 0]{} 0 \qquad (2)$$

o'rinlibo'lib,

$\vec{n}\perp\vec{r}\,'(t),\ \vec{n}\perp\vec{r}\,''(t)\Rightarrow\vec{r}\,'(t)\,//\,\Pi,\ \vec{r}\,''(t)\,//\,\Pi$

SHundayqilib, Π-yopishmatekislikbo'lsa, u birdanbirdir, chunki $\vec{n}$ - Π ga yagona normal vektorbo'laoladi. SHubilanbirga $\vec{r}\,'(t),\ \vec{r}\,''(t)$ vektorlaryoki Π gategishliyokiunga parallel vaziyatdabo'lishimumkin.

Teoremaningikkinchiqisminiisbotlashuchunquyidagitenglikkae'tiborberaylik.

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{\left|\frac{\vec{n}\vec{r}\,'(t))}{\Delta t}+\frac{(\vec{n}\vec{r}\,''(t))}{2!}+\varepsilon_1\right|}{d^2\vec{r}\,'^2(t)+\varepsilon_3};$$

$(\vec{n}\vec{r}\,'(t))=0,\ (\vec{n}\vec{r}\,''(t))=0$ bo'lganiuchun

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{|\varepsilon_1|}{\vec{r}\,'^2(t)+\varepsilon_3} \xrightarrow[Q\to P]{} 0;$$

Bundan Π tekislikhaqiqatanhamyopishmatekislikekani $\left(\lim\limits_{Q\to P}\frac{\delta}{d^2}=0\right)$ kelibchiqadi.

Agar $\vec{r}\,''(t)\parallel\vec{r}\,'(t)$ yoki $\vec{r}\,''(t)=0$ bo'lsaham $\frac{\delta}{d^2}\xrightarrow[Q\to P]{}0$.

Endi yopishmatekisliktegnlamasiniyozaylik. Π tekislikdaixtiyoriy M nuqtaniolamiz

$$\overrightarrow{PM} = \lambda\vec{r}\,'(t)+\mu\vec{r}\,''(t) \qquad (3)$$

Uchtavektorlarningkomplanarligidan $(\overrightarrow{PM}\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t))=0$ (4)

Agar fazodadekartrepero'rnatilganbo'lib, shureperda $P(x_0,y_0,z_0)$, $M(x,y,z)$ koordinatalargaegabo'lsa (4) niquyidagichaifodalashmumkin

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'(t_0) & y'(t_0) & z'(t_0) \\ x''(t_0) & y''(t_0) & z''(t_0) \end{vmatrix} = 0 \qquad (5)$$

2-Ta'rif:CHiziqning P nuqtasidano'tiburinmasigaperependikulyar to'g'richiziqqauningnormalideyiladi. Yassi chiziquchun normal yagona bo'lib, yopishmatekislikdayotadi.

3-Ta’rif:CHiziqning P nuqtasidagiyopishmatekisligidayotib, urinmagaperpendikulyar to’g’richiziqqa bosh normal deyiladi.

4-Ta’rif:CHiziqning P nuqtasidano’tibyopishmatekislikkaperpendikulyar to’g’richiziqqa binormal deyiladi.

Ta’rifdanbinormalningurinmava bosh normalgaperpendikulyarligikelibchiqadi. Agar urinmaningyo’naltiruvchibirlikvektori

$$\vec{t} = \frac{\vec{r}'(t)}{|\vec{r}'(t)|}, \qquad (6)$$

binormalningyo’naltiruvchibirlikvektori

$$\vec{b} = \frac{[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)]}{|[\vec{r}'(t)\vec{r}''(t)]|}, \qquad (7)$$

bo’lsa, u holda bosh normalningyo’naltiruvchibirlikvektori $[\vec{b}\vec{t}] = \vec{n}$ bo’lib

$$\vec{n} \perp \vec{t} \;\; \text{ва} \;\; \vec{n} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{n} \parallel [\vec{t}\vec{b}], \; \vec{n} = [\vec{t}\vec{b}] \qquad (8)$$

5-Ta’rif: CHiziqning P nuqtasidagi urinmasi va binormali orqali o’tuvchi tekislikka to’g’rilovchi tekislik deb ataladi.

γchiziq

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,y,z) &= 0, \\ \psi(x,y,z) &= 0 \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

oshkormastenglamalaribilanberilganda, uning$P(x_o, y_o, z_o)$ nuqtasidagiyopishmatekisligининgtenglamasinituzaylik. Buninguchun$P(x_o, y_o, z_o)$ nuqtada

$$\text{rang}\begin{pmatrix} \varphi'_x & \varphi'_y & \varphi'_z \\ \psi'_x & \psi'_y & \psi'_z \end{pmatrix} = 2$$

bo‘lsin deb shartqo‘yamiz. Bu shartbajarilgandaγchiziqtenglamasini$P(x_o, y_o, z_o)$ nuqtaningbiroratrofida

$$\left.\begin{aligned} y &= y(x), \\ z &= z(x) \end{aligned}\right\}$$

kabiyozishmumkin. Bu yerda$x = t$ almashtirisholsak, γchiziqning

$$\left.\begin{aligned} x &= t, \\ y &= y(t), \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\}$$

parametriktenglamalarihosilbo‘ladi. Endi (8) formuladanfoydalanib, chiziqning$P(x_o, y_o, z_o)$ nuqtasidagiyopishmatekisliginingtenglamasiniyozaolamiz:

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ 1 & y'(x_o) & z'(x_o) \\ 0 & y''(x_o) & z''(x_o) \end{vmatrix} = 0 \qquad (10).$$

Bu yerdagi$y'(x_o)$, $z'(x_o)$, $y''(x_o)$, $z''(x_o)$ hosilalarchiziqning (9) oshkormastenglamalaridagiφvaψfunksiyalarninghosilalariorqalitopiladi. (10) formula oshkormastenglamalaribilanberilganchiziqyopishmatekisliginingtenglamasibo‘ladi.

Misol.$x = t\cos t$, $y = -t\sin t$, $z = at$chiziqning$t = 0$ nuqtasidagiyopishmatekisliktenglamasinituzing.

Yechish. Berilganfunksiyalardanbirinchivaikkinchitartiblihosilalarolamiz:

$x' = \cos t - \sin t$, $y' = -\sin t - t\cos t$, $z' = a$,

$x'' = -2\sin t - t\cos t$, $y'' = -2\cos t + t\sin t$, $z'' = 0$.

$t = 0$ da

$x_o = 0$, $y_o = 0$, $z_o = 0$,

$$x'_o = 1, \qquad y'_o = 0, \qquad z'_o = a,$$

$$x''_o = 0, \qquad y''_o = -2, \qquad z''_o = 0.$$

Bu topilganqiymatlarni (8) formulagaqo‘yamiz:

$$\begin{vmatrix} x-0 & y-0 & z-0 \\ 1 & 0 & a \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$ax - z = 0.$$

Bu yopishmatekisliktenglamasibo‘ladi.

Misol: $x = \cos t,\ y = \sin t,\ z = t$ vintchiziqning (1,0,0) nuqtasidagiurinmasi, yopishmatekisligi, normal tekisligi, bosh normalivabinormalianiqlansin.

Echilishi: $\cos t = 1$ $\sin t = 0$ $t = 0$ bo’lganiuchun $\vec{r}\,'(t)\{0,1,1\}$, $\vec{r}\,''(t)$ $\{-1,0,0\}$

$\vec{t}\left\{0,\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ $\vec{b}\left\{0,\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right\}$ $\vec{n}\{1,0,0\}$urinmatenglamasi $\frac{x-1}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}\Rightarrow\ y=z,\ x=1$

Yopishmatekisliktenglamasi - $y-z=0$;

Normal tekisliktenglamasi - $y+z=0$;

Bosh normal tenglamasi - $y=z=0$;

Binormal tenglamasi - $y=-z,\ x=1$.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

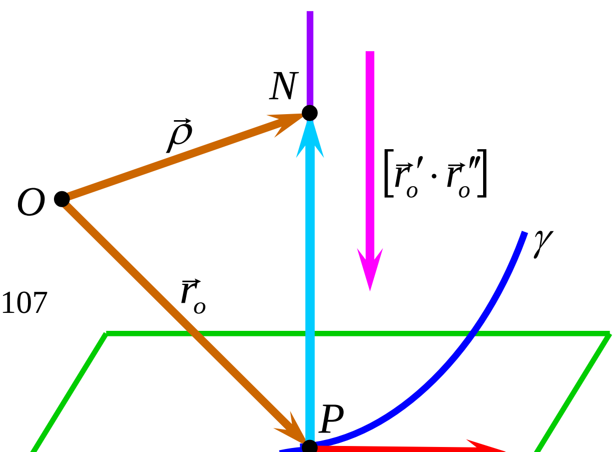
Nazoratsavollar

1. Chiziqningyopishmatekislikta`rifiniaytibbering.
2. Oshkorko`rnishdaberilganchiziqningyopishmatekisliktenglamasiniko`rsating. Misollarbilanifodalang.
3. Qandaytekislikchiziqning normal tekisligideyiladi?
4. Qandayto`g`richiziqchiziqning bosh normal to`grichizig`Ideyiladi? Misollarkeltiring.
5. Qandayto`g`richiziqchiziqningbinormalibo`ladi?
6. Chiziqningto`grilovchitekisliginimisollarorqaligrafikdaajratibko`rsating.
7. Chiziqningurinmatekislik, yopishmatekislikvato`g`rilovchitekisliklarinigrafikdachizmasiniko`rsating.

CHIZIQNING BINORMALI.

Ta’rif. Chiziqningberilgannuqtasidagiyopishmatekislikkaperpendikulyarbo‘lgannormaliga, chiziqningshunuqtasidagi**binormali** deb ataladi.

Evklidfazosidaγregulyarchiziq $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektortenglamasibilanberilganbo‘lsin. Chiziqning$P(t_o)$ nuqtasidagibinormaliningtenglamasinituzaylik. uninguchunbinormalda radius vektori $\vec{\rho}$ bo‘lgan ixtiyoriy$N$ nuqta olamiz va$P$nuqtaning radius



vektorini $\vec{r}_o$ bilan

belgilaymiz (36–chizma).

U vaqtda

$$\overline{PN} = \vec{\rho} - \vec{r}_o \qquad (1).$$

Bizgama'lumki $\vec{r}_o'$

va $\vec{r}_o''$ vektorlarchiziqning

$P(t_o)$ nuqtasidagiyopishma

tekislikka parallel edi.

Shuninguchunbu

vektorlarningvektor

ko'paytmasi bo'lgan

36–chizma.

$[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']$vektor, yopishma

tekislikkaperpendikulyarbo'lib, ta'rifgaasosanbinormalga parallel bo'ladi. Demak, $[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']$va $\overline{PN}$ vektorlarkollinearbo'ladi:

$$\overline{PN} = \lambda \cdot [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o''].$$

Bu yerda (1) tengliknie'tiborgaolsak:

$$\vec{\rho} - \vec{r}_o = \lambda \cdot [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o''] \qquad (2).$$

(2) formula chiziqbinormalining**vektortenglamasi**deyiladi.

γregulyarchiziq$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametriktenglamalaribilanberilganbo'lsin. U vaqtda

$$\vec{\rho} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},\ \vec{r}_o = x_o \cdot \vec{i} + y_o \cdot \vec{j} + z_o \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_o' = x_o' \cdot \vec{i} + y_o' \cdot \vec{j} + z_o' \cdot \vec{k},\ \vec{r}_o'' = x_o'' \cdot \vec{i} + y_o'' \cdot \vec{j} + z_o'' \cdot \vec{k}$$

bo'lib,

$$[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o''] = \begin{vmatrix} y_o' & z_o' \\ y_o'' & z_o'' \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z_o' & x_o' \\ z_o'' & x_o'' \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_o' & y_o' \\ x_o'' & y_o'' \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

bo'ladi. Koordinatalaribilanberilganikkivektorningkollinearlikshartigaasosan

$$\overline{PN} = \vec{\rho} - \vec{r}_o = (x - x_o)\vec{i} + (y - y_o)\vec{j} + (z - z_o)\vec{k}$$

va

$$[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o''] = \begin{vmatrix} y_o' & z_o' \\ y_o'' & z_o'' \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z_o' & x_o' \\ z_o'' & x_o'' \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_o' & y_o' \\ x_o'' & y_o'' \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

vektorlarkollinearbo‘lganiuchun, ularningkoordinatalariproporsionalbo‘ladi:

$$\frac{x - x_o}{\begin{vmatrix} y_o' & z_o' \\ y_o'' & z_o'' \end{vmatrix}} = \frac{y - y_o}{\begin{vmatrix} z_o' & x_o' \\ z_o'' & x_o'' \end{vmatrix}} = \frac{z - z_o}{\begin{vmatrix} x_o' & y_o' \\ x_o'' & y_o'' \end{vmatrix}} \qquad (3).$$

Bu yerdaushbu

$$A = \begin{vmatrix} y_o' & z_o' \\ y_o'' & z_o'' \end{vmatrix}, B = \begin{vmatrix} z_o' & x_o' \\ z_o'' & x_o'' \end{vmatrix}, C = \begin{vmatrix} x_o' & y_o' \\ x_o'' & y_o'' \end{vmatrix}$$

belgilashlarnikiritsak

$$\frac{x - x_o}{A} = \frac{y - y_o}{B} = \frac{z - z_o}{C} \qquad (4)$$

tenglamalarhosilbo‘ladi. (3) va (4) formulalarparametriktenglamalaribilanberilganchiziqbinormalining**kanoniktenglamalari**deyiladi.

NAZORAT SAVOLLAR.

№ 1. Chiziqning**binormali**deb:

1). Chiziqningberilgannuqtasidagiyopishmatekislikkaperpendikulyarbo‘lgannormaligaaytiladi.

2). Chiziqningberilgannuqtasidagiyopishmatekislikka parallel bo‘lgannormaligaaytiladi.

3). Chiziqningberilgannuqtasidagiyopishmatekislikkaortogonalbo‘lgannormaligaaytiladi.

4). Chiziqningberilgannuqtasidagiyopishmatekislikkaperpendikulyarbo‘lganto‘g‘richiziqqaaytiladi.

A. 1) va 2); *B*. 2); *D*. 4); *E*. 1); *F*. 1) va 4).

№ 2. Chiziqbinormalaningta'rifi.

№ 3. Chiziqbinormalaningvektortenglamasi.

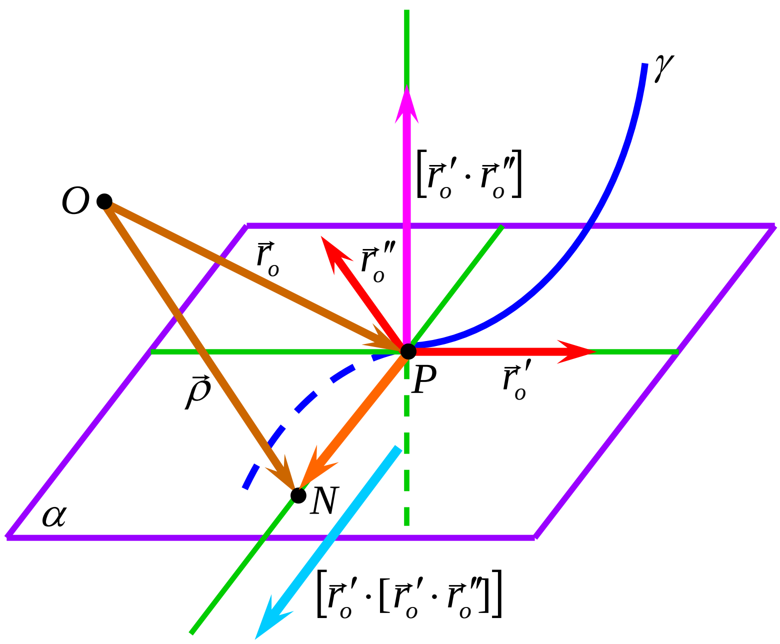
№ 4. Chiziqbinormalaningkanoniktenglamalari.

10-§. CHIZIQNING BOSH NORMALI.

Tayanchtushunchavamunosabatlar. Bosh normal, bosh normalningtenglamalari.

Ta'rif. Chiziqningberilgannuqtasidagiyopishmatekisligidayotuvchinormaliga, chiziqningshunuqtasidagi**bosh normali**deyiladi.

Evklidfazosidaγregulyarchiziq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektortenglamasibilanberilganda, uning$P(t_o)$ nuqtasidagi bosh normaliningtenglamasinituzaylik. Ta'rifgako'rachiziqningberilgannuqtasidagi bosh normali, chiziqningshu nuqtasidagiurinmasi vabinormaliga perpendikulyarbo'ladi (37–chizma).Ma'lumki, agar $\vec{r}_o$ vektor$P(t_o)$ nuqtaning radius vektoribo'lsa, u vaqtda $\vec{r}_o'$ vektorchiziqning shunuqtasidagi urinmasiga, $[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']$ vektoresabinormaliga



parallel bo‘ladi. Demak,

$\vec{r}_o'$ va $\left[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o''\right]$

vektorlarning vektor 37–chizma.

ko‘paytmasibo‘lgan

$\left[\vec{r}_o' \cdot [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']\right]$vektor bosh normalga parallel bo‘ladi.

Bosh normaldaixtiyoriy$N$nuqta olib, uning radius vektorini $\vec{\rho}$ bilanbelgilaymiz. $\left[\vec{r}_o' \cdot [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']\right]$vektor bosh normalga parallel bo‘lganiuchun, $\overline{PN}$ va $\left[\vec{r}_o' \cdot [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']\right]$vektorlarkollinearbo‘ladi:

$$\overline{PN} = \lambda\left[\vec{r}_o' \cdot [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']\right].$$

Buyerda

$$\overline{PN} = \vec{\rho} - \vec{r}_o$$

bo‘lganiuchun

$$\vec{\rho} - \vec{r}_o = \lambda\left[\vec{r}_o' \cdot [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']\right] \qquad (1)$$

kelibchiqadi.

(1) formula chiziq**bosh normaliningvektortenglamasi**deyiladi.

Evklidfazosidaγregulyarchiziq$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametriktenglamalaribilanberilsin. U vaqtda

$$\vec{\rho} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},\ \vec{r}_o = x_o \cdot \vec{i} + y_o \cdot \vec{j} + z_o \cdot \vec{k},$$

$$\vec{r}_o' = x_o' \cdot \vec{i} + y_o' \cdot \vec{j} + z_o' \cdot \vec{k},\ \vec{r}_o'' = x_o'' \cdot \vec{i} + y_o'' \cdot \vec{j} + z_o'' \cdot \vec{k},$$

$$\left[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o''\right] = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j} + C \cdot \vec{k},$$

$$\left[\vec{r}_o' \cdot [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']\right] = \begin{vmatrix} y_o' & z_o' \\ B & C \end{vmatrix} \cdot \vec{i} + \begin{vmatrix} z_o' & x_o' \\ C & A \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} x_o' & y_o' \\ A & B \end{vmatrix} \cdot \vec{k}$$

bo‘ladi, buyerda

$$A = \begin{vmatrix} y_o' & z_o' \\ y_o'' & z_o'' \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} z_o' & x_o' \\ z_o'' & x_o'' \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} x_o' & y_o' \\ x_o'' & y_o'' \end{vmatrix} \qquad (2).$$

$$\overline{PN} = \vec{\rho} - \vec{r}_o = (x - x_o)\vec{i} + (y - y_o)\vec{j} + (z - z_o)\vec{k}$$

va

$$\left[\vec{r}_o' \cdot [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']\right]$$

vektorlarkollinearbo‘lganiuchun, koordinatalaribilanberilganikkivektorningkollinearlikshartigaasosan, buvektorlarningkoordinatalariproporsionalbo‘ladi:

$$\frac{x-x_o}{\begin{vmatrix} y_o' & z_o' \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{y-y_o}{\begin{vmatrix} z_o' & x_o' \\ C & A \end{vmatrix}} = \frac{z-z_o}{\begin{vmatrix} x_o' & y_o' \\ A & B \end{vmatrix}} \qquad (3).$$

(3) formula parametriktenglamalaribilanberilganchiziq**bosh normaliningkanoniktenglamasi**deyiladi. Bu yerdagi$A$, B, Csonlar (2) tengliklardantopiladi.

Misol.$x = e^t\cos t$, $y = e^t \sin t$, $z = e^t$chiziqning$P(t = 0)$ nuqtasidagi bosh normaliningtenglamasinituzing.

Yechish. Berilganfunksiyalardanhosilalarolamiz:

$x' = e^t \cos t - e^t\sin t$, $y' = e^t\sin t + e^t \cos t$, $z' = e^t$,

$x'' = -2 e^t\sin t$, $y'' = 2 e^t \cos t$, $z'' = e^t$.

Masala shartidaberilganfunksiyalarninghamdatopilganhosilalarning$P(t =0)$ nuqtadagiqiymatlarinitopamiz:

$x_o = 1$, $y_o = 0$, $z_o = 1$.

$x_o' = 1$, $y_o' = 1$, $z_o' = 1$,

$x_o'' = 0$, $y_o'' = 2$, $z_o'' = 1$.

A, B, Clarnitopamiz:

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1,\; B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1,\; C = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Bu topilganqiymatlarni (3) formulagaqo‘yamiz:

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}} = \frac{y-0}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{z-1}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix}}$$

yoki

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-1}{0}.$$

Natijada bosh normalningkanoniktenglamasihosilbo‘ldi.

NAZORAT SAVOLLAR.

№ 1. Chiziq bosh normaliningta’rifi.

№ 2. Chiziqning**bosh normali** deb:

1. Chiziqning normal tekisligidayotuvchinormaligaaytiladi.
2. Chiziqningyopishmatekisligiga parallel normaligaaytiladi.
3. Chiziqningyopishmatekisligidayotuvchinormaligaaytiladi.
4. Chiziqningyopishmatekisligigaperpendikulyarnormaligaaytiladi.

A. 1) va 3); *B*. 3) va 4); *D*. 3); *E*. 2); *F*. 1).

№ 3. Chiziq bosh normaliningvektortenglamasi.

№ 4. Parametriktenglamalaribilanberilganchiziq bosh normaliningtenglamasi.

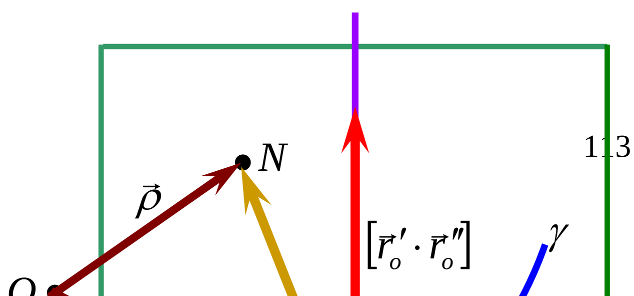
11-§. CHIZIQNING TO‘G‘RILOVCHI TEKISLIGI.

Tayanchtushunchavamunosabatlar. To‘g‘rilovchitekislik, to‘g‘rilovchitekisliktenglamalari.

Ta’rif. Chiziqningberilgannuqtasidagiurinmavabinormalidano‘tuvchitekislikka, chiziqningshunuqtasidagi**to‘g‘rilovchitekisligi** deb ataladi.

Evklidfazosidaγregulyarchiziq $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektortenglamasibilanberilganda, uning$P(t_o)$ nuqtasidagito‘g‘rilovchitekisliginingtenglamasinituzaylik.

Ma’lumki, agar $\vec{r}_o=\vec{r}(t_o)$ vektor$P(t_o)$



nuqtaning radius vektoribo‘lsa, u vaqtda $\vec{r}_o'$ vektorchiziqningshunuqtasida giurinmasiga, $[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']$ vektoresabinormaliga parallel bo‘ladi. Demak, ta’rifgaasosan $\vec{r}_o'$ va $[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']$ vektorlarto‘g‘rilovchitekislikka parallel bo‘ladi (38–chizma).

38–chizma.

To‘g‘rilovchitekislikdaixtiyoriy$N$ nuqta olib, uning radius vektorini $\vec{\rho}$ bilanbelgilaylik. Agar $\overline{PN}$, $\vec{r}_o'$ va $[\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']$ vektorlarniqarasak, ularbirtekislikka, ya’nito‘g‘rilovchitekislikka parallel bo‘ladi. Shuninguchunularkomplanarvektorlarbo‘lib, ularningaralashko‘paytmasinolgatengdir:

$$\left(\overline{PN}, \vec{r}_o', [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']\right) = 0.$$

Buyerda

$$\overline{PN} = \vec{\rho} - \vec{r}_o$$

bo‘lganiuchun

$$\left(\vec{\rho} - \vec{r}_o, \vec{r}_o', [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o'']\right) = 0 \qquad (1).$$

(1) formula chiziq**to‘g‘rilovchitekisliginingvektortenglamasi**deyiladi.

Evklidfazosidaγregulyarchiziq$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametriktenglamalaribilanberilganda, parametrning$t = t_o$qiymatigamoskeluvchi$P(x_o;y_o;z_o)$ nuqtasidagito‘g‘rilovchitekisliktenglamasinituzaylik. Bizgama’lumkichiziqparametriktenglamalaribilanberilganda

$$\vec{\rho} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k},\ \vec{r}_o = x_o \cdot \vec{i} + y_o \cdot \vec{j} + z_o \cdot \vec{k},\ \vec{r}_o' = x_o' \cdot \vec{i} + y_o' \cdot \vec{j} + z_o' \cdot \vec{k},$$
$$\vec{r}_o'' = x_o'' \cdot \vec{i} + y_o'' \cdot \vec{j} + z_o'' \cdot \vec{k},\ [\vec{r}_o' \cdot \vec{r}_o''] = A \cdot \vec{i} + B \cdot \vec{j} + C \cdot \vec{k}$$

bo‘lib, buyerda$A$, B, C lar ushbu

$$A=\begin{vmatrix} y_o' & z_o' \\ y_o'' & z_o'' \end{vmatrix},\ B=\begin{vmatrix} z_o' & x_o' \\ z_o'' & x_o'' \end{vmatrix},\ C=\begin{vmatrix} x_o' & y_o' \\ x_o'' & y_o'' \end{vmatrix}$$

ifodalardananiqlanadi.

Koordinatalaribilanberilganuchvektorningaralashko‘paytmasiniifodalovchifo rmulagaasosan, (1) vektortenglamaniquyidagichayozaolamiz:

$$\begin{vmatrix} x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ x_o' & y_o' & z_o' \\ A & B & C \end{vmatrix}=0 \qquad (2).$$

(2) formula parametriktenglamalaribilanberilganchiziqto‘g‘rilovchitekisliginingtenglamasibo‘ladi.

Misol. $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = e^t$ chiziqning $P(t = 0)$ nuqtasidagito‘g‘rilovchitekisliginingtenglamasinituzing.

Yechish. Chiziqningparametriktenglamalaridanhosilalarolamiz:

$x' = -\sin t$, $y' = \cos t$, $z' = e^t$,

$x'' = -\cos t$, $y'' = -\sin t$, $z'' = e^t$.

Chiziqningparametriktenglamalaridagifunksiyalarninghamdabuhosilalarning $P(t = 0)$ nuqtadagiqiymatlarinitopamiz:

$x_o = 1$, $y_o = 0$, $z_o = 1$.

$$x_o' = 0, \qquad y_o' = 1, \qquad z_o' = 1,$$

$$x_o'' = -1, \qquad y_o'' = 0, \qquad z_o'' = 1.$$

A, B, C larnihisoblaymiz:

$$A=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=1,\ B=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1,\ C=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=1.$$

Topilganqiymatlarni (2) formulagaqo‘yamiz:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$$

yoki

$$2x + y - z - 1 = 0.$$

Bu tenglamachiziqto‘g‘rilovchitekisliginingtenglamasibo‘ladi.

NAZORAT SAVOLLAR.

№ 1. Chiziqto‘g‘rilovchitekisliginingta’rifi.

№ 2. Chiziqningto‘g‘rilovchitekisligi deb:

1). Chiziqningurinmasivabinormalidano‘tuvchitekislikkaaytiladi.

2). Chiziqningurinmasiva bosh normalidano‘tuvchitekislikkaaytiladi.

3). Chiziqningbinormaliva bosh normalidano‘tuvchitekislikkaaytiladi.

A. 1); *B*. 2); *D*. 3); *E*. 1) va 2); *F*. 1) va 3).

№ 3. Chiziqto‘g‘rilovchitekisliginingvektortenglamasi.

№ 4. Parametriktenglamalaribilanberilganchiziqto‘g‘rilovchitekisliginingtenglamasi.

18.1.CHIZIQNING YOY UZUNLIGI.

Tayanchtushunchavamunosabatlar. Chiziqyoyininguzunligi, yoyuzunliginihisoblashformulalari.

Reja:

1. Yoyuzunlikta’rifi
2. Asosiyteorema
3. Turlichaberilganchiziqlaruchunyoyuzunlikformulalari
4. Yoyuzunligiparametrsifatida
5. Vektor-funktsiyaning S -bo’yichahosilalari

Tayanchiboralar:yoyuzunligi,parametriktenglama, tabiiytenglama.

Mavzuningbayoni:

Evklidfazosidaγchiziq

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

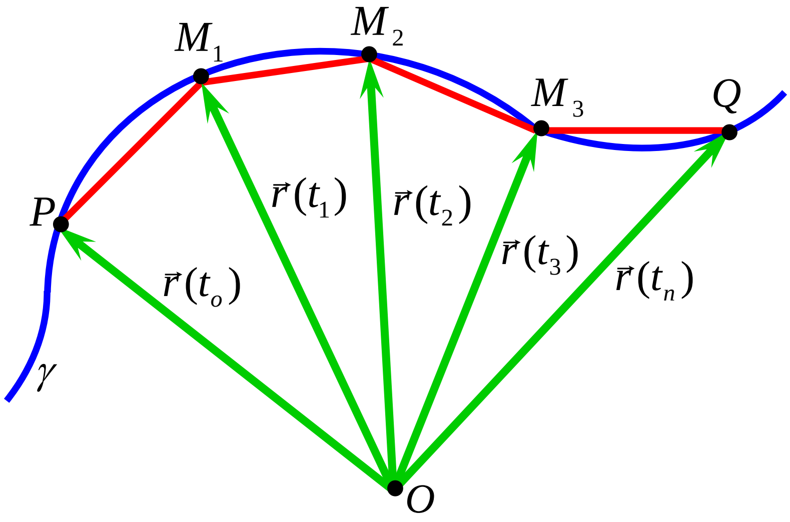
vektortenglamasibilanberilganbo‘lsin. γchiziqda, *t*parametrning [*a*, *b*] kesmadagiqiymatlarigamoskeluvchi, *PQ*yoyniolaylik, bunda$t = a$qiymatga$P$ nuqta, $t = b$qiymatga$Q$ nuqta moskelsin. [*a*, *b*] kesmani, o‘sibborishtartibidaolingant_o, t_1, t_2, …, $t_n$nuqtalarbilan$n$bo‘lakkabo‘lamiz, buyerda

$$a = t_o < t_1 < t_2 < \cdots < t_n = b.$$

γchiziqda

$$P = M_o(t_o),\ M_1(t_1), \cdots, M_{i-1}(t_{i-1}),\ M_i(t_i), \cdots, M_n(t_n) = Q$$

nuqtalarniolib, uchlarishu nuqtalardabo‘lgan $PM_1M_2 \cdots M_{n-1}Q$ siniqchiziqni chizamiz (39-chizma). Hosil bo‘lgan $PM_1M_2 \cdots M_{n-1}Q$ siniqchiziqni *PQ*yoygaichki chizilgansiniq chiziq debaytiladi. Uningperimetrini *p* bilanbelgilaymiz. $M_i(t_i)$ nuqtalarning



39–chizma.

radius vektorlari $\vec r_i = \vec r(t_i)$ bo‘lganiuchun, *p*perimetrquyidagigatengbo‘ladi:

$$p = \sum_{i=1}^{n} M_{i-1}M_i = \sum_{i=1}^{n} \left| \vec r(t_i) - \vec r(t_{i-1}) \right|.$$

Ta’rif. Chiziqning*PQ*yoyigaichkichizilgansiniqchiziqkesmalarisonicheksizort gandavaharbirkesmauzunliginolgaintilganda, siniqchiziqperimetrininglimitimavjudbo‘lsa, bulimitgachiziq*PQ***yoyininguzunligi**debataladiva*s* bilanbelgilanadi.

Teorema. Silliqchiziqning har qandayyoyima’lumuzunlikkaega. Agar chiziq $\vec r = \vec r(t)$ vektortenglamasibilanberilsa, u vaqtda*t*parametrning [*a*, *b*] kesmadagiqiymatlarigamoskeluvchiyoyuzunligi

$$s=\int_a^b |\vec r\,'(t)|\,dt$$

formula bilananiqlanadi.

Isbot. Ushbu

$$\sum_{i=1}^{n}|\vec r(t_i)-\vec r(t_{i-1})|-\int_a^b|\vec r\,'(t)|\,dt \qquad (1)$$

ayirmanibaholaymiz. Buning uchunquyidagibelgilashlarnikiritamiz:

$$\Delta_i\vec r=\vec r(t_i)-\vec r(t_{i-1}), \qquad \vec r_i\,'=\vec r\,'(t_i), \qquad \Delta_i t=t_i-t_{i-1}.$$

U vaqtda

$$\left|\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i\vec r|-\int_a^b|\vec r\,'(t)|\,dt\right|=\left|\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i\vec r|-\sum_{i=1}^{n}|\vec r_i\,'|\,\Delta_i t+\sum_{i=1}^{n}|\vec r_i\,'|\,\Delta_i t-\int_a^b|\vec r\,'(t)|\,dt\right|\le$$

$$\le\left|\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i\vec r|-\sum_{i=1}^{n}|\vec r_i\,'|\,\Delta_i t\right|+\left|\sum_{i=1}^{n}|\vec r_i\,'|\,\Delta_i t-\int_a^b|\vec r\,'(t)|\,dt\right|=W_1+W_2,$$

buyerda

$$W_1=\left|\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i\vec r|-\sum_{i=1}^{n}|\vec r_i\,'|\,\Delta_i t\right|,$$

$$W_2=\left|\sum_{i=1}^{n}|\vec r_i\,'|\,\Delta_i t-\int_a^b|\vec r\,'(t)|\,dt\right|$$

belgilashlarnikiritdik.

Endi buW_1vaW_2ifodalarnibaholaymiz.

Siniqchiziqdagikesmalarsonicheksizortib, har birkesmauzunliginolgaintilganda, vektorfunksiyaaniqintegralininingta’rifigaasosanW_2nolgaintiladi. XuddishuningdekW_1 ham nolgaintiladi. Haqiqatan, W_1niquyidagichayozamiz:

$$W_1=\left|\sum_{i=1}^{n}\left(|\Delta_i\vec r|-|\vec r_i\,'|\,\Delta_i t\right)\right|\le\sum_{i=1}^{n}|\Delta_i\vec r-\vec r_i\,'\Delta_i t|.$$

Oxirgiyig‘indidagi har birqo‘shiluvchinialohidabaholaylik:

$$|\Delta_i\vec r-\vec r_i\,'\Delta_i t|=\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\vec r\,'(t)\,dt-\int_{t_{i-1}}^{t_i}\vec r_i\,'\,dt\right|=\left|\int_{t_{i-1}}^{t_i}\left(\vec r\,'(t)-\vec r_i\,'\right)dt\right|\le\int_{t_{i-1}}^{t_i}|\vec r\,'(t)-\vec r_i\,'|\,dt.$$

Ma’lumki $\vec{r}'(t)$ funksiya $[a, b]$ kesmadauzluksizvademak, bufunksiya $[a, b]$ kesmadatekisuzluksizdir. Shu sababli, har qanday $\varepsilon > 0$ son uchunshunday $\delta > 0$ son mavjudki, barcha $[t_{i-1}, t_i]$ kesmalarninguzunliklari δ dan kichikbo‘lganda

$$|\vec{r}'(t) - \vec{r}_i'| < \varepsilon$$

bo‘ladi. Bundanesa

$$\left|\Delta_i \vec{r} - \vec{r}_i' \Delta_i t\right| = \int_{t_{i-1}}^{t_i} \varepsilon\, dt = \varepsilon \cdot \Delta_i t$$

kelibchiqadi.

Demak, siniqchiziqdagikesmalarniyetarlidarajadakichikkesmalargabo‘lganimizda

$$W_1 \le \sum_{i=1}^{n} (\varepsilon \cdot \Delta_i t) = \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta_i t = \varepsilon (b - a)$$

tengsizlikbajarilarekan. Buyerda ε soniniixtiyoriytanlashmumkinligidan, agar ε nolgaintilsa, u vaqtda W_1 hamnolgaintilishikelibchiqadi.

Shundayqilib, PQ yoygaichkichizilgansiniqchiziqdakesmalarsonicheksizortib, harbirkesmauzunliginolgaintilganda

$$\sum_{i=1}^{n} \left|\vec{r}(t_i) - \vec{r}(t_{i-1})\right| - \int_a^b |\vec{r}'(t)|\, dt$$

ayirmanolgaintilarekan. Bu esasiniqchiziqperimetrininglimtimavjudbo‘lib, bu limit

$$\int_a^b \left|\vec{r}'(t)\right| dt$$

gatengekanliginibildiradi.

Demak,

$$s = \int_a^b \left|\vec{r}'(t)\right| dt \qquad (1).$$

Teoremaisbotbo‘ldi.

(1) formula vektortenglamasibilanberilganchiziqyoyininguzunliginihisoblashformulasideyiladi.

Endi γchiziqvektortenglamasidanboshqatenglamalaribilanberilgandayoyuzunliginihisoblashformulalarinikeltiramiz.

Evklidfazosidaγsilliqchiziq$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametriktenglamalaribilanberilganbo'lsin. U vaqtda

$$\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k},\ \vec{r}'(t) = x'(t)\cdot\vec{i} + y'(t)\cdot\vec{j} + z'(t)\cdot\vec{k}$$

bo'lib,

$$|\vec{r}'(t)| = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}$$

bo'lganiuchun, (1) formulagaasosan, $t$parametrning$t = a$qiymatdan$t = b$qiymatgachao'zgarishigamoskeluvchiyoyuzunligi

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}dt \qquad (2)$$

formulabilananiqlanadi.

Evklidfazosidaγsilliqchiziq$y = y(x)$, $z = z(x)$ shakldagitenglamalaribilanberilsa, u vaqtda$x$o'zgaruvchining$x = a$qiymatdan$x = b$qiymatgachao'zgarishigamoskelganyoyuzunligi

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y_x'^2 + z_x'^2}dx \qquad (3)$$

formula bilananiqlanadi. (3) formulanihosilqilishuchun (2) formulada$t = x$ almashtirisholishyetarlidir.

Agar γsilliqchiziqtekischiziqbo'lib, $x = x(t)$, $y = y(t)$ parametriktenglamalaribilanberilsa, u vaqtda$t$parametrning $[a, b]$ kesmadagiqiymatlarigamoskelganyoyuzunligi

$$s = \int_a^b \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}dt \qquad (4)$$

formulabilananiqlanadi.

Agarγtekischiziq$y = y(x)$ oshkortenglamasibilanberilsa, u vaqtda$x$o'zgaruvchining$x = a$qiymatdan$x =$

$b$qiymatgachao‘zgarishigamoskeluvchiyoyuzunligi

$$s=\int_a^b\sqrt{1+y'^2}\,dx \qquad (5)$$

formulabilananiqlanadi.

Agarγtekischiziq $f(x, y) = 0$ oshkormastenglamasibilanberilsa, u vaqtda$x$ ning$x = a$qiymatdan$x = b$qiymatgachao‘zgarishigamoskeluvchiyoyuzunligi

$$s=\int_a^b\frac{\sqrt{f_x'^2+f_y'^2}}{f_y'}dx$$

formula bilananiqlanadi.

1-misol. $x=8at^3$, $y=3a(2t^2-t^4)$ chiziqningM_1 $(t_1 = 0)$ va$M_2(t_2=\sqrt{2})$ nuqtalariorasidagiyoyuzunligini toping.

Yechish. Chiziqtenglamalaridanhosilaolamiz:

$x' = 24at^2$,$y' = 12a(t-t^3)$.

Berilgantenglamalartekischiziqningparametriktenglamalaribo‘lganiuchun (4) formuladanfoydalanamiz. Demak, topilganhosilalarni (4) formulagaqo‘yamiz:

$$s=\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{\left(24a\cdot t^2\right)^2+\left[12a\left(t-t^3\right)\right]^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{576a^2t^4+144a^2\left(t-t^3\right)^2}\,dt=$$

$$=12a\int_0^{\sqrt{2}}\sqrt{\left(t+t^3\right)^2}=12a\int_0^{\sqrt{2}}\left(t+t^3\right)dt=12a+12a=24a.$$

2-misol. $y=\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}\ln x$ chiziqning$M_o(x_o = 1)$, $M_1(x_1 = 4)$ nuqtalariorasidagiyoyuzunligini toping.

Yechish. Berilgantenglamatekischiziqningoshkortenglamasidir. Shu sababli (5) formuladanfoydalanamiz.

Chiziqningberilgantenglamasidan$x$bo‘yichahosilaolamiz:

$$y'=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2x}.$$

Bu hosilani (5) formulagaqo‘yamiz:

$$s=\int_1^4\sqrt{1+\left(\frac{x}{2}-\frac{1}{2x}\right)^2}dx=\int_1^4\frac{x^2+1}{2x}dx=\frac{1}{2}\int_1^4 xdx+\frac{1}{2}\int_1^4\frac{dx}{x}=\frac{15}{4}+\ln 2.$$

3-misol. $x = a\,\mathrm{ch}t$, $y= a\,\mathrm{sh}t$, $z = at$ chiziqning [0; t] kesmadagiyoyuzunligini toping.

Yechish. Berilgantenglamafazodagichiziqningparametriktenglamalaridir. Shuninguchun (2) formuladanfoydalanamiz.

Chiziqningberilgantenglamalaridan *t* bo‘yichahosilaolamiz:

$x' = a\,\mathrm{sh}t$, $y' = a\,\mathrm{ch}t$, $z' = a$.

Bu hosilalarni (2) formulagaqo‘yamiz:

$$s=\int_0^t\sqrt{(a\mathrm{sh}t)^2+(a\mathrm{ch}t)^2+a^2}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^t \mathrm{ch}t\,dt=a\sqrt{2}\,\mathrm{sh}t.$$

Regulyar chiziq yoy uzunligi uchun yuqorida isbotlangan (3) formulada yuqori chegarani o’zgaruvchi deb qarasak,

$$S(t)=\int_{t_0}^{t}|\vec{r}\,'(t)|\,dt \qquad (12)$$

funktsiya kelib chiqadi.

Buning geometrik ma’nosi shuki $|S(t)|$ chiziqning $[t_0,t]$ kesma uzunligi.

$\frac{ds}{dt}=|\vec{r}\,'(t)|>0$ (13) dan ko’ramizki $S(t)$ funktsiyaqat’iymonoton. U holda S - niparametrsifatidaolishimizmumkin. γ chiziquchun S - niparametrsifatidaqarasakunitabiiyparametrlashgandeyiladi. (13) dan $\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=1$ kelibchiqadi.

$\left|\frac{d\vec{r}}{ds}\right|=\cdot|\dot{\vec{r}}(S)|$ belgilaymiz. Keyingihosilalar $\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\ddot{\vec{r}}(S)$, $\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}=\dddot{\vec{r}}(S)$,...

Xulosa: S - parametrbo’lsaurinmaning yo’naltiruvchivektoribirlikvektorbo’ladi, ya’ni $|\dot{\vec{r}}(S)|=1$, $\dot{\vec{r}}(S)=\vec{\tau}$ belgilaymiz. $|\vec{\tau}|=1=|\dot{\vec{r}}(S)|$.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Vektor funksiyaorqaliberilganchiziqningbirororaliqdagiyoyuzunligiqandaybo`ladi?
2. Parametrikko`rinishdaberilganchiziqningbirororaliqdagiyoyuzunligigamisollarkeltiring.
3. Oshkorko`rinishdaberilganfunksiyaningyoyuzunlikformulasivaungaoidmisollarkeltiring.
4. Vektor funksiyanio`zgaruvchilioraliqdayoyuzunligiorqaliqandayparametrlashtirishmumkin.
5. Turlichaberilganchiziqlaruchunyoyuzunlikformulalarinikeltiribchiqaring. Misollarorqaliko`rsating.
6. Qutb tenglamasiorqaliberilganchiziqningyoyuzununlikformulasiniaytingvamisollarkeltiring.

18.2 CHIZIQNI TABIIY PARAMETRLASH.

Tayanchtushunchavamunosabatlar. Tabiiyparametr, chiziqningtabiiyparametrlitenglamalari, tabiiyparametrbo‘yichahosilalarvaularningyozilishi, tabiiyparametrlivektorfunksiyadanolinganbirinchivaikkinchihosilalarninggeometrikma’nosi.

Chiziqningxossalarinitekshirishdaparametrqilibixtiyoriyuzluksizo‘zgaruvchinitanlanmumkin. Jumladanyoyuzunligini ham parametrsifatidaolishmumkin. Agar yoyuzunligiparametrsifatidaolinsa, u vaqtdachiziqningko‘pginaxossalarinitekshirishvategishliformulalarnikeltiribchiqarishanchasoddalashadi.

Evklidfazosidaγsilliqchiziq

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1)$$

vektortenglamasibilanberilganbo‘lsin. Ma’lumki$t$ parametrning $[a, t]$ kesmadagiqiymatlarigamoskeluvchichiziqyoyininguzunligi

$$s = \int_a^t |\vec{r}'(t)| dt \qquad (2)$$

formula bilananiqlanadi. (2) formulada, *s*yoyuzunligiintegralningyuqorichegarasibo‘lgan*t*ninguzluksizfunksiyasibo‘ladi. Bu funksiya, *t*> *a*bo‘lgandamusbat, *t* < *a*bo‘lgandamanfiy, *t* = *a*bo‘lgandaesanolgatengbo‘ladi. (2) funksiyani*t*bo‘yichadifferensiallasak, $|\vec{r}'(t)|$ funksiyauzluksizbo‘lganiuchun,

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\int_a^t |\vec{r}'(t)| dt\right) = |\vec{r}'(t)|.$$

Demak,

$$\frac{ds}{dt} = |\vec{r}'(t)| \qquad (3).$$

Buyerda

$$|\vec{r}'(t)| > 0$$

bo‘lganiuchun

$$\frac{ds}{dt} > 0 \qquad (4)$$

tengsizlikkelibchiqadi. (4) tengsizlik (2) funksiyaningqat’iyma’nodamonotonliginibildiradi. Shu sababli (2) tenglamani har doim*t*ganisbatanyechishmumkin. U *s*ningbirqiymatli, uzluksizfunksiyasi

$t = t(s)$ (5)

bo‘ladi.

Shundayqilib*s*ning har birqiymatiga*t*ninganiqbirqiymatimoskelarekan. Bu esayoyuzunligi*s*niyangiparametrsifatidaolishmumkinliginibildiradi. *s*parametrnichiziqning**natural**yoki**tabiiyparametri**deb ataladi.

(5) ifodani (1) tenglamagaqo‘ysak

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = \vec{r}(t(s))$$

yokiqisqacha

$$\vec{r} = \vec{r}(s) \qquad (6)$$

tenglamahosilbo‘ladi. (6) tenglamanichiziqning**tabiiyparametrlivektortenglamasi** deb ataladi.

Agar chiziq $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektortenglamasibilanberilganda $|\vec{r}'(t)| = 1$ bo‘lsa, u vaqtda$t$parametrchiziqningtabiiyparametribo‘ladi.

Haqiqatan, (2) formulada$a$ = 0 deb olsak

$$s = \int_0^t |\vec{r}'(t)| dt = \int_0^t 1 \cdot dt = t.$$

Agar γsilliqchiziq$x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ parametriktenglamalaribilanberilganbo‘lsa, u vaqtda (5) ifodagaasosan

$$x = x(t(s)), \quad y = y(t(s)), \quad z = z(t(s))$$

yoki

$$\left.\begin{aligned} x &= x(s), \\ y &= y(s), \\ z &= z(s) \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

tenglamalarniyozaolamiz. (7) tenglamalargachiziqning**tabiiyparametriktenglamalari** deb ataladi.

(6) yoki (7) tenglamalarnikeltiribchiqarishjarayoniga**chiziqnitabiiyparametrlash**deb ataladi.

Biz $\vec{r} = \vec{r}(t)$ vektorfunksiyadan$t$bo‘yichaolinganhosilalarni

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}', \quad \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{r}'', \quad \frac{d^3\vec{r}}{dt^3} = \vec{r}''', \ldots$$

kabibelgilaganedik. $\vec{r} = \vec{r}(s)$ vektorfunksiyadan$s$bo‘yichaolinganhosilalarni

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \dot{\vec{r}}, \quad \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} = \ddot{\vec{r}}, \quad \frac{d^3\vec{r}}{ds^3} = \dddot{\vec{r}}, \ldots$$

kabibelgilaymiz.

Endi $\dot{\vec{r}}$ va $\ddot{\vec{r}}$ vektorlarninggeometrikma’nosinianiqlaymiz.

1. $\dot{\vec{r}}$ vektorninggeometrikma’nosi.

Belgilashgaasosan

$$\dot{\vec r}=\frac{d\vec r}{ds}=\frac{d\vec r}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\vec r\,'\frac{dt}{ds}.$$

(3) tenglikkaasosan:

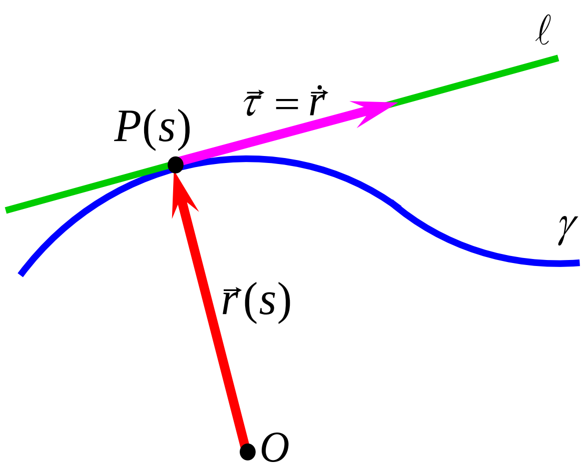
$$\dot{\vec r}=\vec r\,'\frac{dt}{ds}=\vec r\,'\frac{1}{\frac{ds}{dt}}=\vec r\,'\frac{1}{|\vec r\,'|}=\frac{\vec r\,'}{|\vec r\,'|}.$$

Demak,

$$\dot{\vec r}=\frac{\vec r\,'}{|\vec r\,'|} \qquad (8).$$

Ma'lumki $\frac{\vec r\,'}{|\vec r\,'|}$ vektor, birlikvektorbo'lib, u $\vec r\,'$ vektorbilanbirhilyo'naladi. $\vec r\,'$ vektoresachiziqningurinmasiga parallel edi. Shundayqilib (8) formulagaasosanquyidaginatijagakelamiz.

Natija. Chiziqning $\vec r=\vec r(s)$ tenglamasidansbo'yichaolinganbirinchihisola $\dot{\vec r}$ birlikvektorbo'lib, chiziqningurinmasiga parallel bo'ladi (40–chizma).



40–chizma.

Bundankeyin biz chiziqningurinmasiga parallel bo'lganbirlikvektorni**urinmaningbirlikvektori** deb ataymizva $\vec\tau$ bilanbelgilaymiz.

Demak,

$$\vec\tau=\dot{\vec r}.$$

2. $\ddot{\vec r}$ vektorninggeometrikma'nosi.

Birinchidan, $\dot{\vec r}$ vektoro'zgaruvchibirlikvektorbo'lganiuchun, undansbo'yichaolingan $\ddot{\vec r}$ hisola, shu $\dot{\vec r}$ vektorgaperpendikulyarbo'ladi. $\ddot{\vec r}$

vektorchiziqningurinmasiga parallel bo‘lganiuchun $\ddot{\vec{r}}$ vektor normal tekislikka parallel bo‘ladi.

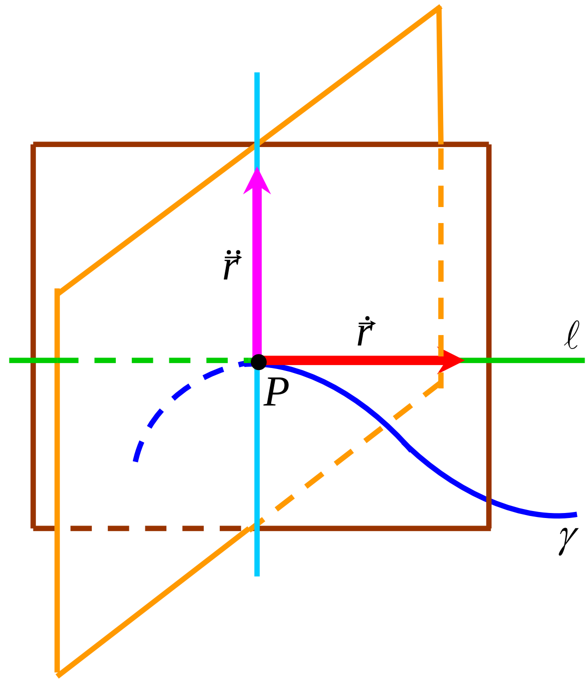
Ikkinchidan,

$$\dot{\vec{r}} = \vec{r}\,' \cdot \frac{dt}{ds},$$

$$\ddot{\vec{r}} = \vec{r}\,''\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + \vec{r}\,'\frac{d^2t}{ds^2}.$$

Oxirgitenglikdan $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$, $\ddot{\vec{r}}$ vektorlarning komplanarligikelib chiqadi. Ma’lumki $\vec{r}\,'$ va $\vec{r}\,''$ vektorlar chiziqningyopishma tekisligiga parallel edi. Shu sababli $\ddot{\vec{r}}$ vektor ham yopishmatekislikka parallel bo‘ladi.

Shundayqilib $\ddot{\vec{r}}$ vektorchiziqning normal vayopishmatekisliklariga parallel bo‘lganiuchun, bu $\ddot{\vec{r}}$ vektorchiziqning bosh normaliga parallel bo‘ladi (41–chizma).



41–chizma.

Chizikning bosh normaliga parallel bulganbirlikvektorni**bosh normalningbirlikvektori**deb ataymizva $\vec{\nu}$ bilanbelgilaymiz.

Demak,

$$\vec{\nu} = \frac{\ddot{\vec{r}}}{\left|\ddot{\vec{r}}\right|}.$$

Butenglikdan

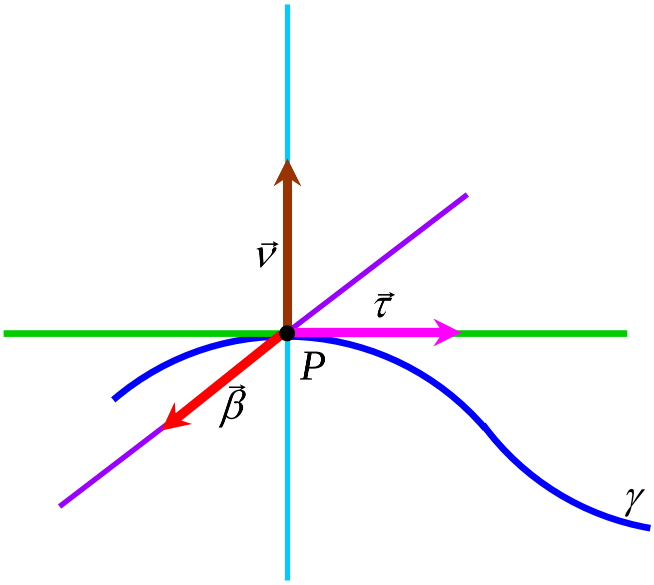
$$\ddot{\vec{r}} = \left|\ddot{\vec{r}}\right| \cdot \vec{\nu}.$$

$\vec{\tau}$ birlikvektorurinmaga, $\vec{\nu}$ birlikvektor bosh normalga parallel bo’lganiuchun,

$$\vec{\beta} = [\vec{\tau} \cdot \vec{\nu}]$$

birlikvektorbinormalga parallel bo’ladi (43–chizma).

Bu $\vec{\beta}$ vektorni**binormalningbirlikvektori** deb ataymiz.



43–chizma.

$\vec{\tau},\ \vec{\nu},\ \vec{\beta}$ birlikvektorlarEvklidfazosidaxuddi dekartkoordinatalarsistemasidagi $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ ortlarkabijoylashib, quyidagitengliklaro‘rinli:

$$\vec{\tau} = [\vec{\nu} \cdot \vec{\beta}],\ \vec{\nu} = [\vec{\beta} \cdot \vec{\tau}],$$
$$\vec{\beta} = [\vec{\tau} \cdot \vec{\nu}].$$

Misol.$x = a_1t + b_1$, $y = a_2t + b_2$, $z = a_3t + b_3$parametriktenglamalaribilanberilganto‘g‘ri chiziqningtabiiyparametrlitenglamalarinituzing.

Yechish. Chiziqningtenglamalaridan*t*bo‘yichahosilaolamiz:

$x' = a_1$,$y' = a_2$, $z' = a_3$.

Topilganbuqiymatlarnichiziqyoyininguzunliginihisoblashformulasigaqo‘yamiz:

$$s = \int_0^t \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\,dt = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}\int_0^t dt = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \cdot t.$$

Buyerdan

$$t = \frac{s}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}.$$

*t*ningbuqiymatinito‘g‘richiziqningberilgantenglamalarigaqo‘ysak:

$$x = \frac{a_1 s}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + b_1,$$

$$y = \frac{a_2 s}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + b_2,$$

$$z = \frac{a_3 s}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} + b_3.$$

Bu tenglamalarto‘g‘richiziqningtabiiyparametriktenglamalaribo‘ladi. Ularnibittavektortenglamasifatida ham yozishmumkin. Buning uchunularningbirinchisini $\vec{i}$ vektorga, ikkinchisini $\vec{j}$ vektorga, uchinchisini $\vec{k}$ vektorgako‘paytiribqo‘shsakyetarli:

$$\vec{r} = \vec{a} \cdot s + \vec{b} \qquad (9),$$

buyerda

$$\vec{a} = \left\{ \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}; \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right\},$$

$$\vec{b} = \{b_1; b_2; b_3\}$$

o‘zgarmasvektorlar.

(9) formula to‘g‘richiziqningtabiiyparametrlivektortenglamasibo‘ladi.

NAZORAT SAVOLLAR.

№ 1. Chiziqningtabiiyparametrlivektortenglamasi.

№ 2. Chiziqningtabiiyparametriktenglamalari.

№ 3. Quyidagijumlalarningqaysibirito‘g‘ri:

1) $\dot{\vec{r}}$ vektorbirlikvektor.

2) $\dot{\vec{r}}$ vektorurinmabo‘ylabyo‘naladi.

3) $\dot{\vec r}$ vektorurinmabo‘ylabyo‘naluvchibirlikvektor.

A. 1); *B*. 2); *D*. 3); *E*. 1) va 2); *F*. 2) va 3).

№ 4. $\dot{\vec r}$ vektorninggeometrikma’nosi.

№ 5. Urinmaningbirlikvektoriqandaybelgilanadi ?

№ 6. Quyidagijumlalarningqaysibirito‘g‘ri:

A. $\ddot{\vec r}$ vektorbirlikvektor.

B. $\ddot{\vec r}$ vektorurinmabo‘ylabyo‘naladi.

D. $\ddot{\vec r}$ vektor bosh normal bo‘ylabyo‘naladi.

E. $\ddot{\vec r}$ vektor binormal bo‘ylabyo‘naladi.

F. $\ddot{\vec r}$ vektor bosh normal bo‘ylabyo‘naluvchibirlikvektor.

№ 7. $\ddot{\vec r}$ vektorninggeometrikma’nosi.

№ 8. Quyidagivektorlarningqaysibiri bosh normalningbirlikvektoribo‘ladi ?

$$A.\ \vec r\,';\quad B.\ \vec\tau = \dot{\vec r};\quad D.\ \vec\beta = [\vec\tau\cdot\vec\nu];\quad E.\ \vec\nu = \frac{\ddot{\vec r}}{|\ddot{\vec r}|};\quad F.\ \vec r\,.$$

№ 9. Quyidagivektorlarningqaysibiribinormalningbirlikvektoribo‘ladi ?

$$A.\ \vec\tau = \dot{\vec r};\quad B.\ \vec\nu = [\vec\beta\cdot\vec\tau];\quad D.\ \vec\tau = [\vec\nu\cdot\vec\beta];\quad E.\ \vec\beta = [\vec\tau\cdot\vec\nu];\quad F.\ \dot{\vec\tau} = \ddot{\vec r}\,.$$

19.1.CHIZIQNING EGRILIGI

Reja:

1. Egrilikta’rifi
2. Asosiyteorema
3. Ixtiyoriyparametrlashtirilganchiziqegriligiuchun formula
4. Xususiyhollar
5. Misol

Mavzuningbayoni:

Regulyarchiziq

$\gamma : \vec r = \vec r(S)$ (1)

tenglama orqali berilgan bo’lsin. P, Q γ chiziqning cheksiz yaqin nuqtalari bo’lsin. SHu nuqtalardagi chiziqqa o’tkazilgan urinmalar tashkil etgan burchak ΔQ bo’lsin. $\breve{P}\breve{Q}$ yoy uzunligi $|\Delta S|$ bo’lsin.

Ta’rif: γ chiziqning P nuqtadagi egriligi deb, $\dfrac{\Delta Q}{|\Delta S|}$ nisbatining $Q \to P$ dagi limitiga aytiladi va $K_1 = \lim\limits_{Q^0 \to P} \dfrac{\Delta Q}{|\Delta S|}$ belgilanadi.

Teorema: (Ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi) Regulyar chiziq o'zining har bir nuqtasida biror K_1 egrilikka ega bo'lib, (1) formula orqali berilgan chiziqning egriligi uchun

$$K_1 = |\ddot{\vec{r}}(S)| \qquad (2)$$

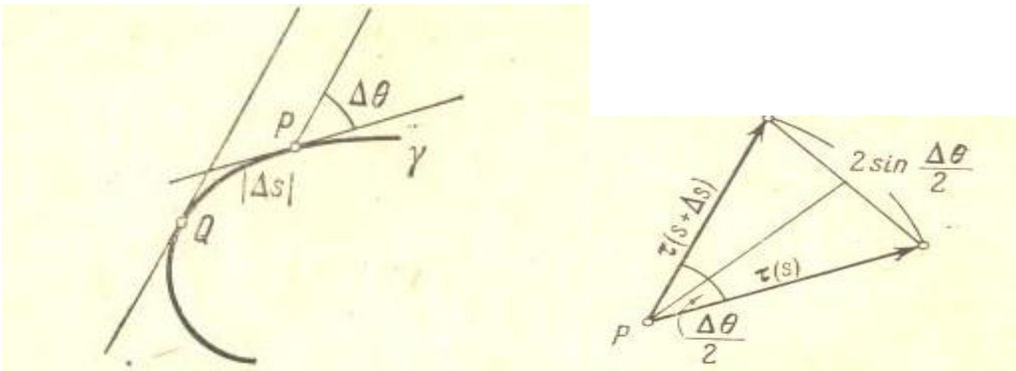
o'rinlidir.

Isboti: $P(S)$, $Q(S+\Delta S)$ γ chiziqning cheksiz yaqin nuqtalari bo'lib, shu nuqtalardagi urinmalar $\vec{\tau}(S) = \dot{\vec{r}}(S)$, $\vec{\tau}(S+\Delta S) = \dot{\vec{r}}(S+\Delta S)$ yo'naltiruvchi birlik vektorlarga ega bo'lsin.

$$\angle(\vec{\tau}(S), \vec{\tau}(S+\Delta S)) = \Delta Q \qquad (3)$$

$$|\vec{A}B| = \vec{\tau}(S+\Delta S) - \vec{\tau}(S)| \qquad (4)$$

$$|\vec{A}B| = 2\sin\frac{\Delta Q}{2} \qquad (5)$$



15-chizma

APB uchburchaktengyonli $PB = PA = 1$, $< APB = \Delta Q$ bo'lganiuchun

$$\frac{|\vec{\tau}(S+\Delta S) - \vec{\tau}(S)|}{\Delta S} = \frac{2\sin\frac{\Delta Q}{2}}{|\Delta S|} = \frac{\sin\frac{\Delta Q}{2}}{\frac{|\Delta S|}{2}} = \frac{\sin\frac{\Delta Q}{2}}{\frac{\Delta Q}{2}} \cdot \frac{\Delta Q}{|\Delta S|} \qquad (6)$$

$Q \to P$ da $\Delta Q \to 0$ va $|\Delta S| \to 0$, u holda (6) dan $|\ddot{\vec{r}}(S)| = K_1$ kelibchiqadi. Isbotyakunlandi.

$K_1 \neq 0$ nuqtalarda $\dfrac{\ddot{\vec{r}}(S)}{K_1} = \vec{\upsilon}(S)$ belgilaymiz $|\vec{\upsilon}(S)| = 1$

bo'libyopishmatekislikdayotadi. $\vec{\tau}^{\,2} = 1 \Rightarrow (\vec{\tau}\dot{\vec{\tau}}(S)) = 0 \Rightarrow \dot{\vec{\tau}}(S) \perp \vec{\tau} \Rightarrow \ddot{\vec{r}}(S) = k_1 \cdot (\vec{\upsilon})$ bo'lib $\vec{\tau}(S)$, $\vec{\upsilon}(S)$ yopishmatekislikdayotadivauzaroperpendikulyarvektorlardir.

$\vec{\upsilon}$ - bosh normal uchun yo'naltiruvchibirlikvektor. Endi ixtiyoriyparametrlashtirilganchiziquchunegrilikformulasinianiqlaylik. $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(t)$ (7)

dan ikkivauchtartibligachahosilaolamiz. Oraliqparametrkiritamiz. $\gamma: x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)$ (7)

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt} \Rightarrow |\vec{r}\,'(t)| = |\dot{\vec{r}}(S)|\cdot\left|\frac{ds}{dt}\right| = \left|\frac{ds}{dt}\right| \Rightarrow |S'(t)| = |\vec{r}\,'(t)| \quad (8)$$

$$\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\cdot\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 + \frac{d\vec{r}}{ds}\cdot\frac{d^2 s}{dt^2} \qquad (9)$$

$$[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)] = [\dot{\vec{r}}\frac{ds}{dt}\ddot{\vec{r}}(S)S_t'^2 + \dot{\vec{r}}(S)S_{t^2}''] = [\dot{\vec{r}}\,\ddot{\vec{r}}(S)]S'^3(t) = [\vec{\tau}k_1\vec{\upsilon}]S'^3(t) = K_1\vec{\beta}(S)S'^3(t)$$

$[\vec{r}\,'\vec{r}\,'']$ - binormal yo'nalishigaegabo'lib, uning yo'naltiruvchibirlikvektorini $\vec{\beta}(S)$ belgilaymiz.

$$|[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)]| = |K_1|\cdot|S'(t)|^3 \Rightarrow |K_1| = \frac{|[\vec{r}\,'(t)\vec{r}\,''(t)]|}{|S'(t)|^3} \Rightarrow K_1^2 = \frac{[\vec{r}\,'\vec{r}\,'']^2}{S'^6(t)}$$

yoki

$$K_1^2 = \frac{[\vec{r}\,'\vec{r}\,''(t)]^2}{|\vec{r}\,'(t)|^6} \qquad (10)$$

(7) ko'rinishda berilgan chiziq uchun

$$K_1^2 = \frac{\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}_p^2 + \begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}_p^2 + \begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}_p^2}{(x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t))_p^3} \qquad (11)$$

Misol:uchun OXY koordinattekisligigaqarashlichiziquchun

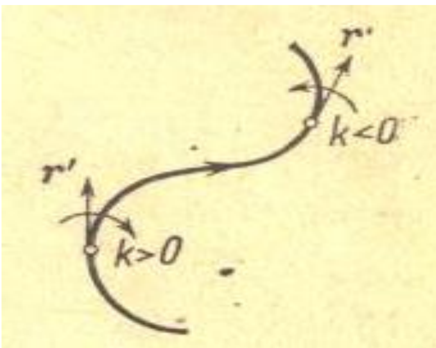
$$K_1^2 = \frac{y''^2(x)}{(1 + y'^2)^3} \quad (12)$$

k_1 – egrilik «+», «-» ishoradagi qiymatlarga ega bo'lishi mumkin.

P – nuqtada k_1 ga «+» ishora qo'yiladi.

Q nuqtada esa k_1 ga «-» ishora qo'yiladi.

$K_1 = |\vec{r}\,''(t)| = 0$ chiziq to'g'richiziqdaniborat. $\vec{r}(t) = \vec{a}t + \vec{b}$



16-chizma

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.

2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.

3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Chizqningegrilikta`rifiniaytibbering.
2. Chiziqningegrigiuchunasosiyteoremanikeltring.
3. Vektorko`rinishdaberilganchiziqningegrililarini hisoblash formulasiyozing.Misollarkeltiring.
4. Parametrikko`rinishdaberilganchiziqningegrililarini hisoblash formulasiyozing.Misollarkeltiring.
5. Ixtiyoriyparametrlashtirilganchiziqegriligiuchunformulasinivektorfunksiyadifferensialiorqaliqanday toppish mumkin?

19.2.CHIZIQNING BURALISHI. FRENE FORMULALARI

Reja:

1. Buralishta'rifivabelgilanishi
2. Asosiyteoremaningisboti
3.Ixtiyoriy parametrlashtirilganchiziqburalishiningformulasi
4. Misollar
5. Freneformulalari

Tayanchiboralar:chiziqningburalishi, freneformulasi, tabiiytenglamasi, parametrlashganchiziq.

Mavzuningbayoni:

Tabiiyparametrlashtirilganchiziq

$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(S)$ (1)

tenglamasi orqali berilgan bo'lsin. $P(S),\ Q(S+\Delta S) \in \gamma$ cheksiz yaqin nuqtalarida chiziqqa yopishma tekisliklar o'tkazaylik. Yopishma tekisliklar tashkil etgan burchakni $\Delta Q = <(\Pi_p \cdot \Pi_Q)$ belgilaylik. Yopishma tekisliklar tashkil etgan ΔQ burchak P va Qnuqtalardagi $\vec{\beta}(S),\ \vec{\beta}(S+\Delta S)$ binormal vektorlar tashkil etgan burchakka teng, ya'ni $\Delta Q = \angle(\vec{\beta}(S), \vec{\beta}(S+\Delta))$. γ chiziqning P va Q nuqtalar bilan chegaralangan kesmasi (yoyi)ning uzunligi $|\Delta S|$ bo'lsin.

Ta'rif. γ chiziqning P nuqtasidagi absolyut buralishi deb, $\Delta Q :|\Delta S|$ nisbatning Q nuqta chiziq bo'ylab P nuqtaga intilgandagi limitiga aytiladi va

$$|K_2| = \lim_{Q\to P} \frac{\Delta Q}{|\Delta S|} \qquad (2)$$

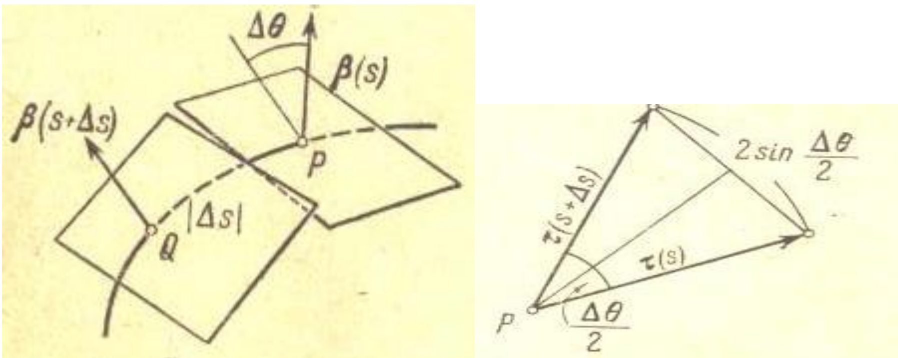
ko'rinishda belgilanadi.

Teorema. Regulyar (uch marta uzluksiz differentsiallanuvchi) chiziq o'zining K_1 (egrilik) noldan farqli bo'lgan har bir nuqtasida ma'lum bir absolyut buralish $|K_2|$ ga ega. Agar γ chiziq (1) ko'rinishdagi tenglama orqali berilgan bo'lsa, u holda

$$|K_2| = \frac{|(\dot{\vec r}\ \ddot{\vec r}\ \dddot{\vec r})|}{K_1^{2}} \qquad (3)$$

o’rinlidir.

Isboti: P *ва* Q nuqtalarda $K_1 \neq 0$ bo’lgani uchun $\dot{\vec r}(S)$ *ва* $\ddot{\vec r}(S)$ o’zaro kallinear yoki ulardan biri noль vektor bo’lishi mumkin emas. Aks holda shu nuqtalarda Π_p, Π_Q yopishma tekisliklarni mavjudlik va birdan birlik sharti bajarilmaydi.



17-chizma

P *ва* Q nuqtalardagi $\vec\beta(S), \vec\beta(S+\Delta S)$ binormal vektorlarni 0 nuqtaga ko’chiramiz. Ular birlikvektorlarbo’lganiuchun OAV uchburchaktengyonli $|\vec{AB}| = 2\sin\frac{\Delta Q}{2}$ yoki $\frac{|\vec\beta(S+\Delta S) - \vec\beta(S)|}{|\Delta S|} = \frac{2\sin\frac{\Delta Q}{2}}{|\Delta S|} \Rightarrow |\dot{\vec\beta}(S)| = = \lim\limits_{|\Delta S|\to 0} \frac{|\vec\beta(S+\Delta S) - \vec\beta(S)|}{|\Delta S|} =$

$$\lim_{\Delta Q\to 0} \frac{\sin\frac{\Delta Q}{2}}{\frac{\Delta Q}{2}} \cdot \lim_{Q\to p}\left(\frac{\Delta Q}{|\Delta S|}\right) = \lim_{Q\to p} \frac{\Delta Q}{|\Delta S|} = |K_2|$$

SHundayqilib, $|K_2| = |\dot{\vec\beta}(S)|$ (4)

$$\vec\beta^2(S) = 1 \Rightarrow 2(\dot{\vec\beta}(S)\vec\beta(S)) = 0 \Rightarrow \dot{\vec\beta}(S) \perp \vec\beta(S) \qquad (*)$$

$$\vec\beta(S) = [\vec\tau(S)\vec\upsilon(S)] \Rightarrow \vec\beta(S) \perp \vec\tau(S), \vec\beta(S) \perp \vec\upsilon(S)$$

$$\dot{\vec\beta}(S) = [\dot{\vec\tau}(S)\vec\upsilon(S)] + [\vec\tau(S)\dot{\vec\upsilon}(S)] = [K_1\vec\nu\vec\upsilon] + [\vec\tau\dot{\vec\upsilon}] = [\vec\tau(S)\dot{\vec\upsilon}(S)] \Rightarrow \dot{\vec\beta}(S) \perp \vec\tau(S) \, (**)$$

(*) va (**) munosabatlardan $\dot{\vec\beta}(S)$ *ва* $\vec\upsilon(S)$ vektorlarningkollinearligikelibchiqadi.

$$|K_2| = |(\dot{\vec\beta}(S)\vec\upsilon(S))| \qquad (5)$$

(5) ga

$$\vec\upsilon = \frac{\ddot{\vec r}(S)}{K_1} \quad ва \quad \vec\beta(S) = \frac{[\dot{\vec r}\,\ddot{\vec r}]}{K_1} \, (6)$$

larni qo’ysak,

$$|K_2| = \frac{\left|(\dot{\vec r}\ \ddot{\vec r}\ \dddot{\vec r})\right|}{K_1^{2}} \qquad (7)$$

kelib chiqadi. SHuni isbot qilish so’ralgan edi. $|K_2| = \pm K_2$

«+» ishorada chiziq bo’ylab P nuqtadan Q nuqtaga o’tishda yopishma tekislik urinma atrofida $\vec\beta$ dan $\vec\upsilon$ tomonga buriladi «-» ishorada esa $\vec v$ dan $\vec\beta$ yo’nalishga buriladi.

Endi $\vec r=\vec r(t)$ ko’rinishda berilgan ixtiyoriy parametrlashtirilgan chiziq uchun buralish formulasini yozaylik. S va t parametrlar orasida $S=S(t)$ moslik o’rinli

$$\dot{\vec r}(S)=\vec r_t\dot t(S),\ \ddot{\vec r}_{ss}=\vec r''_{t^2}\dot t_s^2(S)+\vec r'_t(t)\ddot t \qquad (8)$$

$$\dddot{\vec r}_{s5}(S)=\vec r'''_{t^3}\dot t^3+\lambda\left\{\vec r'_t,\vec r''_{t^2}\right\} \qquad (8^*)$$

$$t'(S)=\frac{1}{|\vec r'_t|} \qquad (9),$$

$$|K_2|=\frac{|(\vec r_t\vec r''_{t^2}\vec r'''_{t^3})|}{|r'_t|^6}\cdot\frac{|\vec r'_t|^6}{|\vec r_t\vec r''_{t^2}|^2}=\frac{|(\vec r_t\vec r''_{t^2}\vec r'''_{t^3})|}{[\vec r_t\vec r''_{t^2}]^2} \qquad (10)$$

Agar γ chiziq $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(1)$ koordinat ko’rinishida berilgan bo’lsa (10) quyidagicha yoziladi.

$$|K_2|=\frac{\mathrm{mod}\begin{vmatrix}x' & y' & z'\\ x'' & y'' & z''\\ x''' & y''' & z'''\end{vmatrix}_\rho}{\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}^2_\rho+\begin{vmatrix}y' & z'\\ y'' & z''\end{vmatrix}^2_\rho+\begin{vmatrix}z' & x'\\ z'' & x''\end{vmatrix}^2_\rho} \qquad (11)$$

Misol: Har bir nuqtasida $K_2=0$ bo’lgan chiziqni aniklang.

Ma’lumki

$|K_2|=|(\dot{\vec\beta}\vec V)|=0\Rightarrow K_2=0\Rightarrow\dot{\vec\beta}=0,(\dot{\vec\beta}\tau)=0,\ (\dot{\vec\beta}\vec\beta)=0\Rightarrow\dot{\vec\beta}=0,\vec\beta=const.$ ko’ramizki γ chiziq tekis chiziq bo’lib $(\vec r-\vec r_0)\vec\beta=0.$ γ chiziqning har bir $P(S)$ nuqtasidan yo’naltiruvchi vektorlari $\vec\tau(S),\vec v(S),\vec\beta(S)$ bo’lgan uchta nurlar chiqadi. Ular uch yoqli burchakning qirralarini ifodalaydi. Ushbu uchyoqni tabiiy uch yoq deb ataymiz.

$\vec\tau,\vec\beta,\vec v$ vektorlarninghosilalarinishuvektorlarningo’zlaribilanifodalaymiz

$$\ddot{\vec r}(S)=\dot{\vec\tau}(S)=K_1\vec v(S)$$

$$\dot{\vec\beta}(S)=K_2\vec v(S)$$

$$\dot{\vec v}(S)=[\vec\beta\dot{\vec\tau}]^{\cdot}=[\dot{\vec\beta}\dot\tau]+[\vec\beta\dot{\vec\tau}(S)]=[K_2\vec v\,\vec\tau]+[\vec\beta K_1\vec v]=-K_2\vec\beta-K_1\vec\tau$$

SHundayqilib

$$\dot{\vec\tau}(S)=K_1\vec v(S)\ \ \dot{\vec v}(S)=-K_1\vec\tau-K_2\vec\beta$$

$$\dot{\vec\beta}(S)=+K_2\vec v(S) \qquad (12)$$

(12)-ni Frene formulalari deyiladi.

Egrilik K_1 va buralish K_2 chiziq bo’ylab S – parametrning funktsiyasi bo’lib $K_1=\varphi(S)$, $K_2=\psi(S)$ (13) tenglamalarni chiziqning tabiiy tenglamalari deyiladi.

Agar chiziqning tabiiy tenglamalari berilgan bo'lib $K_1 > 0$ bo'lsa, u o'zining fazodagi o'rni farqi bilan bir qiymatli ravishda aniqladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Chizqningburalishta`rifinikeltiring.
2. Chiziqningburalishiuchunasosiyteoremasinikeltiring.
3. Ixtiyoriyparametrlashtirilganchiziqburalishformulasini vector funksiyadifferensialiorqaliqanday toppish mumkin?
4. Frene formulalarinikeltiring.
5. Qandaytenglamalarchiziqningtabiiytenglamalari.

19.3.TEKIS CHIZIQNING EVOLYUTA VA EVOL`VENTASI

Reja

1.Evolyuta.

2.Evolventa.

$\gamma : \vec{r} = \vec{r}(S)$ tenglama orqali berilgan regulyar (uch marta differentsiallanuvchi) chiziq bo'lsin. CHiziqning *P* nuqtasidagi normaliga $\overline{\upsilon}$ yunalishda $\rho = \frac{1}{K_1}$ uzunlikdagi kesmani joylaymiz. Kesmaning ikkinchi uchini uning egrilik markazi deb ataymiz.

Markazi shu nuqtada bo'lib, radiusi ρ bo'lgan aylana berilgan γ chiziq bilan P nuqtada 3-tartibli yopishuvga ega. Ma'lumki, chiziqning urinmasi chiziq bilan 2-tartibli yopishuvga ega.

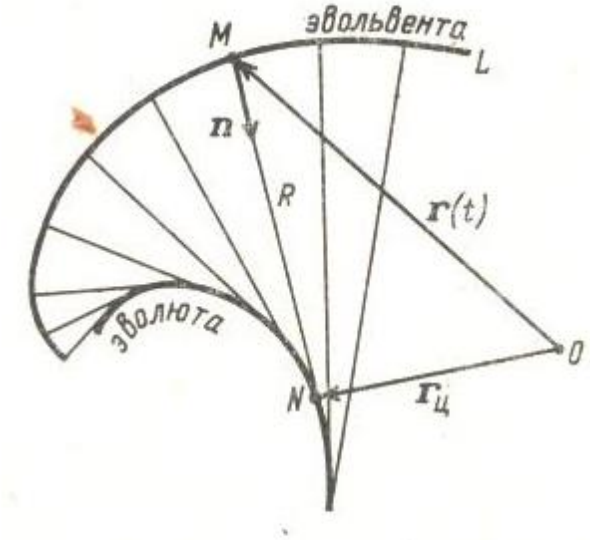
Ta'rif: γ chiziq egrilik markazlarining geometrik o'rniga uning evolyutasi, evolyutaga o'tkazilgan urinmalarning ortogonal traektoriyasiga uning evolьventasi deyiladi.

CHiziqning evolyutasi normalarining o'ramasi bo'lishini ko'rsataylik.

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{1}{K_1}\vec{v} \quad (1)$$

evolyutaningvektortenglamasi.

$$\dot{\vec{\rho}}' = \dot{\vec{r}} + \left(\frac{1}{K_1}\right)' v + \frac{1}{K_1}(-K_1\vec{\tau}) \;\; \dot{\vec{\rho}}^1 = \left(\frac{1}{K_1}\right)' \vec{v} \quad (2)$$



18-chizma

(2) dan $\dot{\vec{\rho}}^1 \parallel \vec{v}$ $K_1' \neq 0$bo'lganiuchunevolyutaning $a \leq S \leq b$ oraliqdagiyoyuzunligi

$$\int_a^b |\vec{\rho}'(S)|\,ds = \int_a^b \left|\left(\frac{1}{K}\right)'\right| ds = \left|\frac{1}{K_1(b)} - \frac{1}{K_1(a)}\right| \qquad (3)$$

kesmauchlaridagiegrilikradiuslarinin*g ayirmasigateng.

Agar berilganchiziq $\vec{r} = \vec{r}(S)$ tenglamagaegabo'lib, uning M nuqtasidagiurinmasiga $\vec{\tau}$ yunalishda |S| uzunlikdagikesmani qo'ysak $M_0M = d(M, N)$ tengliknibajaruvchi N nuqta kelibchiqadi. N nuqtalarchizganchiziqevolьventabo'ladi.

$\vec{\rho} = \vec{r} - S\vec{\tau}$ (4)

evolьventatenglamasidir.

$$\vec{\rho}^1 = \vec{r} - \vec{r} - SK_1\overline{\upsilon} = -SK_1\vec{v} \Rightarrow \overline{\rho}' II \overline{v}$$

Bundanevolyutaningurinmalarievolьventauchun normal bo'lishikelibchiqadi. Masalantekischiziqlardantraktrisavaxalqachiziqlardanbirievolyutabo'lsaikkinchisievolьventabo'ladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

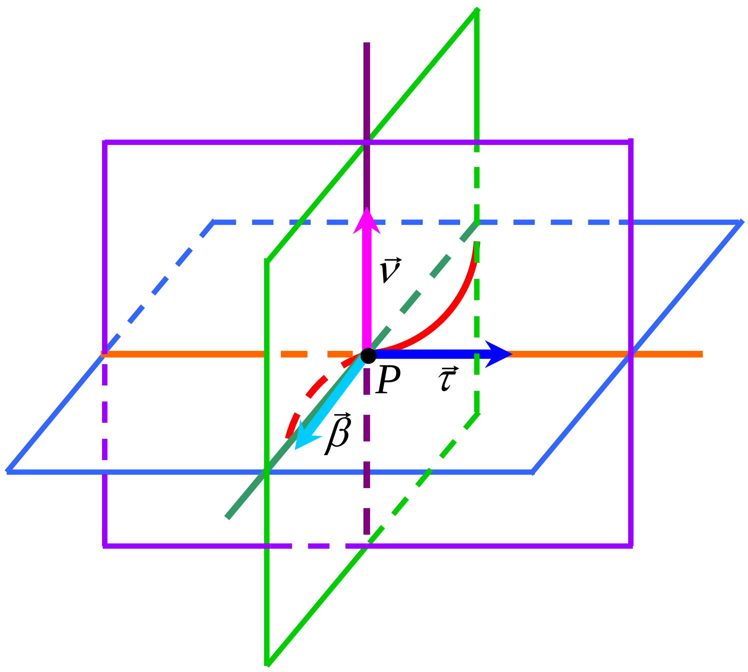
1. Chiziqning evalyutasi ta`rifiniaytibbering.
2. Chiziqningbirirnuqtasidagiegrilikmarkazichizmadaqandayko`rininshdabo`ladi?
3. Chiziqning evolventasita`rifinikeltiring.
4. Chiziqnormallario`ramasidanqandaychiziqhosilbo`ladi?
5. Chiziqyopishmaaylanamarkazlarining geometric o`rniqandaychiziqnihosilqiladi?

6. Grafikdachiziqningevalyuntasivaevolventasinitasvirlang.

19.4 FRENE FORMULALARI.

Tayanchtushunchavamunosabatlar. Freneningbirinchiformulasi, Freneningikkinchiformulasi, Freneninguchinchiformulasi, Freneformulalari.

Evklidfazosida, regulyarchiziqning har birnuqtasidagiurinmasi, bosh normalivabinormalio‘zaroperpendikulyardir. Urinmabilan binormal orqali o‘tgantekislik to‘g‘rilovchitekislik, bosh normal va binormal orqali o‘tgantekislik normal tekislik, urinmava bosh normaldano‘tgan tekislikyopishma tekislik deb atalar edi. Chiziqning har birnuqtasidagishu uchto‘g‘richiziq vauchtekislikdan tashkiltopgan uchyoqlikni**tabiiy uchyoqlik**deb ataladi (45–chizma).



45–chizma.

Tabiiyuchyoqlikningqirralaribo‘lganurinma, bosh normal vabinormallarningbirlikvektorlarinimosravishda $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ bilanbelgilaganedik.

Ta’rif. Evklidfazosidagiγchiziqningberilgan$P$nuqtasinikoordinataboshi, $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ vektorlarbizassifatidaolingankoordinatalarsistemasinichiziqning**kanonikreperi**yoki**Frenereperi**deb ataladi.

FazodagiDekartkoordinatalarsistemasining$\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ ortlario‘zaroperpendikulyar, uzunliklaribirgatengbo‘lib, ularo‘zgarmasvektorlaredi. Frenereperining$\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$bazisvektorlari ham chiziqning har birnuqtasidao‘zaroperpendikulyarvauzunliklaribirgatengbo‘lsa ham yo‘nalishio‘zgaradi. γchiziqdagi$P$ nuqta chiziqbo‘ylab harakat qilganda, Frenereperi ham harakatlanadi. Shu sababli, agar chiziqdaparametrsifatidayoyuzunligi$s$olinsa, u vaqtda$\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$bazisvektorlari ham shu$s$parametrningfunksiyalaribo‘ladi:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(s), \quad \vec{\nu} = \vec{\nu}(s), \quad \vec{\beta} = \vec{\beta}(s).$$

Bu birlikvektorlarningharakatinio‘rganishuchun, ulardan$s$bo‘yichaolingan $\dot{\vec{\tau}}, \ \dot{\vec{\nu}}, \ \dot{\vec{\beta}}$ hosilalarning, shu$\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$vektorlarorqaliifodalarinitopamiz.

Agar γregulyarchiziq$\vec{r} = \vec{r}(s)$tabiiyparametrlivektortenglamasibilanberilsa, u vaqtda

$$\vec{\tau} = \dot{\vec{r}}$$

deb belgilashkiritganedik. Bu yerdan

$$\dot{\vec{\tau}} = \ddot{\vec{r}}$$

bo‘ladi. Chiziqningegriliginio‘rganganmavzuda

$$\ddot{\vec{r}} = k \cdot \vec{\nu}$$

tengliko‘rinliedi.

Demak,

$$\dot{\vec{\tau}} = k \cdot \vec{\nu} \qquad (1).$$

Bu (1) formulani**Freneningbirinchiformulasi** deb ataladi.

Chiziqningburalishinio‘rganganmavzuda

$$æ = \dot{\vec{\beta}} \cdot \vec{\nu}$$

tengliko‘rinliedi. Bu tenglikningikkitomonini$\vec{\nu}$ vektorgaskalyarko‘paytiramiz, buyerda

$\vec{\nu}$ birlikvektorbo‘lganiuchun

$$æ\cdot\vec{\nu}=\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{\nu}\cdot\vec{\nu}=\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{\nu}^2=\dot{\vec{\beta}}\cdot 1=\dot{\vec{\beta}}.$$

Demak,

$$\dot{\vec{\beta}}=æ\cdot\vec{\nu} \qquad (2).$$

Bu (2) formulani**Freneninguchinchiformulasi**deyiladi.

Endi $\dot{\vec{\nu}}$ vektornitopamiz. $\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta}$ birlikvektorlarxuddidekartkoordinatalarsistemasining $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ koordinatavektorlarikabijoylashib,

$$\vec{\tau}=[\vec{\nu}\cdot\vec{\beta}],\ \vec{\nu}=[\vec{\beta}\cdot\vec{\tau}],\ \vec{\beta}=[\vec{\tau}\cdot\vec{\nu}] \qquad (3)$$

tengliklaro‘rinliedi. Bu tengliklarningikkinchisidan*s*bo‘yichahosilaolamiz:

$$\dot{\vec{\nu}}=[\dot{\vec{\beta}}\cdot\vec{\tau}]+[\vec{\beta}\cdot\dot{\vec{\tau}}].$$

(1) va (2) formulalarnie’tiborgaolsak:

$$\dot{\vec{\nu}}=[æ\cdot\vec{\nu}\cdot\vec{\tau}]+[\vec{\beta}\cdot k\cdot\vec{\nu}].$$

yoki

$$\dot{\vec{\nu}}=æ[\vec{\nu}\cdot\vec{\tau}]+k[\vec{\beta}\cdot\vec{\nu}].$$

tenglikkelibchiqadi. (3) tengliklargaasosan

$$[\vec{\nu}\cdot\vec{\tau}]=-\vec{\beta},\quad [\vec{\beta}\cdot\vec{\nu}]=-\vec{\tau}$$

bo‘lganiuchun

$$\dot{\vec{\nu}}=-k\cdot\vec{\tau}-æ\cdot\vec{\beta} \qquad (4)$$

ifodahosilbo‘ladi. Bu (4) formula **Freneningikkinchiformulasi** deb ataladi.

(1), (2), (4) tengliklardantuzilganushbu

$$\left.\begin{aligned}\dot{\vec{\tau}}&=k\cdot\vec{\nu},\\ \dot{\vec{\nu}}&=-k\cdot\vec{\tau}-æ\cdot\vec{\beta},\\ \dot{\vec{\beta}}&=æ\cdot\vec{\nu}\end{aligned}\right\}$$

formulalarga**Freneformulalari** deb ataladi.

Freneformulalariγchiziqdagi*P* nuqta chiziqbo‘ylabharakatlanganda, shunuqtadagiFrenereperiningharakatinixarakterlaydi.

Freneformulalaridankelibchiqadiki, Frenereperiningharakatichiziqningegriligivaburalishigabog‘liqekan.

NAZORAT SAVOLLAR.

1. Freneningbirinchiformulasi.
2. Freneningikkinchiformulasi.
3. Freneninguchinchiformulasi.
4. Freneformulalari.

19.5 CHIZIQNING TABIIY TENGLAMALARI. FAZOVIY CHIZIQNING TABIIY TENGLAMALARI.

Tayanchtushunchavamunosabatlar. Chiziqningegriligi, buralishi, tabiiyparametri, tabiiytenglamalari, Freneformulalari, Frenereperi, qiyaaylana, vintchiziq, qiyalikchizig‘i, Bertrana chizig‘i.

Evklidfazosidaγregulyarchiziq $\vec{r} = \vec{r}(s)$ tabiiyparametrlivektortenglamasibilanberilganbo‘lsin. U vaqtdachiziqning*k*egriligiva æ buralishi ham s parametrningfunksiyalaribo‘ladi:

$$k = k(s), \qquad æ = æ(s).$$

Teorema. Agar $k\,(s)$ va æ (s) ixtiyoriyregulyarfunksiyalarbo‘lib, $k\,(s) > 0$ bo‘lsa, u vaqtdafazodatutganholatigachaaniqlikbilan yagona chiziqmavjudki, buchiziqning*s* yoygamosnuqtasidagiegriligi$k\,(s)$, buralishi æ (s) bo‘ladi.

Isbot. Agar mavjudliginiteorematasdiqlovchichiziqhaqiqatan ham borbo‘lsa, u vaqtdabuchiziqurinmasining, bosh normalningvabinormalning

$$\vec{\tau}(s),\ \vec{\nu}(s),\ \vec{\beta}(s)$$

birlikvektorlari, Freneformulasigaasosan, quyidagidifferensialtenglamalarsistemasiniqanoatlantiradi:

$$\left.\begin{aligned} &\dot{\vec{m}} = k \cdot \vec{p}, \\ &\dot{\vec{p}} = -k \cdot \vec{m} - æ \cdot \vec{q}, \\ &\dot{\vec{q}} = æ \cdot \vec{p} \end{aligned}\right\} \qquad (1).$$

Shu sababli, tabiiyravishda, egriligi$k(s)$ vaburalishi $æ(s)$ bo‘lganchiziqnianiqlashuchun (1) sistemaningyechimigamurojaatetamiz.

Farazqilaylik

$$\vec{m}(s),\ \vec{p}(s),\ \vec{q}(s)$$

vektorfunksiyalarbusistemaningyechimibo‘lib, $s = s_o$qiymatda

$$\vec{m} = \vec{m}_o,\ \vec{p} = \vec{p}_o,\ \vec{q} = \vec{q}_o$$

boshlang‘ichshartlarniqanoatlantirsin. Bu yerda

$$\vec{m}_o,\ \vec{p}_o,\ \vec{q}_o$$

vektorlaro‘zaroperpendikulyarbo‘lganbirlikvektorlarbo‘lib, aralashko‘paytmasi 1 gateng:

$$(\vec{m}_o, \vec{p}_o, \vec{q}_o) = 1.$$

$\vec{m}(s),\ \vec{p}(s),\ \vec{q}(s)$ vektorlarsparametrning har qandayqiymatidabirlikvektorlarbo‘lib, o‘zaroperpendikulyarva

$$(\vec{m}, \vec{p}, \vec{q}) = 1$$

ekanliginiisbotlaymiz. Buninguchun

$$(\vec{m}^2)'_s,\ (\vec{p}^2)'_s,\ (\vec{q}^2)'_s,\ (\vec{m}\cdot\vec{p})'_s,\ (\vec{p}\cdot\vec{q})'_s,\ (\vec{q}\cdot\vec{m})'_s$$

hosilalarnihisoblaymiz. (1) tenglamalarsistemasinihisobgaolsak:

$$(\vec{m}^2)'_s = 2\vec{m}\cdot\dot{\vec{m}} = 2\vec{m}\cdot k\cdot\vec{p} = 2k(\vec{m}\cdot\vec{p}),$$

$$(\vec{p}^2)'_s = 2\vec{p}\cdot\dot{\vec{p}} = 2\vec{p}(-k\,\vec{m} - æ\,\vec{q}) = -2k(\vec{m}\cdot\vec{p}) - 2æ(\vec{p}\cdot\vec{q}),$$

$$(\vec{q}^2)'_s = 2\vec{q}\cdot\dot{\vec{q}} = 2\vec{q}\,æ\,\vec{p} = 2æ(\vec{p}\cdot\vec{q}),$$

$$\begin{aligned}(\vec{m}\cdot\vec{p})'_s &= \dot{\vec{m}}\cdot\vec{p} + \vec{m}\cdot\dot{\vec{p}} = k\ \vec{p}\cdot\vec{p} + \vec{m}(-k\,\vec{m} - æ\,\vec{q}) = \\ &= k(\vec{p}^2) - k(\vec{m}^2) - æ(\vec{m}\cdot\vec{q}),\end{aligned}$$

$$(\vec{p}\cdot\vec{q})'_s=\dot{\vec{p}}\cdot\vec{q}+\vec{p}\cdot\dot{\vec{q}}=(-k\,\vec{m}-æ\,\vec{q})\vec{q}+\vec{p}(æ\,\vec{p})=$$
$$=æ(\vec{p}^2)-æ(\vec{q}^2)-k(\vec{m}\cdot\vec{q}),$$
$$(\vec{q}\cdot\vec{m})'_s=\dot{\vec{q}}\cdot\vec{m}+\vec{q}\cdot\dot{\vec{m}}=(æ\,\vec{p})\vec{m}+\vec{q}(k\,\vec{p})=k(\vec{p}\cdot\vec{q})+æ(\vec{m}\cdot\vec{p}).$$

Demak,

$$(\vec{m}^2)'_s=2k(\vec{m}\cdot\vec{p}),$$
$$(\vec{p}^2)'_s=-2k(\vec{m}\cdot\vec{p})-2æ(\vec{p}\cdot\vec{q}),$$
$$(\vec{q}^2)'_s=2æ(\vec{p}\cdot\vec{q}),$$
$$(\vec{m}\cdot\vec{p})'_s=k(\vec{p}^2)-k(\vec{m}^2)-æ(\vec{m}\cdot\vec{q}),$$
$$(\vec{p}\cdot\vec{q})'_s=æ(\vec{p}^2)-æ(\vec{q}^2)-k(\vec{m}\cdot\vec{q}),$$
$$(\vec{q}\cdot\vec{m})'_s=k(\vec{p}\cdot\vec{q})+æ(\vec{m}\cdot\vec{p}).$$

Butenglamalarni

$$\vec{m}^2,\ \vec{p}^2,\ \vec{q}^2,\ \vec{m}\cdot\vec{p},\ \vec{p}\cdot\vec{q},\ \vec{q}\cdot\vec{m}$$

larganisbatandifferensialtenglamalarsistemasisifatidaqarasak, busistemani

$$\vec{m}^2=1,\ \vec{p}^2=1,\ \vec{q}^2=1,\ \vec{m}\cdot\vec{p}=0,\ \vec{p}\cdot\vec{q}=0,\ \vec{q}\cdot\vec{m}=0$$

qiymatlarqanoatlantiradi. Boshqatomondanesa, busistemani

$$\vec{m}^2=\vec{m}^2(s),\quad \vec{p}^2=\vec{p}^2(s),\quad \vec{q}^2=\vec{q}^2(s),$$
$$\vec{m}\cdot\vec{p}=\vec{m}(s)\cdot\vec{p}(s),\quad \vec{p}\cdot\vec{q}=\vec{p}(s)\cdot\vec{q}(s),\quad \vec{q}\cdot\vec{m}=\vec{q}(s)\cdot\vec{m}(s)$$

qiymatlar ham qanoatlantiradi. Bu ikkiyechim$s = s_o$qiymatdamostushadi. Demak, differensialtenglamalaryechminingmavjudlikvayagonalikteoremasigaasosan, ularaynanmostushadi. Shundayqilibbarcha$s$parametruchun

$$\begin{aligned}&\vec{m}^2(s)=1,\quad \vec{p}^2(s)=1,\quad \vec{q}^2(s)=1,\\&\vec{m}(s)\cdot\vec{p}(s)=0,\quad \vec{p}(s)\cdot\vec{q}(s)=0,\quad \vec{q}(s)\cdot\vec{m}(s)=0\end{aligned}\qquad(2)$$

tengliklaro‘rinli.

Endi

$$\left(\vec{m}(s),\ \vec{p}(s),\vec{q}(s)\right)=1$$

bo‘lishiniisbotlaymiz. (2) tengliklardanko‘rinadiki $\vec{m},\ \vec{p},\ \vec{q}$

vektorlarbirlikvektorlarbo‘lib, o‘zaroperpendikulyardir. Shusababli

$$(\vec{m},\ \vec{p},\ \vec{q}) = \pm 1$$

tengliko‘rinlibo‘ladi.

$(\vec{m},\ \vec{p},\ \vec{q})$ aralashko‘paytma s tabiiyparametrgauzluksizbog‘likbo‘lib, shartgako‘ra $s = s_o$ qiymatda $+1$ gatengbo‘ladi. Shuninguchunbarchasparametruchunbuaralashko‘paytma $+1$ gatengdir.

Ushbu

$$\vec{r} = \int_{s_o}^{s} \vec{m}(s)ds \qquad (3)$$

vektortenglamabilananiqlanadigan γ chiziqniqaraylik.

Birinchidan, γ chiziqniparametrlashtabiiyparametrlashbo‘ladi. Haqiqatan, γ chiziqning $[s_o,\ s]$ kesmadagiyoyuzunligi

$$\int_{s_o}^{s} |\dot{\vec{r}}(s)|ds = \int_{s_o}^{s} |\vec{m}(s)|ds = \int_{s_o}^{s} 1\cdot ds = \int_{s_o}^{s} ds = s - s_o$$

gatengbo‘ladi.

Ikkinchidan, (1) sistemagaasosan, γ chiziqningegriligi

$$|\ddot{\vec{r}}(s)| = |\dot{\vec{m}}(s)| = |k(s)\vec{p}(s)| = k(s)|\vec{p}(s)| = k(s)\cdot 1 = k(s).$$

Uchinchidan, (1) va (3) ifodalargaasosan γ chiziqningburalishi

$$-\frac{(\dot{\vec{r}},\ddot{\vec{r}},\dddot{\vec{r}})}{k^2} = -\frac{(\vec{m},k\vec{p},\dot{k}\vec{p}+k\dot{\vec{p}})}{k^2} = -\frac{(\vec{m},k\vec{p},k(-k\vec{m}-æ\vec{q}))}{k^2} =$$

$$= -\frac{(\vec{m},k\vec{p},\dot{k}\vec{p}-k^2\vec{m}-kæ\vec{q})}{k^2} = -\frac{(\vec{m},k\vec{p},-kæ\vec{q})}{k^2} = \frac{k^2æ(\vec{m},\ \vec{p},\ \vec{q})}{k^2} =$$

$$= æ(\vec{m},\ \vec{p},\ \vec{q}) = æ\cdot 1 = æ.$$

Demak, γ chiziq s yoygamoskeluvchinuqtasida $k(s)$ egrilikkava $æ(s)$ buralishgaegabo‘larekan. Shundayqilib, chiziqningmavjudliginiisbotqildik.

Endi chiziqningyagonaliginiisbotlaymiz. Faraz qilaylik γ_1 va γ_2 ikkichiziq s yoygamosnuqtalardabirxil $k(s)$ egrilikkava $æ(s)$ buralishgaegabo‘lsin. γ_1 va γ_2 chiziqlarning s_o yoygamoskeluvchinuqtalariniustma-ustqo‘yamiz.

ChiziqlarningFrenereperlariningboshini ham, shuustma-usttushgannuqtalargaqo‘yamiz. $\vec{\tau}_1, \vec{\nu}_1, \vec{\beta}_1$ va $\vec{\tau}_2, \vec{\nu}_2, \vec{\beta}_2$ vektorlarmosravishda$\gamma_1$va$\gamma_2$chiziqlarurinmalari, bosh normallarivabinormallariningbirlikvektorlaribo‘lsin.

$\vec{\tau}_1(s),\ \vec{\nu}_1(s),\ \vec{\beta}_1(s)$ va $\vec{\tau}_2(s),\ \vec{\nu}_2(s),\ \vec{\beta}_2(s)$ vektorfunksiyalaruchliklari $\vec{m}, \vec{p}, \vec{q}$ vektorlardantuzilgantenglamalarsistemasiningyechimlaribo‘ladi. Bu yechimlarningboshlang‘ichqiymatlarimostushadi. Bundanesayechimlarningaynanmostushushikelibchiqadi. Xususiyholda

$$\vec{\tau}_1(s) \equiv \vec{\tau}_2(s)$$

yoki

$$\dot{\vec{r}}_1(s) \equiv \dot{\vec{r}}_2(s).$$

Bu ayniyatnis_o, $s$oraliqdaintegrallasak

$$\vec{r}_1(s) - \vec{r}_1(s_o) \equiv \vec{r}_2(s) - \vec{r}_2(s_o),$$

buyerda$s = s_o$qiymatda

$$\vec{r}_1(s_o) \equiv \vec{r}_2(s_o)$$

bo‘lganiuchun

$$\vec{r}_1(s) \equiv \vec{r}_2(s)$$

ayniyathosil bo‘ladi.

Shundayqilib $\gamma_2$chiziq $\gamma_1$chiziqdan, faqatginafazodajoylashishibilanfarqqilarekan. Teoremato‘liqisbotbo‘ldi.

$k = k(s)$, $æ = æ(s)$ (4)

tenglamalarini**chiziqningtabiiytenglamalari**deb ataladi.

Demak, yuqoridagiteoremagaasosan, birxiltabiiytenglamalargaegabo‘lgan har qandayikkitachiziqningshaklibirxilbo‘lib, ularfaqatfazodajoylashishibilanfarqqiladi. Agar chiziqningfazodajoylashishie’tiborgaolinmasa, u vaqtda (4) tenglamalarbittachiziqnianiqlaydi.

Chiziqlarningegriligivaburalishiningqiymatlarigaqarab, chiziqlarniklassifikatsiyalashmumkin. Masalan, chiziqningegriligibilantanishganimizdaisbotlaganedikki, to‘g‘richiziqningegriliginolgatengedi. Shu sababli

$$k = 0$$

tenglamato‘g‘richiziqnixarakterlaydi.

Xuddishuningdektekischiziqningburalishinolgatengbo‘lishini ham isbotlaganedik. Demak,

$$æ = 0$$

tenglamatekischiziqnixarakterlaydi.

Umumanchiziqningegriligivaburalishigaqarab, chiziqlarquyidagisinflargaajratiladi:

1) k =0 –to‘g‘richiziq;

2) æ =0 –tekischiziq;

3) k =const –qiyaaylana;

4) k = const, æ =const –vintchiziq;

5) æ: k =const –qiyalikchizig‘i;

6) Aæ + Bk + C =0, buyerda$A$, B, C - o‘zgarmassonlar – Bertrana chizig‘i.

Bu chiziqlarning har birinialohidao‘rganibchiqamiz. To‘g‘richiziqanalitikgeometriyadato‘lao‘rganilganiuchun, biz tekischiziqlarnio‘rganishdanboshlaymiz.

Misol. $x = a\text{ch}t$, $y= a\text{sh}t$, $z = at$ chiziqningtabiiytenglamalarinituzing.

Yechish. Chiziqningberilgantenglamalariniuchmartadifferensiallaymiz:

$x' = a\text{sh}t$, $y' = a\text{ch}t$, $z' = a$,

$x'' = a\text{ch}t$, $y'' = a\text{sh}t$, $z'' = 0$,

$x''' = a\text{sh}t$, $y''' = a\text{ch}t$, $z''' = 0$.

$s$tabiiyparametrnianiqlaymiz:

$$s = \int_0^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,dt = \int_0^t \sqrt{a^2\text{sh}^2 t + a^2\text{ch}^2 t + a^2}\,dt =$$

$$= a\int_0^t \sqrt{\text{sh}^2 t + \text{ch}^2 t + 1}\,dt = a\int_0^t \sqrt{\text{sh}^2 t + \text{ch}^2 t + \text{ch}^2 t - \text{sh}^2 t}\,dt =$$

$$=a\int_0^t\sqrt{2\text{ch}^2t}\,dt=a\sqrt{2}\int_0^t\text{ch}t\,dt=a\sqrt{2}\,\text{sh}t.$$

Demak,

$$s=a\sqrt{2}\,\text{sh}t.$$

Bu yerdan

$$\text{sh}t=\frac{s}{a\sqrt{2}} \qquad (5).$$

Chiziqningegriliginitopamiz. Buning uchun *A*, *B*, *C* larnianiqlaymiz.

$$A=\begin{vmatrix} y' & z' \\ y'' & z'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\text{ch}t & a \\ a\text{sh}t & 0 \end{vmatrix}=-a^2\text{sh}t,$$

$$B=\begin{vmatrix} z' & x' \\ z'' & x'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a & a\text{sh}t \\ 0 & a\text{ch}t \end{vmatrix}=a^2\text{ch}t,$$

$$C=\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a\text{sh}t & a\text{ch}t \\ a\text{ch}t & a\text{sh}t \end{vmatrix}=a^2\text{sh}t-a^2\text{ch}^2t=-a^2(\text{ch}^2t-\text{sh}^2t)=-a^2.$$

Demak, chiziqningegriligi

$$k=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}{(x'^2+y'^2+z'^2)^{3/2}}=\frac{\sqrt{a^4\text{sh}^2t+a^4\text{ch}^2t+a^4}}{(a^2\text{sh}^2t+a^2\text{ch}^2t+a^2)^{3/2}}=$$

$$=\frac{a^2\sqrt{\text{sh}^2t+\text{ch}^2t+1}}{a^3(\text{sh}^2t+\text{ch}^2t+1)^{3/2}}=\frac{\sqrt{2\text{ch}^2t}}{a(2\text{ch}^2t)^{3/2}}=\frac{1}{2a\text{ch}^2t}.$$

Shundayqilib

$$k=\frac{1}{2a\text{ch}^2t} \qquad (6).$$

Chiziqningburalishinitopamiz.

$$æ=-\frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{A^2+B^2+C^2}=-\frac{\begin{vmatrix} a\text{sh}t & a\text{ch}t & a \\ a\text{ch}t & a\text{sh}t & 0 \\ a\text{sh}t & a\text{ch}t & 0 \end{vmatrix}}{a^4\text{sh}^2t+a^4\text{ch}^2t+a^4}=$$

$$=-\frac{a^3\text{ch}^2t-a^3\text{sh}^2t}{a^4(\text{sh}^2t+\text{ch}^2t+1)}=-\frac{a^3}{a^4 2\text{ch}^2t}=-\frac{1}{2a\text{ch}^2t}.$$

Demak, chiziqningburalishi

$$æ=-\frac{1}{2a\text{ch}^2t} \qquad (7).$$

Chiziqningtabiiytenglamalarinituzishuchun (5) ifodadagish$t$ningqiymatini (6) va (7) ifodalargaqo‘yamiz:

$$k=\frac{1}{2a\text{ch}^2t}=\frac{1}{2a(1+\text{sh}^2t)}=\frac{1}{2a\left(1+\dfrac{s^2}{2a^2}\right)}=\frac{a}{2a^2+s^2},$$

$$æ=-\frac{1}{2a\text{ch}^2t}=-\frac{a}{2a^2+s^2}.$$

Demak,

$$k=\frac{a}{2a^2+s^2},$$

$$æ=-\frac{a}{2a^2+s^2}$$

tenglamalarberilganchiziqningtabiiytenglamalaribo‘ladi

Misol.k = 0, æ = 0 chiziqningodatdagitenglamasitopilsin.

Yechish. æ = 0 bo‘lganiuchunchiziqtekischiziqbo‘ladi. Faraz qilaylikchiziqOxytekislikdayotsin. U vaqtda$x$nierkliparametrdeymizva$x$ bo‘yichahosilaolamz: $x' = 1$, $x'' = 0$.

k = 0 bo‘lganiuchun:

$$A^2 + B^2 + C^2 = 0,$$

buyerdan$A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ bo‘lishligikelibchiqadi.

Demak,

$$C=\begin{vmatrix} x' & y' \\ x'' & y'' \end{vmatrix}=0.$$

Bu yerda$x' = 1$, $x'' = 0$ bo‘lganiuchun:

$$\begin{vmatrix} 1 & y' \\ 0 & y'' \end{vmatrix} = 0,$$

yoki

$$y'' = 0$$

tenglamahosilbo‘ladi. Bu tenglamaniikkimartaintegrallasak:

$y = cx + c_1$

tenglamahosilbo‘ladi. Bu tenglamato‘g‘richiziqningburchakkoeffitsiyentlitenglamasidir. Demak, berilganchiziqto‘g‘richiziqdaniboratekan.

NAZORAT SAVOLLAR.

1. Fazoviychiziqningtabiiytenglamalarihaqidagiteorema.
2. Chiziqningtabiiytenglamalari.
3. Egriliginolgatengbo‘lganchiziq.
4. Buralishinolgatengbo‘lganchiziq.
5. Chiziqningegriligivaburalishibo‘yichaklassifikatsiyasi.

20-21.Sirttushunchasivauningberilishusullari. Elementar, soddavaumumiysirttushunchalari.

Reja:

1. Ochiq soha
2. Topologikakslantirishlar
3. Elementarsirt,soddasirt,umumiysirtta’rifi
4. Sirt tenglamalari. Regulyarsirt
5. Sirtgaqarashlichiziqlar
6. Misollar

Mavzuningbayoni:

G -tekislidaginuqtalarto’plamibo’lsin. Agar G to’plamining x nuqtasigayetarlichayaqinbarchanuqtalar G to’plamgategishlibo’lsa, u holda x nuqtani G to’plamningichkinuqtasideyiladi. Ta’rifdan $\varepsilon > 0$ son mavjudbo’lib,tekislikning x nuqtasidan ε dan kichikmasofadaturuvchibarchanuqtalari G to’plamgategishlibo’ladi, deganxulosagakelamiz. Barcha nuqtalariichkinuqtalardantuzilgan G

to’plamochiqto’plambo’lib, uningharqaysiikkinuqtasinishuto’plamgategishlisiniqchiziqorqalitutashtirishmumkinbo’lsa, u holda G ni soha deyiladi.

Doiraningchegaraviyaylanasikirmaganqismiochiq sohagamisolbo’laoladi. G - tekislikdasoha bo’lsin. Tekislikning x nuqtasiuchunshunuqtagacheksizyaqinnuqtalarorasida G gategishlinuqtalarvaungategishlibo’lmagannuqtalarmavjudbo’lsa, u holda x ni G to’plamningchegaranuqtasideyiladi. G to’plamningbarchachegaranuqtalarto’plamigauningchegarasideyiladi. Agar G sohagachegaraqo’shilsa, yopiqsoha hosilbo’ladi

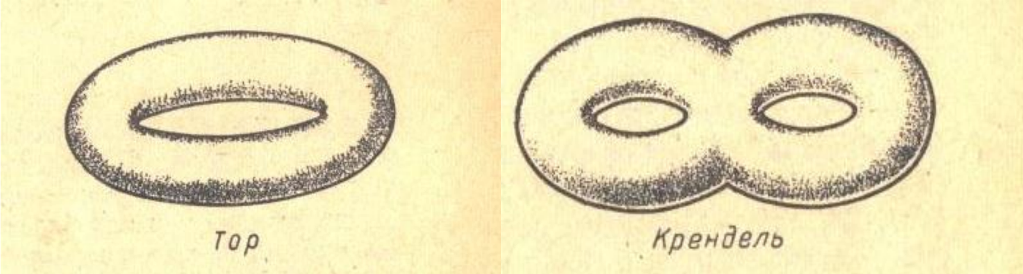
X , Y -ixtiyoriyto’plamlarbo’lib,biror f qonun (qoida) X ning har bir x elementiga Y ninganiq y elementinimoskeltirsa, u holda X ni Y gaakslanitirisho’rnatilgandeyiladi. Akslantirishni $f : X \to Y$ ko’rinishdabelgilaymiz. $x \in X$ uchun $y = f(x)$ element x ningaksi , $y \in Y$ uchun $x = f^{-1}(y)$ element uningaslideyiladi.
$f : G \subset X \to \Phi \subset Y$ $f(x) \subset Y$ bo’lsa f niichigaakslantirish, $f(X) = Y$ bo’lsa, ustigaakslantilishdeyiladi. Agar $f(X) = Y$ bo’lib f akslantirishda X to’plamning har qanday $x_1 \neq x_2$ elementlari Y to’plamning $y_1 \neq y_2$ elimentlarigao’tsa, u holda f akslantirishnio’zarobirqiymatlideyiladi. Agar f akslantirish X to’plamningcheksizyaqinnuqtalarini Y to’plamningcheksizyaqinnuqtalarigaakslantirsa ,ya’ni har qanday $\varepsilon > 0$ son uchuncheksizkichik $\delta > 0$ son topilsaki $\forall x_1, x_2 \in X |x_1 - x_2| < \delta$ dan $|y_1 - y_2| < \varepsilon$ kelibchiqsa ,u holda f akslantirishniuzluksizakslantirishdeyiladi. X to’plamning Y to’plamga o’zaro bir qiymatli va o’zaro uzluksiz akslantirishni topologik yoki gomeomorf akslantirish deyiladi.

1-ta’rif: Tekislikdagi ochiq sohani E_3 fazoga topologik akslantirish natijasida hosil qilingan nuqtalar to’plamiga elementar sirt deyiladi.

Elementarsirtgatekislik,elliptikvagiperbolikparaboloidlarvaparabologiktsilindirmisolbo’laoladi.

2-ta’rif : Agar Ω figuraning har birnuqtasifazoviyatrofgaegabo’lib , uningshuatrofdagiqismielementarsirtdaniboratbo’lsa , u holda Ω figuranisoddasirtdeyiladi.

Soddasirtchekliyokisanoqlisondagielementarsirtlarningbirlashmasidantashkiltopadi. Soddasirtgasfera, ellipsoid, tor, krendel, tsilindrmisolbo’laoladi .

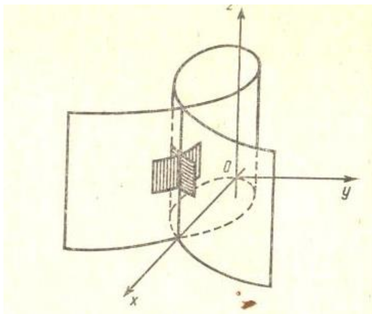


19-chizma

3-ta'rif: Soddasirtnilokal – topologikalmashtirishnatijasidahosilqilingansirtgaumumiysirtdeyiladi .

Umumiysirtdao'z-o'zibilankesishuvchichiziqlar, ustma-usttushuvchiyopishgan (qo'shaloq)nuqtalar, atrofielementarsirtbo'lmagannuqtalarmavjudbo'lishimumkin.

Misol: $x=\frac{u^2-1}{u^2+1}$, $y=u\frac{u^2-1}{u^2+1}$, $z=v$ funktsiyatekisligidagi $P=\{(u,v)|-2<u<2,0<u<2\}$ to'rtburchakni E^3 fazogaakslantiradi. $x=\frac{u^2-1}{u^2+1}$, $y=u\frac{u^2-1}{u^2+1}$, $-2<u<2$ tekislikdastrofoidaniifodalaydi. Har birnuqtasidan OZ o'qqa parallel o'tkazilsa ,umumiy tsilindirik sirt kelib chiqadi. $x=0, y=0, z=v\ |v|<2$ kesma sirtning o'z-o'zini kesish chizig'i bo'ladi.Ko'ramizki sirt tushunchasi murakkab tushuncha bo'lib, har qanday sirt uchun yaroqli umumiy ta'rif berishda hali hanuzgacha yakdillik yo'q. Fazoda dekart koordinatalar sistemasi o'rnatilgan bo'lsa sirtga bunday ta'rif berish mumkin:



4-ta'rif : Sirt deb koordinatalari

$F(x,y,z)=0$ (1)

tenglamaniqanoatlantiruvchinuqtalarto'plamigaaytiladi.

Ushbuta'rifniqabuletishuchun (1) oshkormastenglamagaquyidagitalablarqo'yiladi.

a) $F(x,y,z)$ biror sohada uzluksiz ;

b) F'_x, F'_y, F'_z birinchitartiblixususiyhosilalargaega .

v) $F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z\neq 0$.

Ω – elementarsirtbo'lsin.Busirt G tekis sohani E^3 fazogatopologikakslantirishorqalihosilqilinadi. $M(u,v)\in G$ - ni f topologikakslantirish $M'(x,y,z)\in E_3$ gaquyidagiqoidagako'rao'tkazsin.

$x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$, $z=z(u,v)$ (1*)

Bu tenglamanielementarsirtningparametriktenglamasideyiladi. Fazoda $\{\ 0,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\ \}$dekartrepertanlanganbo'lsa,

$$\vec{r}\ (u,v) = x(u,v)\vec{i} + y(u,v)\vec{j} + z(u,v)\vec{k} \qquad (2)$$

yoki

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u,v) \qquad (3)$$

nihosilqilamiz. (3) ni Ω – elementarsirtningvektorko’rinishidagiparametriktenglamsideyiladi .Sirtgaqarashli $M^{'}(x,y,z)$nuqtaningvaziyatinianiqlovchiu,v –parametrlargasirtningegrichiziqliyoki Gauss koordinatalarideyiladi.

5-ta’rif: Agar Ω sirtning har birnuqtasiuchunregulyarparametrlashtirishmumkinbo’lganatrofmavjudbo’lsavasirtnish uatrofda (1*) tenglamalarorqaliifodalashmumkinbo’libbufunktsiyalarregulyar (k k martauzluksizdifferentsiallanuvchi,$k \geq 1$)

$$rang\begin{Vmatrix} x_u^{'} y_u^{'} z_u^{'} \\ x_v^{'} y_v^{'} z_v^{'} \end{Vmatrix} = 2$$

bo’lsa , u holdaΩ niregulyarsirtdeyiladi. $k = 1$bo’lgandasilliqsirtdeyiladi. Silliqsirtni

$z = f(x,y)$ (4)

ko’rinishdaifodalashmumkin (isbotlansin). Ω – sirtgaqarashliixtiyoriyegrichiziqningparametriktenglamasisifatida

$$\begin{cases} u = u(t) \\ v = v(t) \end{cases} \qquad (5)$$

niolishimizmumkin.Uholda$\gamma \subset \Omega$chiziq

$$\vec{r} = \vec{r}\,(u(t), v(t)) = \vec{r}\,(t) \quad (6)$$

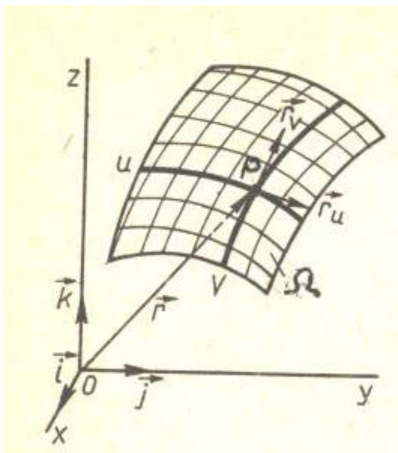
vektortenglamagaegabo’ladi .u yoki$v$ parametrlarnifiksirlab ,sirtningkoordinatchiziqlarigaegabo’lamiz.

“u ”chiziq

$$\begin{cases} u = t, \\ v = const; \end{cases} \quad \vec{r} = \vec{r}\,(u, const)\ ;$$

“v ”chiziq

$$\begin{cases} u = \cos nt, \\ v = t; \end{cases} \quad \vec{r} = \vec{r}\,(const, v) \quad (7)$$



Misol: 1. $y = x^2$paraboliktsilindrning parametriktenglamasiyozilsin .

Javob : $x = u$, $y = u^2$, $z = v$ .21-chizma

2. $z = pxy$sirtningparametrik 21-ch tenglamasiyozilsin .

Javob: $x = u$, $y = v$, $z = puv$.

<u>Ta’rif.</u>**F** oddiy sirtni **regulyar sirt** deb ataymiz, agarda u o’zining har

bir nuqtasi atrofida $x = x(u, v)$, $y=y(u, v)$, $z=z(u, v)$ parametrik tenglamalari bilan berilib, $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ funk-tsiyalar k marta differensiallanuvchi ($k\geq 1$) va ushbu

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

matritsaningrangiikkigatengbo'lsa.

Agar k q 1 bo'lsa, sirtga**silliqsirt** deb ataymiz.

Teorema. Agar **F**silliqsirt$x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ parametriktenglamalaribilanberilib, sirtning$M_o(x_o;y_o;z_o)$ nuqtasida

$$\begin{vmatrix} x_u^o & y_u^o \\ x_v^o & y_v^o \end{vmatrix} \neq 0$$

shartbajarilsa, u vaqtdaM_o nuqta atrofida**F**sirttenglamasini

$z = f(x, y)$ (1)

shakldayozishmumkin.

Isbot.Oshkormasfunksiyalarhaqidagiteoremagaasosan:

$$\begin{vmatrix} x_u^o & y_u^o \\ x_v^o & y_v^o \end{vmatrix} \neq 0$$

bo'lganda, $x= x(u, v)$, $y= y(u, v)$ tenglamalarsistemasini$M_o(u_o; v_o)$ nuqta atrofida$u$, $v$larganisbatanechishmumkin.

Natijada

$$u = \varphi(x, y),\ v = \psi(x, y) \qquad (2)$$

hosilbo'ladi.

$u$va$v$larningbuqiymatlarinisirtningparametrikteng-lamalaridagi$z = z(u, v)$ tenglamagaqo'ysak:

$z = z(\varphi(x, y), \psi(x, y)) = f(x, y)$

hosilbo'ladi. Teoremaisbotbo'ldi.

(1) tenglamagasirtning**oshkortenglamasi** deb ataladi.

(1) tenglamaniumumiyshakldaquyidagichayozishmumkin:

$\boldsymbol{F}(x, y, z) = 0$ (3).

(3) tenglamagasirtning**oshkormastenglamasi** deb ataladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Sirt tushunchasivauningberilishusullariniaytibbering.
2. Elementarsirt,soddasirt,umumiysirtta'riflarinikeltiring.
3. Regulyarsirt deb qandaysirtgaaytiladi?
4. Sirtgategishlichiziqlarvaularningberilishusullariniko`rsating. Misollarkeltiring.
5. Qandaychiziqlarkoordinatchiziqlar deb nomlanadi?
6. Qandaysirtlartog`richiziqlisirtlar deb ataladi?
7. Aylanmasirtlar deb qandaysitrlargaaytiladi? Misollarkeltiring.

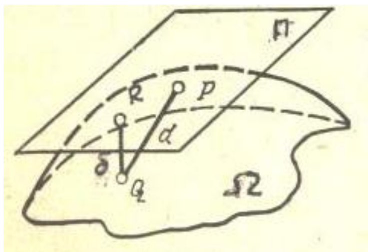
26.Sirtning urinmatekisligivanormali.

Reja:
1. Urinmatekislikta'rifi
2. Asosiyteorema
3. Urinmatekislikningturlichatenglamalari
4. Sirt normaliningta'rifivatenglamasi
5. Misollar

Mavzuningba'yoni:

Regulyar sirt

$\Omega \; : \; \vec{r} = \vec{r}(u,v)$ (1)



parametrik tenglamasi orqali berilgan bo'lsin. Sirtda $P(u,v) \in \Omega$ nuqtani olaylik. Sirtda P nuqtaga cheksiz yaqin $Q(u+\delta u, v+\delta v)$ nuqtani tanlaymiz. P nuqtanidan o'tuvchi Π tekislikni qaraylik. P va Q nuqtalar

tanlaymiz. P nuqtanidan o'tuvchi Π tekislikni qaraylik. P va Q nuqtalar orasidagi masofani d orqali, Q nuqtadan Π tekislikkacha masofani δ orqali belgilaymiz.

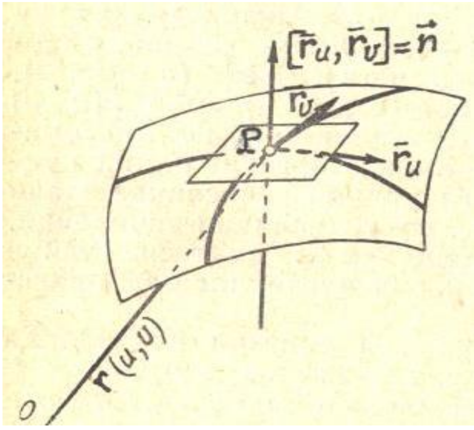
1-ta'rif: Agar Q nuqta sirtda yotib , P nuqtaga intilganda $\frac{\delta}{d} \to 0$ (nisbat 0 ga intilsa), u holda Π tekislikni Ω sirtning P nuqtasidagi urinma tekisligi deb ataladi.

Urinma tekislikka boshqa ta'rif berish ham mumkin:

2-ta'rif: Agar $Q \to P$ da PQ to'g'ri chiziq va Π tekislik tashkil etgan burchak nolga intilsa, u holda Π tekislikni sirtning P nuqtadagi urinma tekisligi deyiladi.

Asosiy teorema : (1) tenglama orqali berilgan silliq sirt o'zining har bir nuqtasida birdan-bir urinma tekislikka ega bo'lib, uning $P(u,v)$ nuqtasidagi urinma tekisligiga $\vec{r}_u'(u,v)$, $\vec{r}_v'(u,v)$ vektorlar parallel vaziyatdadir.

Isboti: Ω sitrning $P(u,v)$nuqtasidagi urinma tekisligi Π mavjud bo'lsin, ya'ni $\lim\limits_{Q\to P}\frac{\delta}{d}=0$ bajarilsin. Urinma tekislikning $\vec{r}_u,\vec{r}_v$ vektorlarga parallel vaziyatda bo'lishi va birdan birligini ko'rsataylik Π tekislikka perpendikulyar birlik vektorni $\vec{n}$ orqali belgilaylik. O-qutb tanlaymiz.



23-chizma

$\overrightarrow{OP}=\vec{r}(u,v),\ \overrightarrow{OQ}=\vec{r}(u+\delta u,v+\delta v)$; $d=\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\left|\vec{r}(u+\delta u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right|$

$\delta=\left(\overrightarrow{PQ}\vec{n}\right)=\left|\left(\left(\vec{r}(u+\delta u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right)\vec{n}\right)\right|$; $\qquad \frac{\delta}{d}=\frac{\left|\left(\left(\vec{r}(u+\delta u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right)\vec{n}\right)\right|}{\left|\vec{r}(u+\delta u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right|}$ (2)

δu va δv o'zaro bog'liqsiz ravishda nolga intilsa, Q nuqta P ga intiladi va shu bilan birga $d\to 0$.Umumiylikni daxlsiz qoldirib Q nuqtani "U" chiziqda olaylik . (2) nisbat quyidagi ko'rinishga ega.

$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|\left(\left(\vec{r}(u+\delta u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right)\vec{n}\right)\right|}{\left|\vec{r}(u+\delta u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right|}\xrightarrow[\delta u\to 0]{}0 \qquad (3)$$

$Q\in\Omega$ nuqta "v" chiziqda yotsa,

$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|\left(\left(\vec{r}(u+\delta u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right)\vec{n}\right)\right|}{\left|\vec{r}(u+\delta u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)\right|}\xrightarrow[\delta v\to 0]{}0 \qquad (4)$$

(3) va (4) dan

$$\frac{\delta}{d}=\frac{\left|\frac{(\vec{r}(u+\delta u,v)-\vec{r}(u,v)}{\delta u}\vec{n}\right|}{\left|\frac{\vec{r}(u+\delta u,v)-\vec{r}(u,v)}{\delta u}\right|}\xrightarrow[\delta u\to 0]{}\frac{\left|(\vec{r}_u\vec{n})\right|}{\left|\vec{r}_u\right|}=0\ ,\qquad \frac{\delta}{d}=\frac{\left|\frac{\vec{r}(u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)}{\delta v}\vec{n}\right|}{\left|\frac{\vec{r}(u,v+\delta v)-\vec{r}(u,v)}{\delta v}\right|}\xrightarrow[\delta u\to 0]{}\frac{\left|(\vec{r}_v\vec{n})\right|}{\left|\vec{r}_v\right|}=0$$

$|\vec{r}_u| \neq 0$, $|\vec{r}_v| \neq 0$ bo'lganligidan

$(\vec{r}_u \vec{n}) = 0$, $(\vec{r}_v \vec{n}) = 0$ (5)

tengliklargaegabo'lamiz.(5) dan $\vec{r}_u \perp \vec{n}$ va $\vec{r}_v \perp \vec{n}$ kelibchiqadi. $[\vec{r}_u\ \vec{r}_v] \| \vec{n}$ ekan.Ko'ramizki $\vec{r}_u \| \Pi$ va $\vec{r}_v \| \Pi$. $\vec{n}$ ningyagonaligidanurinmatekislikningbirdan-birligikelibchiqadi. $Q \in \Omega$ nuqtaningumumiyvaziyatiuchun

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\left| \frac{\vec{r}(u+\delta u, v+\delta v) - \vec{r}(u, v+\delta v)}{\delta u} \delta u \vec{n} + \frac{\vec{r}(u, v+\delta v) - \vec{r}(u,v)}{\delta v} \delta v \vec{n} \right|}{\left| \frac{\vec{r}(u+\delta u, v+\delta v) - \vec{r}(u, v+\delta v)}{\delta u} \delta u + \frac{\vec{r}(u, v+\delta v) - \vec{r}(u,v)}{\delta v} \delta v \right|} = \frac{\left| (\vec{r}_u{}'\vec{n})\delta u + (\vec{r}_v{}'\vec{n})\delta v + \varepsilon_1 \sqrt{\delta u^2 + \delta v^2} \right|}{\left| \vec{r}_u{}'\delta u + \vec{r}_v{}'\delta v + \varepsilon_2 \sqrt{\delta u^2 + \delta v^2} \right|}$$

(6) tengliko'rinlibo'lib , $\delta u \to 0$, $\delta v \to 0$ da $|\varepsilon_1| \to 0, |\varepsilon_2| \to 0$ (6) dan (5) nie'tiborgaolsak, $Q \to P$ da $\frac{\delta}{d} \to 0$ kelibchiqadi.Endiurinmatekislikningmavjudbo'lishiniko'rsatamiz. Bunda (5) tengliklarningbajarilishidanfoydalanamiz.(6) dan

$$\frac{\delta}{d} = \frac{\left| \varepsilon_1 \sqrt{\delta u^2 + \delta v^2} \right|}{\left| \vec{r}_u{}'\delta u + \vec{r}_v{}'\delta v + \varepsilon_2 \sqrt{\delta u^2 + \delta u^2} \right|} = \frac{|\varepsilon_1|}{\left| \vec{r}_u{}' \frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} + \vec{r}_v{}' \frac{\delta v}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} + \varepsilon_2 \right|} \quad (7)$$

$\delta u \to 0, \delta v \to 0$, $|\varepsilon_1| \to 0$, $|\varepsilon_2| \to 0$, $\frac{\delta}{d} \to 0$ ni ko'rsatish uchun (7) maxrajini o'zgarmas miqdor bo'lishini ko'rsatishimiz kifoya.

$$\left(\frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} \right)^2 + \left(\frac{\delta v}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} \right)^2 = 1$$

bo'lganiuchunqo'shuvchilardanbiri $\frac{1}{\sqrt{2}}$ dan kichikemasdeyishuchunasosbo'ladi.

$\frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ Π tekislikda $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ vektorlarganisbatankomplanar $\vec{r}_v$ vektorgaperpendikulyarbirlik $\vec{e}$ vektornitanlaylik.

$$\left| \frac{\vec{r}_u \delta u}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} + \frac{\vec{r}_v \delta v}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} \right| \geq \left| \vec{e} \left(\vec{r}_u \frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} + \vec{r}_v \frac{\delta v}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} \right) \right| = \left| (\vec{r}_u \vec{e}) \frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} \right| \geq$$

$$\geq |\vec{r}_u| \sin\theta \frac{1}{\sqrt{2}} = C_1$$

bunda Q - $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ vektorlartashkiletganburchak. Yuqoridagikabimuloxazayurgizib $\frac{\delta v}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$ nie'tiborgaolsak

$$\left| \frac{\vec{r}_u \delta u}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} + \frac{\vec{r}_v \delta v}{\sqrt{\delta u^2 + \delta v^2}} \right| \geq |\vec{r}_u| \sin\theta \frac{1}{\sqrt{2}} = C_2$$

gaegabo'lamiz. Bu yerda $\vec{e} \perp \vec{r}_u$ -qilibolinadi. SHundayqilib (7) ningmaxraji C_1 va C_2

sonlardankichikroq son bo'lishimumkin. Teoremato'laisbotlandi.

Endi urinmatekislikt englamasinituzamiz. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasidagiurinmatekislik Π da ixtiyoriy K nuqtaniolaylik. $\overrightarrow{PK}, \vec{r}_u, \vec{r}_v$ - komplanarvektorlar.

$$\left(\overrightarrow{PK}, \vec{r}_u, \vec{r}_v\right) = 0 \qquad (8)$$

(8)-urinmatekisliktenglamasi . Agar sirt

$$x = x(u,v),\ y = y(u,v),\ z = z(u,v) \quad (9)$$

ko'rinishdaberilganbo'lsa , $P(u_0,v_0)$ nuqta koordinatalarini $x_0 = x(u_0,v_0),\ y_0 = y(u_0,v_0),$ $z_0 = z(u_0,v_0)$ belgilasak , u holda $P(x_0,y_0,z_0), k(x,y,z)$ nuqtalaruchun (8) niquyidagiko'rinishdayozishmumkin.

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & y'_v \end{vmatrix}_{P(u_0,v_0)} = 0 \quad (10)$$

Agar sirt

$$z = f(x,y) \, (11)$$

ko'rinishdaberilganbo'lsa , u holda $x = u$, $y = v$, $z = f(u,v)$ dan

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & f'_x(x_0,y_0) \\ 0 & 1 & f'_y(x_0,y_0) \end{vmatrix} = 0 \, (12).$$

Urinmatekisliktenglamasigaegabo'lamiz . (12) niochiqholdayozsak

$$z = f(x_0,y_0) + f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0) \quad (13)$$

kelibchiqadi . $P(0,0,0)$ nuqta uchun

$$z = f'_x(0,0)x + f'_y(0,0)y \, (14) .$$

Oshkormasko'rinishdaberilgansirtuchunurinmatekisliktenglamasiniyozaylik .

$$\Omega : \varphi(x,y,z) = 0 \ (\varphi_x^2 + \varphi_y^2 + \varphi_z^2 \neq 0) \quad (15)$$

$\varphi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) = 0$ ayniyatgaegabo'lamiz. SHuayniyatni u va v parametrlarbo'yichadifferentsiallaymiz.

$$\begin{aligned} \varphi'_x x'_u + \varphi'_y y'_u + \varphi'_z z'_u &= 0 \\ \varphi'_x x'_v + \varphi'_y y'_v + \varphi'_z z'_v &= 0 \end{aligned} \qquad (16)$$

(16) $\vec{N}(\varphi'_x, \varphi'_y, \varphi'_z)$ va $\vec{r}'_u, \vec{r}'_v$ vektorlarningskalyarko'paytmasiekanidan

$$(\vec{N}\vec{r}_u{}') = 0, \qquad (\vec{N}\vec{r}'_v) = 0 \qquad (17)$$

kelibchiqadi.

Ko'ramizki $\vec{N} \perp \vec{r}'_u$, $\vec{N} \perp \vec{r}'_v$, u holda $\vec{N} \| [\vec{r}'_u, \vec{r}'_v]$.

SHundayqilib , urinmatekisliktenglamasi:

$$\varphi'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\varphi'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0 \qquad (18)$$

3.Ta'rif: Ω sirtning P nuqtasidagi normali deb shu nuqtadan o'tuvchi urinma tekislikka perpendikulyari to'g'ri chiziqqa aytiladi. $\vec{N}$ vektor normal to'g'richiziqqayo'naltiruvchivektorbo'lganiuchununingtenglamasi

$$\frac{x-x_0}{\varphi'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{\varphi'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)} \qquad (19)$$

yoki

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}_p}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}_p}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} x'_u & x'_u \\ y'_v & y'_v \end{vmatrix}_p} \qquad (20)$$

ko'rinishga ega.

Misol: $x^2+y^2+z^2=169$ sirtning $P(3,4,12)$ nuqtasidigi urinma tekisligi va normalining tenglamasi yozilsin.

Yechish:

$$2x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+2z_0(z-z_0)=0 \Rightarrow$$

$3x+4y+12z-169=0$ urinmatekislik.

$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-12}{12}$ - normal tenglamasi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Sirtning urinma tekislik ta`rifini aytib bering.
2. Sirtningurinmatekislikhaqidagiteoremasinikeltring.
3. Parametrikko`rinishdaberilgasirtningurinmatekislikningtenglamasiyozingvamisollarkeltiring.
4. Sirtningnormali deb qandaychiziqqaaytiladi?
5. Oshkorvaoshkormasko`rinishdaberilgasirtningurinmatekislikningturlichatenglamasiyozingvamisollarkeltiring.
6. Parametrikko`rinishdaberilgasirtning normal to`g`richiziqtenglamasiniyozingvamisollarkeltiring.
7. Oshkorvaoshkormasko`rinishdaberilgasirtning normal to`g`richiziqtenglamasiniyozingvamisollarkeltiring.

27.Sirtning yopishmaparaboloidi.Sirt nuqtalariningklassifikatsiyasi

Reja:

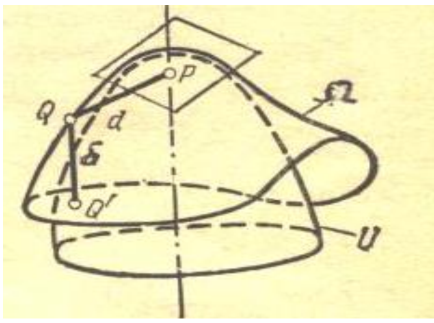
1. Yopishmaparaboloidta’rifi
2. Mavjudlikvayagonalikteoremasi
3. Yopishmaparaboloidtenglamasi
4. Sirtnuqtalariningklassifikatsiyasi
5. SirtningDyupenindikatrisasi
6. Misollar.

Mavzuningbayoni:

Regulyarsirtningixtiyoriynuqtasiniolib, shunuqtaniyetarlichakichikatrofidatuzilishiniani qlashuchununingshunuqtasidagiurinma tekisligiganisbatanchetlanishiniturliyo’nalishlaruchunbaholashkerak. Agarsirtningixtiyoriytanlangannuqtasiatrofidayopishmaparaboloidganisbatanturliyo’nalishlarbo’yichachetlanishibaholansa, sirtningtuzilishivashaklihaqidaaniqroqtasavvurgaegabo’lamiz. Sirtningyopishmaparaboloidiqandayfigura. Urinmatekislikdanfarqinimada, uningxususiyhollariqandaykabisavollargajavobizlaylik.

Ω -regulyarsirtbo’lsin. $P\in\Omega$ nuqtaniolaylik P nuqtadasirturinmatekislikvanormalgaegabo’lsin. Uchishu P nuqtadabo’lib, o’qisirtning P nuqtadaginormalibilanustma-usttushuvchi U - paraboloidniqaraylik.

Ω sirtda P nuqtagayaqin $Q\in\Omega$ nuqta olamiz. P va Q orasidagimasofa d bo’lsin. Q nuqtadan paraboloid o’qigaparalelto’g’richiziqo’tkazibuning U paraboloid bilankesishishnuqtasini Q' orqalibelgilaymiz. Q va Q' nuqtalarorasidagimasofa δ bo’lsin. $\rho(P,Q)=d$, $p(Q,Q')=\delta$



25-чизма

1-ta’rif: Agarregulyarsirtning ixtiyoriy P nuqtasida U - paraboloid mavjud bo’lib, $Q\in\Omega$ nuqta P nuqtaga intilganda

$$\frac{\delta}{d^2}\to 0\ (\lim_{Q\to P}\frac{\delta}{d^2}=0) \qquad (1)$$

bajarilsa, u holda U nisirtningyopishma paraboloidi deb ataladi.

Teorema: Regulyar (ikkımartauzıuksızdıfferentsıianuvcni) sirtningharbirnuqtasidabirdan-biryopishma paraboloid vauningaynigan hollariparaboliktsilindryokitekislikmavjuddir.

Isboti:sirt

$$\Omega:\vec{r}=\vec{r}(u,v) \qquad (2)$$

vektor ko’rinishidaberilganbilib, $[\,\vec{r}_u,\vec{r}_v\,]\neq 0$ bo’lsin.

Fazoviydekartkoordinatalarsistemasinishundayo’rnataylikki, P koordinatalarboshibilanustma-usttushsin. XY koordinatatekisligiuchunsirtningshunuqtadagiurinmatekisliginiolaylik, u holda Z o’qsirtnormalibilanustma-usttushadi.

Z o’qining yo’naltiruvchivektori $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ gakollinearbo’lishiniko’ramiz.

$$[\vec{r}_u', \vec{r}_v']\left\{0,0,\begin{vmatrix} x_u x_v \\ y_u y_v \end{vmatrix}\right\}, \quad \begin{vmatrix} x_u, x_v \\ y_u, y_v \end{vmatrix} \neq 0$$

u holda

$x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$ funktsiyalarteskarilanuvchibo’ladiva biz sirtning

$z = f(x,y)$ (3)

ko’rinishidagioshkortenglamasigaegabo’lamiz. Sirtning $P(x_0, y_0, z_0)$ nuqtasidagiurinmatekisligi

$$z = z_0 + f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) \quad (4)$$

tenglamagaegabo’lib $P(0,0,0)$ bo’lganda

$$z = f_x'(0,0)x + f_y'(0,0)y \quad (5)$$

tenglamaga ega bo’lamiz.

Lekin bizda urinma tekislik xy tekislik bo’lib $z=0$ tenglamaga egadir. U holda (5) dan

$$f_x'(0,0) = 0, f_y' = (0,0) = 0 \quad (6)$$

kelib chiqadi.

SHunday qilib, koordinatalar boshi atrofida $f(x,y)$ funktsiyaning Teylor qatoriga yoyilmasi

$$f(x,y) = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varepsilon(x,y)(x^2 + y^2) \quad (7)$$

ko’rinishda bo’ladi.

Bunda $r = f_{xx}''(0,0)$, $s = f_{xy}''(0,0)$, $t = f_{yy}''(0,0)$, $\varepsilon(x,y) \to 0$, $x \to 0$, $y \to 0$ da sirtning koordinatalar boshi atrofidagi tenglamasi

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) + \varepsilon(x,y)(x^2 + y^2) \quad (8)$$

ko’rinishda bo’lishi aniqlanadi. Uchi $P(0,0,0)$ nuqtada bo’lgan paraboloid va uning aynigan hollari parabolik tsilindr yoki tekislik tenglamasini

$$z = \frac{1}{2}(ax^2 + 2bxy + cy^2) \quad (9)$$

ko’rinishda ifodalash mumkin. $a=0$, $b=0$, $c=0$ da tekislik kelib chiqadi. Yopishma paraboloid mavjud deb faraz qilib, uning birdan-birligini ko’rsataylik.

$P(0,0,0)$, $Q(x,y,f)$, $Q'(x,y,z)$.

$$\rho(P,Q) = d = \sqrt{x^2 + y^2 + f^2(x,y)} \quad (10)$$

$$\rho(Q,Q') = \delta = \left|\frac{1}{2}(r-a)x^2 + (s-b)xy + \frac{1}{2}(t-e)y^2 + \varepsilon(x,y)(x^2+y^2)\right| \quad (11)$$

$$\frac{\delta}{d^2} = \frac{\left|\frac{1}{2}(r-a)x^2 + (s-b)xy + \frac{1}{2}(t-e)y^2 + \varepsilon(x,y)(x^2+y^2)\right|}{x^2+y^2+f^2(x,y)} \quad (12)$$

dan $y=0, x\to 0$ da $\frac{\delta}{d^2} \to \frac{1}{2}(r-a)$ kelibchiqadi. Bundan $a=r$ gaegabo'lamiz. $y=0, x\to 0$ da $\frac{\delta}{d^2} \to \frac{1}{2}(t-c) \to 0 \Rightarrow c=t$ $x=0,\ y\to 0$ da $b=s$ bo'lishianiqlanadi. SHundayqilib, yopishma paraboloid mavjudbo'lsa, uningtenglamasi

$$z = \frac{1}{2}(rx^2 + 2sxy + ty^2) \quad (13)$$

ko'rinishga ega va birdan-bir. (13) paraboloidning yopishma paraboloid ekani ta'rifni tekshirish orqali isbotlanadi. Haqiqatdan ham, $\frac{\delta}{d^2} = \frac{|\varepsilon(x,y)(x^2+y^2)|}{x^2+y^2+f^2(x,y)} < |\varepsilon(x,y)| \to 0$ teorema isbotlandi.

Yopishma paraboloidga bog'liq ravishda sirt nuqtalarini klassifikatsiyalash mumkin.

$rt-s^2>0$ da (13) elliptik paraboloid,

$rt-s^2<0$ da (13) giperbolik paraboloid,

$rt-s^2=0$ da paraboliktsilindrniifodaetadi,

$r=t=s$ da tekislikka ayniydi.

2-ta'rif: Agar sirtning P nuqtasidagi yopishma paraboloidi elliptik paraboloid bo'lsa, u holda P nuqtani elliptik nuqta deyiladi.

3-ta'rif: Agar sirtning P nuqtasidagi yopishma paraboloidi giperbolik paraboloid bo'lsa, u holda P nuqtani giperbolik nuqta deyiladi.

4-ta'rif: Agar sirtning P nuqtasidagi yopishma paraboloidi parabolik tsilindr bo'lsa, u holda P nuqtani parabolik nuqta deyiladi.

5-ta'rif: Agar sirt P nuqtasining yetarlicha kichik atrofi tekislik qismidan iborat bo'lsa, u holda P nuqtani sirtning dumaloqlanish nuqtasi deyiladi.

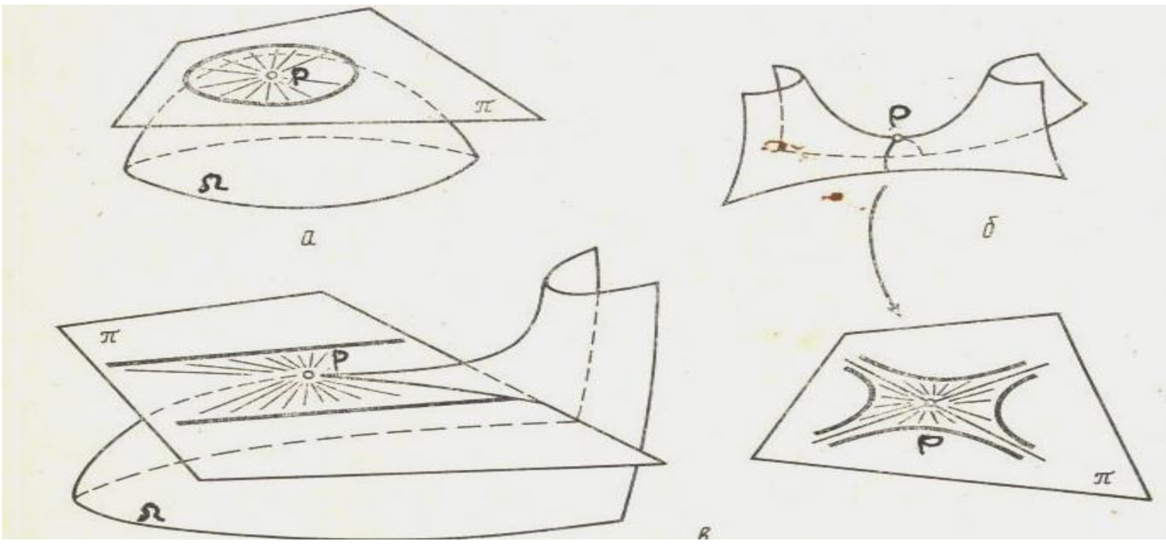
P-elliptik nuqta bo'lsin. SHu nuqtada yopishma paraboloid o'rnatib, uni urinma tekislikka nisbatan $\frac{1}{2}$ masofada (uzoqlikda) turuvchi tekislik bilan kesamiz. Kesimda ellips hosil bo'ladi. Kesimdagi ellipsni urinma tekislikdagi ortoganal proektsiyasiga Dyupen indikatrisasi yoki egrilik indikatrisasi deyiladi. Paraboloidning (13) tenglamasiga $z=\pm\frac{1}{2}$ qo'ysak,

$$rx^2 + 2sxy + ty^2 = \pm 1 \quad (14)$$

kelib chiqadi. Paraboloid fazoning $z>0$ qismida joylashsa, "+" ishora, $z<0$ qismida joylashsa, «-» ishora olinadi.

Sirtning P nuqtasidaurinmatekislik (ellips) yasalganbo'lsin. Ellipsning P markazidanikkitaqo'shmadiametrlarnio'tkazsak, ularningyo'nalishlarigasirtningqo'shmayo'nalishlarideyiladi.

Dyupenindikatrisasio'qlariningyo'nalishlarigasirtning bosh yo'nalishlarideyiladi. Sirtninggiperboliknuqtalaridaindikatrisayuqoridagikabita'riflanadi (14) tenglamaqo'shmagiperbolalarniifodalaydi. Sirtninggiperboliknuqtalaridaqo'shmava bosh yo'nalishalardantashqariasimptotikyo'nalishlartushunchasini ham kiritishmumkin. P-giperbolik nuqta bo'lsa, indikatrisa urinma tekislikka qarashli qo'shma giperbolalar ko'rinishida bo'lib, uning bir juft asimptotalari mavjuddir. P-sirtning parabolik nuqtasi bo'lsa, sirtning Dyupen indekatrisasi P nuqtaga nisbatan simmetrik joylashgan bir juft parallel to'g'ri chiziqlardan iboratdir. Sirtning dumaloqlanish nuqtalarida indikatrisa mavjud emas. Sirtning indikatrisasi tushunchasini frantsuz geometrigi Dyupen kiritgan.



26-chizma

Elliptik nuqtalar uchun $rt - s^2 > 0$

Giperbolik nuqtalar uchun $rt - s^2 < 0$ va

Paraboliknuqtalaruchun $rt - s^2 = 0$ munosabatlaro'rinlidir.

Misol: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ellipsoidning $(0,0,c)$ nuqtasidagiparaboloidningtenglamasiyozilsin.

Echish: $f(x,y) = z = c\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ $\quad f'_x = \frac{\frac{-2cx}{a^2}}{2\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}}$, $\quad f'_x(0,0) = 0$,

$$f'_y = -\frac{\frac{cy}{b^2}}{\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}},\ f'_y(0,0)=0\ \ f''_{xx}(0,0)=-\frac{c}{a^2}\ \ f''_{yy}(0,0)=-\frac{c}{b^2}\ \ f''_{xy}(0,0)=0\ .$$

SHunday qilib $rt-s^2=\frac{c^2}{a^2b^2}>0$ bo’lib, $z=c\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)\right)$.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazorat savollari

1. Sirtning yopishma paraboloid ta`rifini aytib bering.
2. Sirtning yopishma paraboloidining mavjudlik va yagonalik teoremasi keltring.
3. Sirt nuqtalarining klassifikatsiyasi qanday?
4. Sirtning qanday nuqtasi eliptik nuqta deyiladi?
5. Sirtning qanday nuqtasi giperbolik nuqta deyiladi?
6. Sirtning qanday nuqtasi dumaloqlanish nuqta deyiladi?

23.SIRTNINGBIRINCHI KVADRATIK FORMSI VA UNING TADBIQLARI.
SIRT SOHASINING YUZI

Reja.

1. Sirtningbirinchikvadratikformasi
2. Birinchi kvadratik formasiningishorasi
3. Sirtgaqarashlichiziqningyoyuzunligi
4. Sirtgaqarashlichiziqlartashkiletganburchak
5. Sirt koordinatchiziqlaritashkiletganburchak
6. Sirt soxasining yuzini hisoblash ta’rifi
7. Sirt soxasining yuzini hisoblash formulasi
8. Misollar

Mavzuningbayoni:

Ω regulyarsirt $\vec r=\vec r(u,v)$ vektortenglamasi orqaliberilganbo’lsin. $P(u,v)$nuqtada $[r'_u,r'_v]\neq 0, \varphi_1=d\vec r^{\,2}$ (1)

ifodagasirtningbirinchikvadratikformasideyiladi. Ko’ramizki, sirtningbirinchikvadratikformasi $\vec r$ -to’ladifferentsialiningkvadratigateng.

$d\vec r=\vec r'_u du+\vec r'_v dv$ bundan

$$d\vec r^{\,2}=\vec r'^2_u du^2+2(\vec r'_u\vec r'_v)dudv+\vec r'^2_v dv^2$$

$\varphi_1 = \vec{r}_u' du^2 + 2(\vec{r}_u', \vec{r}_v') du dv + \vec{r}_v'^2 dv^2$ (2)

(2) sirtningharbirnuqtasida du va dv larganisbatankvadratikformaniifodalaydi. $d\vec{r}'^2 = ds^2$, $ds = \sqrt{d\vec{r}'^2}$ nie'tiborgaolsak,

$$ds^2 = \vec{r}_u'^2 + 2(\vec{r}_u', \vec{r}_v') du dv + \vec{r}_v'^2 dv^2 \quad (3)$$

(3) nisirtningchiziqlielementideyiladivaunibirinchikvadratik forma desabo'ladi. Quyidagibelgilashlarnikiritaylik.

$$E = \vec{r}_u'^2, \quad F = (\vec{r}_u', \vec{r}_v'), \quad G = \vec{r}_v'^2 \qquad (4)$$

$(g_{11} = \vec{r}_u'^2, g_{12} = (\vec{r}_u', \vec{r}_v'), g_{22} = \vec{r}_v'^2)$ belgilash ham mumkin. $\varphi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$

Bundan

$$EG - F^2 > 0 \qquad (6)$$

haqiqatan ham, $\vec{r}_u^{\,2} \vec{r}_v^{\,2} - (\vec{r}_u \vec{r}_v)^2 = [\vec{r}_u \vec{r}_v]^2 > 0$. Ko'ramizki φ_1 musbat ishorali va $\vec{r}_u'^2 > 0$. Ω -sirtga qarashli γ chiziq $u = u(t)$, $v = v(t)$ parametrik tenglama orqali berilgan bo'lib, $t_0 \le t \le t_1$. γ chiziqning vektor tenglamasi

$$\vec{r} = \vec{r}(u(t), v(t)) \qquad (7)$$

ko'rinishga ega. γ chiziqning $M(t_0)$ va $N(t_1)$ nuqtalari orasidagi yoy uzunligini xisoblaylik.

$$ds = |d\vec{r}| = |\vec{r}'(u(t), v(t))| dt = \sqrt{d\vec{r}^{\,2}} = \sqrt{\varphi_1} = \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt} * \frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2} dt$$

Bundan

$$s(t) = \int_{M(t_0)}^{N(t_1)} \sqrt{\varphi_1} dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{Eu_t'^2 + 2Fu_t' v_t' + Gv_t'^2} dt \qquad (8)$$

(8) Ω sirtga qarashli γ silliq chiziqning $M(t_0)$ va $N(t_1)$ nuqtalari orasidagi yoy uzunligining hisoblash formulasidir.

Ω regulyar sirtda γ silliq chiziqdan tashqari ushbu chiziq bilan kesishuvchi L silliq chiziq $u = u(\tau)$, $v = v(\tau)$ tenglama orqali aniqlangan bo'lsin. γ va L chiziqlar $P(u, v) \in \Omega$ nuqtada kesishsin.

Ta'rif: Ω regulyar sirtga qarashli γ va L silliq chiziqlar tashkil etgan burchak deb, ularning kesishish P nuqtasida γ va L chiziqlarga o'tkazilgan urinmalar tashkil etgan eng kichik burchakka aytiladi. γ chiziqqa o'tkazilgan urinma vektor

$$\frac{dr}{dt} = \vec{r}_u \frac{du}{dt} + \vec{r}_v \frac{dv}{dt} \qquad (9)$$

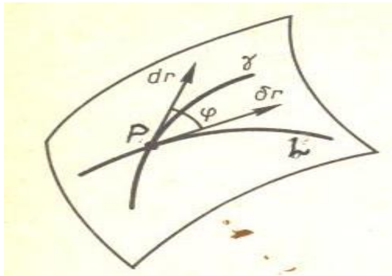
L chiziqqa P nuqtada o'tkazilgan urinma vektor

$$\frac{\delta r}{\delta \tau} = \vec{r}_u \frac{\delta u}{\delta \tau} + \vec{r}_v' \frac{\delta v}{\delta \tau} \qquad (10)$$

$d\vec{r} = \vec{r}_u' du + \vec{r}_v' dv$, $\delta\vec{r}' = \vec{r}_u' \delta u + \vec{r}_v' \delta v$

vektorlarni skalyar ko'paytmasidan

$$\cos\varphi = \frac{(d\vec{r}\,\delta\vec{r})}{\sqrt{d\vec{r}^{\,2}}\,\sqrt{\delta\vec{r}^{\,2}}} \quad (11)$$



27-чизма

kelib chiqadi.

$d\vec{r}^{\,2} = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \,(\alpha)$

$\delta\vec{r}^{\,2} = E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + C\delta v^2 \left(\beta\right)$

$(d\vec{r}\,\delta\vec{r}) = \vec{r}_u^{\,\prime 2} du\delta u + (\vec{r}_u^{\,\prime}\vec{r}_v^{\,\prime})(du\delta v + dv\delta u) + \vec{r}_v^{\,\prime 2} dv\delta v =$

$= Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Gdv\delta v(\gamma)$

formuladanfoydalansak,

$$\cos\varphi = \frac{Edu\delta u + F(du\delta v + dv\delta u) + Ddv\delta v}{\sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}\,\sqrt{E\delta u^2 + 2F\delta u\delta v + G\delta v^2}} \qquad (12)$$

formulagaegabo’lamiz. Ω sirtgaqarashlikoordinatchiziqlarkesishibtashkiletganburchakformulasiniyozaylik.

$$\gamma : \begin{cases} u = t \\ v = const \end{cases} \quad L : \begin{cases} u = const \\ v = t \end{cases} \quad (13)$$

γ uchun $dv = 0$, L uchun $\delta u = 0$ bo’lgani uchun (12) dan

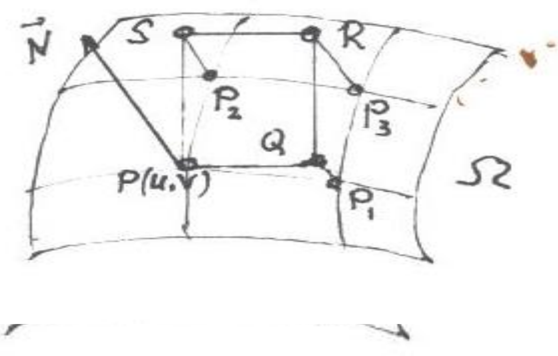
$$\cos\varphi = \frac{Fdu\delta v}{\sqrt{Edu^2}\,\sqrt{G\delta v^2}} = \frac{F}{\sqrt{EG}} \quad (14)$$

(14) dan quyidagi teorema kelib chiqadi.

Teorema: Ω sirt koordinat chiziqlari ortogonal bo’lishi uchun $F = 0$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

Endi $\vec{r} = \vec{r}(u,v)$ vektor ko’rinishda berilgan Ω silliq sirt sohasining yuzini hisoblash formulasini yozaylik.

Sirtning silliq chiziqlar qism yoylari bilan chegaralangan Φ sohasini ajrataylik. Φ sohani u, v parametrlarining o’zgarish sohasi deb qarash mumkin. Φ sohaning har bir nuqtasiga u, v parametrning fiksirlagan qiymatlari mos keladi va aksincha. Φ soxani "u" va "v" koordinat chiziqlar oilasi orqali egri chiziqli parallelogrammlarga ajratamiz. qarama-qarshi tomonlar juftlaridan biri "u" chiziqlar bilan, ikkinchisi "v" chiziqlar bilan chegaralanadi.



28-chizma

CHizmada $PP_1\ P_2P_3$ egri chiziqli parallelogramm tasvirlangan bo'lib, uchlari $P(u,v)$, $P_1(u+\Delta u, v)$, $P_2(u, v+\Delta v)$, $P_3(u+\Delta u, v+\Delta v)$ koordinatalarga ega. $\vec{N}$ -sirtning P nuqtadagi normal vektori bo'lsin. "u" va "v" chiziqlarga P nuqtada urinmalar o'tkazamiz. $PP_1\ P_2P_3$ egri chiziqli parallelogrammni $\vec{N}$ ga parallel ravishda urinma tekislikka proektsiyalaymiz. Urinma tekislikda $PQSR$ to'g'ri parallelogramm hosil bo'ladi. Uni $\vec{r}_u\ \Delta u$ va $\vec{r}_v\ \Delta v$ vektorlar bo'yicha ko'rilgan urinma tekislikka tegishli parallelogramm bo'lishidan $PP_1\ P_2P_3$ parallelogramm o'rniga olish mumkinligi kelib chiqadi.

$PQSR$ parallelogramm yuzini $G(g)$ orqali belgilaylik. Φ sohadagi egri chiziqli parallelogrammlarning yig'indisi $G=\sum G(g)$ bo'lsin.

Ta'rif: Sirt sohasi Φ ning yuzi deb, g soha o'lchov bo'yicha cheksiz kichrayganda

$$S = l\lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \sum_g G(g) \qquad (15)$$

songa aytiladi.

$$G(g) = \left|\left[\vec{r}_u{}'\Delta u \quad \vec{r}_v{}'\Delta v\right]\right| = \left|\left[\vec{r}_u{}' \ \ \overline{\vec{r}_v{}'}\right]\right|\Delta u\Delta v \qquad (16)$$

$\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'$ hosilalarning uzluksizligidan (15) limit mavjud bo'lib, ikki karrali integral ta'rifi bo'yicha

$$S = \iint_{\Phi} \left|\left[\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'\right]\right| dudv \ (17)$$

gatengdir.

SHundayqilib,

$$S = \lim_{\substack{\Delta u\to 0\\ \Delta v\to 0}} \sum_g G(g)$$

$$\left[\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'\right]^2 + \left(\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'\right)^2 = \vec{r}_u{}'^2\vec{r}_v{}'^2 \qquad (18)$$

(4) dan foydalanib, (18) dan

$$\left(\left[\vec{\tau}_u{}'\vec{\tau}_v{}'\right]\right) = \sqrt{EG-F^2} \ (19)$$

tengliknikeltiribchiqarishmumkin.

$$S = \iint_{\Phi} \sqrt{EG-F^2}\, dudv \ (20)$$

(20) Ω sirt Φ sohasiyuzinihisoblashformulasibo'lib, φ_1 forma koeffitsientlariorqaliifodalanadi.

Misol: R radiuslisferayuzihisoblansin. Sferaningparametriktenglamasi

$x = R\cos u\cos v$, $y = R\sin u\cos v$, $r = R\sin v$

$$\Phi=\left\{(u,v)\middle|0\le u\le 2\pi,-\frac{\pi}{2}\le v\le\frac{\pi}{2}\right\}$$

$$\vec{r}_u'=-R\sin u\cos v\cdot\vec{i}+R\cos u\cos v\cdot\vec{j}\,,\ \vec{r}_v'=-R\cos u\sin v\cdot\vec{i}-R\sin u\sin v\cdot\vec{j}\,,$$

$$E=\vec{r}\,'^2(u)=R^2\cos^2 v\,,\ G=\vec{r}\,'^2(v)=R^2\,,\ F=(\vec{r}_u'\vec{r}_v')=0\,,$$

$$\sqrt{EG-F^2}=R^2\cos v,$$

$$S=\iint_{\Phi}\sqrt{EG-F^2}dudv=R\int_0^{2\pi}du\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos vdv=4\pi R^2$$

Agar sirt $z=g(x,y)$ tenglamasi orqali berilgan bo'lsa, uning yuzini hisoblash formulasi

$$S=\iint_{(\Phi)}\sqrt{1+g_x^2+g_y^2}\ \ dx\ dy \qquad (21)$$

ko'rinishda yoziladi. Isbotlashni o'quvchiga tavsiya etamiz.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazoratsavollari

1. Sirtningbirinchikvadratikformasita`rifiniayting.
2. Sirtningchiziqlielementiqandaytadbiqlargaega?
3. Sirtgaqarashlichiziqningyoyuzunliginiqanday toppish mumkin?
4. Sirt koordinatchiziqlaritashkiletganburchakqanday formula bilanhisoblanadi?
5. Sirt soxasiningyuzinihisoblashta'rifinikeltirng.
6. Sirt soxasiningyuzinihisoblashformulasiniaytibbering. Misollarkeltiring.

24.1. Sirtningikkinchikvadratikformasi. Sirtgaqarashlichiziqlarning normalvageodezikegriligi. Меньe teoremasi

Reja:

1. Ikkinchikvadratik formata'rifi
2. Ikkinchikvadratik forma koeffitsientlari
3. Normal vageodezikegrilik
4. Normal vageodezikegrilikformulalari
5. Меньe teoremasi
6. Misollar

Mavzuningbayoni:

Sirt ikkimartauzluksizdifferentsiallanuvchibo'lib,

$\vec{r} = \vec{r}(u,v), \quad (u,v) \in \Phi$ (1)

vektorko'rinishidaberilganbo'lsin. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasidaginormalningbirlikvektori

$$\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u' \ \vec{r}_v']}{|\vec{r}_u' \vec{r}_v'|} = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}[\vec{r}_u' \vec{r}_v'] \quad (2)$$

Radiusvektorniikkimartadifferentsiallasak

$$d^2\vec{r} = \vec{r}_{uu}'' du^2 + 2\vec{r}_{uv}'' du dv + \vec{r}_{vv}'' dv^2 + \vec{r}_u' d^2u + \vec{r}_v' d^2v \quad (3)$$

Ta'rif: L sirtningikkinchikvadratikformasi deb $d^2\vec{r}$ va $\vec{n}$ vektorlarningskalyarko'paytmasigaaytiladiva

$$\varphi_2 = (d^2\vec{r}\vec{n}) = (\vec{r}_{uu}''\vec{n})\, du^2 + 2(\vec{r}_{uv}''\vec{n}) du \ dv + (\vec{r}_{vv}''\vec{n}) \cdot dv^2 \quad (4)$$

belgilanadi.

$$L = (\vec{r}_{uu}''\vec{n}), \ M = (\vec{r}_{uv}''\vec{n}) \ , \ N = (\vec{r}_{vv}''\vec{n}) \quad (5)$$

belgilashkiritamiz.

$$\varphi = Ldu^2 + 2Mdu \ dv + Ndv^2 \quad (6)$$

(6) du, dvdifferentsiallarganisbatankvadratikformadir. L, M, N koeffitsentlariuchun qo'yidagihisoblashformulalari

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(\vec{r}_{uu}''\vec{r}_u'\vec{r}_v'), M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(\vec{r}_{uv}''\vec{r}_u'\vec{r}_v'), N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}}(\vec{r}_{vv}''\vec{r}_u'\vec{r}_v')$$

o'rinli bo'lib, ularni

$$L = -(\vec{r}_u' \ \vec{n}_u') \quad M = -(\vec{r}_u'\vec{n}_v') = -(\vec{r}_v' \ \vec{n}_u') \quad N = -(\vec{r}_v' \ \vec{n}_v')$$

ko'rinishida ifodalash ham mumkin. Buning uchun $(d^2\vec{r}\,\vec{n}) = -(d^2\vec{r} \ \alpha\vec{n})$ tenglikdanfoydalanishkerak (isbotlang). Ω regulyarsirtda $P(u,v)$ nuqta orqalio'tuvchi $\gamma : u = u(s), v = v(s)$chiziqniolaylik. $\vec{\tau}$ urinmasiningbirlikvektoribo'lsin. $\vec{d} = [\vec{n}\,\vec{\tau}]$ belgilaylik $P(u,v) \in \Omega$ nuqtada $\vec{\tau}$, $\vec{n}$ va $\vec{b}$ chiziqlierklivektorlarorqali

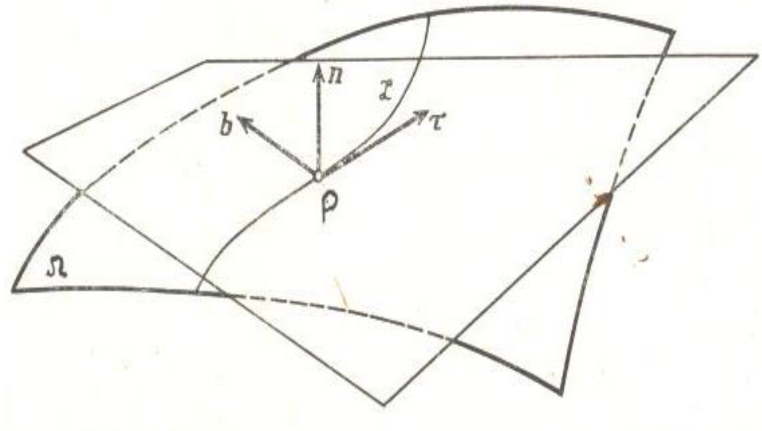
$$\ddot{\vec{r}}_{ss} = \alpha\vec{\tau} + \beta\vec{n} + \gamma\vec{b} \quad (10)$$

ko'rinishdaifodalashmumkin.

$$(\ddot{\vec{r}}_{ss}\vec{\tau}) = 0 \to \alpha = 0 \ \ddot{\vec{r}}_{ss} = \beta\vec{n} + \gamma\vec{b} \quad (11)$$

$$\beta = (\ddot{\vec{r}}_{ss}\vec{n}), \gamma = (\ddot{\vec{r}}_{ss}\vec{b})$$

koeffitsientlargeometrikma'nogaega.



29-chizma

Ta'rif:sirtgaqarashli γ chiziqning $P(u,v)$ nuqtasidaginormalegriligidebchiziqning $p(u,v)\in\Omega$ nuqtasidagiegrilikvektorinisirtningbirliknormalvektoriqarashlibo'lganto'g'richiziqqaprOektsiyasigaaytiladi.

Normalegrilikni $k_n=(\ddot{\vec r}_{ss}\vec n)$belgilaymiz. Ko'ramizki, $k_n=\beta$

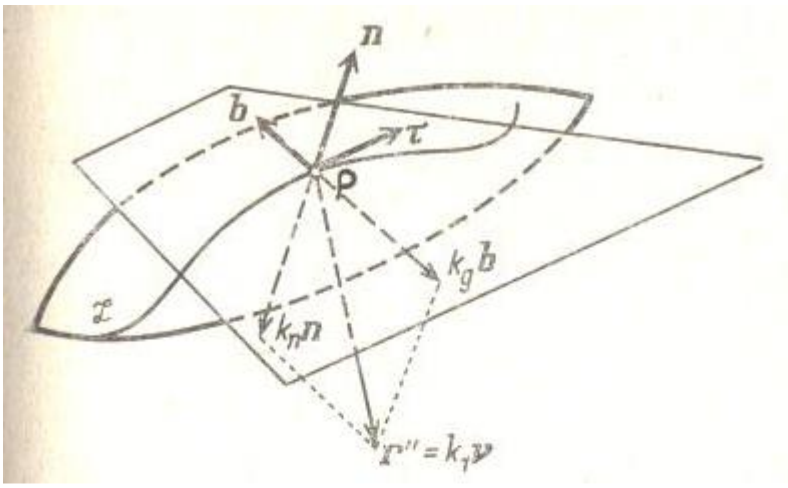
Ta'rif: sirtga qarashli γ chiziqning $P\in\Omega$ nuqtasidagi geodezik egriligi deb γ chiziqning P nuqtadagi $\ddot{\vec r}_{ss}$ egrilik vektorini $\bar b$ vektor qarashli bo'lgan to'g'ri chiziqqa proektsiyasiga aytiladi va uni $k_g=\gamma=(\vec r_{ss}\vec b)$ belgilaymiz.

Agar γ chiziqning P nuqtadagi oddiy egriligi noldan farqli bo'lsa, ya'ni $k_1=\left|\ddot{\vec r}_{ss}\right|\neq 0$, $\ddot{\vec r}_{ss}=k_1\vec v$ u holda,

$$k_n=(\ddot{\vec r}_{ss},\vec n)=k_1(\vec v,\vec n)=k_1\cos\theta \qquad (12)$$

bunda $\theta=\angle(\vec v,\vec n)$

$$k_g(\ddot{\vec r}_{ss},\vec b)=k_1(\vec v,\vec\tau,\vec n) \quad (13)$$



30-rasm

Sirtning $P(u,v)$ nuqtasida umumiy (du,dv) yo'nalishdagi sirtga qarashli barcha chiziqlar uchun $k\cos\theta$ bir xil qiymatga egaligini ko'rsataylik.

$$\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\vec{r}''_{uu}\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2\vec{r}''_{uv}\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+\vec{r}''_{vv}\left(\frac{dv}{ds}\right)^2+\vec{r}'_u\frac{d^2u}{ds^2}+\vec{r}'_v\frac{d^2v}{ds^2} \qquad (14)$$

(14) ning chap va o’ng qismini $\vec{n}$ vektorga skalyar ko’paytirib $(\vec{r}'_u\vec{n})=(r'_v\vec{n})=0$ ni e’tiborga olsak,

$$k_n=(\ddot{\vec{r}}_{ss}\vec{n})=k_1\cos\theta=L\left(\frac{du}{ds}\right)^2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2 \qquad (15)$$

$$ds^2=\varphi_1=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2 \qquad (16)$$

$$k_n=k_1\cos\theta=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}=\frac{\varphi_2}{\varphi_1} \qquad (17)$$

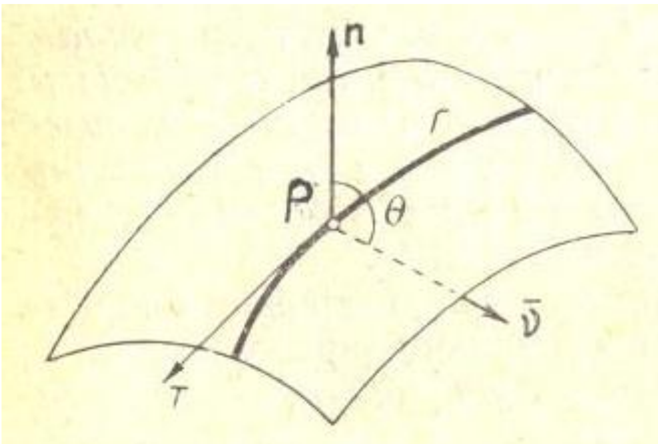
Ta’rif: Sirtning P nuqtasidagi normal egriligi deb, ikkinchi kvadratik formaning birinchi kvadratik formaga bo’lgan nisbatiga aytiladi.

Ko’ramizki k_n $\gamma\in\Omega$ chiziqning P nuqtasidagi urinmasining yo’nalishiga ya’ni $du:dv$ nisbatga bog’liq. Umumiy urinmalik barcha chiziqlar uchun k_n bir xil qiymatga ega.

Ω sirtning $P(u,v)$ nuqtasidan shu nuqtadagi $\vec{n}$ vektorga va $du:dv$ yo’naishga parallel ravishda Π tekislik o’tkazaylik. Π tekislik Ω sirtbilan normal kesim deb ataluvchichiziqbo’yichakesishadi.

SHundayqilib, sirtning P nuqtasiorqali $du:dv$ yo’nalishbo’yichao’tuvchisirtgaqarashlichiziqlarorasida L normal kesimham mavjud. Normal kesimegriligigateskarimiqdorga normal egrilikradiusi, uningikkinchiuchiga normal egrilikmarkazideyiladi.

<u>Меньe teoremasi</u>. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasisidan $du:dv$ yo’nalishbo’yicha Π tekisliko’tkazilganbo’lsin. Π' tekislik Ω sirt bilan γ-og’ma kesim bo’yicha kesishsin. U holda normal kesim L egrilik markazining Π' tekislikdagi proektsiyasi γ og’ma kesimning egrilik markazi bilan ustma-ust tushadi.



31-chizma

32-chizmada C_0 nuqta normal kesimningegrilikmarkazi, C esaixtiyoriykesim γ ningegrilikmarkazibo’lib $C_0C\perp CP$

$$\rho_0 = \rho_{c_0} = \frac{1}{k_1}, \qquad \rho = \rho_c = \frac{1}{k_n} \quad (18)$$

Меньe teoremasiniboshlang’ichvariantiquyidagicha. Sirt ustidayotuvchivasirtningberilgannuqtasidano’tuvchiumumiyurinmalibarchachiziqlarningegrilikmarkazlaridiametrishunuqtadagi normal kesimningegrilikradiusigatengbo’lib, o’ziesachiziqlarningumumiy normal tekisligidayotganaylanadajoylangandir. Normal kesimuchun $\theta = 0$ bo’lib (17) formuladan

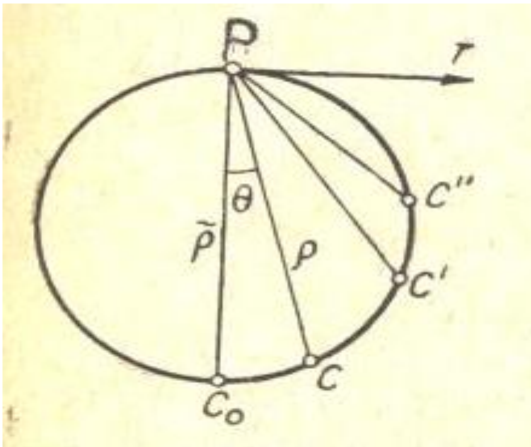
$$k_n = k_1 \quad (19)$$

kelibchiqadi, ya’ni normal kesimuchun normal egrilikoddiyegrilikkaaylanadi.

Agar sirtda $du : dv$ yo’nalishaniqlanganbo’lsa, u holdashuyo’nalishdagi normal egrilik

$$k_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$$

formulaorqalihisoblanadi



32-chizma

Misol: $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$ paraboloidning $(0,0,0)$ nuqtasidagi $dx : dy$ yo’nalishbo’yicha normal egriligianiqlansin.

Echish: $x = u$, $y = v$, $z = \frac{1}{2}(ax^2 + by^2)$, $u = 0$, $v = 0$.

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = 1, \qquad F = x_u' x_v' + y_u' y_v' + z_u' z_v' = 0$$

$$G = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2 = 1$$

$$L = \begin{vmatrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = a, \; M = 0, \; N = b, \; k_n = \frac{adx^2 + bdy^2}{dx^2 + dy^2}.$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.

2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.

3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazorat savollari

1. Sirtningikkinchikvadratikformasita`rifiniaytibbering.
2. ISirtningikkinchikvadratik forma koeffitsientlariqandayhisoblanadi?
3. Qandayegriliksirtning normal egriligideyiladi?
4. Sirt ustidagichiziqningegriligi deb qandayegrilikkaaytiladi? Misollarkeltring.
5. Sirtningqandayegriligiuninggeodezikegriligideyiladi?
6. Sirtning normal vageodezikegrilikformulalariqaysivektorlarorqaliifodalanadi?
7. Men`e teoremasi teoremasini aytib bering.

24.2 Bosh egriliklar. SirtningDyupenindikatrisasi

Reja:

1. Indikatrisata'rifi
2. Indikatrisaformulasi
3. Sirt nuqtalarinisinflargaajratish
4. Eyler formulasi
5. Bosh yo'nalishlar

Mavzuningbayoni:

Regulyarsirt

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (1)$$

vektorko'rinishdaberilganbo'lsin. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasidagi $du:dv$ yo'nalishbo'yicha normal egriligi K_n bo'lsin. Sirtning P nuqtasidaurinmatekislikyasaymiz. SHunuqtadano'tuvchibarchanormal kesimlarningurinmasigaboshlang'ich P nuqtadanuzunligi $R_n = \dfrac{1}{\sqrt{K_n}}$ gatengkesmalarnimosravishdaqo'yamiz.

Ta'rif: Sirtning P nuqtasidan o'tuvchi urinma tekislikka qarashli $\sqrt{|R_n|}$ ga teng uzunlikdagi kesmalar ikkinchi uchlarining geometrik o'rniga sirtning P nuqtadagi Dyupen indikatrisasi deyiladi.

P nuqtani koordinatalar boshi uchun $\vec{r}_u$, $\vec{r}_v$ vektorlarni bazis vektorlar uchun tanlaymiz. SHu bilan urinma tekislikda affin koordinatalar sistemasini o'rnatgan bo'lamiz

Indikatrisada ixtiyoriy M nuqtani tanlaymiz.

$$\overrightarrow{PM} = \xi\vec{r}_u + \eta\vec{r}_v \qquad (2)$$

$\vec{PM}$ yo'nalishning birlik vektori $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{r}}{ds}$ bo'lsin.

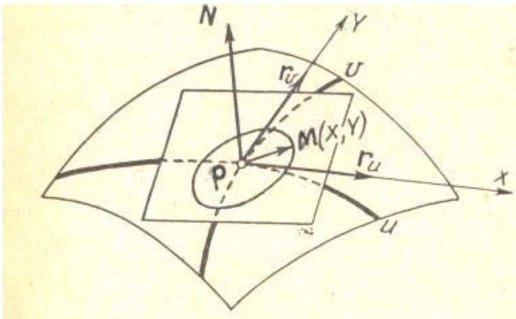
$$\xi = \sqrt{|R_n|}\,\frac{du}{ds} \quad , \ \eta = \sqrt{|R_n|}\,\frac{dv}{ds} \qquad (3)$$

bundan

$$\frac{du}{ds}=\frac{\xi}{\sqrt{|R_n|}};\frac{dv}{ds}=\frac{\eta}{\sqrt{|R_n|}} \qquad (4)$$

$K_n=\frac{1}{\sqrt{R_n}}=L\left(\frac{du}{ds}\right)_2+2M\frac{du}{ds}\frac{dv}{ds}+N\left(\frac{dv}{ds}\right)^2$ formulaga (4) niqo'yamiz

$$\frac{|R_n|}{R_n}=L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2 \qquad (5)$$



$\frac{|R_n|}{R_n}=\pm 1$bo'lganiuchun

$$L\xi^2+2M\xi\eta+N\eta^2=\pm 1 \qquad (6)$$

$\xi:\eta=du:dv$ bo'lganiuchun

$$Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2=\pm 1 \qquad (7)$$

Dyupenindikatrisasiningformulasigaegabo'lamiz. Dyupenfrantsuzmatematigi 1784-1873 vaqtoralig'idayashagan.

$LN-M^2<0$ bo'lsa, P-giperbolik nuqta., bo'lib, indikatrisa bir juft qo'shma giperbola ko'rinishida bo'ladi.

$LN-M^2>0$bo'lsa$P$-elliptik nuqta.Indikatrisaellipsdaniborat.

$LN-M^2=0$,bo'lsa$P$- parabolik nuqta bo'lib,indikatrisa$P$-nuqtaganisbatansimmetrikbirjuftparallel to'g'richiziqko'rinishidabo'ladi.

Dyupenindikatrisasitushunchasibilanegrilikindikatrisaquyidagiholuchunustma-usttushadi.

Ω sirtni

$$z=\frac{1}{2}(rx^2+2sxy+ty^2)+\varepsilon(x,y)(x^2+y^2) \quad (8)$$

ko'rinishdagitenglamabilanifodalashmumkinbo'lsin. (mavzu: Yopishmaparaboloidgaqarang).

$P(0,0)$nuqtadagisirtningdyupenindikatrisasi

$$rx^2+2sxy+ty^2=\pm 1 (9).$$

Sirtvauning$P$nuqtadagiyopishmaparaboloidi

$$z=\frac{1}{2}\left(rx^2+2sxy+ty^2\right)(10)$$

SHunuqtadabirxildaφ_1 vaφ_2 formalargaegadir.

$$\begin{aligned}\varphi_1&=dx^2+dy^2\\ \varphi_2&=rdx^2+2Sdxdy+tdy^2\end{aligned} \qquad (11)$$

bundan

$$K_n = \frac{rx^2 + 2sxy + ty^2}{x^2 + y^2} (12)$$

Indikatrisaning M nuqtasi $dx : dy$ yo’nalishda $M(x, y)$ koordinatalargaegabo’lsin.

$dx : dy = x : y$ (*)

Uholda (12)ni

$$K_n = \frac{rx^2 + 2sxy + ty^2}{x^2 + y^2} \quad (13)$$ ko’rinishda yozish mumkin. (13) ga (9) niqo’yamiz

$$K_n = \frac{\pm 1}{x^2 + y^2} = \frac{\pm 1}{PM^2} (14)$$

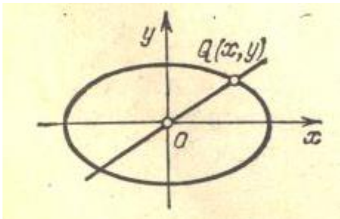
Bunda $PM = \frac{1}{\sqrt{|K_n|}}$ bo’lib sirtning dyupen indikasasi va normal egriligi o’zaro (14) munosabatda bo’ladi. SHuning uchun uni sirtning egrilik indikatrisasi deyishimiz mumkin.

(14) dan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

a) Asimptotikyo’nalishlardagi normal egriliknolgateng.

Asimptotik yo’nalishda $R = \infty$ va $PM = \infty$

b) o’zaro perpendikulyar va qo’shma yo’nalishlarda normalegrilikengkattavaengkichik (ekstremal) qiymatlarga erishadi.



34- чизма

Analitik geometriyadan ellips o’qlarining yo’nalishlari bosh yo’nalishlar ekani ma’lum.

Bosh yo’nalishlarda $F = M = 0$ shart o’rinlidir. $r = L$, $s = M$, $t = N$ bo’lgani uchun (13) dan

$$K_n = r\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\right)^2 + t\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}\right)^2 \qquad (15)$$

Birinchi bosh yo’nalish uchun $dy = 0$ bo’lsa, $K_n^1 = r$ ikkinchi bosh yo’nalishi uchun $dx = 0$ bo’lsa, $K_n^2 = t$ bunda K_n^1, K_n^2 bosh yo’nalishlar bo’yicha normal egriliklar. Qo’yidagi belgilashlarni kiritaylik:

$$\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \cos\theta, \quad \frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2}} = \sin\theta, \quad K_n = K_n^1 \cos^2\theta + K_n^2 \sin^2\theta$$ (16) formula kelib chiqadi.

(16) Eyler formulasi bo’lib, sirt ixtiyoriy qiyshiq kesimining normal egriligi va bosh normal kesimlarning normal egriliklari orasidagi bog’lanishni ifodalaydi.

θ- ixtiyoriy kesim yo'nalishi bilan K_n^1 ga mos bosh yo'nalish tashkil etgan burchak.

Sirtning bosh egriliklari

Sirtningberilgan $P(u,v)$ nuqtasidagi normal egriligisirtda $du:dv$ yo'nalishtanlashgabog'liqbo'lib,

$$K_n = \frac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2} \qquad (1)$$

formula bo'yicha ifodalanadi.

Ta'rif: Agar $du:dv$ yo'nalishda sirtning K_n normal egriligi ekstremal qiymatlarga erishsa u holda, ushbu yo'nalishni bosh yo'nalish deyiladi.

Ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi sirtda kamida ikkita bosh yo'nalishlar mavjuddir.

P nuqtadagi biror $\xi:\eta$ yo'nalishni qaraylik.

$$K_n = K_n(\xi,\eta) = \frac{L\xi^2 + 2M\xi\eta + N\eta^2}{E\xi^2 + 2F\xi\eta + G\eta^2} \qquad (2)$$

normal egrilik formulasini

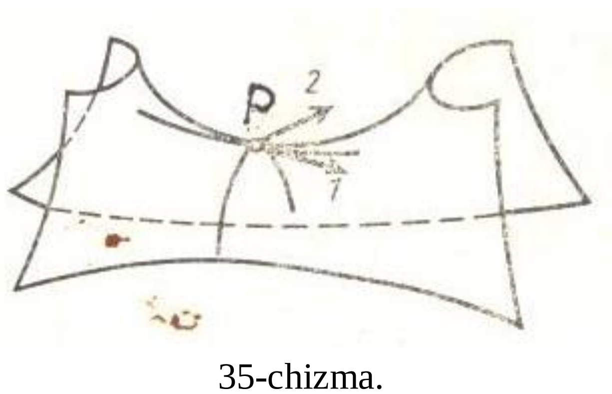
$\xi = \rho\cos\varphi, \eta = \rho\sin\varphi$

orqali qutb koordinatalarga o'tkazsak

$$K_n = K_n(\varphi) = \frac{Lcos^2\varphi + M\sin 2\varphi + N\sin^2\varphi}{E\cos^2\varphi + F\sin 2\varphi + G\sin^2\varphi} \qquad (3)$$

kelib chiqadi. $K_n = k_n(\varphi)$ uzluksiz funktsiya bo'lib $K_n(0) = K_n(2\pi)$ bo'lgani uchun $[0,2\pi]$ kesmada yoki u o'zgarmas funktsiyalar yoki kamida bitta maksimum va kamida bitta minimumga ega bo'lishi mumkin. Bundan ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi regulyar sirtning har bir nuqtasida ikkita turli bosh yo'nalishlarning mavjud bo'lishi aniqlanadi.

Ta'rif: Sirt normal egriligining bosh yo'nalishlardagi ekstremal qiymatlariga sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklari deb ataladi.



35-chizma.

(2) formuladan ξ,η ganisbatanquyidagiayniyatkelibchiqadi.

$$\left(L+K_nE\right)\xi^2+2(M-K_nF)\xi\eta+(N-K_nG)\eta^2=0 \qquad (4)$$

Bosh yo'nalish uchun normal egrilik hosilalarining nolga aylanishini e'tiborga olib (4) ni differentsiallash orqali

$$\begin{aligned}&\left(L-K_nE\right)\xi+(M-K_nF)\eta=0\\&(M-K_nF)\xi+(N-K_nG)\eta=0\end{aligned} \qquad (5)$$

sistemani hosil qilamiz.

Bunda $k(\xi;\eta)$ yo'nalishdagi bosh egrilik. (5) sistema nolmas yechimga ega bo'lishi uchun

$$\begin{vmatrix}L-K_nE, M-K_nF\\ M-K_nF, N-K_nG\end{vmatrix}=0 \qquad (6)$$

tenglik bajarilishi kerak.

Determinantni hisoblab

$$K_n^2\left(EG-F^2\right)-K_n\left(EM-2FM+GL\right)+LN-M^2=0 \qquad (7)$$

kvadrat tenglamani keltirib chiqaramiz. (7) bosh egriliklarni hisoblash uchun asosiy tenglamadir.

Bu tenglama ikkita turli haqiqiy K_n^1, K_n^2 ildizlarga yoki ustma-ust tushuvchi $K_n^1=K_n^2$ ildizga ega bo'lishi mumkin.

Xususiyhollar:

1) (7) tenglamaikkitaturliildizlargaegabo'lsin. Bu ildizlargasirtda (ξ_1,η_1) va (ξ_2,η_2) ikkita bosh yo'nalishlarto'g'rikeladi.

$$\begin{cases}\left(L-K_n^1E\right)\xi_1+\left(M-K_n^1F\right)\eta_1=0\\ \left(M-K_n^1F\right)\xi_1+\left(N-K_n^1G\right)\eta_1=0\end{cases} \qquad (8a)$$

$$\begin{cases}\left(L-K_n^2E\right)\xi_2+\left(M-K_n^2F\right)\eta_2=0\\ \left(M-K_n^2F\right)\xi_2+\left(N-K_n^2G\right)\eta_2=0\end{cases} \qquad (8b)$$

Agar sirtning ba'zi bir nuqtalarida sirtning koordinat chiziqlari bosh yo'nalishlarga ega bo'lsa, u holda bunday nuqtalarda $F=M=0$ bo'lishini ko'rsataylik. Koordinant chiziqlarining $(\xi_i,0)$ va $(0,\eta_i)$ $(i=1,2)$ yo'nalishlari bosh yo'nalishlar bo'lsin. U holda (8 a,b)dan.

$$L-K_n^1E=0,\quad M-K_n^1F=0 \qquad (9a)$$

$$M-K_n^2F=0,\quad N-K_n^2G=0 \qquad (9b)$$

$K_n^1\neq K_n^2$ bo'lganiuchun (9a), (9b) ningikkinchivauchinchitengliklaridan $F=M=0$ kelibchiqadi. Qolgan tengliklardan

$$K_n^1=\frac{L}{E},\quad K_n^2=\frac{N}{G} \qquad (10)$$

gaegabo'lamiz.

2) (7) tenglamaningildizlarikarralibo'lsin. U holdasirtdagiistalganyo'nalishning bosh yo'nalishbo'lishiniko'rsataylik.

Regulyarsirtuchun $P(u,v)$ nuqtadanikkita bosh yo'nalishlarningmavjudligidan (7) sistemaningikkitaturliildizlargaegabo'lishikelibchiqadi. Buning uchun qo'yidagitengliklarbajarilishikerak.

$L - K_n E = 0$, $M - K_n F = 0$, $N - K_n G = 0 \Rightarrow L = K_n E$, $M = K_n F$, $N = K_n G$ U holda $K_n = const$ bo'lishinianiqlanadi.

SHunday qilib, sirtning P nuqtasidagi normal egriligi o'zgarmas miqdor bo'lib, yo'nalishga bog'liq bo'lmaydi, ya'ni ixtiyoriy yo'nalish bosh yo'nalishga aylanadi.

Sirtning bunday nuqtasi yoki sirtning zichlanish nuqtasi (har qanday yo'nalish uchun $K_n = 0$), yoki uning dumaloqlanish(ombilik)nuqtasi $K_n > 0$ bo'lishi mumkin. Ombilik nuqtada bosh yo'nalishlar aniqmas bo'ladi.

Masalan: Tekislikning barcha nuqtalari zichlanish nuqtalar bo'lib, sferaning nuqtalari esa ombilik nuqtalardan iborat bo'ladi.

$M - K_n F = 0 \Rightarrow$ agar $F = 0$, bo'lsa, u holda $M = 0$ bo'lib, sirtdagi bosh yo'nalishlar koordinat chiziqlarning yo'nalishi bilan ustma-ust tushadi.

Sirtning egrilik va asimtotik chiziqlari

Ta'rif: Har bir nuqtadagi urinmasining yo'nalishi sirtning shu nuqtasidagi bosh yo'nalishi bilan usma-ust tushuvchi sirtga tegishli chiziqqa uning egrilik chizig'i deb ataladi.

du va dv difrentsiallar bosh yo'nalish $(du:dv)$ ni aniqlashi uchun quyidagi ifodalarning o'rinliligi zaruriy va yetarli shartlar bo'lishini biz yuqoridagi mavzularda isbotladik.

$$(L - K_n E)du + (M - K_n F)dv = 0, (M - K_n F)du + (N - K_n G)dv = 0 \quad (1)$$

Bunda K_n -$(du:dv)$yo'nalishibo'yicha normal egrilik.

(1) ifodalardan $K_n$ni chiqarsak

$$\frac{Ldu + Mdv}{Edu + Fdv} = \frac{Mdu + Ndv}{Fdu + Gdv} (2)$$

yoki

$$(LF - ME)du^2 + (LG - NE)dudv + (MG - NF)dv^2 = 0 \quad (3)$$

kelib chiqadi. Bu tenglama $(du:dv)$ yo'nalishining bosh yo'nalish bo'lishi uchun zaruriy va yetarli shartdir. (3) ni quyidagi simmetrik shaklda ifodalash mumkin.

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \quad (4)$$

(4) egrilik chiziq uchun differentsial tenglamadir. Sirtning $P(u,v)$ nuqtasidagi birilik

normal vektori uchun $\vec{n}^2 = 1$ dan $(\vec{n}\vec{n}_u') = 0$, $(\vec{n}\vec{n}_v' = 0) \Rightarrow \vec{n}_u$, $\vec{n}_v$ vektorlar R nuqtadagi urinma tekislikda bazis vektorlar ekanini e'tiborga olinsa

$$\vec{n}_u = \alpha\vec{r}_u + \beta\vec{r}_v, \quad \vec{n}_v = \gamma\vec{r}_u + \delta\vec{r}_v \qquad (5)$$

kelib chiqadi .

(5) ni $\vec{r}_u'$ va $\vec{r}_v'$ vektorlarga skalyar ko'paytirib, L, M, N, E, F, G lar uchun belgilashlar asosida

$$-L = \alpha E + \beta F, \quad -M = \gamma E + \delta F \qquad (6)$$
$$-M = \alpha F + \beta G, \quad -N = \gamma F + \delta G$$

bog'lanishlarni aniqlaymiz. Sirtda koordinat chiziqlar sirt egri chiziqlari bilan ustma-ust tushsa

$$F = M = 0 \qquad (7)$$

zaruriy va yetarli shart bajariladi. U holda (6) dan

$$\alpha = -\frac{L}{E}, \quad \beta = \alpha = 0, \quad \delta = -\frac{N}{G} \quad (8)$$

$$K_n^1 = \frac{L}{E}, \quad K_n^2 = \frac{N}{G} \quad (9)$$

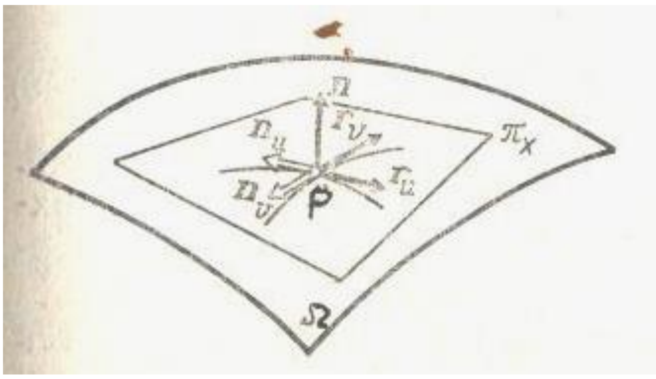
(8) va (9) dan

$$\alpha = -K_n^1, \quad \delta = -K_n^2 \qquad (10)$$

kelib chiqadi. SHunday qilib

$$\vec{n}_u' = -K_n^1\vec{r}_u', \quad \vec{n}_v' = -K_n^2\vec{r}_v' \qquad (11)$$

formulalarga ega bo'lamiz. Ushbu formulalardan Rodrig teoremasining isboti kelib chiqadi.



36-chizma

Rodrigteoremasi: Sirtvektori $\vec{r}(u,v)$vasirtningbirliknormalvektori $\vec{n}(u,v)$ larningboshyo'nalishlardagihosilalarikollinearbo'lib, proportsionallikkoeffitsientiboshnormalegriliklardanfaqatishorabilanfarq qiladi.

Ta'rif : Sirtdagibiror$(du:dv)$yo'nalishdaK_n normal egrilik nolgaaylansa,buholdaushbuyo'nalishniasimtotikyo'nalishdeyiladi.

Normal egrilikning

$K_n = \dfrac{Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2}{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}$ formuladan sirtning elliptik nuqtalarida asimptotik yo'nalishlarning mavjud emasligi , giperbolik nuqtalarda aniq ikkita asimptotik yo'nalishlarning mavjudligi, parabolik nuqtalarda ularning yagonaligi va zichlanish nuqtalardagi har qanday yo'nalishning asimptotik yo'nalish bo'lishi mumkinlig ini ko'rsatamiz.

Ta'rif: Sirtga qarashli biror chiziqning har bir nuqtasidagi urinma yo'nalishshi asimptotik yo'nalishi bo'lsa, bu holda ushbu chiziqni sirtning asimptotik chizig'i deb ataladi.

(12) difrentsial tenglama sirt asimptotik chizig'ining tenglamasi ekanini ko'ramiz.

Giperbolik nuqtalarda $LN - M^2 < 0$ asimptotik chiziqlar uchun sirtning koordinat chiziqlari olinsa, ularning har birini birinchi tartibli differentsial tenglamalarning integral chiziqlari kabi aniqlash mumkin. $(du;0)$ va $(0;dv)$ yo'nalishlarning asimptotik yo'nalishlar uchun olinsa. $L = N = 0$ kelib chiqadi. U holda

$$\varphi_2 = 2Mdudv$$

Xossalari

1) Sirtga to'g'ri chiziq qarashli bo'lsa , u shubhasiz asimptotik chiziq bo'ladi.

2) Asimtotik chiziqning har bir nuqtasidagi yopishma tekisligi sirtning shu nuqtasidagi urinma tekisligi bilan ustma-ust tushadi.

Isboti: $\varphi_2 = (d^2\vec{r}\vec{n}) = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0$

Misol: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ gelikoid ustidagi egrilik chiziqlarning tenglamasi yozilsin.

Yechish: $E = 1$, $F = 0$, $G = u^2 + a^2$, $\varphi_1 = ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$, $L = 0$, $N = 0$, $M = -\dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$, $\varphi_2 = -\dfrac{2a}{\sqrt{u^2 + a^2}}dudv$

E, F, G, L, M, N koeffitsientlarni quyidagi tenglamaga qo'yamiz.

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2 + a^2 \\ 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \frac{du^2}{\left(\sqrt{u^2 + a^2}\right)^2} - dv^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} - dv\right)\left(\frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} + dv\right) = 0 \Rightarrow \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) - v = C_1, \ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right) - v = C_2$$

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.

2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.

3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazorat savollari

1. Sirtning indikatrisa ta`rifini aytib bering.
2. Dyupen indikatrisasi qanday shart bajarilsa, u bir juft qo’shma giperbola ko’rinishida bo’ladi?
3. Sirtning indikatrisasi qachon ellipsdan iborat bo`ladi?
4. Dyupen indikatrisasi tushunchasi bilan egrilik indikatrisasi qanday hollarda ustma-ust tushadi?
5. Qanday yo`nalish sirtning bosh yo`nalishi deyiladi?
6. Qanday egrilik sirtning bosh egriligi deyiladi?

33-34.Gaus Bonne teoremasi. Egriligi o’zgarmas sirtlar

Reja :

1. O’rtavato’laegrilikta’rifi
2. O’rtavato’laegrilikformulasi
3. Aylanmasirtning φ_1 va φ_2 formalari
4. $K > 0$, $K < 0$ bo’lgansirtlar
5. Misollar

Mavzuningbayoni:

Regulyarsirtingberilgannuqtasidagi bosh egriliklari K_n^1, K_n^2 xisoblanganbo’lsin.

1-Ta’rif: Bosh egriligiyig’indisiningyarmigasirtningberilgannuqtasidagio’rtaegrilikdeyiladi.

2-Ta’rif: Bosh egriliklarning ko’paytmasiga sirtning berilgan nuqtasidagi to’la egriligi deyiladi.

O’rta egrilikni H orqali, to’la egrilikni K orqali belgilasak , ta’rifga ko’ra

$$H = \frac{1}{2}\left(K_n^1 + K_n^2\right), \quad K = K_n^1 K_n^2 \qquad (1)$$

formulalarni yozish mumkin. Sirtning berilgan nuqtasidagi bosh egriliklarni

$$K_n^1\left(EG - F^2\right) - K_n^2\left(EN - 2FM + GL\right) + LN - M^2 = 0 \, (2)$$

kvadrattenglamani yechishorqalitopiladi.

Kvadrattenglamaildizlarinixossalaridanfoydalansak

$$H = \frac{1}{2}\frac{EN - FM + GL}{EG - F^2} \qquad (3)$$

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \qquad (4)$$

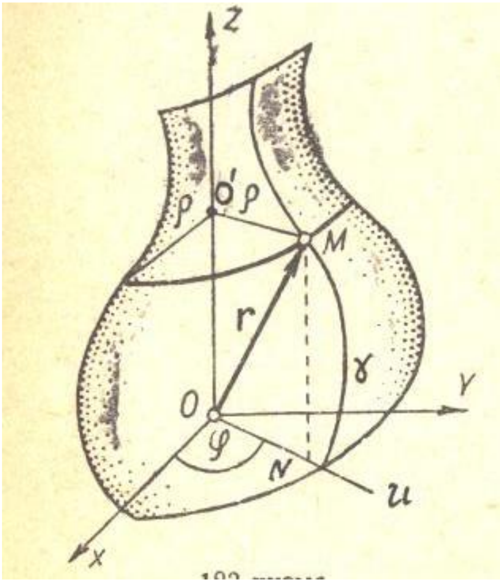
formulalaraniqlanadi. Eyler formulasidanfoydalansak

$$K_n(\varphi) = K_n^1 \cos^2\varphi + K_n^2 \sin^2\varphi \qquad (5)$$

$$H = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} K_n(\varphi)d\varphi \qquad (6)$$

kelib chiqadi. (1) va (4) formulalardan sirtning to'la egriligi K elliptik nuqtalarda musbat, giperbolik nuqtalarda manfiy ishorali qiymatlarga hamda sirtning parabolik va zichlanish nuqtalarida $K=0$ qiymatga erishadi. Ko'ramizki, K ningishorasisirtning φ_2 (ikkinchikvadratik forma) diskriminantibilanustma-usttushadi. Misol tariqasidaaylanmasirtningto'laegriliginingformulasinianiqlaylik.

Ta'rif: Tekischiziq $\gamma \in \Pi$ ningtekislikdagibiror a to'g'ri chiziqatrofidaaylanishdanhosilbo'lgansirtgaaylanmasirt, a to'g'ri chiziqni esa uning o'qi deyiladi.



37-chizma

O'q orqali o'tuvchi har qanday tekislik aylanma sirtning meridian bo'yincha kesib o'tadi.O'qqa perpendikulyar tekisliklarning sirt bilan kesishib hosil qilingan chiziqlarga parallellar deyiladi.

Sirtgaqarashlimeridianlarvaparallellar to'r tashkiletadi. Fazoda $OXYZ$ to'g'riburchaklidekartkoordinatalarsistemasinishundayo'rnataylikkiaylanmasirtning a o'qi OZ o'qbilanustma-usttushsin.

Π tekislikda OUZ koordinatalarsistemasinio'rnatamizvabusistemada $\gamma \in \Pi$ ningtenglamasi

$$z = f(u) \qquad (7)$$

bo'lsin.

$OU \in OXY < XOU = \varphi$ bo'lsin, $0 \le \varphi \le 2\pi, \gamma$ chiziqda ixtiyoriy M nuqta olamiz. M nuqta O' markazi OZ o'qda bo'lib, radiusi $O'M$ ga teng bo'lgan aylana chizadi.

$OXYZ$ sistemada M nuqta $M(x,y,z)$ koordinatalarga ega.

$$x = u\cos\varphi, \quad y = u\sin\varphi, \quad z = f(u) \qquad (8)$$

bunda $ON = u$, $MN = OO' = z$

$$\begin{Vmatrix} x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_\varphi & y'_\varphi & z'_\varphi \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & f'_u \\ -u\sin\varphi & u\cos\varphi & 0 \end{Vmatrix} \qquad (9)$$

(9) matritsaning rangi har qanday $M(u,\varphi)\in\Omega$ nuqtada ikkiga tengligidan Ω-sirtning silliq elementar sirt ekanligi kelib chiqadi. $\overrightarrow{OM} = \vec{r}(u_1\varphi)$ belgilaylik .

$$\vec{r} = u\cos\varphi\cdot\vec{i} + u\sin\varphi\cdot\vec{j} + f(u)\cdot\vec{k} \ (10)$$

$$\vec{r}'_u = \cos\varphi\cdot\vec{i} + \sin\varphi\cdot\vec{j} + f'(u)\cdot\vec{k} \ (11)$$

$$\vec{r}'_\varphi = -u\sin\varphi\cdot\vec{i} + u\cos\varphi\cdot\vec{j} \ (12)$$

$$E = \vec{r}_u'^2 = 1 + f'^2(u),\ F = 0,\ G = u^2 \ (13)$$

$$\varphi_1 = ds^2 = (1 + f'^2(u))du^2 + u^2dv^2 \ (14)$$

$$\vec{r}''_{uu} = f''(u)\cdot\vec{k}, \quad \vec{r}''_{\varphi\varphi} = -u\cos\varphi\cdot\vec{i} - u\sin\varphi\cdot\vec{j} \qquad (15)$$

$$L = (\vec{r}''_{uu}\vec{r}'_u\vec{r}'_\varphi) = \frac{uf''(u)}{u\sqrt{1+f'^2(u)}},\ M = 0,$$

$$N = (\vec{r}''_{\varphi\varphi}\vec{r}'_u\vec{r}'_\varphi) = \frac{u^2 f'(u)}{u\sqrt{1+f'^2(u)}} \ (16)$$

$$K = \frac{LN = M^2}{EG - F^2} = \frac{uf'(u)f''(u)}{(1+f'^2(u))} * \frac{1}{u^2(1+f'^2(u))} = \frac{f'(u)f''(u)}{u(1+f'^2(u))^2}$$

SHunday qilib

$$K = \frac{f'u(u)f''_{uu}(u)}{u(1+f'^2_u(u))^2} \qquad (17)$$

1-misol: Sferaning to’la egriligi aniqlansin. Yechish: Π tekislikdagi meridian(aylana) tenglamasini

$$z^2 + u^2 = a^2$$

ko’rinishdaolamiz. (a-radius) $z > 0$ da yarimaylanatenglamasiuchun

$$f(u) = z = \sqrt{a^2 - u^2} \qquad (18)$$

ifodagaegamiz.

$$f'_u(u) = -\frac{u}{\sqrt{a^2-u^2}}, \quad f''_{uu}(u) = -\frac{a^2}{(a^2-u^2)^{\frac{3}{2}}} \qquad (19)$$

---

(17) ga (19) niqo’yib

$$K = \frac{1}{a^2} \ (20)$$

ga ega bo’lamiz.

2-misol: Psevdosferaning to’la egriligi aniqlansin.

Echish: Traktrisaning (OZ) bazasi atrofida aylanishidan psevdosfera hosil bo’ladi.

Traktrisa

$$z = a\left(\ln tg\frac{t}{z} + \cos t\right), u = a\sin t \qquad (21)$$

$$z'_t = \frac{a\cos^2 t}{\sin t}, u'_t = a\cos t \Rightarrow f'(u) = \frac{z'_t}{u'_t}ctgt, \ (t \neq \frac{\pi}{2}) \quad (22)$$

$$f''_{uu} = \frac{df'_u(u)}{du} = \frac{\frac{d}{dt}f'(t)}{u'_t} = -\frac{1}{a\sin^2 t\cos t} \qquad (23)$$

(17) dan (22) va (23) orqali (24) kelib chiqadi. Demak, sfera $K>0$ sirtgamisolbo'lsa, psevdosfera $K<0$ sirtgamisolbo'laoladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazorat savollari

1. Qanday egrilik sirtning o`rta egriligi deyiladi?
2. Qanday egrilik sirtning to`la egriligi deyiladi?
3. Sirtning to`la egrilik formulasini keltiring.
4. Sirtning o`rta egrilik formulasini keltirng.
5. Qanday chiziq sirtning egrilik chizig`i deb ataladi?
6. Qanday chiziq sirtning asimptotik chizig`i deyiladi?
7. Aylanma sirt formulalarini keltiring.

25.Sirtlariningasosiy tenglamalar

Reja:

1. φ_1 va φ_2 formalarvasirtlarorasidagibog'lanish
2. Derivatsionformulalar
3. Koeffitsientlaruchunifodalar

Mavzuning bayoni:

Fazoviy chiziqlar uchun frene formulalariga o'xshash regulyar sirtlar uchun muhim formulalar mavjud. Sirt berilgan bo'lsa, uning φ_1 va φ_2 formalarini hisoblash mumkin .Biz bu ish bilan yuqoridagi mavzularda shug'ullandik. Agar φ_1 va φ_2 formalar oldindan ma'lum bo'lsa, qanday shart bajarilganda ular fazoda biror sirtni aniqlashini ko'rsatish lozim.

$$\varphi_1 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 \qquad (1)$$

$$\varphi_2 = Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 \qquad (2)$$

kvadratik formalar berilgan bo’lsin.Birdan-bir sirt mavjud bo’lib , uning $\varphi_1 ва \varphi_2$ formalari berilgan (1) va (2) formalardan iborat bo’lishishni ko’rsatish lozim.

Ω -regulyar sirt

$$\vec{r} = \vec{r}(u,v) \qquad (3)$$

ko’rinishda ifodalangan bo’lib, $\vec{r}(u,v)$ funktsiya ikki marta uzluksiz differentsiallanuvchi bo’lsin. Ω sirtning har birnuqtasida r'_u, r'_v va $\dfrac{[\vec{r}'_u\vec{r}'_v]}{|[\vec{r}'_u\vec{r}'_v]|} = \vec{n}$ vektorlarchiziqlierklisistematashkiletadi. Fazoningharqandayvektorini r'_u, r'_v va $\vec{n}$ vektorlarorqalichiziqliifodaetishmumkin. Jumladan, $\vec{r}''_{uu}$, $\vec{r}''_{vv}$, $\vec{r}''_{uv}$, $\vec{n}'_u$ va $\vec{n}'_v$ larnichiziqlierklivektorlaruchligiorqaliifodalashimizlozim.

Quyidagilar o’rinli bo’lsin.

$$\vec{r}''_{uu} = \Gamma^1_{11}\vec{r}'_u + \Gamma^2_{11}\vec{r}'_v + \lambda\vec{n},$$
$$\vec{r}''_{uv} = \Gamma^1_{12}\vec{r}'_u + \Gamma^2_{12}\vec{r}'_v + \mu\vec{n},$$
$$\vec{r}''_{vv} = \Gamma^1_{22}\vec{r}'_u + \Gamma^2_{22}\vec{r}'_v + v\vec{n} \qquad (4)$$
$$\vec{n}'_u = \alpha_{11}\vec{r}'_u + \alpha_{12}\vec{r}'_v + \alpha_{13}\vec{n},$$
$$\vec{n}'_v = \alpha_{21}\vec{r}'_u + \alpha_{22}\vec{r}'_v + \alpha_{23}\vec{n}$$

Bunda Γ^k_{ij} , α_{ij}, va λ, μ, v aniqlashimiz lozim bo’lgan koeffitsientlar $(i, j = 1, 2)$ bog’lanish koeffitsientlarini φ_1 va φ_2 orqali ifodalashimiz lozim. Ma’lumki

$$\vec{r}_u^{\,2} = E, \ (\vec{r}'_u\vec{r}'_v) = F, \ \vec{r}'_v = G \qquad (5)$$
$$(\vec{r}''_{uu}\vec{n}) = L, \ (\vec{r}''_{uv}\vec{n}) = M, \ (\vec{r}''_{vv}\vec{n}) = N \qquad (6)$$
$$-(\vec{r}'_u\vec{n}'_u) = L, \ -(-\vec{r}'_u\vec{n}'_v) = -(\vec{r}'_v\vec{n}'_v) = M, \ -(\vec{r}'_v\vec{n}'_v) = N \qquad (7)$$

(4) formulalarning chap va o’ng qismini $\vec{n}$ ga skalyar ko’paytirib $(\vec{r}'_u\vec{n}) = 0$ $(\vec{r}'_v\vec{n}) = 0$ va (5), (6), (7) larni e’tiborga olinsa

$$\lambda = L, \quad \mu = M, \quad \nu = N \qquad (8)$$

kelib chiqida. Endi (4) dagi $\vec{r}''_{uu}$, $\vec{r}''_{vv}$, $\vec{r}''_{uv}$ vektorlarni r'_u, r'_v vektorlarga skalyar ko’paytirib (5) ni e’tiborga olinsa

$$(\vec{r}''_{uv}\vec{r}'_u) = \Gamma^1_{11}E + \Gamma^2_{11}F, \quad (\vec{r}''_{uu}\vec{r}'_v) = \Gamma^1_{11}F + \Gamma^2_{11}G \qquad (9)$$

hosil qilinadi. (4) dan

$$(\vec{r}''_{uu}\vec{r}'_u) = \frac{1}{2}E'_u, \ (\vec{r}''_{uu}\vec{r}'_v) = F'_u - \frac{1}{2}E'_v \qquad (10)$$

shuningdek (4) dan

$$(\vec{r}'_{uu}\vec{r}'_v) + (\vec{r}'_u\vec{r}''_{uv}) = F'_u, \quad 2(\vec{r}''_{uv}\vec{r}'_u) = E'_v \qquad (11)$$

munosabatlarkelibchiqadi. $(\vec{r}''_{uv}\vec{r}'_u)$ nichiqarsak

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}E'_u - F'_u F + \frac{1}{2}E'_v F\right)(12)$$

bunda

$\gamma = EG - F^2$ (13)

SHuningdek

$$\Gamma_{12}^{1} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}E'_v G - \frac{1}{2}G'_u F\right)$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{1}{\gamma}\left(\frac{1}{2}G'_u E - \frac{1}{2}E'_v F\right) \qquad (14)$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{1}{\gamma}\left(-\frac{1}{2}G'_u G + F'_v G - \frac{1}{2}G'_v F\right)$$

Γ_{ij}^{k} -koeffitsientlarni Xristofel simvollari deyiladi. $\vec{n}^2 = 1$ ni u va v parametrlar bo'yicha differentsiallab $(\vec{n}'_u \vec{n}) = (\vec{n}'_v \vec{n}) = 0$ ni e'tiborga olsak , $\vec{n}'_u$ va $\vec{n}'_v$ larning urinma tekislikka parallelligidan (4) dan $\alpha_{13} = \alpha_{23} = 0$ ga erishamiz. $\vec{n}'_u = \alpha_{11}\vec{r}'_u + \alpha_{12}\vec{r}'_v$ tenglikning chap va o'ng qismini r'_u va r'_v ga ketma-ket ko'paytirib (6), (7) ni e'tiborga olinsa $-L = \alpha_{11}E + \alpha_{12}F, -M = \alpha_{11}F + \alpha_{12}G \Rightarrow \alpha_{11} = \frac{MF - LG}{\gamma}$, $\alpha_{12} = \frac{LF - ME}{\gamma}$

(15) SHuningdek $\vec{n}''_v = \alpha_{11}\vec{r}'_u + \alpha_{12}\vec{r}'_v$ dan

$$\alpha_{21} = \frac{NF - MG}{\gamma}, \ \alpha_{22} = \frac{MF - NE}{\gamma} \qquad (16)$$

SHunday qilib, barcha koeffitsientlar φ_1 va φ_2 forma koeffitsientlari va ularning hosilalari orqali ifoda qilindi. (4) ni sirtlar uchun derivatsion (asosiy) tenglamalar deyiladi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazorat savollari

1. Sirtlar nazariyasining asosiy teoremalarini aytib bering.
2. Sirtning birinchi va ikkinchi kvadratik formalari va sirtlar orasidagi bog'lanish ko`rsatib bering.
3. Derivatsion formulalarini keltiring.
4. Xristofel simvollariniqanday formula orqaliifodalanadi?
5. Agar φ_1 va φ_2 formalar oldindan ma'lum bo'lsa, qanday shart bajarilganda ular fazoda biror sirtni aniqlaydi?

27.Sirtning ichki geometriyasi. Sirtning to'la va geodezik egriligi

Reja:

1.Sirt ichki geometriyasi tushunchasi

2. Sirtning Gauss egriligi ichki geometriya ob'ekti

3. Geodezik egrilik ichki geometriya ob'ekti

Mavzuning bayoni:

Ta'rif: Sirtning ichki geomentriyasi deb, sirtga qarashli chiziq uzunligiga bog'liq xossalarini o'rganuvchi geometriya bo'limiga aytiladi. Regulyar sirtlar uchun uning birinchi kvadratik formasi shu sirtga qarashli chiziq uzunligi , chiziqlar tashkil etgan burchak va sirt sohasining yuzini hisoblash imkonini beradi. Bir xildagi chiziqli element (φ_1) ga ega bo'lgan ikki sirt bir xildagi ichki geometriyaga ega. Bunday sirtlarni izometrik deyiladi. Sirtlardan birini deformatsiyalash (egish) orqali ikkinchisini hosil qilish mumkin. Bunda ichki geometriya o'zgarmaydi. Sirt ichki geometriyasi ob'ektlaridan biri uning Gauss egriligidir.

$$K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} \quad (1)$$

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x''_{uu} & y''_{uu} & z''_{uu} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad N = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x''_{vv} & y''_{vv} & z''_{vv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} (2) \quad M = \frac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\begin{vmatrix} x''_{uv} & y''_{uv} & z''_{uv} \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}$$

(3)

ifodalarniqaraylik . (2) va (3) dan

$$LN = \frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} (\vec r''_{uu}\vec r''_{vv}) & (\vec r''_{uu}\vec r'_u) & (\vec r''_{uu}\vec r'_v) \\ (\vec r'_u\vec r''_{uv}) & E & F \\ (\vec r'_v\vec r''_{uv}) & F & G \end{vmatrix} \qquad (4)$$

$$M^2 = \frac{1}{EG-F^2}\begin{vmatrix} (\vec r''_{vv})^2 & (\vec r''_{uv}\vec r'_u) & (\vec r''_{uv}\vec r'_v) \\ (\vec r'_u\vec r''_{uv}) & E & F \\ (\vec r'_v\vec r''_{uv}) & F & G \end{vmatrix} \qquad (5)$$

(4) va (5) dan

$$K = \frac{1}{EG-F^2}\left\{\begin{vmatrix} (\vec r''_{uu}\vec r''_{vv}) - \vec r''^2_{uv} & (\vec r''_{uu}\vec r'_u) & (\vec r''_{uu}\vec r'_v) \\ (\vec r'_u\vec r''_{vv}) & E & F \\ (\vec r'_v\vec r''_{vv}) & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & (\vec r''_{uv}\vec r'_u) & (\vec r''_{uv}\vec r'_v) \\ (\vec r'_u\vec r''_{uv}) & E & F \\ (\vec r'_v\vec r''_{uv}) & F & G \end{vmatrix}\right\} \qquad (6)$$

$$(\vec r''_{uu}\vec r'_u) = \frac{1}{2}E'_u, \quad (\vec r''_{uv}\vec r'_v) = \frac{1}{2}G'_u, \quad (\vec r''_{uv}\vec r'_u) = \frac{1}{2}E'_v, \quad (\vec r''_{uu}\vec r'_v) = F'_u - \frac{1}{2}E'_v, \quad (\vec r''_{vv}\vec r'_v) = \frac{1}{2}G'_v,$$

$$(\vec r''_{vv}\vec r'_u) = F'_v - \frac{1}{2}G'_u, \quad (\vec r''_{uu}\vec r''_{vv}) - \vec r''^2_{uv} = -\frac{1}{2}G''_{uu} + F''_{uv} - \frac{1}{2}E''_{vv} \qquad (7)$$

(6) ga (7)ni qo'ysak

$$K=\frac{1}{(EG-F^2)^2}\left\{\begin{vmatrix}\left(-\frac{1}{2}G''_{uu}+F''_{uv}-\frac{1}{2}F''_{vv}\right) & \frac{1}{2}E'_u & \left(F'_u-\frac{1}{2}E'_v\right)\\ \left(F'_v-\frac{1}{2}G'_u\right) & E & F\\ \frac{1}{2}G'_v & F & G\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}0 & \frac{1}{2}E'_v & \frac{1}{2}G'_u\\ \frac{1}{2}E'_v & E & F\\ \frac{1}{2}G'_u & F & G\end{vmatrix}\right\} \quad (8)$$

(8) ni , ya'ni K ni E, F, G miqdorlar va ularning hosilalari orqali ifodalash mumkinligini birinchi marta nemis matematigi Karl Fridrix Gauss isbotladi. Agar sirtnig φ_1 formasi

$$ds^2=Edu^2+Gdv^2 \quad (9)$$

ko'rinishda bo'lsa,

$$K=-\frac{1}{\sqrt{G}}(\sqrt{G})''_{uu} \quad (10)$$

formulani keltirib chiqirish mumkin. Sirt ichki geometriyasi ob'ektlaridan yana biri uning geodezik egriligidir. Sirtning φ_2 formasi mavzusida geodezik egrilikka ta'rif berib uning formulasini

$$K_g=K_1(\vec{v}\,\vec{\tau}\vec{n}) \quad (11)$$

ko'rinishda tasvirlandi, bunda $\vec{\tau}$ $\gamma\in\Omega$ chiziq urinmasining yo'naltiruvchi birlik vektori, $\vec{v}$ bosh normalning birlik vektori , $\vec{n}$ esa sirt normalining birlik vektori. $\vec{\tau}(s)$, $\vec{v}(s)$ vektorlarni $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektor hosilalari orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham

$$\vec{\tau}=\frac{d\vec{r}}{ds}=\frac{\vec{r}_t'}{|\vec{r}_t|},\quad \vec{v}=\frac{d^2\vec{r}}{ds^2}=\vec{r}''_{tt}\frac{1}{(\vec{r}_t')^2}-\vec{r}_t'\frac{(\vec{r}''_{tt}\vec{r}_t')}{|\vec{r}_t|^4} \quad (12)$$

(11) dan (12) yordamida

$$K_g=\frac{1}{|\vec{r}_t|^3}(\vec{r}''_{tt}\vec{r}_t'\vec{n}) \quad (13)$$

kelib chiqadi.

$$\vec{r}_t'=\vec{r}_u'u_t'+\vec{r}_v'v_t' \quad (14)$$

$$\vec{r}''_{tt}=\vec{r}''_{uu}(u_t')^2+2\vec{r}''_{uv}u_t'v_t'+\vec{r}''_{vv}(v_t')^2+\vec{r}_u'u''_{tt}+\vec{r}_v'v''_{tt} \quad (15)$$

(15) ga derivatsion formulalarni qo'llaymiz.

$$\vec{r}''_{tt}=(u''_{tt}+A)\vec{r}_u'+(v''_{tt}+B)\vec{r}_v'+C\vec{n} \quad (16)$$

Bunda

$$\begin{aligned}A&=\Gamma^1_{11}(u_t')^2+\Gamma^1_{12}u_t'v_t'+\Gamma^1_{22}(v_t')^2\\ B&=\Gamma^2_{11}(u_t')^2+\Gamma^2_{12}u_t'v_t'+\Gamma^2_{22}(v_t')^2\\ C&=L(u_t')^2+Mu_t'v_t'+N(v_t')^2\end{aligned} \quad (17)$$

(14) va (16) ni (13) gaqo'yamiz.

$$K_g = \left[(u''_{tt} + A)v'_t - (v''_{tt} + B)u'_t\right]\frac{(\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'\vec{n})}{|\vec{r}_t|^3} \qquad (18)$$

$$|\vec{r}_t| = \sqrt{E(u'_t)^2 + 2Fu'_tv'_t + G(v'_t)^2} \qquad (19)$$

$$(\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}'\vec{n}) = \left|[\vec{r}_u{}'\vec{r}_v{}']\right| = \sqrt{EG - F^2} \qquad (20)$$

(19) va (20) ni (18) ga qo'yamiz.

$$K_g = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{E(u'_t)^2 + 2Fu'_tv'_t + G(v'_t)^2}} \qquad (21)$$

$$\left\{\left(u''_{tt} + \Gamma_{11}^1(u'_t)^2 + \Gamma_{12}^1u'_tv'_t + \Gamma_{22}^1(v'_t)^2\right)v'_t - \left(v''_{tt} + \Gamma_{11}^2(u'_t)^2 + \Gamma_{12}^2u'_tv'_t + \Gamma_{22}^2(v'_t)^2\right)u'_t\right\}$$

Ko'ramizki , K_g Xristofel simvollari yordamida ifodalangan bo'lib φ_1 forma koeffitsientlari orqali aniqlash mumkin . Bundan K_g sirt ichki geometriyasi ob'ekti ekani kelib chiqadi.

Foydalanilgan adabiyotlar

1. Wilhelm Klingenberg, A Course in differential geometry,1978 by Springer-Verlag, New York Inc. Printed in the United States of America.
2. M.A.Arstrong, Basic Tpology, Springer, 1998 y.
3. Narmanov A.Ya. Differentsial geometriya. T. Turon-Iqbol, 2016y.

Nazorat savollari

1. Sirt ichki geometriyasi tushunchasini aytib bering.
2. Sirtning qanday egriligi Gaus egriligi deyiladi?
3. Qandayegriliksirtninggeodezikegriligideyiladi?
4. Qandaychiziqlarsirtninggeodezikchiziqlarideyiladi?
5. Gauss- Bonneteoremasiniaytibbering.
6. Ichkigeometriyaob'ektlarini sanab bering.