SAMARQAND DALAT UNIVERSITETI

FIZIKA FAKULTETI

NAZARIY FIZIKA VA KVANT ELEKTRONIKASI KAFEDRASI

SAYDULLAYEV USMONALI JURAYEVICH

«NAZARIY MEXANIKA»
MA’RUZA MATNI

(«5140200-Fizika » ta’lim yo’nalishi talabalari uchun)

Samarqand - 2013

Saydullayev U. «Nazariy mexanika» фанидан ma'ruza matni (барча бакалавриат йўналишлари учун). Ўқув-услубий мажмуа. – Самарқанд: 2013 йил.

«**Nazariy mexanika**» fanidan ushbu ma'ruza matni Samarqand davlat unversiteti fizika fakultetining «nazariy fizika va kvant elektronikasi» kafedrasida tayyorlangan. Majmua « **Nazariy mexanika**» fanini o'rganish jarayonida talabalarning mustaqil ishlashini ta'minlovchi o'quv-uslubiy materiallarni o'z ichiga oladi hamda olgan bilimining sifatini doimo nazorat qilishni ta'minlaydi.

Ushbu o'quv-uslubiy majmua « **Nazariy mexanika**» fani o'quv rejaga kiritilgan barcha bakalavriat yo'nalishlari uchun mo'ljallangan.

Taqrizchilar:

Xaydarov X. – SamDU, nazariy fizika va kvant elektronikasi kafedrasi dosenti, f.-m.f.n.

Xolyarov E.Ch. – SamDAQI, fizika va matematika kafedrasi dosenti, f.-m.f.n

__1-ma'ruva:__ KIRISH. NAZARIY MEXANIKASI FANINING PREDMETI.

REJA:

- *Nazariy mexanika fanining tadqiqot obyektlari*
- *Fanning rivojlanish tarixi*
- *Fazo va vaqt haqida klassik tasavvurlar*
- *Fizik hodisalarning turli sanoq tizimlarida invariantligi*
- *Moddiy nuqta dinamikasi.*
- *Fizik hodisalarning turli sanoq sistemalarida invariantligi va ularning matematik ifodasi.*

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: mexanika, jism, kuch momenti, dinamika, harakat, masofa, tezlik, tezlanish, ta'sir, vaqt, fazo, hodisalar, og'irlik markazi, koordinata, tizim, sferik, silindrik, harakat, tezlik, tezlanish, differesial, vaqt, nuqta, vector, tenglama, radius-vektor

Nazariy mexanika nazariy fizika kursida dastlabki biz o'rganadigan fan hisoblanadi. Bundan ko'rinib turibdiki, klassik mexanika va uning tadqiqot usullari fizikaviy tabiatdan qat'iy nazar juda ko'plab tabiat hodisalarini o'rganish imkoniyatini beradi. Nazariy mexanika jismlarning nisbatan kichik tezliklardagi mexanik harakatlarini o'rganadi. Nazariy mexanika fanini rivojlanish tarixini uch davrga bo'lishimiz mumkin. 1-qadimiy davr mexanikasi – Aristotel' davridan XVI asrgacha bo'lgan davr. 2- uyg'onish davri XVI asrdan XX boshigacha bo'lgan davr. 3 – XX asr mexanikasi –hozirgi davrgacha bo'lgan davr.

Statiskani fan sifatida asoslagan olim Arximed hisoblanadi. Arximed richagni muvozanati to'g'risidagi masalani yechib og'irlik markazi to'g'risidagi ta'limotni yaratdi. O'rta asrlarda arab mamlakatlarida va O'rta Osiyoda yashagan Beruniy, Al-Xorazmiy, Ibn Kubro va Ulug'bek kabi asosan matematika, astronomiya va qisman mexkanika sohasida tadqiqotlar olib borgan. 15 asrning 2-yarmini boshlarida hunarmandchilik dengizida suzish rivojlanish bilan bir qatorda mexakanika tez suratlar bilan taraqqiyot etgan. Bu suratda L. Davinchi mexkanika masalalarini yechishga, matematikani tadbiq qilishga tajribaga katta ahamiyat bergan. U jismlarning tekislik bo'ylab harakatini va sirpanib ishqalanishni tadbiq etdi. Shuningdek, kuch momenti tushunchasini birinchi bo'lib fanga kiritdi. Italyan olimi Galiley dinamikaning moddiy jismlar harakati haqidagi bilimning asoschisidir. To'g'ri chiziq bo'ylab notekis, ilgarilanma harakat qilayotgan jismning tezligi va tezlanishi tushunchasini birinchi bo'lib, Galiley kiritdi. Bundan tashqari inersiya qonunini kashf yetdi. Galiley ishlariga tayangan holda Golland olimi Gyuygen fizik mayatnik nazariyasini yaratdi. Shuningdek, Galiley kiritgan tezlanish tushunchasini nuqtaning egri chiziqli harakat uchun umumlashtiradi. Dinamikaning asosiy qonunlarini o'rganish sohasida Galiley boshlagan ishlarni ingliz olimi Isaak Nyuton uni g'oyalari va klassik mexanikaning asosiy g'oyalari fazo, vaqt, massa, kuch, inersiya, sanoq sistemasi haqidagi asosiy qonunlarni o'rganish sohasida ko'p ishlar qilgan. Bu asosiy qonunlar Nyuton "Natural falsafasining matematik ifodasi" nomli asarida bayon etilgan (1687 yil) va u klassik mexanikaning asosini tashkil etadi. Bizga ma'lumki, mexanikaviy harakat har qanday fizik jarayon va hodisaga ma’lum darajada tegishli “Bunday harakatning” umumiy qonunlarini o’rganuvchi klassik mexanika, nazariy fizikaning boshqa bo’limlari elektrodinamika kvant mexanika, statistik fizika, fizik nazariya, avto-jism fizikasi, yarim o’tkazgichlar fizikasi, plazma fizikasi va hokazo fanlar bilan uzviy bog’lanishdadir. Klassik mexanika masalalarini hal etishdan iborat va sinab ko’rilgan ko’plab matematik metodlar. Hozirgi kunda nazariy fizikaning barcha sohalarida keng qo’llanilmoqda. Nyuton nazariyasiga ko’ra tabiatdagi har qanday o’zaro ta’sir bir onda uzatiladi, boshqacha aytganda jismlar orasidagi o’zaro ta’sir chegaralanmagan yoki cheksiz tezlik bilan tarqaladi.

Bir-biridan ma’lum r_{12} masofada turib ta’sirlashayotgan jismni ko’z oldimizga keltiraylik. Faraz qilaylik 1-jism o’z vaziyatini o’zgartirib yangi vaziyatga o’tdi. Agar bu jism o’zgarmas tezlik bilan harakatlanganda uning vaziyatini o’zgartirish uchun ketgan vaqt quyidagicha topiladi:

$$\Delta t = \frac{|\vec{r}_{1'2} - \vec{r}_{12}|}{v} \qquad (1)$$

$$\Delta t_{yp} = \frac{|\vec{r}_{1'2} - \vec{r}_{12}|}{c} \qquad (2)$$

c -o’zaro ta’sirning tarqalish tezligi. Xuddi shu vaziyat o’zgarishini ikkinchi jism $\Delta t_{o'r}$ vaqtdan keyin his qiladi. O’zaro ta’sir tarqalish vaqtining jism vaziyatining o’zgarish vaqtiga nisbati tezligi

$$\frac{\Delta t_{o'r}}{\Delta t} = \frac{v}{c} \qquad (3)$$

Ko’rinib turibdiki, jismning harakat tezligi o’zaro ta’sirlarning tarqalish tezligiga nisbatan e’tiborga olmasa bo’ladigan darajada kichik bo’lsa juda katta aniqlik Bilan jismlar orasidagi o’zaro ta’sir bir onda uzatiladi deb hisoblash mumkin. Har qanday fizik nazariya singari klassik mexanika ham aniq tadbik qilish chegarasiga yega. Tezligi yorug’likning bo’shliqdagi tezligiga yaqin $v < c$ bo’lgan jismlar harakati shuningdek, alohida atomlar, elektronlar va atom yadrosi va boshqa elementar zarralar harakatini klassik mexanika ifodalay olmaydi. Tezligi yorug’lik tezligiga yaqin jismlar harakatini maxsus nisbiylik nazariyasi postulatiga tayanuvchi relyativistik mexanika o’rganadi. Shunday qilib klassik mexanika makrojismlar yetarli kichik tezliklar bilan bo’ladigan harakatlari nazariyasidan iborat, ya’ni klassik mexanika bu makroskopik jismlar harakati norelyativistik nazariyasidir. Klassik mexanikani relyativistik mexanika bilan norelyativistik kvant mexnikasining xususiy holi deb qarash mumkin.

Real jismlarning harakati turli tuman va murakkab bo’lganligi tufayli ularni o’rganishni osonlashtirish maqsadida abstrakt tushunchalar kiritilgan. Bunday obyektlar sifatida moddiy nuqta, moddiy nuqtalar sistemasi, absolyut qattiq jism, yaxlit muxit kabilar keltirish mumkin.

<u>Moddiy nuqta</u> deganda harakatning muayyan sharoitlarida o’lchamlari hisobga olinmaydigan jismdir.

Moddiy nuqtaning vaziyati va harakati boshqa moddiy nuqtalar vaziyati va harakatidan bog’liq bo’lgan moddiy nuqtalar to’plamiga – moddiy nuqtalar sistemasi yoki mexanik sistema deyiladi. Yoki boshqacha aytganda moddiy nuqtalar sistemasi - har birini moddiy nuqta deb qarash mumkin bo'lgan nuqtalar to'plami. Masalan, Quyosh sistemasi.

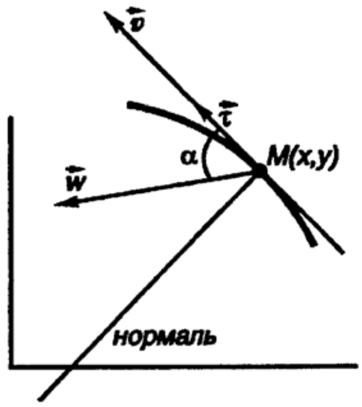
O'zining harakati davomida istalgan ikki nuqtasi orasidagi masofa o'zgarmasdan qoladigan sistema absolyut qattiq jism deb qabul qilingan. Tabiatda uchraydigan har qanday moddiy jismlar atom va molekulalardan tashkil topgan bo'lib, ular diskret strukturaga ega. Ammo masalani soddalashtirish maqsadida u yaxlit muhit deb qaraladi. Tekshiriluvchi obyektlarga bog'liq holda klassik mexanika moddiy nuqta va moddiy nuqtalar sistemasi mexanikasi, absolyut qattiq jism mexanikasi, yaxlit muhit mexanikasiga bo'linadi. O'z navbatida yaxlit muhit mexanikasi elastiklik nazariyasi, gidro va aerodinamikaga bo'linadi. O'rganilayotgan masalalar xarakteriga ko'ra esa klassik mexanika kinematika, dinamika, statika bo'limlaridan iborat.

Fazo va vaqt haqidagi klassik tasavvurlar

Fazo va vaqt haqidagi klassik tasavvurlar birinchi bor N'yuton tomonidan aniq ko'rinishda ifodalangan. Bunda fazo va vaqtni obyektiv mavjudligi tan olinadi. Ammo ular bir-biridan va harakatlanuvchi materiyadan ajralgan holda mavjud bo'lib qoladi. Moddiy jismlar harakati va maydonlarda yuz beruvchi jarayonlar fazo vaqtning xususiyatlariga mutlaqo ta'sir yetmaydi. Klassik mexanikada fazo ham vaqt ham absolyut deb qaraladi. Klassik mexanikada fazo hamma yerda uzluksiz, bir jinsli va izotrop deb hisoblanib, uning metrik xususiyatlari Yevklid geometriyasining aksiomalari orqali to'liq ifodalanadi. Vaqt esa fazoning hamma nuqtalari uchun bir xil universal kattalik hisoblanib, hamma yerda bir tekis o'tadi va fazo singari uzluksiz va bir jinsli deb qaraladi.

Moddiy nuqta yoki jismlar harakatini tekshirishda sanoq sitemasidan foydalaniladi. Klassik mexanikada absolyut qattiq jism bilan bog'langan koordinatalar sistemasi va unga biriktirilgan soat, uzunlik va vaqt etalonlari birgalikda sanoq sistemasini tashkil yetadi. Fazo bir jinsli va izotrop bo'lganligi uchun uning xossalari hamma nuqtalari va barcha yo'nalishlari bo'yicha bir xil.

Vaqt o'tishi bilan jismning fazodagi vaziyatining o'zgarishiga mexanik harakat deb ataladi. Ta'rifdan ko'rinib turibdiki har qanday mexanik harakatni bir qiymatda o'rganish uchun, birinchidan jismni biror shartli ravishda tanlab olingan sanoq sistemasiga vaziyatini aniqlash lozim. Ikkinchidan vaqtni o'lchash uchun bizga biror davriy jarayon bo'lishi lozim. Yuqoridagi mulohazalarga ko'ra ayni bir jism harakatini yoki biror bir tabiat hodisasini o'rganish uchun uning qachon va qayerda sodir bo'lishligini bilish lozim. Odatda istalgan jismni harakatini r radius-vektorga ega bo'lgan va t vaqtda sodir bo'lganligini bilish uchun quyidagi yozuvni qabul qilamiz: $M(x, y, z)$ $M(r,t)$.



$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr'^2$$

$$dr^2 = dr'^2$$

Ikki nuqta orasidagi masofa istalgan vaqt momentida barcha sanoq sistemalarida bir xil. Fazo va vaqt haqidagi fikrlarga asosan klassik mexanikada quyidagi postulatlar mavjud.

1. Klassik mexanikada makroskopik jismlarning harakatini xarakterlovchi fizik kattaliklarni bir vaqtda xohlagancha aniqlik Bilan o'lchash mumkin deb hisoblanadi.
2. Har qanday ikki nuqtaning berilgan vaqt momentidagi holatlari orasidagi masofa barcha sanoq sistemalarida bir xil.

$$dr^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr'^2 = inv \qquad (4)$$

3. Yevklid fazosi. Har qanday hodisaning davom yetish muddati barcha sanoq sistemalarida bir xil. $\Delta t = \Delta t' = inv$

So'nggi postulatdan klassik mexanikada bir vaqtlilik ham absolyut xarakterga ega ekanligi kelib chiqadi. Bu postulatlar asosida fazo, vaqt va harakatdagi materiya bir-biridan ajralgan holda mavjud va o'zaro ta'sir cheksiz tezlik bilan bir onda uzatiladi degan klassik tasavvur yotadi. **A.Eynshteynning 1905 yilda yaratgan maxsus nisbiylik nazariyasiga** ko'ra o'zaro ta'sirning tarqalish tezligi chegaralangan va u yorug'likning bo'shliqdagi tezligiga tengligi aniqlandi. Maxsus nisbiylik nazariyasi bir-biriga va harakatdagi moddiy jismlarga bog'liq bo'lsagan absolyut fazo va vaqt mavjud emasligini balki jismlar harakatiga bog'liq bo'lgan yagona fazo-vaqt mavjudligini ko'rsatib, fazo va vaqt haqidagi yangi tasavvurlarni ilgari surdi. Bunga asosan fazo va vaqt intervallarining hamda bir vaqtlilikning nisbiy xarakterga ega ekanligini isbotladi. Bu yangi tasavvurlar asosida relyativistik mexanika vujudga keldi.

Moddiy nuqtaning **Dekart koordinata sistemasidagi** harakat qonunlarini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (1)$$

Agar (1) dan vaqtni chiqarib tashlasak nuqtaning trayektoriya tenglamasi topiladi. Bu tenglamalar parametrik tenglamalar deyiladi.

Koordinatalar orqali ifodalangan radius-vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (2)$$

ni nazarda tutak, (1) ni vaqt bo'yicha to'liq differensiali M nuqtaning tezlik va tezlanish vektorlarini beradi

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \qquad (3\text{-}1)$$

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \qquad (3\text{-}2)$$

Tezlik va tezlanish vektorlarining o'qlardagi proyeksiyalarini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$$v_x = \dot{x},\quad v_y = \dot{y},\quad v_z = \dot{z};\qquad w_x = \dot{v}_x = \ddot{x},\ \ w_y = \dot{v}_y = \ddot{y},\quad w_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \qquad (4)$$

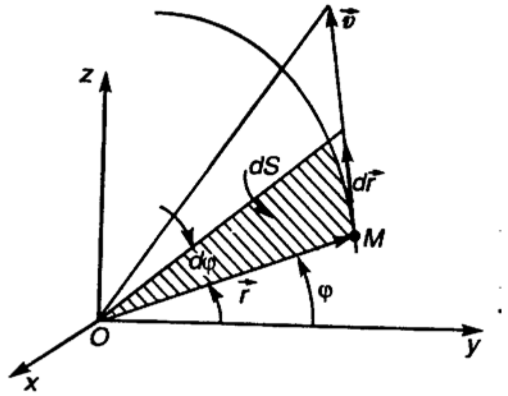
Tezlik va tezlanishlarning modullarini esa

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2};\qquad w = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2} \qquad (5)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(3-1) va (3-2) formulalardan tezlik vektori radius-vektordan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli, tezlanish vektori esa radus-vektordan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga tengligi kelib chiqadi. Nuqtaning yassi harakatini tekshirishda $\vec{v}$ oniy tezlik bilan birga $\vec{\sigma}$ sektorial tezlik tushunchasini kiritish qulaylik tug'diradi. Son qiymati $\vec{r}$ radius-vektor tomonidan vaqt birligi ichida bosib o'tilgan yuzga teng bo'lib, yo'nalishi $\vec{r}$ va $\vec{v}$ vektorlari bilan o'ng vint sistemasi hosil qiluvchi $\vec{\sigma}$ vektor kattalik sektorial tezlik deyiladi. (1-rasm) Rasmdan ko'ramizki, harakatlanuvchi M nuqta $\vec{r}$ radius-vektorning dt vaqt ichida bosib o'tgan yuzi $d\vec{S} = \frac{1}{2}[\vec{r}d\vec{r}]$ yuz vektorining son qiymatiga etarli aniqlik bilan teng, demak, sektorial tezlik vektori uchun quyidagi ifoda o'rinli

$$\vec{\sigma} = \frac{d\vec{S}}{dt} = \frac{1}{2}\left[\vec{r}\,\frac{d\vec{r}}{dt}\right] = \frac{1}{2}[\vec{r}\vec{v}] \qquad (6)$$



1-rasm

Sektorial tezlikning dekart koordinata o'qlaridagi proyeksiyasini topish (6) ni (3) ga ko'ra quyidagicha yozamiz:

$$\vec{\sigma} = \frac{1}{2}[\vec{r}\vec{v}] = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} \qquad (7)$$

Bundan ko'rinib turibdiki

$$\sigma_x = \frac{1}{2}(y\dot{z} - z\dot{y}), \qquad \sigma_{\mathrm{y}} = \frac{1}{2}(z\dot{x} - x\dot{z}), \qquad \sigma_{\mathrm{z}} = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})$$

Nazorat savollari

1. Nazariy mexanika fanining tadqiqot obyektlari nimalar ?
2. Fanning rivojlanish tarixi haqida ayting.
3. Fazo va vaqt haqida klassik tasavvurlar nima ?
4. Fizik hodisalarning turli sanoq tizimlarida invariantligi tushuntirib bering ?

<u>2-ma'ruza:</u> GALILEY VA LORENS ALMASHTIRISHLARI

REJA

- *Nyuton tenglamalarining Galiley almashtirishlariganisbatan invariantligi*
- *Sanoq sistemasi.*
- *Relyativistik mexanika asoslari.*
- *Inersial sanoq sistemalari*
- *Harakat tenglamalarini integrallash va boshlang'ich shartlari.*
- *Nuqtaning istalgan vaqt momentidagi holatini topish.*
- *Integrallash doimiyliklari*

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: momenti, dinamika, harakat, masofa, tezlik, tezlanish, ta'sir, vaqt, fazo, hodisalar, og'irlik markazi, koordinata, tizim, sferik, silindrik, harakat, tezlik, tezlanish, differesial, vaqt, nuqta, vector, tenglama, radius-vektor, Galiliy almashtirshlari, invaratlik, xarakat integrali

Mexanika nuqta harakatini ifodalashda bir qancha inersial sistemadan foydalanish mumkin. Agar S-moddiy nuqta radius-vektor $\vec{r}$, t-vaqt momentida aniqlanatgan biror inersial sistema S' esa t'-vaqt momentida aniqlanayotgan biror ikkinchi istalgan sistema bo'lsa va bu kattaliklar o'zaro qo'yidagicha bog'langan bo'lishsa:

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{v}\,t' \qquad (1)$$
$$t = t'$$

U xolda S' sistema o'zining barcha fizik xossalariga ko'ra S-sistemaga ekvivalent bo'ladi, ya'ni inersial bo'ladi.

Demak, inersial sistemalar bir-biriga nisbatan tinch turishi yoxud to'g'ri chiziqli tekis harakat qilishi mumkin. Bu inersial sistemaning ekvivalentligi mexanika qonunlarining barcha inersial sistemalarda bir xilda sodir bo'lishligini ko'rsatadi hamda Galiley nisbiylik prinsipi deb ataladi.

Inersial sistemalarda sodir bo'layotgan har qanday mexanik xodisa bu sistemaning tug'ri chiziqli tekis harakatini yoki tinchlik holatini ko'rsatib berolmaydi. (1) koordinat almashtirishlari Galiley almashtirishlari deyiladi.

Nyuton tenglamalarining Galiley almashtirishlariga nisbatan invariantligi.

Agar biz har qanday ikkita sistema (1) almashtirishlari bilan o'zaro bog'langan degan ta'rifni bermoqchi bo'lsak, (1) almashtirishlari to'plamini kengaytirishimiz lozim bo'ladi. Haqiqatdan, vaqtning bir jinsliligi (1) dagi vaqtning absolyutligini ifodalovchi $t = t'$ almashtirishni

$$t = t' + \tau, \quad (\tau = const), \qquad (2)$$

deb yozish imkonini beradi. Xuddi shunday fazoning bir jinsliligi $\vec{r}$ uchun

$$\vec{r} = \vec{r}\,' + \vec{a} \qquad (a = const) \qquad (3)$$

fazoning izotropligi esa

$$r_\alpha = C_{\alpha\alpha'} = r_{\alpha'} \quad \text{bu yerda } C_{\alpha\alpha'}\text{-matrisa} \qquad (4)$$

almashtirishlarini o'tkazish imkonini beradi. Shuning uchun (2)-(4) almashtirishlar (1) kabi Galiley almashtirishlari hisoblanadi.

Agar (1) munosabatni vaqt bo'yicha differensiallasak:

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V} \qquad (5)$$

Ko'rinishdagi tezliklarni qo'shish qoidasini olamiz. Bundan ko'rinadiki, biror moddiy nuqta har xil inersial sistemada turlicha tezliklarga ega bo'lar ekan vash u tufayli «absolyut» tezlik, «absolyut» tinchlik tushunchalari hyech qanday ma'noga ega bulmaydi. Teyezliklarga qaraganda tezlanishga absolyut tushunchasini qo'llab bo'ladi, chunki (5) ni vaqt bo'yicha yana bir marta differensiallasak, tezlanishning inersial sistemaga bog'liq emasligini ko'ramiz:

$$\vec{\omega} = \vec{\omega}' \qquad (6)$$

Biz o'rganayotgan mexanikada moddiy nuqta tezligi kichik bo'lgani uchun massasi o'zgarmas bo'ladi. Shuning uchun (6) ning har ikki tomonini massaga kupaytirib, nuqtaga ta'sir etuvchi kuchning barcha inersial sistemalarda bir xil ekaligini topamiz:

$$\vec{F} = \vec{F}' \qquad (7)$$

Shunday qilib, Nyuton tenglamalarining Galiley almashtirishlariga nisbatan o'zgarmas (invariant) ekanligini ko'ramiz.

Harakat tenglamalarini integrallash va boshlang'ich shartlari. Nuqtaning istalgan vaqt momentidagi holatini topish.

Moddiy nuqta harakati

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (8)$$

Tenglama bilan ifodalanishini bilamiz. Agar nuqtaning massasi va unga ta'sir etuvchi kuch ma'lum bo'lsa (8) tenglamani ikki marta integrallash yo'li bilan nuqtaning istalgan vaqt momentidagi holatini topishimiz mumkin. Buning uchun, albatta, boshlangich shartlar berilgan bo'lishi kerak. (1) ni ikki marta integrallasak, $C_1, C_2 ....., C_6$ integrallash doimiyliklariga ega bo'lishimiz bizga ma'lum.

Integrallash doimiyliklari

Agarda mexanik sistemamiz N -ta moddiy nuqtadan tashqil topgan bo'lsa, harakat tenglamalarining yechimida $6N$ -ta anna shunday ixtiyoriy doimiyliklar ishtirok etadi, ya'ni

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha (t, C_1, C_2, ..., C_{6N}) \qquad (9)$$

Integrallash doimiyliklarini boshlang'ich shartlar bilan bog'lash mumkin. Haqiqatdan (2) umumiy yechim bizga ma'lum bo'lsa va boshlang'ich vaqtda $(t = t_0)$ bo'lgan sistema nuqtaning holatlari

$$\vec{r}_{\alpha 0} = \vec{r}_\alpha (t_0)$$

tezliklari

$$\vec{v}_{\alpha 0} = \vec{v}_\alpha (t_0) \qquad (10)$$

berilgan bo'lsa, (10)ni vaqt buyicha differensiallab

$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_\alpha (t, C_1, C_2, ..., C_{6N}) \qquad (11)$$

Tezliklarni topamiz va (9) va (11 larda $(t = t_0)$ deb olib, (10) asosida yoza olamiz:

$$\begin{cases} \vec{r}_{\alpha 0} = \vec{r}_\alpha (t_0, C_1, C_2, ..., C_{6N}) \\ \vec{v}_{\alpha 0} = \vec{r}_\alpha (t_0, C_1, C_2, ..., C_{6N}) \end{cases} \qquad (12)$$

Oxirgi sistemani integrallash doimiyliklariga nisbat an yechib, quyidagini topamiz:

$$C_{\beta} = C_{\beta}(t, t_0, \vec{r}_{10}, ..., \vec{r}_{N0}, \vec{v}_{10}, ..., \vec{v}_{N0}) \quad (\beta = 1,2,3,.....,6N) \qquad (13)$$

Topilgan bu koeffisiyentlarni (10)ga quyib, N-ta nuqtalardan tashkil topgan sistema uchun harakat tenglamalarining yechimini aniqlaymiz:

$$\vec{r}_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha}(t, t_0, \vec{r}_{10}, ..., \vec{r}_{N0}, \vec{v}_{10}, ..., \vec{v}_{N0}) \qquad (14)$$

Misol. Faraz qilaylikki, elektr maydoni $\vec{E} = E_0 \cos \omega t$ OZ o'qi buyicha yo'nalsin zaryad esa OY o'qi bo'yicha tushayotgan bo'lsin. U holda

$$E_z = E_0 \cos \omega t \ , \ E_x = E_y = 0, \quad v_y = v_0, \quad v_x = v_z = 0$$

Masala shartiga ko'ra, zaryadga $\vec{F} = e\vec{E} \cos \omega t$ kuch ta'sir etyapti. Harakat tenglamasi Dekart komponentalarda

$$m\ddot{x} = 0$$
$$m\ddot{y} = 0$$
$$m\ddot{z} = eE_0 \cos \omega t$$

Yoki

$$\ddot{x} = 0, \ \ddot{y} = 0, \ \ddot{z} = \frac{e}{m} E_0 \cos \omega t \qquad (15)$$

(8) tenglamalarni vaqt buyicha bir marta integrallab topamiz:

$$\dot{z} = \frac{e}{m\omega} E_0 \sin \omega t + C_1, \ \dot{y} = C_2, \quad \dot{x} = C_3 \qquad (16$$

Boshlang'ich vaqt momenti $t = t_0$ da $v_y = \dot{y}_0 = v_0$, $\dot{x}_0 = \dot{z}_0 = 0$ bulgani uchun (16) dagi $C_1 = -\frac{eE_o}{m\omega} \sin \varpi t_0$, $C_2 = v_0$, $C_3 = 0$ buladi.

Demak (16):

$$\dot{z} = \frac{e}{m\omega} E_0 \sin \omega t - \frac{e}{m\omega} E_0 \sin \omega t_0$$
$$\dot{y} = v_0$$

(9)ni yana bir marta vaqt buyicha integrallaymiz:

$$z = \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos \omega t - \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t_0 + C_4,$$
$$y = v_0 t + C_5 \qquad (17)$$

Bundan $t = t_0$, bulganda $y_0 = 0$, $z_0 = 0$ ekanligini e'tiborga olib, C_4, C_5 larni topamiz:

$$C_4 = \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos \omega t_0 - \frac{eE_0}{m\omega} t_0 \sin \omega t_0$$
$$C_5 = -v_0 t_0 \qquad (18)$$

(18) larni (17)ga qo'yib, zarraning istalgan vaqt momentidagi holatini aniqlaymiz:

$$z = \frac{eE_0}{m\omega^2} (\cos \omega t_0 - \cos \omega t) + \frac{eE_0}{m\omega} (t_0 - t) \sin \omega t_0$$
$$y = v_0 (t - t_0) \qquad (19)$$

(19) da t ni yo'qotib, harakat tenglamasini topamiz. Buning uchun $t_0 - t = -\frac{y}{v_0}$ ni (19) dagi z uchun ifodaga quyamiz:

$$z = \frac{eE_0}{m\omega^2}(\cos\omega t_0 - \cos\omega(t_0 + \frac{y}{v_0})) - \frac{eE_0}{m\omega}\frac{y}{v_0}\sin\omega t_0$$

Nihoyat

$$\cos\omega(t_0 + \frac{y}{v_0}) = \cos\omega t_0 \cdot \cos\frac{\omega y}{v_0} - \sin\omega t_0 \cdot \sin\frac{\omega y}{v_0}$$

Asosida trayektoriyaning tenglama bilan ifodalanishini topamiz:

$$z = \frac{eE_0}{m\omega^2}((1 - \cos\frac{\omega y}{v_0})\cos\omega t_0 - \frac{\omega y}{v_0}(1 - \sin\frac{\omega y}{v_0})\sin\omega t_0)$$

Nazorat savollari

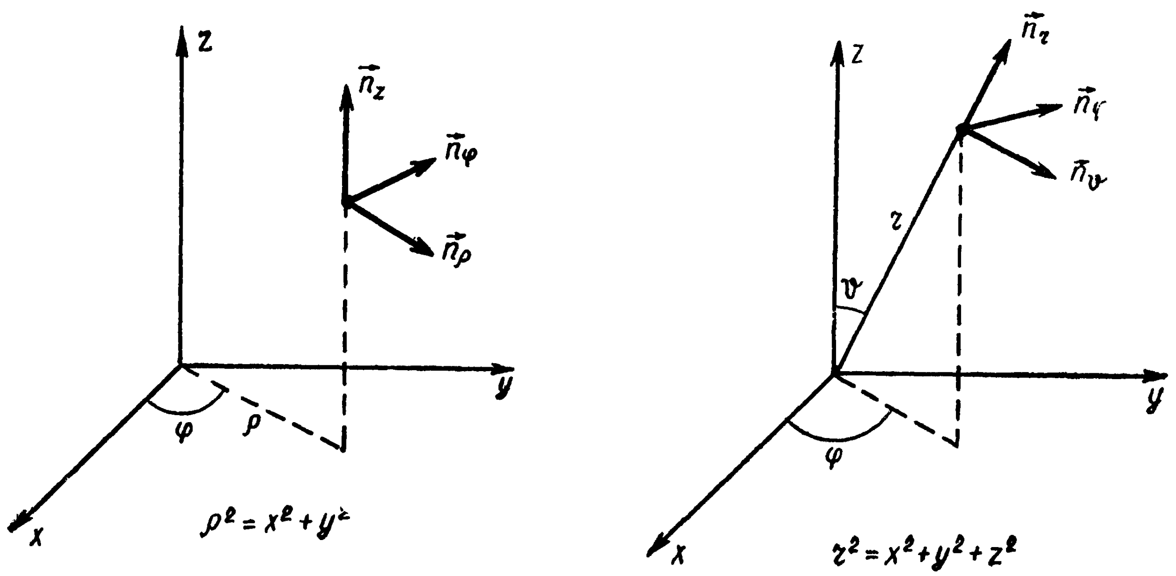
1. *Nyuton tenglamalarining Galiley almashtirishlariga nisbatan invariantligini ko'rsating.*
2. *Harakat tenglamalarini integrallash va boshlang'ich shartlari haqida ayting.*
3. *Nuqtaning istalgan vaqt momentidagi holatini toping*
4. *Integrallash doimiyliklari tushuntirib bering.*

3-ma’ruza: HARAKAT QONUNLARI. MODDIY NUQTANING TRAYEKTORIYASI, TEZLIGI VA TEZLANISHLARNING DEKART, SFERIK VA SILINDRIK KOORDINATALARDA IFODASI.

REJA:

1. *Dekart koordinatalar sistemasi.*
2. *Silindrik va qutb koordinatalar usuli*
3. *Sferik koordinatalar usuli*
4. *Maydon tushunchasi va Nyuton tenglamalarining qo’llanish chegarasi.*

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR*: koordinata, tizim, sferik, silindrik, harakat, tezlik, tezlanish, differesial, vaqt, nuqta, vector, tenglama, radius-vektor*



Moddiy nuqtaning Dekart koordinata sistemasidagi harakat qonunlarini quyidagi ko’rinishda yozish mumkin

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (1)$$

Agar (1) dan vaqtni chiqarib tashlasak nuqtaning trayektoriya tenglamasi topiladi. Bu tenglamalar parametrik tenglamalar deyiladi.
Koordinatalar orqali ifodalangan radius-vektor

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (2)$$

ni nazarda tutak, (1) ni vaqt bo’yicha to’liq differensiali M nuqtaning tezlik va tezlanish vektorlarini beradi

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} \qquad (3\text{-}1)$$

$$\vec{w} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k} \qquad (3\text{-}2)$$

Tezlik va tezlanish vektorlarining o’qlardagi proyeksiyalarini quyidagi ko’rinishda yozish mumkin:

$$v_x = \dot{x},\quad v_y = \dot{y},\quad v_z = \dot{z}; \qquad w_x = \dot{v}_x = \ddot{x},\ \ w_y = \dot{v}_y = \ddot{y},\qquad w_z = \dot{v}_z = \ddot{z} \qquad (4)$$

Tezlik va tezlanishlarning modullarini esa

$$v=\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2}; \qquad w=\sqrt{\ddot{x}^2+\ddot{y}^2+\ddot{z}^2} \qquad (5)$$

ko'rinishda yozish mumkin.

(3-1) va (3-2) formulalardan tezlik vektori radius-vektordan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli, tezlanish vektori esa radus-vektordan vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosilaga tengligi kelib chiqadi.

Silindrik va qutb koordinatalar usuli

Silindrik koordinatalar sistemasida M nuqtaning holati ρ, φ, z koordinatalar bilan aniqlanadi. Nuqtaning harakat qonunlari $\rho=\rho(t), \quad \varphi=\varphi(t), \quad z=z(t)$ ko'rinishda bo'ladi.

2-shakldan foydalanib quyidagi bog'lanishlarni yozish mumkin

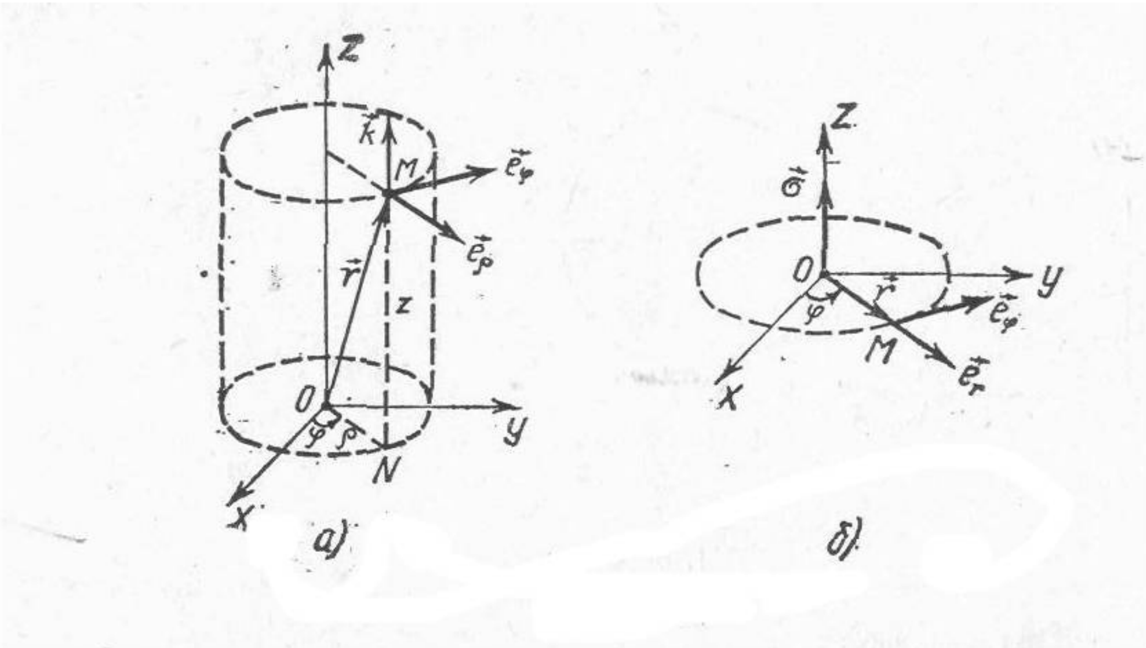
$$x=\rho\cos\varphi, \quad y=\rho\sin\varphi, \quad \mathrm{z}=\mathrm{z} \qquad (8\text{-}1)$$

$$\vec{r}=\rho\vec{e}_\rho+z\vec{k}, \quad r=\sqrt{\rho^2+z^2}, \quad \rho=\sqrt{\mathrm{x}^2+y^2} \qquad (8\text{-}2)$$

Silindrik koordinatalar sistemasining $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ ortlari bilan $\vec{i}, \vec{j}$ Dekart ortlari orasidagi bog'lanishni topish uchun $\vec{r}$ radius-vektor har ikkala sistemadagi (2) va (8-2) ifodalarini o'zaro tenglashtiramiz va (8-1) ni e'tiborga olsak, natijada quyidagi bog'lanishlarga ega bo'lamiz:

$$\vec{e}_\rho=\vec{i}\cos\varphi+\vec{j}\sin\varphi, \quad \vec{e}_\varphi=\frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}=-\vec{i}\sin\varphi+\vec{j}\cos\varphi \qquad (9)$$

Silindrik koordinatalar sistemasining $\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi$ ortlarining yo'nalishi vaqtga bog'liq holda o'zgaradi, ularning vaqt bo'yicha birinchi hosilalarini topsak



2-rasm

$$\dot{\vec{e}}_\rho = \frac{d\vec{e}_\rho}{d\varphi}\dot{\varphi} = \dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \dot{\vec{e}}_\varphi = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\dot{\varphi} = -\dot{\varphi}\vec{e}_\rho \qquad (9\text{-}1)$$

Nuqtaning (8-2) radius-vektoridan vaqt bo'yicha hosila olib, (9-1) ni e'tiborga olsak, tezlik vektori, uning moduli va proyeksiyalari uchun quyidagi ifodalarni olamiz

$$\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{\rho}\,\vec{e}_\rho + \rho\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi + \dot{z}\vec{k}, \quad v = \sqrt{\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2} \qquad (10\text{-}1)$$

$$v_\rho = \dot{\rho}, \quad v_\varphi = \rho\dot{\varphi}, \quad v_z = \dot{z} \qquad (10\text{-}2)$$

v_ρ, v_φ, v_z lar mos ravishda v tezlik vektorining radial, ko'ndalang va aksial proyeksiyalari deb yuritiladi. Tezlik vektoridan vaqt bo'yicha hosila olib $\vec{w}$ tezlanish vektor va uning proyeksiyalari uchun quyidagilarga ega bo'lamiz:

$$\vec{w} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi})\vec{e}_\varphi + \ddot{z}\vec{k} \qquad (11\text{-}1)$$

$$w_\rho = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2, \quad w_\varphi = 2\dot{\rho}\dot{\varphi} + \rho\ddot{\varphi}, \quad w_z = \ddot{z} \qquad (11\text{-}2)$$

Agar $z = 0, \quad \rho = r$ desak, silindrik koordinatalar sistemasi tekislikdagi r, φ qutb koordinatalar sistemasiga o'tadi (2.b-rasm).

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad (12\text{-}1)$$

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad r = \sqrt{\mathrm{x}^2 + y^2} \qquad (12\text{-}2)$$

Bunda harakat qonuni $r = r(t) \quad \varphi = \varphi(t)$ tenglamlar bilan beriladi. Ulardan t ni chiqarib, M nuqtaning qutb koordinatalar sistemasidagi $r = r(\varphi)$ trayektoriya tenglamasi topiladi. Tekislikda harakatlanuvchi M nuqtaning qutb koordinatlaridagi $\vec{r}$ radius-vektori, $\vec{v}$ -chiziqli va $\vec{\sigma}$ - sektorial tezliklari hamda w tezlanishi uchun (10)-(12) munosabatlarga ko'ra ($z = 0$, $\rho = r$, $\vec{e}_\rho = \vec{e}_r$)

$$\vec{r} = r\vec{e}_r, \quad \vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\varphi}\vec{e}_\varphi, \quad \vec{\sigma} = \frac{1}{2}r^2\varphi\,\vec{k},$$

$$\vec{w} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2)\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

Sferik koordinatalar usuli

Sferik koordinatalar sistemasida M moddiy nuqtaning holati r, θ, φ koordinatalar orqali (3-rasm) uning harakat qonunlari esa

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t) \qquad (13)$$

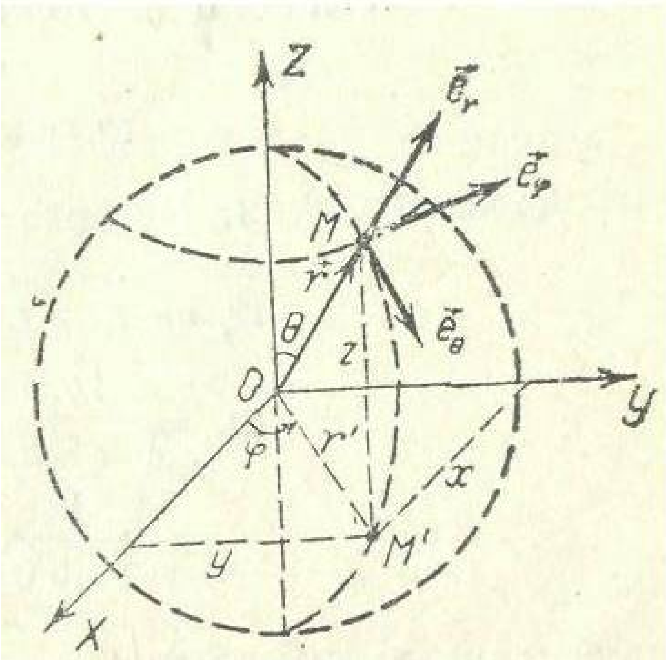
tenglamalar bilan beriladi. Sferik va Dekart koordinatalar orasidagi bog'lanish quyidagi formulalar orqali ifodalanadi (rasm):

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad r = r\cos\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad \theta = \mathrm{arctg}\frac{r'}{r}, \quad \varphi = arctg\,\frac{y}{x} \qquad (14)$$

Bu yerda $r' = \sqrt{x^2 + y^2}$. Sferik sistemaning $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$ ortlari bilan $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ Dekart ortlari orasidagi bog'lanishlarni rasmdan foydalnib topish mumkin:

$$
\begin{aligned}
&\vec{e}_r = \vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta \\
&\vec{e}_\theta = \vec{i}\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\sin\theta \\
&\vec{e}_\varphi = -\vec{i}\sin\varphi + \vec{j}\cos\varphi, \quad \vec{r} = r\vec{e}_r
\end{aligned}
\tag{15}
$$



3-rasm

Sferik koordinatalar sistemsining barcha ortlari M nuqta harakatlanganda o'z yo'nalishlarini o'zgartiradi, shuning uchun ulardan vaqt bo'yicha birinchi tartibli hosilalar olamiz:

$$
\begin{aligned}
&\dot{\vec{e}}_r = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\
&\dot{\vec{e}}_\theta = -\theta\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \\
&\dot{\vec{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_r - \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_\theta
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Sferik koordinatalar orqali ifodalangan $\vec{r}$ radius-vektordan birinchi tartibli hosila olib, (16) ni e'tiborga olsak, quyidagi munosabatlarni olamiz

$$
\begin{aligned}
&\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi \\
&v = \sqrt{\dot{r}^2 + r^2(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\sin^2\theta)} \\
&v_r = \dot{r}, \quad v_\theta = r\dot{\theta}, \quad v_\varphi = r\dot{\varphi}\sin\theta
\end{aligned}
\tag{17}
$$

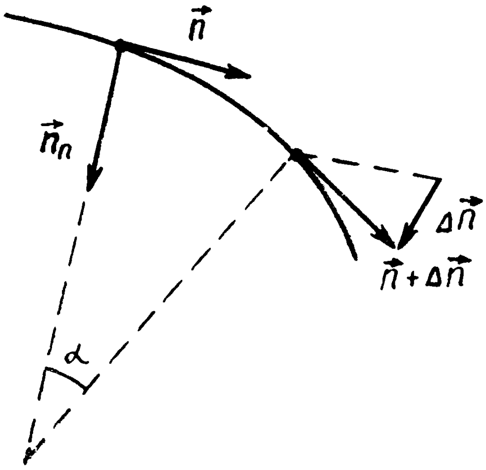
Ma'lumki, tezlik vektoridan vaqt bo'yicha olingan birinchi tartibli hosila tezlanish vektorini beradi:

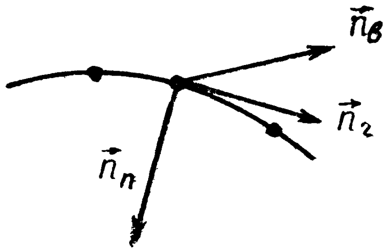
$$
\vec{w} = w_r\vec{e}_r + w_\theta\vec{e}_\theta + w_\varphi\vec{e}_\varphi \tag{18}
$$

Bu yerda

$$
\begin{aligned}
w_r &= \ddot{r} - r(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2 \sin^2\theta) \\
w_\theta &= \frac{1}{r}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}^2) - r\dot{\varphi}^2 \sin\theta\cos\theta \\
w_\varphi &= \frac{1}{r\sin\theta}\frac{d}{dt}(r^2\dot{\varphi}^2 \sin^2\theta)
\end{aligned}
\qquad (18\text{-}1)
$$

w_r, w_θ va w_φ mos holda radial, meridional va azimutal tezlanishlar deb yuritiladi.





<u>Nazorat savollari</u>

1. Moddiy nuqtaning Dekart koordinatalar sistemasidagi xolati, tezligi va, tezlanishi ifodasini yozing
2. Moddiy nuqtaning silindrik koordinatalar sistemasidagi xolati, tezligi va, tezlanishi ifodasini yozing
3. Moddiy nuqtaning qutb koordinatalar sistemasidagi xolati, tezligi va, tezlanishi ifodasini yozing
4. Moddiy nuqtaning sferik koordinatalar sistemasidagi xolati, tezligi va, tezlanishi ifodasini yozing
5. Maydon tushunchasi va Nyuton tenglamalarining qo’llanish chegarasi ayting.

4- ma’ruza: **LANGRAJ FUNKSIYASI VA TENGLAMALARI.**

REJA:

1. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida jismlarning harakatini tahlil qilish.
2. Umumlashgan koordinatalar.
3. Eng kichik ta’sir prinsipi
4. Lagranj funksiyasi
5. Eyler-Lagranj tenglamasini keltirb chiqarish
6. Lagranj funksiyasining ayrim muhim xossalari

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR: harakat, koordinata, vector, jism, tezlik, ixtiyoriy sistema, vaqt, moment, radius-vektor, kuch, zarracha, maydon, induksiya, nuqta

Oldingi mavzuda turli xil koordinatalar sistemasida jismlarning vaziyatlari va tezlik va tezlanish vayektorlari orasidagi bog’lanishlarni tahlil qilgan edik. Mazkur masalani hal qilish uchun umumlashgan koordinatalar va umumlashgan tezliklar tushunchasidan foydalanish mumkin. Jismlarning boshlang’ich vaqt momentidagi koordinatalari va tezliklari ma’lum bo’lsin, Ushbu masala birinchi bor Lagranj tomonidan kiritilgan. Lagranj metodiga ko’ra ixtiyoriy sistema holatini uning umumlashgan koordinatalari va umumlashagan tezliklari orqali tavsiflanadi va uning mulohazasiga ko’ra jismning ixtiyoriy vaqt momentidagi tezlanishi unga shu vaqt davaomida ta’sir qilayotgan kuch orqali aniqlanadi.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{1}{m}\vec{F}(\vec{r}, \frac{d\vec{r}}{dt}, t) \qquad (1)$$

(1) munosabat N’yutonning ikkinchi qonunining matematik ifodasidir. Bu yerda F – moddiy nuqta yoki zarrachaga ta’sir etayotgan kuch bo’lib, u umumiy holda zarrachaning tezligi v, uning radius-vektori r va vaqtdan bog’liq, bo’lishi mumkin.

$$F_{gr} = G\frac{mM}{r_{12}^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}} \qquad (2)$$

$$F_{Lor} = qvB\sin\alpha = q[\vec{v}\vec{B}] = q[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{B}] \qquad (3)$$

Ko’rinib turibdiki B-magnit maydon induksiyasi vaqt o’tishi bilan o’zgarsa, u holda Lorens kuchi vaqtga ham bog’liq bo’lib qoladi. Bundan tashqari, magnit maydon induksiyasi turli nuqtalarda har xil bo’lsa, ya’ni maydon bir jinsli bo’lmasa u holda Lorens kuchi ham radius-vektor, ham tezlikdan ham vaqtan bog’liq bo’ladi.

Nazariy mexanikaning asosiy tushunchalaridan biri bu moddiy nuqta. Moddiy nuqtalar sistemasi va orqali absolyut qattiq jism tushunchasi. Material nuqtaning fazodagi vaziyati uning r radius-vektori orqali aniqlanadi. R radius vektor Dekart koordinatlar sistemasi bilan quyidagi munosabatda bog’langan

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \qquad (4)$$

Radius-vektordan vaqt bo’yicha olingan to’la hosilalar mos ravishda tezlik va tezlanish vektorlarini berishi nuqta kinematikasidan bizga ma’lum.

N- ta material nuqtadan iborat sistemaning holatini aniqlash uchun N-ta r radius vektorni topmoq zarur bo’ladi, ya’ni $3N$ ta koordinatalar.

Mexanik sistemaning fazodagi holatini bir qiymatli ravishda aniqlovchi har qanday o’zaro bog’lanmagan skalyar kattaliklar soni sistemaning erkinlik darajalari soni deyiladi. Bu kattalaiklar doimo Dekart koordinatlari bo’lishi shart yemas. Qo’yilgan masalaning shartiga ko’ra sferik, silindrik, uzunlik, burchak, yuz va h.k. Shuning uchun har qanday S ta $q_1, q_2, \ldots q_s$ kattaliklar umumlashgan koordinatalar uning hosilalari umumlashgan tezliklar deyiladi. Umumlashgant koordinatlar soni mexanik sistemaning erkinlik darajalari soniga teng bo’ladi. Umumlashgan koordinatalar tushunchasi umumiy bo’lib har qanday mexanik sistema uchun qo’llanilishi mumkin.

$S = 3n$ mexanik sistema uchun umumlashgan koordinatalar soni $3n$ ta (x_i, y_i, z_i) dekart, (ρ_i, φ_i, z_i) silindrik, $(r_i, \theta_i, \varphi_i)$ sferik umumlashgan koordinatalarda olinishi mumkin.

$$\begin{aligned} q &= \{x, y, z\} \\ \dot{q} &= \{\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}\} \\ \ddot{q} &= \{\ddot{x}, \ddot{y}, \ddot{z}\} \end{aligned} \tag{5-1}$$

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \ddot{y} &= f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \\ \ddot{z} &= f(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}, t) \end{aligned} \tag{5-2}$$

Umumiy ko’rinishdagi harakat tenglamasini quyidagi ko’rinishda ifodalash mumkin

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t) \tag{6}$$

Umumlashgan koordinatalar sistemaning erkinlik darajalar soniga teng bo’lishi lozim. (6) umumiy harakat tenglamasi qanday ko’rinishga ega bo’lishi mumkin degan masalani keyingi mavzularda hal qilamiz.

Umumiy ko’rinishdagi harakat tenglamasini quyidagi ko’rinishda ifodalangan edi

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, t) \tag{1}$$

Ushbu umumiy harakat tenglamasi qanday ko’rinishga ega bo’lishi mumkin degan masalani hal qilamiz. Ya’ni umumlashgan kuchni aniqlashga kirishamiz. Bu masalani hal qilish uchun qaralayotgan fizikaviy sistemaning biror boshlang’ich va oxirgi holatlardagi koordinatalari va umumlashgan tezliklari ma’lum bo’lgan sistema qanday real trayektoriya bo’ylab boshlang’ich holatdan oxirgi holatga o’tadi degan masalani hal qilish lozim. Boshqacha aytganda harakat trayektoriyasi jismning harakat tenglamasi bilan chambarchas bog’liq. Masalani dastlab bir jinsli muhitda tarqalayotgan yoruglik to’lqinlari kabi qaraymiz. Geometrik optika qonunlariga asosan yorug’lik ikki nuqtani tutashtiruvchi to’g’ri chiziq bo’ylab tarqaladi. Ya’ni bo’lishi mumkin bo’lgan trayektoriyalar ichidan eng qisqasini tanlaydi. Bu nuqtai nazardan xam har doim ham o’rinli bo’lavermaydi. Masalan, kosmanavt sferik ko’rinishga yega bo’lgan planetaga borgan bo’lsin. Ayonki kosmanavt A nuqtadan B nuqtaga borishi uchun egri chiziqli trayektoriya bo’ylab harakatlanishga majbur va bu holda u eng kichik uzunlikka yega bo’lgan va sfera sirtida joylashgan egri chiziqli trayektoriya bo’ylab harakatlanishga majbur. Biz yuqorida yorug’likning bir jinsli muhitda tarqalishini ko’rdik. Endi yorug’lik bir jinsli bo’lmagan muhitda tarqalishini qarasak, bu holda yorug'lik, to'g'ri chizik bo'ylab tarqalmaydi. Aksincha u A nuqtadan B nuqtaga o'tishi uchun, eng qisqa vaqt sarflovchi yo'lni tanlaydi. Bunga sabab yorug'lik tarqalish yo'nalishini o'zgartiradi. Bu ikki misoldan ko'rinib turibdiki fizikaviy sistema A nuqtadan B nuqtaga yoki eng qisqa trayektoriya bo'ylab yoki eng qisqa vaqt sarflab o'tadi. Bu masalani umumiy holda ko'rib chiqish uchun ayrim masalalarni kiritamiz.

Ta'rif. Ixtiyoriy fizikaviy sistemaning umumlashgan koordinatalari, umumlashgan tezliklari, va umumiy holda vaqtga bog'lik bo'lgan funksiyasi Lagranj funksiyasi deyiladi va u quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$L = L(q, q', t) \qquad (2)$$

Biz hozirga qadar umumlashgan koordinata va umumlashgan tezliklarga bog'liq bo'lgan quyidagi kattaliklarni bilamiz.

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{q}^2}{2} = f\ (q, \dot{q})$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kq^2}{2} = f_2(q)$$

$$E_T = \frac{m\dot{q}^2}{2} + \frac{kq^2}{2} = f(q, \dot{q})$$

Endi maqsadimiz itiyoriy fizikaviy sistema uchun Lagranj funksiyasini aniqlashdan iborat. Buning uchun Lagranj quyidagi prinsipni taklif etdi va u quyidagicha ta'riflanadi.

Ta'rif. Har qanday sistema uning Lagranj funsiyasi orqali aniqlanuvchi quyidagi ta'sir kattaligi bilan xarakterlanadi.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t)dt \qquad (3)$$

S-ta'sir funksiyasi.

Ta'rif. Har qanday sistema o'z harakati davomida shunday trayektoriyani tanlaydiki ta'sir variasiyasi nolga teng bo'ladi

$$\delta S = 0 \qquad (4)$$

Keyingi ishlarni bajarishdan oldin oliy matematika kursidan quyidagilarni esga olaylik.

Yeslatma. 1. Agar bizga ikki o'zgaruvchili $f(x, y)$ funksiya berilgan bo'lsa uning differensiali quyidagicha topiladi.

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

2. Agar xuddi shu funksiyaning chekli orttirmasi yoki o'zgarishini topish talab etilsa u quyidagicha

$$\Delta f(x, y) = f(x, y) - f(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y,$$

$$\Delta x = x - x_0,\ \Delta y = y - y_0$$

3. Xuddi shu funksiyaning variasiyasi esa

$$\delta f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\delta y$$

Yuqoridagi ikkita formuladan uchinchisining farqi x, y o'zgaruvchining variasiyasi chekli o'zgarishidir.

Ta'sir ifodasidan ko'rinib turibdiki uning qiymati integral ostidagi funksiyaning ko'rinishiga bog'liq, ya'ni u Lagranj funksiyasining funksionalidir.

Ta'sir variasiyasi

$$\delta S=S'-S=\int_{t_1}^{t_2}L'dt-\int_{t_1}^{t_2}Ldt=\int_{t_1}^{t_2}[L'-L]dt=0$$

$$L'=L+\delta L=L+\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q$$

Demak, ta'sirning variasiyasini quyidagicha topish mumkin.

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta \dot q\right]dt$$

$$\delta\dot q=\delta\left(\frac{dq}{dt}\right)=\frac{d}{dt}(\delta q)$$

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left[\frac{\partial L}{\partial q}\delta q+\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{dt}(\delta q)\right]dt$$

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial q}\delta q dt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{dt}(\delta q)dt$$

Bo'laklab integrallash qoidasidan foydalanamiz $\int udv=uv-\int vdu$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot q}=U,\quad dV=\frac{d}{dt}(\delta q)dt,\quad V=\delta q,\quad dU=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)$$

$$\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial L}{\partial \dot q}\frac{d}{dt}(\delta q)dt=\frac{\partial L}{\partial \dot q}\delta q\Big|_{t_1}^{t_2}-\int_{t_1}^{t_2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\delta q dt \tag{5}$$

Masalaning qo'yilishiga ko'ra yuqori va pastki chegarada umumlashgan koordinatalar variasiyasi nolga teng. Demak, ta'sir variasiyasini quyidagicha yozish mumkin:

$$\delta S=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\frac{\partial L}{\partial q}-\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)\right\}\delta q dt=0 \tag{6}$$

Ko'rinib turibdiki oxirgi shart o'rinli bo'lishi uchun quyidagi shart bajarilishi lozim

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot q}\right)=\frac{\partial L}{\partial q} \tag{7}$$

(7) Eyler-Lagranj tenglamasi deyiladi. Bu real harakatni tavsiflovchi tenglama bo'lib, birinchi bor Eyler va Lagranj tomonidan keltirib chiqarilgan. Bu tenglamani N'yutonning ikkinchi qonuni bilan taqqoslab quyiadi xulosaga kelish mumkin.

$$\ddot{q} = \frac{d}{dt}\dot{q} = f(\dot{q})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \to \dot{q}, \qquad \frac{\partial L}{\partial q} \to q \qquad\qquad L = a\dot{q}^2 + bq^2$$

$$E_k = \frac{m}{2}\dot{q}^2, \qquad a = m/2$$

$$L = \frac{m}{2}\dot{q}^2$$

oxirgi munosabat erkin ya'ni hyech qanday tashqi kuch ta'sir qilmayotgan zarrachaning klassik Lagranj funksiyasi.

Lagranj funksiyasining ayrim muhim xossalari

Eng kichik ta'sir prinsipiga ko'ra ixtiyoriy fizikaviy sistemaning harakat tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lishi ma'lum edi

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right) = \frac{\partial L}{\partial q} \qquad (8)$$

Bu harakat tenglamasini keltirib chiqarishda biz biror-bir joyda Lagranj funksiyasining oshkor ko'rinishidan foydalanganimiz yo'q. Shuning uchun bu tenglama ixtiyoriy sistema uchun o'rinli. Lagranj funksiyasining konkret ko'rinishlarini topishdan oldin uning (8) harakat tenglamasiga asoslangan ayrim xossalarini ko'rib chiqamiz.

1. Agar sistemaning Lagranj funksiyasiga biror doimiy additiv kattalik ishtirok etsa $L' = L + A \quad A = const$. Birinchi harakat tenglamasi o'zgarmaydi.

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \qquad \frac{\partial L'}{\partial q} = \frac{\partial L}{\partial q};$$

Agar qaralayotgan Lagranj funksiyasi o'zaro ta'sirlashmaydigan erkin zarralar sistemasidan iborat bo'lsa, bunday sistemaning Lagranj funksiyasi alohida zarralar Lagranj funksiyalarining yig'indisidan iborat bo'ladi.

$$L = \sum_i L_i$$

2. Eng kichik ta'sir prinsipiga ko'ra har qanday sistemaning ta'sir funksiyasi uning Lagranj funksiyasidan olingan quyidagi integral orqali aniqlanadi.

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})dt$$

Bundan ko'rinib turibdiki Lagranj funksiyasi quyidagi shartni qanoatlantirsa

$$L' = L + \frac{\partial f}{\partial t}, \qquad f = f(q,\dot{q})$$

ya'ni ixtiyoriy umumlashgan koordinata, umumlashgan tezlikdan bog'lik funksiyaning vaqt bo'yicha to'liq differensialiga farq qilsa

$$S' = \int_{t_1}^{t_2} L' dt = \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} \frac{df}{dt} dt = S + f(q, \dot{q}) |_{t_1}^{t_2} \qquad \delta S' = 0$$

$S + f(q, \dot{q}) |_{t_1}^{t_2}$ masalaning qo'yilishiga ko'ra sistemaning t_1 va t_2 vaqt momentlaridagi umumlashgan koordinata va tezliklari tayin bo'lganligi uchun ikkinchi hadning variasiyasi nolga teng. Biz quyidagi muhim natijani olamiz:

$$\delta S = 0 .$$

Agar qaralayotgan sistemaning Lagranj funksiyasi bir-biridan to'la hosilaga farq qilsa ularning harakat tenglamalari bir xil ko'rinishga ega bo'ladi. Lagranj funksiyasining bu xususiyatidan uni soddalashtirish maqsadida foydalaniladi.

Masalani umumiy holda qo'yamiz. Faraz qilaylik bizga zarraning tenglamasi ma'lum bo'lsin.

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

Agar bizga biror K sanoq sistemasi berilgan bo'lib, u K sistemaga nisbatan doimiy tezlik bilan harakatlanayotgan bo'lsa (5-rasm), zarraning bu sistemalardagi radius bo'lsa, zarraning bu sistemalardagi radius vektorlari quyidagicha bog'langanligini ko'rish mumkin.

$$\vec{r} = \vec{r}' + Vt$$

Bunda vaqt barcha sanoq sistemalarida bir xilda bo'ladi. Galiley prinsipiga ko'ra vaqt mutlaqo ya'ni vaqtning davomiyligi sanoq sistemaning qanday doimiy tezlik bilan harakatlanishiga bog'liq emas, ya'ni butun koinot uchun yagona vaqt mavjud bo'ladi.

$$t = t'$$

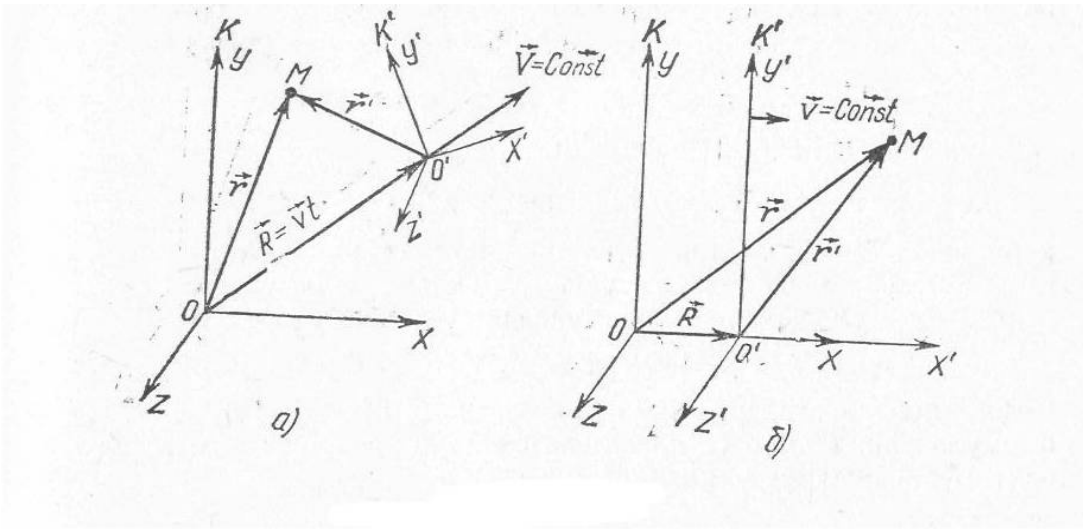
K sistema uchun harakat tenglamasi:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

shu harakat tenglamasini K' sanoq sistemasi uchun yozamiz.

$$v' = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \qquad dt' = dt \qquad v' = v - \vec{V}$$

$$v = v' + V$$



5-rasm

Tezliklarning qo'shishning klassik qonunidan kelib chiqadigan natijalar vaqtni mutlaqoligidir $a' = a$. Demak zarrachaning massasi K' sistemada ham m ga teng deb faraz qilsak K' uchun Nyutonning ikkinchi qonuni

$$\vec{F} = m'\vec{a}'$$

Nyutonning qonuni almashtirishlarga nisbatan invariant yoki harakat tenglamalari barcha inersial sanoq sistemalarida bir xil ko'rinishda bo'ladi.

$$L = L(q,\dot q) \qquad L' = (q,\dot q)$$

$$\dot q = f(q,\dot q) \quad \ddot q = \varphi(q,\dot q).$$

Biz shunday almashtirish topishimiz kerakki harakat tenglamalari ikkala sistemada ham bir xil bo'lsin.

$$dL' = dL'(q',\dot q) = \frac{d}{dt}\quad \frac{\partial L'}{\partial \dot q'} - \frac{\partial L'}{\partial q^2}$$

$$dL'(q',\dot q) = \frac{\partial L'}{\partial q} dq' + \frac{\partial L'}{\partial q'} dq'$$

$$dq' = df(q,\dot q) = \frac{df}{dq} dq + \frac{\partial f}{\partial q} d\dot q$$

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot q'} = \frac{\partial L'}{\partial \dot q'} - \frac{dq'}{d\dot q} + \frac{\partial L'}{\partial q}\cdot e = \frac{\partial L'}{\partial q}\cdot\frac{d}{d\dot q}\left[\frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial q} dq\right] + \frac{\partial L'}{\partial \dot q'} =$$

A)
$$= \frac{\partial L'}{\partial \dot q'}\cdot\left[\frac{\partial f}{\partial q}\quad \frac{\partial q'}{\partial \dot q'} + \frac{\partial t}{\partial \dot q}\cdot\frac{\partial \dot q}{\partial \dot q'}\right]\frac{\partial L'}{\partial \dot q'}$$

B)
$$\frac{\partial L'}{\partial \dot q'} = \frac{\partial L'}{\partial q'} + \frac{\partial L'}{\partial \dot q'}\left[\frac{\partial f}{\partial q}\quad \frac{\partial q}{\partial \dot q} + \frac{\partial f}{\partial \dot q'}\,\frac{\partial \dot q}{\partial \dot q'}\right];$$

A va B natijalarni Eyler - lagranj tenglamasiga qo'yib f va φ funksiyalarni aniqlash mumkin, ya'ni K va K' sistemalar koordinatalari va vaqtni almashtirish qonunlaridan keltirib chiqarish mumkin. Eng muhimi bu almashtirish munosabatlari Galiley almashtirishlariga o'xshash chiziqli ko'rinishda bo'ladi. Sodda holda bir o'lchovli harakatni qarasak

$$x' = x\alpha + \beta t \qquad t' = \gamma x + \delta t$$

$\alpha = 1$ $\beta = -\gamma$ bo'lsa, u holda $\gamma = 0$ $\delta = 1$

Nazorat savollari

1. Ixtiyoriy koordinatalar sistemasida jismlarning harakatini tahlil qiling
2. Umumlashgan koordinatalar nima ?
3. Eng kichik ta'sir prinsipini tushuntirib bering?
4. Lagranj funksiyasi haqida aytiung?
5. Eyler-Lagranj tenglamasini keltirb chiqaring.
6. Lagranj funksiyasining ayrim muhim xossalari ayting.

Лагранж функциясининг айрим муҳим хоссалари

Энг кичик таъсир принципига кўра ихтиёрий физикавий системанинг ҳаракат тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлиши маълум эди

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)=\frac{\partial L}{\partial q} \qquad (1)$$

Бу ҳаракат тенгламасини келтириб чиқаришда биз бирор-бир жойда Лагранж функциясининг ошкор кўринишидан фойдаланганимиз йўқ. Шунинг учун бу тенглама ихтиёрий система учун ўринли. Лагранж функциясининг конкрет кўринишларини топишдан олдин унинг (1) ҳаракат тенгламасига асосланган айрим хоссаларини кўриб чиқамиз.

2. Агар системанинг Лагранж функциясига бирор доимий аддитив катталик иштирок этса $L' = L + A \quad A = const$. Биринчи ҳаракат тенгламаси ўзгармайди.

$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}}=\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}, \qquad \frac{\partial L'}{\partial q}=\frac{\partial L}{\partial q};$$

Агар қаралаётган Лагранж функцияси ўзаро таъсирлашмайдиган эркин зарралар системасидан иборат бўлса, бундай системанинг Лагранж функцияси алоҳида зарралар Лагранж функцияларининг йиғиндисидан иборат бўлади.

$$L=\sum_i L_i \qquad (2)$$

2. Энг кичик таъсир принципига кўра ҳар қандай системанинг таъсир функцияси унинг Лагранж функциясидан олинган қуйидаги интеграл орқали аниқланади.

$$S=\int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q})dt$$

Бундан кўриниб турибдики Лагранж функцияси қуйидаги шартни қаноатлантирса

$$L' = L+\frac{\partial f}{\partial t}, \qquad f = f(q,\dot{q}) \qquad (3)$$

яъни ихтиёрий умумлашган координата, умумлашган тезликдан боғлик функциянинг вақт бўйича тўлиқ дифференциалига фарқ қилса

$$S'=\int_{t_1}^{t_2} L'dt=\int_{t_1}^{t_2} Ldt+\int_{t_1}^{t_2}\frac{df}{dt}dt=S+f(q,\dot{q})\,|_{t_1}^{t_2} \qquad \delta S'=0$$

$S+f(q,\dot{q})\,|_{t_1}^{t_2}$ масаланинг қўйилишига кўра системанинг t_1 ва t_2 вақт моментларидаги умумлашган координата ва тезликлари тайин бўлганлиги учун иккинчи ҳаднинг вариацияси нолга тенг. Биз қуйидаги муҳим натижани оламиз:

$$\delta S=0\,.$$

Агар қаралаётган системанинг Лагранж функцияси бир-биридан тўла ҳосилага фарқ қилса уларнинг ҳаракат тенгламалари бир хил кўринишга эга бўлади. Лагранж функциясининг бу хусусиятидан уни соддалаштириш мақсадида фойдаланилади.

Масалани умумий ҳолда қўямиз. Фараз қилайлик бизга зарранинг тенгламаси маълум бўлсин.

$$\vec{F}=m\vec{a} \qquad (4\text{-}1)$$

Агар бизга бирор К санок системаси берилган бўлиб, у К системага нисбатан доимий тезлик билан ҳаракатланаётган бўлса (5-расм), зарранинг бу системалардаги радиус бўлса, зарранинг бу системалардаги радиус векторлари қуйидагича боғланганлигини кўриш мумкин.

$$\vec{r}=\vec{r}\,'+Vt \qquad (5.1)$$

Бунда вақт барча санок системаларида бир хилда бўлади. Галилей принципига кўра вақт мутлақо яъни вақтнинг давомийлиги санок системанинг қандай доимий тезлик билан ҳаракатланишига боғлиқ эмас, яъни бутун коинот учун ягона вақт мавжуд бўлади.

$$t=t' \qquad (5.2)$$

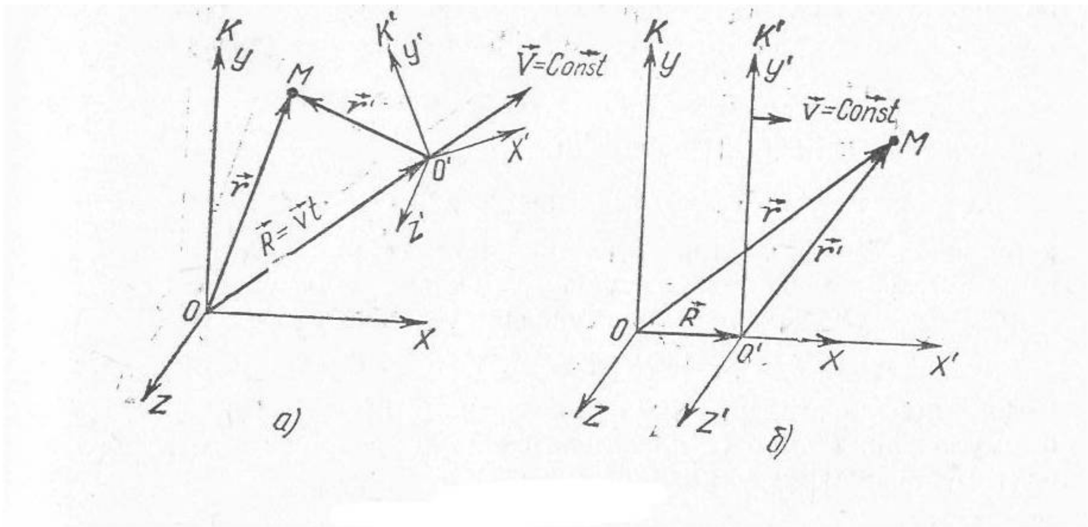
К система учун ҳаракат тенгламаси:

$$\vec{F} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

шу ҳаракат тенгламасини K' саноқ системаси учун ёзамиз.

$$v' = \frac{\overrightarrow{dr}}{dt} \qquad dt' = dt \qquad v' = v - \vec{V} \tag{6}$$

$$v = v' + V \tag{6.1}$$



5-расм

Тезликларнинг қўшишнинг классик қонуни (6.1) дан келиб чиқадиган натижалар вақтни мутлақолигидир $a' = a$. Демак заррачанинг массаси K' системада ҳам m га тенг деб фараз қилсак K' учун Нютоннинг иккинчи қонуни

$$\vec{F} = m'\vec{a}' \tag{7}$$

Нютоннинг (2) қонуни (5.1) ва (5.2) алмаштиришларга нисбатан инвариант ёки ҳаракат тенгламалари барча инерциал саноқ системаларида бир хил кўринишда бўлади.

$$L = L(q, \dot{q}) \qquad L' = (q, \dot{q})$$

$$\dot{q} = f(q, \dot{q}) \quad \ddot{q} = \varphi(q, \dot{q}).$$

Биз шундай алмаштириш топишимиз керакки ҳаракат тенгламалари иккала системада ҳам бир хил бўлсин.

$$dL' = dL'(q', \dot{q}) = \frac{d}{dt} \quad \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'} - \frac{\partial L'}{\partial q^2}$$

$$dL'(q', \dot{q}) = \frac{\partial L'}{\partial q} dq' + \frac{\partial L'}{\partial q'} dq'$$

$$dq' = df(q, \dot{q}) = \frac{df}{dq} dq + \frac{\partial f}{\partial q} d\dot{q}$$

А)
$$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'} = \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'} - \frac{dq'}{d\dot{q}} + \frac{\partial L'}{\partial q} \cdot e = \frac{\partial L'}{\partial q} \cdot \frac{d}{d\dot{q}} \left[\frac{\partial f}{\partial q} dq + \frac{\partial f}{\partial q} dq \right] + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'} =$$
$$= \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'} \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial q} \quad \frac{\partial q'}{\partial \dot{q}'} + \frac{\partial t}{\partial \dot{q}} \cdot \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}'} \right] \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'}$$

Б) $$\frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'} = \frac{\partial L'}{\partial q'} + \frac{\partial L'}{\partial \dot{q}'} \left[\frac{\partial f}{\partial q} \quad \frac{\partial q}{\partial \dot{q}} + \frac{\partial f}{\partial \dot{q}'} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \dot{q}'} \right];$$

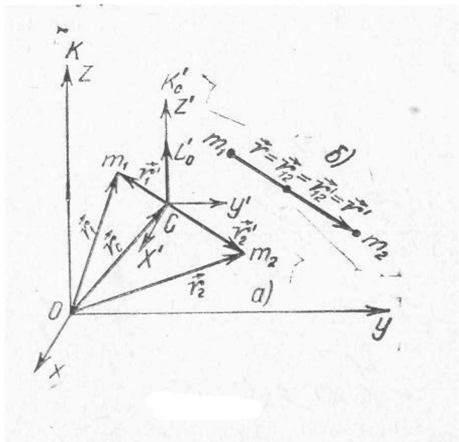
A ва B натижаларни Эйлер - лагранж тенгламасига қўйиб f ва φ функцияларни аниқлаш мумкин, яъни K ва K' системалар координаталари ва вақтни алмаштириш қонунларидан келтириб чиқариш мумкин. Энг муҳими бу алмаштириш муносабатлари Галилей алмаштиришларига ўхшаш чизиқли кўринишда бўлади. Содда ҳолда бир ўлчовли ҳаракатни қарасак

$$x' = x\alpha + \beta t \qquad t' = \gamma x + \delta t \tag{8.1}$$

$\alpha = 1 \qquad \beta = -\gamma$ бўлса, у ҳолда $\gamma = 0 \quad \delta = 1$ (8.2)

Эйлер-Лагранж тенгламаси, кинетик энергия, потенциал энергия, куч

Иккита ўзаро таъсирлашувчи зарралардан иборат берк системанинг ҳаракати ҳақидаги масала икки жисм масаласи дейилади. Бунда ўзаро таъсирлашувчи иккита заррадан фақат ички кучлар таъсиридаги ҳаракати ўрганилади.



9-расм

Икки жисм масаласи назарий жиҳатдан умумий ечимга эга бўлиб, амалий жиҳатдан жуда кўп қўлланишларга ега. Унинг ечимлари йўлдошлар ҳаракати, зррларнинг тўқнашуви ва сочилиш назарияларида ётади. Бу масаланинг ечимлари система ҳаракатини унинг инерция марказининг ҳаракати ва ва нуқтанинг шу марказга нисбатан ҳаракатига эътиборимизни қаратамиз. Бизга маълумки, механик система ҳаракатини икки қисмга системанинг бир бутун ҳолдаги ҳаракати ва система зарраларининг бир-бирига нисбатан ҳаракатига ажратиш мумкин. Шунинг учун механик система ҳаракатини ўрганишда қўзғалмас ва қўзғалувчан инерциал саноқ системаларини киритамиз.

K системага нисбатан механик системанинг ихтиёрий m_i нуқтасининг радиус-вектори ва тезлиги қуйидагича бўлади.

$$\vec{r}_i = \vec{r}_c + \vec{r}_i^{\,'}$$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i\,'$$

$$p = \sum_i m_i v_i = \sum_i m_i v_c\,' + \sum_i m_i v_c = p_i^{'} + \sum_i m_i \vec{v}_c \qquad (1)$$

$$\sum_i m_i = m, \qquad p_i^{'} = \sum_i m_i \vec{v}_c \qquad (2)$$

Механик система инерция маркази тушунчасини киритиб (2) муносабатни соддлаштириш мумкин. Массаси системанинг тўлиқ массасига тенг ҳолати

$$\vec{r}_c = \frac{\sum_i m_i \vec{r}_c}{m} \tag{3}$$

радиус-вектор билан аниқланувчи C нуқта механик системанинг инерция маркази деб юритилади. Ҳаракатланувчи K' система C инерция марказига жойлашганлиги сабабли (9-расм)

$$\vec{r}_c\,' = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{r}_c\,' = 0$$

$$\vec{v}_c^{\,'} = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{v}_i^{\,'} = 0$$

Иккита зарра ўзаро таъсир потенциал энергияси фақат улар орасидаги масофага яъни радиус-векторлар фарқининг абсолют қийматига боғлиқ. Бундай система учун Лагранж функцияси

$$L = \frac{m_i \dot{r}_1^2}{2} + \frac{m_i \dot{r}_2^2}{2} - U(|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|) \tag{4}$$

Классик механиканинг фазо ва вақт ҳақидаги тасаввурларига кўра фазо икки нуқтасининг берилган вақт моментларидаги ҳолатлари орасидаги масофа барча саноқ системаларида бир хил

$$m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = 0 \tag{6}$$

$$\vec{r}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{r} \qquad \vec{r}_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{r} \tag{7}$$

Бу ифодаларни (4) қўямиз

$$L = \frac{\mu \dot{r}^2}{2} - U(r) \tag{8}$$

$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ (9) – келтирилган масса.

(8) функция шаклан қўзғалмас координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган ташқи $U(r)$ майдонда ҳаракатланувчи m массали моддий нуқтанинг Лагранж функциясига мос келади. Шундай қилиб, ўзаро таъсирлашувчи икки моддий нуқта ҳаракати ҳақидаги масала бир нуқтанинг берилган ташқи $U(r)$ майдондаги ҳаракат масаласига келтирилди. Бу масала ечимига кўра

m_1, m_2 зарраларнинг ҳар бирини $r_1 = r_1(t)$, $r_2 = r_2(t)$ траекториялари (7) формула орқали топилади.

7-ma'ruza: SAQLANISH QONUNLARI.

REJA:

1. *Energiyaning saqlanish qonuni*
2. *Impul'sning saqlanish qonuni*
3. *Lagranj funksiyasi va impuls momentining qutb koordinatalar sistemasida ko'rinishi.*

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: Lagranj funksiyasi, hosila, vaqt, koordinata, tenglama, sistema, energiya, harakat, kattalik, tezlik, tezlanish, qonun, teorema, kinetik energiya, potensial energiya, impuls, zarra

Energiyaning saqlanish qonuni

Vaqtning bir jinsliligi tufayli yuzaga keladigan saqlanish qonunidan boshlaylik. Shu bir jinslikka ko'ra yopiq sistemaning Lagranj funksiyasi vaqtga oshkor bog'liq bo'lmaydi. Shuning uchun Lagranj funksiyasining vaqt bo'yicha to'la hosilasi quyidagicha yozilishi mumkin:

$$\frac{dL}{dt} = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i \qquad (1)$$

$\frac{\partial L}{\partial q_i}$ hosilalarni Lagranj tenglamalariga ko'ra $\frac{d}{dt}$ $\frac{dL}{\partial q_i}$ ga almashtirilsa

$$\frac{dL}{dt} = \sum_i \dot{q}_i \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} + \sum_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ddot{q}_i = \sum_i \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\dot{q}_i\right)$$

yoki

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L\right) = 0$$

Bundan ko'rinib turibdiki

$$E = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L$$

Bu kattalik yopiq sistema harakati davomida o'zgarmaydi, ya'ni u harakat integrallaridan biridir. Bu kattalik sistemaning energiyasi deyiladi.

Energiyaning saqlanish qonuni faqat yopiq sistemalar uchungina yemas, balki o'zgarmas (ya'ni vaqtga bog'liq bo'lmagan) tashqi maydondagi sistemalar uchun ham o'rinli. Energiyalari saqlanadigan mexanikaviy sistemalarni ba'zida konservativ sistemalar deyiladi.

$$L = T(q,\dot{q}) - U(q)$$

T-tezliklarning kvadratik funksiyasi. Bunga bir jinsli funksiyalar haqidagi tanish bo'lgan Eyler teoremasini qo'llab

$$\sum_i \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \sum_i \dot{q}_i \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} = 2T$$

Bu qiymatni (1) ga etib qo'yamiz.

$$E = T(q,\dot{q}) + U(q)$$

dekart koordinata esa

$$E=\sum_a \frac{m_a v_a^2}{2}+U(r_1,r_2....) \qquad (2)$$

Shunday qilib, sistemaga energiyasi ikkita butunlay har xil had tezliklarga bog'liq bo'lgan kinetik energiya va faqat zarralarning koordinatalariga qarab o'zgaradigan potensial energiya yig'indisi ko'rinishda berilishi mumkin.

Erkinlik darajasi s bo'lgan yopiq mexanikaviy sistema uchun $(2s-1)$ ta mustaqil harakat integrallari bor. Quyidagi oddiy mulohazalar buni yaqqol ko'rasatadi. Harakat tenglamalarning umumiy yechimida $2s$ ta ixtiyoriy o'zgarmas kattalik bo'ladi.

Yopiq sistema harakat tenglamalari vaqtga oshkor bog'liq bo'lmaganidan vaqt hisobining boshlanish mometini tanlash butunlay ixtiyoriydir. Shunga ko'ra tenglamalar yechimidagi ixtiyoriy o'zgarmaslardan birini har doim vaqt bo'yicha additiv o'zgarmas t_0 ko'rinishida tanlash mumkin.

$$q_i=q_i\left(t+t_0,C_0,C_2,....C_{2S-1}\right)$$
$$\dot{q}_i=\dot{q}_i\left(t+t_0,C_0,C_2,...C_{2S-1}\right)$$

<u>Impulsning saqlanish qonuni</u>

N'yutonning ikkinchi qonuni $p=mv$ impuls (harakat miqdori) ning o'zgarishi haqidagi teorema deb ham yuritiladi

$$\frac{\overrightarrow{dP}}{\overrightarrow{dt}}=\vec{F}\,.$$

Zarra impulsining vaqt bo'yicha hosilasi unga ta'sir etuvchi natijaviy kuchga teng. Agar zarracha ta'sir etuvchi natijaviy kuchga bo'lsa-yu, kuch nolga teng bo'lsa $(F=0)$.

$$\vec{P}=\vec{P_0}=\overrightarrow{const}, \qquad \overrightarrow{mv}=\overrightarrow{mv_0}$$
$$\vec{v}=\vec{v_0}=\overrightarrow{const}$$

Bu formula harakat integralidan yana biri impuls integrali bo'lib, impulsning saqlanish qonunini ifodalaydi. Zarraga ta'sir etuvchi natijaviy kuch nolga teng bo'lsa, uning impulsi o'zgarishsiz saqlanadi, bunda zarra doimiy chiziqli tezlik bilan hisoblanadi.

Fazoning bir jinsligidan inersiya saqlanish qonuni kelib chiqdi. Parallel sistemaning barcha nuqtalari bir xil masofada siljiydi. Ya'ni nuqtalarning radius-vektori o'zgaradi. $r_a \to r_a+c$ koordinatalarning cheksiz kichik o'zgaruvchan L funksiyasini quyidagicha o'zgartiradi.

$$\delta L=\sum\frac{\partial L}{\partial r_a}\delta r_a=\varepsilon\sum\frac{\partial L}{\partial r_a}$$

$\partial L=0$ ε ning ixtiyoriy qiymatida $\sum\frac{\partial L}{\partial r_a}=0$ Lagranj tenglamalariga ko'ra

$$\sum\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v_a}=\frac{d}{dt}\sum\frac{\partial L}{\partial v_a}=0$$

Shunday qilib, yopiq mexanikaviy sistema harakatida

$$P = \sum_a \frac{\partial L}{\partial v_a}$$

$$p = \sum_a m_a v_a$$

$p_a = m_a v_a$ impuls $\sum \frac{\partial L}{\partial r_a} = 0$ formulada $\frac{\partial L}{\partial r_a} = -\frac{\partial U}{\partial r_a}$ hosila α zarraga ta'sir etuvchi F_a kuchni ifodalaydi. Bu tenglik sistemaning barcha zarralariga ta'sir qiluvchi kuchlar yig'indisi nolga tengligini bildiradi.

$$\sum_a F_a = 0.$$

Ikkita moddiy nuqtadan iborat sistema $F_1 + F_2 = 0$. Ikki zarra o'rtasidagi o'zaro ta'sir etadigan kuchlar kattalik jihatdan teng bo'lib bir-birlariga qarama-qarshi yo'nalgan. Bu xulosa ta'sir va aks ta'sirining tenglik qonuni nomi bilan ma'lum.

Lagranj funksiyasi va impuls momentining qutb koordinatalar sistemasida ko'rinishi.

Impuls va energiya saqlanish qonunlarida ko'rganimizdek, yopiq sistema uchun $\vec{M}$ ning M_x, M_y, M_z komponentalari saqlanuvchan bo'ladi. Agar sistema tashqi biror maydonda joylashsa va berilgan maydon qaysi o'qqa nisbatan simmetrik bo'lsa, shu o'q atrofida aylanishga nisbatan sistemaning mexanik xossasi o'zgarmaydi, demak shu o'q bo'yicha impuls momentining qiymati o'zgarmas bo'ladi. Misol tariqasida, markaziy simmetriyaga ega bo'lgan maydonni qaraylik. Bu maydonda potensial energiya faqat biror kuch markazigacha bo'lgan masofaning funksiyasi bo'ladi. Harakat biror tekislikda, masalan, xy tekisligida sodir bo'lsin. Qutb koordinatalari

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

kiritib tezliklar uchun qo'yidagilarni topamiz:

$$\dot{x} = \dot{r}\cos\varphi - r\dot{\varphi}\sin\varphi$$

$$\dot{y} = \dot{r}\sin\varphi - r\dot{\varphi}\cos\varphi$$

Impuls momentining bu tekislikka tik bo'lgan komponentasi

$$M_z - [\vec{r}\ \vec{p}]_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = mr^2\dot{\varphi} = const \qquad (9)$$

Berilgan sistema uchun Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{x}^2 + \dot{y}^2\right) - U(r) = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r) \qquad (10)$$

Ifodasidan ham (9) tenglikni chiqarish mumkin. Impuls momentining z o'qiga proyeksiyasi Lagranj funksiyasi bilan

$$M_z = \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}$$

ko'rinishda bog'langani uchun (10)dan $\dot{\varphi}$ bo'yicha hosila olib

$$M_z = mr^2\dot{\varphi} = const$$

Ekanligini topamiz. Chunki Lagranj tenglamasidagi $\frac{\partial L}{\partial \varphi}$ xosila (10) da L funksiyaning φ burchakka oshkor bog'liq bo'lmaganidan nolga teng bo'ladi.

Misol. Impuls momenti komponentalarini va uning absolyut qiymatini silindrik, sferik koordinatalarda ifodalang.

1. Silindrik koordinatalarda ifodalaymiz.

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = z$$
$$M_x = m(y\dot{z} - z\dot{y}) = m\sin\varphi(r\dot{z} - z\dot{r}) - mrz\cdot\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$M_y = m(z\dot{x} - x\dot{z}) = m\cos\varphi(z\dot{r} - r\dot{z}) - mrz\cdot\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$M_z = m(x\dot{y} - y\dot{x}) = m r^2\cdot\dot{\varphi}$$
$$M^2 = M_x^2 + M_y^2 + M_z^2 = m^2 r^2\dot{\varphi}^2\left(r^2 + z^2\right) + m^2\left(r\dot{z} - z\dot{r}\right)^2$$

2. Sferik koordinatalarda ifodalaymiz.

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$
$$\dot{x} = \dot{r}\sin\theta\cos\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\cos\varphi - r\sin\theta\dot{\varphi}\sin\varphi$$
$$\dot{y} = \dot{r}\sin\theta\sin\varphi + r\dot{\theta}\cos\theta\sin\varphi - r\sin\theta\dot{\varphi}\cos\varphi$$
$$\dot{z} = \dot{r}\cos\theta - r\cdot\dot{\theta}\sin\theta$$
$$M_x = -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi)$$
$$M_x = mr^2(\dot{\theta}\cos\varphi - \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\sin\varphi)$$
$$M_z = mr^2\sin^2\theta\dot{\varphi}$$
$$M_x = -mr^2(\dot{\theta}\sin\varphi + \dot{\varphi}\sin\theta\cos\theta\cos\varphi) \; M^2 = m^2 r^4(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\cdot\varphi^2)$$

<u>Nazorat savollari</u>

1. *Energiyaning saqlanish qonuni keltirib chiqaring*
2. *Impul'sning saqlanish qonuni keltirib chiqaring*
3. *Lagranj funksiyasi va impuls momentining qutb koordinatalar sistemasida ko'rinishi yozing.*

8-ma'ruza: **SAQLANISH QONUNLARI. IMPULS MOMENTINING SAQLANISHI**

REJA

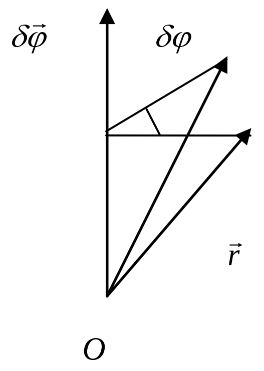
- *Fazoning izotropik xossasi*
- *Impuls momentining saqlanishi*
- *Radius-vektorning koordinata boshining tanlab olinishiga bog'liqligi.*

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: Lagranj funksiyasi, hosila, vaqt, koordinata, tenglama, sistema, energiya, harakat, kattalik, tezlik, tezlanish, qonun, teorema, kinetik energiya, potensial energiya, impuls, impuls momenti

Fazoning izotropik xossasi va impuls momentining saqlanishi

Mexanik sistema impuls momentining saqlanishi fazoning izotropligi bilan bog'langandir.

Fazoning izotropligi yopiq sistema mexanik xossalarining fazoda bu sistemani (yaxlit) biror uq atrofida burilishga nisbatan o'zgarmasligini ko'rsatadi. Shunga asosan sistemani biror cheksiz kichik burchakka buraylikki, uning Lagranj funksiyasi bu holda o'zgarmay qolsin.



Cheksiz kichik burilish burchagi vektorini $\delta\vec{\varphi}$ deylik. Uning absolyut qiymati $\delta\varphi$ bo'lsin, yo'nalishi esa burish o'qi yo'nalishida o'ng vint qoidasi bilan aniqlansin. Dastlab bunday burilishda koordinat boshidan o'tkazilgan radius-vektor orttirmasining nimaga tengligini topaylik. Radius-vektor uchining chiziqli siljishi

$$|\delta\vec{r}| = \delta\varphi \cdot r \cdot \sin\theta$$

Bu orttirma yo'nalishi $\delta\vec{\varphi}, \vec{r}$ vektorlar tekisligiga perpendikulyar bo'ladi. Shuning uchun

$$\delta\vec{r} = [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{r}] \qquad (1)$$

Sistemani burganimizda faqat radius-vektorning yo'nalishi o'zgarib qolmasdan shuningdek barcha zarralar tezliklar yo'nalishi ham o'zgaradi. Bu paytda, albatta barcha vektorlar bir hil qonun asoida almashtiriladi. Demak, (1) almashtirishni $\vec{v}$ iuchun ham yozishimiz mumkin:

$$\delta\vec{v} = [\delta\vec{\varphi} \cdot \vec{v}] \qquad (2)$$

Lagranj funksiyasining orttirmasi

$$\delta L = \sum_i \left(\frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} \delta\vec{r}_i + \frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} \delta\vec{v}_i \right) \qquad (3)$$

Shartga ko'ra, $\delta L = 0$. U holda (1), (2) larni (3) ga qo'yib, Lagranj tenglamasi asosida

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}_i} = \vec{p}_i, \qquad \frac{\partial L}{\partial \vec{r}_i} = \dot{\vec{p}}_i$$

almashtirishlarini o’tkazib topamiz:

$$\sum_i \left(\dot{\vec{p}}_i[\delta\vec{\varphi}\cdot\vec{r}_i] + \vec{p}_i[\delta\vec{\varphi}\cdot\vec{v}_i]\right) = 0 \qquad (4)$$

Bu yerda siklik almashtirish o’tkazish yo’li bilan $\delta\vec{\varphi}$ ni qavsdan tashqari chiqarib yoza olamiz:

$$\delta\vec{\varphi}\sum_i \left([\vec{r}_i\dot{\vec{p}}_i] + [\vec{v}_i\vec{p}_i]\right) = \delta\vec{\varphi}\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i\vec{p}_i] = 0$$

Oldin ko’rganimizdek, $\delta\vec{\varphi}$ ixtiyoriy bo’lgani uchun

$$\frac{d}{dt}\sum_i[\vec{r}_i\vec{p}_i] = 0$$

bo’ladi. Demak, yopiq sistema harakatida

$$\vec{M} = \sum_i[\vec{r}_i\vec{p}_i] = const \qquad (5)$$

Vektor kattalik saqlanuvchan bo’ladi. Bu kattalik sistema impuls momenti deyiladi. Impuls momentining additivligi (5) dan yaqqol ko’rinadi hamda u sistema zarralari o’rtasida o’zaro ta’sirining mavjudligiga yoki mavjud emasligiga bog’liq bo’lmaydi. Impuls momenti ifodasiga zarralar radius-vektorlari kiradi.

Radius-vektorning koordinata boshining tanlab olinishiga bog’liqligi.

Radius-vektorlar o’z navbatida koordinata boshining tanlab olinishiga bog’liqdir. Bir-biridan koordinata boshlari a masofaga farq qiluvchi sistemalarga nisbatan birgina zarra radius-vektorlari o’zaro

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i' + \vec{a}$$

Munosabat bilan bog’langanligi bizga ma’lum. Shuning uchun ularga tegishli impuls momentlari ham

$$\vec{M} = \sum_i[\vec{r}_i\vec{p}_i] = \sum_i[(\vec{r}_i' + \vec{a})\vec{p}_i] = \sum_i[\vec{r}_i'\vec{p}] + \sum_i[\vec{a}\vec{p}_i] = \vec{M}' + \left[\vec{a}\sum_i\vec{p}_i\right] = \vec{M}' + [\vec{a}\vec{P}] \quad (6)$$

Bo’ladi. (6) dan ko’rinadiki, agar sistema yaxlit tinch holatda bo’lsa, ya’ni $\vec{P} = 0$ bo’lsa, uning momenti koordinata boshining tanlab olinishiga bog’liq bo’lmaydi. Agar bir-biriga nisbatan $\vec{v}$ tezlik bilan harakatlanayotgan S va S' inersial sistemalarda impuls momentlarini qarasak, tezliklar

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i' + \vec{V}$$

almashtirishlari bilan bog’langani uchun

$$\vec{M} = \sum_i m_i[\vec{r}_i\vec{v}_i] = \sum_i m_i[\vec{r}_i\vec{v}_i'] + \sum_i m_i[\vec{r}_i\vec{V}] = \vec{M}' + m[\vec{R}\vec{V}] \qquad (7)$$

Bu yerda $m = \sum_i m_i$ sistemadagi barcha zarralar massalar yig’indisi, $\vec{R}$ esa

$$R = \frac{\sum_i m_i\vec{r}_i}{\sum_i m_i}$$

Sistema inersiya markazi deyiladi. (7) bir inersial sistemadan ikkinchi bir inersial sistemaga impuls momentini almashtiruvchi formula hisoblanadi. Agar mexanik S' sistemaga nisbatan yaxlit tinch tursa, S ga nisbatan esa $\vec{V}$ tezlik bilan harakat qilayotsa, u holda

$$\vec{P} = m\vec{V}$$

Sistemaning to’liq impulsi bo’ladi. U holada (7)

$$\vec{M} = \vec{M}' + \left[\vec{R}\vec{P}\right] \tag{8}$$

Ko’rinishda yoziladi. Boshqacha qilib aytganda, sistema impuls momenti $\vec{M}$ S' sistemadagi «xususiy impuls momenti» va zarralar sistemasining S ga nisbatan yaxlit harakati bilan bog’liq bo’lgan $\left[\vec{R}\vec{P}\right]$ impuls momenti yig’indisidan iborat bo’ladi.

Nazorat savollari

1. Energiyaning saqlanish qonuni keltirib chiqaring
2. Impul’sning saqlanish qonuni keltirib chiqaring
3. Lagranj funksiyasi va impuls momentining qutb koordinatalar sistemasida ko’rinishi yozing.
4. Fazoning izotropik xossasi ko’rsating
5. Impuls momentining saqlanishi keltirib chiqaring
6. Radius-vektorning koordinata boshining tanlab olinishiga bog’liqligini ko’rasting.

9 ma'ruza. HARAKAT TENGLAMALARINI INTEGRALLASH. BIR O'LCHAMLI HARAKATNI INTEGRALLASH.

REJA:

- *Bir o'lchovli harakat tenglamalarini integrallash*
- *Ayrim xususiy hollardagi harakat tenglamalarini integrallash*
- *Markaziy maydondagi harakat.*
- *Markaziy kuch maydoni*
- *Effektiv potensial energiya va to'la energiyalarning radius vektordan bog'liqligi*

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: moddiy nuqta, Lagranj funksiyasi,markaziy maydon, effiktiv potinsial energiya, to'la enargiya, markaziy kuch maydoni, infinit va finit xarakatlar

Eyler-Lagranj tenglamasi, kinetik energiya, potensial energiya, kuch

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) = \frac{\partial L}{\partial q_i} \qquad (1)$$

$$\dot{q}_i = \frac{d}{dt} q_i \qquad (2)$$

Ushbu (1) ko'rinishdagi Eyler-Lagranj tenglamasi ixtiyoriy koordinatalar sistemasida ifodalanuvchi barcha hollar uchun o'rinli. Masalani soddalashtirish maqsadida dastlab, faqat bir o'lchovli harakatlanuvchi moddiy nuqtaning harakat tenglamasini keltirib chiqaramiz. Bir o'lchovli sistema uchun (1) tenglama quyidagi ko'rinishni oladi:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = \frac{\partial L}{\partial x} \qquad (3)$$

Bu holda Lagranj funksiyasi $L = L(x, \dot{x})$ ko'rinishda.

Buni N'yutonning ikkinchi qonuni bilan taqqoslasak,

$$\frac{d}{dt}(mv_x) = F_x; \qquad \frac{d}{dt} p_x = F_x \qquad (4)$$

(3) va (4) tenglamani taqqoslash shuni ko'rsatadiki ular ayni bir moddiy nuqtaning harakat tenglamasini xarakterlashi uchun quyidagi shartlarni bajarishi kerak.

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = p_x, \qquad \frac{\partial L}{\partial x} = F_x \qquad (5)$$

$$p_x = mv_x = m\ddot{x}, \qquad F_x = -\frac{\partial U}{\partial x} \qquad (6)$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}, \qquad L_1(\dot{x}) = \frac{m}{2}\dot{x}^2 \\ &\frac{\partial L}{\partial x} = -\frac{\partial U}{\partial x}, \qquad L_2(x) = -U(x) \end{aligned} \qquad (7)$$

(7) munosabatdan ko'rinib turibdiki bu holda Lagranj funksiyasini uning additivlik xossasidan foydalanib quyidagi ikki hadning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin.

$$L(x,\dot{x}) = L_1(\dot{x}) + L_2(x) \qquad (8)$$

(7) ni e'tiborga olsak

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \qquad (9)$$

Bu munosabat bir o'lchovli harakat holi uchun moddiy nuqtaning klassik Lagranj funksiyasi. Demak, ixtiyoriy uch o'lchovli harakatga qatnashuvchi moddiy nuqtaning Lagranj funksiyasini uning kinetik va potensial energiyalarining ayirmasi sifatida ifodalash mumkin.

$$L = T - U \qquad (10)$$

Bu yerda T - kinetik energiya; U -potensial energiya.
Lagranj funksiyasini Dekart koordinatalar sistemasi uchun quyidagicha ifodalash mumkin

$$L = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x,y,z) \qquad (11)$$

Topilgan natijalardan foydalanib Eyler-Lagranj tenglamasini quyidagi ko'rinishga keltirish mumkin

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) = F_x \quad (12) \qquad\qquad m\ddot{x} = F(x,\dot{x},t) \qquad (13)$$

(13) nuqtaning bir o'lchovli xarakat tenglamasi. Demak bir o'lchovli harakat tenglamasini integrallash uchun ya'ni uning ixtiyoriy vaqt momentidagi koordinatasini aniqlash uchun (13) harakat tenglamasini yechish lozim.

Xususiy hollarni ko'rib chiqamiz.

1) $m\ddot{x} = 0$ bu holda jism tezlanishi nolga teng bo'lib $\ddot{x} = 0$, jism tezligi o'zgarmaydi $\dot{x} = const$.

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t$$

2) $m\ddot{x} = F = const$. Bu holda jismning tezlanishi vaqt o'tishi bilan o'zgarmaydi. Boshqacha aytganda jism tekis o'zgaruvchan harakat qiladi.

$$x(t) = x_0 + v_{0x}t + \frac{a_x t^2}{2} = x_0 + v_{0x}t + \frac{F}{2m}t^2$$

Bir o'lchovli harakat tenglamasini umumiy holda integrallash imkoni yo'q. Chunki moddiy nuqtaga ta'sir qiluvchi kuch uning koordinatasiga, tezligiga va vaqtdan bog'liq. Bu fikrni tushuntirish uchun quyidagi misollarni ko'rib chiqamiz.

1. $F(x) = -kx \quad (k > 0)$

$m\ddot{x} = -kx, \quad m\ddot{x} + kx = 0 \quad k/m = \omega_0^2$ -xususiy tebranishlar chastotasi.

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (A)$$

bu tenglama garmonik tebranishlarni tavsiflaydi.

2. $F(x,\dot{x}) = -kx - r\dot{x} \quad (k,r > 0)$

bu munosabatdagi ikkinchi had qarshilik kuchi hisoblanib, moddiy nuqta bilan u harakatlanayotgan muhit orasidagi qarshilikni inobatga oladi. Qarshilik kuchi doimo tezlikka qarama-qarshi yo'naladi. Bu holda xarakat tenglamasi quyidagi ko'rinishni oladi:

$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = 0$ (B)

bu tenglama so'nuvchi tebranishlarni ifodalaydi, ya'ni vaqt o'tishi bilan so'nuvchi erkin tebranishlarni tavsiflaydi.

3. $F(x, \dot{x}, t) = -kx - r\dot{x} + F_0 \cos \omega t$

Bu munosabatda tenglikning o'ng tomonidagi uchinchi had davriy ravishda ta'sir etuvchi majburiy kuch ifodasidir. Bu yerda dastlabki ikki had $k = 0, \quad r = 0$ bo'lsa jism bu kuch ta'sirida quyidagi qonunniyat bo'yicha o'zgaruvchi tezlanishga yega bo'ladi:

$$\ddot{x} = \frac{F_0}{m} \cos \omega \ t$$

Shunday qilib, oxirgi holda tenglama quyidagi ko'rinishga yega bo'ladi

$$m\ddot{x} + kx + r\dot{x} = F_0 \cos \omega t \qquad \text{(C)}$$

Yuqorida ko'rib o'tilgan uchala holda bir o'lchovli harakat tenglamalarini aniq yechish mumkin.

Markaziy maydondagi harakat. Markaziy kuch maydoni

Zarra potensial energiyasi bu zarraga ta'sir etuvchi biror kuch markazi joylashgan nuqtagacha bulgan r masofaning radiusi bo'lganda bunday kuch yaratgan maydonni markaziy kuch deb yttgan edik. Bunday kuch

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(\vec{r})}{\partial \vec{r}} = -\frac{\partial U}{\partial \vec{r}} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Ko'rinishida yoziladi va absolyut jihatdan faqat r buladi,har bir nuo'tada radius-vektor $\vec{r}$ bo'yicha yo'naladi. Bunday maydon Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(r)$$

Vaqtda oshkor bog'liq bulmaydi hamda sferik simmetriyaga ega bo'ladi. Shuning uchun energiya saqlanuvchan,

$$E = \frac{mv^2}{2} + U(r) = const \qquad (11)$$

bo'ladi. Xudi shuningdek, berilgan holda maydon markaziga nisbatan impuls momenti ham saqlanadi. Bita zarra uchun

$$\vec{M} = [\vec{r} \ \vec{p}] = const \qquad (12)$$

bo'ladi va

$$\vec{M} \vec{r} = [\vec{r} \ \vec{p}]\vec{r} = \vec{p}[\vec{r} \ \vec{r}] = 0 \qquad (13)$$

<u>Xulosa 1. Markaziy kuch maydonining bir tekislikda sodir bo'lishi. Effektiv potensial energiya.</u> Markaziy maydonda harakat bir tekislikda sodir bo'ladi. Harakat tekisligini xy tekisligi deb olsak, impuls momenti z o'qi bo'ylab yo'naladi:

$$|\vec{M}| = M_z = M_0$$

Bu yerda M_0 impuls momentining doimiy qiymati. Qutb koordinatalari kiritish yo'li bilan

$$M_0 = mr^2\dot{\varphi} \tag{14}$$

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{M_0}{mr^2} \tag{15}$$

Qutb koordinatalarida Lagranj funksiyasi va energiya ko'rinishlari quyidagicha bo'ladi:

$$L = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) - U(r)$$

$$E = \frac{m}{2}\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\right) + U(r) \tag{16}$$

(16) ga $\dot{\varphi}$ ni (15)dan qo'ysak

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + \frac{M_0^2}{2mr^2} + U(r) \tag{17}$$

Bu yerda $\frac{M_0^2}{2mr^2}$ markazdan qochma energiya deyiladi. Agar

$$U_{eff}(r) = U(r) + \frac{M_0^2}{2mr^2} \tag{18}$$

belgilash kiritsak,

$$E = \frac{m\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r) \tag{19}$$

<u>Xulosa 2. Markaziy kuch maydonida finitli va infinitli xarakat uchun trayektoriya tenglamasi.</u> Markaziy maydonda harakat «effektiv» potensial energiyalik bir o'lchamli harakatga keltiradi.

Endi zarra trayektoriya tenglamasini aniqlaymiz. Aytganimizdan, berilgan holda harakat integrallari hisoblangan E, M_0 kattaliklar hisoblangan tenglamasini yechmasdan trayektoriya tenglamasini topish imkonini beradi. Buning uchun (17) dan $\dot{r}$ ni topamiz:

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M_0^2}{m^2r^2}} \tag{20}$$

bundan

$$dt = \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M_0^2}{m^2r^2}}} \tag{21}$$

ekanligini topamiz va (21)ni

$$d\varphi = \frac{M_0}{mr^2}dt$$

ifodaga qo'yib, itegrallasak

$$\varphi = \int \frac{\frac{M_0}{mr^2}dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M_0^2}{m^2r^2}}} + const \tag{22}$$

Trayektoriya tenglamasini topamiz, chunki (22) tenglama r va φ o'zgaruvchilar o'rtasidagi bog'lanishni ifoda etadi.
Biz ko'rdikki,

$$U(r)+\frac{M_0^2}{2mr^2}=E \qquad (23)$$

tenglik markazdan qancha masofa zarra harakat qiladigan soha chegarasini aniqlar edi. Bu holda (17) va (23) lardan radial tezlik $\dot{r}$ ning nolga teng bo'lishligi kelib chiqadi. Lekin bu holda zarra, bir o'lchamli harakatda ko'rganimizdek, harakatdan to'xtamaydi, chunki burchakli tezlik $\dot{\varphi}$ nolga teng bo'lmaydi. Radial tezlik uchun $\dot{r}=0$ tenglik trayektoriyadagi «burilish nuqtani» ko'rsatadi, bu nuqtadan boshlab $r(t)$ oshib boruvchi yoki kamayib boruvchi qiymatlarni qabul qiladi. Agar r ning o'zgarish sohasi $r \geq r_{\min}$ shart bilan chegaralangan bo'lsa, zarra cheksizlikdan $r=r_{\min}$ gacha yaqinlashib, yana cheksizlikka uzoqlashadi.

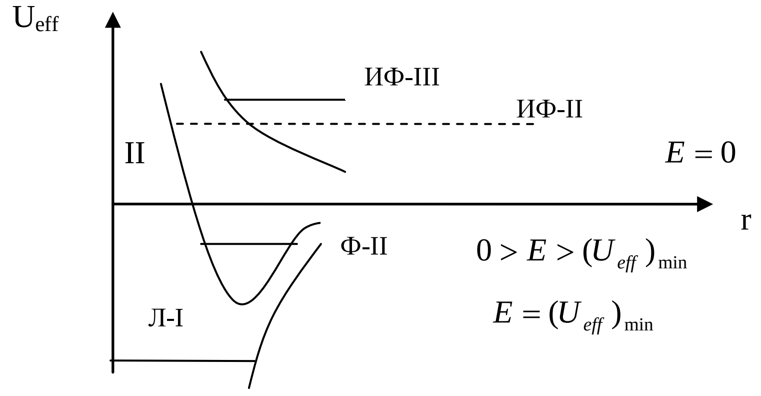
Agar r ning o'zgarish sohasi $r_{\max}$ va $r_{\min}$ chegaralarga ega bo'lsa, zarra harakati finitli bo'ladi va uning trayektoriyasi $r=r_{\max}$ va $r=r_{\min}$ doiralar bilan chegaralangan halqa ichida joylashgan bo'ladi. Lekin bundan zarra harakat trayektoriyasining so'zsiz yopiq bo'lishi kerak degan xulosa kelib chiqmaydi. Zarraning kuch markazigacha bo'lgan masofaning $r_{\max}$ dan $r_{\min}$ gacha va undan yana $r_{\max}$ ga qaytishida radius vektor $\Delta\varphi$ burchakka buriladi va uning qiymati (22) ga asosan:

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{\frac{M_0}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\left[E-U(r)\right]-\frac{M_0}{r^2}}} \qquad (24)$$

Trayektoriyaning yopiq bo'lishligi uchun

$$\Delta\varphi = \frac{m}{n}\cdot 2\pi \qquad (25)$$

(bu yerda m, n butun sonlar) tengligining bajarilmog'i zarurdir. U holda davr n marta takrorlangandan keyin zarraning radius-vektori m to'liq aylanishlar yasab yana boshlangich qiymatini qabul qiladi. Lekin trayektoriyaning yopiq bo'lishligi kamdan-kam hollarda uchraydi. Shuning uchun umumiy holda finitli harakat trayektoriyasi yopiq bo'lmaydi va u $r_{\min}$ va $r_{\max}$ chegaralardan cheksiz ko'p marta o'tadi va rasmda chizma hosil bo'ladi.



Agar potensial energiya $U(r)\sim\frac{1}{r},\ r^2$ bog'lanishga ega bo'lsa, anna shu hollardagina trayektoriya yopiq bo'ladi. Infinitli harakat uchun (24) quyidagicha yoziladi

$$\Delta\varphi = 2\int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M_0}{r^2}dr}{\sqrt{2m[E - U(r)] - \frac{M_0}{r^2}}} \qquad (26)$$

Bu burchak tortuvchi markazdan uning trayektoriyasiga o'tkazilgan asimptotalar o'rtasidagi burchak hisoblanadi.

Effektiv potensial energiya va to'la energiyalarning radius vektordan bog'liqligi

Endi (17) va (18) energiyalarning r bog'liqlik grafigini chizaylik. Potensial energiya tortishuvga mos kelsin, ya'ni $U(r) < 0$ bo'lsin.

U holda $r \to 0$ da $U(r) \to -\infty$

$$\frac{M_0^2}{2mr^2} \to \infty \text{ intiladi.}$$

$r \to \infty$ da esa $U(r)$, $\frac{M_0^2}{2mr^2} \to 0$

Faraz qilaylikki,

A) $r \to 0$ bo'lganda $U(r)$ energiya $\frac{M_0^2}{2mr^2}$ ga nisbatan tezroq cheksizlikka intilsin. U holda I-egrilikni olamiz.

B) $r \to 0$ bo'lganda $\frac{M_0^2}{2mr^2}$ energiya $U(r)$ ga nisbatan tezroq cheksizlikka intilsa, II-egrilikka ega bo'lamiz.

V) Endi $U(r) > 0$ itaruvishga mos kelsin. U holda U_{eff} masofaning biror nuqtasida minimumga ega bo'lmaydi va III-egrilik hosil bo'ladi.

Rasmda IF-II, IF-III lar energiyasining berilgan qiymatlarida infinitli harakatni ko'rsatadi. Infinitli harakat faqat B-holda mavjud bo'ladi (rasm IF-I bilan ko'rsatilgan).

Deyarlik ko'p hollarda $\frac{M_0^2}{2mr^2}$ energiya $r \to 0$ da $U(r)$ ga nisbatan tezroq cheksizlikka intiladi va zarraning kuch markaziga kirib borishga imkon bermaydi. A-holda esa $r \to 0$ $U(r)$ energiya juda tez $-\infty$ ga intilsa, zarra kuch markaziga «tushib» qolishi mumkin. (17) dan

$$\frac{m\dot{r}^2}{2} = E - U(r) - \frac{M_0^2}{2mr^2} > 0$$

yoki

$$r^2U(r) + \frac{M_0^2}{2mr^2} < Er^2$$

tengsizlikka ega bo'lamiz. Bundan $r \to 0$ ga intiluvchi qiymatga

$$r^2U(r)\Big|_{r\to 0} < -\frac{M_0^2}{2m}$$

sharti bajarilgandagina ega bo'ladi. Bundan

$$U(r)\Big|_{r\to 0} < -\frac{M_0^2}{2mr^2} = -\frac{\alpha}{r^2}$$

Ekanligini topamiz. Demak, $U(r)$ manfiy cheksizlikka yoki $-\frac{\alpha}{r^2}$ tariqasida $\frac{1}{r^n}$ $(n \geq 2)$ tariqasida intilmog'i kerak.

Nazorat savollari

1. *Bir o'lchovli harakat tenglamalarini integrallang.*
2. *Markaziy maydondagi harakatda xarakatni tushuntirib bering*
3. *Markaziy kuch maydoni haqida tushuncha bering*
4. *Effektiv potensial energiya va to'la energiyalarning radius vektordan bog'liqligi ko'rasting.*

10- ma'ruza: MARKAZIY MAYDONDAGI HARAKAT.
GRAFIK TAHLIL, HARAKAT INTEGRALLARI.

REJA:

- *Ayrim xususiy hollardagi harakat tenglamalarini integrallash*
- *Inersiya markazi S-sistema*
- *Inersial va S-sistemalarda sistema mexanik energiyasi*
- *Endi sistema 2 ta zarradan tashkil topgan holni qaraylik.*

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: kinetik energiya, mexanik sistema, inersiya markazi s-sistema, inersiya markazi tushunchasi, inersial va s-sistemalarda sistema mexanik energiyasi

Ayrim xususiy hollardagi harakat tenglamalarini integrallash

Bitta erkinlik darajasiga yega bo'lgan sistema bir o'lchovli sistema deyiladi. Bunga $U(x)$ potensial maydondagi xarakatni, yassi matematik mayatnikni misol keltirish mumkin. Bir o'lchamli harakat tenglamasi umumiy ko'rinishdagi to'la yechimga ega ya'ni tegishli harakat tenglamasini berilgan boshlang'ich shartalarda yechib, zarraning harakati to'liq aniqlanishi mumkin. Buning uchun energiyaning saqlanish qonunidan foydalanish maqsadga muvofiq. Bir o'lchovli hol uchun Lagranj tenglamasi quyidagi ko'rinishda

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x) \qquad (1)$$

Bunda Lagranj funksiyasiga tegishli harakat tenglamasining birinchi integrali energiyaning saqlanish qonunini ifodalovchi birinchi tartibli differensial tenglama yechiladi. (1) Lagranj funksiyasi uchun $U(x)$ potensial maydondagi zarra va matematik mayatnik uchun (8-a rasm) energiyaning saqlanish qonuni quyidagi ko'rinishga ega:

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = E_0 = const \qquad (2\text{-a})$$

$$E = \frac{ml^2\dot{\varphi}^2}{2} + mgl\cos\varphi = const \qquad (2\text{-v})$$

(2-b) tenglikda mayatnikning potensial energiyasi O nuqtadan o'tuvchi gorizontal chiziqdan boshlab hisoblangan. (2-a) munosabatdan nuqtaning koordinatasi va vaqtni topamiz.

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) \qquad \dot{x} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x))}$$

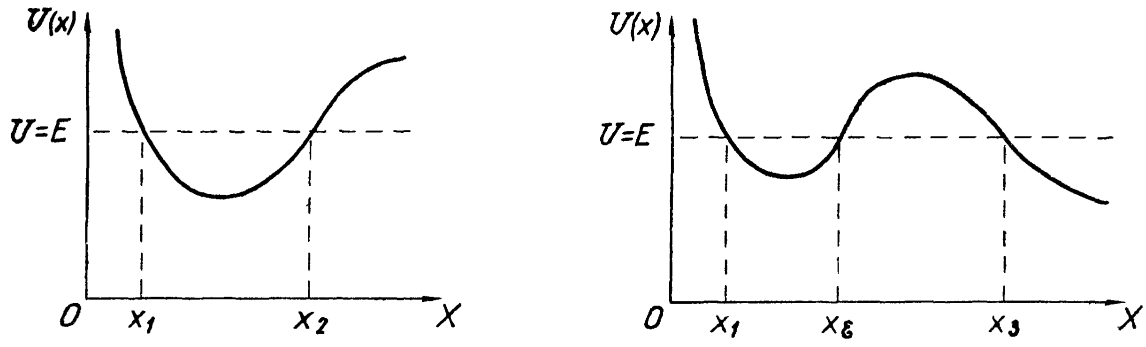
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}(E - U(x)} \qquad (3\text{-a})$$

$$t = \sqrt{\frac{m}{2}}\int \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} + const \qquad (3\text{-b})$$

Harakat tenglamasini yechishda E to'la energiya va integral doimiysi ikkita ixtiyoriy doimiy vazifasini bajaradi. (3-a) dagi birinchi va ikkinchi integrallar mexanik sistemaning bir o'lchovli harakatini to'la aniqlaydi. Ammo (3) yechimdan foydalanmasdan ham faqat (2-a) saqlanish qonuni asosida ham bir o’lchamli harakatni ko’pgina xarakterli xususiyatlarini aniqlash mumkin. Bunda to’liq energiya va potensial energiyalarning berilgan grafiklari asosida bir o’lchamli harakat sifat jihatdan tekshiriladi va mumkin bo’lgan harakat sohalari hamda ulardagi harakat turlari aniqlanadi. Kinetik energiya hamma vaqt musbat kattalik bo’lganidan va saqlanish qonuniga ko’ra

$$\frac{m\dot{x}^2}{2} = E - U(x) > 0, \qquad (a) \qquad E > U(x) \qquad (b) \qquad\qquad (4)$$

Demak, harakat faqat (4) shartni qanoatlantiruvchi, ya’ni E to’liq energiya U potensial energiyadan katta bo’lgan sohalardagina yuz beradi. Shuning uchun (4) shartni qanoatlantiruvchi sohalar klassik ruxsat yetilgan sohalar deyiladi. Aksincha, (4) shartni qanoatlatirmaydigan, ya’ni potensial energiya to’liq energiyadan katta $(E < U(x))$ sohalarlarda harakat yuz bermaydi. Bunday sohalar taqiqlangan sohalar deyiladi.



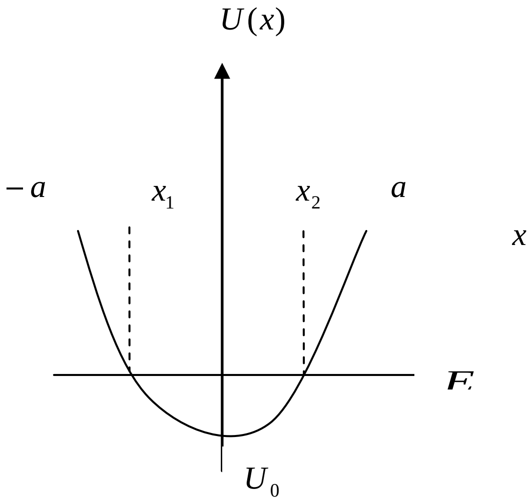
8-rasm

Mexanik sistemaning $U(x)$ potensial energiyasi 8-b rasmda ko’rsatilgan qonuniyat bo’yicha o’zgarsin, E to’liq energiyaning turli qiymatlarini abssissa o’qiga parallel bo’lgan chiziqlar bilan tasvirlab, ruxsat etilgan va taqiqlangan sohalarni aniqlash mumkin. Rasmdan ko’ramizki E energiyaning berilgan qiymatida ko’rilayotgan mexanik sistema uchun ikkita $(-\infty, x\ )$ va (x_2, x_3) taqiqlangan soha $(E < U(x))$ va ikkita (x_1, x_2) va (x_3, ∞) ruxsat yetilgan soha $(E > U(x))$ mavjud. Ruxsat yetilgan (x_1, x_2) soha potensial o’ra, taqiqlangan (x_2, x_3) soha esa potensial to’siq deb ham yuritiladi. Mexanik sistemaning (x_1, x_2) ruxsat etilgan sohadan (x_3, ∞) sohaga o’tishi unga qushimcha $\Delta T \geq U - E$ kinetik energiya berilishi shart. Klassik mexanika qonunlariga bo’ysunuvchi makroskopik obyektlar potensial to’siqni faqat oshib o’tishlari mumkin. Ularning potensial to’siqni teshib o’tishlari (2) energiyaning saqlanish qonuniga qat’iyan ziddir. Ammo kvant mexankasi qonunlariga bo’ysunuvchi mikro obyektlar uchun, ularning to’lqin xususiyatlari tufayli bunday o’tishlar bo’lishi mumkin. Bu hodisa tunnel effekti deb yuritiladi. Potensial energiya to’liq energiyaga teng bo’lgan, ya’ni

$$U(x) = E \qquad\qquad (5)$$

tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqtalar burilish nuqtalari yoki to'xtash nuqtalari deyiladi. Bu nuqtalar ruxsat etilgan sohalar bilan taqiqlangan sohalarni ajratib turuvchi chegaralar bo'lib, ularda sistema tezligi o'z yo'nalishini o'zgartiradi. Agar ruxsat etilgan soha ikkita burilish nuqtasi bilan chegaralangan bo'lsa, harakat fazoning anna shu sohasida yuz beradi va bu sohadagi haraat finit harakat deb yuritiladi. Mexanik sistemaning har ikki tarafdan chegaralanmagan yoki faqat bir tarafdan chegaralangan sohalardagi harakati infinit harakat deyiladi, bunda zarra cheksizlikka ketishi mumkin. Xususan, bir o'lchamli potensial o'radagi finit harakat tebranma harakat bo'lib, bunda sistema x_1 va x_2 burilish nuqtalari orasida davriy ravishda takrorlanuvchi harakat qiladi. Tebranish vaqti $x_2 - x_1$ oraliqni o'tish uchun ketgan vaqtdan ikki marta katta bo'ladi:

$$T(E) = \sqrt{2m}\int_{x_1(E)}^{x_2(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - U(x)}} \qquad (6)$$



Bir o'lchamli mexanik sistemaning tebranish davri umumiy holda, sistema to'liq energiyasining funksiyasi bo'ladi.

<u>Misol</u> Energiyasi E, massasi m bo'lgan zarra

$$U(x) = -U_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

potensial maydonda harakat qilsa, uning tebranish davrini toping.

<u>Yechim.</u> Potensial energiya $U(x)$ grafigini chizaylik.

$x = 0$ nuqtada $U(0) = -U_0$, $x = \pm a$ nuqtada $U_0(\pm a) = 0$ bo'ladi. Zarra esa anna shu potensial o'rada E

energiya bilan harakat qilsin. Zarra $x_1 \le x \le x_2$ sohada harakatlanadi va tebranish davri kuyidagicha aniqlanadi:

$$T = \sqrt{2m}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{E + U_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}} = \sqrt{\frac{2m}{U_0}}\int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{a^2\left(1 + \frac{E}{U_0}\right) - x^2}} \quad (*)$$

Bu integral chegaralarini $U(x) = E$ tenglikdan topsak,

$$x_1 = -a\sqrt{1 + \frac{E}{U_0}} \quad , \qquad x_2 = a\sqrt{1 + \frac{E}{U_0}}$$

bo'ladi. (*) integralni $x = a\sqrt{1 + \frac{E}{U_0}} \cdot \sin\varphi$ almashtirish o'tkazib yechamiz. U holda integral chegaralari x_1, x_2 lar mos ravishda $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ larga almashadi va integral oson yechiladi va tebranish davri quyidagiga teng bo'ladi.

$$T = \sqrt{\frac{2m}{U_0}}\pi\, a$$

Inersiya markazi S-sistema

Istalgan zarralar sistemasida inersiya markazi yoki masalalar markazi deb ataluvchi ajoyib S nuqta mavjud bo'ladi. Bunday nuqta bir necha muhim xossalarga ega bo'ladi. Berilgan sanoq sistemasi boshi O nuqtaga nisbatan massalar markazi holati $\vec{r}_c$ radius-vektor bilan aniqlanadi:

$$\vec{r}_c = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i \qquad (1)$$

Bu yerda m_i, r_i -mos ravishda i -nchi zarra massasi va radius-vektor, m-barcha sistema massasi.

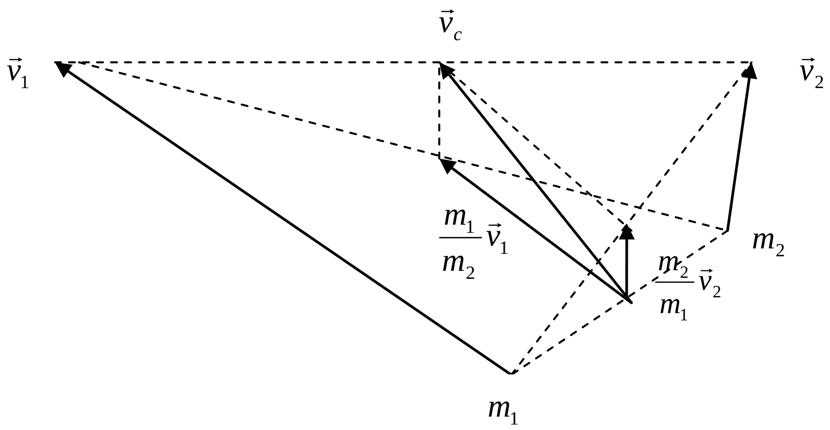
Shuni qayd qilish kerakki, sistema inersiya markazi uning og'irlik markaziga mos keladi. Inersiya markazining berilgan sistemadagi tezligi (1)ning vaqt buycha differensiali hisoblanadi:

$$\vec{V}_c = \frac{1}{m}\sum_i m_i \vec{V}_i = \frac{1}{m}\sum_i \vec{P}_i = \frac{\vec{P}}{m} \qquad (2)$$

Agar inersiya markazi tezligi nolga teng bo'lsa, $\vec{P} = 0$ bo'ladi, sistema yaxlit holda tinch turadi. (2) dan

$$\vec{P} = m\vec{V}_c \qquad (3)$$

ya'ni sistema impulsi sistema massasining inersiya markazi tezligi ko'paytmasiga teng ekanligini topamiz. (1) va (2) lardan inersiya markazi tezligi va tezlanish xossalarini aniqlash mumkin.



Rasmda ko'rsatilgandek, i-nchi zarra harakati tufayli inersiya markazining olgan tezlik va tezlanishi mos ravishda $\frac{m_i}{m}\vec{V}_i, \frac{m_i}{m}\vec{W}_i$ ga teng bo'ladi. Demak, inersiya markazining tezlik va tezlanishlari yo'nalishlariga i-nchi zarra tezlik va tezlanishi yo'nalishlariga parallel, miqdor jihatdan $\frac{m_i}{m}$ marta kichik bo'ladi.

Inersiya markazi tushunchasi

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \tag{4}$$

Nyuton tenglamasiga boshqacha ko'rinishni beradi. Agar massani doimiyligini hisobga olsak,

$$m\frac{d\vec{V}_c}{dt} = \vec{F} \tag{5}$$

Tenglamasini olamiz. Bu yerda $\vec{F}$- sistemaga ta'sir etuvchi tashqi kuchlar yig'indisi. Bu tenglamaga asosan istalgan zarralar sistemasi harakatida uning inersiya markazi go'yo sistemasining barcha massasi shu nuqtaga to'plangandek va barcha tashqi kuchlar shu nuqtaga ta'sir etgandek harakat qiladi.

Agar (5)da $\vec{F} = 0$ bo'lsa, $\frac{d\vec{V}_c}{dt} = 0$ bo'ladi, demak $\vec{V}_c = const$ bo'ladi. Agar $\vec{V}_c = const$ bo'lsa, (3)ga asosan sistema impulsi o'zgarmas, ya'ni $\vec{P} = const$ bo'ladi. Demak, sistema inersiya markazi tug'ri chiziqli tekis harakat qilsa, harakat davomida bu sistemaning impulsi saqlanuvchan bo'ladi. Agar bizni sistemaning yaxlit holda harakat qilishi qiziqtirmasdan, sistema ichidagi zarraning nisbiy harakati qiziqtirsa, inersiya markazi tinch turadigan sanoq sistemadan foydalanish qulay bo'ladi. Berilgan sistema inersiya markazi bilan mahkam bog'langan va inersial sistemalarga nisbatan ilgarilanma harakat qiluvchi sanoq sistemasi inersiya markazi sistemasi yoki S-sistema deyiladi. Demak, bu sistemada hamma vaqt sistema to'liq impulsi nolga teng bo'ladi, yoki boshqacha qilib aytganda, istalgan sistema o'zining S-sistemasida tinch turgan bo'ladi.

Yopiq sistema uchun S-sistemasi inersial, yopiq bo'lgan sistema uchun umumiy holda noinersial sistema hisoblanadi.

Inersial va S-sistemalarda sistema mexanik energiyasi qiymatlarining o'zaro bog'lanishini aniqlaymiz. Dastlab kinetik energiyani topaylik, S-inersial sistemada i-inchi zarra tezligi

$$\vec{V}_i = \tilde{\vec{V}}_i + \vec{V}_c$$

Bo'ladi. Bu yerda $\tilde{\vec{V}}_i$, S-sistemadagi tezlik, $\vec{V}_c$- S-sistemaning S-sistemaga nisbatan tezligi. U holda kinetik energiya

$$T = \frac{\sum m_i V_i^2}{2} = \sum \frac{m_i}{2}\left(\tilde{\vec{V}}_i + \vec{V}_c\right)^2 = \sum \frac{m_i \tilde{\vec{V}}_i^2}{2} + \vec{V}_c \sum m_i \tilde{\vec{V}}_i + \sum \frac{m_i \vec{V}_c^2}{2}$$

S-sistemada $\sum m_i \vec{V}_c = 0$ bo'lgani uchun

$$T = \tilde{T} + \frac{m\vec{V}_c^2}{2} = \tilde{T} + \frac{p^2}{2m} \tag{6}$$

Bu yerda $T = \sum \frac{m_i \tilde{V}_c^2}{2}$, S-sistemadagi yig'indi kinetik energiya, P-zarralar sistemasining S sistemaga nisbatan impulsi.

Shunday qilib, zarralar sistemasi kinetik energiyasi uning S-sistemadagi kinetik energiyasi va sistemaning yaxlit holda harakat bilan bog'liq bo'lgan kinetik energiyasi yig'indisidan iborat bo'ladi.

Agar zarralar sistemasining faqat S-sistemasidagi kinetik energiyasini qarasak, $\vec{V}_c = 0$ bo'lgani uchun $T = \tilde{T}$ bo'lgani, ya'ni sistema kinetik energiyasi minimal bo'ladi. Endi sistemaning to'liq energiyasini topamiz. Agar sistema xususiy potensial energiyasi faqat uning konfigurasiyasigagina bog'liqligini, ya'ni U ning barcha sanoq sistemalarda bir xil ekanligini hisobga olsak, (6) ga asosan yoza olamiz:

$$E = \tilde{E} + \frac{p^2}{2m} \qquad (7)$$

Bu yerda $\tilde{E} = \tilde{T} + U$ sistemaning ichki mexanik energiyasi deyiladi.

Agar zarralar sistemasi yopiq va unda to'liq mexanik energiyaning o'zgarishi bilan bog'liq prosesslar sodir bo'layotgan bo'lsa, (7) dan ko'ramizki:

$$\Delta E = \Delta \tilde{E}$$

Ya'ni ixtiyoriy sanoq sistemasiga nisbatan mexanik energiyasining o'zgarishi ichki mexanik energiyasining o'zgarishiga teng bo'ladi. Berilgan holda zarralar sistemasining yahlit holda harakati bilan bog'liq bo'lgan kinetik energiyasi o'zgarmaydi chunki yopiq sistemada $\vec{P} = const$ bo'ladi.

Endi sistema 2 ta zarradan tashkil topgan holni qaraylik.

Ularning massalari m_1, m_2 S-sistemadagi tezliklari $\vec{V}_1, \vec{V}_2$ bo'lsin. Bu zarralar impuls iva yig'indi kinetik energiyasini S-sistemada topaylik.
S-sistemada birinchi zarra impulsi

$$\tilde{\vec{P}}_1 = m_1 \tilde{\vec{v}}_1 = m_1(\vec{v}_1 - \vec{v}_c) \qquad (8)$$

Bu yerda $\vec{v}_c$ S-sistemaning S sistemadagi tezligi, (2) dan foydalanib (8) ni yozamiz:

$$\tilde{\vec{P}}_1 = m_1\left[\vec{v}_1 - \frac{1}{m}(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2)\right] = \frac{m_1}{m_2}[(m - m_1)\vec{v}_1 - m_2\vec{v}_2] = \frac{m_1 m_2}{m}(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) = \mu(\vec{v}_1 - \vec{v}_2) \qquad (9)$$

Bu yerda $\mu = \frac{m_1 m_2}{m} = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}$ sistemaning keltirilgan massasi deyiladi. Xudi shu yul bilan ikkinchi zarra uchun impulsni topamiz:

$$\tilde{\vec{P}}_2 = \mu(\vec{v}_2 - \vec{v}_1) = -\tilde{\vec{P}}_1 \qquad (10)$$

Shunday qilib, S-sistemada ikala zarraning impulslari modul jihatidan o'zaro teng, yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lar ekan. Har bir zarra impulsi molul jihatdan

$$\tilde{P} = \mu v_{нисб}$$

bo'ladi, $v_{нисб} = |\vec{v}_1 - \vec{v}_2|$ zarraning nisbiy tezligi.

S-sistemada yig'indi kinetik energiya

$$\tilde{T} = \tilde{T}_1 + \tilde{T}_2 = \frac{\tilde{P}^2}{2m_1} + \frac{\tilde{P}^2}{2m_2} = \frac{\tilde{P}^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{\tilde{P}^2}{2\mu}$$

yoki

$$\tilde{T} = \frac{\mu v_{нисб}^2}{2} \qquad (11)$$

Agar zarralar o'zaro ta'sirda bo'lsa, S-sistemada to'liq mexanik energiya sistemaning ichki energiyasiga teng bo'ladi.

Nazorat savollari

1. *Harakat tenglamalarini integrallash haqida ayting.*
2. *Potentsial to'ziq nima?*
3. *Inersiya markazi S-sistemada deganda nimani tushunasiz ?*
4. *Inersial va S-sistemalarda sistema mexanik energiyasi nimaga teng.*

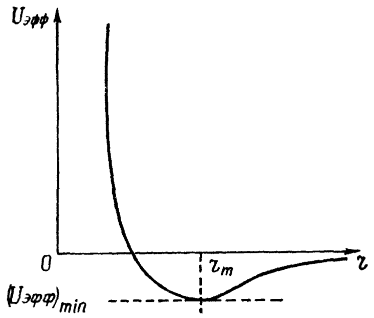
11-ma’ruza: KULON MAYDONIDAGI HARAKAT, TRAYEKTORIYALARNI SINFLARGA AJRATISH.

REJA:

- *Bog’lanishlar xususida.*
- *Konservativ va nokonservativ sistemalar. Mexanik o’xshashlik usuli.*
- *Kulon maydoni.*
- *Kulon maydonida trayektoriya tenglamasi.*
- *Kepler qonunlari.*

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR: bog’lanishlar, konservativ va nokonservativ sistemalar. mexanik o’xshashlik usuli, Kulon maydoni, Kulon maydonida trayektoriya tenglamasi, Kepler qonunlari.

Markaziy kuch maydonida harakatni tekshirganimizda zarraning bu maydondagi potensial energiyasi r masofaga teskari proporsional bo’lgan holda muhim ahamiyatga egadir. Bunday kuchlarga Nyutoncha butun olam tortilish kuchi, Kulon qonuni bo’yicha o’zaro ta’sirlashuvchi zaryadlangan zarralar o’rtasidagi kuch misol bo’la oladi. Birinchi kuch tortishuviga oid bo’lsa, ikkinchi kuch zarralar zaryad ishorasiga bog’liq holda yoki tortishuv, yoki itarishuvga mos keladi. Potensial energiyani



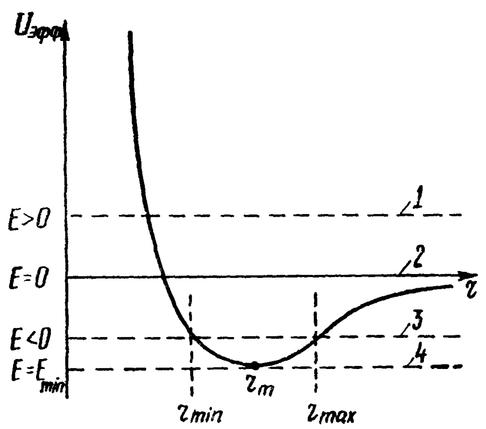
$$U(r) = -\frac{\alpha}{r^2} \qquad (1)$$

Ko’rinishda yozsak, $\alpha > 0$ bo’lsa, tortishuvni, $\alpha < 0$ bo’lsa itarishuvni ifodalaydi.

Dastlab biz $\alpha > 0$ holini ko’raylik. U holda «effektiv potensial energiya

$$U_{eff}(r) = -\frac{\alpha}{r^2} + \frac{M_0^2}{2mr^2} \qquad (2)$$

Ko’rinishida yoziladi, uning grafigi rasmdagi ko’rinishda bo’ladi. Bu energiya $r \to 0$ da $+\infty$ ka intiladi, $r \to \infty$ da esa manfiy qiymatlar tomonidan nolga yaqinlashadi. Masofaning r_0 qiyma-tida U_{eff} minimal qiymatga ega bo’ladi.



Bu qiymat $U'_{eff} = 0$ shartidan topiladi:

$$\frac{\alpha}{r_0^2} + \frac{M_0^2}{mr_0^3} = 0, \quad r_0 = \frac{M_0^2}{\alpha m} \qquad (3)$$

(3) ni (2) ga qo’yamiz

$$\left(U_{eff}\right)_{\min} = -\frac{m\alpha^2}{M_0^2} + \frac{m\alpha^2}{2M_0^2} = -\frac{m\alpha^2}{M_0^2} \qquad (4)$$

Endi (2) grafigida zarra energiyasi E ning mumkin bo’lgan qiymatlarini gorizontal chiziqlar bilan ko’rsatamiz. $E > 0$ qiymatida zarra infinitli harakat qilsa, $0 > E > (U_{eff})_{\min}$ da finitli harakat qiladi.

Kulon maydonida trayektoriya tenglamasi. Kepler qonunlari.

Trayektoriya tenglamasiga $U(r) = -\frac{\alpha}{r}$ ifodani qo'yib, $\frac{1}{r} = u$ almashtirish o'tkazib integrallaymiz:

$$\Delta\varphi = \int \frac{\frac{M_0}{r^2}dr}{\sqrt{2m\left[E + \frac{\alpha}{r}\right] - \frac{M_0^2}{r^2}}} = \int \frac{\frac{M_0}{r^2}dr}{\sqrt{2mE + \frac{2m\alpha}{r} - \frac{M_0^2}{r^2}}} = -\int \frac{M_0 du}{\sqrt{2mE + 2m\alpha u - M_0^2 u^2}} =$$

$$= \int \frac{-d\left(M_0 u - \frac{m\alpha}{M_0}\right)}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M_0^2} - \left(M_0 u - \frac{m\alpha}{M_0}\right)^2}} = \int \frac{-dy}{\sqrt{1-y^2}} = \arccos y + \varphi_0 \qquad (5)$$

bu yerda

$$y = \frac{M_0 u - \frac{m\alpha}{M_0}}{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M_0^2}}}$$

$$y = \cos(\varphi - \varphi_0)$$

$$U = \frac{\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M_0^2}}}{M_0} y + \frac{m\alpha}{M_0^2} = \frac{1 + \frac{M_0}{m\alpha}\sqrt{2mE + \frac{m^2\alpha^2}{M_0^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)}{M_0^2 / m\alpha} =$$

$$= \frac{1 + \sqrt{1 + \frac{2EM_0^2}{m\alpha^2}}\cos(\varphi - \varphi_0)}{M_0^2 / m\alpha} = \frac{1 + e\cos(\varphi - \varphi_0)}{p} \qquad (6)$$

Biz yechimni (6) bu ko'rinishda yozishimizdan maqsad shuki, u qutb koordinata boshi fokusida joylashgan konus kesimi tenglamasi hisoblanadi. Bu yerda

$$p = \frac{M_0^2}{m\alpha} \qquad (7)$$

egrilik parametri, o'lchamsiz kattalik

$$e = \sqrt{1 + \frac{2EM_0^2}{m\alpha^2}} \qquad (8)$$

esa uningekssentrisiteti deyiladi.

Endi mumkin bo'lgan turli xil xususiy hollarda qarab chikaylik.

Tortishuvga oid ($\alpha > 0$) finitli harakat $(E < 0)$ holini ko'raylik.

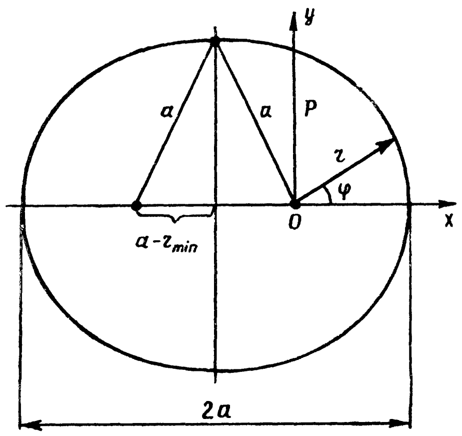
Zarra energiyasi

$$-\frac{m\alpha^2}{2M_0^2} \le E < 0$$

intervalda joylashgan bo'ladi. Shuning uchun (8) dan $0 \le e < 1$ qiymatlarni qabul qiladi va trayektoriya ellips hisoblanadi. (6) ifodadan r ni topamiz $\varphi_0 = 0$ deb qabul qilamiz:

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\varphi}$$

Agar $\varphi = 0$ bo'lsa, $r = r_{\max} = p/(1+e)$ -perigeliy,



$\varphi = \pi$ bo'lsa, $r = r_{\max} = p/(1-e)$ -afeliy.

Ellipsning kichik va kata yarim o'qlari

$$r_{\min} + r_{\max} = 2a$$

$$r_{\max} + r_{\min} = 2\sqrt{a^2 - b^2}$$

tengliklardan topiladi va quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$a = \frac{p}{1-e^2}, \quad b = \frac{p}{\sqrt{1-e^2}} \qquad (9)$$

(7), (8) ifodalardan foydalansak,

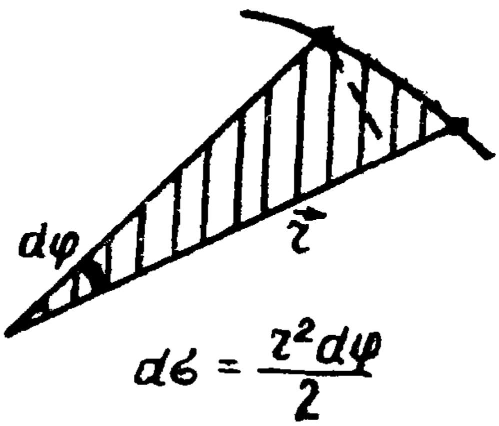
$$a = \frac{\alpha}{2|E|}, \quad b = -\frac{M_0}{\sqrt{2m|E|}} \qquad (10)$$

Bundan ko'ramizki, ellipsning katta yarim o'qi faqat energiyaga bog'liq impuls momentiga bog'lik bo'lmaydi. Energiyaning minimal qiymatida esa $e = 0$ va $a = b$, demak , impuls momentining berilgan qiymatda ellips aylanaga o'tadi, aylana radiusi mumkin bo'lgan eng kata qiymatga ega bo'ladi.
Saqlanuvchan impuls momenti

$$M_0 = mr^2\dot{\varphi}$$

Trayektoriyaning bir-biriga cheksiz yaqin nuqtalari o'rtasida radius-vektorning hosil qilgan sektor yuzasi

$$ds = \frac{1}{2} r \cdot r \cdot d\varphi = \frac{1}{2} r^2 \cdot d\varphi$$



orqali aniqlanadi. Agar M_0 ni dS bilan bog'lasak

$$M_0 = 2m\frac{dS}{dt} = const \qquad (11)$$

tenglikka ega bo'lamiz. Bu yerda $\frac{dS}{dt}$ sektoria tezlik deyiladi va u saqlanuvchan bo'ladi bir xil vaqt oralig'ida radius-vektorning chizgan yuzasi bir xil bo'ladi. (Keplerning ikkinchi qonuni hisoblanadi).

(11) dan $dS = \frac{M_0}{2m} dt$

Ellips yuzasi

$$\oint dS = \pi ab, \quad \int_0^T dt = T \quad \text{(davr)}$$

Bo'lganidan

$$T = 2\pi m \frac{ab}{M_0} = \pi\alpha \frac{\sqrt{m}}{\sqrt{2|E|^3}}$$

Yoki

$$T^2 = \pi^2\alpha^2 \frac{m}{2|E|^3} = \frac{4\pi^2 m}{\alpha} a^3 \qquad (12)$$

Demak, zarraning ellips bo'ylab aylanish davri to'liq energiyasiga bog'liq bo'lib, impuls momentiga bog'liq bo'lmaydi hamda davrlar va kata yarim o'qlar o'rtasida (12) dan

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$$

Munosabatga ega bo'lamiz. (Keplerning uchinchi qonuni).

Agar $E \geq 0$ bo'lsa, harakat infinitli bo'ladi, $E > 0$ da ekssentrisitet $e > 1$, ya'ni trayektoriya kuch markazidan o'tuvchi giperboladan iborat bo'ladi, $E = 0$ da esa $e = 1$ -paraboladan iborat bo'ladi.

Endi zarra koordinatasining vaqtga bog'lanishining parametrik ko'rinishini topamiz. Buning uchun t va r o'rtasida bog'lanishdan foydalanamiz:

$$t = \int \frac{dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - U(r)\right] - \frac{M_0}{m^2 r^2}}} \qquad (13)$$

Elliptik orbitalar holini qaraymiz. (13)ni a va e kattaliklar orqali ifodalaymiz:

$$t = \sqrt{\frac{m}{2|E|}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{-r^2 + \frac{\alpha}{|E|} r - \frac{M_0^2}{m^2 r^2}}} = \sqrt{\frac{ma}{\alpha}} \int \frac{r\,dr}{\sqrt{a^2 e^2 - (r-a)^2}} \qquad (14)$$

Agar

$$r - a = -a e \cos\xi$$

almashtirish o'tkazsak, (14) qo'yidagi ko'rinishda yoziladi:

$$t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} \int (1 - e\cos\xi) d\xi = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e\sin\xi) + const \qquad (15)$$

Vaqt koordinatasi boshlanishini tanlab olish yo'li bilan $const$ ni nolga aylantirish mumkin. Natijada $r(t)$ bog'lanishning parametrik ko'rinishini topamiz.

$$r = a(1 - e\cos\xi), \quad t = \sqrt{\frac{ma^3}{\alpha}} (\xi - e\sin\xi) \qquad (16)$$

Nazorat savollari

1. Bog'lanishlar xususida haqida ayting.
2. Konservativ va nokonservativ sistemalar haqida tushuncha bering.
3. Mexanik o'xshashlik usuli deganda nimani tushunasiz
4. Kulon maydoni qanday maydon
5. Kulon maydonida trayektoriya tenglamasini yozing.
6. Kepler qonunlari haqida ayting

12 –ma’ruza: ZARRALARNING O’Z-O’ZIDAN PARCHALANISHI VA SOCHILISHI.

REJA:

- *Zarralarning o’z-o’zidan parchalanishi*
- *Zarralarning sochilishi.*

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR: energiya, impuls, saqlanish qonunlari, zarralar, parchalanish, jarayon, musbat, sanoq tizimini

Turli mexanik jarayonlarning xossalarini ko’pchilik hollarda energiya va impul’sning saqlanish qonunlari asosida tadqiq etish mumkin. Shuni alohida ta’kidlash lozimki, bu xossalar jarayonda ishtirok etuvchi zarralar orasidagi o’zaro ta’sirning konkret tabiatiga bog’liq emas.

Biz zarraning «o’z-o’zidan» ya’ni tashqi kuchlarning ta’sirisiz parchalanish jarayonini tahlil qilishdan boshlaymiz. Bunda dastlabki zarra parchalanishdan keyin bir-biriga bog’liq bo’lmagan holda harakatlanuvchi ikkita boshqa zarrachaga parchalanadi.

Bu jarayonni zarracha parchalangunga qadar tinch turgan sanoq tizimiga nisbatan qarash eng soddadir. Chunki bu sanoq tizimida zarraning parchalanishi oqibatida hosil bo’lgan zarralar impul’slarining yig’indisi impul’sning saqlanish qonuniga ko’ra nolga teng. Ya’ni bu zarralar miqdoran teng va qarama-qarshi yo’nalgan impul’slarga yega bo’ladi. Bu zarralar impul’slarining absolyut qiymati energiyaning saqlanish qonuni bilan aniqlanadi.

$$E_{ich} = E_{1ich} + \frac{p_0^2}{2m_1} + E_{2ich} + \frac{p_0^2}{2m_2}$$

Bu yerda m_1, m_2 hosil bo’lgan zarralarning massalari E_{1ich} va E_{2ich} ularning ichki energiyalari va E_{ich} - dastlabki ya’ni parchalanuvchi zarraning ichki energiyasi va p_0 hosil bo’lgan zarralarning impul’slari. Zarra parchalanishi uchun parchalanuvchi va parchalanish oqibatida hosil bo’luvchi zarralar ichki energiyalarining ayirmasi musbat bo’lishi lozim. Odatda bu energiya farqini parchalanish energiyasi ε deb yuritiladi va u quyidagicha belgilanadi

$$\varepsilon = E_{ich} - E_{1ich} - E_{2ich} \qquad (1)$$

Demak, yuqoridagi munosabatga ko’ra quyidagi ifodaga yega bo’lamiz:

$$\varepsilon = \frac{p_0^2}{2}\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right) = \frac{p_0^2}{2m} \qquad (2)$$

Bu yerda m-hosil bo’lgan zarralarning keltirilgan massasi; zarralarning tezligi esa ularning impul’si orqali aniqlanadi:

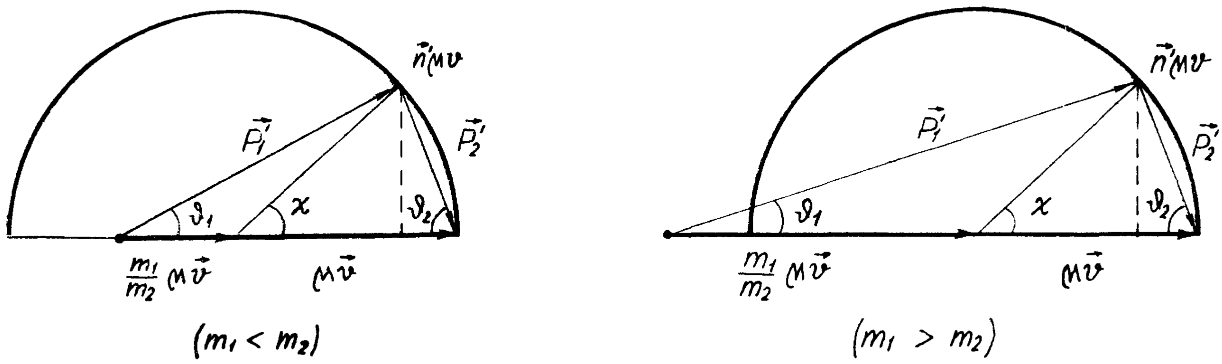
$$v_{10} = p_0 / m_1, \quad v_{20} = p_0 / m_2$$

endi dastlabki zarracha parchalangunga qadar v tezlik bilan harakatlanuvchi sanoq tizimiga o’tamiz. Odatda bu sanoq tizimini laboratoriya sanoq tizimi (yoki L tizim) deb yuritiladi. Zarralarning to’liq impul’slari nolga teng bo’lgan tizim esa inersiya markazi tizimi (yoki M tizim) deb yuritiladi.

Parchalanuvchi zarralardan birining tezligi L va M tizimlarga nisbatan v va v_0 bo'lsa, u holda $v = V + v_0$ bo'lganligi uchun quyidagi natijaga ega bo'lamiz:

$$v^2 + V^2 - 2vV\cos\theta = v_0^2, \qquad (3)$$

bu yerda θ- zarrachaning V tezlik yo'nalishiga nisbatan uchib chiqish burchagi. Bu tenglama parchalanish natijasida hosil bo'lgan zarrachaning L tizimdagi tezligini aniqlaydi. Bu munosabatni 12-rasmda ko'rasatilgan diagramma yordamida tasvirlash mumkin.



1- rasm

Bunda v tezlik aylana markazidan V masofada yotuvchi A nuqtadan v_0 radiusli aylananing biror-bir nuqtasiga o'tkazilgan vektor orqali aniqlanadi. $V < v_0$ va $V. > v_0$ bo'lgan hollarga rasmdagi A va B diagrammalar mos keladi (12 rasm). Birinchi holda zarracha ixtiyoriy burchak ostida uchib chiqishi mumkin. Ikkinchi holda esa zarracha quyidagi tenglik bilan aniqlanuvchi burchakdan katta bo'lmagan burchak ostida faqat oldinga uchib chiqishi mumkin:

$$\sin\theta_{\max} = \frac{v_0}{V} \qquad (4)$$

Demak, bu holda zarrachaning uchib chiqish burchagi 90^0 dan kichik bo'ladi.

L va M tizimlardagi uchib chiqish burchaklari θ va θ_0 orasidagi bog'lanishni ham shu diagrammalar asosida topish mumkin.

$$tg\theta = \frac{CD}{AD} = \frac{v_0 \sin\theta_0}{v_0\cos\theta_0 + V} \qquad (5)$$

Agar bu tenglamani $\cos\theta_0$ ga nisbatan yechsak, oddiy almashtirishlardan keyin quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\cos\theta_0 = -\frac{V}{v_0}\sin^2\theta \pm \cos\theta\sqrt{1 - \frac{V^2}{v_0^2}\sin^2\theta} \qquad (6)$$

1-rasmdagi A diagrammadan ko'rinib turibdiki $v_0 > V$ bo'lsa θ_0 va θ burchaklar orasidagi bog'lanish bir qiymatlidir. Bunda ushbu formuladagi ildiz oldida musbat ishora olinadi (chunki $\theta = 0$ bo'lganda $\theta_0 = 0$ bo'lishi lozim. Agar $v_0 < V$ bo'lsa θ_0 va θ burchaklar orasidagi bog'lanish bir qiymatli emas: ya'ni θ ning har bir qiymatiga aylana markazidan B va C nuqtalarga o'tkazilgan ikkita θ_0 burchak mos keladi. Ularga (6) ifodadagi ildiz oldidagi musbat va manfiy ishoralar mos keladi.

Real fizikaviy jarayonlarda bir emas bir nechta bir xil zarralarning parchalanishi sodir bo'ladi. Bu holda parchalanish oqibatida hosil bo'luvchi zarralarning yo'nalaishlar yoki energiyalar bo'yicha taqsimotini bilish muhim ahamiyatga ega bo'ladi. Masalani soddalashtirish uchun biz dastlabki zarrachalar fazoda xaotik joylashgan deb faraz qilamiz.

M tizimda bu savolga soddagina javob berish mumkin: barcha hosil bo'luvchi zarrachalar bir xil energiyaga ega bo'lishadi va ularning uchib chiqish yo'nalishlari bo'yicha taqsimoti izotrop bo'ladi. Bu xulosa dastlabki zarralarning xaotik taqsimotga yega ekanligi bilan bog'liqdir. Bu shuni anglatadiki $d\Omega_0$ fazoviy burchak elementi ichida uchuvchi zarralarning ulushi unga proporsionaldir, ya'ni $d\Omega_0 / 4\pi$ ifoda bilan aniqlanadi. $d\Omega_0 = 2\pi \sin\theta_0 d\theta_0$ ekanligini inobatga olib, zarralarning θ_0 burchaklar bo'yicha taqsimlanishini tavsiflovchi quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$\frac{1}{2}\sin\theta_0 d\theta_0 \qquad (7)$$

L tizimdagi burchaklar bo'yicha taqsimot esa ushbu ifodani mos almashtirishlar yordamida hosil qilinadi. Masalan, L tizimda zarralarning kinetik energiyalar bo'yicha taqsimotini topaylik. Buning uchun

$$v^2 = v_0^2 + V^2 + 2vV\cos\theta_0$$

Tenglikni kvadratga ko'tarib quyidagi natijani hosil qilamiz:

$$d\cos\theta_0 = \frac{d(v^2)}{2v_0 V}.$$

Endi zarraning kinetik energiyasi $T = mv^2/2$ ekanligini inobatga olib, (7) formuladan biz izlayotgan taqsimotni hosil qilamiz

$$\frac{dT}{2mv_0 V} \qquad (8)$$

Ko'rinib turibdiki, zarralarning kinetik energiyalari

$T_{\min} = \frac{m}{2}(v_0 - V)^2$ dan $T_{\max} = \frac{m}{2}(v_0 + V)^2$ gacha bo'lgan qiymatlarni qabul qila oladi. Bu oraliqdagi energiya qiymatlarini qabul qiluvchi zarrachalar (8) ifodaga ko'ra bir jinsli taqsimlanishgandir.

Agar parchalanish oqibatida ikkitadan ortiq zarra hosil bo'lsa, energiya va impul'sning saqlanish qonuni hosil bo'luvchi zarralarning tezliklari va uchib chiqish yo'nalishlarini aniklashda ko'p ixtiyoriylikka yo'l qo'yadi. Jumladan M tizimda uchib chiquvchi zarralar energiyalari aniq bir qiymatga ega bo'lmaydi. Ammo har bir hosil bo'luvchi zarracha olishi mumkin bo'lgan kinetik energiyaning yuqori chegarasi mavjud bo'ladi.

Bu chegaraviy qiymatni aniqlash uchun parchalanish oqibatida hosil bo'lgan zarralardan birini masalan, m_1 massali zarrani tanlab olamiz qolgan zarralarni esa yagona (bitta) tizim sifatida qaraymiz va uning ichki energiyasini E'_{ich} bilan belgilaymiz. U holda birinchi va ikkinchi formulalarga ko'ra m_1 massali zarrachaning kinetik energiyasi quyidagicha topiladi

$$T_{10} = \frac{p_0^2}{2m_1} = \frac{M - m_1}{M}(E_{ich} - E_{1ich} - E'_{ich})$$

bu yerda M - dastlabki zarraning massasi. Ko'rinib turibdiki kinetik energiya E'_{ich} minimal qiymat qabul qilganda eng katta qiymatga yega bo'ladi. Buning uchun m_1 massali zarrachadan tashqari barcha zarrachalar bir xil tezlik bilan harakatlanishlari lozim. Bu holda E'_{ich} zarralar ichki energiyalarining yig'indisiga teng bo'ladi. Demak, bu holda $E_{ich} - E_{1ich} - E'_{ich} = \varepsilon$ ya'ni parchalanish energiyasiga teng. Shunday qilib, zarra qabul qilishi mumkin bo'lgan kinetik energiyaning eng katta qiymati quyidagicha aniqlanadi

$$(T_{10})_{\max} = \frac{M - m_1}{M}\varepsilon \qquad (9)$$

Nazorat savollari

1. *Zarralarning o'z-o'zidan parchalanishi haqida ayting*
2. *Zarralarning sochilishi tushunterib bering.*
3. *Zarralarning o'z-o'zidan parchalanganda energiya qanday bo'ladi.*
4. *Zarralarning sochilishida energiya qanday bo'ladi*

13-ma'ruza: **ZARRALARNING TO'QNASHUVI**

REJA

- *Laboratoriya va inersiya markazi sistemalari tushunchasi.*
- *Zarralarning elastik to'qnashuvi.*

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: elastik va noelastik to'qnashuvlar, yadro kuchlari, yadro reaksiyalari, impulsning saqlanish qonuni, nisbiy tezligi, energiyaning saqlanish qonunlari, keltirilgan massa, sochilish burchaklari, to'qnashuvdan keyingi tezliklari

Modda zarralari orasidagi o'zaro ta'sir kuchlarining tabiatini aniqlash muammosi ham "ikki jism masalasi" yordamida hal etilishi mumkin. Amalda zarralardan biri ma'lum usul bilan tezlashtirilib, ikkinchisining yaqinidan uchib o'tishga majbur etiladi va ularning o'zaro ta'siri o'rganiladi. Zarralarning yaqinlashuvi va uzoqlashuvi davomidagi o'zaro ta'sirlashish jarayoni zarralarning to'qnashuvi deb yuritiladi. Zarralarning to'qnashuvlari ikki tipga – elastik va noelastik to'qnashuvlarga bo'lib o'rganiladi. Agar to'qnashish jarayonida zarralarning kinetik energiyalari o'zgarmasa, bunday to'qnashuv elastik, o'zgarsa – noelastik to'qnashuv deyiladi. Boshqacha qilib aytganda zarralar ichki holatining o'zgarishisiz sodir bo'luvchi to'qnashuvlar, elastik to'qnashuvlar deb ataladi. Shuning uchun bunday to'qnashuvlarga energiyaning saqlanish qonunini qo'llaganda zarralar ichki energiyasini inobatga olmaslik mumkin. Xususan, elektronning atom bilan noelastik to'qnashuvi jarayonida elektron kinetik energiyasining bir qismi atomga beriladi, natijada u bir energetik holatdan ikkinchisiga o'tib, qo'zg'alishga uchraydi. Ayrim noelastik to'qnashuvlarda, hatto to'qnashuvchi zarralarning o'zlari ham o'zgaradi, bunday jarayonlar yadro reaksiyalari deb yuritiladi va u yadro fizikasi va elementar zarrachalar fizikasida batafsil o'rganiladi. Zarralarning to'qnashuvi haqidagi masalalar turli agregat holatdagi moddalarning ichki tuzilishini tekshirishda, atom va molekulalarning strukturasini o'rganishda, nihoyat, yadro kuchlarining va elementar zarrachalar orasidagi o'zaro ta'sir kuchlarining tabiatini aniqlashda muhim rol' o'ynaydi. Odatda, zarralarning to'qnashuvi haqidagi masala ikki xil metod orqali o'rganiladi: birinchi metodda zarralarning to'qnashishidan va o'zaro ta'sirlashishidan ancha oldingi $(t = -\infty)$ vaqt momentidagi tezliklarini bilgan holda, ularning to'qnashishdan ancha keyingi, bir-biridan yetarli uzoqlashib, yana o'zaro ta'sirlashmay qo'ygan $(t = \infty)$ vaqt momentidagi tezliklari aniqlanadi. Bunda masala zarralarning $U(r)$ o'zaro ta'sirlashish qonunini mutlaqo bilmagan holda, faqat energiya va impul'sning saqlanish qonunlarini orqali hal etiladi. Ikkinchi metodda esa, aniq $U(r)$ o'zaro ta'sirlashish qonunini bilgan holda zarralarning o'zaro ta'sirlashish jarayoni batafsil tekshiriladi. Bunda bu masala zarralarning sochilishi yoki tutilishi haqidagi masala deb ham yuritiladi. Zarralarning elastik to'qnashuvini birinchi metod bilan o'rganamiz.

To'qnashuv jarayonlarini ikki zarra inersiya markazi tinch turgan ya'ni M tizimda qarash eng sodda ko'rinashga ega. Avvalgidek, bu tizimda bizni qiziqtiruvchi kattaliklarni nol indeksi bilan belgilaymiz. Bu tizimdagi zarralar tezliklari v_1 va v_2 ularning L tizimdagi tezliklari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$v_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v, \qquad v_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v,$$

bu yerda $v = v_1 - v_2$ ya'ni zarralarning nisbiy tezligi.

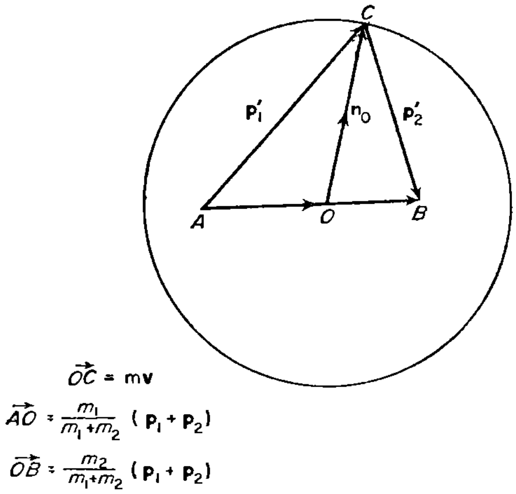
Impulsning saqlanish qonuniga ko'ra bu tizimdagi zarralarning to'qnashuvdan keyingi impul'slari miqdoran teng va yo'nalishi qarama-qarshi bo'ladi. Energiyaning saqlanish qonuniga ko'ra esa ularning absolyut qiymatlari ham o'zgarmas bo'ladi. Shunday qilib, M tizimda zarralarning to'qnashuvi tezliklari qarama-qarshi va moduli o'zgarmas bo'lgan zarralar tezliklarining burilishi sifatida namoyon bo'ladi. Agar m_1 massali zarraning to'qnashuvdan keyingi tezligi yo'nalishidagi birlik vektorni n_0 bilan belgilasak, ularning to'qnashuvdan keyingi tezliklarini quyidagicha belgilash mumkin

$$v'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_0, \qquad v'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v n_0, \tag{1}$$

L tizimga qaytish uchun bu ifodalarga inersiya markazining tezligi V ni qo'shish lozim. Shunday qilib, L tizimda zarralarning to'qnashuvdan keyingi tezliklari quyidagicha bo'ladi:

$$v'_{10} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v n_0 + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \qquad v'_{20} = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} v n_0 + \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}, \tag{2}$$

Yuqoridagi ifodalar energiya va impul'sning saqlanish qonunlariga binoan olish mumkin bo'lgan barcha natijalarni o'zida aks ettiradi. n_0 vektorning yo'nalishi esa zarralarning o'zaro ta'sir qonuniga va ularning to'qnashuv vaqtidagi o'zaro joylashuviga bog'liq bo'ladi.

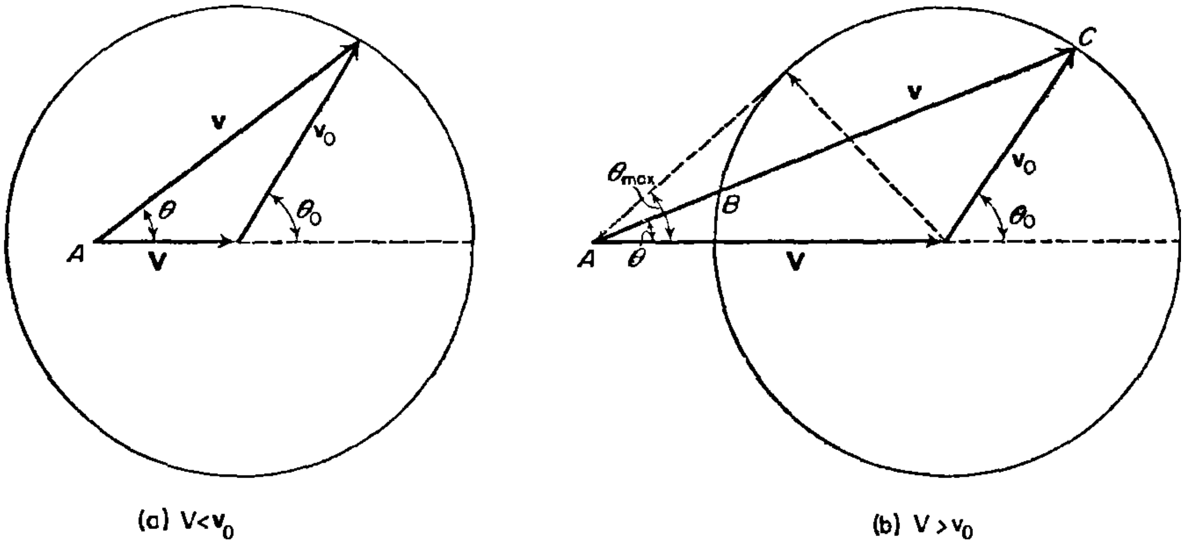


Olingan natijalarni geometrik nuqtai nazardan quyidagicha izohlash mumkin. Buning uchun zarralarning tezliklaridan ularning impul'slariga o'tish qulay. (2) ifodani mos ravishda m_1 va m_2 ga ko'paytirib zarralarning to'qnashuvdan keyingi impul'slari uchun quyidagi ifodalarni hosil qilamiz

$$p'_1 = mvn_0 + \frac{m_1}{m_1 + m_2}(p_1 + p_2), \qquad p'_2 = -mvn_0 + \frac{m_2}{m_1 + m_2}(p_1 + p_2) \tag{3}$$

Bu yerda m –keltirilgan massa. Endi radiusi mv bo'lgan aylanani chizamiz. Agar n_0 birlik vectorni OC vector bo'yicha yo'naltirsak u holda AC va CB vektorlar mos ravishda zarralarning to'qnashuvidan keyingi impul'slari p'_1 va p'_2 ni beradi. p_1 va p_2 ning berilgan qiymatlarida A va B nuqtalarning o'rni va aylananing radiusi o'zgarmas bo'ladi, C nuqta esa aylanadagi ixtiyoriy vaziyatni egallashi mumkin (1-rasm).

Endi zarralarning biri masalan, m_2 to'qnashuvga qadar tinch turgan holni batafsilroq tahlil qilamiz. Bu holda OB vektorning uzunligi $OB = (m_2/(m_1+m_2))p_1 = mv$ bo'lib, u aylananing uzunligiga teng bo'ladi, ya'ni B nuqta aylanada yotadi. AB vektor esa birinchi zarraning to'qnashuvigacha bo'lgan impul'si bilan mos tushadi. Bunda A nuqta $m_1 < m_2$ bo'lsa aylana ichida, aks holda aylana tashqarisida bo'ladi. Bu hollarga mos keluvchi diagrammalar a va b rasmlarda tasvirlangan.



2-rasm

Unda ko'rasatilgan θ_1 va θ_2 burchaklar zarralarning to'qnashuvdan keyingi sochilish burchaklari bo'lib ular dastlabki zarra impul'sining yo'nalishiga nisbatan olingan. Rasmda tasvirlangan n_0 birlik vektorning yo'nalishi χ burchak orqali belgilangan bo'lib u M tizimda birinchi zarrachaning burilish burchagini tavsiflaydi. 2- rasmdan ko'rinib turibdiki θ_1 va θ_2 burchaklar χ burchak orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$tg\theta_1 = \frac{m_2 \sin\chi}{m_1 + m_2\cos\chi}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \qquad (4)$$

endi zarralarning to'qnashuvdan keyingi tezliklarini χ burchak orqali topamiz

$$v_1' = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + 2m_1m_2\cos\chi}}{m_1+m_2}v, \qquad v_2' = \frac{2m_1 v}{m_1+m_2}\sin\frac{\chi}{2} \qquad (5)$$

Sochilish burchaklarining yig'indisi zarralarning to'qnashuvdan keyingi harakat yo'nalishlari orasidagi og'ish burchagini beradi. Ayonki og'ish burchagi $m_1 < m_2$ bo'lganda 90^0 dan katta aks holda esa 90^0 dan kichik bo'ladi.

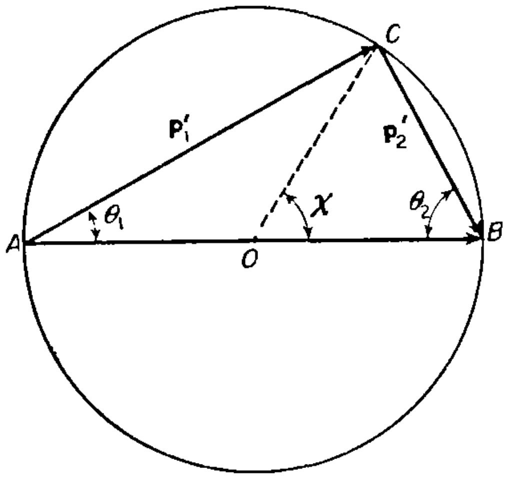
Agar zarralar to'qnashuvdan keyin bir to'g'ri chiziq bo'ylab harakat qilishsa bunga yoyiq burchakka teng og'ish burchagi mos keladi. Agar $m_1 < m_2$ bo'lsa, p_1' va p_2' qarama-qarshi yo'nalgan bo'ladi. Aks holda esa ular bir tomonga yo'nalgan bo'ladi.

Bu holda zarralarning to'qnashuvdan keyingi tezliklari quyidagicha topiladi:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v, \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v \qquad (6)$$

Ko'rinib turibdiki v_2' bu holda eng katta bo'lishi mumkin bo'lgan tezlikdir. Demak, dastlab tinch turgan zarrachaning to'qnashuvdan keyin olishi mumkin bo'lgan eng katta kinetik energiyasi quyidagiga teng:

$$E'_{2\max} = \frac{m_2 v'^2_{2\max}}{2} = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 \qquad (7)$$



Bu yerda $E_1 = \frac{m_1 v_1^2}{2}$ uruluvchi zarrachaning dastlabki energiyasi.

Agar $m_1 < m_2$ bo'lsa birinchi zarrachaning to'qnashuvdan keyingi tezligi ixtiyoriy yo'nalishga ega bo'lishi mumkin, aks holda esa bu burchak muayan chegaraviy qiymatdan katta bo'la olmaydi. Ayonki bu AC to'gri chiziq aylanaga urinma bo'lgan holga mos keluvchi burchakdir. Demak, bu burchak quyidagi ifodadan topiladi

$$\sin\theta_{1\max} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (8)$$

Albatta, yuqoridagi formulalar bir xil massali zarralarning to'qnashuvlari holida eng sodda ko'rinishga ega bo'ladi. Bu holda nafaqat B nuqta balki A nuqta ham aylanada yotadi (3-rasm). Bu holda sochilish burchaklari va ularning to'qnashuvdan keyingi tezliklari quyidagicha topiladi

$$\theta_1 = \frac{\chi}{2}, \qquad \theta_2 = \frac{\pi - \chi}{2} \qquad (9)$$

$$v_1' = v\cos\frac{\chi}{2} \qquad v_2' = v\sin\frac{\chi}{2} \qquad (10)$$

Demak, bu holda zarralar to'qnashuvidan keyin bir-biriga nisbatan to'g'ri burchak hosil qilgan holda harakat qiladi.

Nazorat savollari

1. Laboratoriya sistemalari nima ?
2. Iinersiya markazi sistemalari haqida tushuncha bering
3. Elastik to'qnashuv qanday to'qnashuv ?
4. Noelastik to'qnashuv qanday to'qnashuv ?

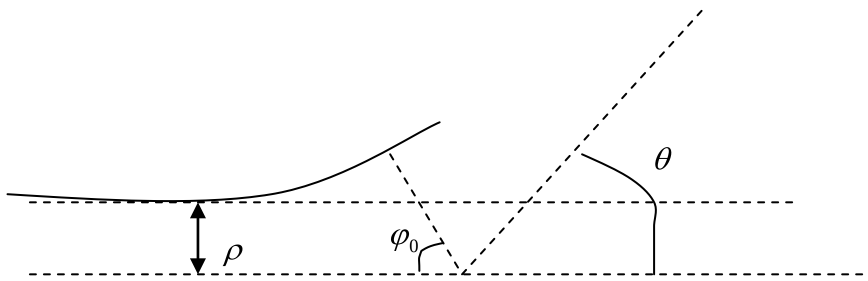
14-ma'ruza: SOCHILISHNING EFFEKTIV KESIMI. REZERFORD FORMULASI.

REJA

- Markaziy maydonda sochilish.
- Rezerford formulasi

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: energiya, impuls, saqlanish qonunlari, zarralar, parchalanish, jarayon, musbat, sanoq tizimi, maydon, sochilish, sochilishning differesial kesimi,sSochilish burcha

Tajribada zarrachalar oqimi nishonga tushadi. Oqimning zichligi j - birlik vaqt ichida birlik sirt orqali o'tgan zarralar sonini bildiradi. Uning ulchamligi $\left[см^{-2}сек^{-1}\right]$.Nishon bilan o'zaro ta'sir natijasida oqimni tashqil qilgan zarralar sochiladi (sochiladi deganda hamma mumkin bo'lgan jarayonlar ko'zda tutiladi- shu jumladan, markazga tushish, markazda trayektoriyasini o'zgartirishi ko'zda tutiladi.)



Bir jismning sochilishini ta'riflashda oid.

Rasmdan kurinib turibdiki

$$2\varphi_0 + \theta = \pi$$

Sochilish jarayoni laboratoriya (L-sistemasi) va inersiya markazi (M-sistemasi) larda ko'rib chiqish mumkin. M-sistema sichilish jarayonida ishtirok etayotgan zarrachalarning to'liq

Impulsi nolga teng bo'lgan sistema. Markaziy maydonda sochilish jarayonlari M-sistemada ko'riladi.

Tushayotgan zarracha nishon bilan o'zaro ta'sir natijasida markazdan θ burchak ostida sochildi. Agar nishon parametri ρ boshqacha bo'lsa, zarraning sochilish burchagi θ ham boshqacha bo'ladi.

$\rho \to \rho + d\rho$ bo'lsa $\theta \to \theta + d\theta$ o'zgarishi mos keladi. $d\rho$ va $d\theta$ larning ishoralari bog'lanishni aniklaylik.

ρ kamaysa θ oshishi kerak (chunki bu holda zarra markazga yaqinroq keladi va, natijada, ular orasidagi o'zaro ta'sir kuchayadi.)

Markaziy maydonda sochilish jarayonini o'rganish uchun φ_0 burchakni ifodasini yozamiz.

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\frac{M}{r^2}\,dr}{\sqrt{2m\big(E-U(r)\big)-\frac{M^2}{r^2}}}$$

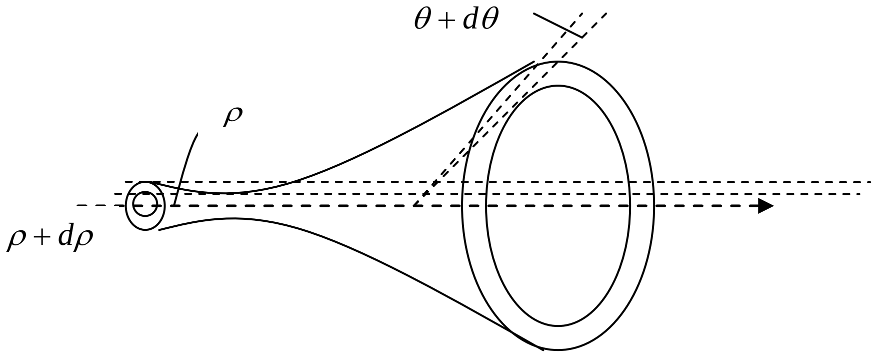
bu yerda $r_{\min}$ -trayektoriyaning markazga eng yaqin nuqtasigacha masofa.

Ko'rilayotgan masalada zarracha cheksizlikdan nishonga tushmoqda Uning saqlanuvchan energiyasi va impuls momentlari bolang'ich kattaliklar orqali ifodalanadi:

$$E = \frac{mv_\infty^2}{2}, \quad M = mv_\infty \rho$$

bu yerda v_∞ - zarraning boshlang'ich tezligi.
Natijada og'ish burchagi uchun integral

$$\varphi_0 = \int_{r_{\min}}^{\infty} \frac{\rho\, dr}{r^2\sqrt{1-\frac{\rho^2}{r^2}-\frac{2U(r)}{mv_\infty^2}}}$$



Rasm. Sochilish

Rasmdan ko'rinadiki boshlang'ich oqimda $(\rho, \rho + d\rho)$ nishon masofasida bo'lgan zarralar $(\theta, \theta + d\theta)$ burchak ichida sichilgan bo'ladi. Ichki va tashqi radiusi $(\rho, \rho + d\rho)$ bo'lgan halqaning yuzasi $2\pi\rho\, d\rho$ uning oqim zichligi j ga ko'paytirilsa shu yuzadan bir sekkundda o'tgan zarralar soni kelib chiqadi (dn).

$$dn = 2\pi\rho\, d\rho\; j$$

Unda sochilish kesimi esa

$$d\sigma = 2\pi\rho(\theta)\left|\frac{d\rho(\theta)}{d\theta}\right| d\theta$$

Rezerford formulasi

Bu yerda biz muhim fizikaviy ahamiyatga ega bo'lgan jarayonlardan biri – zaryadlangan zarralarning Kulon maydonidagi sochilishini ko'ramiz. Buning φ

burchakni tavsiflovchi formulada $U = \alpha / r$ ekanligini inobatga olib, quyidagi ifodani hosil qilamiz

$$\varphi_0 = \arccos\frac{\alpha / mv_\infty^2 \rho}{\sqrt{1 + (\alpha / mv_\infty^2 \rho)^2}}$$

Bu yerdan $\rho^2 = \dfrac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} tg^2 \varphi_0$

endi $\varphi_0 = (\pi - \chi)/2$ ekanligini inobatga olsak, yuqoridagi ifoda quyidagi ko'rinishda yozilishi mumkin.

$$\rho^2 = \frac{\alpha^2}{m^2 v_\infty^4} ctg^2 \frac{\chi}{2} \qquad (1)$$

endi bu ifodani χ bo'yicha differesiallab va sochilishning differesial kesimi $d\sigma = 2\pi\rho\, d\rho$ munosabat orqali aniqlanishini e'tiborga olsak, sochilish kesimining χ sochilish burchagiga bog'lanishini tavsiflovchi quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$d\sigma = \pi \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\cos\frac{\chi}{2}}{\sin^3 \frac{\chi}{2}} d\chi \qquad (2)$$

endi fazoviy burchak elementi $d\Omega = 2\pi \sin\chi d\chi$ formula bilan aniqlanishini hisobga olsak, sochilishning differesial kesimini quyidagi ko'rinishda yozid mumkin:

$$d\sigma = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega}{\sin^4 \frac{\chi}{2}} \qquad (3)$$

Bu ifoda Rezerford formulasi deb ataladi. Ko'rinib turibdiki, sochilishning differensial kesimi α ning ishorasiga bog'liq emas. Yoki boshqacha qilib aytganda bu natija ham tortishuvchi ham itariluvchi Kulon maydonlari uchun o'rinlidir.

Shuni ta'kidlaymizki, ushbu ifoda to'qnashuvchi zarralarning inersiya markazlari tinch turgan ya'ni M tizimdagi differesial sochilish kesimidir. L tizimdagi sochilish kesimi esa biz zarralarning elastik to'qnashuvi jarayonini tahlil qilishda keltirib chiqargan formulalar yordamida topiladi. U holda dastlab tinch turgan zarralar uchun og'ish burchagi $\chi = \pi - 2\theta_2$ ni e'tiborga olsak ularning differesial sochilish kesimi uchun quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$d\sigma_2 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{\sin\theta_2}{\cos^3\theta_2} d\theta_2 = \left(\frac{\alpha}{mv_\infty^2}\right)^2 \frac{d\Omega_2}{\cos^3\theta_2} \qquad (4)$$

Tushuvchi zarralarning bu tizimdagi differensial sochilish kesimini tavsiflovchi formulalar umumiy holda juda murakkab ko'rinishga ega bo'ladi. Shuning uchun faqat quyidagi ikkita xususiy hol bilan cheklanamiz.

Agar sochuvchi zarraning massasi sochiluvchi zarraning massasiga nisbatan juda ham katta bo'lsa ya'ni $m_2 >> m_1$, u holda $\chi \sim 1$ va keltirilgan massa $m \sim m_1$ bo'lganligi uchun sochiluvchi zarraning differensial sochilish kesimi quyidagicha topiladi

$$d\sigma_1 = (\frac{\alpha}{4E_1})^2 \frac{d\Omega_1}{\sin^4 \frac{\theta_1}{2}} \qquad (5)$$

Bu yerda $E_1 = {m_1 v_\infty^2}/{2}$ tushuvchi zarraning energiyasi.

Agar to'qnashuvchi zarralarning massalari bir xil bo'lsa, $\chi = 2\theta_1$ va sochilishning differensial kesimi quyidagiga teng:

$$d\sigma_1 = 2\pi \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^3\theta_1} d\theta_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \frac{\cos\theta_1}{\sin^4\theta_1} d\Omega_1 \qquad (6)$$

Agar to'qnashuvchi zarralarning massalari bir xil va ular aniy bo'lsa, sochiluvchi va sochuvchi zarralarni farqlashning ma'nosi yo'q. Shuning uchun barcha zarralarning effektiv kesimini $d\sigma_1$ va $d\sigma_2$ ni qo'shib θ_1 va θ_2 burchaklarni θ bilan almashtirib, quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$d\sigma_1 = \left(\frac{\alpha}{E_1}\right)^2 \left(\frac{1}{\sin^4\theta} + \frac{1}{\cos^4\theta}\right) \cos\theta \, d\Omega \qquad (7)$$

endi (2) formuladan foydalanib sochilgan zarralarning effektiv kesimi bilan ularning to'qnashuv oqibatida yo'qotgan energiyasi orasidagi bog'lanishni topamiz. Buning uchun M tizimdagi sochilish burchagi va tinch turgan zarrachaning sochilishdan keyingi tezligi orasidagi quyidagi formulani esga olish yetarli:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_\infty \sin\frac{\chi}{2}.$$

Demak, bu zarracha oladigan va sochiluvchi zarra beradigan energiya quyidagiga teng:

$$\varepsilon = \frac{m_2 v_2'^2}{2} = \frac{2m^2}{m_2} v_\infty^2 \sin^2\frac{\chi}{2}$$

endi oxirgi ifodadan $\sin\chi/2$ ni ε orqali ifodalab, sochilishning differensial kesimi uchun quyidagi ifodani topamiz:

$$d\sigma = 2\pi \frac{\alpha^2}{m_2 v_\infty^2} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon^2} \qquad (8)$$

Bu formula sochilishning differensial kesimini sochiluvchi zarra yo'qotgan energiya orqali topish imkonini beradi. Ayonki, bu energiya noldan $\varepsilon_{max} = \frac{2m^2 v_\infty^2}{m_2}$ ifoda bilan aniqlanuvchi maksimal qiymatgacha o'zgaradi.

Nazorat savollari

1. Markaziy maydonda sochilishni tushuntirib bering
2. Rezerford formulasi yozing.
3. Sochilishning differesial kesimi nima ?
4. Sochilish burchagi nima ?

15- ma'ruza. CHIZIQLI KICHIK TEBRANISHLAR.
BIR O'LCHAMLI ERKIN VA MAJBURIY TEBRANISHLAR.

REJA:

- Barqaror (turg'un) muvozanat holati.
- Erkin tebranishlar tenglamasi.
- Kichik tebranishlarda to'la energiya
- Zarraning harakat tenglamasi.
- So'nuvchi tebranishlar
- Davriy tebranishlar
- Majburiy tebranish.
- Ryezonans.

***TAYANCH SO'Z VA IBORALAR**: Energiyaning minimal qiymati, muvozanatning turg'unlik sharti, Lagranj funksiyasi, garmonik ostillyator, Lagranj tenglamasi, ostillyatorning xususiy chastotasi, tebranish amplitudasi, tebranish fazasi fazaning boshlangich vaqt momentidagi qiymati, garmonik osillyator harakat tenglamasining umumiy yechimi, tebranish energiyasi. kvazielastik kuch, ishqalanish kuchi, zarraga ta'sir etuvchi umumiy kuch, rezonans*

Bir o'lchamli harakatni integrallash masalasini qaraganimizda aytgan edikki, zarra finitli harakat qilganda u ikkita burilish nuqtalari o'rtasida tebranma harakat qilar edi. Bunday harakat amplitudasi cheksiz kichik bo'lsa, harakatni tekshirish ancha oson bo'ladi. Kichik ampilitudali tebranish U potensial energiyaning minimal qiymatida sodir bo'ladi. Agar bu minimum $q = q_0$ nuqtada mavjud bo'lsa,

$$\left(\frac{\partial u}{\partial q}\right)_{q=q_0} = 0 \qquad \text{va} \qquad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial q^2}\right)_{q=q_0} > 0$$

bo'ladi. Bu shartning ikkinchi $q = q_0$ nuqtada muvozanatning turg'unlik sharti hisoblanadi. Berilgan holda

$$L = \frac{a(q)\dot{q}^2}{2} - u(q)$$

Lagranj funksiyasi $q = q_0$ nuqta yaqinida qatorga yoyib yozsak va $q - q_0 = x$ belgilash kiritsak

$$L = \frac{(a(q_0) + yuqori.darajadagi.hadlar)}{2} x^2 - U(q_0) - x(\frac{dU}{dq})_{q=q_0} - \frac{x^2}{2}(\frac{d^2U}{dq^2})_{q=q_0}$$ - yuqori darajali hadlar.

Potensial energiyaning nolinchi hadi doyimiy son hisoblanadi va uni hisobga olmaslik mumkin, $\left(\frac{dU}{dq}\right)$ minimum mavjud bo'lgan nuqtada nolga teng. Shuning uchun potensial energiya yoyilmasi kvadratik haddan boshlanadi. Tebranish kvadratik ampilitudaga ega bo'lgani uchun yoyilmaning yuqori darajali hadlarida x ning yuqori darajalari ishtirok etadi va ularni hisobga olmaslik mumkin. Shuning uchun kinetik energiya yoyilmasida birinchi had muhin had bo'ladi. Agar

$$m = a(q_0) > 0, \qquad k = \left(\frac{d^2U}{dq^2}\right)_{q=q_0} > 0$$

belgilashlar kiritsak, Lagranj funksiyasi

$$L = \frac{m}{2}x^2 - \frac{k\,x^2}{2}$$

ko’rinishga keladi. Bunday funksiya bilan ifodalanuvchi sistema garmonik ossillyator deyiladi. Lagranj tenglamasida

$$\frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{x}} = m\ddot{x}, \quad \frac{dL}{dx} = -kx$$

Ekanligini hisobga olib, harakat tenglamasining

$$m\ddot{x} = k\,x = 0 \tag{1}$$

Ko’rinishda bo’lishligini topamiz. Agar

$$\omega_a = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Belgilash kiritsak.tenglama quydagicha bo’ladi:

$$\ddot{x} + \omega_a x = 0 \tag{2}$$

Bu yerda ω_a ossillyatorning xususiy chastotasi deyiladi. Ko’ramizki, garmonik ossillyator ikkinchi tartibli chiziqli tenglama bilan ifodalanar ekan.

Odatda chiziqli differensial tenglamalar yechimi oson topilgani tufayli, fizikada uchraydigan ko’pgina problemalar tenglamalarini chiziqli teglama ko’rinishga keltirishga harakat qilinadi.

(2) tenglamaning yechimi bo’lib, sinω_at va cosω_at hisoblanishi mumkin yoki umumiy ko’rinishda

$$x = c_1 \cos\omega_a t + c_2 \sin\omega_a t \tag{3}$$

hisoblanadi. Agar

$$c_1 = a\cos\alpha, c_2 = -a\sin\alpha \tag{4}$$

desak, (3) quydagicha yoziladi:

$$x = a\cos(\omega_a t + \alpha) \tag{5}$$

(4) dan a va α larning c_1, c_2 lar bilan bog’lanishini topamiz:

$$a = \sqrt{c_1^{\,2} + c_2^{\,2}}, tg\alpha = -\frac{c_2}{c_1} \tag{6}$$

Shunday qilib, sistema turg’un muvozanat holati yaqinida garmonik tebranma harakat qilar yekan.(4) dagi a-tebranishning fazasi deyiladi, α -fazaning boshlang’ich vaqt momentidagi qiymati.

Garmonik ossillyator harakat tenglamasining umumiy yechimi odatda, eksponensial funksiya tariqasida axtariladi:

$$x = ae^{-i\omega t} + be^{i\omega t} \tag{7}$$

Bu yerda a va b - integrallash doimiyliklari. (28) ning kompleks qo’shmasi

$$x^* = a^* e^{i\omega t} + b^* e^{-i\omega t} \tag{8}$$

ko’rinishda yoziladi. Yechimning haqiqiy bo’lishligi uchun

$$b = a^*$$

Tenglik bajarilishi lozim bo'ladi. Yechimning normallik sharti nuqtai nazaridan (28) quydagicha yoziladi:

$$x = \frac{a^* e^{i\omega t} + a e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\omega_a}} \tag{9}$$

Demak, umumiy holda yechim kompleks amplituda bo'ladi. Uning moduli bizga odatdagi haqiqiy ampilitudani, argumenti esa tebranish fazasini beradi.

Tebranish energiyasini ampilituda orqali ifadalaymiz. Buning uchun (30) ni vaqt bo'yicha differensiallaymiz:

$$\dot{x} = \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}}(a^* e^{i\omega t} - a e^{-i\omega t}) \tag{10}$$

Tebranishning to'liq energiyasi

$$E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} + \frac{k}{2}x^2 = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \omega^2 x^2)$$

ifodasiga (30) ni qo'yamiz. Dastlab, $\dot{x}^2 va \omega^2 x^2$ larni topamiz:

$$\dot{x}^2 = \frac{-\omega^2}{2\omega}(a^* a^* e^{2i\omega t} - 2a^* a + aa e^{-2i\omega t})$$

$$\omega^2 x^2 = \frac{\omega^2}{2\omega}(a^* a^* e^{2i\omega t} + 2a^* a + aa e^{-2i\omega t})$$

U holda

$$\dot{x}^2 + \omega^2 x^2 = 2\omega a^* a$$

$$E = m\omega a^* a \tag{11}$$

Demak, tebranish energiyasi vaqtga bog'liq bo'lmas ekan.

Ayrim hollarda x va $\dot{x}$ lar o'rniga amplituda bilan bevosita bog'liq bo'lgan $A^*(t), A(t)$ davriy o'zgaruvchilar kiritish qukay bo'ladi, masalan,

$$x(t) = \frac{A^*(t) + A(t)}{\sqrt{2\omega}}, \dot{x}(t) = \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}}\left[A^*(t) - A(t)\right] \tag{12}$$

bulardan $A^*(t), A(t)$ larni topish mumkin:

$$A^*(t) = \frac{\dot{x}(t) + i\omega x(t)}{i\sqrt{2\omega}} = \frac{\omega x - i\dot{x}}{\sqrt{2\omega}}$$

$$A(t) = \frac{\dot{x}(t) - i\omega x(t)}{-i\sqrt{2\omega}} = \frac{\omega x + i\dot{x}}{\sqrt{2\omega}}$$

endi yangi o'zgaruvchilar yordamida harakat tenglamasini ifodalaymiz. (12) ning ikkinchisini vaqat bo'yicha differensiallaymiz:

$$\ddot{x} = \frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}}\left(\dot{A}^* - \dot{A}\right)$$

Shuning uchun (2) tenglamani yoza olamiz:

$$\ddot{x}+\omega^2 x=\frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}}(\dot{A}^*-\dot{A})+\frac{\omega^2}{\sqrt{2\omega}}(A^*+A)=$$
$$=\frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}}(\dot{A}^*-i\omega A^*)+\frac{-i\omega}{\sqrt{2\omega}}(\dot{A}+i\omega A) \qquad (13)$$

Lekin

$$\frac{d}{dt}x=\dot{x}$$

bo'lgani uchun (12) dan

$$\dot{A}^*+\dot{A}=i\omega(\dot{A}+A)$$

yoki

$$(\dot{A}^*-i\omega A^*)+(\dot{A}+i\omega A)=0$$

ekanligini hisobga olsak, (13) ning o'ng tomonidagi har bir had alohida –alohida nolga teng bo'ladi.

$$i\sqrt{2\omega}(\dot{A}^*-i\omega\dot{A}^*)=0$$
$$-i\sqrt{2\omega}\left(\dot{A}^*+2\omega A\right)=0 \qquad (14)$$

(14) ning biri ikkinchisining kompleks qo'shmasi bo'lgani uchun ulardan biri harakat tenglamasining (2) ko'rinishdan (14) ko'rinishga o'tkazishning sababi shundaki, (14) birinchi tartibli differensial tenglamasidir. Bu tenglamaning yechimi

$$A^*(t)=a^*e^{i\omega t},\; A(t)=ae^{-i\omega tt} \qquad (15)$$

Ko'rinishga ega bo'ladi. Bu yechimlarni (33) ga qo'ysak, (10) ko'rinishdagi yechimga kelamiz.

Agar (15) dan A^*A ko'paytmani topsak,

$$A^*A=a^*a$$

bo'ladi va tebranish energiyasi (11) quydagicha yoziladi:

$$E=m\omega A^*(t)A(t)$$

Har qanday real tebranishda kvazielastik kuch ta'sirida harakat qilib turgan sistemalarda ishqalanish kuchi mavjud bo'ladi va shu kuch ta'siri tufayli tebranish so'nuvchan bo'ladi.

Faraz qilaylikki, ishqalanish kuchi nuqta tezligiga proporsianal va teskari yo'nalgan bo'lsin:

$$F_{ish}=-\beta\dot{x}$$

U holda zarraga ta'sir etuvchi umumiy kuch kvazielastik va ishqalanish kuchlari yig'indisidan iborat bo'ladi:

$$F=F_{el}+F_{ish}=-(kx+\beta\dot{x})$$

Zarraning harakat tenglamasi

$$m\ddot{x}+\beta\dot{x}+kx=0 \qquad (*)$$

ko'rinishda yoziladi. Yechimni

$$x=ae^{\lambda t}$$

kabi axtaramiz.

$$\dot{x} = \lambda x, \ddot{x} = \lambda^2 x$$

bo’lganida (*) dan topamiz

$$m\lambda^2 + \beta\lambda + k = 0$$

Bu tenglamaning ildizlari quydagicha bo’ladi:

$$\lambda_1 = -\frac{\beta}{2m} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}; \lambda_2 = -\frac{\beta}{2m} - \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$$

Demak (*) tenglamaning yechimi :

$$x = e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left(ae^{\sqrt{\frac{\beta^2}{4m} - \frac{k}{m}}t} + be^{-\sqrt{\frac{\beta^2}{4m} - \frac{k}{m}}t}\right) \qquad (**)$$

Bu yerda uch holning mavjud bo’lishini ko’ramiz.

1) $\beta > 4m^2$ bo’lsin. (**) yechimning birinchi hadini qaraymiz:

$$\left(-\frac{\beta}{2m} + \sqrt{\frac{\beta^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}\right)t = -\frac{\beta}{2m}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{4m^2 k}{\beta^2}}\right)$$

Bu yerda

$$\sqrt{1 - \frac{4m^2 k}{\beta^2}} < 1$$

Bo’lgani uchun (**) yechim vaqt o’tishi bilan kuchli so’nuvchi harakatni ifodalaydi. Harakat bu holda davriy bo’lmaydi,

2) $\beta^2 < 4m^2$ bo’lsin. U holda (**) yechim quydagicha yoziladi:

$$x = e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left[ae^{i\sqrt{\frac{k^2}{4m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t} + be^{-i\sqrt{\frac{k^2}{4m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t}\right] = ce^{-\frac{\beta}{2m}}\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}t - \gamma\right)$$

Berilgan holda ampilitudasi eksponensial qonun bilan susayib boruvchi garmonik tebranishga ega bo’lamiz. Tebranish chastotasi

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}} < \sqrt{\frac{k}{m}}$$

ya’ni erkin tebranish chastotasidan kichik bo’ladi. Tebranish davri

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

bo’lganidan, tebranish ampilitudasini ifodalovchi eksponensial funksiya darajasidagi nisbat $T = t$ bo’lganda

$$\frac{\beta}{2m}t = \frac{\beta}{2m}T = \frac{2\pi\beta}{2m\omega}$$

bo’ladi va

$e^{-\frac{2\pi\beta}{2m\omega}}$ ning natural logarifimi

$$\frac{2\pi\beta}{2m\omega} = \Lambda$$

So'nishnig logarifmik dikrementi deyiladi.

Majburiy tebranish. Rezonans.

Sistemaga tashqi davriy o'zgaruvchi

$$F = F_0 \cos\omega t \qquad (1)$$

kuch ta'siri ostida bo'lsin. U holda harakat tenglamasi

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + kx = F_0 \cos\omega t \qquad (2)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Erkin tebranish chastotasi $\omega_0{}^2 = \frac{k}{m}$ ni kiritsak, (2) ni qayta quydagicha yoza olamiz:

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \omega_0{}^2 x = F_0 \cos\omega t \qquad (3)$$

Bu tenglamani integrallashda chiziqli differensial tenglamalar nazaryasidagi quydagicha teoremadan foydalanamiz: Agar $g(t)$ bir jinsli bo'lmagan (3) tenglamaning xususiy yechimi, $f(t, A, B)$

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}\dot{x} + \omega_0 x = 0 \qquad (4)$$

Bir jinsli tenglamaning yechimi bo'lsa,

$$g(t) + f(t, A, B)$$

yig'indi bir jinsli bo'lmagan tenglama integrali hisoblanadi.

O'tgan temada (4) tenglamaning yechimini topgan edik:

$$f(t, A, B) = e^{-\frac{\beta}{2m}t}\left[A\cos\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}\,t + B\sin\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\beta^2}{4m^2}}\,t\right] \qquad (5)$$

Sistemaga ta'sir etuvchi kuch ω chastotalik davriy funksiya bo'lgani uchun $g(t)$ xususiy yechim ham ω chastota bilan tebranuvchi davriy bo'lmog'i zarur. (3) tenglamaga $\dot{x}$ va $\ddot{x}$ hosilalar kiritilgani uchun $g(t)$ yechimni birgina sinus yoki birgina kosinus funksiyali yechim bo'la olmaydi. Shu sababli $g(t)$ yechimni quydagicha tanlab olamiz:

$$g(t) = x(t) = \rho\cos\omega t + q\sin\omega t \qquad (6)$$

bundan

$$\dot{x}(t) = -\omega\left[\rho\sin\omega t - q\cos\omega t\right]$$

$$\ddot{x}(t) = -\omega^2\left[\rho\cos\omega t + q\sin\omega t\right] \qquad (7)$$

(7) ni (3) ga quyamiz:

$$-\omega^2\left[\rho\cos\omega t + q\sin\omega t\right] - \frac{\beta}{m}\omega\left[\rho\sin\omega t - q\cos\omega t\right] + \omega^2\left[\rho\cos\omega t + q\sin\omega t\right] = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

$\cos\omega t$ va $\sin\omega t$ funksiyalar oldidagi koeffisentlarni alohida-alohida yozamiz:

$$\rho\omega^2 + \frac{\beta}{m} q\omega + p\omega_0{}^2 = \frac{F_0}{m}$$

yoki

$$-q\omega^2 - \frac{\beta}{m} p\omega + q\omega_0{}^2 = 0 \tag{8}$$

$$p(\omega_0{}^2 - \omega^2) + \frac{\beta}{m} q\omega = \frac{F_0}{m}$$

$$-p\frac{\beta}{m}\omega + (\omega_0{}^2 - \omega^2) q = 0 \tag{9}$$

(9) dan q ni topamiz:

$$q = \frac{\beta}{m} \frac{\omega}{\omega_0{}^2 - \omega^2} \rho \tag{10}$$

va (8)ga quyamiz:

$$p = \frac{mF_0 \left[\omega_0{}^2 - \omega^2\right]}{m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2} \tag{11}$$

(11) dan foydalanib, (10) ni qayta yozamiz :

$$q = \frac{\beta\omega F_0}{m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}$$

Agar (6) da quydagicha almashtirish

$$p = a\cos\varphi, \qquad q = a\sin\varphi$$

kiritsak, (6) ni qayta yozishimiz mumkin:

$$g(t) = a\cos(\omega t - \varphi)$$

Bu yerda

$$\varphi = arctg\frac{q}{m} = arctg\frac{\beta\omega}{m(\omega_0{}^2 - \omega^2)} \tag{12}$$

$$a = \sqrt{p^2 + q^2} = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}} \tag{13}$$

Bundan bir jinsli bo'lmagan (2) tenglama yechim quydagicha ko'rinishga yega bo'ladi:

$$x(t) = Ce^{-\frac{\beta}{2m}t}\cos\left(\sqrt{\omega_0{}^2 - \frac{\beta^2}{4m^2}}t - \gamma\right) + \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2 + \beta^2\omega^2}}\cos(\omega t - \varphi) \tag{14}$$

Yechimning birinchi hadi so'nuvchi davriy tebranishni ikkinchi hadi ω chastotalik stasionar tebranishlarni ifodalaydi.

Stasionar holatga to'g'ri keluchi xususiy yechim vektorli diagrammadan foydalanib oson topish mumkin. Bunig uchun tashqi davriy kuchni $F = F_0 e^{i\omega t}$ ko'rinishda yozib, yechimni

$$x = ae^{i(\omega t - \varphi)}$$

tariqasida axtaramiz. U holda (2) tenglama

$$\ddot{x} + \frac{\beta}{m}x + \omega_0{}^2 x = \frac{F_0}{m}$$

uning yechimi

$$a(-\omega^2 + \frac{\beta}{m} i\omega + \omega_0{}^2)e^{i\omega t - \varphi} = \frac{F_0}{m} e^{i\omega t} \qquad (15)$$

ko'rinishga ega bo'ladi. Bundan ko'rinadiki φ majburiy tebranuvchi kuch va majburiy tebranish o'rtasidagi fazalar farqi hasoblanadi.(15) ni yoza olamiz:

$$a\left[(\omega_0{}^2 - \omega^2) + i\frac{\beta\omega}{m}\right] = \frac{F_0}{m} e^{i\varphi} \qquad (16)$$

Bu tenglamaning nominal qo'shimchasi quydagicha bo'ladi:

$$a\left[(\omega_0{}^2 - \omega^2) - i\frac{\beta\omega}{m}\right] = \frac{F_0}{m} e^{-i\varphi} \qquad (17)$$

(16) va (17) larning chap tomonlarini va o'ng tomonlarini mos ravishda o'zaro ko'paytirib olamiz.

$$a = \frac{F_0}{\sqrt{m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2)^2} + \beta^2\omega^2}$$

Diagrammadan

$$tg\varphi = \frac{\frac{\beta\omega}{m}}{\omega_0{}^2 - \omega^2} = \frac{\beta\omega}{m(\omega_0{}^2 - \omega^2)} \qquad (18)$$

Shunday qilib ko'ramizki, (13) da ampilituda ham, (18) da faza ham $\omega_0{}^2 - \omega^2$ ayirmaga bog'liq bo'lar ekan. Juda sekin tebranishlar, ya'ni $\omega \leq \omega_0$ uchun $tg\varphi \longrightarrow 0$ demak $\varphi = 0$ juda tez tebranishlar $(\omega_0 = \omega)$ uchun $tg\varphi \xrightarrow[manfittomon]{} 0$ demak $\varphi = \pi$ chastotalar o'zaro teng $(\omega_0 = \omega)$ bo'lganda $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'ladi.

Agar majburiy tebranish chastotasi so'nmovchi tebranishning xususiy chastotasiga teng bo'lsa $\omega_0 = \omega$ rezonans hodisasi paydo bo'ladi. So'nish tamoman mavjud bo'lmaganda $(\beta = 0)$ edi rezonans paytida ampilituda cheksiz katta qiymatga ega bo'lar edi. Bu holat rezonans harakati deyiladi. Ishqalanish mavjud bo'lganda ampilitudaning maksimal qiymati ($(\omega_0 = \omega)$ bo'lganda)

$$a_{\max} = \frac{F_0}{\beta\omega_0}$$

Bundan

$$F_0 = \beta\omega_0 a_{\max} \qquad (19)$$

U holda (13) ni kvadratga ko'tarib, (19) dan foydalanamiz:

$$a^2 = \frac{\beta^2\omega_0{}^2 a_{\max}{}^2}{m^2(\omega_0{}^2 - \omega^2) + \beta^2\omega^2} = \frac{\beta^2}{m^2(\frac{\omega_0{}^2 - \omega^2}{\omega_0})^2 + \beta(\frac{\omega}{\omega_0})^2} a_{\max} \qquad (20)$$

Rezonans yaqinida $\omega - \omega_0 = x$ almashtirish o'tkazsak va

$$\frac{\omega}{\omega_0} = 1, \omega + \omega_0 = 2\omega, (\omega_0{}^2 - \omega^2) = (\omega_0 + \omega)(\omega_0 - \omega) = -2\omega x$$

Ekanligini hisobga olsak, (20) quydagicha yoziladi:

$$\frac{a}{a_{\max}{}^{2}} = \frac{\beta^2}{4m^2x^2+\beta^2} \tag{21}$$

Bu yerda $\frac{a^2}{a_{\max}{}^{2}} = \frac{1}{2}$ bo'lganda $\frac{\beta^2}{4m^2x^2+\beta^2} = \frac{1}{2}$ yoki $\bar{x} = \frac{\beta}{2m}$ bo'ldi, ya'ni

$$\overline{\omega} - \omega_0 = \frac{\beta}{2m}\frac{T}{T} = \frac{\beta}{2m}\frac{2\pi}{\omega}\frac{1}{T} = \frac{\Lambda}{2\pi}\omega_0$$

Bundan

$$\frac{\overline{\omega} - \omega_0}{\omega_0} = \frac{\Lambda}{2\pi} \tag{22}$$

Shunday qilib quydagi natijalarga ega bo'lamiz: majburiy tebranishda ampilituda kvadratining o'zgarishi maksimal qiymatining yarmiga teng bo'ladigan nuqtada chastota va xususiy chastota o'rtasidagi ayirmaning xususiy chastotaga nisbati logarifmik dikrimentning 2π ga nisbatiga teng bo'ladi.

Sistemada majburiy kuch ta'siri ostida hosil bo'luvchi stasionar tebranish paytida uning energiyasi o'zgarmaydi. Chunki sistema tomonidan tashqi kuch manbaidan uzluksiz yuritib turadigan energiya o'zgarmaydi. Chunki sistema tomonidan tashqi kuch manbaidan uzluksiz yutulib turadigan energiya ishqalanishini yengishga sarf bo'ladi. Agar vaqt birligi ichida sistema tomonidan yuritiladigan energiyani $I(\omega)$ desak, u

$$I(\omega) = 2\overline{\phi}$$

Formula bilan aniqlanadi. Bu yerda $\overline{\phi}$ - tebranish davri bo'yicha o'rtachlangan dispersiya funksiyasi. Bu funksiya bir o'lchamli harakat uchun quydagicha aniqlanadi:

$$\phi = \beta m\dot{x}^2$$

Agar tebranish

$$x = a\cos(\omega t - \varphi)$$

qonun bilan o'zgaradi desak,

$$\dot{x} = a\omega\sin(\omega t - \varphi)$$

bo'ladi. Agar $\sin^2(\omega t - \varphi)$ funksiya o'rtacha qiymatining $\frac{1}{2}$ teng ekanligini hisobga olsak

$$I(\omega) = \beta ma^2\omega^2$$

bo'ladi. Rezonans yaqinida

$$I(x) = \beta m\omega_0{}^2a^2 = \frac{F_0{}^2}{4m}\frac{\lambda}{x^2+\lambda^2} \tag{23}$$

bu yerda

$$\lambda = \frac{\beta}{2m}, x = \omega - \omega_0$$

Energiyaning sistema tomondan yutilishini ifodalovchi (23) bog'lanish dispersiya qonuni deyiladi.

Rezanons egrilikning yarim kengligi deb x ning shunday qiymati aytiladiki, $I(x)$ ning o'zining $x=0$ nuqtadagi qiymatiga nisbatan ikki marta kamayadi.

(23) dan ko'ramizki $\frac{I(x)}{I(0)}=\frac{1}{2}$ qiymati $x=\pm\lambda$ nuqtalarga mos keladi. $I(0)\sim\frac{1}{\lambda}$ bo'lganidan λ qancha kichik bo'lsa, rezonans egrilik shuncha keskin va baland bo'lladi. Lekin egrilik o'rab olgan yuza o'zgarmas qoladi. Haqiqatdan,

$$\int_{-\infty}^{\infty} I(x)dx=\frac{F_0{}^2\lambda}{4m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+\lambda}=\frac{k_0{}^2\pi}{4m}$$

bu yerda

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^2+\lambda}=\frac{\pi}{\lambda}$$

ekanligini hisobga oldik.

<u>Nazorat savollari</u>

1. Barqaror (turg'un) muvozanat holati deganda nimani tushunasiz
2. Erkin tebranishlar tenglamasini yozing.
3. Kichik tebranishlarda to'la energiya nimaga teng ?
4. So'nuvchi tebranishlarda kuch qanday bo'ladi ?
5. Davriy tebranishlarda amplitude nimaga teng ?
6. Majburiy tebranishni tushuntiring
7. Rezonans nima?

16-ma’ruza: KO’P ERKINLIK DARAJASIGA EGA BO’LGAN SISTEMADA TEBRANISHLAR

REJA

- Bunday sistema uchun Lagranj funksiyasi.
- Harakat tenglamasi va uning yechimi.
- Normal koordinatalar.

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR: Sistemaning erkinlik darajasi soni, sistema potensial energiyasi, sistema kinetik energiyasi, sistema Lagranj funksiyasi, Lagranj tenglamasi.

Sistemaning erkinlik darajasi soni S-ga teng bo’lsin. Bunday sistemaning erkin tebranishlari nazariyasi bir o’lchami tebranishlar nazariyasiga o’xshash bo’ladi.

Agar sistema potensial energiyasi $q_i = q_{i0}$ $(i = 1,2,...,S)$ nuqtasida minimumga ega bo’lsa, $x_i = q_i - q_{i0}$ kichik siljish kiritib, oldin ko’rganimizdek, potensial energiyani katorga yoyish asosida yozishimiz mumkin:

$$U = \frac{1}{2}\sum k_{ik} x_i x_k$$

Bu yerda koeffisiyent k indekslar bo’yicha simmetrik bo’ladi:

$$k_{ik} = k_{ki}$$

Shu asosda kinetik energiyani ham

$$T = \frac{1}{2}\sum m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k$$

Ko’rinishda yozib, Lagranj funksiyasini

$$L = \frac{1}{2}\sum \left(m_{ik} \dot{x}_i \dot{x}_k - k_{ik} x_i x_k \right) \tag{1}$$

deb yoza olamiz.

Harakat tenglamasi va uning yechimi

Lagranj funksiyaning to’liq differensialini yozamiz:

$$dL = \frac{1}{2}\sum \left(m_{ik} \dot{x}_i d\dot{x}_k + m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_i dx_k - k_{ik} x_k dx_i \right)$$

$i \to k$ almashtirish o’tkazsak

$$dL = \sum \left(m_{ik} \dot{x}_k d\dot{x}_i - k_{ik} x_k dx_i \right)$$

Bundan

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \sum m_{ik} \dot{x}_k , \quad \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = -\sum k_{ik} x_k$$

Lagranj tenglamasi esa

$$\sum m_{ik} \ddot{x}_k + \sum k_{ik} x_k = 0 \tag{2}$$

kabi yoziladi. Bu S-ta chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasini olamiz. Ularning umumiy yechimi

$$x_k = A_k e^{i\omega t}$$

tariqasida axtaramiz. U holda (2) o’rnida

$$\sum\left(-\omega^2 m_{ik} + k_{ik}\right)A_k = 0 \qquad (3)$$

chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini olamiz. Bu sistemaning noldan farqli yechimi

$$\left|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}\right|$$

determinantning nolga tengligi bilan aniqlanadi:

$$\left|k_{ik} - \omega^2 m_{ik}\right| = 0 \qquad (4)$$

Bu determinantni ochib chiqsak, ω^2-ga nisbatan S-chi darajadagi tenglamani olamiz. U esa $\omega_\alpha^2(\alpha = 1,2,...,S)$ haqiqiy ildizlarga ega bo’ladi. Shu yul bilan aniqlangan ω_α kattaliklar sistemasining xususiy chastotalari deyiladi. Topilgan ildizlarni (3) tenglamaga qo’yib, har bir ω_α-ga mos keluvchi A_α koeffisiyentlarni topamiz. Agar barcha ildizlar bir-biridan farq qiluvchi bo’lsa, A_α ildizlar (4) aniqlovchining minorlariga proporsional bo’ladi va bu minorda ω, ω_α ildizlarga almashtirilgan bo’ladi.

U holda yechim

$$x_k = \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}$$

bu yerda C_α-ixtiyoriy koeffisiyent, $\Delta_{k\alpha}$ - (5) ning minori. Umumiy yechim

$$x_k = \mathrm{Re}\left\{\sum_{\alpha=1}^{S} \Delta_{k\alpha} C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\} \equiv \sum_\alpha \Delta_{k\alpha}\theta_\alpha \qquad (5)$$

bu yerda

$$\theta_\alpha = \mathrm{Re}\left\{C_\alpha e^{i\omega_\alpha t}\right\}$$

Shunday qilib, sistema koordinatalari har birining vaqt bo’yicha o’zgarishi ixtiyoriy amplitudali va fazali, aniq chastotaga ega bo’lgan S-ta oddiy davriy tebranishlar $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_S$ lar to’plamidan iborat bo’ladi.

Normal koordinatalar

Umumlashgan koordinatalarni shunday qilib tanlab olish mumkinki, ularning har biri oddiy bita tebranishni ifodalasin. Haqiqatan, (5) tenglamalar sistemasini yechib, $\theta_1, \theta_2, ..., \theta_S$ kattaliklarni $x_1, x_2, ..., x_S$ koordinatalar orqali ifodalash mumkin. Demak, θ_α kattaliklarga Yangi umumlashgan koordinatalar deb qarash mumkin. Bu koordinatalar odatda normal koordinatalar deyiladi va ular oddiy tebranishlarni ifodalaydi va qo’yidagi tenglamalarni qanoatlantiradi:

$$\ddot{\theta}_\alpha + \omega_\alpha^2 \theta_\alpha = 0$$

Lagranj funksiyasi esa bu koordinatalarda qo’yidagicha yoziladi:

$$L = \sum \frac{m\alpha}{2}\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2\right)$$

Agar $\theta_\alpha = \sqrt{m\alpha}\theta_\alpha$ almashtirish o’tkazsak,

$$L = \frac{1}{2}\sum\left(\dot{\theta}_\alpha^2 - \omega_\alpha^2 \theta_\alpha^2\right)$$

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1. Ko’p erkinlik darajasiga ega bulgan sistemadagi tebranishlar sistemasi uchun Lagranj funksiyasi qanday bo’ladi?
2. Harakat tenglamasi va uning yechimini ko’rsating.
3. Normal koordinatalarni tushuntiring.

17-ma’ruza: NOCHIZIQLI TEBRANISHLAR.

REJA

- Adiabatik invariantlar.
- Krilov-Bogolyubov uslubi bilan tuzish.
- Parametrik rezonans.
- Tez tebranib o’zgaruvchi maydondagi harakat.

TAYANCH SO’Z VA IBOTALAR: chiziqli bo’lmagan tebranishlar, Krilov-Bogolyubov usuli, chiziqli bo’lmagan tebranishlar. parametrik rezonans, yassi mayatnik, bir o’lchamli harakatda Lagranj funksiyasi.

Ko’pgina mexanik sistemalarda harakat chiziqli bo’lmagan tenglamalar yordamida ifodalanadi. Biz o’tgan temada ana shunday tebranishdan – angarmonik tebranishlarni ko’rgan edik. Odatda bunday tenglamalar chiziqli ko’rinishga keltirilganda ularni tekshrish ancha osonlashadi, ammo bu holda chiziqli bo’lmagan tebranishga xos ko’pgina xusisiyatlar yuqolib ketadi shuning uchun bu tenglamani yechishda bir qancha taqribiy usullar taklif qilingan. Shu usullardan biri Krilov-Bogolyubov usulidir.
Qisqacha mayatnik usulida chiziqli bo’lmagan tenglamalarni qaraymiz.

$$\ddot{\varphi} + k^2 \sin\varphi = 0$$

Agar tebranish kichik hisoblansa, $\sin\varphi$ ni φ kichik bo’lgani uchun qatorga yoyib

$$\sin\varphi = \varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + ...$$

tenglamani

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi - \frac{k^2}{6}\varphi^3 + \frac{k^2}{120}\varphi^5 = 0$$

ko’rinishda yozishimiz mumkin. Bu esa chiziqli bo’lmagan ifoda etadi. Krilov-Bogolyubov usuli chiziqli bo’lmagan tayenglamalar ekvivalent chiziqlashtirish usuli hisoblanadi.

Chiziqli bo’lmagan tenglama

$$\ddot{x} + k^2 x = \mu\, f(x, \dot{x}) \qquad (1)$$

ko’rinishga ega bo’lsin. Bu yerda $f(x,\dot{x})$ va $x, \dot{x}$ larning chiziqli bo’lmagan funksiyasi, μ - kichik parametr.

Agar $\mu = 0$ bo’lsa (1) tenglama

$$\ddot{x} + k^2 x = 0 \qquad (2)$$

Chiziqli tenglamaga aylanadi (2) ning yechimi

$$x = a\sin\psi$$

ko’rinishda beriladi. Bu yerda

$$\psi = kt + \alpha, \alpha = const, a = const$$

U holda

$$\dot{x} = ak\cos\psi$$

Krilov-Bogolyubov usulining mohiyati shundan iboratki, (1) ning chiziqmastlik darajasi kichik va tebranish garmonik tebranishlarga yaqin deb hisoblanadi. U holda

$$x = a\sin\psi, \dot{x} = a\omega\cos\psi, \quad \psi = \omega t + \alpha$$

bo'ladi. Bu yerda $a = a(t), \omega = \omega[a(t)]$ – vaqtning sekin o'zgaruvchi funksiyasi deb hisoblanadi. U holda chiziqli bo'lmagan tebranishni ifodalovchi (1) tenglama sistemadagi ishqalanish mavjud bo'lganidagi

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{3}$$

Chiziqli tenglamaga ekvivalent bo'ladi. Bu yerda

$$k = -\frac{\mu}{2\pi a\omega}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi, a\omega\cos\psi)\cos\psi d\psi \tag{4}$$

$$\omega^2 = k^2 - \frac{\mu}{\pi a}\int_0^{2\pi} f(a\sin\psi, a\omega\cos\psi)\sin\psi d\psi \tag{5}$$

Biz bilar edikki, (3) ning yechimi

$$x = a\sin\psi, a = Ce^{-kt}, \psi = \sqrt{\omega^2 - k^2 t} + \alpha$$

bo'lar edi, (4) da $k \sim \mu$ bo'lgani uchun u kichik son bo'ladi va

$$\psi \approx \omega t + \alpha$$

bo'ladi. U holda

$$\dot{\psi} = \omega$$

Agar $a = Ce^{-kt}$ ekanligini hisobga olsak,

$$\dot{a} = -kCe^{-kt} = -ka$$

Demak (1) tenglamani integrallash (6) va (7) kabi birinchi tartibli differensial tenglamalarni integrallashga keltiriladi.

Misol:

$$\ddot{\varphi} + k^2\varphi = \mu\varphi^3 \qquad (\mu = \frac{k^2}{6})$$

Tenglamani yechaylik. Bu yerda $f(x, \dot{x}) = \varphi^3$ (8) ning yechimini

$$\varphi = a\sin\varphi, \dot{\varphi} = a\omega\cos\varphi$$

tariqasida axtaraniz.

$$f(a\sin\varphi, a\omega\cos\varphi) = a^3\sin^3\psi$$

ekanligini hisobga olib

$$I_1 = \int_0^{2\pi} f(a\sin\psi, a\omega\cos\psi)\cos\psi d\psi = a^3\int_0^{2\pi}\sin^3\psi\cos\psi d\psi$$

$$I_2 = \int_0^{2\pi} f(a\sin\psi, a\omega\cos\psi)\sin\psi d\psi = a^3\int_0^{2\pi}\sin^3\psi\sin\psi d\psi$$

integrallarni hisoblaymiz. Ko'rsatish mumkunki,

$$I_1 = 0; I_2 = \frac{3}{4}\pi a^3$$

u holda

$$\omega^2 = k^2 - \frac{3}{4}\mu a^2$$

$$\omega = \sqrt{k^2 - \frac{3}{4}\mu a^2} = k(1 - \frac{3}{4}\frac{\mu a^2}{k^2})^{1/2} \approx k(1 - \frac{3}{8}\frac{\mu a^2}{k^2})$$

Biz $\mu = \frac{k^2}{6}$ ekanligini hisobga olsak,

$$\omega = k(1 - \frac{a^2}{16})$$

U holda (6), (7) tenglamalar quydagicha yoziladi:

$$\dot{a} = 0, \dot{\psi} = \omega = k(1 - \frac{a^2}{16}) \tag{9}$$

Chunki bizda $n = 0$ (9) tenglamalarni integrallaymiz:

$$a = C_1 \qquad\qquad \psi = k(1 - \frac{C_1^{\ 2}}{16})t + C_2$$

Biz ψ ning qiymatini $x = a\sin\psi$ yechimga qo’yib topamiz:

$$\varphi = C_1 \sin\left[k(1 - \frac{C_1^{\ 2}}{16})t + C_2\right] \tag{11}$$

Agar $t = 0, \varphi = a_0, \dot{\varphi} = 0$ bo’lsa

$$a_0 = C_1 \sin C_2 \tag{12}$$

$$0 = kC_1 \cos C_2 \tag{13}$$

ekanligini topamiz. (13) da $k_1 C_1 \neq 0$, damak $\cos C_2 = 0$ yoki $C_2 = \frac{\pi}{2}$ u holda (12) dan $C_1 = a_0$ demak (11) yechim

$$\varphi = a_0 \cos k(1 - \frac{1}{16}a_0^{\ 2})t$$

ko’rinishga ega bo’ladi.

Parametrik rezonans

Shunday ochiq sistemalari mavjudki, bu sistemalarda tashqi maydon ta’siri masalasi uning parametrlarining vaqt bo’yicha o’zgarish masalasiga keltiriladi. Bunday sistemalarga osilish nuqtasi vertikal holda davriy tebranib turuvchi yassi mayatnik misol bo’lishi mumkin.

Biz ko’rdikki, bir o’lchamli harakatda Lagranj funksyasi

$$L = \frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}$$

ko’rinishga ega bo’lar edi va bunday sistema parametrlari bo’lib m, k kattaliklar hisoblanadi. Agar bu parametrlarni vaqt bo’yicha o’zgaradi deb faraz qilsak, harakat tenglamasi quydagicha yoziladi:

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + kx = 0 \tag{1}$$

Agar o’zgaruvchi t t o’rniga yangi $d\tau = \frac{dt}{m(t)}$ o’zgaruvchi kiritsak, (1) tenglama

$$\frac{d^2x}{dr^2}+mkx=0$$

ko'rinishga keladi yoki

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega^2(t)x=0 \qquad (2)$$

umumiy ko'rinishda yoziladi. Bu yerda funksiyaning ko'rinishi masala sharti orqali aniqlanadi. Faraz qilaylikki, bu funksiya biror chastota (shuningdek, $T=\frac{2\pi}{\gamma}$ davr) bilan aniqlanuvchi davriy funksiya bo'lsin. Demak, bu funksiya uchun

$$\omega(t+T)=\omega(t)$$

bir qiymatlik sharti bajariladi, ya'ni (2) harakat tenglamasi $t\to t+T$ almashtirishga nisbatan invariyant bo'ladi. Bundan agar $x(t)$ (2) tenglamaning yechimi bo'lsa, $x(t+T)$ ham uning yechimi hisoblanadi degan xulosa kelib chiqadi. Boshqacha so'z bilan aytganda agar $x_1(t)$ va $x_2(t)$ lar (2) tenglamaning bir-biriga bog'liq bo'lmagan ikkita integrali bo'lsa, $t\to t+T$ almashtirirish o'tkazilganda ular o'zaro chiziqli bog'lanishda bo'ladi. Bu paytda x_1 va x_2 larni shuday tanlab olish mumkinki $t\to t+T$ almashtirishda ular doimiy sonlargagina o'zgarsin:

$$x_1(t+T)=\mu_1x_1(t), \qquad x_2(t+T)=\mu_2x_2(t)$$

Bunday xossalarga ega bo'lgan funksiyalarning umumiy ko'rinishi quydagicha bo'ladi:

$$x_1(t)=\mu_1^{t/T}\prod\nolimits_1(t) \qquad x_2(t)=\mu_2^{t/T}\prod\nolimits_2(t) \qquad (3)$$

Bu yerda $\prod_1(t),\prod_2(t)-T$ davriylik funksiyalar. Agar (2) ni x_1 va x_2 lar uchun yozsak

$$\ddot{x}_1+\omega^2(t)x_1=0, \ddot{x}_2+\omega^2(t)x_2=0$$

va ularni mos ravishda x_1, x_2 larga ko'paytirib ayirsak

$$\ddot{x}_1x_2-\ddot{x}_2x_1=\frac{d}{dt}(\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2)=0$$

bundan

$$\dot{x}_1x_2-x_1\dot{x}_2=const \qquad (4)$$

ekanligini topamiz. Agar (3) ni e'tiborga olsak, (4) dagi aralash ko'paytma $\mu_1\mu_2$ koeffisentlarni paydo bo'lishiga va ko'paytmaning doimiy songa teng bo'lishiga kamida

$$\mu_1\mu_2=1$$

bo'lishiga olib keladi. Bundan

$$|\mu_1|^2=|\mu_2|^2=1 \qquad \text{yoki} \qquad |\mu_1|=|\mu_2|=1$$

ekanligi kelib chiqadi. Boshqa tomondan, (3) dan ko'rindiki, funksiya μ ning vaqt bo'yicha darajasi tariqasida vaqt bo'yicha oshib boradi. Demak sistemaning muvozanati (x=0 bo'lgan holat) turg'un bo'lmay qoladi: muvozanat holatda cheksiz kichik chetlanish darhol vaqt bo'yicha oshib ketuvchi chetlanishga olib keladi. Bu hodisa parametrik rezonans deyiladi.

Parametrik rezanans paydo bo'lish sharti bilan tanishaylik $\omega(t)$ funksiya ya'ni biror ω_0 doyimiy kattalikdan ham farq qiluvchi va davriy o'zgaruvchi funksiya bo'lsa:

$$\omega^2(t) = \omega_0^{\ 2}(1 + h\cos\gamma t)$$

Bu yerda $0 < h \le 1$ bo'lgan kichik kattalik hisoblansin. Agar $\omega(t)$ funksiyaning tebranish chastotasi ikkilangan ω_0 ga yaqin bo'lsa, parametrik rezonans tezroq sodir bo'ladi, ya'ni

$$\gamma = 2\omega_0 + \varepsilon, (\varepsilon \le \omega_0)$$

u holda harakat tenglamasi

$$\ddot{x} + \omega_0^{\ 2}\left[1 + h\cos(2\omega_0 + \varepsilon)t\right]x = 0 \ (5) \qquad (5)$$

yechimni

$$x = a(t)\cos(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t + b(t)\sin(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t \qquad (6)$$

ko'rinishda axtarish mumkin. Bu yerda $a(t), b(t)$ lar vaqtning sekin o'zgaruvchi funksiyalari. (6) yechimni (5) ga qo'yib ε ning birinchi yechimi darajasidagi hadlarni saqlab qolamiz. Bu patda, $\dot{a} \sim \varepsilon a, \dot{b} \sim \varepsilon b$ deb hisoblaymiz. Agar

$$\cos(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t \cdot \cos(2\omega_0 + \varepsilon)t = \frac{1}{2}\cos(3\omega_0 + \frac{3\varepsilon}{2})t + \frac{1}{2}\cos(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t$$

ekanligini hisobga olsak va $3(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t$ chastotalik hadni tashlab yozsak, (5) tenglama o'rnida

$$-(2\dot{a} + b\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}b)\omega_0\sin(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t + (2\dot{b} + a\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2}a)\omega_0\cos(\omega_0 + \frac{\varepsilon}{2})t = 0$$

tenglamani olamiz. Bu tenglikning bajarilishi uchun $\sin$ va $\cos$ funksiyalar oldidagi koeffisentlar nolga teng bo'lishi lozim.

$$\dot{a} + \frac{1}{2}(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2})b = 0$$

$$\dot{b} - \frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2})a = 0$$

Bu chiziqli tenglamalar yechimni $e^{\varphi t}$ (bu yerda $S = \frac{1}{2}\sqrt{(\frac{h\omega_0}{2})^2 - \varepsilon^2}$) tariqasida axtaramiz. U holda

$$Sa + \frac{1}{2}(\varepsilon + \frac{h\omega_0}{2})b = 0$$

$$\frac{1}{2}(\varepsilon - \frac{h\omega_0}{2})a - Sb = 0$$

algebraik tenglamalarga ega bo'lamiz. Parametrik rezonansning paydo bo'laishi uchun $S^2 > 0$ bo'lmog'i kerak, ya'ni

$$-\frac{h\omega_0}{2} < \varepsilon < \frac{h\omega_0}{2}$$

Bundan intervalda parametrik razonans paydo bo’lishini ko’ramiz.

Parametrik rezonans shuningdek kuchsiz ishqalanish mavjud bo’lganda ham paydo bo’lishi mumkin. Ko’rdikki, bu holda tebranish ampilutudasi $e^{-\lambda t}, (\lambda = \frac{\beta}{2m})$ qonun bilan so’nar edi. Shuning uchun parametrik rezonansda ampilitudaning o’sib borishi $e^{(S-\lambda)t}$ qonun asosida bo’ladi va turg’insizlik sohasining chegarasi $S - \lambda = 0$ shart bilan aniqlanadi. Rezonans sohasida (6) tengsizlik berilgan holda

$$-\sqrt{(\frac{h\omega_0}{2})^2 - 4\lambda^2} < \varepsilon < \sqrt{(\frac{h\omega_0}{2})^2 - 4\lambda^2}$$

ko’rinishda yoziladi.

Nazorat savollari

1. Adiabatik invariantlik nima ?
2. Krilov-Bogolyubov uslubini tushuntirib bering ?
3. Parametrik rezonans deganda nimani tushunasiz ?
4. Tez tebranib o’zgaruvchi maydondagi harakat haqida ayting.

18- ma’ruza: DINAMIKANING GAMILTON SHAKLI.

REJA

- Gamilton funksiyasi.
- Gamiltonning kanonik tenglamalari.
- Gamilton tenglamalarini variasiya prinsipi asosida keltirib chiqarish.

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR: dinamikaning Gamilton shakli, Gamilton funksiyasi, Gamilton tenglamalari, energiya, impilus, Langarj tenglamalari, Langranj funksiyasi, koordinatalar sistemasi

Lagranj funksiyasi yordamida mexanika qonunlarini ta’rif etganda mexanik sistema holatini uning umumlashgan koordinatalari va tezliklari orqali ifodalagan edik. Ammo bu mexanika qonunlarini ifodalashning birdan-bir yo’li hisoblanmaydi. Mexanikaning turli umumiy masalalarini tekshirishda uning holatini umumlashgan koordinatalar va impulslar orqali ifodalash ancha qulay hisoblanar ekan. Shu munosabat bilan harakat tenglamasini topish masalasi paydo bo’ladi.

O’zaro bog’liq bo’lmagan o’zgaruvchilarning biror to’plamdan ikkinchi bir to’plamiga o’tishga to’g’ri keladi. Bunday o’tishda Lagranj almashtirishidan foydalanamiz. Berilgan holda bu almashtirish quyidagidan iboratdir.

Lagranj funksiyasining to’liq differensiali, oldin ko’rganimizdek quyidagicha:

$$dL = \sum \frac{\partial L}{\partial q_i} dq_i + \sum \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i$$

Agar $\frac{\partial L}{\partial q_i} = \dot{p}_i$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = p_i$ ekanligini e’tiborga olsak,

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i \qquad (1)$$

bo’ladi. (1) ning o’ng tomonidagi ikkinchi hadni quyidagicha yozish mumkin:

$$\sum p_i d\dot{q}_i = d(\sum p_i dq_i) - \sum \dot{q}_i dp_i \qquad (2)$$

(2) tenglmkni (1) ga qo’yib to’liq differensialli hadlarni bir tomonga o’tkazib yozamiz:

$$d(\sum p_i \dot{q}_i - L) = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i \qquad (3)$$

Differensial belgisi ostidagi had sistema energiyasi hisoblanadi. (3) ko’ramizki, energiya sistema umumlashgan koordinatasi va impulsi orqali ifodalangan. Bu had sistemaning Gamilton funksiyasi deyiladi:

$$H(q, p, t) = \sum p_i \dot{q}_i - L \qquad (4)$$

u holda (3) quyidagi ko’rinishni oladi:

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i \qquad (5)$$

bu tenglikda o’zaro bog’liq bo’lmagan o’zgaruvchilar bo’lib koordinata va impuls hisoblanadi va undan quyidagi tenglamalar kelib chiqadi:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \qquad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \qquad (6)$$

Bu tenglamalar q, p o'zgaruvchilar orqali ifodalangan, biz izalayotgan tenglamalar hisoblanadi va ular Gamilton tenglamalari deb ataladi. Agar Lagaranj tenglamalari sistema erkinlik darajasi sonidagi S – ta ikkinchi tartibli differensial tenlamalar hisoblansa, Gamilton tenglamalari $2S$ ta birinchi tartibli differensial tenglamalar hisoblanadi. Gamilton tenglamalari sodda va simmetrik ko'rinishda bo'lganligi uchun ularni kanonik tenglamalar deb ham yuritishadi.

Gamilton fuksiyasidan vaqt bo'yicha to'liq differensial olamiz:

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t} + \sum \frac{\partial H}{\partial q_i}\dot{q}_i + \sum \frac{\partial H}{\partial p_i}\dot{p}_i \qquad (7)$$

Agar (7) dagi $\dot{q}_i$, ва $\dot{p}_i$ o'rniga (6) ni qo'ysak, (7) ning o'rniga o'ng tomondagi ikkinchi va uchinchi hadlar o'zaro qisqarishadi va

$$\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$$

tenglikni olamiz. Bundan agar Gaimlton funksiyasi vaqtning oshkor funksiyasi bo'lmasa $\frac{dH}{dt} = 0$ bo'lishligini va natijada sistema energiyasining saqlanishligini ko'ramiz.

Bir dinamik o'zgaruvchilardan boshqa dinamik o'zgaruvchilarga o'tish.

Faraz qilaylikki, sistema holatini $q, \dot{q}$ yoki q, p ikki o'zgaruvchilar bilan birgalikda biror λ parametr ham ifodalansin. U holda Lagranj va Gamilton funksiyalarining to'liq differensiallari quyidagicha bo'ladi: (1) va (5) munosabatlar quyidagicha ko'rinishni oladi:

$$dL = \sum \dot{p}_i dq_i + \sum p_i d\dot{q}_i + \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda$$

$$dH = -\sum \dot{p}_i dq_i + \sum \dot{q}_i dp_i - \frac{\partial L}{\partial \lambda} d\lambda$$

bulardan

$$\left(\frac{\partial H}{\partial \lambda}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right)_{q,\dot{q}}$$

tenglikning mavjud bo'lishligini ko'ramiz. Bu hosilalar indekslari differensial amalining bir bor q, p lar doimiy bo'lganda, ikkinchi bor $q, \dot{q}$ doimiy bo'lganda olinganligini ko'rsatadi. Agar $\lambda = t$ bo'lsa,

$$\left(\frac{\partial H}{\partial t}\right)_{q,p} = -\left(\frac{\partial L}{\partial t}\right)_{q,\dot{q}}$$

bog'lanishni olamiz.

Agar s – erkinlik darajasiga ega bo'lgan sistema uchun koordinatalarda diagramma tuzsak, $2s$ o'lchamli fazo hosil bo'ladi. Bu fazoning koordinatalari bo'lib p va q lar hisoblanadi. Bu fazoning har bir nuqtasi sistemaning aniq bir holatiga mos keladi. Odatda bunday fazo fazali fazo deyiladi. Sistema holatining vaqt bo'yicha o'zgarishi biror egrilik bilan ifodalanadi va bu egrilik fazalik trayektoriya deyiladi.

Fazali trayektoriyaning berilishi sistemaning mumkin bo'lgan harakati to'g'risida bir qancha xulosalar beradi. Faraz qilaylikki, sistema Lagranj funksiyasi

$$L = T - U(x) = \frac{m\dot{x}^2}{2} - U(x)$$

ko'rinishga ega bo'lsin. U holda Gamilton funksiyasi

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(x)$$

ko'rinishda yoziladi. Bu holda (7) tenglamalarning maxsus nuqtalari bo'lib,

$$\frac{\partial T}{\partial p} = 0, \qquad \frac{\partial U}{\partial x} = 0$$

bajariladigan nuqtalar bo'lib hisoblanadi. Bu tenglamaning birinchisi $r = 0$ bo'dganda bajarilsa, ikkinchisi bu maxsus nuqtada potensial energiyaning yekstremal qiymati mavjdligini ko'rsatadi. Agar bu ekstremum minimumdan iborat bo'lsa, $(0, x_0)$ nuqta atrofida Gamilton funksiyasi

$$H(p,x) = E = \frac{p^2}{2m} + \frac{k(x-x_0)^2}{2}$$

ko'rinishda bo'ladi. Haqiqatan $(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}) = (\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}) > 0$ bo'ladi, potensial energiya minimumga ega bo'ladi.

Energiya saqlanganligi uchun fazali trayektoriya bo'lib doimiy energiyani ifodalovchi markazi maxsus $(0, x_0)$ nuqtada bo'lgan ellips chiziqlari bo'lib hisoblanadi.

Agar potensial energiya ekstremumi maksimum bo'lsa,

$$H(p,x) = E = \frac{p^2}{2m} - \frac{k(x-x_0)^2}{2}$$

fazali trayektoriya bo'lib markazi $(0, x_0)$ maxsus nuqtada bo'lgan giperbolalardan iborat bo'ladi (egrilikdagi strelkalar fazali trayektoriya bo'ylab nuqta harakatining yo'nalishlarini ifodalaydi).

Endi biz esda saqlash uchun turli koordinata sistemalarida Laranj va Gamilton funksiyalarining ko'rinishini yozamiz.

Umumiy holda

$$L = T(q,\dot{q}) - U(q)$$

$$H = T(q,p) + U(q)$$

Dekart koordinatalarida

$$L = \frac{mv^2}{2} - U(r);$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + U(r) = \frac{1}{2m}(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z)$$

Silindrik koordinatalar sistemasida

$$L = \frac{m}{2}(\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\varphi}^2 + \dot{z}^2) - U$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_\rho^2 + \frac{1}{\rho^2}p_\varphi^2 + p_z^2) + U(r, \varphi, z)$$

Sferik koordinatalar sistemasida

$$L = \frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2\dot{\varphi}^2 + r^2\dot{\varphi}^2\sin^2\theta) - U$$

$$H = \frac{1}{2m}(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\theta^2 + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}p_\varphi^2) + U(r, \theta, \varphi)$$

Nazorat savollari

1. Lagranj funksiyasi ifodasini yozing.
2. Langrang tenglamalarini yozing
3. Gamilton funksiyasini yozing
4. Gamiltonning kanonik tenglamalari yozing
5. Gamilton tenglamalarini variasiya prinsipi asosida keltirib chiqaring
6. Sistema energiyasi nima ?

19-ma'ruza: KANONIK ALMASHTIRISHLAR

REJA:

- Kanonik almashtirishda Gamilton tenglamasi
- O'zgaruvchi funksiyaga almashtirish
- Yangi kanonik almashtirish formulasi

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: Umumlashgan koordinatalar, fazo, Lagranj tenglamalari, funksiy, Gamilton tenglamalari, Kanonik almashtirishlar

Umumlashgan koordinatalarni tanlab olish biror shart bilan chegaralangan bo'lmaydi – istalgan S ta koordinatalar sistemaning fazodagi holatini bir qiymatli ravishda aniqlab beradi.

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}-\frac{\partial L}{\partial q_i}=0, \quad (i=1,2,.....,S)$$

Lagranj tenglamalari bunday tanlab olishga bog'liq bo'lmaydi, shuning uchun bu tenglamalar $q_1, q_2,...$ koordinatalardan istalgan o'zaro bog'liq bo'lmagan $Q_1, Q_2,...$ koordinatalarga o'tishga nisbatan invariant bo'ladi. Yangi Q koordinatalar yeski q koordinatalar funksiyasi hisoblanadi. Faraz qilaylikki, Q koordinatalar, shuningdek vaqtning ham funksiyasi hisoblansin, ya'ni

$$Q_i = Q_i(q,t) \tag{1}$$

Lagranj tenglamalari kabi Gamilton tenglamalari ham bu almashtirishlarga nisbatan o'z ko'rinishlarini o'zgartirmaydi. endi bu yerda (1) almashtirishlarga o'zaro bog'liq bo'lmagan R o'zgaruvchilarni ham kiritish lozim bo'ladi:

$$Q_i = Q_i(q,R,t)$$
$$P_i = P_i(q,p,t) \tag{2}$$

Shuni aytish kerakki, (2) almashtirishi ixtiyoriy ko'rinishida harakat teglamalarining o'z ko'rinishini o'zgartirmay qolaveradi. O'z ko'rinishlarini saqlab qolishi uchun

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial H'}{\partial P_i}, \qquad \dot{P}_i = \frac{\partial H'}{\partial Q_i} \tag{3}$$

tengliklarning bajarilishi lozim bo'ladi. Bu yerda $H'(P,Q)$ Gamiltonning biror yangi funksiyasi. (3) almashtirishlar kanonik almashtirishlar deyiladi. Mumkin bo'lgan (3) almashtirishlardan (4) kanonik almashtirishlarni keltirib chiqarish uchun variasiyasiga murojaat qilamiz. Bu prinsipga ko'ra Lagranj tenglamalari kabi Gamilton tenglamalari ham kelib chiqadi. Buning uchun

$$\delta\int(\sum p_i dq_i - Hdt)=0$$

sharti bajarilgani kabi, yangi o'zgaruvchilar $P_i^{'}$ va $H_i^{'}$ lar uchun ham

$$\delta\int(\sum P_i^{'} dQ_i - H' dt)=0$$

shartining bajarilmog'i zarur hisoblanadi. Bu ikki shart shu paytda ekvivalent bo'ladiki, agar integral ostidagi ifodalar bir-biridan biror ixtiyoriy F funksiyaning to'liq differensialiga farq qilsa, ya'ni

$$\sum p_i dq_i - Hdt = \sum P_i dQ_i - H'dt + dF \qquad (5)$$

Bu yerdagi F funksiya almashtirishning hosilaviy funksiyasi deyiladi. (5) ni quyidagicha yozamiz

$$dF = \sum p_i dq_i - \sum P_i dQ_i + (H' - H)dt \qquad (6)$$

Bundan biz F funksiyani $F = F(q, Q, t)$ deb topamiz:

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial q_i}, \quad p_i = -\frac{\partial F}{\partial Q_i}, \quad H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \qquad (7)$$

F funksiyaning berilgan qiymatida (7) formulalar yeski (p, q) va yangi (P, Q) o'zgaruvchilar o'rtasida, shuningdek Gamilton funksiyalari o'rtasida bog'lanishni ifodalaydi.

Ayrim hollarda hosilaviy funksiyani o'zgaruvchilarda ifodalash qulay bo'lishi mumkin. Buning uchun (6) $\sum P_i dQ_i$ hadni boshqacha qilib yozamiz:

$$\sum P_i dQ_i = d\sum P_i Q_i - \sum Q_i dP_i$$

va (6) ni qayta yozamiz:

$$d(F + \sum P_i Q_i) = \sum p_i dq_i + \sum Q_i dP_i + (H' - H)dt$$

Yangi

$$\Phi(q, p, t) = F + \sum P_i Q_i$$

hosilaviy funksiya kiritib,

$$P_i = \frac{\partial \Phi}{\partial q_i}, \quad Q_i = \frac{\partial \Phi}{\partial p_i}, \quad H' = H + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

kabi kanonik almashtirishlarni olamiz. Shu yo'l bilan har xil hosilaviy funksiyalar kiritish yordamida yangidan yangi kanonik almashtirishlar olish mumkin.

Kanonik almashtirishlarga misol tariqasida garmonik ossillyatorni qaraymiz.

Ossillyator uchun $(m = 1)$

$$L = \frac{\dot{x}^2 - \omega^2 x^2}{2}, \quad q = x, \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \dot{x}, \quad H = \frac{p^2 + \omega^2 q^2}{2}$$

Yangi impuls va koordinata kiritaylik:

$$P \equiv iA^* = i\frac{p + i\omega q}{\sqrt{2\omega}}; \quad Q = A = \frac{p - i\omega q}{\sqrt{2\omega}} \qquad (8)$$

P, Q dan tashkil topgan Puasson qavsini hisoblaylik:

$$(P,Q)=i(A^*,A)=\frac{\partial P}{\partial p}\frac{\partial Q}{\partial q}-\frac{\partial P}{\partial q}\frac{\partial Q}{\partial p}=$$

$$=(i\frac{1}{\sqrt{2\omega}}\frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}}-i\frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}})=$$

$$=i(\frac{-i\omega}{2\omega}-\frac{i\omega}{\sqrt{2\omega}})=-i\frac{-2i\omega}{2\omega}=1$$

Demak,

$$\left(A^*,A\right)=-i,\quad \left(P,Q\right)=\left(P,A\right)=1$$

bajariladi va (8) almashtirishlar kanonik almashtirishlar bo'ladi.
yangi o'zgaruvchilarda

$$PA=i\frac{p+i\omega q}{\sqrt{2\omega}}\frac{p-i\omega q}{\sqrt{2\omega}}=i\frac{p^2+\omega^2q^2}{2\omega}$$

$$=\frac{i}{\omega}\frac{p^2+\omega^2q^2}{2}=\frac{i}{\omega}H$$

Bundan

$$H=\frac{\omega}{i}PA=-i\omega PA=-i\omega(iA^*,A)=\omega A^*A$$

Harakat tenglamalari A^*,A lar uchun quyidagicha yoziladi:

$$\frac{dA^*}{dt}=(A^*,H)=\left(\frac{\partial A^*\partial H}{\partial P\partial Q}-\frac{\partial A^*}{\partial Q}\frac{\partial H}{\partial P}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{i}\omega A\right)=-\omega A$$

Bu tenglamalar yechimi

$$\frac{dA}{dt}=(A,H)=\left(\frac{\partial A}{\partial P}\frac{\partial H}{\partial Q}-\frac{\partial A}{\partial Q}\frac{\partial H}{\partial P}\right)=-\frac{\omega A}{i}=i\omega A$$

$$A=ae^{i\omega t},\qquad A^*=a^*e^{-i\omega t} \tag{9}$$

hisoblanadi.

Gamilton funksiyasi vaqtga oshkor bog'liq bo'lmagani uchun $\frac{\partial H}{\partial t}=0$ bo'ladi va energiya saqlanuvchan bo'ladi.

$$H=\frac{p^2+\omega^2q^2}{2}=-\omega A^*A=\omega a^*a$$

(9) yechimda a,a^* larni A,A^* lar orqali ifodalash ham mumkin:

$$a=e^{-i\omega t}A,\quad a^*=e^{-i\omega t}A^*$$

U holda a^*,a lar uchun Puasson qavsi

$$(a^*,a)=e^{i\omega t}e^{-i\omega t}(A^*,A)=-i$$

Ya’ni (a^*, a) ning qiymati (A, A^*) ning qiymati kabi bo’ladi. Lekin a^*, a larning vaqt bo’yicha o’zgarishi A, A^* larning o’zgarishidan farq qiladi.

Haqiqatan

$$\frac{da}{dt} = \frac{\partial a}{\partial t} \neq (aH) = -i\omega a + \frac{\partial a}{\partial P}\frac{\partial H}{\partial Q} - \frac{\partial a}{\partial Q}\frac{\partial H}{\partial P} =$$

$$= -i\omega a + (0 - e^{-i\omega t}\frac{\omega A}{i}) = -i\omega a + i\omega a = 0$$

<u>Nazorat savollari</u>

1. Kanonik almashtirishda Gamilton tenglamasini yozing (umumlashgan koordinata, Lagranj tenglamasi, Gamilton tenglamasi, almashtirish, yangi o’zgaruvchilar).
2. O’zgaruvchi funksiyaga almashtirish ifodasini ko’rsating. (hosilaviy funksiya, kanonik almashtirish, garmonik almashtirish, garmonik ossillyator)
3. Yangi kanonik almashtirish formulasini yozing. (yangi kanonik almashtirish Gamilton funksiyasi, Puasson qavsi).

Пуассон қавслари

Режа:

1. Пуассон қавси
2. Пуассон қавсининг хоссалари
3. Пуассон теоремаси

Гамилтон формасида ёзилган механика Пуассон қавслари деб аталувчи муносабатлар ёрдамида қулай ва содда кўринишни олади.

Фараз қилайликки, бизга q, p лар ва t нинг функцияси бўлган

$$f = f(q, p, t) \quad \text{ва} \quad g = g(q, p, t)$$

функциялар берилган бўлсин. Бу функциялар учун Пуассон қавси қуйидагича ёзилади:

$$\{f, g\} = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q_i} - \frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial g}{\partial p_i} \right)$$

Ҳар бири учун бу қавсни қуйидагича топамиз. Функсиялар бирортасининг вақт бўйича тўлиқ ҳосиласи

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p_i} \dot{p}_i \right)$$

$\dot{q}_i, \dot{p}_i$ лар ўрнига Гамилтон тенгламасидан қийматларни қўямиз:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \sum \left(\frac{\partial f}{\partial q_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} + \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) = \frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\}$$

f -нинг ҳаракат интеграли бўлишлиги учун $\frac{df}{dt} = 0$ ёки

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{f, H\} = 0$$

бўлмоғи зарурдир. Агар ҳаракат интеграли вақтга ошкор боғлиқ бўлмаса, $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ бўлади, у ҳолда $\{f, H\}$ ҳам нолга тенг бўлади.

Пуассон қавсининг таърифидан унинг бир қанча хоссалари келиб чиқади:

1. Агар қавс ичидаги функциялар ўрин алмашса, қавснинг ишораси ўзгаради:

$$\{f,g\} = -\{g,f\}$$

2. Агар функциялардан бири доимий бўлса, масалан, г=С, қавс нолга тенг бўлади:

$$\{f,g\} = \{f,C\} = 0$$

3. Ҳар бир функция бўйича қавс чизиқли бўлади:

$$\{f_1 + f_2, g\} = \{f_1, g\} + \{f_2, g\}$$

$$\{f_1 f_2, g\} = f_1\{f_2, g\} + f_2\{f_1, g\}$$

4. Вақт бўйича хусусий дифференциаллаш учун Лейбниц қоидаси бажарилади:

$$\frac{\partial}{\partial t}\{f,g\} = \{\frac{\partial f}{\partial t}, g\} + \{f, \frac{\partial g}{\partial t}\}$$

5. Якоби айнияти бажарилади:

$$\{f,\{g,h\}\} + \{g,\{h,f\}\} + \{h\{f,g\}\} = 0$$

Агар функциялардан бири координаталар ёки импулслардан бирига мос келса, Пуассон қавси хусусий ҳосилага келтирилади:

$$\{f,q_k\} = \sum\left(\frac{\partial f}{\partial p}\right) = \frac{\partial f}{\partial p_k}$$

$$\{f,p_k\} = -\frac{\partial f}{\partial p_k}$$

$$(q_i,q_k) = 0, \quad (p_i,p_k) = \delta_{ik} \qquad (p_i,p_k) = 0$$

энди Гамилтон тенгламаларини Пуассон қавси ёрдамида ёзамиз:

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \text{ ни } \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial q_i}{\partial t} + (q_i,H) = (q_i,H)$$

Бунга кўра Гамилтон тегламалари қуйдаги кўринишни олади

$$\dot{q}_i = (q_i,H), \qquad \dot{p}_i = -(p_i,H) = (H,p_i)$$

21-ma’ruza: GAMILTON-YAKOBI METODI.

REJA

- Gamilton-Yakobi tenglamasi.
- O’zgaruvchilarni ajratish usuli.
- Ta’sir-burchak o’zgaruvchilari va adiabatik invariantlar.
- Yangi Gamilton funksiyasi.
- Gamilton-Yakobi tenglamasining to’la bo’lmagan integrali.

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR: trayektoriya, erkinlik, Lagranj tenglamasi, energiya, impuls, Gamilton – Yakobi tenglamasi, ta’sir, integrallash, variasiya

Bizga ma’lumki ta’sir funksiyasi quyidagi ko’rinishga ega

$$S = \int_{t}^{t_o} L dt \qquad (1)$$

erkinlik darajasi birga teng bo’lganda biror trayektoriyadan unga yaqin bo’lgan trayektoriyaga o’tilganda (1) ning o’zgarishi uning variasiyasi orqali berilar edi:

$$\delta S = \frac{\partial L}{\partial q}\delta q\,|_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2}\left(\frac{\partial L}{\partial q} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)\delta q dt \qquad (2)$$

Haqiqiy harakat trayektoriyasi Lagranj tenglamasini qanoatlantirgani uchun (2) ning o’ng tomonidagi ikkinchi had nolga teng. Agar quyi chegarada $\delta q(t_1) = 0$ desak, $\delta q(t_2) = \delta q$ deb belgilash kiritsak va $\frac{\partial L}{\partial q}$ ning $\dot{p}$ ekanligini hisobga olsak,

$$\delta S = \dot{p}\delta q$$

yoki umumiy holda

$$\delta S = \sum \dot{p}_i \delta q_i \qquad (3)$$

hosil bo’ladi. (3) dan

$$\frac{\partial S}{\partial q} = \dot{p}_i$$

ekanligini topamiz. (2) dan ta’sirning vaqt bo’yicha to’liq hosilasi

$$\frac{\partial S}{\partial q} = L \qquad (4)$$

bo’lar edi. Ikkinchi tomondan

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum \frac{\partial S}{\partial q_i}\dot{q}_i = \frac{\partial S}{\partial t} + \sum p_i \dot{q}_i \qquad (5)$$

(4) va (5) larni solishtirib,

$$\frac{\partial S}{\partial t} = L - \sum p_i q_i$$

ekanligini topamiz. Agar

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L$$

ekanligini hisobga olsak

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -H$$

bo'ladi. Yoki

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(p, q, t) = 0 \tag{6}$$

Agar $p = \frac{\partial S}{\partial q}$ ekanligini hisobga olsak, (6) quyidagicha yoziladi:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q_1, ... q_s, \frac{\partial S}{\partial q_1}, ..., \frac{\partial S}{\partial q_s}, t) = 0 \tag{7}$$

ushbu tenglama Gamilton-Yakobi tenglamasi deyiladi. Xususiy hosilaga ega bo'lgan differensial tenglamalar nazariyasidan ma'lumki, agar tenglama qancha o'zaro bog'liq bo'lmagan o'zgaruvchilarga ega bo'lsa, uning integrallashguniga qadar shuncha ixtiyoriy doimiyliklarga ega bo'ladi.

$$S = f(t, q_1, ..., q_s, \alpha_1, ..., \alpha_s) + A \tag{8}$$

bu yerda $\alpha_1, ..., \alpha_s$ A ixtiyoriy doimiyliklar.

Endi Gamilton – Yakobi tenglamasining to'liq integrali va bizni qiziqtirayotgan yechimi o'rtasidagi bog'lanishni aniqlaymiz. Buning uchun q, p koordinatalardan yangi o'zgaruvchilarga kanonik almashtirish yordamida o'tamiz. $f(t, q, \alpha)$ funksiyani hosilaviy funksiya deb, $\alpha_1, ..., \alpha_s$ kattaliklarni yangi o'zgaruvchilar – impulslar deb olamiz, yangi koordinatalarni $\beta_1, ... \beta_s$ orqali belgilaymiz. Kanonik almashtirishlarda ko'rganimizdek,

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial q_i}, \quad \beta_i = \frac{\partial f}{\partial \alpha_i}, \quad H' = H + \frac{\partial f}{\partial t}$$

bu yerda f funksiya Gamilton – Yakobi tenglamasini qanoatlantirgani uchun yangi funksiya N' aynan nolga teng bo'ladi:

$$H' = H + \frac{\partial A}{\partial t} = H + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

yangi o'zgaruvchilar Gamilton tenglamasini qanoatlantirgani uchun

$$\dot{\alpha}_i = -\frac{\partial H'}{\partial \beta_i} = 0, \quad \dot{\beta}_i = \frac{\partial H'}{\partial \alpha_i} = 0$$

bulardan $\alpha_1 = const$, $\beta_1 = const$

Ikkinchi tomondan, s – ta

$$\frac{\partial f_i}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

Tenglamalar S - ta q koordinatalarning vaqt va $2S$ – ta ixtiyoriy doimiyliklar (α_i, β_i) orqali ifodalash imkonini beradi. Bu bilan harakat tenglamasining umumiy integralini topamiz.

Shunday qilib, Gamilton – Yakobi usuli bilan mexanik sistema harakatini topish masalasi quyidagi amallarni bajarishni talab yetadi.

Gamilton funksiyasi yordamida Gamilton-Yakobi tenglamasi tuziladi va uning (8) ko'rinishdagi to'liq integrali topiladi. Yechimni ixtiyoriy doimiylik α bo'yicha differensiallanib va uni yangi β doimiylikka tenglashtirib, S – ta algebraik tenglamalar sistemasini olamiz:

$$\frac{\partial S}{\partial \alpha_i} = \beta_i$$

Bu tenglamalar sistemasini yechib, q ni vaqtning va $2S$ ta ixtiyoriy doimiyliklar funksiyasi tariqasida topiladi. Impulslarning vaqtga bog'liqligi esa $P_i = \dfrac{\partial S}{\partial q_i}$ tenglamalardan topiladi.

Agar Gamilton funksiyasi vaqtga oshkor bog'liq bo'lmasa, Gamilton-Yakobi tenglamasining integrali quyidagicha bo'ladi:

$$S = S_0(q) - Et$$

bu yerda $S_0(q)$ – qisqartirilgan ta'sir deyiladi. Bundan

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -E = -H(q_1,...,q_s, p_1,..., p_s), \quad P = \frac{\partial S}{\partial q} = \frac{\partial S_0}{\partial q}$$

yoki Gamilton – Yakobi tenglamasi

$$H(q_1,...q_s, \frac{\partial S_0}{\partial q_1},..., \frac{\partial S_0}{\partial q_s}) = E \qquad (9)$$

ko'rinishga yega bo'ladi.

Ayrim hollarda Gamilton-Yakobi tenglamasining to'liq integrali o'zgaruvchilarga ajratish usuli bilan ham topiladi. Bu usulning mohiyati quyidagicha:

Faraz qilaylik, qandaydir q_1 koordinata va unga tegishli bo'lgan $\dfrac{\partial S}{\partial q_1}$ hosila Gamilton – Yakobi tenglamasiga $\varphi\left(q_1, \dfrac{\partial S}{\partial q_1}\right)$ kombinasiyasida kirsin hamda boshqa biror koordinata va hosilalarga bog'liq bo'lmasin. U holda Gamilton – Yakobi tenglamasi

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S}{\partial q_i}\frac{\partial S}{\partial t}, \varphi\left(q_1, \frac{\partial S}{\partial q_1}\right)\right\} = 0 \qquad (10)$$

umumiy ko'rinishga yega bo'ladi. Bu yerda q_u q_1 dan tashqari koordinatalar to'plamini ifodalaydi.

Bu tenglamaning yechimini

$$S = S(q_0 t) + S_1'(q_1) \qquad (11)$$

yig'indi tariqasida axtaraylik. Bu yechimni (10) ga qo'yamiz:

$$\Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}\frac{\partial S'}{\partial t}, \varphi(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1})\right\} = 0 \qquad (12)$$

Faraz qilaylikki, (11) yechim topilgan bo’lsin. Uni (12) ga qo’yilganda, (12) ayniyatga aylanadi va q_1 ning istalgan qiymatida o’rinli bo’ladi. Lekin q_1 o’zgarganda faqat funksiya o’zgaradi. Shuning uchun (12)ning aynan bajarilishi uchun φ funksiya doimiy bo’lmog’i lozim. U holda (12) ikkita tenglamaga ajraladi

$$\varphi(q_1, \frac{\partial S_1}{\partial q_1}) = \alpha_1, \qquad \Phi\left\{q_i, t, \frac{\partial S'}{\partial q_i}, \frac{\partial S'}{\partial t}, \alpha_1\right\} = 0$$

(α_1 ixtiyoriy doimiylik). Bu tenglamaning birinchisi oddiy differensial tenglama, uning oddiy integrali $S_1(q_1)$ ni beradi. Ikkinchisi ham differensial tenglama, lekin o’zaro bog’liq bo’lmagan o’zgaruvchilari kamaygan bo’ladi. Shu yo’l bilan tenglamadan S barcha koordinata vaqtni ajratib, yechimi topiladi.

$$S = \sum S_k(q_k, \alpha_1, ..., \alpha_s) - E(\alpha_1, ..., \alpha_s)t$$

Bu yerda har bir S_k funksiya faqat bitta koordinataga bog’liq bo’ladi, energiya esa $\alpha_1, ..., \alpha_s$ ixtiyoriy doimiyliklar funksiya bo’ladi. Energiya $S_0 = \sum S_\alpha$ ni (9) qo’yib topiladi.

Nazorat savollari

1. Gamilton-Yakobi tenglamasi qanday tenglama? (ta’sir integrali, Lagranj va Gamilton funksiyasi).
2. Yangi Gamilton funksiyasi nimadan iborat? (yangi o’zgaruvchilar, to’liq integral, hosilaviy funksiya).
3. Gamilton – Yakobi tenglamasini to’la bo’lmagan integralini ko’rsating. (Gamilton – Yakobi tenglamasi, oddiy differensial tenglama, energiya)

22-ma'ruza: ABSOLYUT QATTIQ JISM HARAKATI.

REJA

1. **Absolyut qattiq jism kinematikasi. Burchak tezlik**
   - *Qattiq jism.*
   - *Qattiq jism aylanishida burchak tezlik.*
   - *Chiziqli va burchak tezlikning bog'liqligi.*
2. **Absolyut qattiq jism dinamikasi. Inersiya momenti tenzori**
   - *Aylanuvchi jism kinetik energiyasi.*
   - *Aylanuvchi jism uchun Lagranj funksiyasi.*
3. **Qattiq jismning impuls momenti**
   - *Impuls momenti tenzori.*
   - *Aylanishdagi burchak tezlik.*

Tayanch iboralar: *qattiq jism, "qo'zgalmas" koordinatalar sistemasi, harakatlar koordinatalar sistemasi, qattiq jism erkinlik darajasi soni, inersiya markazi, inersiya markazining ilgarilanma xarakat tezligi, burchak tezlik, qattiq jism kinetik energiyasi, aylanish kinetik energiyasi, qattiq jism Lagranj funksiyasi, inersiya momentlarining tenzori,inersiya markazi, qattiq jism impuls momenti, inersiya tenzori, erkin aylanma harakat, shar pildiroq, pildiroqning muntazam presessiyasi.*

Qattiq jism

Mexanikada oralaridagi masofa o'zgarmas bo'lgan moddiy no'qtalar sistemasini qattiq jism deb ta'riflash mumkin. Tabiatda real mavjud bo'lgan sistemalar bu shartga taqriban bo'ysunadi. Lekin odatdagi sharoitlarda qattiq jismlarning ko'pchiligi o'z shakli va o'lchamlarini shunchalik kam o'zgartiradilarki, u xolda biz biror yaxlit narsa deb ko'rilayotgan qattiq jism xarakatining qonunlarini o'rganayotganimizda bunday o'zgarishlarini nazarga olmasak ham bo'ladi.

Keyingi bayonimizde biz qattiq jismni moddiy no'qtalarning diskret majmuasi (to'plami) sifatida kuramiz. Diskret no'qtalar bo'yicha yig'indisini o'z ichiga olgan formulalardan yaxlit jismga tegishli formulalarga o'tish uchun zarralar massasi o'rniga dV hajm elementidagi ρdV (ρ - massa zichligi olinadi va jismning butun hajmi bo'yicha integrallanadi.

Qattiq jism harakatini bayon etish uchun ikkita koordinatalar sistemasi kiritamiz: a) "qo'zg'almas", ya'ni xyz inersial sistema va b) harakatlanuvchi $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ koordinatalar sistemasi. Keyingi sistema qattiq jismga mustahkam bog'langan va uning barcha harakatida qatnashadi deb faraz qilaylik. Bu sistema boshini jismning inersial markaziga joylashtirish qulaydir.

Aytaylik, $\vec{R}_0$ radius-vektor harakatlanayotgan sistema boshi O ning holatini ko'rsatsin. Bu sistema o'qlarining qo'zg'almas sistemaga nisbatan oriyentasiyasi esa uchta mustaqil burchaklar orqali beriladi. Shunday kilib, biz $\vec{R}_0$ vektorning uchta komponentasi bilan birga hammasi bo'lib oltita koordinataga ega bo'lamiz.

Demak, har bir qattiq jism oltita erkinlik darajasiga ega bo'lgan mexanikaviy sistemadir.

Qattiq jismning cheksiz kichik ixtiyoriy siljishini ko'rib o'taylik. Siljishni ikki qism yig'indisi: holida tasvirlash mumkin. Ulardan biri jismning cheksiz kichik parallel ko'chishi bo'lib, natijada inersiya boshlang'ich holatdan oxirgi holatga qo'zraluvchi koordinatalar sistemasi o'qlarining oriyentasiyasi o'zgarmagani holda o'tadi. Ikkinchisi inersiya markazi atrofida kichik burilishdan so'ng qattiq jism oxirgi holatga keladi.

Qattiq jism ixtiyoriy nuqtasining qo'zg'aluvchi koordinata sistemasidagi radius-vektorini $\vec{r}$ bilan, qo'zg'almas sistemasidagi radius-vektorini esa $\vec{R}$ bilan belgilaymiz. U holda P nuqtaning cheksiz kichik $d\vec{R}$ siljishi inersiya markazi bilan birgalikdagi $d\vec{R}_0$ ko'chishi bilan inersiya markaziga nisbatan cheksiz kichik $d\varphi$ burchakka burilishdagi $[d\varphi \cdot \vec{r}]$ ko'chishlar yig'indisiga teng bo'ladi:

$$d\vec{R} = d\vec{R}_0 + [d\varphi \cdot \vec{r}]$$

Bu tenglamani mazkur ko'chish yuz bergan dt vaqtga bo'lib va

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \vec{\vartheta}, \quad \frac{d\vec{R}_0}{dt} = \vec{V}, \quad \frac{d\varphi}{dt} = \vec{\Omega} \qquad (1)$$

tezliklar kiritib, ular orasidagi

$$\vec{\vartheta} = \vec{V} + [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}] \qquad (2)$$

munosabatni topamiz. V vektor qattiq jism inersiya markazining tezligidir, uni inersiya markazining ilgarilanma harakat tezligi deb ataydilar. $\vec{\Omega}$ vektor qattiq jism aylanishining burchak tezligi deyiladi; uning yo'nalishi ($d\varphi$ yo'nalishi kabi) aylanish o'qi yo'nalishiga mos tushadi. Shunday qilib, jism istalgan nuqtasining qo'zg'almas koordinata sistemasiga nisbatan $\vec{V}$ tezligini jismning ilgarilanma harakat tezligi va aylanishdagi burchak tezlik orqali ifodalash mumkin.

Chiziqli va burchak tezlikning bog'liqligi.

Endi qattiq jism bilan mustahkam bog'langan koordinata sistemasining koordinata boshi inersiya markazi O da emas, balki O dan a masofadagi qandaydir O' nuqtada deylik. Bu sistema boshi O' ning ko'chish tezligini $\vec{V}'$ bilan uning aylanish burchak tezligini esa $\vec{\Omega}'$ orqali belgilaymiz.

Yana qattiq jismning biror P nuqtasini olaylik va uning O' ga nisbatan radius-vektorni $\vec{r}'$ bilan belgplaylik. U xolda $\vec{r}' = \vec{r} + a$ va (2) ga qo'yib,

$$\vec{V} = \vec{V} + [\vec{\Omega} \cdot \vec{a}] + [\vec{\Omega} \cdot \vec{r}']$$

munosabatni olamiz. Ikkinchi tomondan, $\vec{V}'$ va $\vec{\Omega}'$ ning ta'rifiga ko'ra

$$\vec{\vartheta} = \vec{V} + [\vec{\Omega}' \cdot \vec{r}']$$

bo'lishi lozim.

Demak,

$$\vec{V}' = \vec{V} + [\vec{\Omega} \cdot \vec{a}], \quad \vec{\Omega}' = \vec{\Omega} \qquad (3)$$

ya'ni, jismga bog'langan koordinata sistemasining har bir berilgan vaqt momentidagi burchak tezligi mazkur sistemaning tanlanishiga borliq emas ekan.

Barcha shunday sistemalar berilgan vaqt momentiga bir-biriga parallel o'qlar atrofida absolyut qiymati bo'yicha bir xil $\vec{\Omega}$ tezlikda aylanadilar.

Aylanuvchi jism kinetik energiyasi.

Aylanuvchi jism uchun Lagranj funksiyasi.

Qattiq jism kinetik energiyasini hisoblash uchun jismni moddiy nuqtalardan iborat diskret sistema deb ko'ramiz va quyidagini yozamiz:

$$T = \sum \frac{m \cdot \vartheta^2}{2}$$

bu yerda yig'indi jismning barcha nuqtalari bo'yicha olinadi (indekslarini tushirib qoldirdik).

Bu tenglamaga (2) ni qiymatini qo'yib,

$$T = \sum \frac{m}{2}\left(\vec{V} + \left[\vec{\Omega} \cdot \vec{r}\right]\right)^2 = \sum \frac{m}{2}\vec{V}^2 + \sum m\vec{V}\left[\vec{\Omega} \cdot \vec{r}\right] + \sum \frac{m}{2}\left[\vec{\Omega} \cdot \vec{r}\right]^2 \tag{4}$$

$\vec{V}$ va $\vec{\Omega}$ tezliklar qattiq jismning barcha nuqtalari uchun bir hil bo'lganidan birinchi haddagi $\frac{\vec{V}^2}{2}$ yig'indi $\sum$ belgisidagi tashqariga chiqariladi, jism massasi $\sum m = \mu$ orqali belgilaymiz.

Ikkinchi hadini quyidagicha yozamiz:

$$\sum m\vec{V}\left[\vec{\Omega} \cdot \vec{r}\right] = \sum m\left[\vec{V} \cdot \vec{\Omega}\right]\vec{r} = \left[\vec{V} \cdot \vec{\Omega}\right]\sum m\vec{r}$$

Agar harakatdagi koordinata sistemasining boshi shartga ko'ra, inersiya markazida olingan bo'lsa, bu had nolga aylanadi, chunki bu xolda $\sum m\vec{r} = 0$.

Uchinchi hadda ko'paytma kvadratini ochib chiqamiz va natijada quyidagini topamiz:

$$T = \frac{\mu\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}\sum m\left\{\Omega^2 r^2 - \left(\vec{\Omega} \cdot \vec{r}\right)^2\right\}$$

Shunday qilib, qattiq jism kinetik energiyasining birinchi hadi ilgarilanma hadining kinetik energiyasidir, uning ko'rinishi shundayki, go'yo jismning to'la massasi inersiya markaziga to'plangan deb faraz qilish mumkin. Ikkinchi hadi aylanma harakat kinetik energiyasini ifodalaydi. Bu aylanish inersiya markazidan o'tuvchi o'q atrofida bo'lib, u $\vec{\Omega}$ burchak tezlikka ega.

Aylanish kinetik energiyasini tenzor belgilarda, ya'ni $\vec{r}, \vec{\Omega}$ vektorlarning x_i, Ω_i komponentlari orqali qayta yozamiz:

$$T_{aylanish} = \frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i^2 x_\ell^2 - \Omega_i x_i \Omega_k x_k\right] = \frac{1}{2}\sum m\left[\Omega_i \Omega_k \delta_{ik} x_i^2 - \Omega_i \Omega_k x_i x_k\right] = \frac{1}{2}\Omega_i \Omega_k \sum m\left(x_\ell^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right)$$

Bu yerda $\Omega_i = \delta_{ik}\Omega_k$ ayniyat qullaniladi (δ_{ik}-birlik tenzor, uning komponentlari $i = k$ da birga, $i \neq k$ da nolga teng).

$$I_{ik} = \sum m\left(x_\ell^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right) \tag{5}$$

tenzor kiritib, qattik jism kinetik energiyasi uchun so'nggi

$$T = \frac{\mu\vec{V}^2}{2} + \frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k \tag{6}$$

ifodani olamiz. (6) va potensial energiya ayirmasi qattik jismning Lagranj funksiyasini beradi:

$$L=\frac{\mu\vec{V}^2}{2}+\frac{1}{2}I_{ik}\Omega_i\Omega_k-U \qquad (7)$$

Umumiy holda, potensial energiya qattiq jism vaziyatini belgilovchi oltita o'zgaruvchining funksiyasidir: bular inersiya markazining uchta X,Y,Z koordinatasi va harakatlanuvchi koordinata o'qlarining qo'zgalmas koordinatalarga nisbatan oriyentasiyasini ko'rsatuvchi uchta burchak.

I_{ik} tenzor inersiya momentlarining tenzori yoki, jism inersiyasining tenzori deyiladi. Yuqoridagi ifodaga binoan, u simmetrikdir, ya'ni

$$I_{ik}=I_{ki}$$

Uning komponentlarini oshkor ko'rinishda quyidagi jadvalda keltiramiz:

$$I_{ik}=\begin{pmatrix} \sum m\left(y^2+z^2\right) & -\sum mxy & -\sum mxz \\ -\sum mxy & \sum m\left(x^2+z^2\right) & -\sum myz \\ -\sum mxz & -\sum myz & \sum m\left(x^2+y^2\right) \end{pmatrix} \qquad (9)$$

Impuls momenti

(9) formulaga muvofiq agar koordinatalar boshi inersiya markaziga joylashtirilsa, M moment jism nuqtalarining inersiya markaziga nisbatan harakatiga bog'liq bo'lgan "xususiy moment" ni ko'rsatadi.

Boshqacha kilib aytganda, $\vec{M}=\sum m\left(\vec{r}\cdot\vec{V}\right)$ ta'rifda $\vec{V}$ ni $\left[\vec{\Omega}\cdot\vec{r}\right]$ga almashtirish lozim:

$$\vec{M}=\sum m\left[\vec{r}\left[\vec{\Omega}\cdot\vec{r}\right]\right]=\sum m\left\{\vec{r}^{\,2}\vec{\Omega}-\vec{r}\left(\vec{r}\cdot\vec{\Omega}\right)\right\}$$

yoki tenzor belgilari yordamida

$$M_i=\sum m\left\{x_i^2\Omega_i-x_ix_k\Omega_k\right\}=\Omega_k\sum m\left\{x_i^2\delta_{ik}-x_ix_k\right\}$$

Nihoyat, inersiya tenzorining

$$I_{ik}=\sum m\left(x_i^2\delta_{ik}-x_ix_k\right)$$

ta'rifini nazarda tutib,

$$M_i=I_{ik}\Omega_k \qquad (10)$$

ifodani olamiz. x_1,x_2,x_3 o'qlar jismning bosh inersiya o'qlari bo'ylab yo'nalgan holda bu formula quyidagilarni beradi:

$$M_1=I_1\Omega_1,\qquad M_2=I_2\Omega_2,\qquad M_3=I_3\Omega_3 \qquad (11)$$

Xususan shar pirildok uchun (uchala bosh inersiya momenti o'zaro mos tushgan):

$$\vec{M}=I\vec{\Omega} \qquad (12)$$

ya'ni, moment vektori burchak tezligi vektoriga proporsional va u bilan bir hil yo'nalishda bo'ladi.

Umumiy xolda esa M vektor o'z yo'nalishi bo'yicha $\vec{\Omega}$ vektorga mos kelmaydi va faqat u o'zining bosh inersiya o'qlaridan birortasi atrofida aylangandagina $\vec{M}$ va $\vec{\Omega}$ lar bir xil yo'naladi.

Hyech qanday tashqi kuchlar ta'sirida bo'lmagan qattiq jismning erkin harakati ko'ramiz. Jism faqat erkin aylanma harakat qiladi deb faraz qilamiz.

Har qanday yopiq sistema uchun bo'lgani kabi erkin aylanayotgan jismning impuls momenti ham o'zgarmas bo'ladi. $\vec{M}=const$ shart shar pildiroq uchun oddiy

$\vec{\Omega} = const$ ifodani beradi, ya’ni shar pildiroq erkin aylanishining umumiy qo’zg’almas o’q atrofida tekis aylanishidir.

Pildirokning x_3 simmetriya o’qiga perpendikulyar bo’lgan x_1, x_2 bosh inersiya o’qlari yo’nalishining ixtiyoriligidan foydalanib, x_2 o’qni o’zgarmas $\vec{M}$ vektor va x_3 o’qning oniy vaziyati bilan aniqlanadigan tekislikka perpendikulyar qilib tanlaymiz. U holda $M_2 = 0$.

$$I_{ik} = \sum m\left(x_\ell^2 \delta_{ik} - x_i x_k\right)$$

formulaga muvofik, $\Omega_2 = 0$ bo’ladi, ya’ni $\vec{M}, \vec{\Omega}$ va pildiroq o’qi har bir vaqt momentida bir tekislikda yotadi.

Aylanishdagi burchak tezlik. Pildirok o’qida barcha nuqtalar $\vec{V} = \left[\vec{\Omega} \cdot \vec{r}\right]$ tezliklarining har bir vaqt momentida ko’rsatilgan tekislikka perpendikulyar ekanligi kelib chiqadi; ya’ni pildiroq o’qi $\vec{M}$ yo’nalishi atrofida tekis aylanadi va doiraviy konus chizadi (bu-pildirokning muntazam presessiyasi deb ataladi). Presessiya bilan bir vaqtda pildiroqning o’zi ham xususiy o’qi atrofida tekis aylanadi.

Bu ikki aylanish burchak tezliklarini $\vec{M}$ moment kattaligi va pildiroq o’qining $\vec{M}$ yo’nalishiga og’ish burchagi θ orqali osongina ifodalashi mumkin. Pildiroqning bir o’qi atrofida aylanish burchak tezligi $\vec{\Omega}$ vektorining shu o’qdagi proyeksiyasi Ω_3, dan iborat.

$$\Omega_3 = \frac{M_3}{I_3} = \frac{M}{I_3}\cos\theta$$

Proyeksiya tezligi Ω_{pr} ni aniqlash uchun esa $\vec{\Omega}$ vektorni parallelogramm qoidasiga ko’ra x_3 va $\vec{M}$ bo’ylab tashkil etuvchilarga ajratishi kerak. Tashkil etuvchilarning birinchisi pildiroq o’qini ko’chirmaydi, shunga ko’ra ikkinchi tashkil etuvchi presessiyaning biz izlayotgan burchak tezligini beradi.

Rasmdagi shakldan $\Omega_{pr} \cdot \sin\theta = \Omega_1$ bu yerda $\Omega_1 = \frac{M_1}{I_1} = \frac{M \sin\theta}{I_1}$, ekanligidan

$$\Omega_{pr} = \frac{M}{I_1}.$$

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1) Qattik jismni izoxlab bering. (moddiy nuqtalar sistemasi, shakl va o’lcham, yaxlit diskret, massa, hajm, zichlik)
2) Qattiq jism aylanishida burchak tezlik deb nimaga aytiladi? (cheksiz kichik siljish, burchak, radius-vektor, inersiya markazi)
3) Chiziqli va burchak tezlikning bog’liqligi ko’rsating. (radius-vektor, sistema, vaqt, parallel o’qlar)
4) Aylanuvchi jism kinetik energiyasini yozing. (kinetik va potensial energiya, Lagranj funksiyasi, radius-vektor, burchak tezlik)

5) Aylanuvchi jism uchun Lagranj funksiyasi nimaga teng.(inersiya markazi, inersiya momenti tenzori)
6) Impuls momenti tenzori nimaga teng. (impuls momenti, xususiy moment, bosh inersiya o'qlari, simmetriya o'qi)
7) Aylanishdagi burchak tezlik nimaga tengligini ko'rsating. (pildiroq o'qlari, proyeksiya tezligi, prosessiya)

23-ma’ruza: **QATTIQ JISM HARAKAT TENGLAMALARI.**

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR: impuls, moment, kuch, radius-vektor, nuqta, burchak, qattiq jism, moddiy nuqta, mexanik sistema, vaqt, sanoq sistema, inersial

1. Qo’zg’almas O nuqtaga nisbatan F kuchning momenti deb, O nuqtadan F kuch qo’yilgan N nuqtaga o’tkazilgan r radius-vektor bilan shu kuchning vektor ko’paytmasiga aytiladi:*

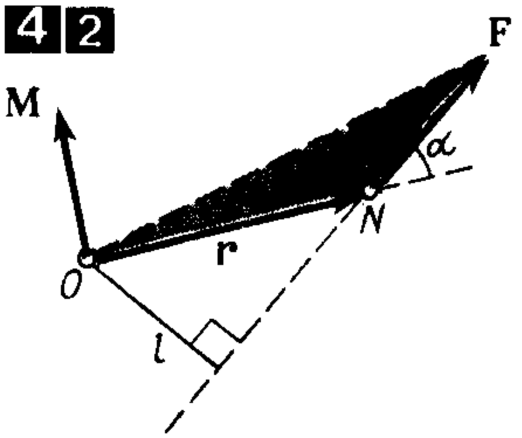
$$M = [rF] \tag{14}$$

---

1) Shu yerda va bundan buyon O nuqta inersial sanoq sistemaning xisob boshi sifatida qabul qilinadi.

M vektori r va F vektorlar tekisligiga o’ng parma qoidasi bo’yicha tik yo’nalgan (2-rasm). Kuch momentining moduli

$$M = Fr\sin\alpha = Fl \tag{15}$$



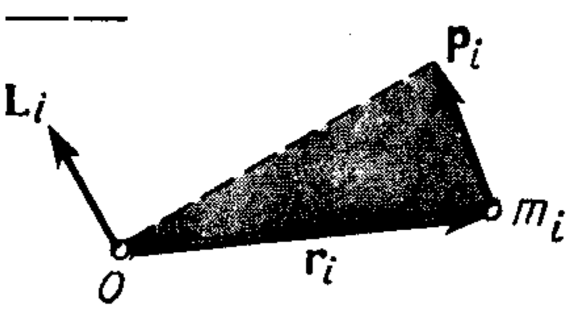
4.2 – rasm.

formula bilan aniqlanadi. Bu yerda α - r bilan F orasidagi burchak, $l = r\sin\alpha$ O nuqtadan F kuchning ta’sir chizig’iga tushirilgan tik chiziqning uzunligi. Bunda ℓ kattalik F kuchning yelkasi deyiladi.

2. Biz N moddiy nuqtadan tashkil topgan mexanik sistemani ko’ramiz (xususan bu qattiq jism ham bo’lishi mumkin, lekin biz hozircha bunday cheklashni qo’ymaymiz).

Moddiy nuqtaning qo’zg’almas O nuqtaga nisbatan impuls momenti L_i - deb, moddiy nuqtaning O nuqtadan o’tgan r_i - radius vektori bilan shu moddiy nuqtaning $R_i = m_i V_i$ - impulsining vektor ko’paytmasiga aytiladi (4.3-rasm):

$$L_i = [r_i m_i V_i] = [r_i R_i] \tag{16}$$



4.3 – rasm.

Mos xolda, qo’zg’almas O nuqtaga nisbatan mexanik sistemaning impuls momenti deb, sistemaning barcha moddiy nuqtalarining shu nuqtaga nisbatan impulc momentlarining geometrik yigindisiga teng bo’lgan vektorga aytiladi:

$$L = \sum_{i=1}^{n} L_i = \sum_{i=1}^{n} \left(r_i p_i \right) \qquad (17)$$

(17) ifodani t vaqt bo’yicha differensiyalaymiz:

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} \left[r_i P_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} \left[r_i P_i \right] = \sum_{i=1}^{n} \left[r_i \frac{dp_i}{dt} \right],$$

chunki, $\left[\frac{\mathrm{dr_i}}{\mathrm{dt}} \mathrm{P_i} \right] = \left[\mathrm{V_i P_i} \right] = 0$.

(2.13) va (2.14) ifodalardan

$$\frac{dL}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \left[r_i F_i^{\text{таш}} \right] + \sum_{i=1}^{n} \left[r_i \sum_{k=1}^{n} F_{ik} \right] \qquad (18)$$

bo’lishi kelib chiqadi.

3. Mexanik sistemaga ta’cir etuvchi xamma tashqi kuchlarning O nuktaga nisbatan momentlarning geometrik yigindisiga teng bulgan vektor O nuqtaga nisbatan tashqi kuchlarning bosh momenti deyiladi.

$$M^{\text{таш}} = \sum_{i=1}^{n} \left[r_i F_i^{\text{таш}} \right] \qquad (19)$$

(18) tenglamaning o’ng tomonidagi O nuqtaga nisbatan barcha ichki kuchlarning yig’indisini ko’rsatuvchi ikkinchi summa nolga teng ekanini kursatamiz. Bu summada F_{ir} va F_{ri} kuchlarning juft momentlari ishtirok etadi:

$$M_{ik} = \left[r_i F_{ik} \right] \text{ va } M_{ki} = \left[r_k F_{ki} \right].$$

Nyutonning uchinchi qonunidan

$$M_{ik} + M_{ki} = \left[r_i F_{ik} \right] - \left[r_k F_{ki} \right] = \left[r_i F_{ik} \right] - \left[r_k F_{ik} \right] = \left[\left(r_i - r_k \right) F_{ik} \right]$$

bo’lishi kelib chiqadi.

4.3- rasmdan ko’rinadiki, $(r_i - F_r)$ va F_{ir} vektorlar kollinear. Shuning uchun ularning vektor ko’paytmalari nolga teng. Demak,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} M_{ik} = \sum\left[r_i \sum_{i=1}^{n} F_{ik}\right] = 0, \qquad (19')$$

$$\frac{dL}{dt} = M^{\text{таш}} \qquad (20)$$

bo’ladi.

(20)- tenglama impuls momentining o’zgarish qonunini ifodalaydi:

Qo’zg’almas nuqtaga nisbatan mexanik sistemaning impuls momentidan vaqt buyicha olingan xosila, sistemaga ta’sir kiluvchi barcha tashqi kuchlarning o’sha nuqtaga nisbatan bosh momentiga teng.

Noinersial sanoq sistemasidagi harakat

Shu vaqtga qadar ko’rilgan barcha mexanikaviy sistemalar harakatini inersial sanoq sistemasiga mansub deb hisobladik. Masalan, bir zarraning tashqi maydondagi Lagranj funksiyasi faqat inersial sanoq sistemasidagina

$$L_0 = \frac{mv^2}{2} - U \qquad (1)$$

ko’rnishga ega va mos holda

$$m\frac{dv_0}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r}$$

harakat tenglamasini beradi. (nol indeksli hadlar inersial sanoq sistemasiga tegishli). Endi zarraning noinersial sanoq sistemasidagi harakat tenglamalari qanday bo’lishligini ko’rib chiqaylik. Bu masalani yechishda ishni yana sanoq sistemasining qandayligiga bog’liq bo’lmagan eng kichik ta’sir prinsipidan boshlaymiz; u bilan birga Lagranj tenglamalari ham o’z kuchini saqlab qoladi:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial v} = \frac{\partial L}{\partial r} \qquad (2)$$

Ammo Lagranj funksiyasi endi (1) ko'rinishga ega emas va uni topish uchun L_0 funksiyasini mos holda almashtirish lozim.

Almashtirishni ikki bosqichda amalga oshiramiz, Dastlab, K_0 inrersial sistemaga nisbatan $V(t)$ tezlikda ilgarilanma harakatlanayotgan K' sanoq sistemasini olamiz. Zarraning K_0 va K' sistemalarga nisbatan $\vec{v}_o$ va v' tezliklari o'zaro

$$v_o = v' + V(t) \qquad (3)$$

munosabatda bog'langan. Bu ifodani (1) ga qo'yib K' sistema uchun quyidagi ko'rinishdagi Lagranj funksiyasini olamiz:

$$L' = \frac{mv'^2}{2} + mv'V + \frac{m}{2}V_2 - U$$

Biroq $V^2(t)$ vaqtning ma'lum funksiyasi; u birorta boshqa funksiyaning t bo'yicha to'la hosilasi sifatida olinishi mumkin, shunga ko'ra mazkur ifodaning uchinchi hadi tushirib qoldirilishi mumkin. $\vec{v}' = \frac{dr'}{dt}$ ekanligidan (r' zarraning K' koordinata sistemasidagi radius-vektori):

$$mV(tv)' = mV\frac{dr'}{dt} = \frac{d}{dt}(mVr') - mr'\frac{dV}{dt}$$

Buni Lagranj funksiyasiga qo'yib va yana vaqt bo'yicha to'la hosilani tushirib qoldirgandan so'ng

$$L' = \frac{mv'^2}{2} - m\vec{W}(t)r' - U \qquad (4)$$

ifodani olamiz, bu yerda $\vec{W} = d\vec{V}/dt$ kattalik K' sanoq sistemasi ilgarilanma harakatining tezlanishi.

(4) yoradamida Lagranj tenglamasini tuzamiz:

$$m\frac{dv'}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r'} - m\vec{W}(t) \qquad (5)$$

Shunday qilib, o'zining zarra harakat tenglamasiga ta'siri ma'nosida sanoq sistemasining tezlanuvchan ilgarilanma harakati bir jinsli kuch maydonining paydo bo’lishiga ekvivalentdir: bu maydonda ta’sir etuvchi kuch zarra m massasining W tezlanishiga ko’paytmasiga teng va shu tezlanishga teskari yo’nalgan.

Yana bir sanoq sistemasi K ni kiritamiz. U K' sistema bilan umumiy koordinata boshiga ega, lekin unga nisbatan $\Omega(t)$ burchakda tezlikda aylanadi; K_0' sistema K_0 inersial sistemaga nisbatan ham ilgarilanma, ham aylanma harakat qiladi.

Zarraning K' sistemaga nisbatan $\vec{v}'$ tezligi uning K sistemaga nisbatan $\vec{v}$ tezligi va K sistema bilan birgalikdagi aylanish tezligi $[\Omega r]$ ning yig’indisidan iborat:

$$\vec{v}' = \vec{v} + [\Omega\vec{r}]$$

(zarraning K va K' sistemalardagi r va r' radius-vektorlari ustma-ust tushadi)

Bu ifodani (4) Lagranj funksiyasiga qo’ysak,

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\Omega r]^2 - m\vec{W}\vec{r} - U \qquad (6)$$

hosil bo’ladi.

Bu ifoda zarraning ixtiyoriy noinersial sanoq sistemasidagi Lagranj funksiyasi uchun umumiy ifodadir. Sanoq sistemasining aylanishi Lagranj funksiyasida o’ziga xos bo’lgan zarra tezligi bo’yicha chiziqli had hosil qiladi.

Lagranj tenglamalariga kiruvchi hosilalarni hisoblash uchun quyidagi to’la differensialni yozamiz.

$$L = m\vec{v}d\,v + m\,d\,v[\Omega\,\vec{r}] + m\vec{v}[\Omega\ dr] + m[\Omega\vec{r}][\Omega d\vec{r}] - mWd\ \vec{r} - \frac{\partial U}{\partial\vec{r}}d\vec{r} =$$

$$= m\vec{v}d\vec{v} + m\,d\vec{v}[\Omega\,\vec{r}] + m\,d\vec{r}[\vec{v}\ \Omega] +$$

$$+ m[[\Omega\,\vec{r}]\Omega]\,d\ \vec{r} - mW\ d\ \vec{r} - \frac{\partial U}{\partial\,r}d\ \vec{r}$$

dv va $d\vec{r}$ li hadlarni yig’ib, quyidagilarni topamiz;

$$\frac{\partial L}{\partial v} = m\vec{v} + m[\Omega\vec{r}]$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m[\vec{v}\Omega] + m[[\Omega\vec{r}]\Omega] - m\vec{W} - \frac{\partial U}{\partial\vec{r}}$$

Bu ifodalarni (2) ga qo'yib, izlanayotgan harakat tenglamasini tuzamiz:

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} - m\vec{W} + m[\vec{r}\dot{\Omega}] + 2m[\vec{v}\Omega] + m[\Omega[\vec{r}\Omega]] \qquad (7)$$

Demak, sanoq sistemasining aylanishiga bog'liq bo'lgan "inersiya kuchlari" uch qismdan tashkil topadi, $m[\vec{r}\Omega]$ kuch aylanishning notekisligiga aloqador, qolgan ikkitasi esa tekis aylanishda ham qatnashadi, $2m[\vec{v}\Omega]$ kuchi Koriolis kuchi deyiladi; u zarraning tezligiga bog'liqligi bilan ilgari ko'rib o'tilgan barcha nodissipativ kuchlardan farq qiladi. $m[\Omega[\vec{r}\,\Omega]]$ kuch markazdan qochma kuch deyiladi. U aylanish o'qiga (ya'ni Ω yo'nalishiga) perpendikulyar holda r va Ω orqali o'tgan tekislikda yotadi va o'qdan tashqariga qarab yo'nalgan; markazdan qochma kuch kattalik jihatdan $m\rho\Omega^2$ ga teng (ρ aylanish o'qidan zarragacha bo'lgan masofa).

Ilgarilanma tezlanishsiz tekis aylanayotgan koordinatalar sistemasini alohida ko'rib o'taylik, $\Omega = const$, $W = 0$ qiymatlarni (6) va (7) larga qo'yib,

$$L = \frac{mv^2}{2} + m\vec{v}[\Omega\vec{r}] + \frac{m}{2}[\Omega\vec{r}]^2 - U \qquad (8)$$

Lagranj funksiyasini va

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial r} + 2m[\vec{v}\Omega] + m[\Omega[\vec{r}\Omega]] \qquad (9)$$

harakat tenglamasini olamiz.

Shuningdek, zarraning shu holdagi energiyasini hisoblaymiz. $E = \vec{p}\vec{v} - L$ ga

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial v} = m\vec{v} + m[\Omega\vec{r}] \qquad (10)$$

ni qo'yib, energiyani topamiz:

$$E = \frac{mv^2}{2} - \frac{m}{2}[\Omega r]^2 + U \qquad (11)$$

Energiya ifodasida tezlik bo'yicha chiziqli bo'lgan had yo'q. Sanoq sistemasi aylanishining ta'siri energiya ifodasiga faqat zarra koordinatalariga bog'liq va burchak tezlik kvadratiga proporsional bo'lgan had kiritadi. Bu qo'shimcha potensial energiya $\left(-\frac{m}{2}[\Omega r]^2\right)$ markazdan qochma energiya deyiladi.

Zarraning tekis aylanuvchi sistemasiga nisbatan v tezligi uning K_0 inersial sistemaga nisbatan tezligi v_0 bilan

$$v_o = v + [\Omega\vec{r}] \qquad (12)$$

orqali bog'langan. Shuning uchun zaraning K sistemadagi (10) impulsi r uning uning K_0 sistemadagi $p_o = mv_o$ impulsiga mos tushadi. Shuningdek, impulslar bilan birga $\vec{M}_o = [\vec{r}\vec{p}_o]$ va $\vec{M} = [\vec{r}\vec{p}]$ impuls momentlari ham bir-biriga mos keladi. Zarraning K va K_0 sistemalardagi energiyalari esa bir-biridan farq qiladi. (12) dagi v ni (11) ga qo'yib,

$$E = \frac{mv_o^2}{2} - mv_o[\Omega\vec{r}] + U = \frac{mv_o^2}{2} + U - m[rv_o]\Omega$$

ifodani olamiz. Bundagi birinchi ikki had K_0 sistemadagi Ye_0 energiyani ko'rsatadi. Oxirgi hadga impuls momenti kiritib,

$$E = E_o - M\Omega \qquad (13)$$

munosabatni olamiz.

Tekis aylanayotgan koordinatalar sistemasiga o'tishda energetik almashtirish qonuni (13) formula orqali ifodalanadi. Mazkur qonunni biz bir zarra uchun keltirib chiqargan bo'lsakda, bu ta'rif bevosita istalgan zarralar sistemasi uchun umumiy almashtirilishi mumkin va natijada baribir shu (13) formulaga kelamiz.

24-ma'ruza: EYLER TENGLAMALARI. EYLER BURCHAKLARI.

REJA

- Eyler tenglamalari.
- Eyler burchaklari.
- Qattiq jismning harakat tenglamasi
- Simmetrik pirildoq harakati.
- Inersiya kuchlari.

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: Eyler tenglamalari, Eyler burchaklari, qattiq jismning harakat tenglamasi, simmetrik pirildoq harakati, inersiya kuchlari.

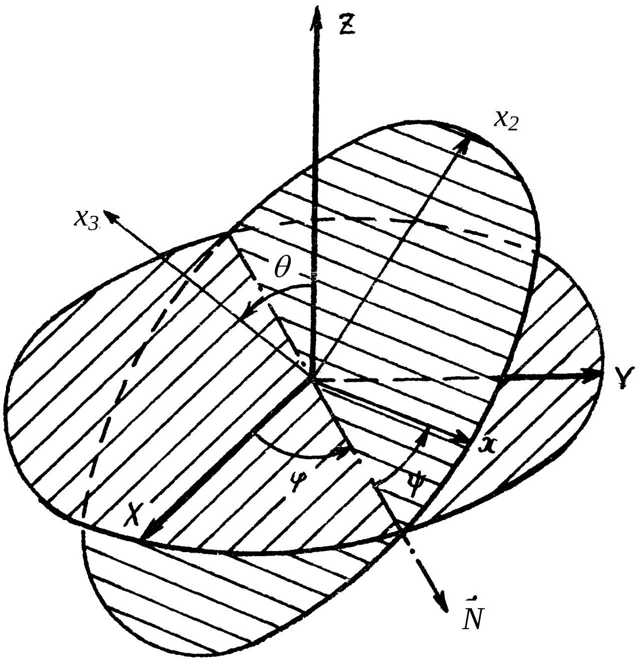
Qattiq dism harakatini ifodalash uchun uning inersiya markaziga uchta koordinatalar va X, Y, Z qo'zg'almas sistemaga nisbatan qo'zg'aluvchi sistemaning x_1, x_2, x_3 o'qlarining burilishi Bilan bog'liq bo'lgan qandaydir uchta burchaklar bilan foydalanish mumkin. Bu burchaklar sifatida Eyler burchaklari ishlatish ancha qulaydir.

Bizni hozir koordinatalar o'qlari orasidagi burchaklar qiziqtirgani uchun ikala sistemaning koordinata boshini bita nuqtada deb olamiz. x_1, x_2 quzg'aluvchi tekislik X, Y quzg'almas tekislikni tugunlari.

Bu chiziq Z o'qiga nisbatan perpendikulyar bo'lganligi uchun x_3 o'qiga ham perpendikulyardir, uning musbat yo'nalishini shunday tanlab olamizki, bu yo'nalish $\left[\vec{Z}\vec{x}_3\right]$ vektorli ko'paytimaning yo'nalishiga mos kelsin (bu yerda $\vec{Z}, \vec{x}_3$ - z va x_3 o'qlari yo'nalishlardagi ortlari).

X, Y, Z o'qlarga nsibatan x_1, x_2, x_3 o'qlarning vaziyatini aniqlovchi qiymatlar sifatida quyidagi burchaklarni olamiz. Z va x_3 o'qlari orasidagi θ burchak, X va N o'qlari orasidagi φ burchak, φ va ψ burchaklari gavdalanish yo'nalishiga mos ravishda Z va x_3 o'qlar atrofida parma qoidasi bo'yicha aniqlanadi. θ burchak 0 dan π gacha, φ va ψ burchaklar 0 dan 2π gacha qiymatlar qabul qiladi.

Burchak tezlik komponentalari. $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\psi}$ burchak tezliklarining x_1, x_2, x_3 o'qlariga proyeksiyasini olaylik. Burchak tezlik $\dot{\theta}$ ON tugunlar chizig'i bo'yicha yo'nalgan va uning x_1, x_2, x_3 o'qlari bilan tashkil etuvchilari:



$$\dot\theta_1=\dot\theta\cos\psi\,,\ \dot\theta_2=\dot\theta\sin\psi\,,\ \dot\theta_3=0\,.$$

Burchak tezlik $\dot\varphi$ Z o’qi bo’yicha yo’nalgan, uning x_3 o’qiga proyeksiyasi $\dot\varphi_3=\dot\varphi\cos\theta$ ga teng. x_1, x_2 proyeksiyasi esa $\dot\varphi\sin\theta$ ga teng. Oxirgi ifodani x_1 va x_2 o’qlar bo’yicha yoysak:

$$\dot\varphi_1=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi$$
$$\dot\varphi_2=\dot\varphi\sin\theta\cos\psi$$

Va nihoyat $\dot\psi$ burchak tezlik x_3 o’qi bo’yicha yo’nalgan.
Bu tashkil etuvchilarni har bir o’qlar uchun olsak, nihoyat

$$\begin{aligned}\Omega_1&=\dot\varphi\sin\theta\sin\psi+\dot\theta\cos\psi\\ \Omega_2&=\dot\varphi\cos\theta\cos\psi-\dot\theta\sin\psi\\ \Omega\ &=\dot\varphi\cos\theta+\dot\psi\end{aligned}\qquad(1)$$

Simmetrik pildiroq uchun aylanishdagi kinetik energiya. Pildiroqning momenti.

Agar x_1, x_2, x_3 o’qlar qattiq jism inersiya bosh o’qlari orqali tanlangan bo’lsa, Eyler burchaklar orqali aniqlangan aylanma kinetik enerniyani (1) ni

$$T_{ayl}=\frac{1}{2}\left(I_1\Omega_1^2+I_2\Omega_{21}^2+I_3\Omega_3^2\right)$$

formula quyidagi bilan topiladi.

Simmetrik pildiroq uchun $I=I_2=I_3$, u holda

$$T_{ayl}=\frac{I_1}{2}\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta+\dot\theta^2\right)+\frac{I_3}{2}\left(\dot\varphi\cos\theta+\psi\right)^2.$$

Qattiq jismning harakat tenglamasi

Keltirilgan harakat tenglamalari koorditanalari qo’zg’aluch sistema uchun yozilgan:

$$\frac{dP}{dt}\ \text{va}\ \frac{dM}{dt}$$

hosilalar $\vec{P}$ va $\vec{M}$ vektorlarning anna shunday sistemaga nisbatan o'qsharishini aks ettiriladi. Vaholanki, qattiq jismning $\vec{M}$ aylanma moment komponentlari orasidagi bog'lanishining eng sodda ko'rinishi o'qlari inersiya bosh o'qlari bo'ylab yo'naltirilgan qo'zg'aluvchi sistemada o'rinli bo'ladi. Ushbu bog'lanishda foydalanish uchun dastavval harakat tenglamalari $x_1, x_2 x_3$ qo'zg'aluvchan koordinatalarga moslab olish kerak.

Faraz qilaylik, $\frac{d\vec{A}}{dt}$, $\vec{A}$ vektorning qo'zg'almas sistemaga nisbatan o'zgarish tezligi bo'lsin. Agar $\vec{A}$ vektor aylanma sistemaga nisbatan o'zgarmas bo'lsa, u holda qo'zg'almas sistemaga nisbanat kuzatilayotgan o'zgarishi faqatgina aylanishga bog'liq bo'ladi va

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right]$$

Bunday tenglama istalgan vektor uchun o'rinlidir. Umumiy holda bu tenglamaning o'ng tomoniga $\vec{A}$ vektorning qo'zg'aluvchan sistemaga nisbatan o'zgarishi tezligini qo'shish kerak. Bu tezlikni $\frac{d'\vec{A}}{dt}$ deb belgilasak, u holda

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{d'\vec{A}}{dt} + \left[\vec{\Omega}\vec{A}\right] \tag{2}$$

Ushbu umumiy formula yordamida qattiq jismning harakat tenglamalarini

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F} \text{ va } \frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{K}$$

Quyidagicha aks ettirish mumkin:

$$\begin{gathered} \frac{d'\vec{P}}{dt} + \left[\vec{\Omega}\vec{P}\right] = \vec{F} \\ \frac{d'\vec{M}}{dt} + \left[\vec{\Omega}\vec{M}\right] = \vec{K} \end{gathered} \tag{3}$$

Bunda vaqt bo'yicha hosila koorditalarning qo'zg'aluvchi sistemasida oliganligi uchun tenglamalarni o'qlarga bo'lgan proyeksiyalari bo'yicha yozib chiqish mumkin:

$$\left(\frac{d'\vec{P}}{dt}\right)_1 = \frac{d\vec{P}_1}{dt}, \ldots \qquad \left(\frac{d'\vec{M}}{dt}\right)_1 = \frac{d\vec{M}_1}{dt}, \ldots$$

Bu yerda 1,2,3 indekslar x_1, x_2, x_3 o'qlar bo'yicha komponetalarini bildiradi.

Eyler tenglamalari

O'qlar bo'yicha yozish paytida birinchi tenglamada $\vec{P}$ o'rniga $\mu\vec{V}$ ni olamiz:

$$\begin{gathered} \mu\left(\frac{dV_1}{dt} + \Omega_2 V_3 - \Omega_3 V_2\right) = F_1 \\ \mu\left(\frac{dV_2}{dt} + \Omega_3 V_1 - \Omega_1 V_3\right) = F_2 \\ \mu\left(\frac{dV_3}{dt} + \Omega_1 V_2 - \Omega_2 V_1\right) = F_3 \end{gathered} \tag{4}$$

Agar x_1, x_2, x_3 o'qlar inersiya bosh o'qlari bo'yicha tanlangan deb hisoblasak, (3) ning ikkinchi tenglamalariga $M_1 = I_1\Omega_1$ va hokazo bo'ladi va qo'yidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = K_1$$
$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = K_2$$
$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = K_3$$

Bu tenglamalar ***Eyler tenglamalari*** deb ataladi.

Erkin aylanish paytida $K = 0$, demak, bu tenglamalarni quyidagi ko'rishiga keltirish mumkin:

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\Omega_2\Omega_3 = 0$$
$$I_2 \frac{d\Omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\Omega_3\Omega_1 = 0$$
$$I_3 \frac{d\Omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\Omega_1\Omega_2 = 0$$

Nazorat savollari

1. Eyler tenglamalarini yozing
2. Eyler burchaklari ayting
3. Qattiq jismning harakat tenglamasi yozing
4. Simmetrik pirildoq harakati qanday bo'ladi ?
5. Inersiya kuchlari nima ?

25-ma’ruza: TUTASH MUHITLAR MEXANIKASI TUSHUNCHASI.

REJA:

- Tutash muhit - ko’p zarrali sistemaning modeli sifatida.
- Deformasiya tenzori
- Hajm o’zgarishiga nisbatan deformasiya tenzorining komponentalari.
- Kuchlanish tenzori.
- Kuch momenti
- Simmetrik tenzor.
- Bir jinsli deformasiya.
- Ozod energiya.
- Kuchlanish tenzori va uning komponentalari.

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR: muhit, qattiq jism, elastik, nazariya, kuch, deformasiya, sistema, koordinata, komponentlar, radius-vektor, masofa , hajm, tenzor

Tutash muhit kabi qarab chiqiluvchi qattik jismlar mexanikasi elastiklik nazariyasi deb ataluvchi nazariyaning mazmun-mohiyatini tashkil etadi.

Tashqi kuchlar ta’siri ostida qattiq jismlar u yoki bu darajada deformasiyalanadi, ya’ni o’zining shakli va hajmini o’zgartiradi. Qattiq jismning har bir nuqtasi qandaydir koordinata sistemasida r radius-vektor $(x_1 = x, \quad x_2 = y, \quad x_3 = z)$ komponentlari bilan aniqlanadi. Jism deformasiyalanganda uning har bir nuqtasi, umuman olganda bir-biriga siljiydi. Jismning qandaydir bir nuqtasini qarab chiqaylik. Deformasiyalanishdan oldingi uning radius-vektori r, deformasiyala-nishdan keyingi komponentlari x'_i bo’lgan $\vec{r}$ radius-vektorga ega bo’lsin. Deformasiyalanish natijasida jism nuqtalarining siljishi vektor ko’rinishida

$$\vec{r} - r \text{ yoki } u_i = x'_1 - x_i$$

ifodalanadi. u_i - vektori deformasiya (yoki siljish vektori) vektori deyiladi.

Siljigan nuqtalarning koordinatasi x'_i siljishgacha bo’lgan nuqtalarning yoki x_i kordinatalrning funksiyasi bo’ladi. Demak, deformasiya vektori u_i ham x_i koordinatalarning funksiyasidan iborat bo’ladi.

Jism deformasiyalanganda uning nuqtalari orasidagi masofa o’zgaradi. Ikkita cheksiz yaqin nuqtalar orasidagi radius-vektor Deformasiyalangunga qadar $d`x_1$ bo’lsa, deformasiyalangan jismda bu ikki nuqtalar orasidagi radius-vektor

$$dx'_i = dx_i + du_i$$

Deformasiyalangunga qadar bu ikki nuqtalar orasidagi masofa

$$dl = \sqrt{dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2} \qquad (1)$$

Deformasiyalangandan keyin

$$dl' = \sqrt{dx'^2_1 + dx'^2_2 + dx'^2_3}$$

Summalar yozilishining umumiy qotdasiga ko’ra

$$dl^2 = dx_i^2$$

$$dl'^2 = dx'^2_i = (dx_i + du_i)^2$$

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k$$

U holda

$$dl'^2 = (dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k)^2 = dl^2 + 2\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_l} dx_k dx_l$$

O’ng tomondagi ikkinchi hadda summa I va k indekslar bo’yicha olinganligi uchun

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k = \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k$$

deb yozish mumkin.

Uchinchi haddagi i va l indekslar o’rni almashtirilsa, u holda

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dl^2 + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_i dx_k + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} dx_i dx_k + \frac{\partial u_l}{\partial x_k}\frac{\partial u_l}{\partial x_i} dx_k dx_l \\ &= dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k \end{aligned} \qquad (2)$$

u_{ik} tenzor

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i}\frac{\partial u_l}{\partial x_k}\right) \qquad (3)$$

Bu ifodalar jism deformasiyalanganda uzunlik elementining o’zgarishini aniqlaydi. u_{ik} tenzor deformasiya tenzori deyiladi. Uning ta’rifidan ma’lumki, deformasiya tenzori simmetrikdir, ya’ni

$$u_{ik} = u_{ki}$$

Hajm o’zgarishiga nisbatan deformasiya tenzorining komponentalari.

Har qanday simmetrik tenzor kabi u_{ik} tenzorni har bir berilgan nuqtada bosh o’qlarga keltirish mumkin, ya’ni har bir berilgan nuqtada shunday koordinata sistemasini u_{ik} - tenzorning bosh o’qlarini tanlash mumkinki, qaysikim u_{ik} komponentalaridan u_{11}, u_{22}, u_{33} -diagonal komponentalari noldan farqli bo’ladi. Bu komponentalarni, ya’ni Deformasiya tenzorning bosh qiymatlarini mos ravishda

$$u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)}$$

deb belgilaymiz. Agar deformasiya tenzori berilgan nuqtada bosh o’qlarga keltirilgan bo’lsa, u holda hajm elementini o’rab olgan uzunlik elementi:

$$dl'^2 = (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k = (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2$$

ya’ni bu ifoda uchta bir-biriga bog’liq bo’lmagan ifodaga aylanadi. Bu ifoda shuni bildiradiki, jismning har bir hajm elementida deformasiyani uchta o’zaro perpendikulyar yo’nalishlar – deformasiya tenzorining bosh o’qlari bo’yicha uchta bir-birga bog’liq bo’lmagan deformasiyalar yig’indisi sifatida qarash mumkin.

Bu deformasiyalardan har biri berilgan yo'nalish bo'yicha oddiy cho'zilish yoki siqilishni bildiradi. dx_1 uzunlik bosh o'qlardan biri bo'yicha

$$dx_1^{'} = \sqrt{1+2u^{(1)}}\,dx_1$$

uzunlikka aylanadi va h.k.

$$\sqrt{1+2u^{(i)}} - 1$$

ifodalar bu o'qlar bo'yicha $\frac{dx'_1 - dx_i}{dx_i}$ nisbiy cho'zilishni bildiradi.

Jism deformasiyalanishining har bir hollarida deformasiyalanish kichik bo'ladi. Uzun yupqa sterjenni kuchli qayirsak ham, sterjen ichidagi cho'zilish va siqilish deformasiyalari mavjud bo'lib, deformasiyalanish kichik bo'ladi.

Kichik deformasiyalarda u_i kichik, shuning uchun (3) ifoadadagi oxirgi hadni ikkinchi tartibli kichik qiymat sifatida tashlab yozish mumkin:

$$u_{ik} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i}\right)$$

endi bu holda deformasiya tenzorining bosh o'qlari yo'nalishlari bo'yicha olingan uzunlik elementlarining nisbiy cho'zilishi yuqori tartibli qiymatlar aniqligida

$$\sqrt{1+2u^{(1)}} - 1 \approx u^{(i)}$$

u_{ik} tenzorning bosh qiymatlariga teng bo'ladi.

Kuchlanish tenzori

Deformasiyalanmagan jismda molekulalarning joylashuvi uning issiqlik muvozanatidagi holatiga to'g'ri keladi. Bunda uning hamma qismlari biri-biri bilan mexanik muvozanatda joylashgan bo'ladi. Agar jismning ichidagi biror bir hajm elementi ajratib olinsa, boshqa qismlar tomonidan bu hajmga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning teng ta'sir etuvchisi nolga teng bo'ladi.

Deformasiyalanishda molekulalalar joylashuvi o'zgaradi va jism oldingi muvozanat holatidan chiqadi. Natijada unda muvozanat holatiga qaytarishga intiluvchi kuchlar paydo bo'ladi. Deformasiyalanishda hosil bo'lgan bu ichki kuchlar kuchlanishlar deyiladi. Agar jism deformasiyalanmagan bo'lsa, unda ichki kuchlanishlar bo'lmaydi. Ichki kuchlanishlar jism molekulalarining o'zaro ta'sir kuchlariga, ya'ni molkulalar kuchlariga asoslangan. Bunday kuchlarning ta'sir etish masofasi (radusi) juda kichik. Ta'sir molekulalar orasidagi masofadagina o'rinli. Elastiklik nazariyasida faqat molekulalar orasidagi masofadan katta bo'lgan masofalar qaraladi. Shuning uchun elastiklik nazariyasi nuqtai nazardan molekulyar kuchlarning ta'sir radiusi "nolga" teng deb hisoblanadi. Demak, ichki kuchlanishni tashkil qiluvchi "qisqa ta'sir" kuchlari biror bir nuqtada unga yeng yaqin joylashgan nuqtaga uzatiladi deyish mumkin. Bundan kelib chiqadigan xulosa shundan iboratki, jismning biror qismiga uning atrofidagi boshqa qismlar tomonidan bo'lgan ta'sir kuchi shu kismning faqatgina sirti orqali ta'sir etadi.

Jismda qandaydir hajmni ajratib olib, unga ta'sir etuvchi kuchlarning yig'indisini qarab chiqamiz. Bir tomondan, bu yig'indi kuch qaralayotgan jismning har bir elementiga ta’sir etuvchi hamma kuchlarning yig’indisiga teng bo’ladi, ya’ni

$$\int \vec{F} dV$$

hajm integrali ko’rinishida tavsvirlanadi, bu yerda $\vec{F}$ jismning hajm birligiga ta’sir etuvchi kuch, dV hajm elementiga $\vec{F}dV$ kuch ta’sir qiladi.

Ikinchi tomondan, qaralayotgan hajmning turli qismlari bir-biriga ta’sir qilayotgan kuchlar noldan farqli yig’indiga teng ta’sir etuvchi kuchni paydo qildira olmaydi, chunki ta’sir va aks ta’sir tengligi qonunidan kelib chiqqan holda bu kuchlar bir-birini yo’qqa chiqaradi. Shuning uchun umumiy kuch sifatida hajm ichidagi ichiki kuchlarning yig’indisi emas, balki hajmga tashqaridan ta’sir etuvchi kuchlar yig’indisi qaraladi. Biroq tashqi kuchlar qaralayotgan hajmga uning sirt yuzasi orqali ta’sir qiladi, shuning uchun ham teng ta’sir etuvchi kuch hajm sirtidagi har bir elementga ta’sir etuvchi kuchlarning yig’indisini tashkil etadi, ya’ni yuza bo’yicha olingan sirtlarga teng bo’ladi.

$\vec{F}_i$ 2-nchi rangli tenzor divergensiyasi hisoblanadi:

$$F_i = \frac{d\sigma_{ik}}{dx_k} \qquad (4)$$

Ixtiyoriy hajmga ta’sir etuvchi kuch yopiq kontur bo’yicha olingan quyidagi integral ko’rinishda yoziladi:

$$\int F_i dV = \int \frac{d\sigma_{ik}}{dx_k} dV = \oint \sigma_{ik} df_k \qquad (5)$$

df_k – yuza elementi $d\vec{f}$ vektor komponentalari.

σ_{ik}- tenzor kuchlanish tenzori deb ataladi. (5) dan ko’rinadiki, $\sigma_{ik} df_k d\vec{f}$ yuza elementiga ta’sir qiluvchi kuchning I – komponentasi.

x- o’qiga perpendikulyar bo’lgan birlik yuzaga x o’qi bo’ylab yo’nalgan σ_{xx} normal kuch ta’sir etadi, bundan tashqari, y va z o’qlari bo’yicha yo’nalgan σ_{yx} va σ_{zx} - potensial kuchlar ham ta’sir qiladi.

Ichki kuchlar tomonidan jism yuzasiga ta’sir etuvchi kuch

$$-\oint \sigma_{ik} df_k$$

Kuch momenti. Simmetrik tenzor.

Jismning qandaydir hajmiga ta’sirn etuvchi kuch momenti

$$M_{ik} = \int (F_i x_k - F_k x_i) dV$$

x_i -kuchlar qo’yilgan nuqtalar koordinatalari.

(5) ni e’tiborga olsak,

$$M_{ik} = \int \left(\frac{\partial \sigma_{il}}{\partial x_l} x_k - \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial x_l} x_i\right) dV =$$

$$= \int \frac{\partial(\sigma_{il} x_k - \sigma_{kl} x_i)}{\partial x_l} dV - \int \left(\sigma_{il} \frac{\partial x_k}{\partial x_l} - \sigma_{kl} \frac{\partial x_i}{\partial x_l}\right) dV$$

Ikkinchi haddan ko'rinadiki, agar koordinatalar bir xil bo'lsa, bir koordinataning ikkinchisidan olingan hosilasi birga teng bo'ladi, koordinatalar har xil bo'lsa, nolga teng bo'ladi. Ya'ni

$$\frac{dx_k}{dx_l} = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, & k = l \\ 0, & k \neq l \end{cases}$$

δ_{kl} - birlik tenzor

$$\delta_{kl}\sigma_{il} = \sigma_{ik}$$

$$\delta_{il}\sigma_{kl} = \sigma_{ki}$$

Integral ostidagi birinchi hadda qandaydir tenzor divergensiyasi turibdi, Ostrogradskiy formulasiga ko'ra yuza integraliga aylantirish mumkin.

$$\int \frac{d(\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i)}{dx_l} dV = \oint (\sigma_{il}x_k - \sigma_{kl}x_i) df_l \qquad (6)$$

$\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$ - simmetrikdir.

Jism har tomonlama qisilgan holdagi kuchlanish tenzorini oson yozish mumkin. Jism yuza birligiga jism hajmi ichi yuzasiga normal yo'nalgan bir qiymatli bosim ta'sir etadi. R –bosim, $d\varphi_i$ yuza elementiga ta'sir etuvchi kuch – $nd\varphi_i$ kuchlanish tenzori orqali ifodalangan

$$-pdf_i = \sigma_{ik}df_k$$

Ikkinchi tomondan

$$-pdf_i = -p\delta_{ik}df_k$$

bulardan

$$\sigma_{ik} = -p\delta_{ik} \qquad i \neq k \text{ bo'lsa,} \quad \sigma_{ik} = -p$$

Bir jinsli deformasiyalar.

Agar deformasiya tenzori jismning butun hajmi bo'yicha o'zgarmas bo'lsa, bunday deformasiya bir jinsli deformasiya deyiladi. Masalan, jismning har tomonlama bir xil siqlishi bir jinsli deformasiyadir.

Endi sterjenning oddiy cho'zilishi (yoki siqilishini) ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, sterjen z o'qi bo'ylab joylashgan bo'lsin va uning uchlariga qarama-qarshi taraflarga cho'ziluvchi kuchlar qo'yilgan bo'lsin. Bu sterjen uchlari sirtlarida bir tekis harakat qilsin. Birlik yuzaga ta'sir etuvchi kuch r bo'lsin. Deformasiya bir jinsli bo'lganligi, ya'ni u_{ik} jism bo'yicha o'zgarmas bo'lganligi uchun kuchlanish tenzorlari ham o'zgarmas bo'ladi. Demak, kuchlanish tenzorini σ_{ik} chegaraviy shartlar yordamida aniqlash mumkin. Sterjenning yon tomonida tashqi kuchlar ta'siri yo'q, demak, $p_i = \sigma_{ik}n_k = 0$. Birlik vektor n yon sirtda z o'qiga perpendikulyar, ya'ni u faqat n_z va n_y komponentlariga yegadir. Demak, σ_{ik}, σ_{zz} komponentasidan tashqari barcha komponentlari nolga teng bo'ladi. Sterjen uchlarining sirtida $\sigma_{zi}n_i = p$, demak $\sigma_{zz} = p$.

$$u_{ik}=\frac{1}{9K}\delta_{ik}\sigma_{ll}+\frac{1}{2\mu}(\sigma_{ik}-\frac{1}{3}\delta_{ik}\sigma_{ll})$$

Deformasiya va kuchlanish tenzorini bog'lovchi umumiy ifodadan ko'rinadiki, u_{ik} $(i\neq k)$ barcha komponentlari nolga teng. Qolganlari uchun esa

$$u_{xx}=u_{yy}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2\mu}-\frac{1}{3k}\right)p,\quad u_{zz}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2k}+\frac{1}{\mu}\right)p \tag{7}$$

U_{zz} komponenta sterjenning z o'qi bo'ylab nisbiy uzayishini bildiradi. bu ifodadagi r ning oldidagi koeffisiyent cho'zilish koeffisiyenti deyiladi, unga teskari bo'lgan kattalik esa cho'zilish moduli E - (yoki Yung moduli) deyiladi.

$$u_{zz}=\frac{P}{E} \tag{8}$$

bu yerda

$$E=\frac{9k\mu}{3K+\mu} \tag{9}$$

u_{xx} va u_{yy} koponentlar sterjen ko'ndalang yo'nalishidagi nisbiy siqilishni bildiradi. Ko'ndalang siqilishning bo'ylama cho'zilishga nisbati Puasson koeffisiyenti σ deb ataladi.

$$u_{xx}=-\sigma u_{zz} \tag{10}$$

Bu yerda

$$\sigma=\frac{1}{2}\frac{3k-2\mu}{3k+\mu} \tag{11}$$

K va μ har doim musbat bo'lgani uchun Puasson koeffisiyenti σ turli moddalarda -1 $(k=0)$ dan $1/2$ $(\mu=0)$ largacha o'zgaradi. Demak,

$$-1\leq\sigma\leq 1/2 \tag{12}$$

Sterjenning cho'zilishi natijasidagi hajmning nisbiy siljishi

$$u_{ii}=p\frac{1}{3k} \tag{13}$$

bo'ladi.

<u>Ozod energiya</u>

Cho'zilgan sterjening ozod energiyasini yozamiz, $\sigma\neq 0$, demak

$$F=\frac{1}{2}\sigma_{zz}u_{zz}$$

bu yerdan

$$F=\frac{p^2}{2E} \tag{14}$$

Keyingi nisbatlarda K va μ lar o'rniga E va σ lardan foydalanamiz.

(9) va (11) dan $\mu=\dfrac{E}{2(1+\sigma)}$, $K=\dfrac{E}{3(1-2\sigma)}$. Ozod energiya uchun

$$F = \frac{E}{2(1+\sigma)}(u_{ik}^2 + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}^2)$$

Kuchlanish tenzori va uning komponentalari.

Kuchlanish tenzori deformasiya tenzori orqali

$$\sigma_{ik} = \frac{E}{(1+\sigma)}(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\sigma_{ik}) \qquad (15)$$

ifodalanishi mumkin.

Aksincha:

$$u_{ik} = \frac{1}{E}[(1+\sigma)\sigma_{ik} - \sigma\sigma_{ll}\sigma_{ik}]$$

Bu formuladan ko'p foydalanamiz, shuning uchun ularni komponentlar bo'yicha yozib chiqish kerak

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{xx} + \sigma(u_{yy} + u_{zz})],$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{yy} + \sigma(u_{xx} + u_{zz})],$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)}[(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})],$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{(1+\sigma)}u_{xy}$$

$$\sigma_{xz} = \frac{E}{(1+\sigma)}u_{xz}$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{(1+\sigma)}u_{yz}$$

Teskari ifodalar

$$u_{xx} = \frac{1}{E}[\sigma_{xx} - \sigma(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})],$$

$$u_{yy} = \frac{1}{E}[\sigma_{yy} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})],$$

$$u_{zz} = \frac{1}{E}[\sigma_{zz} - \sigma(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})],$$

$$u_{xy} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xy}, \quad u_{xz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{xz}, \quad u_{yz} = \frac{1+\sigma}{E}\sigma_{yz}$$

Temperatura o'zgarishi bo'yicha bo'ladigan deformasiyalar.

Temperaturaning o'zgarishi deformasiyalanish jarayoni natijasida va chetdan bo'ladigan sabablar natijasida ro'y berishi mumkin.

Tashqi kuchlar bo'lmagan paytda qandaydir berilgan T_0 temperatura jism holatini deformasiyalangan deb olamiz. Agar jism T_0 dan farqli T temperaturaga ega bo’lsa, jismga tashqi kuch qo’yilmagan bo’lsa ham issiqlik kengayishi tufayli deformasiyalangan bo’ladi. Shuning uchun $F(T)$ – ozod energiyaning yig’ilmasida nafaqat kvadratik, hattoki deformasiya tenzorining chiziqli hadlari qantnashadi.

erkin energiya:

$$F(T) = F_0(T) - k\alpha(T - T_0)u_{ll} + \mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll})^2 + \frac{K}{2}u_{ll}^2 \qquad (18)$$

μ, k, α larni o’zgarmas deb olaylik. Ularni T dan bog’liq deb olsak, yuqori tartibli ifodalarga kelar edik.

K – har tomonlama siqilish moduli, μ - siljish moduli

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}}\right)T$$

$$du_{ll} = \delta_{ik}du_{ik}$$

larni e’tiborga olsak, u_{ik} bo’yicha F ni differensiallasak,

$$F(T) = -Kd(T - T_0)du_{ll} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll})(du_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}du_{ll}) + Ku_{ll}du_{ll} =$$

$$= -K\alpha(T - T_0)\delta_{ik}du_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik}du_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll})(du_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}\delta_{ik}du_{ik}) =$$

$$= \left[-K\alpha(T - T_o)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll})\right]du_{ik}$$

$$\sigma_{ik} = -K\alpha(T - T_o)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) \qquad (19)$$

Birinchi had jism temperaturasi bo’yicha bog’langan qo’shimcha kuchlanishlarni aniqlaydi. Jismning erkin issiqlik kengayishida (tashqi bo’lmagan natijada) ichik kuchlanishlar bo’lmasligi kerak. $\sigma_{ik} = 0$ ga tenglashtirsak:

$$-K\alpha(T - T_o)\delta_{ik} + Ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}) = 0$$

bu yerdan

$$2\mu u_{ik} = K\alpha(T - T_o)\delta_{ik} - Ku_{ll}\delta_{ik} + \frac{2}{3}\mu\delta_{ik}u_{ll} =$$

$$= [-K\alpha(T - T_o) - Ku_{ll} + \frac{2}{3}\mu u_{ll}]\delta_{ik}$$

$$u_{ik} = \frac{1}{2\mu}[K\alpha(T - T_0) - Ku_{ll} + \frac{2}{3}\mu u_{ll}]\delta_{ik}$$

Demak, $U_{ik} = const$,

Bu yerdagi $U_{ll} = \alpha(T - T_0)$

Lekin U_{ll} – deformasiyadagi hajmning nisbiy o’zgarishini aniqlaydi. Shuning uchun σ -jismning issiqlik kengayish koeffisiyenti deyiladi.

Har xil deformasiya turlarini izotermik va adiabatik deformasiyalarga bo'lish mumkin. Izotermik deformasiyalarda jism temperaturasi o'zgarmaydi. Agar (18) da $T = T_0$ deb olsak, odatdagi formulaga kelamiz. K va μ larni izotermik modullar deb atasak bo'ladi.

Jism va jismni o'rab oluvchi muhit bilan, shuningdek jismning har xil uchastkalarida issiqlik almashinuvi sodir bo'lmaydigan deformasiyalarga adiabatik deformasiyalar deyiladi. S – entropiya bu xolda o'zgarmas bo'lib qoladi. Ma'lumki,

$$S = -\frac{dF}{dT}$$

(18) ifodani differensiallasak, U_{lk} bo'yicha birinchi tartibgacha aniqlikda

$$S(T) = S_0(T) + K_0 U_{ll}$$

entropiyani topgan bo'lamiz. S ni o'zgarmasga tenglashtirib, deformasiyadagi $T = T_0$ temperaturaning o'zgarishini U_{ll} ga proporsional tarzdagi ifodasini aniqlash mumkin. Bu ifodani (19) ga qo'ysak, σ_{ik} uchun

$$\sigma_{ik} = K_{ad} U_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(U_{ik} - \frac{1}{3} \delta_{ik} U_{ll} \right)$$

odatdagi ifodaga kelgan bo'lar edik. Bu yerda μ bo'yicha siljish moduli, K_{ad} lekin boshqa siqilish moduli.

Adiabatik va izotermik modullar orasidagi bog'lanish

$$\frac{1}{K_{ad}} = \frac{1}{K} - \frac{T\alpha^2}{C_p}, \qquad \mu_{ad} = \mu \tag{20}$$

Bu yerda S_r bosim o'zgarmas bo'lganda issiqlik sig'im miqdori.

Adiabatik cho'zilish (Yung) moduli E_{ad} va Puasson koeffisiyenti σ_{ad} uchun quyidagi munosabatlarga kelamiz:

$$E_{ad} = \frac{E}{1 - E\dfrac{T\alpha^2}{9C_p}}; \qquad \delta_{ad} = \frac{\delta + E\dfrac{T\alpha^2}{9C_p}}{1 - E\dfrac{T\alpha^2}{9C_p}}; \tag{21}$$

Real holatda $ET\alpha^2 / S_r$ ifoda odatda kichik. Shuning uchun yetarli darajadagi aniqlikda yozish mumkin

$$E_{ad} = E + E^2 \frac{T\alpha^2}{9C_p}; \qquad \delta_{ad} = \sigma + (1+\sigma) E \frac{T\alpha^2}{9C_p} \tag{22}$$

Izotermik deformasiya uchun kuchlanish tenzori:

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial u_{ik}} \right)_S$$

ε - ichki energiya.

Bunga ko’ra adiabatik deformasiya uchun jismning hajm birligidagi ichki energiya (ozod energiya emas, oldin ko’rganimizdek)

$$\varepsilon = \frac{K_{ad}}{2} u_{ll}^2 + \mu (u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik})^2 \qquad (23)$$

Nazoart savollari

1. Kuchlanish tenzori qanday tenzor? (mexanik muvozanat, muvozanat holatga qaytaruvchi kuchlar, ikkinchi rangli tenzor).
2. Kuch momenti ifodasi nimaga teng? (kuch qo’yilgan nuqtalar koordinatasi, tenzor divergensiyasi, kuchlanish tenzori).
3. Simmetrik tenzor.
4. Bir jinsli deformasiya qanday deformasiya? (hajm, deformasiya va kuchlanish tenzori).
5. Ozod energiya ifodasi? (sterjenning ozod energiyasi, Puasson koeffisiyenti).
6. Kuchlanish tenzori va uning komponetalarini yozib bering.

26-ma'ruza: GIDROSTATIKA.

IDEAL SUYUQLIK HARAKAT TENGLAMALARI.

REJA:

- Uzluksizlik tenglamasi.
- Eyler tenglamasi.

TAYANCH SO'Z VA IBORALAR: harakat, hajm, siljish, molekula,zarracha, nuqta, suyuq tezligi, suyuq zichligi, gidrodinamika, tenglama, cheksiz, termodinamik potensial

Uzluksizlik tenglamasi

Gidrodinamika uyuqliklar va gazlar harakatini o'rganadi. Gidrodinamikada suyuqlik tutash muhit kabi qaraladi. Ya'ni suyuqlikning har qanday hajmining kichik elementi shunchalik katta deb hisoblanadiki, bu element juda ko'p molekulalar sonidan iborat deb qaoaladi. Shuning uchun ham cheksiz kichik xajm elementi deganimizda butun jismning hajmiga nisbatan yetarli darajada kichik bo'lgan, biroq molekulalar orasidagi masofadan katta bo'lgan hajm tushuniladi. Suyuqlik zarrachasining siljishi deganda uning alohida bir molekulasining siljishi emas, balki bir nechta molekuladan iborat bo'lgan va nuqta sifatida qaraladigan hajm elementining siljishi tushuniladi.

Suyuqlik harakat holatini matetmatik ifodalariga suyuqlik tezligi $v = v(x, y, z, t)$ va biror bir ikkita termodinamik ifodalar, masalan, bosim $p(x, y, z, t)$ va zichlik $\rho(x, y, z, t)$ kabi funkstyalardan foydalaniladi.

Fazoning qandaydir V_0 hajmini qarab chiqaylik. Bu hajmda suyuqlik miqdori (massasi) $\int\limits_{V_o} \rho\, dV$, ρ - suyuqlik zichligi. Berilgan hajmni chegaralovchi $d\vec{f}$ yuza elementi vaqt birligi ichida $\rho\vec{V}d\vec{f}$ suyuqlik miqdori oqadi. $d\vec{f}$ absolyut qiymati jihatidan sirt yuza elementiga teng bo'ladi va unga normal bo'yicha yo'nalgan bo'ladi. Agar suyuqlik hajm ichidan tashqariga oqayotgan bo'lsa $\rho\vec{V}d\vec{f}$ - musbat, ichkariga oqsa manfiy bo'ladi. V_o hajmdan vaqt birligida oqayotgan suyuqlik miqdori

$$\oint \rho\vec{V}d\vec{f}$$

V_o hajmda suyuqlik miqdorining kamayishi

$$-\frac{d}{dt}\int \rho dV$$

Ikala ifodani tenglashtirsak

$$\frac{d}{dt}\int \rho\, dV = -\oint \rho\vec{V}d\vec{f}$$

Yuza bo'yicha integralni hajm bo'yicha integralga aylantiramiz, Ostrogradskiy formulasiga o'ra

$$\oint \rho\vec{V}d\vec{f} = \int div \rho\vec{v} dV$$

Shunday qilib,

$$\int \left(\frac{d\rho}{dt} + div\rho\vec{V} \right) dV = 0$$

$$\frac{d\rho}{dt} + div\rho\vec{v} = 0$$

Uzluksizlik tenglamasiga kelamiz.

$$div\rho\vec{V}$$

ni ochib yozsak,

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho div\vec{v} + \vec{v} grad\rho = 0$$

$j = \rho\vec{V}$ vektor – suyuqlik oqim zichligi.

Eyler tenglamasi

Suyuqlikda qandaydir hajmni ajratib olamiz. Ajratib olingan suyuqlik hajmiga ta'sir etuvchi to'la kuch:

$$-\oint pdf$$

Ushbu integralni hajm bo'yicha integralga aylantirsak

$$-\oint pdf = -\int gradpdV$$

Demak, suyuqlikning har qanday dV hajmiga suyuqlikning tashqi tomonidan dV – $grad\ p$ kuch ta'sir qilar ekan, ya'ni suyuqlikning hajm birligida $grad\ p$ kuch ta'sir etar ekan. Demak

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -gradp$$

$d\vec{v}$ - berilgan suyuqlik zarrachasiga o'zgarish tezligi

$$1)\ \frac{d\vec{v}}{dt} dt,$$

dt – vaqt mobaynida nuqta tezligining o'zgarishi

$$2)\ dx\frac{dv}{dx} + dy\frac{dv}{dy} + dz\frac{dv}{dz} = (d\vec{r}\nabla)\vec{v}$$

O'sha vaqt momentida suyuqlik zarrachasi $d\vec{r}$ masofani o'tayotgan ikki nuqta tezliklar farqlarining yig'indisiga teng.

Shunday qilib,

$$d\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} dt + (d\vec{r}\nabla)\vec{v}$$

ni dt ga bo'lsak,

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\nabla)\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{1}{\rho} gradp \qquad (1)$$

Bu formula 1755 yilda Eyler tomonidan berilgan suyuqlik harakat tenglamasi, ya'ni Eyler tenglamasidir.

Agar suyuqlik og'irlik maydonida jylashgan bo'lsa (1) tenglama

$$\frac{d\vec{v}}{dt} + (\vec{v}\nabla)\vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + g \qquad (2)$$

g-og'irlik kuchi tezlanishi.

Nazorat savollari.

1. Uzluksizlik tenglamasini ifodalab bering (suyuqlik va gazlar, suyuqlik miqdori, gradiyent, divergensiya).
2. Eyler tenglamasi ko'rinishini ko'rsating (ta'sir etuvchi to'la kuch, og'irlik maydoni).
3. Gidrostatika tenglamasini yozing (Eyler tenglamasi, suyuqlik zichligi, bosim, issiqlik va termodinamik muvozanat).

27-ma’ruza: BERNULLI TENGLAMASI

REJA

1. Gidrostatika.
2. Bernulli tenglamasi.

TAYANCH SO’Z VA IBORALAR: Eyler tenglamasi, zichlik, impuls, suyuqlik, vkrtikal, gradiyent, maydon, tekislik, Bernulli tenglamasi

Gidrostatika

Bir jinsli og’irlik maydonida joylashgan tinch turuvchi suyuqlik uchun Eyler tenglamasidan

$$graqdp = \rho\vec{g} \qquad (1)$$

Bu tenglama suyuqlik mexanik muvozanatini aniqlaydi.

Agar tashqi kuchlar bo’lmasa

$$\nabla p = 0\text{, ya'ni}\quad p = const$$

Suyuqlik har bir nuqtasida bosim bir xil.

Suyuqlik butun hajmi bo’yicha suyuqlik zichligini o’zgarmas deb hisoblasak (1) tenglama osongina integrallanadi. Z o’qni vertikal yuqoriga yo’naltirsak,

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g$$

Bu yerdan

$$p = -\rho gz + const$$

Tinch turgan suyuqlik h balandlikda erkin sirtga ega bo’lsa, bu sirtning har bir nuqtasiga bir xil r_0 tashqi bosim qo’yilgan bo’lsa, bu sirt $z = h$ gorizontal tekislikka ega bo’lishi kerak.

$$p = p_o, \quad z = h$$

Shartidan

$$const = p_o + \rho gh$$

Demak,
$$p = p_o + \rho g(h - z)$$

Aytaylik, suyuqlik nafaqat mexanik, balki issiqlik muvozanatida joylashgan bo’lsin. U holda (1) tenglama quyidagicha integrallanadi. Quyidagi termodinamik muvozanatdan foydalanamiz:

$$d\Phi = -SdT + Vdp$$

F -suyuqlik massa birligiga to’g’ri keluvchi termodinamik potensial. O’zgarmas temperaturada

$$T = const, \quad dT = 0 \quad d\Phi = Vdp = \frac{1}{\rho}dp$$

$$\frac{1}{\rho}\nabla p = \nabla\Phi$$

deb yozish mumkin.

(3) dan
$$grad\ p = \rho\, g$$

$$\nabla p = \rho\vec{g}, \quad \nabla\Phi\rho = \rho\vec{g}, \qquad \nabla\Phi = \vec{g}$$

z o’qi bo’yicha $\vec{g}$ o’zgarmas vektori uchun quyidagi ayniyat mavjud:

$\vec{g} = -\nabla(gz)$

Demak,

$$\nabla(\Phi + gz) = 0, \qquad \Phi + gz = const$$

gz –og’irlik maydonida suyuqlik massasi birligiga to’g’ri keluvchi potensial energiya, (4) tashqi maydonda joylashgan sistemaning termodinamik muvozanat sharti.

Nazorat savollari

4. Uzluksizlik tenglamasini ifodalab bering (suyuqlik va gazlar, suyuqlik miqdori, gradiyent, divergensiya).
5. Eyler tenglamasi ko’rinishini ko’rsating (ta’sir etuvchi to’la kuch, og’irlik maydoni).
6. Gidrostatika tenglamasini yozing (Eyler tenglamasi, suyuqlik zichligi, bosim, issiqlik va termodinamik muvozanat).
7. Bernulli tenglamasini keltirib chiqaring (stasionar oqim, issiqlik funksiyasi).