O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

Namangan Davlat Universiteti

"Matematika" kafedrasi

BOXONOV ZAFAR SAYDIMAHMUDOVICH

VEKTORLAR ALGEBRASI

Namangan 2017 - yil

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA O'RTA MAXSUS TA`LIM VAZIRLIGI

Namangan Davlat Universiteti

"Matematika" kafedrasi

BOXONOV ZAFAR SAYDIMAHMUDOVICH

VEKTORLAR ALGEBRASI

Namangan 2017 - yil

Boxonov Zafar Saydimahmudovich, **Vektorlar algebrasi** (Analitik geometriya elementlari). Uslubiy ko`rsatma. – Namangan: NamDU nashri, 2017. – 44 bet.

Ushbu uslubiy ko'rsatma 5130100 – Matematika ta'lim yo'nalishi bo'yicha ta'lim olayotgan talabalar uchun «Analitik geometriya» fanidan mustaqil ishlarini o'tkazish bo'yicha mo'ljallangan. Uslubiy ko`rsatma analitikl geometriya faning DTS dasturi asosida bayon etilgan.

Uslubiy ko'rsatma Namangan davlat universitetining o`quv metodik Kengashi tomonidan (2017 yil 19 apreldagi, № 8 – sonli bayonnoma) nashrga tavsiya etilgan.

Taqrizchilar:

A.Mashrabboyev Namangan davlat universiteti "Matematika" kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi

B.Samatov Namangan davlat universiteti, "Amaliy matematika" kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari doktori

KIRISH

Mamlakatimizda «Kadrlar tayyorlash milliy dasturi» asosida ta'lim oluvchilarning yuksak tayyorgarlik darajasi, malakasi, madaniy va ma'naviy, axloqiy saviyasining sifatini belgilab beruvchi davlat ta'lim standartlari uzluksiz ta'lim tizimining barcha bosqichlarida to'liq amalga oshirilayotgan bir davrda o'quv adabiyotlariga bo'lgan talab kuchayib bormoqda. Shunday adabiyotlar yaratish professor-o'qituvchilar zimmasiga katta mas'uliyatlar yuklaydi.

Bu uslubiy ko`rsatmada analitik geometriya fani bo`yicha tashkil etiladigan mashg`ulotlar, mustaqil ta`limda foydalanish mumkin.

Uslubiy ko`rsatma ikki bobdan iborat bo`lib, birinchi bobda koordinatalar sistemasini kiritish usullari, analitik geometriyaning sodda masalalari ko`rib chiqilgan. Ikkinchi bobda vektorlar algebrasi to`la bayon etilgan. Har bir mavzu bo`yicha nazariy ma`lumotlar, misol va masalalar yechish na`munalari va mustaqil yechish uchun misollar ko`rsatib o`tilgan.

Uslubiy ko`rsatma analitikl geometriya faning DTS dasturi asosida bayon etilgan.

Birinchi bob.

Koordinatalar sistemasi.

Analitik geometriyaning sodda masalalari.

1-§. O'q va o'q kesmalari. To'g'ri chiziqdagi Dekart koordinatalari.

Faraz qilaylik birorta to'g'ri chiziq berilgan bo'lsin. Uning ikkita o'zaro qarama-qarshi yo'nalishi mavjud. Bu yo'nalishlardan birini tanlab olib, uni musbat deb, unda qarama-qarshi yo'nalishni esa manfiy yo'nalish deb ataymiz. Musbat yo'nalishi aniqlangan to'g'ri chiziqni o'q deb ataymiz. To'g'ri chiziqning ikkita nuqtasi orasidagi bo'lagi kesma deb ataladi. Kesmaning yo'nalishini ta'riflash uchun uni chegaralovchi nuqtalardan birini kesmaning boshi deb, ikkinchisini kesmaning oxiri deb olinadi. Boshlang'ich A nuqtasi va oxirgi B nuqtasi ko'rsatilgan kesma yo'nalgan kesma deyiladi va u AB shaklida belgilanadi.

Biror o'qda yotgan kesmaning yo'nalishi o'qning musbat yo'nalishi bilan mos tushsa, u vaqtda kesmaning algebraik miqdorini musbat deb olamiz, o'qning musbat yo'nalishiga kesmaning yo'nalishi teskari yo'nalgan bo'lsa, kesmaning algebraik miqdorini manfiy deb olamiz. Kesmaning uzunligi hamma vaqt musbat son bilan ifodalanadi. AB kesmaning uzunligi $|AB|$ shaklida yoziladi. Yo'nalishlari qarama-qarshi bo'lgan AB va BA kesmalarning uzunliklari bir-biriga teng, ya'ni $|AB| = |BA|$ ammo AB va BA kesmalarning algebraik miqdori bir-biridan ishorasi bilan farq qiladi, ya'ni

$$AB = -BA$$

Agar AB kesmada A va B nuqtalar ustma-ust tushib qolsa, kesmani nol kesma deb olamiz. Nol kesmaning uzunligi nolga teng bo'ladi. A, B, C dan iborat uchta nuqta o'qda har qanday xolatda joylashganda ham AB, BC, AC kesmalarning algebraik miqdori o'zaro ushbu

$$AB + BC = AC \qquad (1)$$

ayniyat bilan bog'langan bo'ladi.

To'g'ri chiziqdagi nuqtaning o'rnini aniqlash uchun, shu to'g'ri chiziqdagi biror yo'nalishni musbat yo'nalish deb qabul qilamiz. So'ngra uzunlik birligini tanlab olib, o'qdagi ixtiyoriy O nuqtani sanoq boshlanadigan nuqta deb qabul (koordinata boshi deb) qilamiz. Hosil bo'lgan o'qni OX o'qi deb ataymiz. Bu holda OX o'qdagi har qanday M nuqtaning o'rni OM kesmaning algebraik miqdori bilan aniqlanadi. M nuqtaning koordinatasini x harfi bilan belgilasak, u holda: $x = OM$ bo'ladi.

Agar koordinata sistemasida ixtiyoriy ikkita $M_1(x_1), M_2(x_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsa, u holda

$$M_1M_2 = x_2 - x_1 \qquad (2)$$

yoki

$$\rho(M_1, M_2) = |M_1M_2| = |x_2 - x_1| \qquad (3)$$

formula M_1M_2 kesmaning uzunligini ifodalaydi.

<u>*1-masala.*</u> Koordinatalari $|2x+7| = 11$ tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalar topilsin.

<u>*Yechish:*</u> Berilgan tenglama, quyidagi ikkita $2x+7=11$ va $-2x-7=11$ tenglamalarda ekvivalent. Bu tenglamalarni yechib $x_1 = 2$ va $x_2 = -9$ ni topamiz.

Shunday qilib, izlangan nuqtalar $M_1(2)$ va $M_2(-9)$.

<u>*2-masala.*</u> Koordinatalari ushbu

$$x^2 - 8x + 15 < 0$$

tenglamani qanoatlantiradigan nuqtalarning o'rni topilsin.

<u>*Yechish:*</u> $x^2 - 8x + 15 = 0$ kvadrat tenglama $x_1 = 3$ va $x_2 = 5$ ildizlarga ega. Demak, $3 < x < 5$ tengsizlikni qanoatlantiradigan nuqtalarning koordinatalari berilgan tengsizlikni qanoatlantiradi.

<u>*3-masala.*</u> $A(10)$ va $\rho(A, B) = |AB| = 14$ berilgan. B nuqtanig koordinatalari topilsin.

<u>*Yechish:*</u> B nuqtaning koordinatasi x_2 bo'lsin. U holda (2) formulaga binoan:

$$\rho(A, B) = |AB| = |x_2 - x_1| = |x_2 - 10| = 14$$

Bu tenglama $x_2 - 10 = 14$, $x_2 - 10 = -14$ tenglamalarga ekvivalent. Bulardan $x_2 = 24$, $x_2 = -4$

Demak, B nuqtaning koordinatalari $x_2 = 24$ yoki $x_2 = -4$

<u>*4-masala.*</u> Uchta nuqta berilgan: $A(3), B(14)$ va $C(9)$. Bu nuqtalardan har biri

qolgan ikki nuqta orasidagi kesmani qanday nisbatda bo'lishini aniqlang.

<u>*Yechish:*</u> 1) C nuqta AB kesmani $\lambda_1 = \frac{AC}{BC}$ nisbatda bo'ladi;

$$\lambda_1 = \frac{AC}{CB} = \frac{9-3}{14-9} = \frac{6}{5}$$

2) B nuqta AC kesmani $\lambda_2 = \frac{AB}{BC}$ nisbatda bo'ladi;

$$\lambda_2 = \frac{AB}{BC} = \frac{14-3}{9-14} = -\frac{11}{5}$$

3) A nuqta BC kesmani $\lambda_3 = \frac{BA}{AC}$ nisbatda bo'ladi;

$$\lambda_3 = \frac{BA}{AC} = \frac{14-3}{9-3} = \frac{11}{6}$$

<u>*5-masala.*</u> $M(x)$ nuqta $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ nuqtalar bilan chegaralangan M_1M_2 kesmani $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ nisbatda bo'ladi. Shu nisbatni aniqlang.

<u>*Yechish:*</u> (2) formulaga binoan $M_1M = x - x_1$ va $MM_2 = x_2 - x_1$. Demak, izlanuvchi nisbat

$$\lambda = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \qquad (4)$$

formula bilan topiladi.

<u>*Mustaqil yechish uchun masalalar*</u>

<u>*1-masala:*</u> Koordinatalari ushbu $|2x+7| = 11$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi nuqtalar-ning o'rni topilsin.

<u>*2-masala:*</u> $A(21), B(-7)$ nuqtalar berilgan: AB kesmaning algebraik miqdori AB va uzunligi $\rho(AB)$ topilsin.

<u>*3-masala:*</u> $C(-2)$ nuqta $A(4)$ va $B(x)$ nuqtalar orasidagi kesmani $\lambda = \frac{3}{2}$ nisbatda bo'ladi. B nuqtaning koordinatasi topilsin.

<u>*4-masala:*</u> $M(x)$ nuqta $M_1(x_1)$ va $M_2(x_2)$ nuqtalar bilan chegaralangan

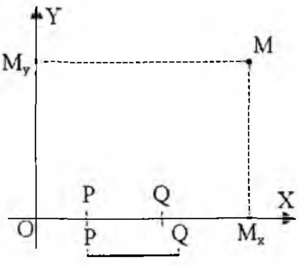
M_1M_2 kesmani $\lambda = \frac{M_1M}{MM_2}$ nisbatda bo'ladi. M nuqtaning koordinatasi x topilsin.

5-masala: $A(7)$ va $B(25)$ nuqtalar bilan chegaralangan kesma uchta teng bo'laklarga bo'lingan. Bo'linish nuqtalarining koordinatalari topilsin.

6-masala: AB kesma $M_1(7)$ va $M_2(19)$ nuqtalar yordamida uchta teng bo'lakka bo'lingan. AB kesma uchlarining koordinatalari topilsin.

2-§. Tekislikdagi va fazodagi to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari.

1.Tekislikdagi nuqtalarning koordinatalari. Tekislikdagi nuqtaning o'rnini sonlar yordamida aniqlash uchun biror O nuqtada kesishuvchi, bir-biriga perpendikulyar bo'lgan ikkita to'g'ri chiziq olamiz. Ularning biri OX o'qi yoki abstsissalar o'qi, ikkinchisi OY o'qi yoki ordinatalar o'qi deb ataladi. Bularning kesishgan O nuqtasi koordinatalar boshi deyiladi. Ularning har birida musbat yo'nalishlar strelkalar bilan ko'rsatiladi.



1-chizma

Har bir o'q uchun uzunlik birligini $(|PQ| = e)$ tanlab olamiz. $M\_$ tekislikning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. Bu nuqtaning berilgan sistemadagi koordinatalari deb

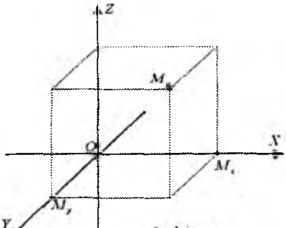
$$x = OM_x, y = OM_y \qquad (1)$$

sonlarga (1-chizma) aytiladi. M nuqta x abstsissa va y ordinataga egaligini qisqacha ko'rsatish maqsadida $M(x;y)$ yozuvdan foydalaniladi.

2.Fazodagi nuqtalarning koordinatalari. Fazoda to'q'ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasi uzunlikni o'lchovchi birlikning va biror tartibda belgilangan (ya'ni ulardan qaysi biri birinchi, ikkinchi va uchinchi ekanligi ko'rsatilgan), bir nuqtada kesishuvchi o'zaro perpendikulyar uchta o'qning berilishi bilan aniqlanadi.

O'qlarning kesishish nuqtasi koordinatalar boshi, o'qlarning o'zi esa koordinata o'qlari deb ataladi, bunda *ulardan birinchisi abstsissa* o'qi, ikkinchisi ordinata o'qi,

uchinchisi aplikata o'qi deb ataladi. Koordinatalar boshini O harfi bilan, abstsissa o'qini OX, ordinata o'qini OY, aplikata o'qini OZ harfi bilan belgilaymiz.



2-chizma

M – fazoning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin (2-chizma). Shu M nuqtaning berilgan sistemasidagi koordinatalari deb

$$x = OM_x, y = OM_y, z = OM_z \qquad (2)$$

sonlarga aytiladi.

M nuqta x abstsissaga, y ordinataga va z aplikataga egaligini qisqacha ko'rsatish uchun $M(x; y; z)$ yozuvdan foydalaniladi.

<u>*1-masala.*</u> $M(13;21), N(-9;15)$ va $P(7;-10)$ nuqtalarning ordinata o'qidagi proektsiyalarining koordinatalari topilsin.

<u>*Yechish:*</u> M, N, P nuqtalarning OY o'qdagi proektsiyalarini mos ravishda M_y, N_y va P_y bilan belgilaymiz. U holda shartga ko'ra M, N va P nuqtalar koordinatalaridan (2) formulaga ko'ra $OM_y = 21, ON_y = 15$ va $OP_y = 10$ bo'ladi.

Demak, M, N va P nuqtalarning ordinata o'qidagi proektsiyalarining koordinatalari mos ravishda $M_y(0;21), N_y(0;15)$ va $P_y(0;-10)$ ko'rinishda bo'ladi.

<u>*2-masala.*</u> $M(3;5), N(-2;4)$ va $P(6;-5)$ nuqtalar berilgan. OY o'qiga nisbatan M, N va P nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarning koordinatalari topilsin.

<u>*Yechish*</u>: OY o'qiga nisbatan M' nuqta, M nuqtaga simmetrik bo'lsin. U holda MM' kesma OY o'qiga perpendikulyar bo'lib, uning o'rtasini ifodalovchi Q nuqta OY o'qida yotadi. Shuning uchun M' nuqtaning ordinatasi M nuqtaning ordinatasi kabi bo'ladi. QM' kesmaning uzunligi QM kesmaning uzunligiga teng bo'ladi,

ya'ni:

$$|QM'| = |QM| = 3$$

QM' va kesmalarning yo'nalishlari bir-biriga qarama-qarshi bo'lganligi uchun

$$QM'' = -QM = -3$$

Demak, $M'(-3;5)$ bo'ladi.

Xuddi shunday yo'l bilan OY o'qiga nisbatan $N(-2;4)$ va $P(6;-5)$ nuqtalarga simmetrik bo'lgan N' va P' nuqtalarning koordinatalari $N'(2;4)$ va $P'(-6;-5)$ bo'lishiga ishonch hosil qilish qiyin emas.

<u>*3-masala.*</u> Koordinatalari ushbu

1) $xy > 0$

2) $4x - 5y < 0$

3) $2x + 3y = 0$

shartlarni qanoatlantiruvchi $M(x;y)$ nuqtaning qaysi choraklarda joylashishini aniqlang.

<u>*Yechish:*</u> 1) $M(x;y)$ nuqtaning koordinatalari $xy > 0$ tengsizlikni qanoatlantirsin. Bu tengsizlik quyidagicha

$a) \left.\begin{matrix} x > 0 \\ y > 0 \end{matrix}\right\}$ va $b) \left.\begin{matrix} x < 0 \\ y < 0 \end{matrix}\right\}$ tengsizliklarga ekvivalent.

Bu tengsizliklardan: ***a)*** xolatda $M(x;y)$ nuqta I chorakda va ***b)*** xolatda III chorakda yotadi degan xulosa kelib chiqadi.

2) $M(x;y)$ nuqtaning koordinatalari $4x - 5y < 0$ tengsizlikni qanoatlantirsin. Bu tengsizlik $x > 0, y < 0$ bo'lganda, ya'ni $M(x;y)$ nuqta IV chorakda joylashganda bajarilmaydi.

Demak, $4x - 5y < 0$ tengsizlik bajarilganda $M(x;y)$ nuqta I,II,III choraklarda joylashishi mumkin.

3) $M(x;y)$ nuqtaning koordinatalari $2x + 3y = 0$ tenglikni qanoatlantirsin. Bu tenglik faqat uch xolda:

$$a)\ x < 0, y > 0; \quad b)\ x > 0, y < 0; \quad c)\ x = 0, y = 0;$$

bajariladi. Bu xolatlardan, $2x+3y=0$ tenglik bajarilganda, $M(x;y)$ nuqta II yoki IV choraklarda yotadi degan xulosa kelib chiqadi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

<u>*1-masala:*</u> $A(7;2), B(-3;9), C(11;-2)$ nuqtalarning abstsissa o'qidagi proektsiyalarining koordinatalarini toping.

<u>*2-masala:*</u> $M(7;5;10)$ nuqtaning: $a)$ OXY tekisligiga; $b)$ OXZ tekisligiga; $c)$ OYZ tekisligiga; $d)$ abstsissa o'qiga; $e)$ ordinata o'qiga; $f)$ aplikata o'qiga proektsiyasini toping.

<u>*3-masala:*</u> $M(3;-4;1)$ nuqta berilgan: $a)$ OXY, OYZ, OXZ tekisliklariga; $b)$ abstsissa, ordinata, aplikata o'qlariga; $c)$ koordinata boshiga nisbatan M nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqtalar topilsin.

<u>*4-masala:*</u> $A(5;4), B(-4;2)$ va $C(6;-3)$ nuqtalar berilgan: OX o'qiga nisbatan A, B, C nuqtalarga simmetrik bo'lgan nuqtalarning koordinatalari topilsin.

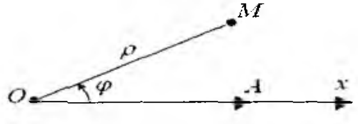
<u>*5-masala:*</u> Koordinata boshiga nisbatan $A(2;4)$ nuqtaga simmetrik bo'lgan nuqta topilsin.

3-§. Qutb koordinatalar sistemasi.

Biz yuqorida nuqtaning vaziyatini aniqlash uchun to'g'ri burchakli Dekart koordinatalari sistemasidan foydalanib keldik. Bu sistemadan tashqari yana bir necha koordinata sistemalari ham mavjud.

<u>*Masalan:*</u> Qiyshiq burchakli Dekart koordinatalari sistemasi, qutb koordinatalar sistemasi, silindrik va sferik koordinatalar sistemasi. Bu koordinatalar sistemasi matematik analiz, mexanika va texnikada juda ko'p ishlatiladi. Bu sistemalardan qutb koordinatalar sistemasi ko'p masalalarni yechishda ancha qulaylik beradi.

Bu sistema yordamida tekislikdagi nuqtaning vaziyatini aniqlash uchun qutb deb ataluvchi O nuqta, shu nuqtadan chiquvchi qutb o'qi deb ataluvchi OA nur, uzunlikni o'lchash uchun masshtabning berilishi bilan aniqlanadi. Bundan tashqari qutb sistemasining berilishida O nuqta atrofida qanday burilishlar musbat hisoblanishi ham berilishi kerak. Odatda "soat strelkasi" yo'nalishiga teskari bo'lgan burilishlar musbat hisoblanadi.



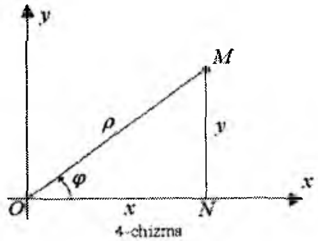
3-chizma

Qutb koordinatalar sistemasida tekislikdagi har qanday M nuqtaning vaziyati shu nuqta bilan qutb boshi O nuqta orasidagi $OM = \rho$ masofa va OM bilan qutb o'qi OA nur orasidagi $\angle AOM = \varphi$ burchak bilan aniqlanadi.

$\rho = OM$ ni M nuqtaning qutb radiusi, φ burchak esa M nuqtaning qutb burchagi deyiladi. Burchakni ishorasini hisobga olib $\pm 2\pi k$ ko'rinishdagi qo'shiluvchilargacha aniqlikda olish mumkin. Shunday qilib M nuqtaning qutb koordinatalari $M(\rho;\varphi)$ ko'rinishda yoziladi.

M nuqtaning qutb burchagi qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari orasidan $-\pi < \varphi \le \pi$ tengsizlikni qanoatlantiradigan aniq qiymat ajratiladi va bu qiymatni biz bosh qiymat deb ataymiz. Agar qutb koordinatalar ρ va φ lar $-\infty$ dan $+\infty$ gacha o'zgaradigan bo'lsa, qutb koordinatalar sistemasi umumlashgan qutb koordinatalar sistemasi deyiladi.

Endi biror nuqtaning qutb koordinatalari ma'lum, uning Dekart koordinatalari hisoblansin va aksincha, nuqtaning Dekart koordinatalari ma'lum, uning qutb koordinatalari hisoblansin degan masalani ko'rib chiqaylik.



4-chizma

Aytaylik, qutb koordinatalar sistemasining qutbi to'g'ri burchakli Dekart koordinatalar sistemasining boshi bilan, qutb o'qi esa abstsissalarning musbat yarmi bilan ustma-ust tushsin (4-chizma). M tekislikning ixtiyoriy nuqtasi, $(x;y)$-

uning Dekart koordinatalari, $(\rho;\varphi)$-qutb koordinatalari bo'lsin. Bu koordinatalar orasida

$$\left.\begin{array}{l} x = \rho\cos\varphi \\ y = \rho\sin\varphi \end{array}\right\} \qquad (1)$$

munosabat mavjud. Bu formulalarga asosan:

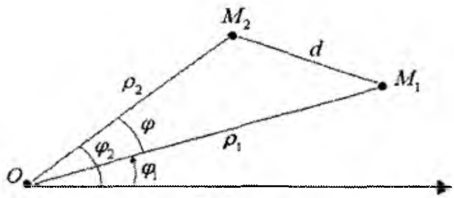
$$x^2 + y^2 = \rho^2 \qquad (2)$$

$$\varphi = arctg\frac{y}{x} \qquad (3)$$

munosabatlarni yozish mumkin.

<u>*1-masala.*</u> Qutb koordinatalar sistemasida $M_1(\rho_1;\varphi_1)$ va $M_2(\rho_2;\varphi_2)$ nuqtalar orasidagi d masofa topilsin.

<u>*Yechish:*</u>



5-chizma

Kosinuslar teoremasiga asosan:

$d^2 = OM_1^2 + OM_2^2 - 2OM_1 \cdot OM_2 \cdot \cos\varphi$ bunda $\varphi = \varphi_2 - \varphi$

$d^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ yoki

$$d = \sqrt{\rho_1^2 + \rho_2^2 - 2\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \qquad (4)$$

bo'ladi.

<u>*2-masala.*</u> 1-masala chizmasi bo'yicha OM_1M_2 uchburchakning yuzi topilsin.

<u>*Yechish:*</u> Bu uchburchakning yuzi quyidagi formula bilan hisoblanadi.

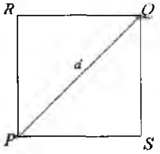
$$S = \frac{1}{2}\rho_1 \cdot \rho_2 \cdot \sin(\varphi_2 - \varphi_1) \qquad (5)$$

Bu formulani $S = \frac{1}{2}OM_1 \cdot OM_2 \cdot \sin\varphi$ formulaga asoslanib yozdik.

<u>*3-masala.*</u> Kvadratning ikkita qarama-qarshi uchining koordinatalari

$P\left(8;-\frac{5\pi}{12}\right)$ va $Q\left(6;\frac{\pi}{4}\right)$ berilgan. Kvadratning yuzi topilsin.

Yechish:



6-chizma

$PRQS$ kvadratning yuzi

$$S=\frac{1}{2}d^2=\frac{1}{2}PQ^2$$

formula orqali ifoda qilinadi. PQ diagonalning uzunligini hisoblashda (4) formuladan foydalanamiz:

$\rho_1=8,\ \rho_2=6,\ \varphi_1=-\frac{5\pi}{12},\ \varphi_2=\frac{\pi}{4}$ bo'lib

$d^2=8^2+6^2-\frac{1}{2}\cdot 8\cdot 6\cdot\cos\frac{2\pi}{3}$ yoki

$S=\frac{1}{2}\left(100-24\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\cdot 88=44,$ $\qquad S=44$ kv.birlik

Mustaqil yechish uchun masalalar

<u>*1-masala:*</u> Qutb koordinatalar sistemasida $ABCD$ parallelogrammning $A\left(4;-\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(6;\frac{\pi}{6}\right)$ uchlari berilgan. Parallelogramm diagonallarining kesishish nuqtasi qutb koordinatasi bilan mos tushadi. Parallelogrammning qolgan ikki uchi topilsin.

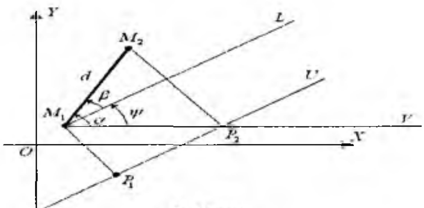
<u>*2-masala:*</u> Qutb koordinatalar sistemasida $M_1\left(8;\frac{7\pi}{12}\right)$ va $M_2\left(8;-\frac{\pi}{12}\right)$ nuqtalar berilgan. M_1 va M_2 nuqtalarni birlashtiruvchi kesma o'rtasining qutb koordinatalari topilsin.

<u>*3-masala:*</u> Uchlari $A\left(4;\frac{\pi}{4}\right)$, $B\left(4;\frac{5\pi}{12}\right)$ va $C\left(5;\frac{11\pi}{12}\right)$ qutb koordinatalar sistemasida berilgan ABC uchburchakning yuzi topilsin.

4-§. Kesmaning ixtiyoriy o'qdagi proektsiyasi. Kesmaning koordinata o'qdagi proektsiyasi. Kesmaning uzunligi va qutb burchagi. Ikki nuqta orasidagi masofa.

Faraz qilaylik MM_1 kesma va bironta U o'q berilgan bo'lsin (7-chizma). M_1 va M_2 nuqtalardan U o'qqa perpendikulyarlar tushuramiz va bu perpendikulyarlarning asoslarini mos ravishda P_1 va P_2 bilan belgilaymiz. P_1P_2 kesmaning miqdori berilgan M_1M_2 kesmaning U o'qqa proektsiyasi deb ataladi va bu $Пр_U M_1M_2 = P_1P_2$ ko'rinishda yoziladi.

Ixtiyoriy kesmaning OX o'qiga proektsiyasi X va OY o'qqa proektsiyasi Y bilan belgilanib, M_1M_2 kesmaning koordinata o'qlariga proektsiyalari mos ravishda $X = x_2 - x_1$, $Y = y_2 - y_1$ bo'ladi. $M_1(x_1; y_1)$ va $M_2(x_2; y_2)$ nuqtalar orasidagi masofa esa $d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ formula bilan aniqlanadi.



7-chizma

Endi M_1M_2 kesmaning M_1 nuqtasidan OX o'qiga parallel va uning yo'nalishi bo'yicha yo'nalgan V nurni o'tkazamiz. V nurni M_1M_2 nur bilan hosil qilgan burchakni α bilan belgilaymiz. Bu α burchakka M_1M_2 kesmaning berilgan koordinata o'qiga nisbatan qutb burchagi deyiladi. U holda M_1M_2 kesmaning koordinata o'qiga proektsiyasi:

$X = d \cdot \cos\alpha$, $Y = d \cdot \sin\alpha$ bo'ladi. Bu yerda $d = M_1M_2$ kesmaning uzunligi. Bu formulalardan:

$$d = \sqrt{X^2 + Y^2}, \quad \cos\alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2}}, \quad \sin\alpha = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2}}$$

Aytaylik L ixtiyoriy o'q bo'lsin. U holda M_1M_2 kesmaning L o'qiga o'qish burchagini β desak.

$\Pi p_L M_1M_2 = d\cdot\cos\beta$ bo'ladi.

Fazoda ikki $M_1(x_1;y_1;z_1)$ va $M_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar orasidagi d masofa

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

formula bilan aniqlanadi.

1-masala. 7-chizmada $M_1(2;1)$ va $M_2(8;9)$ bo'lsin. $\alpha=\frac{\pi}{6}$ bo'lsa, M_1M_2 kesmaning OX o'qiga proektsiyasi topilsin.

Yechish: M_1M_2 kesmaning uzunligi

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{36+64}=10 \qquad \text{bo'lib,}$$

$$\Pi p_{OX} M_1M_2 = d\cdot\cos\alpha = 10\cdot\cos\frac{\pi}{6}=10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$$

Demak, $\Pi p_{OX} M_1M_2 = 5\sqrt{3}$ bo'ladi.

2-masala. Uchburchakning tomonlari a,b,c bo'lsin. Agar: ***a)*** $a^2+b^2>c^2$ bo'lsa, c tomon qarshisidagi burchakning o'tkir burchak ekanligi; ***b)*** $a^2+b^2<c^2$ bo'lsa, c tomon qarshisida yotgan burchakning o'tmas burchak ekanligini isbotlang.

Isboti: Haqiqatdan ham kosinuslar teoremasiga asosan: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$ bundan $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$ bo'ladi.

Demak: ***a)*** agar $a^2+b^2>c^2$ bo'lsa, $a^2+b^2-c^2>0$ va $\cos C>0$ bo'lib, $0°<C<90°$, ya'ni C o'tkir burchak bo'ladi. ***b)*** agar $a^2+b^2<c^2$ bo'lsa, $a^2+b^2-c^2<0$ va $\cos C<0$ bo'lib, $90°<C<180°$, ya'ni C o'tmas burchak bo'ladi.

3-masala. Uchlari $A(7;-2)$, $B(-3;2)$ va $C(1;-8)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning ichki burchaklari ichida o'tmas burchagi bormi?

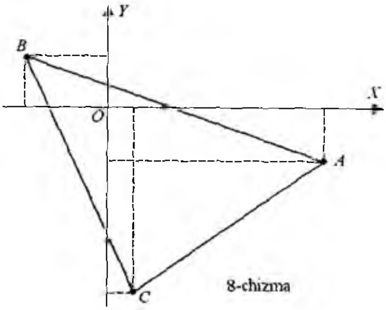
Yechish:

Avvalo uchburchak tomonlarining uzunliklarini hisoblaymiz.

$$|AB|=\sqrt{(-3-7)^2+(2+2)^2}=\sqrt{100+16}=\sqrt{4\cdot 29}=2\sqrt{29}$$

$$|BC|=\sqrt{(1+3)^2+(-8-2)^2}=\sqrt{16+100}=\sqrt{4\cdot 29}=2\sqrt{29}$$

$$|AC|=\sqrt{(1-7)^2+(-8+2)^2}=\sqrt{36+36}=\sqrt{2\cdot 36}=6\sqrt{2}$$



8-chizma

bundan ko'rinadiki ∇ABC teng yonli bo'lib, $\angle BAC = \angle BCA$ bo'ladi. Shu bilan birga $\angle BAC$ va $\angle BCA$ lar o'tkir burchak bo'ladi. ∇ABC tomonlari uzunliklari uchun $|AC|^2 < |AB|^2 + |BC|^2$ tengsizlik o'rinli, bundan esa 2-masalaning isbotiga asosan $\angle ABC$ ning o'tkir burchakligi kelib chiqadi. Demak, ∇ABC ning ichki burchaklari ichida o'tmas burchak yo'q ekan.

4-masala. Abstsissa o'qida shunday nuqta topilsinki, undan $A(2;4;3)$ nuqtagacha bo'lgan masofa 13 ga teng bo'lsin.

Yechish: Izlanuvchi B nuqta abstsissa o'qida yotganligi uchun uning koordinatalari $B(x;0;0)$ ga teng. Shartga ko'ra $|BA| = 13$ bo'lganligi uchun $\sqrt{(x-2)^2 + (4-0)^2 + (3-0)^2} = 13$ yoki $(x-2)^2 + 16 + 9 = 169 \Rightarrow x - 2 = \pm 12$ dan $x_1 = 14, x_2 = -10$ bo'lib, masalaning shartini ikki nuqta $B_1(14;0;0)$ va $B_2(-10;0;0)$ nuqtalar qanoatlantiradi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala: Uchlari $A_1(2;-5;3)$, $A_2(0;-9;6)$ va $A_3(4;-3;7)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning to'g'ri burchakli ekanligini isbotlang.

2-masala: Parallelgrammning uchta uchlari $A(8;-4), B(8;3), C(-4;5)$ berilgan bo'lib, to'rtinchisi D esa B ga qarama-qarshi joylashgan. Parallelogramm diagonallarining uzunliklari topilsin.

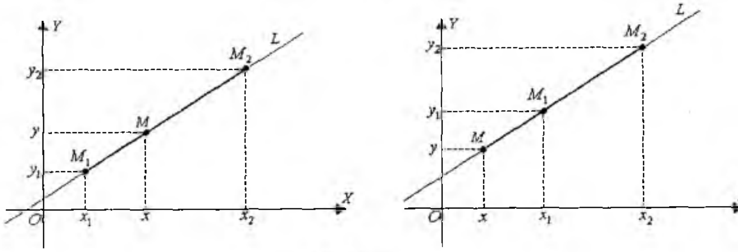
3-masala: Uchburchakning uchlari $A(5;2), B(7;6)$ va $C(-2;9)$ berilgan. Bu uchburchakka tashqi chizilgan aylananing markazi O va radiusi R topilsin.

4-masala: Ordinata o'qida $A(-2;5;3)$ va $B(3;1;4)$ nuqtalardan bir xil uzoqlikda yotgan nuqta topilsin.

5-masala: $M_1(4;2), M_2(14;3)$ nuqtalar berilgan. M_1M_2 kesmaning $A(-2;3)$ va $B(10;8)$ nuqtalardan o'tuvchi va yo'nalishi AB kesmaning yo'nalishiga mos tushgan L o'qqa proektsiyasi topilsin.

5-§. Kesmalarni berilgan nisbatda bo'lish.

To'g'ri burchakli Dekart koordinatalari tekisligida ixtiyoriy ikkita $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin. Bu nuqtalar orqali to'g'ri chiziq o'tkazib, unda musbat yo'nalishni aniqlasak, o'q hosil bo'ladi. Bu o'qda M_1 va M_2 nuqtalar bilan ustma-ust tushmaydigan uchinchi $M(x;y)$ nuqta olamiz (9-chizma).



9-chizma

Agar M_1M kesma algebraik miqdorini MM_2 kesma algebraik miqdoriga nisbati $\lambda(\lambda \neq -1 son)$ga teng bo'lsa, u holda M nuqta M_1M_2 kesmani λ nisbatda bo'ladi deyiladi. Bunda M nuqta har qanday joylashgan bo'lsa ham bu nuqtaning koordinatalari

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} \qquad (1)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

Agar M nuqta M_1 va M_2 nuqtalar orasida yotsa, λ musbat son, M nuqta M_1M_2 kesmaning tashqarisida yotsa λ manfiy son bo'ladi.

Agar $M_1M = MM_2$ bo'lsa, M nuqta M_1M_2 kesmani teng ikkita bo'ladi. Bu holda $\lambda = 1$ bo'lib, (1) formula

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\ y = \frac{y_1 + y_2}{2} \qquad (2)$$

ko'rinishni oladi.

Agar M_1M_2 kesma fazoda berilgan bo'lsa, u holda M nuqtaning koordinatalari:

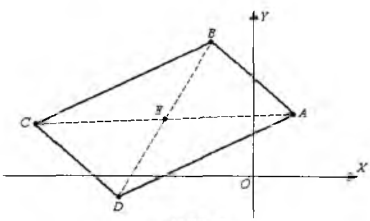
$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda},\ y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} \qquad (3)$$

formulalar bilan topiladi.

Shunday qilib $(1)-(3)$ formulalar kesmani berilgan nisbatda bo'lish formulalari hisoblanadi.

<u>*1-masala.*</u> Parallelogrammning ikkita qo'shni $A(3;4), B(-1;8)$ uchlari va uning diagonallari kesishish nuqtasi $E(-5;3)$ berilgan. Parallelogrammning qolgan ikkita uchlarining koordinatalari topilsin (10-chizma).

<u>*Yechish:*</u>



10-chizma

Parallelogrammning izlanuvchi uchlarini $C(x_c; y_c)$ va $D(x_D; y_D)$ bilan belgilaymiz (10-chizma). Parallelogrammning diagonallari kesishish nuqtasi E da teng ikkiga bo'linadi, shuning uchun (2) formulaga binoan

$$X_E = \frac{X_A + X_C}{2},\ Y_E = \frac{Y_A + Y_C}{2} \qquad \text{va}$$

$$X_E = \frac{X_B + X_D}{2},\ Y_E = \frac{Y_B + Y_D}{2} \qquad \text{bo'lib, bu}$$

tengliklardan:

$$X_C = 2X_E - X_A = 2\cdot(-5) - 3 = -13$$

$$Y_C = 2Y_E - Y_A = 2\cdot 3 - 4 = 2$$

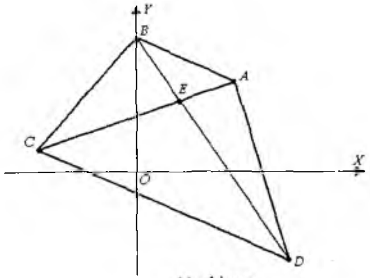
$$X_D = 2X_E - X_B = 2\cdot(-5) - (-1) = -9$$

$$Y_D = 2Y_E - Y_B = 2 \cdot 3 - 8 = -2$$

Demak, parallelogrammning izlanuvchi uchlari koordinatalari $C(-13;2)$ va $D(-9;-2)$ bo'ladi.

<u>*2-masala.*</u> To'rtburchakning uchlari $A(7;7), B(0;11), C(-5;1), D(8;-5)$ berilgan. Uning AC va BD diagonallarining kesishish nuqtasi topilsin.

<u>*Yechish:*</u> AC va BD diagonallarining kesishish nuqtasini $E(x_E;y_E)$ deb belgilaymiz (11-chizma).



11-chizma

E nuqta AC va BD kesmalarni mos ravishda $\lambda = \dfrac{AE}{EC}$ va $\lambda_1 = \dfrac{BE}{ED}$ nisbatlarda bo'ladi.

E nuqta bu kesmalarning ichki nuqtasi bo'ldagi uchun $\lambda > 0, \lambda_1 > 0$ bo'ladi. U holda E nuqtaning koordinatalari uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

$$\left.\begin{aligned} X_E &= \frac{X_A + \lambda X_C}{1+\lambda} = \frac{7-5\lambda}{1+\lambda}, \quad Y_E = \frac{Y_A + \lambda Y_C}{1+\lambda} = \frac{7+\lambda}{1+\lambda} \\ X_E &= \frac{X_B + \lambda_1 X_D}{1+\lambda_1} = \frac{8\lambda_1}{1+\lambda_1}, \quad Y_E = \frac{Y_B + \lambda_1 Y_D}{1+\lambda_1} = \frac{11-5\lambda_1}{1+\lambda_1} \end{aligned}\right\}$$

Bu tengliklardan:

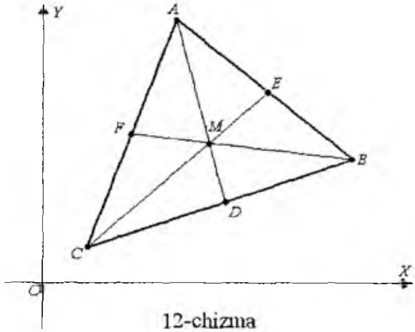
$$\left.\begin{aligned} \frac{7-5\lambda}{1+\lambda} &= \frac{8\lambda_1}{1+\lambda_1} \\ \frac{7+\lambda}{1+\lambda} &= \frac{11-5\lambda_1}{1+\lambda_1} \end{aligned}\right\} \quad \text{yoki}$$

$\left.\begin{aligned} 13\lambda\lambda_1 + \lambda_1 + 5\lambda - 7 = 0 \\ 3\lambda\lambda_1 + 6\lambda_1 - 5\lambda - 2 = 0 \end{aligned}\right\}$ sistemaga ega bo'lamiz. Bu sistemadan $\lambda_1$ni yo'qotish bilan λni topish uchun $2\lambda^2 + \lambda - 1 = 0$ tenglamaga ega bo'lamiz va bu tenglamani yechish natijasida $\lambda = \dfrac{1}{2}$ va $\lambda = -1$ topiladi. Shartga ko'ra $\lambda > 0$dan masala shartini

$\lambda = \frac{1}{2}$ qanoatlantiradi. λ ning bu qiymatini o'rniga qo'yib, $X_E = 3$ va $Y_E = 5$ yoki ni hosil qilamiz.

3-masala. Uchburchak shaklidagi bir jinsli plastinka uchlarining koordinatalari $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, $C(x_3; y_3)$, berilgan. shu uchburchak og'irlik markazining koordinatalari topilsin.

Yechish: mexanikadan ma'lumki, uchburchakning og'irlik markazi uning medianalari kesishgan nuqtasida bo'ladi (12-chizma).



12-chizma

Uchburchak medianalari AD, BF, CE ning kesishgan nuqtasini M bilan belgilaymiz.

Demak, M nuqtaning koordinatalari $(x_M; y_M)$ni topish kerak bo'ladi. buning uchun avvalo D nuqtaning koordinatalarini topamiz. D nuqta CB kesmaning o'rtasi bo'lgani uchun

$$x_D = \frac{x_C + x_B}{2} = \frac{x_3 + x_2}{2}; \ y_D = \frac{y_C + y_B}{2} = \frac{y_3 + y_2}{2} \quad \text{bo'ladi.}$$

Ma'lumki, uchburchak medianalari kesishish nuqtasi ularning har birini uchidan boshlab $2:1$ nisbatda bo'ladi. Shuning uchun $\lambda = \frac{AM}{AD} = \frac{2}{1} = 2$ tenglik o'rinli bo'ladi.

M nuqta AD kesmini $\lambda = 2$ nisbatda bo'lgani uchun uning koordinatalari

$$x_M = \frac{x_A + \lambda x_D}{1+\lambda} = \frac{x_1 + 2 \cdot \frac{x_3 + x_2}{2}}{1+2} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad \text{va}$$

$$y_M = \frac{y_A + \lambda y_D}{1+\lambda} = \frac{y_1 + 2\cdot\frac{y_3 + y_2}{2}}{1+2} = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3} \quad \text{bo'ladi.}$$

Shunday qilib, uchburchak shaklidagi ABC plastinka og'irlik markazining koordinatalari

$$M\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}; \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right) \text{bo'lar ekan.}$$

4-masala. Ikkita $A(-1;1)$ va $B(3;-6)$ nuqtalar berilgan:

a) B nuqtaga nisbatan A nuqtaga simmetrik bo'lgan M nuqtaning koordinatalari topilsin.

b) A nuqtaga nisbatan B nuqtaga simmetrik bo'lgan N nuqtaning koordinatalari topilsin.

Yechish: ***a)*** M nuqtaning koordinatalari $M(x_M; y_M)$ bo'lsin. M nuqta B nuqtaga nisbatan A nuqtaga simmetrik bo'lgani uchun B nuqta AM kesmaning o'rtasi bo'ladi. Shuning uchun

$$x_B = \frac{x_M + x_A}{2},\ y_B = \frac{y_M + y_A}{2} \quad \text{bo'lib, bundan}$$

$$x_M = 2x_B - x_A,\ y_M = 2y_B - y_A \quad \text{bo'ladi. U holda}$$

$$x_M = 2\cdot 3 - (-1) = 7,\ y_M = 2\cdot(-6) - (-1) = -11 \quad \text{dan}$$

M nuqtaning koordinatalari $M(7;-11)$ bo'ladi.

b) N nuqtaning koordinatalari $N(x_N; y_N)$ bo'lsin. N nuqta A nuqtaga nisbatan B nuqtaga simmetrik bo'lgani uchun A nuqta NB kesmaning o'rtasi bo'ladi, u holda

$$x_A = \frac{x_N + x_B}{2},\ y_A = \frac{y_N + y_B}{2} \quad \text{bo'lib, bundan}$$

$$x_N = 2x_A - x_B,\ y_N = 2y_A - y_B \quad \text{bo'ladi. U holda}$$

$$x_N = 2\cdot(-1) - 3 = -5,\ y_N = 2\cdot(-1) - (-6) = 4 \quad \text{dan}$$

N nuqtaning koordinatalari $N(-5;4)$ bo'ladi.

5-masala. $P(3;6)$ va $Q(1;4)$ nuqtalar bilan teng uchga bo'lingan kesmaning uchlari A va B larning koordinatalarini toping.

Yechish:

Shakldan va yuqoridagi muloxazalardan

$$x_P=\frac{x_A+x_Q}{2} \quad \text{va} \quad y_P=\frac{y_A+y_Q}{2} \quad \text{dan}$$

$$x_A=2x_P-x_Q \quad \text{va} \quad y_A=2y_P-y_Q \quad \text{bo'lib,}$$

$$x_A=2\cdot 3-1=5 \quad \text{va} \quad y_A=2\cdot 6-4=8 \quad \text{dan}$$

A nuqtaning koordinatalari $A(5;8)$ bo'ladi.

Xuddi shuningdek,

$$x_B=2x_Q-x_P \quad \text{va} \quad y_B=2y_Q-y_P \quad \text{bo'lib,}$$

$$x_B=2\cdot 1-3=-1 \quad \text{va} \quad y_B=2\cdot 4-6=2 \Rightarrow B(-1;2) \quad \text{bo'ladi.}$$

<u>*6-masala.*</u> To'g'ri chiziq $M_1(5;8)$ va $M_2(9;14)$ nuqtalardan o'tadi. Bu to'g'ri chiziqda abstsissasi -3 ga teng bo'lgan nuqta topilsin.

Yechish:

Izlanuvchi M nuqtaning koordinatalari $M(-3;y)$ bo'lsin. Shakldan, $M(-3;y)$ nuqta M_1M_2 kesmani $\lambda=\dfrac{M_1M}{MM_2}$ nisbatda bo'ladi. Shuning uchun

$$x_M=\frac{x_{M_1}+\lambda\cdot x_{M_2}}{1+\lambda}=\frac{5+9\lambda}{1+\lambda} \quad \text{va} \quad y_M=\frac{y_{M_1}+\lambda\cdot y_{M_2}}{1+\lambda}=\frac{8+14\lambda}{1+\lambda}$$

$$\text{bundan} \quad -3(1+\lambda)=5+9\lambda \quad \text{va} \quad \lambda=-\frac{2}{3} \quad \text{bo'ladi.}$$

$$\text{Demak,} \quad y=\frac{8+14\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)}=\frac{24-28}{3-2}=-4 \quad \text{bo'lib,}$$

M nuqtaning koordinatalari $M(-3;-4)$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

<u>*1-masala:*</u> $A(-2;6)$ va $B(4;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqda ordinatasi 9 ga teng bo'lgan nuqta topilsin.

<u>*2-masala:*</u> Uchlari $A(5;-3;8)$, $B(3;-2;5)$, $C(-1;4;-3)$ nuqtalarda bo'lgan

uchburchak berilgan. Uning A uchidan o'tkazilgan mediananing uzunligini hisoblang.

3-masala: $M(3;6)$, $N(6;5)$ va $P(5;4)$ nuqtalar uchburchak tomonlarining o'rtalari bo'lsa, uchburchakning uchlari topilsin.

4-masala: Uchlari $A(2;1)$ va $B(8;13)$ nuqtalarda bo'lgan kesma uchta teng bo'lakka bo'lingan. Bo'linish nuqtalarining koordinatalari topilsin.

5-masala: To'g'ri chiziq $A(2;-3)$ va $B(6;3)$ nuqtalardan o'tadi. Bu to'g'ri chiziqning abstsissa o'qi bilan kesishish nuqtasi topilsin.

6-masala: Parallelogrammning uchta $A(1;4)$, $B(-3;1)$ va $C(3;-5)$ uchlari berilgan. Uning B uchiga qarama-qarshi to'rtinchi D uchi topilsin.

Ikkinchi bob.
Vektorlar algebrasi.

1-§. Vektor tushunchasi. Vektorlarning o'qdagi proektsiyasi.

O'zining son qiymati va yo'nalishi bilan berilgan miqdorlar vektorlar deyiladi. Vektorlarni belgilashda ustiga chiziqcha qo'yilgan lotin harflaridan foydalaniladi: $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \ldots$. Agar vektor kesma bilan tasvirlangan bo'lib, A uning boshi B uning keyingi uchi bo'lsa, u $\overline{AB}$ simvol bilan belgilanadi. Vektorning absolyut qiymati (yoki uzunligi) moduli deb shu vektorni tasvirlovchi kesma uzunligiga aytiladi. $\bar{a}$ vektorning absolyut qiymati $|\bar{a}|$ bilan, $\overline{AB}$ vektorning absolyut qiymati $|\overline{AB}|$ bilan belgilanadi. Vektorning boshi bilan oxiri ustma-ust tushsa, u holda bu vektorga nol vektor deyiladi. Noldan farqli ikkita vektor bir to'qri chiziqda yoki parallel to'qri chiziqda yotsa, bunday vektorlar kolleniar vektorlar deyiladi. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning kolleniarligi $\bar{a} \parallel \bar{b}$ ko'rinishda belgilanadi.

Uzunliklari teng, kolleniar va bir xil yo'nalishli ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar teng vektorlar deyiladi va $\bar{a} = \bar{b}$ ko'rinishda belgilanadi. Bir tekislikka parallel bo'lgan yoki shu tekislikda yotuvchi vektorlar komplanar vektorlar deyiladi.

$\overline{AB}$ vektorning L o'qdagi proektsiyasi deb, uning boshi A uchi B bo'lgan nuqtalarning shu o'qqa tushirilgan A_1, B_1 proektsiyalarini tutashtiruvchi A_1B_1 kesmaning "+" yoki "-" ishora bilan olingan uzunligiga aytilib $\Pi p_L \overline{AB} = A_1B_1$ bilan belgilanadi.

$\bar{a}$ vektorning L o'qqa proektsiyasi uning moduli bilan vektorning shu o'qqa og'ish burchagining kosinusiga ko'raytmasiga teng, ya'ni:

$$\Pi p_L \bar{a} = |\bar{a}| \cdot \cos\varphi \qquad (1)$$

Ixtiyoriy $\bar{a}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proektsiyasini X, Y, Z bilan belgilaymiz va koordinatalari X, Y, Z bo'lgan vektorni $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$ deb yozamiz.

Ikkita $A(x_1, y_1, z_1)$ va $B(x_2, y_2, z_2)$ nuqta qanday bo'lmasin $\overline{AB}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari

$$X = x_2 - x_1,\ Y = y_2 - y_1,\ Z = z_2 - z_1 \qquad (2)$$

formulalar bilan aniqlanadi.

$\bar{a}$ vektorning moduli uning X, Y, Z koordinatalari orqali quyidagi

$$|\bar{a}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} \qquad (3)$$

formula bilan topiladi.

Agar $\bar{a}$ vektor koordigata o'qlari bilan mos ravishda α, β, γ burchaklarni tashkil etsa, u holda $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ lar $\bar{a}$ vektorning yo'naltirilgan kosinuslari deyiladi.

$\bar{a} = \{X, Y, Z\}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari

$$X = |\bar{a}| \cdot \cos\alpha,\ Y = |\bar{a}| \cdot \cos\beta,\ Z = |\bar{a}| \cdot \cos\gamma \qquad (4)$$

bo'ladi.

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning yig'indisi deb, istalgan A nuqtaga $\bar{a}$ vektorni qo'yib, uning oxiri B ga $\bar{b}$ vektorni qo'yganda boshi $\bar{a}$ vektorning boshi A da, oxiri $\bar{b}$ vektorning oxiri C da bo'lgan $\overline{AC}$ vektorga aytiladi. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning yig'indisi $\bar{a} + \bar{b}$ shaklda yoziladi. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning ayirmasi deb, $\bar{a}$ vektor bilan $\bar{b}$ vektorga qarama-qarshi $-\bar{b}$ vektorning yig'indisiga aytiladi. $\bar{a}$ vektorning K songa ko'paytmasi deb, shunday $\bar{b}$ vektorga aytiladiki, $K > 0$ bo'lganda $\bar{b}$ ning yo'nalishi $\bar{a}$ ning yo'nalishi bilan bir xil, $K < 0$ da $\bar{b}$ ning yo'nalishi $\bar{a}$ ning yo'nalishiga teskari bo'lib, $\bar{b}$ vektorning uzunligi esa $\bar{a}$ ning uzunligi bilan K son modulining ko'paytmasiga teng. $\bar{a}$ ning K songa ko'paytmasi $\bar{b} = K \cdot \bar{a}$ shaklda yoziladi.

Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan.

$$\bar{a} = \{X_1, Y_1, Z_1\},\ \bar{b} = \{X_2, Y_2, Z_2\}$$

bo'lsa, u holda

$$\bar{a} + \bar{b} = \{X_1 + X_2, Y_1 + Y_2, Z_1 + Z_2\}$$

$$\bar{a} - \bar{b} = \{X_1 - X_2, Y_1 - Y_2, Z_1 - Z_2\}$$

bo'ladi.

Agar $\bar{a} = \{X, Y, Z\}$ bo'lsa, har qanday k son uchun $k\bar{a} = \{kX, kY, kZ\}$ bo'ladi.

Ikki $\bar{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\}$ va $\bar{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$ vektorning kollenarlik sharti quyidagicha bo'ladi:

$$\frac{X_2}{X_1}=\frac{Y_2}{Y_1}=\frac{Z_2}{Z_1} \qquad (5)$$

$\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ vektorlar uchligi koordinata bazislari deyiladi, agarda ular quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1) $\bar{i}$ vektor OX o'qda, $\bar{j}$ vektor OY o'qda, $\bar{k}$ vektor OZ o'qda yotadi;

2) $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ vektorlardan har biri o'z o'qida musbat tomonga yo'nalgan;

3) $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ vektorlar birlik vektorlardir, ya'ni $|\bar{i}|=1,\ |\bar{j}|=1,\ |\bar{k}|=1.$

$\bar{a}$ vektor qanday yo'nalishda bo'lishidan qat'iy nazar $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ bazislar bo'yicha

$$\bar{a}=X\cdot\bar{i}+Y\cdot\bar{j}+Z\cdot\bar{k} \qquad (6)$$

shaklida yoyiladi.

1-masala. Vektorning $X=5, Z=-6$ koordinatalari berilgan. $|\bar{a}|=8$ Shartda uning Y koordinatasi topilsin.

Yechish: (3) formulaga binoan:

$$Y=\pm\sqrt{|\bar{a}|^2-X^2-Z^2}=\pm\sqrt{64-25-36}=\pm\sqrt{3}$$

Demak, $Y=\pm\sqrt{3}$ bo'ladi.

2-masala. $\bar{a}$ vektorning $|\bar{a}|=10,\ \alpha=120°,\ \beta=135°,\ \gamma=60°$ elementlari berilgan. $\bar{a}$ vektorning koordinata o'qlaridagi proektsiyalari topilsin.

Yechish:

$$X=|\bar{a}|\cdot\cos\alpha=10\cdot\cos120°=10\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-5$$

$$Y=|\bar{a}|\cdot\cos\beta=10\cdot\cos135°=10\cdot\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=-5\sqrt{2}$$

$$Z=|\bar{a}|\cdot\cos\gamma=10\cdot\cos60°=10\cdot\frac{1}{2}=5$$

Demak, $\bar{a}=\{-5;-5\sqrt{2};-5\}$ bo'ladi.

3-masala. $\bar{a}$ vektori $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ bazislar bo'yicha yoyilgan: $\bar{a}=-12\bar{i}+3\bar{j}-4\bar{k}$. $\bar{a}$ vektoriga parallel va unga qarama-qarshi yo'nalgan $\bar{b}$ vektorning $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ bazislar bo'yicha yoyilmasi $|\bar{b}|=52$ shartda topilsin.

Yechish: $\bar{b}$ vektor $\bar{a}$ vektorga kolleniar bo'lgani uchun shunday λ soni mavjud bo'lib, $\bar{b}=\lambda\bar{a}$ tenglik bajariladi, $\bar{b}$ vektorning yo'nalishi $\bar{a}$ vektorning yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgani uchun bu tenglikda λning qiymati manfiy bo'ladi. Shuning uchun $|\bar{b}|=|\lambda|\cdot|\bar{a}|$, bundan esa $|\lambda|=\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}=\frac{52}{\sqrt{12^2+3^2+4^2}}=\frac{52}{13}=4.$

Shunday qilib, $\lambda=4.$

Demak, $\bar{b}$ vektorning $\bar{i},\bar{j},\bar{k}$ bazislar bo'yicha yoyilmasi:

$$\bar{b}=-4\bar{a}=48\bar{i}-12\bar{j}+16\bar{k}$$ bo'ladi.

4-masala. To'rtta $\bar{a}=\{2;-4;1\}, \bar{b}=\{3;1;-5\}, \bar{c}=\{4;-2;3\}, \bar{d}=\{20;-24;28\}$ vektorlar berilgan. $\bar{d}$ vektorning $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ bazislar bo'yicha yoyilmasi topilsin.

Yechish: $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar bazisni tashkil qilgani uchun m,n,k sonlari mavjud bo'lib,

$\bar{d}=m\cdot\bar{a}+n\cdot\bar{b}+k\cdot\bar{c}$ yoyilmasi o'rinli bo'ladi, bundan

$m\cdot\bar{a}+n\cdot\bar{b}+k\cdot\bar{c}=\{2m+3n+4k;-4m+n-2k;m-5n+3k\}$ni hosil qilamiz.

Shu bilan birgalikda $\bar{d}=m\cdot\bar{a}+n\cdot\bar{b}+k\cdot\bar{c}$ vektor tenglik, quyidagi skalyar tengliklar sistemasiga ekvivalent:

$$\left.\begin{array}{l}2m+3n+4k=20\\-4m+n-2k=-24\\m-5n+3k=28\end{array}\right\}$$

Bu sistemani Kramer qoidasiga asosan yechsak,

$m=\frac{\Delta_1}{\Delta}, n=\frac{\Delta_2}{\Delta}, k=\frac{\Delta_3}{\Delta}$ formulalardan:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&3&4\\-4&1&-2\\1&-5&3\end{vmatrix}=92,\qquad \Delta_1=\begin{vmatrix}20&3&4\\-24&1&-2\\28&-5&3\end{vmatrix}=276,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}2&20&4\\-4&-24&-2\\1&28&3\end{vmatrix}=-184,\qquad \Delta_3=\begin{vmatrix}2&3&20\\-4&1&-24\\1&-5&28\end{vmatrix}=460$$

Demak, $m=3, n=-2, k=5.$

Shunday qilib, $\bar{d}$ vektorning $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ bazislar bo'yicha yoyilmasi $\bar{d}=3\bar{a}-2\bar{b}+5\bar{c}$ bo'lar ekan.

<u>1-masala:</u> $A(1;-2;4)$ va $B(3;7;-5)$ nuqtalar berilgan. $\overline{AB}$ va $\overline{BA}$ vektorlarning koordinatalari topilsin.

<u>2-masala:</u> $\bar{a}=\{-3;6;-2\}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari topilsin.

<u>3-masala:</u> $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorning uzunliklari $|\bar{a}|=7$ va $|\bar{b}|=9$, ular orasidagi burchak $\alpha=135°$ berilgan. $|\bar{a}+\bar{b}|$ va $|\bar{a}-\bar{b}|$lar topilsin.

<u>4-masala:</u> $\bar{a}=\{3;7;-2\}$ va $\bar{b}=\{-15;-35;10\}$ vektorlarning kolleniarligini tekshiring. Ularning qaysi biri ikkinchisidan uzunligini aniqlang.

<u>5-masala:</u> Tekislikda $\bar{a}=\{3;5\}$, $\bar{b}=\{2;-4\}$ va $\bar{c}=\{16;-10\}$ vektorlari berilgan. $\bar{c}$ vektorning $\bar{a}$ va $\bar{b}$ bazislar bo'yicha yoyilmasi topilsin.

2-§. Vektorlarning skalyar ko'paytmasi.

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektor uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusining ko'paytmasidan hosil bo'lgan son bu vektorlarning skalyar ko'paytmasi deyiladi.

$\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi $(\bar{a}\cdot\bar{b})$ ko'rinishda belgilanadi. Demak,

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\varphi,\ (\varphi=\bar{a}\wedge\bar{b}) \qquad (1)$$

Skalyar ko'paytma quyidagi sodda xossalarga ega:

1°. Ixtiyoriy $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar uchun quyidagi munosabat o'rinlidir:

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=(\bar{b}\cdot\bar{a})$$

2°. Ixtiyoriy $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar va ixtiyoriy k son uchun quyidagi tenglik o'rinlidir:

$$(k\bar{a}\cdot\bar{b})=k(\bar{a}\cdot\bar{b})$$

3°. Har qanday $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar uchun $\bar{a}(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}\cdot\bar{b})+(\bar{a}\cdot\bar{c})$ tenglik o'rinlidir.

4°. Har qanday vektorning o'z-o'ziga skalyar ko'paytmasi bu vektorlar uzunligining kvadratiga teng: $(\bar{a}\cdot\bar{a})=|\bar{a}|$

Ikkita $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'lsa, u vektorlar perpendikulyardir. Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, ya'ni $\bar{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\}$ va $\bar{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\}$, u holda ularning skalyar ko'paytmasi

$$(\bar{a}\cdot\bar{b})=X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2 \tag{2}$$

formula bilan topiladi, bundan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning perpendikulyarlik sharti kelib chiqadi:

$$X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2=0 \tag{3}$$

Ikkita vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{(\bar{a}\cdot\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} \tag{4}$$

formula bilan hisoblanadi. Agar vektorlar koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, ular orasidagi burchak

$$\cos\varphi=\frac{X_1\cdot X_2+Y_1\cdot Y_2+Z_1\cdot Z_2}{\sqrt{X_1^2+Y_1^2+Z_1^2}\cdot\sqrt{X_2^2+Y_2^2+Z_2^2}} \tag{5}$$

formula bilan hisoblanadi.

Ixtiyoriy $\bar{a}=\{X,Y,Z\}$ vektorning biror L o'qiga proektsiyasi

$$\Pi p_L\bar{a}=(\bar{a}\cdot\bar{\ell}) \tag{6}$$

formula bilan ifodalanadi, bu yerda $\bar{\ell}$ birlik vektor bo'lib, u L o'qi bo'ylab yo'nalgan bo'ladi. Agar L o'qi koordinata o'qlari bilan mos ravishda α,β,γ burchaklarni tashkil etsa, u holda $\bar{\ell}=\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ bo'ladi va $\bar{a}$ vektorning L o'qiga proektsiyasi

$$\Pi p_L\bar{a}=X\cdot\cos\alpha+Y\cdot\cos\beta+Z\cdot\cos\gamma \tag{7}$$

formula bilan ifodalanadi.

<u>*1-masala.*</u> $(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2=2(\bar{a}^2+\bar{b}^2)$ ayniyatni isbotlang va uning geometrik ma'nosini aniqlang.

<u>*Yechish:*</u> Skalyar ko'paytmaning xossalariga ko'ra:

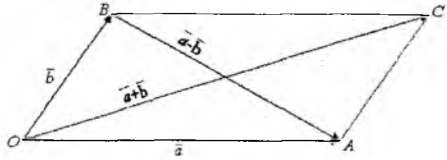
$$(\bar{a}+\bar{b})^2+(\bar{a}-\bar{b})^2=((\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}+\bar{b}))+((\bar{a}-\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b}))=$$
$$=(\bar{a}\cdot\bar{a})+(\bar{a}\cdot\bar{b})+(\bar{b}\cdot\bar{a})+(\bar{b}\cdot\bar{b})+(\bar{a}+\bar{a})+(-\bar{b}\cdot\bar{a})+(-\bar{b}\cdot(-\bar{b}))=$$

$$=2(\bar{a}\cdot\bar{a})+2(\bar{a}\cdot\bar{b})-2(\bar{a}\cdot\bar{b})+2(\bar{b}\cdot\bar{b})=2((\bar{a}\cdot\bar{a})+(\bar{b}\cdot\bar{b}))=2(\bar{a}^2+\bar{b}^2)$$

bo'ladi.

Endi isbot qilingan ayniyatning geometrik ma'nosini aniqlaymiz:

$\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning boshlarini O nuqtaga qo'yib, ulardan $OACB$ parallelogramm yasaymiz (chizma).



U holda bu parallelogrammda $\overline{OA}=\bar{a}$, $\overline{OB}=\bar{b}$, $\overline{OC}=\bar{a}+\bar{b}$ $\overline{BA}=\bar{a}-\bar{b}$ hosil qilamiz.

$$\bar{a}^2=|\bar{a}|^2=|\overline{OA}|^2,\quad \bar{b}^2=|\bar{b}|^2=|\overline{OB}|^2$$

$$(\bar{a}+\bar{b})^2=|\bar{a}+\bar{b}|^2=|\overline{OC}|^2,\quad (\bar{a}-\bar{b})^2=|\bar{a}-\bar{b}|^2=|\overline{BA}|^2$$

bo'lgani uchun isbot qilingan ayniyatni quyidagicha yozamiz.

$$|\overline{OC}|^2+|\overline{BA}|^2=2\left(|\overline{OA}|^2+|\overline{OB}|^2\right)$$

Bu ayniyat parallellogramm diagonallari kvadratlarining yig'indisi uning tomonlari kvadratlarining yig'indisiga tengligi haqidagi teoremani ifodalaydi.

2-masala. To'rtburchakning uchlari berilgan: $A(-3;3;0)$, $B(-1;-3;4)$, $C(5;-7;6)$va $D(3;-1;2)$. To'rtburchakning AC va BD diagonalining perpendikulyarligini isbotlang.

Yechish: $\overline{AC}$ va $\overline{BD}$ vektorlarni haraymiz. A,B,C va D nuqtalarning koordinatalari berilgan bo'lganligi uchun $\overline{AC}$ va $\overline{BD}$ vektorlarning koordinatalari quyidagicha bo'ladi: $\overline{AC}=\{8;-10;6\}$, $\overline{BD}=\{4;2;-2\}$. Demak, $\overline{AC}$ va $\overline{BD}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi

$$(\overline{AC}\cdot\overline{BD})=8\cdot 4+2\cdot(-10)+6\cdot(-2)=0 \qquad \text{bo'ladi.}$$

Bu tenglik $ABCD$ to'rtburchakning $\overline{AC}$ va $\overline{BD}$ diagonallarining o'zaro perpendikulyar ekanligini bildiradi.

3-masala. $(\overline{X}\cdot\bar{a})=-166$ shartni qanoatlantiruvchi va $\bar{a}=\{5;-7;3\}$ vektorga kooleniar bo'lgan $\overline{X}$ vektori topilsin.

Yechish: $\overline{X}$ vektorning koordinatalari $\{X_1,Y_1,Z\}$ bo'lsin. Bu vektor $\overline{a}$ vektorga kooleniar bo'lgani uchun shunday λ soni mavjud bo'lib, $X_1=5\lambda,\ Y_1=-7\lambda,\ Z_1=3\lambda$ tengliklari o'rinli bo'ladi va $\overline{X}=\{5\lambda;-7\lambda;3\lambda\}$ ni hosil qilamiz.

$(\overline{X}\cdot\overline{a})=-166$ shartga ko'ra:

$(\overline{X}\cdot\overline{a})=25\lambda+49\lambda+9\lambda=83\lambda=-166$ dan $\lambda=-2.$

Shunday qilib, $\overline{X}$ vektorning koordinatalari

$\overline{X}=\{-10;14;-6\}$ bo'ladi.

4-masala. $\overline{a}=\{X,Y,Z\}$ vektor OX o'qi bilan $\alpha=45°;\ OY$ o'qi bilan $\beta=60°$ burchak hosil qilib, $|\overline{a}|=3$ bo'lsa, uning koordinatalarini aniqlang.

Yechish: $\overline{a}$ vektorning OZ o'qi bilan hosil qilgan burchagini topish uchun

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

formuladan foydalanamiz: $\cos\alpha=\cos 45°=\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\beta=\cos 60°=\dfrac{1}{2}$

$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\cos^2\gamma=1\Rightarrow\cos\gamma=\dfrac{1}{2},\ \gamma=60°$ bo'lib, $\overline{a}$ vektorning koordinatalarini aniqlash uchun $X=|\overline{a}|\cdot\cos\alpha,\ Y=|\overline{a}|\cdot\cos\beta,\ Z=|\overline{a}|\cdot\cos\gamma$

formulalardan foydalanamiz:

$X=3\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ Y=3\cdot\dfrac{1}{2},\ Z=3\cdot\dfrac{1}{2}$ ekanligidan

$\overline{a}=\left\{\dfrac{3}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right\}$ bo'ladi.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala: Uzunliklari $|\overline{a}|=7$ va $|\overline{b}|=10$ bo'lgan vektorlar orasidagi burchak $\varphi=\dfrac{\pi}{6}$ bo'lsa, shu vektorlarning $((4\overline{a}-5\overline{b})\cdot(2\overline{a}+9\overline{b}))$ skalyar ko'paytmasi topilsin.

2-masala: $\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}=0$ shartni qanoatlantiruvchi $\overline{a},\overline{b}$ va $\overline{c}$ birlik vektorlari berilgan. $(\overline{a}\cdot\overline{b})+(\overline{b}\cdot\overline{c})+(\overline{c}\cdot\overline{a})$ni hisoblang.

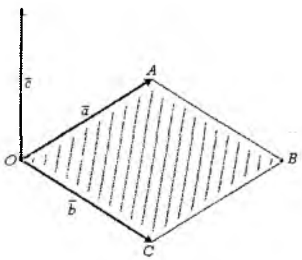
3-masala: Uchburchakning uchlari berilgan: $A(1;3;2)$, $B(2;-4;1)$ va $C(3;2;1)$. Shu uchburchak A uchining tashqi burchagi topilsin.

4-masala: Uzunliklari $|\bar{a}|=7$ va $|\bar{b}|=3$ bo'lgan $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar o'zaro $\varphi=\frac{\pi}{3}$ burchak tashkil etadi. $\bar{p}=\bar{a}+\bar{b}$ va $\bar{q}=\bar{a}-\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak α topilsin.

5-masala: Agar $\bar{a}=\{1;-4;8\}$, $\bar{b}=\{4;4;-2\}$, $\bar{c}=\{2;3;6\}$ bo'lsa, $\bar{b}+\bar{c}$ vektorning $\bar{a}$ vektordagi proektsiyasini toping.

3-§. Vektorlarning vektorli ko'paytmasi.

Agar uchta nokomplanar $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlarni umumiy boshlang'ich nuqtaga keltirilgandan so'ng (chizmaga qarang) vektorlardan birini ikkinchisi bilan ustma-ust



tushgunga qadar ular orasidagi kichik burchak bo'yicha aylantirish uchinchi vektorning oxiridan qaralganda soat strelkasiga qarama-qarshi yo'nalishda ko'rinsa, $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar uchligi o'ng uchlik (aks holda chap uchlik)ni tashkil qiladi deyiladi.

Shunday qilib $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning vektorli ko'paytmasi deb, shunday uchinchi $\bar{c}$ vektorga aytiladiki, bu vektor quyidagi shartlarni qanoatlantiradi:

1. $|\bar{c}|=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin(\bar{a}\hat{,}\bar{b})$, $(0<(\bar{a}\hat{,}\bar{b})<\pi)$.

2. $\bar{c}$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning har biri bilan o'zaro perpendikulyar, ya'ni $\bar{c}\perp\bar{a}$ va $\bar{c}\perp\bar{b}$.

3. $\{\bar{i};\bar{j};\bar{k}\}$ va $\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ vektorlar uchligi o'ng uchlikni hosil qiladi.

Bu shartlarninig geometrik ma'nosi quyidagicha:

1-shart, $\bar{c}$ vektorning uzunligi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogramm yuzini ifodalovchi songa teng;

2-shart, $\bar{c}$ vektor va $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar bilan aniqlanadigan tekislikka perpendikulyar;

3-shart, $\bar{c}$ vektor yo'nalishini aniqlaydi.

Vektorli ko'paytma quyidagi xossalarga ega:

1°. Agarda $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kolleniar bo'lsa yoki ulardan kamida biri nol vektor bo'lsa, ularning vektor ko'paytmasi nolga teng bo'ladi.

2°. Vektorli ko'paytma $[\bar{a}\cdot\bar{b}]$ yoki $\bar{c}=[\bar{a}\cdot\bar{b}]$ ko'rinishda belgilanadi va $[\bar{a}\cdot\bar{b}]=-[\bar{b}\cdot\bar{a}]$ bo'ladi, ya'ni ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashtirganda vektorli ko'paytmaning ishorasi o'zgaradi.

3°. $[\lambda\bar{a}\cdot\bar{b}]=-[\lambda\bar{b}\cdot\bar{a}]=\lambda\cdot[\bar{a}\cdot\bar{b}]$, λ – istalgan haqiqiy son.

4°. $[(\bar{a}+\bar{b})\cdot\bar{c}]=[\bar{a}\cdot\bar{c}]+[\bar{b}\cdot\bar{c}]$ yoki

$[\bar{a}\cdot(\bar{b}+\bar{c})]=[\bar{a}\cdot\bar{b}]+[\bar{a}\cdot\bar{c}]$

5°. Agar $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar o'zlarining

$$\bar{a}=\{X_1;Y_1;Z_1\},\ \bar{b}=\{X_2;Y_2;Z_2\}$$

koordinatalari bilan berilgan bo'lsa, $\bar{a}$ vektorning $\bar{b}$ vektorga vektorli ko'paytmasi:

$$[\bar{a}\cdot\bar{b}]=\left\{\begin{vmatrix} Y_1 & Z_1 \\ Y_2 & Z_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} X_1 & Z_1 \\ X_2 & Z_2 \end{vmatrix};\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 \\ X_2 & Y_2 \end{vmatrix}\right\}$$

yoki

$$[\bar{a}\cdot\bar{b}]=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

hisoblanadi.

Bundan esa:

$$|[\bar{a}\cdot\bar{b}]|=\sqrt{(Y_1Z_2-Z_1Y_2)^2+(X_1Z_2-Z_1X_2)^2+(X_1Y_2-Y_1X_2)^2}$$

bo'ladi.

Demak, uchlari $A(X_1,Y_1,Z_1)$, $B(X_2,Y_2,Z_2)$, $C(X_3,Y_3,Z_3)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchakning yuzi

$$S=\frac{1}{2}\left|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]\right|$$

formula bilan hisoblanadi.

Ortlarning vektor ko'paytmalari:

$$\left.\begin{array}{l} [\bar{i}\cdot\bar{j}]=-[\bar{j}\cdot\bar{i}]=\bar{k};[\bar{i}\cdot\bar{i}]=0 \\ [\bar{j}\cdot\bar{k}]=-[\bar{k}\cdot\bar{j}]=\bar{i};[\bar{j}\cdot\bar{j}]=0 \\ [\bar{i}\cdot\bar{k}]=-[\bar{k}\cdot\bar{i}]=\bar{j};[\bar{k}\cdot\bar{k}]=0 \end{array}\right\}$$

bo'ladi.

1-masala. Berilgan $|\bar{a}|=5, |\bar{b}|=7, \bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar o'zaro perpendikulyar. $\left|\left[(4a+3b)\cdot(3a-2b)\right]\right|$ ni hisoblang.

Yechish: Vektorli ko'paytmaning xossalariga ko'ra:

$$\left[(4\bar{a}+3\bar{b})\cdot(3\bar{a}-2\bar{b})\right]=12\left[\bar{a}\cdot\bar{a}\right]+9\left[\bar{b}\cdot\bar{a}\right]-8\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]-6\left[\bar{b}\cdot\bar{b}\right]=-9\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]-8\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]=-17\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$$

shartga ko'ra $(\widehat{\bar{a},\bar{b}})=\frac{\pi}{2}$. U holda

$$\left|\left[(4\bar{a}+3\bar{b})\cdot(3\bar{a}-2\bar{b})\right]\right|=\left|-17\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\right|=17\cdot|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\sin\frac{\pi}{2}=595$$

bo'ladi.

2-masala. $\bar{a}+\bar{b}$ va $\bar{a}-\bar{b}$ vektorlar kolleniar bo'lishi uchun $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar qanday shartni qanoatlantirishi kerak.

Yechish: Faraz qilaylik, $\bar{a}+\bar{b}$ va $\bar{a}-\bar{b}$ vektorlar kolleniar bo'lsin, ya'ni $\left[(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})\right]=0$. Bundan esa $\left[(\bar{a}+\bar{b})\cdot(\bar{a}-\bar{b})\right]=\left[\bar{a}\cdot\bar{a}\right]+\left[\bar{b}\cdot\bar{a}\right]-\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]-\left[\bar{b}\cdot\bar{b}\right]=0$ va $\left[\bar{a}\cdot\bar{a}\right]=0, \left[\bar{b}\cdot\bar{b}\right]=0$ bo'lgani uchun $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]=0$.

Demak, $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar o'zaro kolleniar ekan. Shunday qilib, $\bar{a}+\bar{b}$ va $\bar{a}-\bar{b}$ vektorlar kolleniar bo'lishi uchun $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar kolleniar bo'lishi kerak ekan.

3-masala. Uchlari $A(2;1;3)$, $B(4;4;4)$ va $C(5;7;5)$ nuqtalarda bo'lgan uchburchak berilgan. Uchburchakning B uchidan AC tomonga tushirilgan balandlikning uzunligini hisoblang.

Yechish: Birinchidan: $\overline{AB}=\{2;3;1\}$ va $\overline{AC}=\{3;6;2\}$ bo'ladi.

Ikkinchidan: $\left[\overline{Ab}\cdot\overline{AC}\right]=\begin{vmatrix}\bar{i} & \bar{j} & \bar{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 3 & 6 & 2\end{vmatrix}=0\bar{i}-\bar{j}+3\bar{k}$ bo'lib,

$\sqrt{1+9}=\frac{\sqrt{10}}{2}$

Uchburchakning B uchidan AC tomoniga tushirilgan balandligini $\overline{BD}$ desak, u holda $S_{\Delta}=\frac{1}{2}\cdot\left(|\overline{AC}|\cdot|\overline{BD}|\right)\Rightarrow|\overline{BD}|=\frac{2S_{\Delta}}{|\overline{AC}|}=\frac{\sqrt{10}}{\sqrt{9+36+4}}=\frac{\sqrt{10}}{7}$ bo'ladi.

4-masala. $|\bar{x}|=6\sqrt{38}$ bo'lgan $\bar{x}$ vektor $\bar{a}=\{2;-3;1\}$ va $\bar{b}=\{3;4;-2\}$ vektorlarga perpendikulyar va u OZ o'qi bilan o'tkir burchak tashkil qiladi. Shu vektorning koordinatalari topilsin.

Yechish: $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning vektorli ko'paytmasini tuzamiz:

$$\bar{c} = [\bar{a} \cdot \bar{b}] = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 4 & -2 \end{vmatrix} = 2\bar{i} + 7\bar{j} + 17\bar{k}$$

$\bar{x}$ vektorning koordinatalari $\bar{x} = \{X, Y, Z\}$ bo'lsin, bu vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga perpendikulyar bo'lgani uchun u $\bar{c} = \{2;7;17\}$ vektor bilan o'zaro kolleniar bo'ladi. Shuning uchun $\bar{x}$ vektorning koordinatalari $\bar{c}$ vektorning koordinatalariga proportsional bo'ladi.

$$X = 2\lambda,\ Y = 7\lambda,\ Z = 17\lambda$$

U holda $\bar{x}$ vektorning moduli

$$|\bar{x}| = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \sqrt{4\lambda^2 + 49\lambda^2 + 289\lambda^2} = 3\sqrt{38} \cdot |\lambda|$$

shartga ko'ra, $|\bar{x}| = 6\sqrt{38}$ dan $|\lambda| = 2$ bo'ladi.

$\bar{x}$ vektor OZ o'qi bilan o'tkir burchak tashkil qilgani uchun $\lambda > 0$ bo'lib, $\lambda = 2$ bo'ladi.

Shunday qilib, $\bar{x}$ vektorning koordinatalari $\bar{x} = \{4;14;34\}$ bo'lar ekan.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala: $|\bar{a}| = 5,\ |\bar{b}| = 17$ va $|\bar{c}| = 51$ berilgan. $(\bar{a} \cdot \bar{b})$ topilsin.

2-masala: Berilgan: $\bar{a} = \{2;4;-1\}$ va $\bar{b} = \{3;-1;2\}$, $[(3\bar{a} - 2\bar{b}) \cdot (2\bar{a} - 3\bar{b})]$ vektor ko'paytmaning koordinatalari topilsin.

3-masala: Uchlarining koordinatalari $A(2;0;3)$, $B(1;2;-4)$, $C(3;1;-5)$ bo'lgan ABC uchburchakning yuzini hisoblang.

4-masala: $\bar{a} = \{4;4;2\}$ va $\bar{b} = \{2;3;6\}$ vektorlar orasidagi burchak sinusini toping.

5-masala: Berilgan: $|\bar{a}| = 5,\ |\bar{b}| = 3$. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak $\alpha = \frac{3\pi}{4}$ bo'lsa, $[(2\bar{a} + 5\bar{b}) \cdot (4\bar{a} - 3\bar{b})]^2$ ni hisoblang.

4-§. Uch vektorning aralash ko'paytmasi.

$\bar{a}, \bar{b}$ va $\bar{c}$ uch vektorning aralash ko'paytmasi deb, (vektorlarning ko'rsatilgan, tartibiga ko'ra) $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasidan iborat vektorni $\bar{c}$ vektorga skalyar ko'raytmasidan iborat bo'lgan songa aytiladi. Aralash ko'paytma

$$\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right) \text{ yoki } \left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}$$

ko'rinishda belgilanadi.

Aralash ko'paytmaning ko'paytmaning geometrik ma'nosi quyidagicha: uchala $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar biror O nuqtaga qo'yilgan bo'lib, komplanar bo'lmasin hamda o'ng uchlikni hosil qilsin. Qirralari shu vektorlardan iborat parallelopipedni yasasak, ($\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ - miqdor) shu parallelopiped asosining yuzini bildiradi. Aralash ko'paytma ta'rifiga asosan

$$\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right)=\left|\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\right|\cdot|\bar{c}|\cdot\cos\varphi$$

bo'lib, bu yerda φ, $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ va $\bar{c}$ vektorlar orasidagi burchak. $|\bar{c}|\cdot\cos\varphi$ miqdor esa $\bar{c}$ vektorning $\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]$ vektor yo'nalishidagi to'qri chiziqdagi proektsiyasiga teng bo'lib, parallelopipedning balandligidir, $|\bar{c}|\cdot\cos\varphi=h$.

Demak, $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar o'ng uchlikni hosil qilsa, ularning aralash ko'paytmasi bu vektorlarga yasalgan parallelopipedning hajmini ifoda qilar ekan.

$$V_{parallelopiped}=\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right) \qquad (1)$$

Agar $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar o'zlarining koordinatalari

$$\bar{a}=\{X_1,Y_1,Z_1\},\ \bar{b}=\{X_2,Y_2,Z_2\},\ \bar{c}=\{X_3,Y_3,Z_3\}$$

bilan berilgan bo'lsa, aralash ko'paytma

$$\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right)=\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (2)$$

bo'ladi.

Aralash ko'paytmaning asosiy xossalari.

1°. $\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right)=\left(\left[\bar{b}\cdot\bar{c}\right]\cdot\bar{a}\right)$

2°. $\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right)=-\left(\left[\bar{b}\cdot\bar{a}\right]\cdot\bar{c}\right)$, $\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right)=-\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{c}\right]\cdot\bar{b}\right)$, $\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right)=-\left(\left[\bar{c}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{a}\right)$

3°. Agar $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi.

4°. $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlardan istalgan ikkitasi kolleniar bo'lsa, ularning aralash ko'paytmasi nolga teng, xususiy holda

$$\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{a}\right]\cdot\bar{b}\right)=\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{a}\right)=\left(\left[\bar{b}\cdot\bar{a}\right]\cdot\bar{a}\right)=0$$

5°. Koordinatalari bilan berilgan $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlarga yasalgan parallelopipedning hajmi.

$$V_{parallelop\,iped}=\mathrm{mod}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (3)$$

formula bilan shu vektorlarga yasalgan tetraedrning hajmi esa:

$$V_{tetraedr}=\frac{1}{2}\mathrm{mod}\begin{vmatrix} X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \\ X_3 & Y_3 & Z_3 \end{vmatrix} \qquad (4)$$

formula bilan hisoblanadi.

6°. Ko'pincha $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlarning aralash ko'paytmasi $\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)$ ko'rinishda ham yozilishi mumkin, ya'ni

$$\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]\cdot\bar{c}\right)=\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right) \qquad \text{bo'ladi.}$$

<u>*1-masala.*</u> $\left(\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{c}+\bar{a}\right)\right)=2\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)$ ayniyatni isbotlang.

<u>*Yechish:*</u> Vektorlarning skalyar, vektorli va aralash ko'paytmasining xossalariga asosan:

$$\left(\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{c}+\bar{a}\right)\right)=\left(\left[\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\right]\cdot\left(\bar{c}+\bar{a}\right)\right)=$$

$$=\left(\left(\left[\bar{a}\cdot\bar{b}\right]+\left[\bar{a}\cdot\bar{c}\right]+\left[\bar{b}\cdot\bar{b}\right]+\left[\bar{b}\cdot\bar{c}\right]\right)\cdot\left(\bar{c}+\bar{a}\right)\right)=$$

$$=\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)+\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{c}\right)+\left(\bar{b}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)+\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{c}\right)+\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{a}\right)+\left(\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}\right)+\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}\right),$$

bunda uch vektorning aralash ko'paytmasida ikkitasi bir xil vektor bo'lsa, u holda aralash ko'paytma nolga teng bo'ladi. Shuning uchun

$$\left(\bar{b}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)=0,\ \left(\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{c}\right)=0,\ \left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{a}\right)=0,\ \left(\bar{a}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}\right)=0$$

bundan tashhari $\left(\bar{b}\cdot\bar{c}\cdot\bar{a}\right)=\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)$ edi.

Demak, yuqoridagi tenglikdan:

$\left(\left(\bar{a}+\bar{b}\right)\cdot\left(\bar{b}+\bar{c}\right)\cdot\left(\bar{c}+\bar{c}\right)\right)=2\left(\bar{a}\cdot\bar{b}\cdot\bar{c}\right)$ni hosil qilamiz.

2-masala. Tetraedrning uchlari $A(-1;2;-3)$, $B(2;1;4)$, $C(1;-2;3)$, $D(3;-1;1)$ berilgan. Uning C uchidan tushirilgan balandlikning uzunligi topilsin.

<u>*Yechish:*</u> $ABCD$ **tetraedrning hajmi** $V=\frac{1}{6}(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD})$**ga teng.** $\overline{AB},\overline{AC},\overline{AD}$ **vektorlarning koordinatalari esa:**

$$\overline{AB}=\{3;-1;7\},\ \overline{AC}=\{2;-4;6\},\ \overline{AD}=\{4;-3;4\}$$

Tetraedrning hajmini hisoblaymiz:

$$V=\frac{1}{6}(\overline{AB}\cdot\overline{AC}\cdot\overline{AD})=\frac{1}{6}\begin{vmatrix}3&-1&7\\2&-4&6\\4&-3&4\end{vmatrix}=10$$

ABC uchburchakning yuzi esa:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|[\overline{AB}\cdot\overline{AD}]\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\bar{i}&\bar{j}&\bar{k}\\3&-1&7\\4&-3&4\end{vmatrix}=\frac{1}{2}\left|17\bar{i}+16\bar{j}-5\bar{k}\right|=\frac{\sqrt{570}}{2}$$

Tetraedrning C uchidan ABD yoqqa tushirilgan balandlikni CE bilan belgilasak:

$$V=\frac{1}{3}S_{\Delta ABD}\cdot CE\text{, bundan}$$

$$CE=\frac{3V}{S_{\Delta ABD}}=\frac{30\cdot 2}{\sqrt{570}}=\frac{2\sqrt{570}}{19}\ \text{bo'ladi.}$$

<u>*3-masala.*</u> $\bar{a}=\{2;-1;2\}$, $\bar{b}=\{1;2;-3\}$, $\bar{c}=\{3;-4;7\}$ vektorlarning komplanarligini isbotlang.

<u>*Yechish:*</u> $\bar{a},\bar{b}$ va $\bar{c}$ vektorlar komplanar bo'lishi uchun ularning aralash ko'paytmasi $[\bar{a}\cdot\bar{b}]\cdot\bar{c}=0$ bo'lishi kerak.

Demak,

$$[\bar{a}\cdot\bar{b}]\cdot\bar{c}=\begin{vmatrix}2&-1&2\\1&2&-3\\3&-4&7\end{vmatrix}=0$$

Shunday qilib, $\bar{a},\bar{b},\bar{c}$ vektorlar komplanar ekan.

Mustaqil yechish uchun masalalar

1-masala: $\bar{c}$ vektor $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarga perpendikulyar. $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlar orasidagi burchak $60°$ va $|\bar{a}| = 7$, $|\bar{b}| = 4$, $|\bar{c}| = 5$

$(\bar{a} \cdot \bar{b} \cdot \bar{c})$ – aralash ko'paytma topilsin.

2-masala: $A(1;2;10)$, $B(-1;3;-4)$, $C(2;-1;-1)$, $D(-2;-3;1)$ nuqtalarning bir tekislikda yotishligini isbotlang.

3-masala: Tetraedrning hajmi $V = 7$, uning uchta uchlari $A(3;2;1)$, $B(1;4;3)$, $C(2;1;3)$ nuqtalarda joylashgan. Uning to'rtinchi uchi D applikata o'qida yotadi. Shu uchining koordinatalarini toping.

4-masala: Uchlari $A(7;7;3)$, $B(6;5;8)$, $C(3;5;8)$, $D(8;4;1)$ nuqtalarda bo'lgan piramida berilgan.

Quyidagilarni toping:

$a)$ AD – qirraning uzunligini toping;

$b)$ AB va AD qirralar orasidagi burchakni toping;

$c)$ ABC yoqning yuzasini toping;

$d)$ $ABCD$ piramida hajmi topilsin.

ADABIYOTLAR:

1. Клетеник А.В. – Сборник задач по аналитической геометрии. 1986 – Москва.
2. Т.Шодиев – Аналитик геометриядан қўлланма. Тошкент – 1973.
3. Моденов П.С. – Сборник задач по аналитической геометрии. 1970 – Москва.
4. Ефимов Н.В. – Аналитик геометрия қисқа курси. 1966 – Тошкент.