ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Наманган давлат университети

Физика-математика факультети

Амалий математика кафедраси

А. Имомов

ЖАРАЁНЛАР ТАДҚИҚОТИ

Услубий қўлланма

Наманган -2015

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ

ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

Наманган давлат университети

А. Имомов

ЖАРАЁНЛАР ТАДҚИҚОТИ

Услубий қўлланма

Университетларнинг амалий математика ва информатика йўналишлари, техника олий ўқув юртларининг информатика йўналишлари учун мўлжалланган

Наманган -2015

Ушбу қўлланма Жараёнлар тадқиқоти фани бўйича университетларнинг амалий математика ва информатика йўналишлари, техника олий ўқув юртларининг информатика йўналишлари учун мўлжалланган ва ҳаракатдаги ўқув дастурлари ва режалари асосида ёзилган.

Қўлланма жараёнлар тадқиқотининг чизиқли программалаштириш, иккиёқламалик назарияси, симплекс усул, транспорт масалалари, потенциаллар усули, унинг турли масалаларга тадбиқлари, бутун сонли программалаштириш, Гомори усули, тайинлашлар ва почтальон масаласи, ночизиқ программалаштириш масаласи, Лагранжнинг минимум принципи, Кун-Такер теоремаси, динамик программалаштириш масалалари, матрицали ўйинлар назарияси каби мавзуларни ўз ичига олади. Масалаларни ечиш учун MathCAD дастури, Паскаль тили ишлатилган.

Масъул муҳаррир: ф.м.-ф.д., проф. М.Бадалов, НамДУ,
Тақризчилар: ф.м.-ф.д., проф. В. Ҳожибоев. НамМПИ,
т.ф.н., доц. П.Каримов. НамМПИ

МУНДАРИЖА

М1. ЧИЗИҚЛИ ПРОГРАММАЛАШТИРИШ МАСАЛАСИ (ЧПМ).

1.1. Масаланинг умумий қўйилиши

Таъриф 1. Чизиқли программалаш масаласи (ЧПМ) — чизиқли функциянинг энг катта ва энг кичик қийматларини берилган чизиқли чекланишларда топиш ҳақидаги масаладир.

Чизиқли функция ЧПМ нинг *мақсад* функцияси дейилади. Чизиқли тенгламалар ва тенгсизликлар билан берилган чекланишлар ЧПМ нинг чекланишлар системаси (тизими) дейилади.

Таъриф 2. Мақсад функциянинг ва чекланишларнинг математик ифодаси иқтисодий масаланинг *математик модели* дейилади.

Умумий ҳолда чизиқли программалаш масаласининг математик модели қуйидагича ёзилади:

чизиқли мақсад функциянинг энг катта (кичик) қийматини

$$L(x) = cx = c_1x_1 + \dots c_jx_j + \dots + c_nx_n \to \max(\min) \qquad (1.1)$$

ушбу чекланишларда топиш керак:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mj}x_j + \dots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1.2)$$

$$x_j \geq 0,\ j = 1, \dots, n \qquad (1.3)$$

бу ерда x_j — ноъмалумлар ; $a_{ij,} b_i, c_j$ — берилган доимий миқдорлар.

$\max f(x) = \min(-f(x))$ эканлигидан, (1.3) да max ёки min масалани ихтиёрийсини қараш мумкин.

Баъзи ёки барча тенгламалар тенгсизликлар кўринишда берилиши мумкин.

$A = [a_{i,j}], x = [x_j] \in R^n, b = [b_i] \in R^m$ матрица ва векторлар киритиб, математик моделни қисқа кўринишда қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$L(x) = cx \to \max(\min), \qquad (1.4)$$

ни ушбу чекланишларда топиш керак:

$$Ax = b,\ x \geq 0\ . \qquad (1.5)$$

А матриcанинг ранги $r = rank(A) = m$ бўлсин. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин: $m < n, m = n$. Биринчи ҳолда ЧП масаласи маънога эга, иккинчи ҳолда чекланишлар системаси битта нуқтадан иборат ва ЧП масласини текшириш маънога эга эмас.

Таъриф 3. Чизиқли программалаш масаласининг мумкин бўлган ечими (режаси) деб чекланишлар системаси $Ax = b, x \geq 0$ ни қаноатлантирувчи $x = [x_1, \dots, x_n]^T \in U \subset R^n$ векторга айтилади.

Мумкин бўлган ечимлар тўпламини (соҳасини) $U = \{x \in R^n \,|\, Ax = b, x \geq 0\}$ деб белгилаймиз.

$x=[x_1,...,x_r,0,...,0]^T \in \mathrm{U} \subset R^n$ кўринишдаги мумкин бўлган ечим таянч (базис) ечим дейилади, бу ерда r — чекланишлар системасининг ранги. Умуман, таянч ечимда r та нолмас компоненталар бўлиши керак.

Таъриф **4.** Чизиқли мақсад функцияга экстремал қиймат берадиган мумкин бўлган ечим ЧП масаласининг *оптимал ечими* деб айтилади ва $\bar{x}=[\bar{x}_1,...,\bar{x}_n]\in U \subset R^n$ кўринишда белгиланади.

1.2.Математик моделларнинг турлари

ЧП масаласининг модели каноник ва ноканоник бўлиши мумкин.

Таъриф 5. Агар чекланишларнинг барчаси тенгламалар бўлиб, барча ўзгарувчилар мусбат бўлса, бундай модель каноник дейилади. Акс ҳолда ЧП масаласининг модели ноканоник дейилади.

Демак, ЧПМ нинг каноник кўриниши қуйидагича бўлар экан:

$$L(x)=cx\to \max, Ax=b, x\geq 0 \qquad (1.6)$$

Кўпинча ЧПМ нинг қуйидаги кўринишлари ҳам учрайди:

$$L(x)=cx\to \max, Ax\leq b, x\geq 0 \qquad (1.7)$$

$$L(x)=cx\to \min, Ax\geq b, x\geq 0 \qquad (1.8)$$

Умумий ҳолда ЧПМ қуйидагича аралаш кўринишда ҳам берилиши мумкин:

$$L(x)=cx\to \max, A_1x\leq b_1,\ A_2x=b_2,\ A_3x\geq b_3,\ x\geq 0 \qquad (1.9)$$

Ноканоник масалаларни каноник масалага айлантириш учун тенгсизликларни тенгликларга айлантириш керак. Бунинг учун ҳар бир тенгсизликка $x_{n+i}\geq 0, i=1,...,m$, баланс ўзгарувчини қўшиб ёки айириб, тенгсизликни тенглик билан алмаштириш керак. Агар, тенгсизлик $\leq$ бўлса баланс ўзгарувчи мусбат ишора билан қўшилади, тенгсизлик $\geq$ кўринишда бўлса баланс ўзгарувчи айрилади. Мақсад функцияга баланс ўзгарувчи 0 коэффициент билан киритилади, яъни киритилмайди.

ЧП масаласининг математик моделини қуриш учун қуйидаги ишларни қилиш керак:

— ўзгарувчиларни белгилаб олиш керак;

— иқтисодий шартларга аосланиб мақсад функцияни қуриш керак;

—масаланинг чекланишлари асосида чекланишлар системасини тузиш керак.

1.3. ЧПМ га олиб келадиган иқтисодий масалалар.

1. Ишлаб чиқаришни планлаштириш масаласи.

Корхона бир ойда m та хомашёдан n хил маҳсулот (товар) ишлаб чиқарсин. j-товардан x_j (j=1,…,n) миқдорда ишлаб чиқсин ва унинг бир донасини сотишдан фойда c_j бўлсин. j-товар ишлаб чиқиш учун i-хомашёдан a_{ij} (i=1,…,m) миқдорда сарфлаш зарур бўлсин ва, унинг омбордаги заҳираси b_i бўлсин. Корхона бир ойда ҳар бир товардан қанча ишлаб чиқиш керакки, сотишдан олинган даромад энг катта бўлсин.

Бу масаланинг математик модели (1.6) математик масаладир.

2**. Рацион масаласи**. Ҳайвон боқиш билан шуғулланадиган фермада n (j=1,…,n) хил озиқ-овқат тури бор. Бу озуқаларда m (i=1,…,m) хил фойдали минерал, витаминлар мавжуд. Маълумки, j-хил озуқа ўзида a_{ij} миқдорда фойдали минерал, витаминларга эга, уларнинг бир бирлигининг нархи c_j бўлсин. Ҳар бир ҳайвон бир суткада фойдали минерал, витаминлардан b_i дан кам бўлмаган миқдорда қабул қилиши керак. x_j деб j-хил озуқанинг суткалик нормаси бўлсин. Ҳайвонларга нормадаги озуқаларни бериб, энг кам маблағ сарфлаши учун уларнинг миқдори қандай бўлиши керак.

Бу масаланинг математик модели (1.7) дир.

3. **Транспорт масаласи**. m (i=1,…,m) та A_i таъминот пунктида a_i миқдорда маҳсулот ишлаб чиқарилади. Уларни n (j=1,…,n) та B_j истеъмол пунктларига етказиб бериш керак. Юкнинг 1 бирлигини A_i пунктдан B_j пунктга етказиб бериш учун c_{ij} миқдорда маблағ сарфланади. Юкларни таъминот пунктларидан истеъмол пунктларига қандай миқдорда етказиб бериш керакки, сарф-харажат энг кам бўлсин.

Бу масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} c_{ij}x_{ij} \to \min, \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, x_{ij} \geq 0 . \quad (1.10)$$

Жараёнлар тадқиқотида иқтисодиётнинг яна бир қанча масалалар қаралади. Улар жумласига ресурсларни оптимал тақсимлаш, сарфларни минималлаштириш, энг қисқа масофани топиш, матрицали ўйинлар, техникани оптимал эксплуатация қилиш ва алмаштириш ва ҳоказо масалалар киради. Ривожланган мамлакатларнинг бир қанчасида иқтисодиёт масалаларининг математик моделлари ечилиб, халқ хўжалигига катта-катта маблағларни тежашга олиб келяпти (қ. Х.М.Таха, [1]).

Мундарижага

М2. ЧПМ ни ечишнинг график усули

2.1. Масаланинг қўйилиши

ЧПМ жуда содда усул- график усул билан иккита ўзгарувчи бўлган ноканоник масала ва кўп ўзгарувчили каноник масалада иккита эркин ўзгарувчи бўлган ҳолда ишлатилади.

Тўпламнинг ички нуқтаси деб, тўпламга ўзининг бирор атрофи билан кирувчи нуқтага айтилади. Тўпламнинг четки нуқтаси деб, ўзи тўпламга кирадиган, лекин у нуқтанинг бирор атрофи тўпламга кирмайдиган нуқтага айтилади. Масалан, [a,b] кесманинг a,b нуқталари кесманинг четки нуқталаридир, қолган нуқталар ички нуқталардир. ΔABCда учлар, қирралар четки нуқталардир, қолган нуқталар ички нуқталардир. Демак, четки нуқталар оддий нуқта, кесма, бирор сирт бўлиши мумкин экан. Масалан, тетраедрда четки нуқталар бу учлар, қирралар, ён ёқлардан иборатдир.

Геометрик нуқтаи назаридан, ЧПМ масаласида чизиқли функцияга энг катта ва энг кичик қиймат берувчи чекланишлар соҳасидаги четки нуқталар топилади. Четки нуқталар функциянинг ўсиш ва камайиш йўналишида энг четки (кейинги) нуқталар бўлади.

График усул билан экстремал нуқталарни топиш учун мақсад функциянинг градиенти

$$gradL(x) = \frac{\partial L(x)}{\partial x_1}e_1 + \frac{\partial L(x)}{\partial x_2}e_2 = c_1e_1 + c_2e_2 = (c_1, c_2)$$

дан фойдаланиш керак, бу ерда e_1, e_2-лар OX_1, OX_2 ўқларнинг бирлик векторлари. Математик анализдан маълумки, функция айнан, градиент вектор йўналишида ўсади ва антиградиент йўналишида камаяди.

2.2. Масала ечиш алгоритми

1. Масаланинг мумкин бўлган ечимлар соҳасини топамиз.

2. Вектор $c=(c_1, c_2)$ ни қурамиз.

3.Вектор с га перпендикуляр бўлган ўзгармаслик чизиғи $L_0(x)=c_1x_1+c_2x_2=const$ ни қурамиз..

4. Ўзгармаслик чизиғини max (min) масаласида функцияни ўсиш (камайиш) тартибида силжитамиз. Бу силжитишни ўзгармаслик чизиғи ечимлар соҳаси билан битта чекка нуқтада кесишгунча давом эттирамиз. Бу нуқта мақсад функциясининг экстремум нуқтаси бўлади. Бу нуқтани чекланишлар системасини кесиштириб топамиз. Топилган экстремум нуқталарда мақсад функция қийматларини топиб, унинг экстремум қийматларини аниқлаймиз.

Агар, ўзгармаслик чизиғи бирор чекланишга параллел бўлиб қолса, экстремал нуқталар шу чекланишнинг барча нуқталари бўлади ва экстремал нуқталарни қуйидаги формула билан топиш мумкин:

$$\overline{x}=(1-t)\overline{x}_1+t\overline{x}_2,$$

Бу ерда $0 \le t \le 1$, $\overline{x}_1$ ва $\overline{x}_2$ — оптимал иккита чекка нуқталар.

Агар чекланишлар биргаликда бўлмаса, ЧП масаласи ечимга эга бўлмайди.

5. Экстремум нуқталарнинг координаталари ва бу нуқталарда мақсад функция қийматларини топамиз.

2.3. Маҳсулот ишлаб чиқаришнинг оптимал варианти

Фирма 2 хил музқаймоқ ишлаб чиқаради: қаймоқли ва шоколадли. Музқаймоқ ишлаб чиқиш учун 2 хил хом ашё ишлатилади: сут ва қўшимчалар. Уларнинг 1 кг музқаймоқ ишлаб чиқиш учун кетадиган сарф – ҳаражати ушбу 2.1-жадвалда келтирилган.

Ж.2.1.

Хом ашё	1 кг музқаймоққа кетадиган хом ашё		Омбордаги мавжуд миқдор
	Қаймоқли	Шоколадли	
Сут	0,8	0,5	400
Қўшимчалар	0,4	0,8	365
1 кг. муз-қ нархи	16	14	

Бозорни ўрганиш шуни кўрсатдики, 1 суткалик қаймоқли музқаймоққа қизиқиш шоколадли музқаймоққа қизиқишдан 100 кг. дан кўп эмас экан. Ундан ташқари шоколадли музқаймоққа 1 суткалик қизиқиш 350 кг дан ошмас экан. 1 кг қаймоқли шоколад 16 сўм, 1 кг шоколадли музқаймоқ 14 сўм туради.

1 суткалик даромад энг кўп бўлиши учун фирма қанча миқдорда қаймоқли ва шоколадли музқаймоқ ишлаб чиқиши керак.

Ечиш. x_1, x_2 — деб қаймоқли ва шоколадли музқаймоқларнинг бир суткалик кг лардаги ишлаб чиқилган миқдорини белгилайлик.

Масаланинг математик моделини тузамиз.

Мақсад функция ва чекланишлар қуйидаги кўринишни олади:

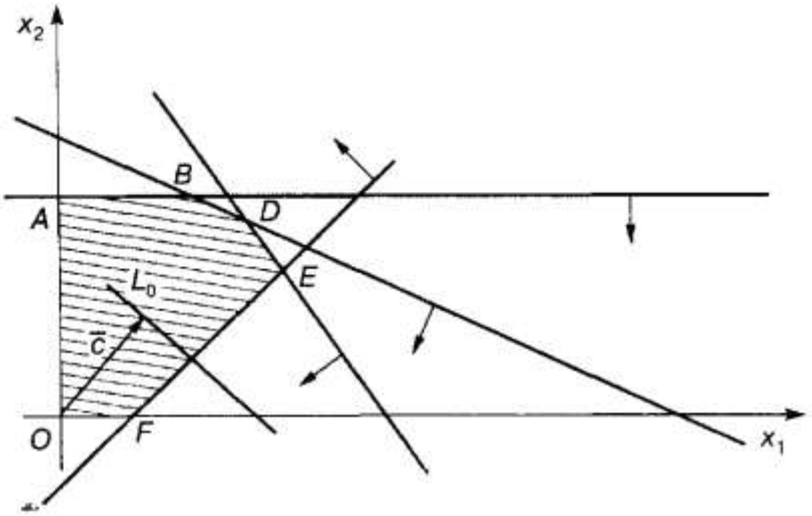
$$L(x)=16x_1+14x_2 \to \max,$$
$$0,8x_1+0,5x_2 \le 400, 0,4x_1+0,8x_2 \le 365,$$
$$x_1-x_2 \le 100, x_2 \le 350, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Чекланишлар системасининг тенгсизликларини тенгликларга айлантириб, ушбу тўғри чизиқларни чизамиз:

$$0,8x_1+0,5x_2=400, 0,4x_1+0,8x_2=365, x_1-x_2=100, x_2=350, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

U=OABDEF- деб мумкин бўлган ечимлар тўпламини белгилайлик, с(1,1)-вектор қурамиз. Мақсад функциянинг ўзгармаслик соҳаси $L_0=L_0(x)=16x_1+14x_2=const=c$ формула билан берилади, у тўғри чизиқдир. Уни с(16,14) вектор йўналишида силжитамиз.

$L_0(x) = const$ ўзгармаслик чизиғи U мумкин бўлган ечимлар соҳаси билан охирги марта D



Расм 2.1.

нуқтада учрашади. Бу нуқта иккита тўғри чизиқларнинг кесишидан ҳосил бўлади:

$$\{0.8x_1 + 0.5x_2 = 400,\ 0.4x_1 + 0.8x_2 = 365$$

Бу системани ечиб, ушбу нуқтани топамиз: $D = \bar{x} = (312.5, 300)$,

бу нуқтада мақсад функциянинг қиймати оптимал бўлади:

$$L(\bar{x}) = 16 * 312.5 + 14 * 300 = 9200\,c.$$

Шундай қилиб берилган чекланишларда фирма 312,5 кг қаймоқли музқаймоқ ва 300 кг шоколадли музқаймоқ ишлаб чиқса энг кўп фойда олар экан унинг даромади 9200 сўм бўлар экан.

2.4. График усул ёрдамида иқтисодий таҳлил

Юқорида ўрганилган масалани иқтисодий таҳлил қиламиз.

Масаланинг математик модели қуйидагича эди:

$$L(x) = 16x_1 + 14x_2 \to \max,$$

$$0,8x_1 + 0,5x_2 \le 400, \text{ (сут миқдорига чекланиш)} \quad (2.1)$$

$$0,4x_1 + 0,8x_2 \le 365, \text{ (қўшимчаларга чекланиш)} \quad (2.2)$$

$$x_1 - x_2 \le 100, \text{ (талабга бозор чекланиши)} \quad (2.3)$$

$$x_2 \le 350, \text{ (талабга бозор чекланиши)} \quad (2.4)$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$$

Топилган оптимал ечимга асосан, фирма бир суткада 312,5 кг қаймоқли музқаймоқ ва 300 кг шоколадли музқаймоқ ишлаб чиқиши керак экан. Бунда мумкин бўлган даромад 9200 сўм бўлар экан. Масаланинг математик моделидан кўринадики, бу даромадни хом ашё заҳирасига қараб ўзгартириш мумкин. Масалани таҳлил қилиш учун кўрамизки, чекланишлар тўғри чизиқлари актив ёки пассив бўлиши мумкин. Чекланиш оптимал нуқтадан ўтса актив дейилади, акс ҳолда пассив чекланиш дейилади.

Агар чекланиш актив бўлса, мос хом ашёни дифицит деймиз, чунки у тўла фойдаланилади. Агар чекланиш пассив бўлса, у ортиқча миқдорга эга бўлади.

(2.1) муносабатнинг ўнг томонни сут ресурси бўйича оширишни кўрайлик. (2.1) тўғри чизиқни ўзига-ўзини параллел кўчириш натижасида, токи тўғри чизиқлар (2.2), (2.3) билан М нуқтада кесишгунча чекланиш (2.1) актив бўлиб қола беради. М нуқтани (2.2), (2.3) тўғри чизиқларнинг кесишишидан топамиз:

$$0,4x_1 + 0,8x_2 = 365, x_1 - x_2 = 100.$$

Демак, $M(370,83;270,3)$.

М нуқтанинг координаталарини (2.1) тенгламага қўйиб, сут учун энг кўп мумкин бўлган суткалик запас миқдорини топамиз:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 = 0,8 \cdot 370,83 + 0,5 \cdot 270,3 = 432,1 \text{ кг},$$

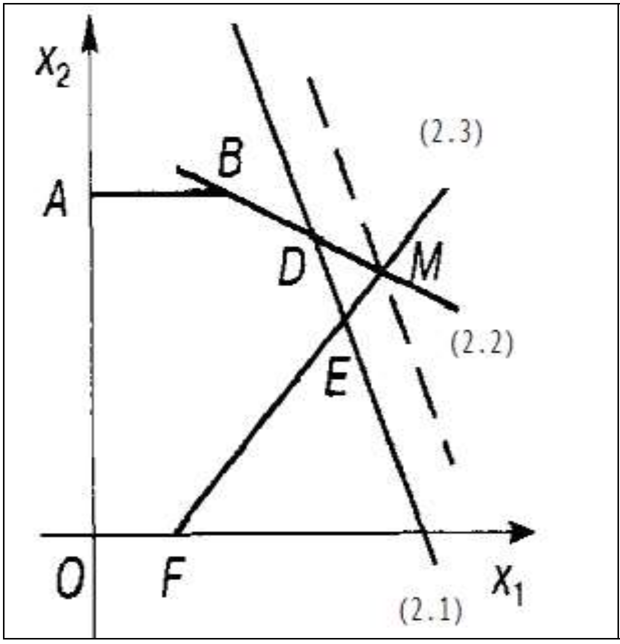
бунда даромад миқдори ушбу миқдорга ошади

$$L(\overline{x}) = 16 \cdot 370,83 + 14 \cdot 270,3 = 9724,9 \text{ р.}$$

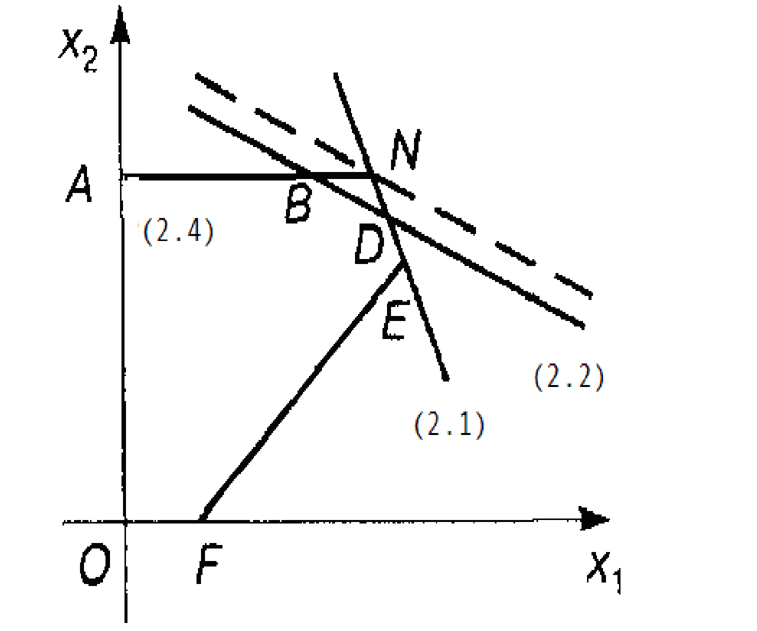
Қўшимчалар бўйича чекланишларни ошириб музқаймоқ ишлаб чиқаришни оширишни кўриб чиқамиз (р. 2.3). (2.2) тўғри чизиқни ўзини ўзига ўнгга параллел кўчириб (2.1) ва (2.2) тўғри чизиқлар билан N ча давом эттириамиз. Бунда чекланиш (2.2) актив бўлиб қола беради. Нуқта N ни ушбу тўғри чизиқлар кесишмаси сифатида топамиз:

$$0,8x_1 + 0,5x_2 = 400, x_2 = 350$$

Бу ердан топамиз $N(281,25; 350)$.



Расм 2.2.



Расм 2.3.

Суткалик мумкин бўлган қўшимчалар учун запас миқдорини ошириш мумкин, токи

$$0,4x_1 + 0,8x_2 = 0,4 \cdot 281,25 + 0,8 \cdot 350 = 392,5 \text{ кг},$$

бунда даромад суткада қуйидаги миқдоргача ошади:

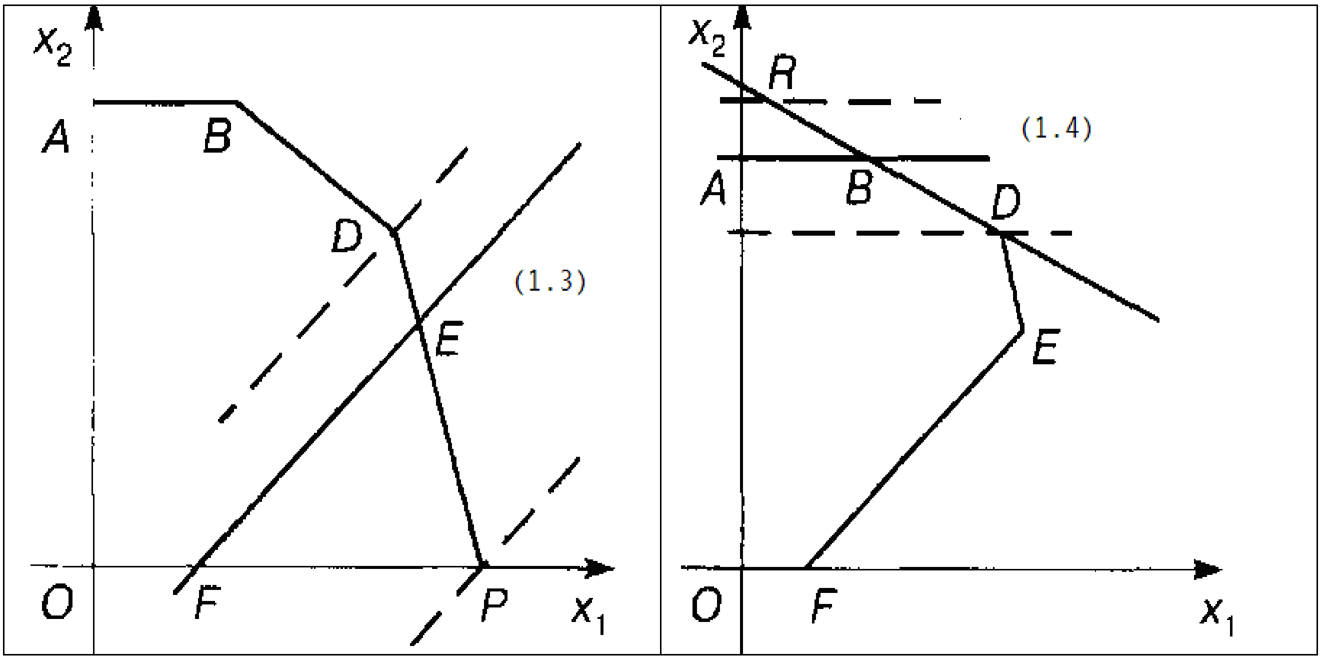
$$L(\bar{x}) = 16 \cdot 281,25 + 14 \cdot 350 = 9400 \text{ р.}$$

Энди пассив чекланишлар (20.3) ва (20.4) ларнинг ўнг томонларини оширишни кўрайлик. Оптимал ечимни ўзгартирмасдан (р. 20.4), тўғри чизиқ (20.3) ни ўзига параллел равишда юқорига D(312,5; 300) нуқта билан кесишгунча давом эттириш мумкин, яъни (20.3) чекланишнинг ўнг томонини қуйидагича камайтириш мумкин 312,5-300=12,5 кг.

Тўғри чизиқ (20.3) ўзига параллел равишда OX_1 ўқ билан P(500; 0) нуқтада кесишгунча давом эттириш мумкин. Яъни (20.3) чекланишнинг ўнг томонини 500 кг гача ошириш мумкин.

Ш.қ. ўзгармас оптимал ечим учун, истеъмолчи талаби қаймоқли ва шоколадли музқаймоққа 12,5 кг дан 500 кг гача ортиши мумкин.

Худди шундай усулда, оптимал ечим ўзгармай қолган ҳолда (р. 20.5), тўғри чизиқ (20.4) ни ўзини ўзига параллел равишда юқорига OX_2 ўқи билан R(0; 456,25) нуқтада кесишгунча ёки пастга тўғри чизиқ (20.1) билан D(312,5; 300) нуқтада кесишгунча давом эттириш мумкин.



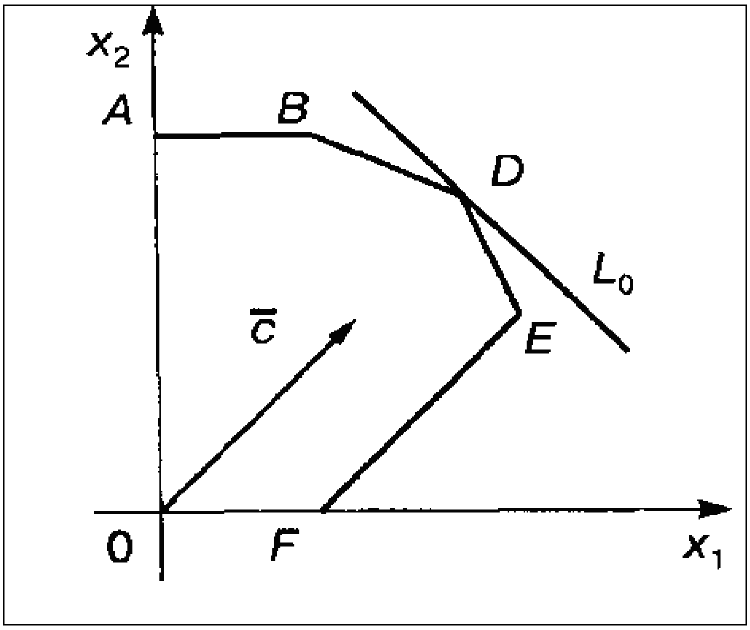
Расм 2.4. Расм 2.5.

Ш.қ. ўзгармас оптимал ечимда шоколадли музқаймоққа нисбатан истеъмолчиларнинг қизиқиши 300 кг .дан 456,25 кг гача ортиши мумкин.

Энди ўзгармас оптимал ечимда мақсад функциянинг коэффициентлари бўйича, яъни музқаймоққа нархлар бўйича таҳлил ўтказайлик.

Мақсад функциянинг ўзгармаслиги қуйидагича содир бўлиши мумкин (р. 2.6):

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 = \text{const}.$$



Расм 2.6.

Мақсад функцияни берувчи тўғричизиқнинг (20.1) бурчак коэффициенти тенг:

$$K_1 = -8/5.$$

Тўғри чизиқлар устма-уст тушганлиги учун, то $K = K_1$, бу ердан, $c_2 = 14$ да $c_{1\max} = 22{,}4$. Коэффициент c_1 ни мақсад функция ўзгармаслик чизиғини тўғри чизиқ (20.2) билан устма-уст тушгунча давом эттириш мумкин. Шунинг учун,

$$-c_1/14 = -1/2 \Rightarrow c_{1\min} = 7.$$

Шундай қилиб, агар 1 кг қаймоқли музқаймоқ нархи 7 с. Дан 22,4 с. гача ошса, при фирма даромади 6 387,5 с.дан 11200 с. Гача ошар экан.

Худди шундай, $c_1 = 16$ деб туриб, 1 кг. шоколадли музқаймоқнинг нархини, 10 с.дан то 32 с. гача оширсак, фирма даромади, 8000 с. дан 14 600 с.гача ошади.

Ана таҳлил мана таҳлил. Нималарни у бермайди.

2.5. Машқлар

График усул билан ечинг.

2.1. $U = \{2x_1 + 3x_2 \le 6, 2x_1 - 3x_2 \le 3, x_1, x_2 \ge 0\}$, $L(\overline{x}) = 3x_1 + x_2 \to \max, x \in U$ ни топинг.

2.2. $U = \{x_1 - x_2 \ge 0, x_1 - 5x_2 \ge -5, x_1, x_2 \ge 0\}$, $L(\overline{x}) = 2x_1 - 10x_2 \to \min, x \in U$ ни топинг.

2.3. $U = \{x_1 + 4x_2 \ge 8, x_1 \le 4, 2x_2 \ge 5, x_1, x_2 \ge 0\}$ $L(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max, x \in U$ ни топинг.

2.4. $U = \{x_1 - x_2 \le 3, -3x_1 + x_2 \le 6, x_2 \ge 4, x_1, x_2 \ge 0\}$ $L(\overline{x}) = 3x_1 + 5x_2 \to \max, x \in U$ ни топинг.

2.5. $U = \{3x_1 + x_2 \ge 9, x_1 + 2x_2 \ge 8, x_1 + 6x_2 \ge 12, x_1, x_2 \ge 0\}$ $L(\overline{x}) = 4x_1 + 6x_2 \to \min, x \in U$ ни топинг.

2.6. $U = \{3x_1 + 5x_2 \le 18, 2x_1 - x_2 \ge 0, 5x_1 - 3x_2 \le 15, x_1, x_2 \ge 0\}$ $L(\overline{x}) = 4x_2 \to \min, x \in U$ ни топинг.

2.7. $U = \{5x_1 + 3x_2 \le 15, 5x_1 + 4x_2 \ge 20, x_2 \ge 5, x_1, x_2 \ge 0\}$ $L(\bar{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max, x \in U$ ни топинг.

2.8. Иккита озиқ модда А, В ларда иккита фойдали минераллар $П_1$, $П_2$ бор. $П_1$ минерал кунига 200 бирликдан кам бўлмаслиги керак. $П_1$ минералнинг 1 бирлигининг нархи 2 сўм, $П_2$- ники мос равишда 180 ва 4 сўм. Озиқ моддаларнинг 1 бирлигининг нормаси, улардаги фойдали минералларнинг миқдори ушбу жадвалда келтирилгпн.

Овқатланишнинг минимал оптиал рационини шундай аниқлангки, инсон керакли зиқа ва минералларни олсинда ва нархи энг кичик бўлсин.

Ж. 2. 2 .

Озуқа модда	Энг кам норма	1бирлик озуқада минералларнинг мавжудлиги	
		$П_1$	$П_2$
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2
Минералларнинг нормаси		200	180

График усул асосида иқтисодий таҳлил қилинг.

2.9. $U = \{2x_1 + 4x_2 \le 16, -4x_1 + 2x_2 \ge 8, x_1 + 3x_2 \ge 9, x_1, x_2 \ge 0\}$ $L(\bar{x}) = x_1 + x_2 \to \max, x \in U$ ни топинг.

2.10. Фирма икки хил маҳсулот ишлаб чиқаради : *А* и *В*. Бунда 4 хил хом ашё ишлатилади. При этом используется сырье четырех видов. Хом ашёнинг маҳсулотларнинг 1 бирлигини ишлаб чиқиш учун хом ашё сарфи Жадвал 2.3 да берилган. Хом ашё заҳираси ва маҳсулотнинг 1 бирлигининг нархи жадвалда берилган.

Ж. 2.3.

Маҳсулот	Хом ашё				Маҳсулотнинг бир бирлигининг нархи
		2		4	
А		1		2	300
В		0		1	200
Заҳира	1	4		1 0	

Фирмага энг кўп даромад берувчи ишлаб чиқариш режасини топинг.

2.11. *А* и *В* деталларнинг қайта ишлаш учта станокда бажарилади, ҳар бир детал станокларда кетма-кет бажарилади. Деталларни сотишдан фойда 100 ва 160 сўм. Бошланғич маълумотлар Жадвал 2. 4 да берилган.

Жадвал 2.4

Станоклар	1 детални станокда қайта ишлаш вақт нормаси, с		Станокнинг ишлаш вақти, с.
	А	В	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100
Талаб	300	200	

Фирманинг даромадини энг кўп қилувчи режани топинг.

Мундарижага

М3. ЧПМНИ ЕЧИШНИНГ СИМПЛЕКС УСУЛИ

3.1. Масаланинг умумий қўйилиши

Усул универсал бўлиб, $L(x)\to\max, Ax=b, x\geq 0$ кўринишдаги ихтиёрий каноник ЧПМ ни еча олади. Симплекс усул ғояси қуйидагидан иборат: бирор таянч $0\leq x_0\in U$ режадан бошлаб, шундай чекли сондаги таянч режалар $0\leq x_k\in U, k=1,...,N=C_n^m$, кетма-кетлиги топиладики, $f(x_0)\leq f(x_1)\leq...\leq f(x_n)$ тенгсизликлар бажарилади. Таянч ечимлар сони чекли бўлганлигидан, чекли сондаги қадамдан сўнг оптимал ечимга етиб борамиз.

3.2. Симплекс усул алгоритми

Аввало, $m=rank(A)$ дейлик. У ҳолда алгебрадан маълумки, А матрицада шундай $m=rank(A)$ та устун борки, улар чизиқли эркли. Бу устунларни базис устунлар деймиз. Гаусс усулининг назариясига асосан, шундай $m=rank(A)$ ноъмалумлар, базис ўзгарувчилар ва $n-m$ ноъбазис ўзгарувчилар борки, базис ўзгарувчилар нобазис ўзгарувчилар орқали ифодаланади:

$$x_i+\sum_{j=m+1}^{n}h_{ij}x_j=f_i\Rightarrow x_i=-\sum_{j=m+1}^{n}h_{ij}x_j+f_i, i=1,...,m \qquad (3.1)$$

Энди $L(x)=\sum_{j=1}^{m}c_jx_j+\sum_{j=m+1}^{n}c_jx_j$, деб, унинг биринчи қисмига базис ўзгарувчиларни қўямиз ва мақсад функкцияни қуйидаги кўринишга келтирамиз:

$$L(x)+\sum_{j=m+1}^{n}\Delta_jx_j=\Delta_{n+1}, \Delta_j=\sum_{i=1}^{m}h_{ij}c_i-c_j, \Delta_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}c_if_i. \qquad (3.2)$$

Энди, (3.1), (3.2) асосида симплекс усулнинг қуйидаги қоидаларини келтирамиз.

1.ЧПМ каноник шаклда бўлсин. (Ноканоник ЧПМ каноник шаклга келтирилади.).

2. Бошланғич таянч ечим $0\leq x_0\in U$ ни топамиз ва уни оптималликка текширамиз. Бунинг учун симплекс жадвал тузамиз Ж.3.1. жадвалнинг биринчи сатридан бошлаб, токи m-сатригача мақсад функция ва чекланишлар системаси асосида тузилади. Индекслар сатри деб аталувчи сатр Δ_j қуйидагича топилади:

$$\Delta_j=\sum_{i=1}^{m}h_{ij}c_i-c_j, j=1,...,n;\quad \Delta_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}f_ic_i.$$

Ж 3.1.

c_i	Базис	c_1	c_2	…	c_m	c_{m+1}	…	c_n	$L(\overline{x})$
	ўзгарувчилар	x_1	x_2	…	x_m	x_{m+1}	…	x_n	f_i
c_1	x_1	1	0	…	0	$h_{1,m+1}$	…	$h_{1,n}$	f_1
c_2	x_2	0	1	…	0	$h_{2,m+1}$	…	$h_{2,n}$	f_2
	…		…	…	…	…	…	…	…
c_m	x_m	0	…	…	1	$h_{m,m+1}$	…	$h_{m,n}$	f_m
	Δ_j	0	….	…	0	Δ_{m+1}		Δ_n	$\Delta_{n+1}=L(\overline{x})$

ЧПМ ни максимумга ечишда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

— агар барча баҳолар $\Delta_j \geq 0$ бўлса, у ҳолда топилган таянч ечим *максимал оптимал* ечим бўлади;

— агар бирор баҳо $\Delta_j \leq 0$ бўлиб, унга мос ўзгарувчига мос чекланишларда барча коэффициентлар манфий бўлса, масалани ечишни тўхтатамиз, чунки, $L(\overline{x}) \to \infty$, яъни мақсад функция м.б.е.т. U да чегараланмаган;

— агар бирор баҳо $\Delta_j \leq 0$ бўлиб, шу ўзгарувчига мос чекланиш тенгламалари олдида бирорта мусбат коэффициент бўлса, у ҳолда бошқа таянч ечимга ўтиш керак ва мақсад функция қийматинии катталаштириш керак;

— агар индекслар сатрида бир нечта манфий баҳолар бўлса, у ҳолда базис ўзгарувчилар устунига модули энг катта бўлган манфий баҳоли ўзгарувчини киритиш керак.

Агар бирор баҳо манфий бўлса,яъни $\Delta_k < 0$ бўлса, у ҳолда k-устунни калит (ҳал қилувчи) устун деб оламиз. Калит (ҳал қилувчи) сатр деб, мусбат озод ҳадларни $b_i \geq 0$ калит устундаги мусбат коэффициентлар $h_{ij} > 0$ нисбати $b_s / h_{sk} = \max\limits_{h_{ik}>0}(b_i / h_{ik})$ энг катта бўлган индексга мос сатрни оламиз. Калит устун ва калит сатрлар кесишган катакдаги элемент $h_{sk} > 0$ калит (ҳал қилувчи) элемент дейилади.

Изоҳ. Агар мақсад функциянинг *минимал* оптимал ечимнинг қидирилаётган бўлса, унинг оптималлик шарти барча баҳоларнинг манфийлигидан иборат: $\Delta_j \leq 0, j = 1,...,n$.

3. Симплекс жадвалнинг 2- қадамини қуйидаги қоида асосида тўлдирамиз:

— калит сатрни калит элементга бўлиб ўз жойига ёзамиз;

— базис устунларни тўлдирамиз;

— жадвалнинг бошқа элементларини “тўғритўртбурчак” қоидаси асосида тўлдирамиз. Баҳолар ҳам шу қоида асосида тўлдирилади. Сўнг янги таянч ечим топамиз, уни оптималликка текширамиз ва ҳ.к. Бу жараённи оптимал ечим топилгунча давом эттирамиз.

“Тўғритўртбурчак” қоидаси қуйидагидан иборат: фараз қилайлик, $h_{sk} > 0$-ҳал қилувчи элемент бўлсин. У ҳолда янги қадамдаги h'_{ij} элемент қуйидагича топилади:

$$h'_{ij} = h_{ij} - \frac{h_{ik} h_{sj}}{h_{sk}}, i, s = 1..m, j, k = 1..n.$$

3.3. Симплекс усулни қўллашга доир масалалар ечиш.

Корхона уч хил ишлаб чиқариш ресурсига эга: (хом ашё, қурол яроғ, электрэнергияси) ва икки хил усулда маҳсулот ишлаб чиқаради. Ресурсарнинг ойлик сарфи ва ҳар бир маҳсулот бўйича ресурсарнинг мавжуд заҳираси, ҳар бир усулда ишлаб чиқариладиган маҳсулот сони Жадвал 3.2 да берилган.

Ж.3.2.

Ишлаб чиқариш ресурслари	1 ой учун ресурслар сарфи		Мавжуд умумий ресурс
	1усул билан	2 усул билан	
Хом ашё	1	2	4
Техника	1	1	3
Электрэнергия	2	2	8
Иш.чиқ. маҳсулот сони (мингта)	3	4	

Корхона энг кўп маҳсулот ишлаб чиқариш учун мавжуд ресурсларда неча ой ишлаши керак?

Ечиш. Масланинг математик моделини тузамиз. Белгилаш киритамиз: x_1 — корхонанинг 1 усул билан маҳсулот ишлаб чиқариш вақти, x_2 — 2 усул билан маҳсулот ишлаб чиқиш вақти. Масаланинг математик модели қуйидагича бўлади :

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,$$
$$U(x) = \{x_1 + 2x_2 \le 4, x_1 + x_2 \le 3, 2x_1 + x_2 \le 8, x_1, x_1 \ge 0\}$$

1-усул. Симплекс усул. Масалани каноник кўринишга келтирамиз:

$$L(\bar{x}) = 3x_1 + 4x_2 \to \max,,$$
$$x_1 + 2x_2 \le 4,$$
$$x_1 + x_2 \le 3,$$
$$2x_1 + x_2 \le 8,$$
$$x_1, x_1 \ge 0$$

1 қадамнинг симплекс жадвалини қурамиз :

Ж.3.3

c_i	Базис	3	4	0	0	0	L(x)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_3	1	2	1	0	0	4
0	x_4	1	1	0	1	0	3
0	x_5	2	1	0	0	1	8
Δ_j		-3	-4	0	0	0	0

Дастлабки таянч ечим қурамиз:

$$\bar{X}_1 = (0,0,4,3,8), L(\bar{x}_1) = 0$$

Индекслар сатрида 2 та $\Delta_j \le 0$ манфий баҳо мавжуд. Демак, таянч ечим оптимал эмас ва уни яхшилаш мумкин. Калит устун сифатида x_2 ўзгарувчининг устунини оламиз, чунки $|-4| > |-3|$. Калит устун сифатида min (4/2,3/l, 8/1) = min (2, 3, 8) = 2 бўлганлиги учун x_3 сатрини оламиз. 2 қадамнинг симплекс жадвалини қурамиз (жадвал 3.4):

Бу ердан оламиз:

$$\bar{X}_2 = (0,2,0,1,6), L(\bar{x}_2) = 8$$

Ж 3.4.

c_i	Базис	3	4	0	0	0	L(x)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	½	1	½	0	0	2
0	x_4	½	0	-1/2	1	0	1
0	x_5	3/2	0	-1/2	1	1	6
Δ_j		-1	0	2	0	0	8

Индекслар сатрида 1 та манфий баҳо мавжуд. Топилган таянч ечимни яна яхшилаймиз. Калит элемент сифатида ½ ни оламиз. 3 қадамнинг симплекс жадвалини яратамиз жадвал 3.5:

Ж.3.5.

c_i	Базис	3	4	0	0	0	L(x)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
4	x_2	0	1	1	-1	0	1
3	x_1	1	0	-1	2	0	2
0	x_5	0	0	1	-3	1	3
Δ_j		0	0	1	2	0	10

Барча баҳолар мусбат $\Delta_j \geq 0$, демак топилган таянч ечим оптимал:

$$\bar{x} = (2,1,0,0,3), L(\bar{x}) = 10$$

Шундай қилиб, корхона 1 усул билан 1 ой, 2 усул билан 1 ой ишласа, даромад 10000 та маҳсулотга кўтарилар экан.

2-усул. Шу масалани MathCAD ёрдамида ечиб, қуйидаги бир хил ечимни оламиз:

Индекслар боши	ORIGIN := 1
Мақсад функция	$L(x) := 3 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2$
Матрица Вектор	$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ $b := \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix}$
Бош-ч итерация	$x := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Блок боши	Given
Чекланишлар	$A \cdot x \leq b \quad x \geq 0$
	Given $\quad r := \mathrm{Maximize}(L, x)$
Натижалар	$r^T = (2 \ \ 1) \quad L(r) = 10$

Демак, MathCAD ёрдамида масалани ечиб аниқ жавобни олдиндан топиб олиш мумкин экан.

3.4. Альтернатив оптимум

ЧПМ ни СУ билан ечишда максимум масаласида оптималлик шарти $\Delta_j \geq 0$ дир, минимум масаласида эса $\Delta_j < 0$ шартидир. Агар максимум масаласида бирор қадамда бирор баҳо $\Delta_j = 0$, ва бошқа баҳолар $\Delta_j > 0$ бўлса, (минимум масаласида $\Delta_j < 0$ бўлиб қолса), у ҳолда, калит устун сифатида баҳоси $\Delta_j = 0$ бўлган устунни олсак, ва янги оптимал ечим топсак мақсад функция қийматини ўзгармаганлигини кўрамиз. Бу ҳолда масала альтернатив оптимумга эга дейилади.

Альтернатив оптимумнинг шарти бирорта эркин ўзгарувчининг индекслар сатрида баҳосининг нолга тенглигидир: $\Delta_j = 0$.

Агар бирорта баҳо нолга тенг бўлса умумий ечим қуйидагича топилади: $\bar{x} = \alpha \bar{x}_1 + (1-\alpha)\bar{x}_2, 0 \leq \alpha \leq 1.$

Агар икки ва ундан кўп эркин ўзгарувчиларнинг баҳолари 0 га тенг бўлса умумий оптимал ечим қуйидагича топилади:

$$\bar{x}_{опт} = \sum_{i=1}^{s} \alpha_i \bar{x}_i, \quad \sum_{i=1}^{s} \alpha_i = 1 \; .$$

Алтернатив оптимум мавжуд масалаларда масаланинг математик моделига бошқа оптималлик шартларини киритиш имкониятлари туғилади.

Мисол. ЧПМ берилган

$$L(x) = 2x_1 - 4x_3 + 2x_5 \to \min,$$
$$U(x) = \{x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_5 = 7, - x_2 + 4x_3 + x_4 = 12, x_j \geq 0,\ j = 1,..,6\}$$

Ечиш. Симплекс жадвал қурамиз (жадвал 3.6).

Индекслар сатрида битта мусбат баҳо мавжуд. Уни яхшилашга ҳаракат қиламиз. Калит элемен 4 га тенг. 2 симплекс жадвал қурамиз (жадвал 3.7). Қуйидаги жадвалларни ҳосил қиламиз.

$$\bar{x}_1 = (10, 0, 3, 0, 0)$$

Ж.3.6.

c_i	БЎ	0	2	-4	0	2	L(x)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_1	1	3	-1	0	2	7
0	x_4	0	-2	4	0	0	12
Δ_j		0	-2	4	0	0	10

Ж.3.7.

c_i	БЎ	0	2	-4	0	2	L(x)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
0	x_1	1	5/2	0	¼	2	10
0	x_3	0	-1/2	1	¼	½	3
Δ_j		0	0	0	-1	-2	-12

Ж.3.8.

c_i	БЎ	0	2	-4	0	2	L(x)
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	b_i
2	x_2	2/5	1	0	1/10	4/5	4
-4	x_3	1/5	0	1	3/10	9/10	5
Δ_j		0	0	0	-1	-4	-12

Δ_2 = 0 бўлгани учун, масала альтернатив оптимумга эга. Яна битта оптимал ечим топамиз бунинг учун базис ўзгарувчи x_1 ўрнига эркин ўзгарувчи x_2 ни киритамиз (жадв. 3.8).

Ҳосил қиламиз

$$\bar{x}_2 = (0, 4, 5, 0, 0)$$

Оптимал ечим координаталарини топамиз :

$$x_1 = 10t + (1-t)0 = 10t, x_2 = 0t + (1-t)4 = 4 - 4t,$$

$$x_3 = 3t + (1-t)5 = -2t + 5, x_4 = 0t + (1-t)0 = 0, x_5 = 0t + (1-t)0 = 0.$$
$$\bar{x} = (10t, 4 - 4t, 5 - 2t, 0, 0)\ .$$

t га [0,1] кесмадан ҳар хил қийматлар бериб, ҳар хил оптимал ечимлар $\bar{x}$ ни топамиз, лекин барибир $L(\bar{x})$ = -12.

3.5. Мисоллар

Қуйидаги масалаларни симплекс усул билан ечинг.

3.1. $L(\bar{x}) = x_1 - 3x_2 - 5x_3 - x_4 \to \max$,

$U(x)=\{x_1+4x_2+4x_3+x_4=5, x_1+4x_2+4x_3+x_4=5, x_j\geq 0, j=1,..,4\}$

3.2. $L(\bar{x})=x_1+2x_2+3x_3\to\min$,
$U(x)=\{x_1+2x_2+3x_3+x_4=10, 2x_1+x_3=3, x_1+x_2+2x_3=6, x_j\geq 0, j=1,..,4\}$

3.3. $L(\bar{x})=-2x_1-x_2+x_3+x_4\to\max$,
$U(x)=\{x_1-x_2+2x_3-x_4=2, 2x_1+x_2-3x_3+x_4=6, x_1+x_2+x_3+x_4=7, x_j\geq 0, j=1,..,4\}$

3.4. $L(\bar{x})=3x_1+x_2+2x_3\to\min$,
$U(x)=\{2x_1+x_2+x_3\leq 40, x_1+2x_2+2x_3\leq 10, x_j\geq 0, j=1,..,3\}$

3.5. $L(\bar{x})=x_1+x_2+x_3\to\max$,
$U(x)=\{3x_1+x_2-x_3\leq 5, 3x_1+2x_2+x_3\leq 7, x_j\geq 0, j=1,..,3\}$

3.6. $L(\bar{x})=x_1+2x_2+2x_3\to\min$, $U(x)=\{x_1+x_2+x_3\geq 4, x_1-x_2+x_3\geq 2, x_j\geq 0, j=1,..,3\}$

3.7. $L(\bar{x})=3x_1+x_2+x_3+x_4\to\max$,
$U(x)=\{2x_1+x_2+4x_3+3x_4\leq 3, 3x_1-x_2+2x_3+5x_4\leq 1, x_j\geq 0, j=1,..,4\}$

3.8. $L(\bar{x})=x_1-5x_2-3x_3\to\max$,
$U(x)=\{2x_1+x_2+4x_3+3x_4\leq 3, 3x_1-x_2+2x_3+5x_4\leq 1, x_j\geq 0, j=1,..,4\}$

3.9. $L(\bar{x})=x_1+x_2+x_3+x_4\to\min$
$U(x)=\{3x_1+2x_2+x_3\geq 8, x_1+6x_2+9x_3+13x_4\geq 4, x_j\geq 0, j=1,..,4\}$

3.10. $L(\bar{x})=3x_1+5x_2+4x_3\to\max$
$U(x)=\{3x_1+4x_2+2x_3\leq 9, 2x_1+5x_2+x_3\leq 8, x_1+2x_2+4x_3\geq 8, x_j\geq 0, j=1,..,3\}$

3.11. Механика заводи икки турдаги детал ишлаб чиқиш учун токарлик, фрезерли ва сварка аппаратларидан фойдаланади. Бунда ҳар бир детални қайта ишлаш учун икки хил технологик усуллардан фойдаланилади. Зарур маълумотлар жадвал 3.9 да берилган.

Аппаратларни шундай ишлатиш керакки, заводга энг кўп даромад келсин.

Ж.3.9.

Техника	Деталлар				Вақтнинг фойдали фонди, ст-к.соат
	1		2		
	Технологик усул				
	1	2	1	2	
Фрезерли	2	2	3	0	20
Токарли	3	1	1	2	37
Сваркали	0	1	1	4	30
Фойда,ш.б.	11	6	9	6	

3.12. Тижорат фирмаси уч хил товарларни сотиш учун икки хил ресурслардан фойдаланади: вақт, савдо залларининг майдончалари. Ҳар бир турдаги товарларни бир партиясини сотиш учун ресурсларнинг сарфи жадвал 3.10 да келтирилгпн. Товарларнинг ҳар партиясини сотишдан фойда 1-хил товалар учун — 5 минг сўм, 2-хил учун — 8 минг сўм, 3-хил учун — 6 минг сўм.

Фирмага максимал фойда келтирувчи савдо сотиқнинг структураси топилсин.

Ж.3.10.

Ресурслар	Товар тури			Ресурслар миқдори
Вақт, одам.с.	1	2	3	
Майдон, м^2	0.5	0.7	0.6	370
	0.1	0.3	0.2	90

3.13. Фирма талабгор 4 хил товар ишлаб чиқаради. Ойлик товар ишлаб чиқариш режаси 1 ва 3 товарлар учун 10 та, 2 хил товар учун 200та, 4 хил товар учун 120 та. Товар ишлаб чиқариш учун хом ашё сарфи жадва 3.11 та келтирилган.

Ж.3.11.

Хом ашё	Сарф харажат нормаси				Хом ашё захираси
	1	2	3	4	
1	5	1	0	2	1000
2	4	2	2	1	600
3	1	0	2	1	150

1 хил маҳсулотни сотишдан фойда 6 минг сўм, 2 хил учун 2 минг сўм, 3 хил учун 2,5 минг сўм, 4 хил учун 4 минг сўм.

Фирманинг ойлик оптимал даромад келтирувчи режаси топилсин.

3.14. Металлургия заводи A_1, A_2, A_3 металлардан B_1, B_2, B_3 товар ишлаб чиқади. Режалаштирган даврда завод 640 т A_1 металл ва 800 т A_2 металл ишлатиши керак ва A_3 металлдан 860 т дан кам бўлмаган миқдорда ишлатиши керак.

Металлардан сарфлаш нормаси ва таннархи жадвал 3.12 да келтирилган. Товарлар тайёрлашда энг кам сарф бўладиган режа топилсин.

Ж.3.12.

Металл тури	Металлни сарф қилиш тех.нормаси			Металлнинг заводдаги запаси
	B_1	B_2	B_3	
A_1	1.0	4.3	2.6	640
A_2	5.0	1.5	3.0	800
A_3	3.0	3.9	4.3	860
1 т. қоришма нархи	18	15	15	

3.15. Икки хил станокларда уч хил материал тўқилади. Материал тўқиш учун иплар ва бўёқлар ишлатилади. Жадвал 3.13 да станокларнинг қувватлари (минг станок соат) ва иплар ва 1000 кгли бўёқларнинг ресурслари, станокларнингқувватлари (метр/соат), иплар ва бўёқларнинг 1000 метрдаги сарфи ва 1 метр матералнинг нархи кўрсатилган.

Ж.3.13.

Ресурс тури	Ресурс ҳажми	Сарфнинг нормаси		
		1	2	3
1 тур станок	30	20	10	25
2 тур станок	45	8	20	10
Ип	30	120	180	210
Бўёқ	1	10	5	8
Нархи, ш. б.		15	15	20

Бу маълумотлар асосида қуйидаги масалалар ечилсин:

1) корхонанинг товар ишлаб чиқаришини максималлаштирувчи ассортименти топилсин;

2) уч хил материалнинг сонлари 2:1:3 деб ҳисоблаб, корхонанинг материал

ишлаб чиқишнинг оптимал режаси топилсин;

3) уч хил материалнинг 1 метрининг нархлари 8, 5 ва 15 бирлик сўм деб ҳисоблаб, корхона материал ишлаб чиқаришининг максималлаштирувчи ассортименти топилсин;

4) (1) масалани 1 турдаги станоклар 1 турдаги материал ишлаб чиқмайди деб ечинг.

Мундарижага

М4. ЧПМ да ИККИЁҚЛАМАЛИК

Ихтиёрий ЧПМ га унга бошқа *иккиёқлама* ЧПМ ни мос қўйиш мумкин. Бу икки масала бир бири билан боғлиқ бўлиб ягона иккиёқлама жуфтликни ташкил қилади. Иккиёқлама масалалар симметрик, носимметрик, аралаш иккиёқлама масалаларга бўлинади.

4.1. Иккиёқлама ЧПМ масалалар ва уларнинг математик моделларини

Симметрик иккиёқлама масала

Дастлабки ноканоник ЧПМ масаласи берилган бўлсин

$$L(x) = c \cdot x = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max, Ax \le b, x \ge 0, \qquad (4.1)$$

Бу масала учун иккиёқлама масаланинг математик моделини тузамиз. Бунинг учун:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1 & |y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_1 & |y_2 \\ .... & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m & |y_m \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, j = 1..n, i = 1..m.$$

— дастлабки масаланинг ҳар бир чекланишига янги ўзгарувчи y_i ни мос қўямиз;

— янги мақсад функция тузамиз, унинг коэффициентлари дастлабки масала чекланишларининг озод ҳадлари бўлади;

— янги чекланишлар системасини қурамиз. Уларнинг коэффициентлари дастлабки масала чекланишлар матрицасига транспонирланган бўлади. Тенгсизликлар тескари тенгсизликка айлантирилади.

— янги масалада чекланишлар системасининг озод ҳадлари дастлабки масаладаги мақсад функциянинг коэффициеннтлари бўлади. Барча ўзгарувчилар мусбат бўлиши керак. Иккиёқлама масаланинг математик модели қуйидагича бўлади :

$$S(y) = b \cdot y = b_1y_1 + b_2y_2 + ... + b_my_m \to \min, A^T y \ge c, y \ge 0,$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + ... + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + ... + a_{m2}y_m \ge b_1, \\ .... \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + ... + a_{mn}y_n \ge c_n, \ y_i \ge 0, i = 1..m, j = 1..n. \end{cases}$$

Носимметрик иккиёқлама масалалар

Дастлабки каноник масала берилган бўлсин

$$L(x) = c \cdot x = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \max, Ax = b, x \ge 0,$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 & |y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_1 & |y_2 \\ .... & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m & |y_m, \ \tilde{o}_i \ge 0, i = 1..m, j = 1..n. \end{cases}$$

Унга иккиёқлама масаланинг математик моделини тузамиз.

Иккиёқлама масаланинг моделини тузиш учун симметрик масла учун иккиёқлама масала тузиш қоидасига ўхшаш иш бажарамиз, фақат бироз ўзгаришлар ҳам бор:

— иккиёқлама масаланинг чекланишлари тенгсизликлар бўлади. Агар, мақсад функциянинг минимуми қидирилаётган бўлса, тенгсизликлар $\geq$, агар максимуми қидирилаётган бўлса, у ҳолда $\leq$;

— Ўзгарувчилар y_i — ишора бўйича ихтиёрий.

Демак, ккиёқлама масаланинг модели қуйидаги кўринишга эга

$$S(y) = b \cdot y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + ... + b_m y_m \to \min, A^T y \geq c,$$

$$\begin{cases} a_{11} y_1 + a_{21} y_2 + ... + a_{m1} y_m \geq c_1, \\ a_{12} y_1 + a_{22} y_2 + ... + a_{m2} y_m \geq b_1, \\ .... \\ a_{1n} y_1 + a_{2n} y_2 + ... + a_{mn} y_n \geq c_n. \end{cases}$$

y_i *лар ихтиёрий ишорали.*

Аралаш иккиёқлама масалалар

Дастлабки масала ҳам симметрик шартларга, ҳам носимметрик шартларга эга бўлсин. Иккиёқлама масала тузишда симметрик ва носимметрик маслалар учун иккиёқлама масалалар тузиш қоидаларига амал қилиш керак. Умумий қоидаларни ушбу жадвалга жойлаштирамиз

Ж.4.1.

№	Дастлабки масала	Иккиёқлама масала
1.Асосий масала	$L(x) = c \cdot x \to \max$, $Ax \leq b$, $x \geq 0$	$S(y) = b \cdot y \to \min$, $A^T y \geq c$, $y \geq 0$
2. Каноник масала	$L(x) = c \cdot x \to \max$, $Ax = b$, $x \geq 0$	$S(y) = b \cdot y \to \min$, $A^T y \geq c$, $\forall y$
3. Аралаш масала	$L(x) = c \cdot x \to \max$, $c = [c', c'']$, $x = [x', x'']$ $A_1 x' \leq b_1$, $A_2 x'' = b_2$, $x' \geq 0$ $x' = [x_1, .., x_{n_1}]$, $x'' = [x_{n_1+1}, .., x_n]$ $c' = [c_1, ..., c_{n_1}], c'' = [c_{n_1+1}, ..., c_n]$,	$S(y) = b \cdot y \to \min$, $b = [b', b'']$, $y = [y', y'']$ $A_1^T x' \geq c_1, A_2^T x'' \geq c_2, y' \geq 0$ $y' = [y_1, .., y_{m_1}], y'' = [y_{m_1+1}, .., y_m]$ $b_1 = [b_1, ..., b_{m_1}], b_2 = [b_{m_1+1}, ..., b_m]$,

4.2. Иккиёқламаликнинг асосий теоремалари

ТЕОРЕМА 1. Агар қўшма масалалардан бири оптимал ечимга эга бўлса, иккинчиси ҳам оптимал ечимга эга бўлади ва ихтиёрий оптимал ечимлар $\bar{x}$ *ва* $\bar{y}$ учун қуйидаги тенглик ўринли :

$$L(\bar{x}) \to \max = S(\bar{y}) \to \min \bullet$$

Агарда бирор қўшма масала $L(\bar{x})_{\max} \to \infty$ (*ёки* $S(\bar{y})_{\min} \to -\infty$) сабабли ечимга эга бўлмаса, иккинчиси ҳам ечимга эга бўлмайди.

ТЕОРЕМА 2. Мумкин бўлган ечимлар $\bar{x}$ ва $\bar{y}$ қўшма масалаларнинг оптимал ечимлари бўлиши учун ушбу муносабатларнинг бажаришлари зарур ва етарли:

$$\bar{x}_j(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\bar{y}_i - c_j) = 0,$$
$$\bar{y}_i(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\bar{x}_j - b_i) = 0.$$

Иккиёқламалик теоремалари бир қўшма масаланинг ечимидан иккинчи қўшма масаланинг ечимини келтириб чиқаради.

4.3. Икки ёқлама масалаларни ечиш

Симметрик масалаларниечиш

Иккиёқламалик теоремалари асосида масала ечишни кўрамиз:

Ж.4.2.

Дастлабки масала	Иккиёқлама масала
$L(x) = x_1 - x_2 \to \max$, $-2x_1 + x_2 \le 2 \quad \vert y_1$ $x_1 - 2x_2 \le 2 \quad \vert y_2$ $x_1 + x_2 \le 5 \quad \vert y_3$ $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0.$	$S(y) = 2y_1 + 2y_2 + 5y_3 \to \min$, $-2y_1 + y_2 + y_3 \ge 1 \quad \vert x_1$ $y_1 - 2y_2 + y_3 \ge -1 \quad \vert x_2$ $y_i \ge 0, i = 1..3.$

Дастлабки масалада 2 ўзгарувчи бор. Уни график усулда ечамиз ва оптимал ечимни топамиз: $\bar{x}_{\text{опт}} = (4, 1)$, ва бунда $L(\bar{x})_{\max} = 3$.

1-иккиёқламалик теоремасига асосан,

$$L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 3.$$

Энди x_1, $x_2 > 0$ бўлганлигидан, 2-иккиёқламалик теоремасига асосан, иккиёқлама масаланинг чекланишлар системаси қуйилагича бўлади:

$$\begin{cases} -2y_1 + y_2 + y_3 = 1, \\ y_1 - 2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

$\bar{x}_{\text{опт}}$ ни дастлабки чекланишлар системасмга қўямиз ва янги фикрлар топамиз:

$$\begin{cases} -2 \cdot 4 + 1 \le 2, -7 < 2 \Rightarrow y_1 = 0, \\ 4 - 2 \cdot 1 \le 2, 2 = 2 \quad \Rightarrow y_2 > 0, \\ 4 + 1 \le 5, 5 = 5 \quad \Rightarrow y_3 > 0. \end{cases}$$

У ҳолда қўшма масаланинг чекланишлар системаси қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} y_2 + y_3 = 1, \\ 2y_2 + y_3 = -1. \end{cases}$$

Бу ердан ҳосил қиламиз: $\bar{y} =$ (0, 2/3, 1/3), ва бунда $S(\bar{y})_{\min} = 3$.

Энди қўшма масаланинг ечими $\bar{y}$ = (0, 2/3, 1/3), $S(\bar{y})_{\min}$ = 3,берилган даб, дастлабки масаланинг ечимини топайлик.

Иккиёқламаликнинг 1 теоремасига мувофиқ, $L(\bar{x})_{\max} = S(\bar{y})_{\min} = 3$. y_2, $y_3 > 0$

эканлигидан,иккиёқламаликнинг 2- теоремасидан дастлабки масаланинг иккинчи ва учинчи тенгсизликлари тенгликка айланади:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 = 2, \\ x_1 + x_2 = 5. \end{cases}$$

Бу ердан $\overline{X}_{опт} = (4,1)$, бунда $L(\overline{x})_{\max} = 3$.

Масалани MathCADда ечиш.

```
Ikkiyoqlamalik
ORIGIN := 1    L(x) := x1 − x2    S(y) := 2·y1 + 2·y2 + 5·y3

       ( −2   1 )        ( 2 )                                              ( 1 )
A :=   (  1  −2 )   b := ( 2 )   x := ( 1 )   B := A^T   d := (  1 )   y := ( 0 )
       (  1   1 )        ( 5 )        ( 0 )                    ( −1 )        ( 0 )

Given  A·x ≤ b    x ≥ 0    r := Maximize(L, x)    r^T = (4  1)    L(r) = 3
Given  Given
B·y ≥ d        y ≥ 0    q := Minimize(S, y)    q^T = (0  0.667  0.333)    S(q) = 3
                                               B·y ≥ d
```

Носимметрик масалаларни ечиш

Ушбу масалаларни иккиёқламалик теормалари асосида ечайлик.

Ж.4.3.

Дастлабки масала	Иккиёқлама масала
$L(x) = 3x_1 + y_2 + 3x_3 + x_4 \to \min$, $2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 9 \quad \lvert y_1$ $x_1 + x_2 - 6x_3 - x_4 = 6 \quad \lvert y_2$ $x_i \ge 0, i = 1..4.$	$S(y) = 9y_1 + 6y_2 \to \max$, $2y_1 + y_2 \le 3 \quad \lvert x_1$ $-2x_1 + y_2 \le 1 \quad \lvert x_2$ $3y_1 - 6y_2 \le 3 \quad \lvert x_3$ $-2y_1 - y_2 \le 1 \quad \lvert x_4$ $y_{1,2}$ *–ихтиёрий ишорали*

,

Қўшма масалада 2 та ноъмалум. Уни график усулда ечамиз ва топамиз: $\overline{y} = (1/2, 2), S(\overline{y}) = 33/2$.

1- иккиёқламалик теоремасига мувлфиқ $L(\overline{x})_{\min} = S(\overline{y})_{\max} = 33/2$.

$\overline{y}$ ни қўшма масаланинг чекланишлар системасига қўямиз:

$$2 \cdot 1/2 + 2 \leqslant 3, \qquad 3 = 3,$$
$$-2 \cdot 1/2 + 2 \leqslant 1, \qquad 1 = 1,$$
$$3 \cdot 1/2 - 6 \cdot 2 \leqslant 3, -21/2 < 3 \to x_3 = 0,$$
$$-2 \cdot 1/2 - 2 \leqslant 1, -3 < 1 \to x_4 = 0.$$

$x_3 = x_4 = 0$ эканлигидан, дастлабки масаланинг чекланишлари қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 = 9, \\ x_1 + x_2 = 6. \end{cases}$$

Системани ечиб оламиз

$$\overline{x} = (21/4, 3/4, 0, 0), L(\overline{x}) = 33/2.$$

Аралаш иккиёқлама масалаларни ечиш

Аралаш иккиёқлама масалаларни ҳам иккиёқламалик теоремалари билан ечиш мумкин.

Ж4.4.

Дастлабки масала	Иккиёқлама масала
$L(x) = x_1 - 6x_2 - x_3 \to \max$, $x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 3 \quad \mid y_1$ $2x_1 + 3x_3 \le 4 \quad \mid y_2$ $x_i \ge 0, i = 1..3.$	$S(y) = 3y_1 + 4y_2 \to \min$, $y_1 + 2y_2 \ge 1 \quad \mid x_1$ $3y_1 \ge -6 \quad \mid x_2$ $3y_1 + 3y_2 \ge -1 \quad \mid x_3$ $y_1 - \textit{ихтиёрий ишорали}, y_2 \ge 0.$

Қўшма масаланинг ечимини график усулда топамиз:

$$\overline{x} = (1, 0, 2/3), L(\overline{x}) = 1/3.$$

1- Иккиёқламалик теоремасига мувофиқ

$$L(\overline{x}) = S(\overline{y}) = 1/3.$$

$x_1 > 0$, $x_3 > 0$ бўлганлиги учун, 2- теоремага асосан қўшма масаланинг биринчи ва иккинчи чекланишлари тенгсизликка айланади:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 1, \\ 3y_1 + 3y_2 = -1. \end{cases}$$

Бу ердан $y_1 = -5/3, y_2 = 4/3, \overline{y} = (-5/3, 4/3)$.

4.5. МАСЛАЛАР

Қуйидаги масалалар учун қўшма масалаларнинг математик модели қурилсин ва дастлабки масаланинг оптимал ечимига асосан қўшма масаланинг оптимал ечими топилсин.

22.1. $L(\overline{x}) = x_1 + 3x_3 + 3x_4 \to \min$,
$U(x) = \{x_1 + x_2 + 4x_3 + x_4 \ge 2, x_1 - x_2 + 3x_4 \ge -1, x_j \ge 0, j = 1..4\}$

22.2. $L(\overline{x}) = 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 \to$,
$U(x) = \{x_1 + 2x_2 - x_4 \le 4,\ x_1 - x_2 + x_3 \le 1, x_j \ge 0, j = 1..4\}$

22.3. $L(\overline{x}) = -x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 \to \min$,
$U(x) = \{2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 2,\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, x_j \ge 0, j = 1..4\}$.

22.4. $L(\bar{x}) = -3x_2 + x_3 - x_4 \to \max$,
$U(x)=\{3x_1+5x_2+x_3+x_4=32,\ -x_1+3x_2+x_3-x_4=8, x_j\geq 0,\ j=1..4\}$

22.5. $L(\bar{x}) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \min$,
$U(x)=\{2x_1-2x_2+3x_3+3x_4=9,\ x_1+2x_2-x_3+x_4=0, x_1-x_2+2x_3-x_4=0, x_j\geq 0,\ j=1..4\}$

Қўшма масаланинг математик моделини тузиб, унинг ечимига асосан, дастлабки масаланинг ечими топилсин.

22.6. $L(\bar{x}) = 1{,}5x_1 + 2x_2 \to \max$,
$U(x)=\{2x_1+x_2\geq 7, x_1+2x_2\geq 8, 3x_1+4x_2\geq 12, x_j\geq 0,\ j=1..2\}$

22.7. $L(\bar{x}) = x_1 - 2x_2 + x_4 \to \min$,
$U(x)=\{3x_1+x_2+8x_3-3x_4=5,\ 2x_1+x_2+5x_3-4x_4=4, x_j\geq 0,\ j=1..4\}$

22.8. $L(\bar{x}) = -2x_1 + x_2 \to \min$,
$U(x)=\{2x_1+x_2\leq 8, x_1-3x_2\geq 6, 3x_1+2x_2\geq 3, -x_1+3x_2\leq -5, x_j\geq 0,\ j=1..2\}$

22.9. Уч хил маҳсулот A, B ва C ишлаб чиқиш учун уч хил хом ашё ишлатилади. Уларнинг заҳираси 180, 210 и 236 кг. 1 товарга сарфланадиган хом ашё нормаси, 1 та товарнинг таннархи ушбу жадвал 4.5 да келтирилган.

Ж.4.5.

Хом ашё	1 та товарга хом ашё сарфи,кг			Хом ашё заҳираси,кг
	A	B	C	
1	4	2	1	180
2	3	1	3	210
3	1	2	5	236
Товар нархи, ш.б.	10	14	12	

Берилган масала учун қўшма масала тузилсин ва оптимал ечими топилсин.

Мундарижага

М5. ТРАНСПОРТ МАСАЛАСИ (ТМ)

5.1. Масаланинг умумий қўйилиши

ТМ — ЧПМ нинг кенг тарқалган кўринишидир. Унинг мақсади — товарларни транспортировка қилишнинг энг рационал йўлларини ва усулларини ишлаб чиқиш, ҳаддан ташқари узоқ, кесишувчан, такрорланувчан йўлларни топишдан иборатдир. Бу масалани ечиш товарларни ҳаракат йўлини қисқартириб, хом ашё, материаллар, ёқилғи, техника ва ҳ.к. билан таъминловчи фирмаларнинг харажатларини камайтиради.

Умумий ҳолда ТМ қуйидагича баён этилади: m та ишлаб чиқариш (таъминот) пунктлари $A_1, A_2, ..., A_m$ да бирор бир жинсли юк (қум, тупроқ, цемент, пахта, дон ва ҳ.к.) мос равишда $a_1, a_2, ..., a_m$ миқдорда мавжуд. Бу юкни n та истеъмол пунктлари $B_1, B_2, ...,$ B_n га $b_1, b_2, ..., b_n$ миқдорда етказиб бериш керак. A_i пунктдан B_j пунктга маҳсулотнинг бир бирлигини етказиб бериш таннархи c_{ij} га тенг.

Маҳсулот ташишнинг шундай режасини тузингки, барча юк энг кам ҳаражатлар билан ташиб кетилсин.

Мавжуд юклар заҳираси ва талаб этилган юклар нисбатига қараб, ТМ очиқ ёки ёпиқ бўлиши мумкин.

Таъриф 1. Агар юклар заҳираси ва талаб этилган юклар миқдори тенг бўлса, яъни

$$r = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j = 0,$$

тенглик ўринли бўлса, ТМ *ёпиқ* бейилади, акс ҳолда, ($r \neq 0$) бўлса, ТМ *очиқ* дейилади.

x_{ij} миқдор A_i пунктдан B_j пунктга олиб бориладиган юк миқдори бўлсин. Ёпиқ ТМ ни қараймиз. Унинг шартларини ушбу *тақсимот* жадвалида ёзамиз. (жадвал 5.1).

Ж. 5.1.

Омбор, пункт	Захира	B_1	B_2	$\cdots$	B_j	$\cdots$	B_n
Талаб		b_1	b_2	$\cdots$	b_j	$\cdots$	b_n
A_1	a_1	c_{11} x_{11}	c_{1j} x_{12}		c_{1j} x_{1j}		c_{1n} x_{1n}
A_2	a_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}		c_{2j} x_{2j}		c_{2n} x_{2n}
…	…						
A_i	a_i	c_{i1} x_{i1}	c_{i2} x_{i2}		c_{ij} x_{ij}		c_{in} x_{in}
…	…						
A_m	a_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}		c_{mj} x_{mj}		c_{mn} x_{mn}

ТМ нинг математик модели қуйидаги кўринишга эга:

$$L(x) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, x_{ij} \geq 0, i = 1,, m, j = 1..n.$$

Оптимал ечим ТМнинг чекланишлар системаси ва мақсад функцияга энг кичик қиймат берувчи матрица

$$\overline{x} = (\overline{x}_{ij})_{m \times n}$$

дан иборат бўлади. Транспорт масаласи, чизиқли программалаш масаласи сифатида, симплекс усул билан ечилиши мумкин. Лекин, ўзгарувчиларнинг кўплиги симплекс усулни қўллашни қийинлаштиради. Шунинг учун ТМ учун махсус усуллар ишлаб чиқилганки, бу усуллар ҳам симплекс усул каби уч этапдан ташкил топади, айнан:

— дастлабки таянч ечимни топиш;

— дастлабки таянч ечимни оптималликка иекшириш;

— бир таянч ечимдан бошқа яхшироқ таянч ечимга ўтиш.

Ҳар бир этапни алоҳида кўриб чиқамиз.

5.2. Таянч дастлабки ечимни топиш

Масаланинг шартлари ва дастлабки таянч ечимни тақсимот жадвалига ёзамиз. Юклар ёзилган катакларни эгалланган катаклар деб атаймиз, уларга таянч ечимнинг ўзгарувчилари мос келади. Қолган катакларни бўш катаклар деймиз ва уларга эркин ўзгарувчилар мос келади. Катакларнинг юқори ўнг бурчакларига таърифларни ёзамиз.

Таянч ечим топишнинг бир неча усуллари мавжуд. Улардан бири минимал элементлар усулидир.

Бу усулга асосан, юклар биринчи навбатда энг кам таърифли c_{ij} катакга жойлаштирилади. Ундан сўнг, юклар бўш бўлмаган, камроқ таърифли катакка заҳираларнинг қолдиғи ва талабларнинг миқдорини ҳисобга олган ҳолда жойлаштирилади. Бу жараён заҳиралар тугагунча ва талаблар бажарилгунса давом эттирилади. Юкларни тақсимлашда, банд катаклар сони $m + n - 1$ дан кам бўлиб қолиши мумкин, бу ҳолда катаклар миқдори нолга тенг юк билан таъминланади ва бундай катаклар шартли банд катаклар деб айтилади.

Нолга тенг бўлган бклар шундай жойлаштириладики, ҳар бир сатр ва ҳар бир устунда ҳеч бўлмаганда биттадан банд катаклар бўлиши керак.

Дастлабки таянч ечимни топишни мисолда кўриб чиқамиз.

5.3. Юкни истеъмолчиларга олиб боришнинг оптимал варианти

Айтайлик, A_1, A_2, A_3 омборларда бирор бир товарнинг 90, 400, 110 т миқдори бор. B_1, B_2, B_3 истеъмолчилар бу товарнинг мос равишда 140, 300, 160 т даг олишлари керак. Таъминотчиларни истеъмолчиларга бириктириб қўйишни шундай варианти топилсинки, юк ташиш харажатлари энг кам бўлсин. 1 т товарнинг таъминотчилардан истеъмолчиларга олиб бориш нархлари ушбу матрицада беотлган.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Берилган масала ёпиқ ТМ дир, чунки:

$$r = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_j = 600 - 600 = 0.$$

Дастлабки таянч ечимни минимал таърифлар усули билан топамиз(ж. 5.1):

Равшанки, $c_{22} = \min c_{ij} = 1, c_{12} = \min\limits_{i \neq 2, j \neq 2} c_{ij} = 2$. Шунинг учун, 2-истеъмолчига 300 т товар керак бўлгани учун, унга 2-таъминотчидан 300 т юк берамиз. 2-устун бекилди, яъни 2-истеъмолчи режадаги юкни олиб бўлди, қолган 100 т ни 3-истеъмолчига берамиз. 2-сатр бекилди, яъни 2-таъминотчи барча товарини бериб бўлди. 1-истемолчига 1-таъминотчидан 90 т, 3-таъминотчидан 50 т юк берамиз, 1-истемолчи режадаги юкини олиб бўлди. 3-истеъмолчига 3-таъминотчидан 50 т юк берамиз. Барча юклар тақсимланиб бўлди.

Жадвал 5.2

Омбор, пункт	Заҳира	1	2	3
Талаб		140	300	160
1	90	2 90	5	2
2	400	4	1 300	5 100
3	110	3 50	6	8 60

Натижада биз ушбу юкларнинг тақсимлашнинг дастлабки режасини топдик.

$$X_1 = \begin{bmatrix} 90 & 0 & 0 \\ 0 & 300 & 100 \\ 50 & 0 & 60 \end{bmatrix}.$$

Жадвалда банд катаклар сони тенг $m + n - 1 = 3 + 3 – 1 = 5$, яъни бузилмаслик шарти бажарилган.

Бу дастлабки таянч режа учун режа учун, юк ташишларнинг нархи тенг:

$$L(x_1) = 90\cdot 2 + 300\cdot 1 + 100\cdot 5 + 50\cdot 3 + 60\cdot 8 = 1610 \text{ ш.б.}$$

5.4. Топилган таянч ечимни оптималликка текшириш

Топилган таянч ечимни оптималликка *потенциаллар усули* билан текширамиз.

Потенциаллар усулида топилган таянч ечим оптимал бўлиши учун қуйидаги критерий мавжуд: Агар таянч ечим оптимал бўлса, сони $m + n$ га тенг шундай u_i ва v_j ҳақиқий сонлар системаси мавжудки қуйидаги шартлар бажарилади:

1) банд катаклар учун бу сонлар $u_i + v_j = c_{ij}$ тенгликларни қаноатлантиради,
2) эркин катаклар учун $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \le 0$ тенгсизликлар ўринли бўлади.

u_i ва v_j сонлар *потенциаллар* дейилади. Тақсимот жадвалига янги u_i устун ва v_j сатр қўшилади.

Потенциаллар u_i ва v_j банд катаклар учун $u_i + v_j = c_{ij}$ ёзилган тенгликлардан топилади, уларнинг сони $m + n$, банд катаклар сони $m + n - 1$ га тенг, яъни тенгламалар сони банд катаклар сонидан битта кўп. Шунинг учун бирорта потенциалга ихтиёрий қиймат бериб қолганларин сўнг бир қийматли топиш мумкин. Масалан, $u_1 = 0$ деб қолган потенциалларни бир қийматли топиш мумкин: 1) агар u_i маълум бўлса, $v_j = c_{ij} — u_i$; 2) агар v_j маълум бўлса $u_i = c_{ij} – v_j$.

Ушбу $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ белгилаш киритайлик. Бу сонни *эркин катакнинг баҳоси* деб айтилади. Агар $\Delta_{ij} \le 0$ бўлса, у ҳолда дастлабки таянч ечим оптимал бўлади. Агар бирор баҳо мусбат бўлса, яъни $\Delta_{ij} > 0$, бўлса таянч ечим оптимал бўлмайди ва уни бошқа таянч ечимга ўтиб яхшилаш мумкин.

Жадвалга u_i устун ва v_j сатр қўшиб топилган таянч ечимни оптималликка текширамиз.

Аввло $u_1 = 0$ дейлик, ва уни жадваонинг охирги устунига 1-сатрга ёзамиз.

Ж.5.3.

$a_i \setminus b_j$		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 90	5	2	0
2	400	4	1 300	5 100	-2
3	110	3 50	6	8 60	1
	v_j	2	3	7	

1-сатрнинг биринчи (1,1) банд катагини қараймиз. $u_1 + v_1 = 2$ шарт бажарилади. Демак, $u_1 = 0$ эканлигидан, $v_1 = 2$. Уни жадвалнинг охирги сатрига 1-устунга ёзамиз. Худди шу каби, банд катакларни шундай қарайберамизки, доимо бирорта потенциал аниқ бўлсин.

Катак (3,1) қараймиз. Равшанки, $u_3 + v_1 = 3$, $v_1 = 2$, бу ердан $u_3 = 1$.

Катак (3,3) ни қараймиз : $u_3 + v_3 = 8$, $u_3 = 1$, $v_3 = 7$.

Катак (2,3) ни қараймиз: $u_2 + v_3 = 5$, $v_3 = 7$, $u_2 = -2$.

Катак (2,2 ни қараймиз): $u_2 + v_2 = 1$, $u_2 = -2$, $v_2 = 3$.

Топилган потенциалларн жадвалга киритамиз. Эркин катакларнинг баҳоларини ҳисоблаймиз:

$$\Delta_{12} = u_1 + v_2 - c_{12} = 0 + 3 - 5 = -2 < 0,$$
$$\Delta_{13} = u_1 + v_3 - c_{13} = 0 + 7 - 2 = 5 > 0,$$
$$\Delta_{21} = u_2 + v_1 - c_{21} = -2 + 2 - 4 = -4 < 0,$$
$$\Delta_{32} = u_3 + v_2 - c_{32} = 1 + 3 - 6 = -2 < 0.$$

Демак, $\Delta_{13} = 5 > 0$, ва топилган таянч ечим оптимал эмас ва уни яхшилаш мумкин.

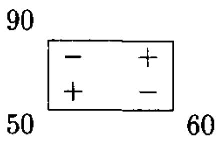
5.5. Бир таянч ечимдан бошқасига ўтиш

Мусбат баҳоли ($\Delta_{ij} > 0$) эркин катакнинг мавжудлиги, дастлабки таянч ечимнинг оптимал эмаслигини ва мақсад функциянинг қийматини камайтириш учун бошқа таянч ечимга ўтиш кераклигини кўрсатади. Бунинг учун юкларни банд катаклардан эркин катакларга силжитиб, қайта тақсимлаш керак бўлади. Эркин катак банд, илгари банд бўлган бирор катак эркин бўлиб қолади.

Мусбат баҳоли ($\Delta_{ij} > 0$) эркин катак учун цикл (занжир, кўпбурчак) шундай қуриладики, унинг битта учидан бошқалари банд катакларда ётиши керак, бурчаклар тўғри, учлар сони жуфт бўлиши керак. Эркин катак ёнига (+) плюс, сўнг кетма-кет (—) ва (+) ишоралари қўйилади. Минус ишорали учдан энг кичик юк олинади, уни (+) ишорали учга қўшилади, (—) ишорали учдан айрилади. Юкларни шундай усул билан қайта тақсимлангандан сўнг, янги трянч ечим олинади ва уни оптималликка текшириш керак ва ҳ.к. Бу жараённи оптимал ечим олингунча давом эттириш керак.

Бир таянч ечимдан иккинчи таянч ечимга ўтишни мисолда кўриб чиқамиз.

Мусбат баҳоли катак (1,3) учун цикл тузамиз. Циклнинг учларига (+) ва (—) ишораларни қўйиб, юкларни ёзамиз:



.

(—) ишорали учлардан энг кичик юкни оламиз, у min(90,60)=60. Уни (+) ишорали учларга қўшамиз ва (-) ишорали учлардан айириб, янги цикл ҳосил қиламиз:

$$\begin{array}{ccc} 30 & & 60 \\ & \boxed{\begin{array}{cc} + & - \\ - & + \end{array}} & \\ 110 & & \end{array}.$$

Янги таянч ечим топамиз:

$$x_2 = \begin{pmatrix} 30 & 0 & 60 \\ 0 & 300 & 100 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ҳосил бўлган таянч ечимни оптималликка текширамиз. Бунинг учун уни тақсимот жадвалига ёзамиз ва банд ва эркин каиакларнинг потенциалларини ёзамиз(жадвал 5.4).

Ж. 5.4.

$a_i \setminus b_j$		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2 30	5	2 60	0
2	400	4	1 300	5 100	4
3	110	3 110	6	8	2
	v_j	2	-2	2	

Бу ердан потенциалларни ҳисоблаб оламиз:

$$\Delta_{12} = -7, \quad \Delta_{21} = 1 > 0, \quad \Delta_{32} = -7, \quad \Delta_{33} = -5.$$

$\Delta_{21} = 1$ баҳоли катак учун янги цикл қурамиз:

$$\begin{array}{ccc} 30 & & 60 \\ & \boxed{\begin{array}{cc} - & + \\ + & - \end{array}} & \\ & & 100 \end{array}$$

Юкларни яна бошқатттадан тақсимлаймиз:

$$\begin{array}{ccc} & & 90 \\ & \boxed{\begin{array}{cc} + & - \\ - & + \end{array}} & \\ 30 & & 70 \end{array}$$

Янги ечим олиб, уни тақсимот жадвалига жойлаштирамиз (жадвал 5.5). Уни оптималликка текширамиз.

Ж.5.5.

$a_i \setminus b_j$		1	2	3	u_i
		140	300	160	
1	90	2	5	2	

				90	0
2	400	4 30	1 300	5 70	3
3	110	3 110	6	8	2
	v_j	1	-2	2	

Бу ердан янги потенциалларни ҳиаоблаймиз:

$$\Delta_{11} = -1, \quad \Delta_{12} = -1, \quad \Delta_{32} = -6, \quad \Delta_{33} = -4.$$

Барча баҳолар манфий ва топилган ечим оптимал. Шундай қилиб, қуйидаги оптимал ечимни топдик:

$$\bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Транспорт харажатларини ҳисоблаймиз:

$$L(\bar{x}) = 90 \cdot 2 + 30 \cdot 4 + 300 \cdot 1 + 70 \cdot 5 + 110 \cdot 3 = 1280 \text{ ш.б.}$$

Оптимал ечимда дастлабки ечимга нисбатан харажатлар камаймоқда: 1610>1280. .

$\mathrm{ORIGIN} := 1 \quad m := 3 \quad n := 3 \quad i := 1..m \quad j := 1..n$

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 90 \\ 400 \\ 110 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 140 \\ 300 \\ 160 \end{pmatrix}$$

$$x := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(x) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right) \qquad L(x) = 36$$

$$\text{Given} \quad x \geq 0 \quad x \cdot e_1 = A \quad x^T \cdot e_2 = B \quad r := \mathrm{Minimize}(L, x) \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 90 \\ 30 & 300 & 70 \\ 110 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$L(r) = 1.28 \times 10^3$

2) Масалани MathCAD да ечишга доир мисол.

$\mathrm{ORIGIN} := 1 \quad m := 3 \quad n := 4 \quad i := 1..m \quad j := 1..n$

$$C := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 6000 \\ 3000 \\ 4000 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 4000 \\ 5000 \\ 1000 \\ 3000 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(x) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right) \qquad L(x) = 64$$

$$\text{Given} \quad x \geq 0 \quad x \cdot e_1 = A \quad x^T \cdot e_2 = B$$

$$r := \text{Minimize}(L, x) \quad L(r) = 5.2 \times 10^4 \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 3000 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000 & 1000 & 0 \\ 4000 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

5.6. Транспорт масаласида айниган ҳол

Трансорт масаласини ечишда банд катаклар сони $m + n - 1$ дан кам бўлиб қолиши мумкин. Бу ҳолда масала айниган ечимга эга бўлиб қолади. Бундай ҳолдан қутилиш учун, таъминотчилар ва истеъмолчиларни бири бири билан ўринларини алмаштириш керак ёки бўш катакга энг кам баҳоли нолга тенг бўлган юкни жойлаштириш керак. Нолни шундай жойлаштириш кераккки, ҳар бир сатр ва ҳар бир устунда ҳеч бўлмаганда биттадан банд катаклар бўлсин.

ТМ да айниган ҳолга мисол қараймиз.

Мисол 2. 3 та складга эга бўлган фирма 4 та совутилган ичимликлар ишлаб чиқадиган заводни шиша идишлар билан таъминлайди. 1-складда -6000 та, 2-складда-3000, 3-складда-1000 та, 4-складда 3000 та идиш бор. 1-заводга 4000 та, 2-заводга-5000 та, 3-заводга 1000 та идиш керак. Бирлик юк ташиш нархлари ушбу матрица билпн берилган:

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 9 & 8 \\ 5 & 3 & 2 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Қайси складдан қайси заводга қанча идишлар олиб бориш керакки, фирма харажатлари энг кам бўлсин.

Ечиш. Дастлабки маълумотларни тақсимот жадвалига ёзамиз. Минимал таъриф усули бўйича дастлабки таянч ечимни топамиз. Банд катаклар сони 5 га тенг, лекин $m + n - 1 = 6$, ва ТМ айниган ҳолга тегишли.

Айниганликни йўқотиш учун бирор кичикроқ баҳоли бўш катакка 0 га тенг юкни жойлаштирамиз. Бу катакни энди, потенциалларни ҳисоблаш учун керак бўладиган катаклар қаторига шартли равишда қўшамиз. Ш.қ. u_3 потенциални ҳисоблаш учун, (3,2) катакка миқдори 0 га тенг бўлган юк жойлаштирамиз, шундан сўнг барча потенциалларни ҳисоблаш мумкин бўлади.

Ж.5.6.

$a_i \setminus b_j$		1	2	3	4	u_i
		4000	5000	1000	3000	
1	6000	6	4 3000	9	8 3000	0
2	3000	5	3 2000	2 1000	8	-1
3	4000	2 4000	3 0	6	8	-1
v_j			4	3	8	

Эркин катаклар баҳолари қуйидагича:

$$\Delta_{11} = -3, \quad \Delta_{13} = -6, \quad \Delta_{21} = -3,$$
$$\Delta_{24} = -1, \quad \Delta_{33} = -4, \quad \Delta_{34} = -1.$$

Барча баҳолар манфий ва биз оптимал ечимга келдик.

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 3000 & 0 & 3000 \\ 0 & 2000 & 1000 & 0 \\ 4000 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Шундай қилиб, 1-складдан 4-заводга 3000 та идиш, 1-складдан 2- ва 4-заводга 3000 та идиш, 2-складдан 2 заводга 3000 та идиш ва 3-заводга 1000 та идиш, 3-складдан 1-заводга 4000 та идиш жўнатиш мақсадга мувофиқ экан, бунда минимал харажат 28 000 ш.б. бўлар экан.

5.7. Очиқ транспорт масаласи

Очиқ транспорт масаласида таъминотчилардаги товарнинг заҳира миқдори талаб этилган товар миқдори билан устма-уст тушмайди, яъни

$$r = \sum_{i=1}^{3} a_i - \sum_{j=1}^{3} b_j \neq 0$$

Бу ерда бщлиши мумкин икки ҳол:

а) агар $r > 0$ бўлса, товарнинг заҳира миқдори сўралган миқдоридан кўп, омбордан барча товар ташиб кетилмасдан товарнинг маълум қисми ортиб қолади. Бу очиқ масалани ёпиқ масала ҳолатига келтириш учун, янги (n+1)- истъмолчи киритиб унга товарнинг заҳирада ортиб қолган қисми берилади:

$$b_{n+1} = r > 0$$

Бундай масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} x_{ij} = a_i, \ \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ x_{ij} \geq 0, i = 1..m, \ j = 1..n+1.$$

б) агар талаб миқдори заҳира миқдоридан кўп бўлса, яъни $r < 0$, бўлса талабнинг бир қисми бажарилмай қолади. Бу масалани ёпиқ масалага келтириш учун энди мавжуд бўлмаган сунъий (m+1)-товар омбори, киритилиб унга миқдори ушбу сонга тенг юк берамиз:

$$a_{m+1} = -r > 0$$

Бундай масаланинг модели қуйидагича бўлади

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_{ij} \to \min,$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ \sum_{i=1}^{m+1} x_{ij} = b_j, \ x_{ij} \geq 0, i = 1..m+1, \ j = 1..n.$$

Очиқ ТМ га вазиятга қараб юк ташиш нархи нолга тенг сунъий таъминотчи ёки сунъий истеъмолчини киритилиши уни ёпиқ ТМ га айлантиради ва ёпиқ масала мавжуд усуллар билан ечила беради. Мақсад функцияга сунъий истемолчи ёки таъминотчи киритилмайди.

5.8. Талаб ва таклифнинг трансформацияни ҳисобга олган ҳолада юк ташишнинг оптимал вариантини топиш

Қуйидаги масалани қарайлик.

3 та таъминотчидаги 240, 40, 110 т юкларни 4 та истеъмолчига қуйидаги миқдорларда 90, 190, 40 и 130 т. етказиб бериш керак. Бир бирлик юкни нархлари матрицаси қуйидагича:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 13 & 9 & 8 \\ 14 & 8 & 7 & 10 \\ 3 & 15 & 20 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ечиш. Юклар заҳираси тенг: $\sum_{i=1}^{3} a_i$ = 390 т. Истеъмолчилар талаби тенг: $\sum_{j=1}^{4} b_j = 450$ т.

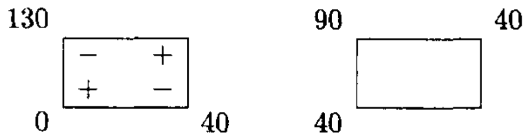
$\sum_{i=1}^{3} a_i < \sum_{j=1}^{4} b_j$ бўлганлиги учун, сунъий 4- таъминотчини қуйидагича киритамиз: a_{4c} = 450 - 390 = 60 т. Унинг таърифини 20 ш.б. деб киритамиз.(Энг катта таъриф берамиз).

Энди, $m + n - 1 = 7$, бўлганлиги ва банд катаклар сони 6 га тенг бўлганлиги учун, масаланинг айлиганлигини йўқотиш учун (2, 2) катаккка 0 миқдордаги юк жойлаштирамиз. У ҳолда эркин катакларнинг баҳоси қуйидагичп бўлади:

$$\Delta_{11} = -2, \quad \Delta_{13} = 3, \quad \Delta_{21} = 14, \quad \Delta_{24} = -7, \quad \Delta_{32} = -4,$$
$$\Delta_{33} = -10, \quad \Delta_{4ф1} = -8, \quad \Delta_{4ф3} = -1, \quad \Delta_{4ф4} = -5$$

(табл. 5.7).

(1,3) катакнинг баҳоси мусбат бўлганлиги учун, юкларни қайта тақсимлаймиз:



Ж.5.7.

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	4	u_i
		90	190	40	130	
1	240	7	13 130	9	8 110	0
2	40	14	8 0	7 40	10	-5
3	110	3 90	15	20	6 20	-2
4ф	60	20	20 60	20	20	7
	v_j	5	13	12	8	

Ж.5.8.

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	4	u_i
		90	190	40	130	
1	240	7	13 90	9 40	8 110	0
2		14	8	7	10	

	40		40			-5
3	110	3 90	15	20	6 20	-2
4	60	20	20 60	20	20	7
	v_j	5	13	9	8	

Қайта тақсимланган юкларни жадвалга жойлаштирамиз (ж. 23.11).
Топамиз

$$\Delta_{11} = -2, \quad \Delta_{21} = -14, \quad \Delta_{23} = -3, \quad \Delta_{24} = -7,$$
$$\Delta_{32} = -4, \quad \Delta_{33} = -13, \quad \Delta_{41} = -7, \quad \Delta_{43} = -4, \quad \Delta_{44} = -5.$$

Шундай қилиб, оптимал ечимни топдик :

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 90 & 40 & 110 \\ 0 & 40 & 0 & 0 \\ 90 & 0 & 0 & 20 \end{bmatrix}$$

Бу ҳол учун транспорт харажатлари тенг — 3120 ш.б.

5.9. ТМ да иқтисодий таҳлил

Конкрет масалада масаланинг иқтисодий таҳлилини кўрамиз.

Мисол 3. Учта савдо омборлари бирор маҳсулотни 9, 4 ва 8 т. миқдорда етказиб беради. Магазинларнинг юкка эҳтиёжлари мос равишда тенг: 3, 5 ва 6 т.

Трансортнинг омборлардан магазинларга шартли харажатлар матрицаси берилган:

$$\begin{pmatrix} 10 & 20 & 5 \\ 2 & 10 & 8 \\ 1 & 20 & 7 \end{pmatrix}.$$

Транспорт харажатларини энг кичик қиладиган режа топилсин.

Ечиш. Омборлар заҳираси тенг: $\sum_{i=1}^{3} a_i$ = 21 т, магазинлар эҳтиёжи тенг: $\sum_{j=1}^{4} b_j$ = 14 т, яъни очиқ ТМ га эгамиз. Сунъий (фиктив) магазин киритамиз: эҳтиёжи $b_{4ф}$ = 7 т ва тарифи 20 ш.б. (табл. 23.12).

Бўш катапклар баҳоси тенг:

$$\Delta_{11} = -9, \quad \Delta_{21} = -11, \quad \Delta_{23} = -13, \quad \Delta_{24} = -10,$$
$$\Delta_{32} = 0, \quad \Delta_{33} = -2, \quad \Delta_{34} = 0.$$

Баҳолар $\Delta_{32} = \Delta_{34} = 0$, ш.у. масала имеет альтернатив оптимумга эга, ва унинг битта ечими тенг:

$$\overline{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

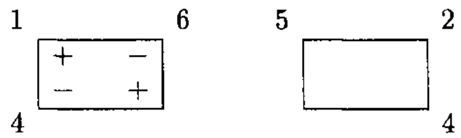
Ж.5.9.

$a_i \setminus b_j$		1 3	2 5	3 6	4 7	u_i
1	9	10	20 1	5 6	20 2	0
2	4	2	10 4	8	20	-10
3	8	1 3	20	7	20 5	0
v_j		1	20	5	20	

У ҳолда транспортнинг минимал харажатлари тенг:

$L(\overline{x}) = 93$ шартли бирлик.

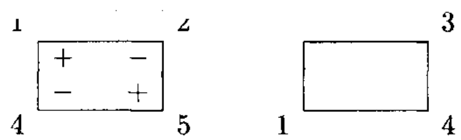
Юкларнинг охирги тақсимот жадвалидан ва бўш катакларнинг (улар *подпольедаги баҳолар-яширин баҳолар* дейилади) қийматидан фойдаланиб, иқтисодий таҳлил ўтказиш мумкин. Соядаги баҳолар бўш катакка битта юк қўйсак, транспорт харажатлари қанча ошишини кўрсатади. Масалан, 2 омбордан 3 магазинга битта юкни ташиб олиб бориш, маҳсулот нархини $|\Delta_{23}| = |-13| = 13$ шартли бирликка оширар экан, бу (2, 3) катакдаги юк таърифидан 8 ш.б.га кўп. Юк ташиши нархларининг ошиши юкларнинг қайта тақсимлаш билан боғлиқ. (2,3) бўш катакка юк қўйиш билан боғлиқ циклни қараймиз:



(2, 3) катакка 4 т. юк, (1, 3) катакка 1т. ўрнига — 5т, (2, 2) катакка 4т ўрнига — бўш катак жойлаштирамиз.

Харажатлар бўлади: $4 \cdot 20 - 4 \cdot 10 + 8 \cdot 4 - 4 \cdot 5 = 72$ ш.б. ёки битта маҳсулотга $72 : 4 = 13$ ш.б.

Агар соядаги катакдаги баҳо нолга тенг бўлса, ($\Delta_{32} = 0$), у ҳолда масала альтернатив оптимумга эга. Юкларни (3.2) катакка нисбатан бошқаттадан тақсимлаймиз:



Яна битта оптимал ечим ушбу кўринишга эга

$$\overline{x}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Юк ташишнинг энг кичик харажати тенг:

$$L(\overline{x}_2) = 93 \text{ шартли бирлик.}$$

Шунга ўхшаш таҳлил бошқа бўш катаклар учун ҳам ўтказиш мумкин.

Бўш катакларнинг яширин баҳоларидан битта маҳсулотнинг ёки таърифнинг нархини ўзгаришининг белгиси (индикатори) сифатида фойдаланиш мумкин.

Масалан, бўш (3,3) катакнинг яширин баҳоси тенг: $|\Delta_{33}| = | - 2| = 2$, битта маҳсулотнинг амалдаги ташиш баҳоси тенг — 7 ш.б. Ш.у. катаклардаги юкларнинг қайта тақсимлаш натижасида харажатларнинг камайиши учун бу катакнинг баҳоси 7 – 2 = 5 ш.б. дан кўп бўлмаслиги керак.

Банд катаклардаги ўзгаришларнинг қиймат бўйича таҳлилини қиламиз. Катакнинг таърифини камайиши маҳсулотнинг ортиши билан ҳамоҳанг бўлиши керак. Таърифларнинг ортиши эса маҳсулот миқдорининг камайиши блан мос бўлиши керак. Банд катаклардаги таърифлар ортса, уларнинг қийматлари маълум миқдорга етганда бу катакдан фойдаланиш номақбул бўлиб қолади ва ва юкларни қайта тақсимлаш керак бўлади.

Мисол сифатида (1,3) катакдаги таърифни мумкин бўлган ортишини муҳокама қилайлик. Катак таърифи 1 маҳсулотга 5 ш.б. га тенг. Бу миқдорнинг камайиши юк ташиш ҳажмига таъсир этмайди, чунки келтирилган миқдордаги юк 3 магазиннинг барча эҳтиёжини қаноатлантиради.

Агар, (3,1) катак таърифи 5 ш.б.дан ортса, цикл тузишда$|\Delta_{23}| = 13$ баҳоли бўш катак (2, 3), ёки $|\Delta_{33}| = 2$ баҳоли бўш катак (3, 3) ишлатилади. Иккала циклда ҳам (1, 3) катак минус»—« ишорали бўлади ва таърифнинг ҳар қандай ортиши бўш катаклар (2, 3) ёки (3, 3) ларнинг соядаги таърифларини ортишига олиб келади.

Юк ташиш ҳажмининг ортиши Изменение объема перевозок будет иметь место в случае, если тариф клетки (1,3) катакнинг таърифи 2 ш.б дан тортиб то 7 ш.б.дан ортгунча ўзгариб боради. Бу ҳолда (3,3) катак мусбатлашиб, (1,3) катакдан фойдаланиш бефойда бўлади.

Ш.қ., оптимал ҳажмдаги юк ташиш тақсимотини (режасини) топиш учун (1,3) катак таърифи 0 дан 7 ш.б. гача ўзгариши керак экан. Бу оралиқ ичида транспорт харажатлари ўзгариб, юклар режаси (тақсимоти) ўзгармай қолар экан.

5.11. Транспорт масаласи моделларининг иқтисодий масалалар ечишга тадбиқи

ТМ нинг алгоритми ва ечиш усуллари иқтисодиётнинг ТМ билан ҳеч қандай алоқаси йўқ масалаларга тадбиқ қилиш мумкин. Бу ҳолда таъриф миқдорлари c_{ij} ҳар хил маънога эга бўлиши мумкин. Бундай масалаларга мисол сифатида ққйидаги масалалар киради:

— Станокларни (экскваторларни, мутахассисларни...) маълум бир операцияларни бажариш учун оптимал тақсимлаш масаласи. Бу ҳолда c_{ij} таърифлар иш унумдорлигининг иқтисодий кўрсаткичлари бўлади. Маслани ечиш натижасида қайси станокни қайси ишда ишлатиш керакки унумдорлик, даромад энг катта бўлсин. ТМ да минимум изланар эди, бу ерда максимум изланмоқда, ш.у. мақсад функцияни – ишора билан олиш керак;

— Оптимал тайинлаш ёки танлов масаласи. T та механизм бор, улар m та ҳархил ишни c_{ij} унумдорлик билан бажариши мумкин. Масалани ечиш-қайси механизмни қайси ишда ишлатиш керакки, энг катта унумдорликка эришилсин;

— Ишлаб чиқаришни маҳсулот тайёрлаш ва ташиш ҳаражатларини ҳисобга олган ҳолда қисқартиришни масаласи;

— Автомобиль транспортини кераксиз югуришини камайтириш ҳисобига иш унумдорлигини ошириш;

— Юк ташишни ман этиш йўли билан харажатларни камайтириш. Бу усул бирор юк миқдоирини бирор истеъмолчига жўнатиб бўлмайдиган ҳолларда пайдо бўлади. Бунинг учун катакка каттагина таъриф бериш керак, холос.

5.12. Ишлаб чиқариш қуролларини оптимал вариантини танлаш

Корхонада уч гуруҳ станоклар мавжуд, уларнинг ҳар бири беш хил амаллар бажариши мумкин (амаллар ихтиёрий тартибда бажарилиши мумкин). Ҳар бир гуруҳ станокларнинг максимал ишлаш вақти мос равишда тенг: 100, 250, 180 с. Ҳар бир амал мос равишда бажарилиш вақти тенг: 100, 120, 70, 130 с.

Аниқланг: Станоклар гуруҳи энг кўп деталларга ишлов бериш учун қайси амални қанча вақт бажариши кераклиги аниқлансин.

Ҳар бир станоклар гуруҳининг ҳар бир амалда иш унумдорлиги ушбу матрица ёрдамида берилган:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 11 & 10 & 5 \\ 5 & 10 & 15 & 3 & 2 \\ 4 & 8 & 6 & 12 & 10 \end{pmatrix}.$$

Ечиш. Ёпиқ ТМ нинг ечиш алгоритмидан фойдаланамиз. (ж. 23.13).

Масалада максимумни топиш талаб этилади, ш.у. таърифларни(—1) га кўпайтирамиз.

Ж.5.10.

$a_i \setminus b_j$		1	2	3	4	5	u_i
		100	120	70	110	130	
1	100	-3 40	-5	-11	-10	-5 60	0
2	250	-5 60	-10 120	-15 70	-3	-2	-2
3	180	-4	-8	-6	-12 110	-10 70	-5
	v_j	-3	-8	-13	-7	-5	

Бўш катакларнинг баҳоларини топамиз:

$$\Delta_{12} = -3, \quad \Delta_{13} = -2, \quad \Delta_{14} = 3, \quad \Delta_{24} = -6,$$
$$\Delta_{25} = -5, \quad \Delta_{31} = -4, \quad \Delta_{32} = -5, \quad \Delta_{33} = -12.$$

Энди $\Delta_{14} = 3 > 0$ бўлгани учун, юкларни қайта тақсимлаймиз ва оламиз:

$$\begin{array}{ccc} & & 60 \\ & \boxed{\begin{array}{cc} + & - \\ - & + \end{array}} & \\ 110 & & 70 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 60 & & \\ & \boxed{\begin{array}{cc} & \\ & \end{array}} & \\ 50 & & 130 \end{array}$$

Олинган юкларнинг тақсимотини ж. 23.14. га киритамиз.

Бўш катакларнинг баҳоларини энди тенг бўлади:

$$\Delta_{12} = -3, \quad \Delta_{13} = -2, \quad \Delta_{15} = -3, \quad \Delta_{24} = -9,$$
$$\Delta_{25} = -8, \quad \Delta_{31} = -1, \quad \Delta_{32} = -2, \quad \Delta_{33} = -9.$$

Топилган ечим оптимал бўлади, чунки, барча бўш катакларнинг баҳолари манфийдир. Демак,

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} 40 & 0 & 0 & 60 & 0 \\ 60 & 120 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 50 & 130 \end{bmatrix}$$

Ж.5.11.

$a_i \setminus b_j$		1	2	3	4	5	u_i
		100	120	70	110	130	
1	100	-3 40	-5	-11	-10 60	-5	0
2	250	-5 60	-10 120	-15 70	-3	-2	-2
3	180	-4	-8	-6	-12 50	-10 130	-5
	v_j	-3	-8	-13	-7	-5	

Ш.қ. 1-хил станоклар билан 1- ва 4- амалларни бажариш 40 ва 60 с бажариш;
2-хил станоклар билан 1-,2- ва 4- амалларни бажариш60, 120 ва 70 с бажариш;
3-хил станоклар билан 4- ва 5- амалларни бажариш 50 ва 130 с бажариш керак экан.
Бунда энг кўп қайта ишланган деталлар сони тенг бўлар экан: 5 170 дона.

5.13. МАСАЛАЛАР

Ушбу тақсимот жадвали билан берилган ТМ ни ечинг:

23.1.

$a_i \diagdown b_j$	70	30	20	40
90	1	3	4	5
30	5	3	1	2
40	2	1	4	2

23.2.

$a_i \diagdown b_j$	30	80	60	110
60	6	8	15	4
130	9	15	2	3
90	6	12	7	1

23.3.

$a_i \diagdown b_j$	120	80	60
100	2	4	2
70	5	5	6
70	4	6	3
20	6	8	1

23.4.

$a_i \diagdown b_j$	240	40	110
90	7	15	3
190	13	8	15
40	9	7	20
130	8	10	6

23.5. Темир йўлдан фойдаланиб, қурилиш материалларини 3 та заводдан 4 та қурилиш майдонларига олиб бориш учун оптимал режа тузиш керак. Ҳар бир кварталда қурилиш майдонларига 5, 10, 20, 15 вагон қурилиш материаллари олиб бориш керак. Заводларнинг имкониятлари мос равишда бир кварталда 10, 15 ва 25 вагонга тенг. Масала шартлари ж.5.12. да берилган. Катаклардаги сонлар бир вагон юкнинг таърифи ҳисобланади.

Ж.5.12.

$a_i \backslash b_j$		1	2	3	4
		5	10	20	15
1	10	8	3	5	2
2	15	4	1	6	4
3	25	1	9	4	3

23.6. Ж.5.13 да тақсимот жадвали билан берилган ТМ масаласини ечинг. 2-таъминотчидан 2-истеъмолчига, 3-таъминотчидан 1-истеъмолчига вақтинчалик юк ташиш ман этилган деб олинг (жадвалда мос катакларга катта $M > 0$ таъриф жойлаштирилган).

Ж.5.13.

$a_i \backslash b_j$		1	2	3
		5	5	3
1	6	6	6	4
2	3	5	M	2
3	4	M	3	6

23.7. 3 та ишлаб чиқариш пунктларида мос равишда 200, 170, 130 т юклар бор. Бу юклар 50, 220, 80, 110 ва 140 т миқдорда истеъмолчига етказиб берилиши керак. Бирлик маҳсулотнинг ташишларнинг таъриф матрицаси ушбу матрицада берилган:

$$\begin{bmatrix} 2 & 10 & 8 & 15 & 5 \\ 4 & 2 & 3 & 4 & 6 \\ 7 & 3 & 12 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Тўлаш қобилияти бўлмаганлиги учун таъминотчининг 1-пунктидан истеъмолчининг 1-пунктига ва таъминотчининг 2-пунктидан истеъмолчининг 3-пунктига юк ташиш ман этилган. Юк ташишнинг минимал харажатлар режаси тузилсин.

23.8. Фирма 3 турдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун (бокал, чашка, ваза) бир ҳафтада тайёрлаш учун буюртма олди. Буюртма миқдори: бокал — 4000 дона, чашка — 2400 дона, ваза — 1000 дона.

Тайёрлаш участкаси маҳсулот ишлаб чиқарувчи 3 та станокка эга. Уларнинг қуввати бир хил ва ихтиёрий маҳсулотни тайёрлаши мумкин. Лекин, бир бирлик ҳар хил маҳсулотни тайёрдаш учун кетадиган сарф –харажат ҳар хил ва ж. 23.17 да келтирилган.

Бундан ташқари, станокларнинг ишлаб чиқариш қувватлари тенг: 1-станок-2000 дона, 2-ва 3- станокларнинг қувватлари тенг: 3000 дона маҳсулот.

Ж.5.14.

Станок	Бокаллар	Чашкалар	Вазалар
1	1,2	1,3	1,1
2	1,4	1,2	1,5
3	1,1	1,0	1,3

ТМ моделидан фойдаланиб, буюртмани энг кам харажат билан бажариш режаси топилсин.

МУНДАРИЖАГА

М6. БУТУН СОНЛИ ПРОГРАММАЛАШ

6.1. Масаланинг умумий қўйилиши

ЧП нинг баъзи масалалари бутун сонли ечимларни топишни талаб этади. Уларга бутун сонли, бўлинмайдиган товарларни ишлаб чиқариш, юклаш, жойлаштириш масалалари киради, масалан, станоклар, телевизорлар, автомобиллар ва ҳоказолар ҳақидаги масалалар бутун сонли ечим бўлишни талаб этади.

Умумий ҳолда бутун сонли программалаш масаласи қуйидаги кўринишга эга: коэффицентлари бутун бўлган ЧПМ ни ушбу чекланишларни қаноатлантирадиган бутун ечимлар орасидан

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, x_j \geq 0, i = 1..m, j = 1..n, \quad (6.1)$$

чизиқли мақсад функциянинг

$$L(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min) \quad (6.2)$$

бутун сонли энг катта (кичик) қийматлари топилсин.

Симплекс усул билан топилган оптимал ечим бутун сонли бўлмаслиги мумкин. Уни яхлитлаш натижасида олинган ечим, чекланишлар системасини қаноатлантирмаслиги мумкин. Шунинг учун, ЧПМ нинг бутун сонли оптимал ечимларини топиш учун бошқа алгоритм керак. Бундай усул сифатида Гомори усули, шохлар ва чегаралар, Беллман каби усуллар ишлаб чиқилган. Гомори усулини кўриб чиқамиз.

Гомори усули асосида қуйидаги ғоя (тасдиқ) ётади.

Теорема. Агар (6.1), (6.2) ЧПМ бутун бўлмаган таянч оптимал ечим α_0 га эга бўлса, шундай тенгсизлик (гипертекислик) топиладики:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \geq \Delta, \quad (6.3)$$

уни α_0 қаноатлантирмайди, лекин, ҳар қандай бутун сонли ечими қаноатлантиради.

(6.1) тенгсизлик *бутунлик бўйича ечимга қўйилган қўшимча тенгсизлик* дейилади.

Гомори усулининг ғояси қуйидагидан иборатдир. Симплекс усул билан ЧПМ нинг оптимал ечимини топамиз. Агар ечим бутун сонли бўлса масала ечилган ҳисобланади. Агар ечим бирорта каср координатага эга бўлса, ўзгарувчиларга бутунлик бўйича қўшимча чекланиш қўйилади, янги масала қўйилиб янги оптимал ечим олинади. Агар бу ечим ҳам бутун сонли бўлмаса, ўзгарувчиларга яна бутунлик бўйича чекланиш қўйилади. Шундай кетма-кетлик ёки бутун сонли оптимал ечим ҳосил бўлгунча ёки масала бутун сонли ечимга эга бўлмаслиги кўрсатилгунча давом эттирилади.

Айтайлик, бирор қадамда оптимал ечим $\bar{x} = (f_1, f_2, ,..., f_r, 0,...,0)$ олинди, лекин у бутун сонли бўлмасин, ва симплекс жадвал қуйидагича бўлсин:

$$\begin{array}{|l|}
\hline
x_1 \;\; 1 \;\; 0 \;\; ... \;\; 0 ... 0 \;\; h_{1,r+1} ... h_{1,n} \;\; f_1, \\
x_1 \;\; 0 \;\; 1 \;\; ... \;\; 0 ... 0 \;\; h_{2,r+1} ... h_{2,n} \;\; f_2, \\
...., \\
x_i \;\; 0 \;\; 0 \;\; ... \;\; 1 ... 0 \;\; h_{i,r+1} ... h_{i,n} \;\; f_i, \\
...., \\
x_r \;\; 0 \;\; 0 \;\; ... \;\; 0 ... 1 \;\; h_{r,r+1} ... h_{r,n} \;\; f_r, \\
\hline
\end{array}$$

бу ерда r — чекланишлар системасининг ранги; $h_{i,r+1}$ — симплекс жадвалнинг i-

сатри ва $(r+1)$- устунининг коэффициенти; f_i — i-сатрнинг озод ҳади.

Айтайлик, f_i ва бирорта h_{ij} ($j = \overline{r+1, n}$, $i = \overline{1, r}$) — каср сонлар бўлсин.

$[f_i]$ ва $[h_{ij}]$ деб , f_i ва h_{ij} сонларнинг бутун қисмларини белгилайлик.

Таъриф 1. f_i соннинг бутун қисми $[f_i]$ деб, ундан катта бўлмаган энг катта бутун сонга айтилади: $[f_i] \le f_i$.

f_i и h_{ij} сонларнинг каср қисмларини $\{f_i\}$ ва $\{h_{ij}\}$ кўринишда белгилаймиз:

$$\{f_i\} = f_i - [f_i] \ge 0,\ \{h_{ij}\} = h_{ij} - [h_{ij}] \ge 0.$$

Мисоллар.

[0,8]=0, {0,8}=0,8-0=0,8,
[2,667]=2, {2,667}=2,667-2=0,667,
[-0,8]= -1, {-0,8}= -0,8-(-1)=0,2,
[-2,667]= -3, {-2,667}= -2,667-(-3)=0,333,

[4/5]=0, {4/5}=4/5-0=4/5,
[8/3]=2, {8/3}=8/3-2=2/3,
[-4/5]= -1, {-4/5}= -4/5-(-1)=1/5,
[-8/3]= -3, {-8/3}= -8/3-(-3)=1/3,

Кўриниб, турибдики, соннинг каср қисми доимо мусбат.

Агар, f_i ва бирорта миқдор h_{ij} касрли бўлса, юқоридаги белгилашларга асосланган, бутунликка қўйиладиган қўшимча чекланиш қуйидагича бўлади:

$$\{h_{i,r+1}\}x_{r+1} + \{h_{i,r+2}\}x_{r+2} + \ldots + \{h_{i,n}\}x_n \ge \{f_i\}.$$

Изоҳлар. 1) Агар f_i — каср сон, ва барча h_{ij} — лар бутун сонлар бўлса, ЧПМ бутун сонларда ечимга эга эмас.

2) Бутунлик шартлари фақат баъзи ўзгарувчиларга қўйилган бўлса, ЧПМ қисман бутун сонли дейилади.

6.2. БСП ни ечишнинг график усули

Маълумки, умумий ЧПМ да иккита ўзгарувчи берилган бўлса ва чекланишлар тенгсизликлардан иборат бўлса масалани график усулда ечиш мумкин. Бунинг учун, X_1OX_2 координатлар системасида мумкин бўлган ечимлар соҳаси U, вектор $\overline{C}$ ва мақсад функциянинг ўзгармаслик чизиқлари топилади. Ўзгармаслик чизиғини максимум масаласида вектор $\overline{C}$ йўналишида силжитиб, U ечимлар соҳасининг координата бошидан энг узоқ нуқтаси ва унинг координаталари топилади. Маълумки, бу нуқтада мақсад функция ўзининг энг катта мумкин бўлган қийматига эришади.

Агар бу нуқтанинг координаталари бутун бўлмаса, мумкин бўлган ечимлар соҳаси U да координатрлари бутун бўлган тўр ясалади. Бу тўрдан чекланишлар системасини қаноатлантирадиган ва қиймати бутун бўлмаган ечим қийматига яқин нуқта топилади. Бу нуқта БСП масаласининг ечими бўлади.

Минимум масаласи ҳам шу каби ечилади.

6.3. БСП га мисол

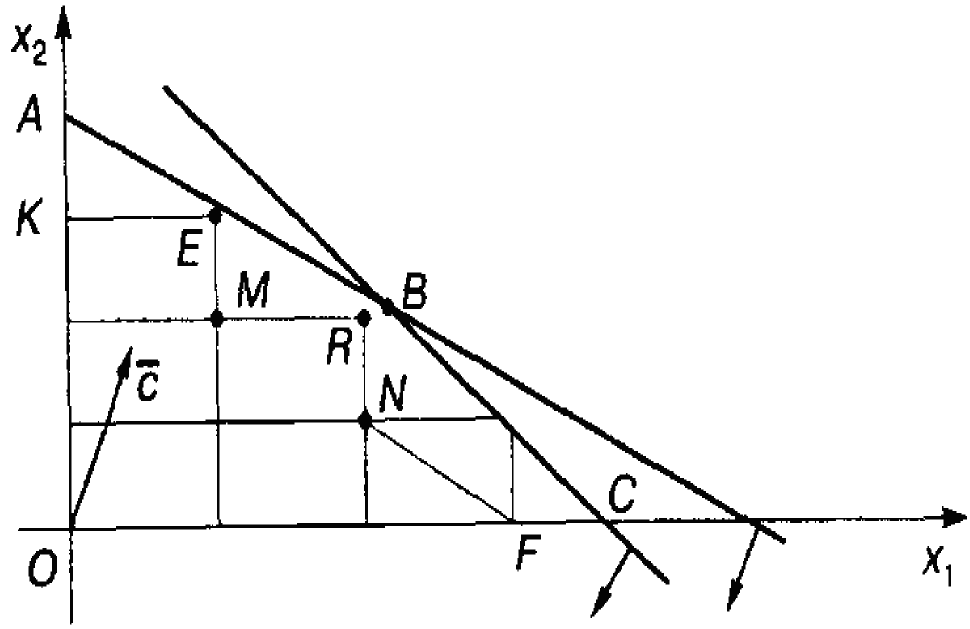
Қуйидаги масалани қараймиз:

$$L(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\{2x_1 + x_2 \le 19/3,\ x_1 + 3x_2 \le 10, x_{1,2} \ge 0 \text{ -бутун.}$$

Биз БСП масаласига эгамиз: ўгарувчилар иккита ва чекланишлар тенгсизлик кўринишда. Ечимни график усулда топамиз (расм 6.1).

OABC — мумкин бўлган ечимлар соҳаси. Оптимал ечим: *B* (9/5, 41/15) нуқтадан иборат, бу нуқтада мақсад функция қиймати 218/15 га тенг. Топилган оптимал ечим бутун сонли эмас.



Расм 6.1.

Бутун сонли ечим бўлиш шартига 12 та нуқта қанноатлантиради. Масаланинг бутун сонли ечимини топиш учун кўпбурчак *OABC* ни кўпбурчак *OKEMRNF* билан алмаштирамиз, у мумкин бўлган барча бутун сонли нуқталарни ўз ичига олади. Вектор $\bar{c}$ (2, 4) ни қурамиз. Мақсад функциянинг ўзгармаслик чизиқларини $\bar{c}$ вектор йўналишида силжитиб, соҳа билан кесишадиган охирги бутун сонли нуқта *E* (1, 3) ни топамиз, бу нуқтада мақсад функция энг катта бутун сонли қийматга эришади:

$$L(\bar{x})_{бут} = 2\cdot 1 + 4\cdot 3 = 14 \text{ ш.б.}$$

6.4. Гомори усули

Ушбу масалани Гомори усули билан ечамиз.

$$L(x) = 2x_1 + 4x_2 \to \max,$$

$$\{2x_1 + x_2 \le 19/3,\ x_1 + 3x_2 \le 10, x_{1,2} \ge 0 \text{ -бутун.}$$

Симплекс жадвални (жадвал. 6.1) келтирамиз:

Ж.6.1.

c_i	БЎ	2	4	0	0	b_i
		x_1	x_2	x_3	x_4	
0 0	x_3 x_4 Δ_j	2 1 -2	1 3 -4	1 0 0	9 1 0	19/3 10 0
0 4	x_3 x_2 Δ_j	5/3 1/3 -2/3	0 1 0	1 0 0	-1/3 1/3 4/3	3 10/3 40/3
2 4	x_1 x_2 Δ_j	1 0 0	0 1 0	3/5 -1/5 2/5	-1/5 2/5 6/5	9/5 41/5 218/5

Демак, ЧПМ нинг бутун сонли бўлмаган дастлабки ечими қуйидагича:

$$\bar{x} = (9/5, 41/15),\ L(\bar{x}) = 218/15$$

9/15 и 41/15 сонларнинг каср қисмларини топамиз:

$$\left\{\frac{9}{5}\right\} = \frac{9}{5} - 1 = \frac{4}{5},$$

$$\left\{\frac{41}{15}\right\} = \frac{41}{15} - 2 = \frac{11}{15}, \frac{4}{5} = \frac{12}{15} > \frac{11}{15}$$

3/5 и - 1/5 сонларнинг каср қисмларини эътиборга олиб:

$$\left\{\frac{3}{5}\right\} = \frac{3}{5} - 0 = \frac{3}{5},$$

$$\left\{-\frac{1}{5}\right\} = -\frac{1}{5} + 1 = \frac{4}{5}$$

биринчи сатр учун бутунлик бўйича қўшимча чекланиш қурамиз:

$$3/5x_3 + 4/5x_4 \geq 4/5 \rightarrow 3/5x_3 + 4/5x_4 - x_5 = 4/5,$$

уни жадвал 6.2. га киритамиз.
Жадвалдан кўринадики,

$$\bar{x}_{бут} = (1,3), L(\bar{x}) = 14.$$

Иккита оптимал ечимларни солиштириб кўрамизки, ечимга қўйиладиган бутунликка чекланиш, мақсад функциянинг қийматини камайтирар экан.

Ж.6.2.

c_i	БЎ	2 x_1	4 x_2	0 x_3	0 x_4	0 x_5	b_i
	x_1 x_2	1 0 0	0 1 0	3/5 -1/5 3/5	-1/5 2/5 4/5	0 0 -1	9/5 41/15 4/5
2 4 0	x_1 x_2 x_3 Δ_j	1 0 0 0	0 1 0 0	0 0 1 0	-1 2/3 4/3 2/3	1 -1/3 -5/3 2/3	1 3 4/3 14

Ж а в о б . $\bar{x}_{бут} = (1,3)$, $L(\bar{x}) = 14$.

Масалалар.

Қуйидаги масалаларнинг бутун сонли ечимларини топинг.

6.1. $L(x) = 16x_1 + 9x_2 \rightarrow \max, 5x_1 + 2x_2 \leq 20, x_1 + x_2 \leq 6, x_{1,2} \geq 0 - бутун.$

6.2. $L(x) = 2x_1 + 3x_2 \rightarrow \min, 2x_1 + x_2 \geq 9, 3x_1 - 4x_2 \geq 6, x_{1,2} \geq 0 - бутун.$

6.3. $L(x)=3x_1+x_2\to\max, 2x_1+3x_2\le 6, 2x_1-3x_2\le 3, x_{1,2}\ge 0-$*бутун.*

6.4. $L(x)=4x_1+x_2\to\max, 4x_1+2x_2\le 7, 3x_1+10x_2\le 15, x_{1,2}\ge 0-$*бутун.*

6.5. $L(x)=x_1+x_2\to\max, x_1+x_2\le 4, x_1+3x_2\le 9, -3x_1+x_2\le 0, x_{1,2}\ge 0-$*бутун.*

6.6. $L(x)=4x_1+5x_2+x_3\to\max, 3x_1+2x_2\le 10, x_1+4x_2\le 11, 3x_1+3x_2\le 13, x_j\ge 0,$
$j=1..3-$*бутун.*

6.7. $L(x)=x_1-2x_2+3x_4\to\max, x_1+12x_2+4x_3+x_4=34, 3x_1+4x_2+2x_3+x_4=22,\ x_j\ge 0,$
$j=1..4-$*бутун.*

Мундарижага

М7. ТАЙИНЛАШЛАР ҲАҚИДАГИ МАСАЛА. КОММИВОЯЖЕР МАСАЛАСИ

7.1. Масаланинг қўйилиши

Масаланинг моҳияти қуйидагидан иборат: ресурсларни объектлар бўйича шундай тақсимлаш керакки, тайинлашларнинг қиймати энг кичик бўлсин. Фараз қилинадики, ҳар бир объектга фақат битта ресурс тайинланади ва аксинча.

Тайинлашлар ҳақидаги масаланинг мумкин бўлган тадбиқларини ушбу жадвалда келтирамиз:

Жадвал 7.1.

Ресурслар	Объектлар	Фойдалилик критерийси
Ишчилар	Иш ўринлари	Вақт
Автомобиллар	Маршрутлар	Харажатлар
Станоклар	Участкалар	Иш.чиқарилган.маҳсулот ҳажми
Экипажлар	Рейслар	Бўш туриш вақти
Коммивояжер	Шаҳарлар	Товар айирбшлаш

Нархлар матрицаси C қуйидаги кўринишга эга

$$C=(c_{ij}),$$

бу ерда c_{ij} —i- ресурсни j- объектга, $i = j = \overline{1,n}$, (n — объектлар ёки ресурслар сони) тайинлашлардан келиб чиққан сарф-харажат.

Қуйидани ўзгарувчини киритамиз:

$$x_{ij}=\begin{cases}1, агар\ i-ресурс\ \ j-объектга\,тайинланган\,бўлса,\\ 0,\ акс\,холда\end{cases}$$

Шундай қилиб масала ечими ушбу матрица кўринишда ёзилади $x=(x_{ij})$

Мумкин бўлган ечим *тайинлаш* деб айтилади. Тайинлаш ечимлар матрицасига ҳар бир сатрга фақат битта 1, ҳар бир устунга фақат битта 1 ёзишдан келиб чиқади. Лекин, шундай ечим топиш керакки, сарф –харажат энг кам бўлсин.

Нархлар матрицаси С да x_{ij} = 1 элементларга мос c_{ij} ларни тагига чизиб қўямиз:

$$C=(c_{ij})=\begin{pmatrix}4 & 7 & \underline{0}\\ \underline{0} & 3 & 8\\ 6 & \underline{0} & 9\end{pmatrix},\ x=(x_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Тайинлашлар ҳақидаги масаланинг математик модели қуйидагича қўйилади:

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}\to\min,\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=1,\ \sum_{i=1}^{n}x_{ij}=1, i=1..n,\ j=1..n, x_{ij}=0\text{ ¸êè}1.$$

Коммивояжер масаласи ҳам тайинлаш масаласига ўхшаш. Бу ерда С матрица йўллар матрицаси бўлиб, ҳар бир шаҳардан, бошқа шаҳарга борадиган йўл узунлигини билдиради. Масалан, $c_{i,j}$-i-шаҳардан j-шаҳаргача бўлган йўл узунлигини билдиради,

$c_{i,i}=\infty$ ёки каттароқ сон деб қабул қиламиз. Х- матрица, худди юқоридаги матрицага ўхшаш, $X=\{x_{i,j}\}$, $x_{i,i}=1$, $x_{i,j}=0, i\neq j$.

7.2. Масала ечиш алгоритми

Тайинлашлар ҳақидаги масала транспорт масаласининг хусусий ҳолидир, бу ерда $a_i = b_j = 1$. Шунинг учун уни транспорт масаласининг алгоритмлари билан ечиш мумкин. Лекин биз шу масала учун махсус яратилган венгер усули билан танишамиз. У қуйидаги қадамлардан иборат:

1) матрицанинг сатр ва устунларини ўзгартириш;
2) тайинлашни аниқлаш;
3) ўзгартирилган матрицани модификациялаш.

1-қадам. Қадамнинг мақсади C матрицада кўпроқ 0 лар ҳосил қилиш.. Бунинг учун матрицанинг ҳар бир сатридан сатрдаги энг кичик элементни айириб ташлаш, ва ҳар бир устундан устундаги энг кичик элементини айириб ташлаш.

2-қадам. Олдинги қадамдан кейин, матрицанинг ҳар бир сатри ва ҳар бир устунида биттадан 0 элемент танлаб олиш мумкин бўлса олинган ечим оптимал бўлади.

3-қадам. 0 лардан тузилган мумкин бўлган ечим топилмаган бўлса, қуйидаги ишни бажарамиз. Баъзи бир сатрлар ва устунлардан минимал сондани тўғри чизиқларни шундай ўтказамизки, барча 0 лар чизилган бўлсин. Чизилмаган энг кичик элементни оламиз, уни ҳар бир чизилмаган элементдан айирамиз ва чизилган кесмалар кесишган жойлардаги ҳар бир элементга қўшамиз.

Агар 3-қадамдаги ишлардан сўнг оптимал ечим топилмаган бўлса, у ишларни оптимал ечим топилгунча давом эттирамиз.

Мисол.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix}$$

Ресурсларни объектлар бўйича оптимал тақсимлансин.

Ечиш. ***1-қадам.*** 1, 2, 3 ва 4 сатрларнинг энг кичик элементлари мос равишда тенг 2, 4, 11 ва 4.

Уларни ҳар бир сатрдан айириб қуйидаги матрицани ҳосил қиламиз:

$$\tilde{N} = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix}$$

1, 2, 3 ва 4 устунларнинг энг кичик элементлари мос равишжа тенг 0, 0, 5, 0 . Уларни ҳар бир устундан айириб қуйидаги матрицани ҳосил қиламиз:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 7 & 5 \\ 11 & 0 & 10 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 0 \\ 0 & 11 & 9 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 8 & 2 & 5 \\ 11 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}$$

2-қадам. Биророта ҳам тўлиқ тайинлаш олинмади. Нархлар матрицасин ўзшартирамиз.

3-қадам. 1-устун, 2-сатр (ёки 2-устун), 3-сатрни устидан чизамиз. Чизилмаган минимал элемент тенг 2 га.

$$\to\begin{pmatrix} \cancel{0} & 8 & 2 & 5 \\ \cancel{11} & \cancel{0} & \cancel{5} & \cancel{4} \\ \cancel{2} & \cancel{3} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & 11 & 4 & 15 \end{pmatrix}\to \min = 2$$

Уни ҳар бир чизилмаган элементдан айирамиз ва чизиқлар кесишган нуқталардаги элемениларга қўшқмиз ва ҳосил қиламиз:

$$\to\begin{pmatrix} 0 & 6 & 0 & 3 \\ 13 & 0 & 5 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 2 & 13 \end{pmatrix}\to \bar{x} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Жавоб. 1- ресурсни 3-объектга, 2- ресурсни 2-объектга, 3- ресурсни 4-объектга, 4-ресурсни 1-объектга йўналтирамиз. Тайинлашлар нархи тенг: 9 + 4 + 11 + 4 = 28.

Масалани MathCAD да ечиш.

1.Мисол 1.

ORIGIN := 1   m := 4   n := 4   i := 1.. m   j := 1.. n

$$C := \begin{pmatrix} 2 & 10 & 9 & 7 \\ 15 & 4 & 14 & 8 \\ 13 & 14 & 16 & 11 \\ 4 & 15 & 13 & 19 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(x) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right) \qquad L(x) = 37$$

Given

$$x \ge 0 \quad x \cdot e_1 = A \quad x^T \cdot e_2 = B \quad r := \mathrm{Minimize}(L, x) \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L(r) = 28$$

2. Мисол 2.

$ORIGIN := 1 \quad m := 5 \quad n := 5 \quad i := 1..m \quad j := 1..n$

$$C := \begin{pmatrix} 5 & 7 & 6 & 4 & 3 \\ 4 & 8 & 4 & 6 & 5 \\ 6 & 7 & 5 & 4 & 4 \\ 7 & 6 & 7 & 6 & 7 \\ 5 & 4 & 7 & 8 & 5 \end{pmatrix} \quad A := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad x := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad e_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$L(x) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \left(C_{i,j} \cdot x_{i,j}\right) \qquad L(x) = 31$$

$$\text{Given} \quad x \geq 0 \quad x \cdot e_1 = A \quad x^T \cdot e_2 = B \quad r := \text{Minimize}(L, x) \quad r = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L(r) = 22$$

3.Коммивояжер масаласи. Ушбу коммивояжер масаласини қараймиз.

$ORIGIN:=1 \quad m:=6 \quad n:=6 \quad i:=1..m \quad j:=1..n$ // индексы

$$C := \begin{bmatrix} 100 & 7 & 3 & 10 & 17 & 5 \\ 9 & 100 & 4 & 5 & 8 & 6 \\ 13 & 2 & 100 & 9 & 11 & 14 \\ 5 & 8 & 6 & 100 & 3 & 6 \\ 16 & 11 & 13 & 10 & 100 & 8 \\ 6 & 5 & 9 & 8 & 4 & 100 \end{bmatrix} \quad x := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ // платёжная матрица

$A^T := \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \; B := A \;\; e_1 := A \;\; e_2 := B$ // векторы ограничений

$Z(x) := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (C_{i,j} x_{i,j}) \qquad Z(x) = 600$ // целевая функция

Given

$x_{6,1} = 1 \quad x \geq 0 \quad x e_1 = A \quad x^T e_2 = B \quad q := Minimize(Z, x)$ // внутренняя функция

$$q := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad Z(q) = 27$$ // вывод результатов

Изоҳлар. 1. Агар матрица квадрат бўлмаса, матрица квадрат бўлиши учун фиктив сатрлар ёки фиктив устунлар киритиш керак.

2. Агар бирор ресурсни бирор объектга тайинлаш мумкин бўлмаса, мос нархни бирор катта M. сонга тенг қилиб олиш керак.

3. Агар дастлабки масала максимум масаласи бўлса, C матрицани (—1) га кўпайтириб, матрицанинг барча элементларини матрицанинг максимал элементига (ёки катта сонга) қўшиб, мусбат элементли янги матрица ҳосил қилиш керак ва кейин минимум масаласини ечиш керак.

4. Агар квадрат матрицада 0 элементларни чизаб ташлайдиган сатрлар ва устунлар сони тенг бўлса, у ҳолда 0 қийматли тайинлаш мавдуд.

7.3. Станокларнинг унумдорлигини ҳисобга олган ҳолда уларни ишга бўлиш

Қуйидаги масалани қарайлик.

Корхонада 5 та станок бор, улар деталларни қайта ишлаш бўйиса 5 хил амал бажаради. Станокларнинг ҳар бирини ҳар хил амал бажаришдаги унумдорлиги қуйидаги матрица билан аниқланади:

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ҳар бир станок битта амал бажаради деб, умумий унумдорлик максимал бўлиши учун станокларни амаллар бўйича оптимал тақсимотини топинг.

Ечиш. Масалада max ни топиш талаб этилмоқда, алгоритм min учун берилган. Шунинг учун, C матрицани аввал (—1) га кўпайтирамиз, матрица элементларини мусбат қилиш учун барча элементларни бирор мусбат сонга, масалан, 10 га қўшамиз. Натижада қуйидаги матрицани оламиз:

$$C=\begin{pmatrix} 5 & 3 & 4 & 6 & 7 \\ 6 & 2 & 6 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 5 & 6 & 6 \\ 3 & 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 6 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & \underline{4} & 3 & \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{4} & \underline{0} & \underline{2} & \underline{1} \\ 2 & \underline{3} & 1 & \underline{0} & \underline{0} \\ 1 & \underline{0} & 1 & \underline{0} & \underline{1} \\ 1 & \underline{0} & 3 & \underline{4} & \underline{1} \end{pmatrix} \to$$

Сатрлардаги минимал элементлар тенг: 3, 4, 4, 6, 4. Уларни сатр элементларидан айирдик.

Тайинлаш ҳосил бўлмади, шунинг учун, 2-сатр, 2-,4-,5- устунларни ўчирдик.

Энг кичик элемент тенг 1. Уни барча чизилмаган элементлардан айирамиз ва иккита чизиқлар кесишган жойдаги элементларга қўшамиз ва оламиз:

$$C \to \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 1 & \underline{0} \\ \underline{0} & 5 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & \underline{0} & 0 \\ 0 & 0 & \underline{0} & 0 & 1 \\ 0 & \underline{0} & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \to \bar{x}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Бу матрицага мос оптимал ечим тенг:

$$\bar{x}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Умумий унумдорлик эса тенг: 6 + 6 + 3 + 6 + 7= 28.

Шундай қилиб, 1-станокда 5-амални, 2-станокда 1-амални, 3-станокда 5-амални, 4-станокда 3-амални, 5-станокда 2-амални бажарсак умумий унумдорлик бир вақт бирлигида 28 та детал бўлар экан.

МАШҚЛАР

7.1. Фирма учта механизмга эга: A_1, A_2, A_3 (сатрлар) уларнинг ҳар бири уч хил ишда ишлатилиши мумкин: B_1, B_2, B_3 (устунлар). Механизмларнинг иш унумдорлиги ушбу матрицада шартли бирликларда берилган.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

Механизмаларни иш турлари бўйича шундай тақсимлангки, механизмларнинг умумий иш унумдорлиги энг юқори бўлсин.

7.2. Беш киши тўрт хил иш бажариши мумкин. Ҳар бир шахс ихтиёрий ишни ҳар хил унумдорлик билан бажариши мумкин. Ҳар бир шахс бир пайтда битта ишни бажариши мумкин. Ишчиларнинг иш унумдорлиги унумдорлик матрицаси билан берилган:

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Кишиларни ишларга шундай тақсимлаш керакки, умумий унумдорлик энг юқори бўлсин.

7.3. Фирманинг тўрта склади бор, у тўрта истемолчидан заказ олди. Заказ бўйича юкларни истеъмолчиларга етказиб бериш керак. Фирманинг складлари жуда кенг бўлиб, керакли миқдордаги товарлани заказларни бажариш учун сақлаши мумкин.

Складлар ва истеъмолчилар орасидаги масофалар йўллар матрицаси ёрдамида берилган.

$$\begin{bmatrix} 68 & 72 & 75 & 83 \\ 56 & 60 & 58 & 63 \\ 38 & 40 & 35 & 45 \\ 47 & 42 & 40 & 45 \end{bmatrix}$$

Заказларни складлар орасида шундай тақсимланги, трансорт йўли энг кичик бўлсин.

7.4. Фирманинг учта корхонаси мавжуд, уларнинг ҳар бири уч хил маҳсулот ишлаб чиқиши мумкин. Ҳар бир корхона бир хил маҳсулот ишлаб чиқиши мумкин.

Ҳар бир маҳсулотнинг бирлик миқдорининг таннархлар нархлар матрицасида берилган:

$$\begin{bmatrix} 15 & 12 & 11 \\ 13 & 11 & 10 \\ 12 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

Маҳсулот ишлаб чиқишни корхоналар ўртасида шундай тақсимлангки, уларнинг таннархи энг кичик бўлсин.

Мундарижага

М8. НОЧИЗИҚ ПРОГРАММАЛАШ МАСАЛАСИ (НПМ)

8.1. Масаланинг қўйилиши

Ночизиқ программалашнинг математик модели умумий ҳолда қуйидагича баён этилади: берилган тенгсизликларни

$$\begin{cases} g_i(x) = b_i, i = 1..m_1, \\ g_i(x) \geq b_i, i = m_1 + 1..m_2, \\ g_i(x) \leq b_i, i = m_2 + 1..m. \end{cases}$$

қаноатлантирувчи шундай $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ вектор топиш керакки, у мақсад функцияга

$$L = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min), x \in U \Leftrightarrow \max_{x \in U} f(x) = f(\bar{x}), \qquad (8.1)$$

оптимал (энг катта ёки кичик) қиймат берсин, бу ерда x_j — ўзгарувчилар, $i = 1..m$, $j = 1..n$; L, f, g_i — берилган *n* ўзгарувчили функциялар, b_i — сонлар, U-тенгсизликлар системаси ечимларининг тўплам, $U = \{x \in R^n \left| g_i(x) \leq (=, \geq) b_i, i = 1..m \right\}$.

НПМ саноатда маҳсулот ишлаб чиқаришни башорат қилиш, товар ресурсларни бошқариш, техник воситаларга хизмат ва ремонт қилиш каби ишларни бажаришда қўлланилади.

НПМ ни ечишда, чизиқли масалалар каби ягона усул йўқ. Мақсад функция ва чекланишлар турига боғлиқ ҳолда махсус усуллар ишлаб чиқилган, масалан, энг универсал Лагранжнинг кўпайтувчилар усули (уни ҳозир, тўғрироғи Лагранжнинг минимум принципи деб айтишади), квадратик ва қабариқ программалаштириш, градиент усуллар, тақрибий усуллар, график усул ва ҳ.к. Оптимал бошқарувда Лагранж принципи Понтрягин принципини келтириб чиқаради. Мақсад функция сепарабел бўлганда Беллманнинг оптималлик принципи ўринли бўлади.

Лагранж принципида (8.1) масала учун Лагранж функцияси тузилиб,

$$F(x, \lambda) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \qquad (8.2)$$

шартли масала $\max_{x \in U} f(x) = f(\bar{x})$ шартсиз $\max_{x} F(x, \bar{\lambda}) = F(\bar{x}, \bar{\lambda})$ масалага келтирилади. Бу ҳозирги замон математикасининг энг кучли, сермаҳсул, тадбиқлари кенг ғояси ҳисобланади.

Теорема. (Лагранж принципи).Ф.қ. $\underset{x \in U}{extr}\, f(x) = f(\bar{x})$ бўлсин ва $f(x), g_i(x), i = 1..m$, функциялар $U \subset R^n$ узлуксиз дифференциалланувчи бўлсин. У ҳолда бирданига нолга тенг бўлмаган шундай Лагранж кўпайтувчилари топиладики, қуйидаги шартлар бажарилади:

1) $F_x(\bar{x}, \bar{\lambda}) = \bar{\lambda}_0 f_x(\bar{x}) + \sum_{i=1}^{m} \bar{\lambda}_i (g_i)_x = 0 \Leftrightarrow F_{x_j}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0,\ j = 1..n$; (стационарлик шартлари)

2) $\lambda_0 \leq 0, extr = \max; \lambda_0 \geq 0, extr = \min$; (ишораларнинг мос келиш шартлари)

3) $\lambda_i g_i(\bar{x}) = 0, i = 1..m$. (пассивликни тўлдириш шартлари)

НПМ да яхшигина ўрганилган ҳоллар бу, мақсад функция ночизиқ бўлган ва чекланишлар системаси чизиқли бўлган ҳол. Бу ҳол ҳам жуда осон эмас, мақсад функциянинг айрим кўринишлари учун яхши усуллар ишлаб чиқилган, масалан, мақсад функция сепарабел, яъни у бир ўзгарувчили функцияларнинг йиғиндиси бўлган ҳол ёки квадратик функция бўлган ҳол, яхши ўрганилган. ЧПМ дан фарқлироқ мақсад функция соҳанинг ичида ҳам, чегараларида ҳам экстремумга эга бўлиши мумкин.

НПМ ни ечишда мақсад функция ҳам локал, ҳам глобал экстремумларга эга бўлиши мумкин. Глобал экстремум локал экстремумлар ичидан изланади. Агар глобал экстремум ажратилмаса, бу амалий масалаларни ечишда, масалан, оптимал бошқарув масалаларини ечишда нотўғри натижаларга олиб келиши мумкин, нотўғри натижалар эса, катта мағлубиятларга, ютқазишларга олиб келиши мумкин.

8.2. График усул

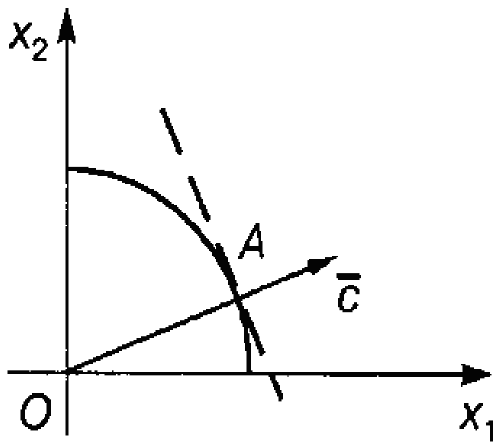
НПМ да икки ўзгарувчили ҳолни қараймиз.Мақсад функция ва чекланишлар чизиқли ва ночизиқ бўлиши мумкин.Бундай ҳолда НПМ график усулда ечилиши мумкин.

Чизиқли мақсад йункция ва ночизиқ чекланишлар

Мисол 1. Функциянинг глобал экстремумлари топилсин:

$$L = 2x_1 + x_2, x_1^2 + x_2^2 \le 16, x_1, x_2 \ge 0 .$$

Ечиш. МБЕС радиуси 4 га тенг бўлган доиранинг биринчи чоракдаги қисмидир



Расм 8.1.

Мақсад функциянинг ўзгармаслик (сатҳ) чизиқлари $2x_1 + x_2 = C \Rightarrow x_2 = -2x_1 + C$ тўғри чизиқлардир. Глобал минимум O (0, 0) нуқтада эришилади, глобальный максимум — эса ўзгармаслик чизиқларнинг айлана билан уринган нуқта A да эришилади. A нуқтадан ўзгармаслик чизиғига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз. У координата бошидан ўтиб, ½ бурчак коэффициентга ва $x_2 = 1/2x_1$ тенгламага эга бўлади. Ушбу системани қарайлик:

$$x_1^2 + x_2^2 = 16, x_2 = 0.5x_1$$

Бу ердан топамиз: $x_1 = 8\sqrt{5}/5$, $x_2 = 4\sqrt{5}/5$, $L = 16\sqrt{5}/5 + 4\sqrt{5}/5 = 4\sqrt{5}$.

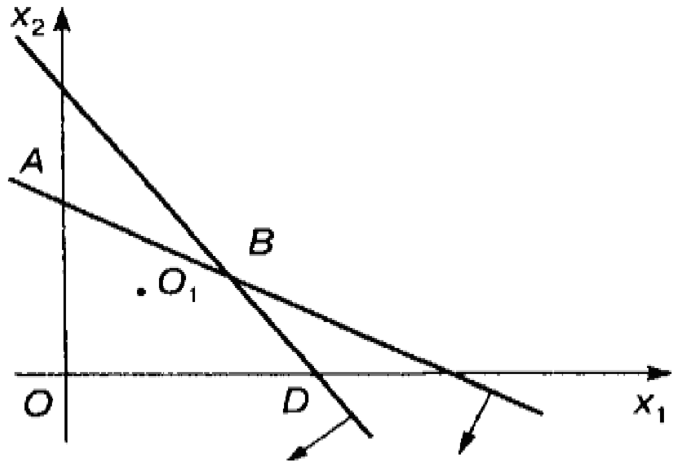
Ж а в о б . Глобал минимум O (0, 0) нуқтада эришилади, нолга тенг, глобал максимум $A(8\sqrt{5}/5, 4\sqrt{5}/5)$ нуқтада эришилади , $4\sqrt{5}$ га тенг.

Мақсад функция ночизиқ, чекланишлар чизиқли ҳол

Мисол 2. Функциянинг глобал экстремумлари топилсин:

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2, x_1 + 2x_2 \le 12, x_1 + x_2 \le 9, x_1, x_2 \ge 0$$

Ечиш. МБЕТ — $OABD$ кўпбурчакка тенг (р. 8.2). Сатҳ чизиқлари- маркази O_1 (2, 3). бўлган айланалар. Мақсад функция O_1 нуқтада энг кичик қийматга эга,у нолга тенг.



Мақсад функция энг катта қийматга $D(9, 0)$ нуқтада эришади, у қуйидагига тенг:

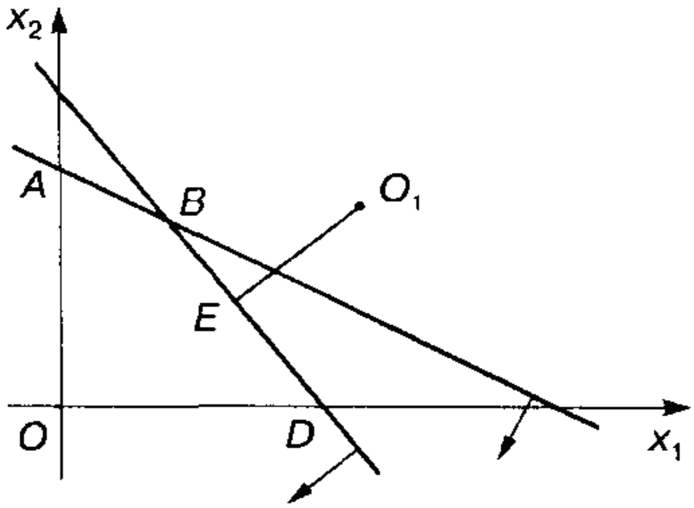
$$L(D) = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58.$$

Ж а в о б . Глобал максимум D (9, 0) нуқтада эришилад ва у 58 га тенг, глобал минимум O_1 (2, 3) нуқтада эришилади ва 0 га тенг.

Мисол 3. Функциянинг глобал экстремумлари торилсин

$$L = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 3)^2, 2x_1 + 3x_2 \le 14, 3x_1 + 2x_2 \le 15, x_1, x_2 \ge 0$$

Ечиш. МБЕС — *OABD* тўғритўртбурчакдир (расм. 8.3). Сатҳ чизиқлари маркази O_1 (6, 3) нуқтада бўлган айланалардир. Глобал максимум *O* (0, 0) нуқтада эришилади, чунки у O_1 нуқтадан энг катта ўзоқлашган нуқтадир. Глобал минимум *E* нуқтада эришилади, у $3x_1 + 2x_2 = 15$ тўғри чизиқ билан унга O_1 нуқтадан ўтказилган перпендикуляр кесишган нуқтада жойлашган.



Расм 8.3.

E-нуқтанинг координаталарини топамиз. $3x_1 + 2x_2 = 15$ тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти тенг -3/2. Шунинг учун, O_1E перпендикулярнинг бурчак коэффициенти тенг 2/3. Бу тўғри чизиқ O_1 (6, 3) нуқтадан ўтади. Шунинг учун унинг тенгламаси қуйидагича бўлади:

$$(x_2 - 3) = 2(x_1 - 6)/3, \Rightarrow 2x_1 - 3x_2 = 3.$$

Ушбу системани ечиб

$$2x_1 - 3x_2 = 3, 3x_1 + 2x_2 = 15,$$

E нуқтанинг координаталарини топамиз: x_1 = 51/13, x_2 = 21/13, бунда $L(E)$ = 1053/169.

Ж а в о б . Глобал максимум O (0, 0) нуқтада эришилади ва у тенг 52. Глобальный минимум

E (51/13, 21/13) нуқтада эришилад ва тенг 1053/169.

Ночизиқ мақсад функция ва ночизиқ чекланишлар

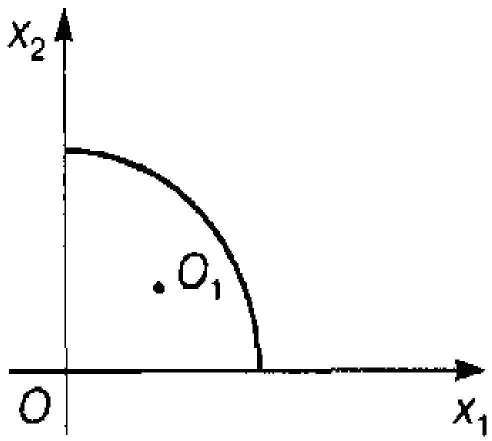
Мисол 4. Функциянинг глобал экстремумлари топилсин

$$L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2, x_1^2 + x_2^2 \le 16, x_1, x_2 \ge 0$$

Ечиш. МБЕС маркази координаталар бошида ва радиуси 4 га тенг бўлган доиранинг биринчи чоракдаги қисмидир. Сатҳ чизиқлари маркази O_1 (2, l) да бўлган райланалардир.

Глобал минимум O_1 нуқтада эришилади, глобал максимум — A (0, 4) нуқтада эришилади. Бунда

$$L = (0-2)^2 + (4-1)^2 = 4+9 = 13.$$



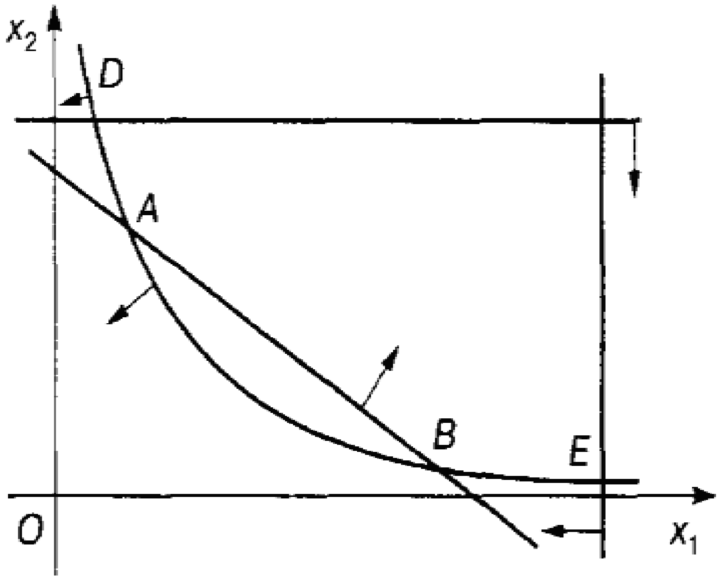
Расм 8.4.

Ж а в о б . Глобал минимум, тенг нолга ва O_1 (2, l) нуқтада эришилади, глобал максимум, тенг 13 га, ва A (0, 4) нуқтада ётади.

Пример 5. Ушбу функциянинг глобал экстремумлари топилсин

$$L = x_1^2 + x_2^2, x_1x_2 \le 4, x_1 + x_2 \ge 5, x_1 \le 7, x_2 \le 6, x_1, x_2 \ge 0.$$

Ечиш. МБЕС икки қисмдан иборат(расм. 8.5). Сатҳ чизиқлари-маркази координаталар бошида бўлган айланалардир.



Расм 8.5.

A ва *B*, нуқталарнинг координаталарини ушбу системани ечиб топамиз:

$$x_1x_2 = 4, x_1 + x_2 = 5$$

Бу ердан оламиз *A* (1, 4), *B* (4, 1). Бу нуқталарда функция глобал минимумга эришади ва у 17 га тенг.

D и *E* нуқталарнинг координаталарини ушбу тенгламалар системасини ечиб топамиз:

$$x_1x_2 = 4, x_1 + x_2 = 6,$$
$$x_1x_2 = 4, x_1 + x_2 = 7$$

Бу ердан топамиз: *D* (2/3, 6) ва *L(D)* = 328/9, *E* (7, 4/7) ва *L(E)* = 2417/49.

Ж а в о б . Мақсад функция *A* (1, 4) ва *B* (4, 1) нуқталарда,иккита глобал минимумга эга, у 17 га тенг. Глобальный максимум, тенг 2417/49 га тенг ва, *E* (7, 4/7) нуқтада эришилади.

8.3. Каср-чизиқли программалаш масаласи (КЧПМ)

Масаланинг математик модели

Умумий ҳолдр каср-чизиқои программалаш масаласи қуйидагича берилади:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j / \sum_{j=1}^{n} d_j x_j \to \max(\min), \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, x_j \geq 0, i = 1..m, j = 1..n,$$

бу ерда c_j, d_j, b_i, a_{ij} j — ўзгармас коэффициентлар ва $\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$

Ушбу каср-чизиқли программалаш масаласини қарайлик:

$$L = (c_1x_1 + c_2x_2)/(d_1x_1 + d_2x_2) \to \max(\min) \quad (8.3)$$

$$a_{i1}x_1 + a_{i2} \leq b_i, i = 1..m, x_i \geq 0, i = 1,2 \quad (8.4)$$

Фараз қиламизки, $d_1x_1 + d_2x_2 \neq 0$ бўлсин.

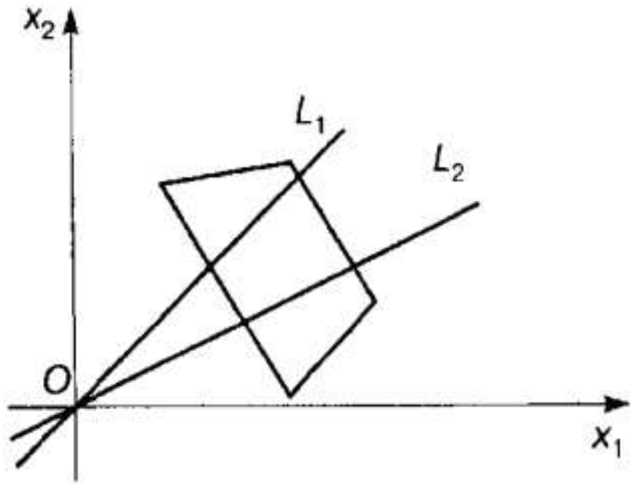
Бу масалани ечиш учун МБЕС ни топайлик, соҳа (8.2) чекланишлар билан берилган. Ф.қ. бу соҳа бўш бўлмасин.

(8.3) дан x_2 ни топайлик:

$$Ld_1x_1 + Ld_2x_2 = c_1x_1 + c_2x_2, x_2(Ld_2 - c_2) = x_1(c_1 - Ld_1),$$
$$x_2 = x_1(c_1 - Ld_1)/(Ld_2 - c_2), x_2 = kx_1,$$

бу ерда $k = (c_1 - Ld_1)/(Ld_2 - c_2)$.

Тўғри чизиқ $x_2 = kx_1$ O(0,0) нуқтадан ўтади. L- ўзгармас бўлса, бурчак коэффициент ҳам ўзгармас ва тўғри чизиқ бирор ҳолатни эгаллайди. L нинг қиймати ўзгарса, тўғри чизиқ $x_2 = kx_1$ ҳам ўзгаради, у координата бошига нисбатан айлана бошлайди. (расм. 8.6).

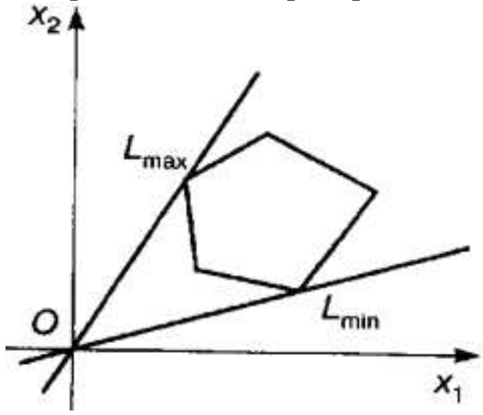


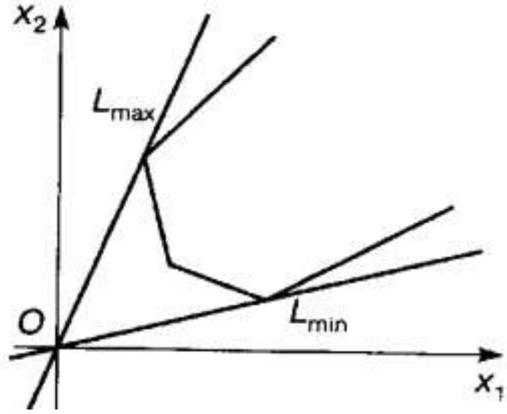
Расм 8.6.

L ни монотон ўзгаради деб, бурчак коэффициентнинг ўзгаришини топамиз. dk/dL ҳосилани топамиз:

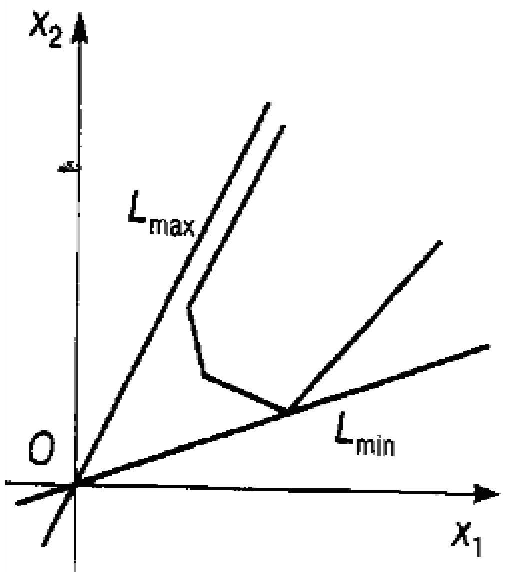
$$\frac{dk}{dL} = k' = \frac{-d_1(Ld_2 - c_2) - d_2(c_1 - Ld_1)}{(Ld_2 - c_2)^2} = \frac{d_1c_2 - d_2c_1}{(Ld_2 - c_2)^2}.$$

Махраж доимо мусбат ва L дан боғлиқ эмас. Шунинг учун ҳосила ўзгармас ишорага эга ва бурчак коэффициент ўсади ёки камаяди, яъни бурчак коэффициент координата бошига нисбатан ўнгга ёки чапга айланади. Агар $k>0$ бўлса тўғри чизиқ соат стрелкасига тескари, агар $k<0$ бўлса соат стрелкаси йўналишида айлана бошлайди. Айланиш йўналиши аниқлангач, кўпёқли МБЕС нинг учи ёки учларини шундай топамизки, уларда мақсад функция экстремал қийматларга эришсин ёки чегараланмаганини кўрсатамиз.

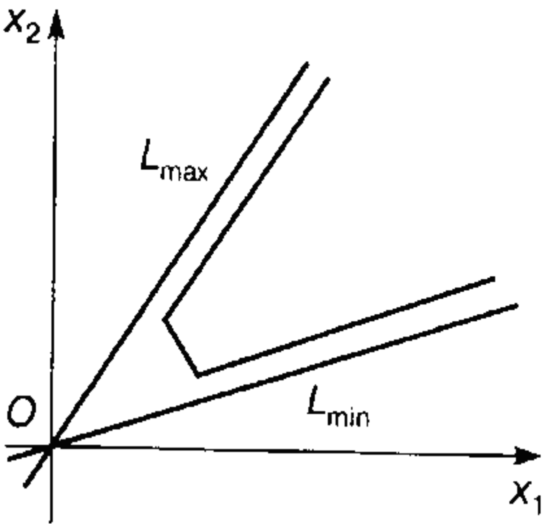




Расм 8.7. Расм 8.8.



Расм 8.9.



Расм 8.10.

Бу ерда қуйидги мумкин бўлган ҳоллар бўлиши мумкин:

1. МБЕС чегараланган, максимум ва минимум унинг четки нуқталарида эришади. (р. 8.7).
2. МБЕС чегараланмаган, лекин мақсад функция экстремумга эга четки нуқталар мавжуд (р. 8.8).
3. МБЕС чегараланмаган, лекин экстремумлардар бири мавжуд. Масалан, минимум соҳанинг бирор чекка нуқтасида эришилади, максимум асимптотик максимум бўлади(р. 8.9).
4. МБЕС чегараланмаган. Максимум ва минимум асимптотик бўлади (р. 28.10).

Ечиш алгоритми

1. МБЕС ни топамиз.
2. Бурчак коэффициентни топамиз, ва мақсад функциянинг айланиш йўналишини топамиз.
3. Мақсад функциянинг max(min) нуқталари ва қийматларини топамиз ёки масаланинг ечилмаслигини кўрсатамиз.

Каср-чизиқли программалашнинг маҳсулот таннархини аниқлаш учун қўллаш

Каср-чизиқли программалашнинг маҳсулот таннархини аниқлаш учун қўллашни кўриб чиқамиз.

Мисол 6. Икки турдаги маҳсулот *A* ва *B* ни ишлаб чиқиш учун корхона уч турдаги технологик қурилмадан фойдаланилади. Ҳар бир маҳсулот ҳар бир қурилмада қайта ишланилади. Ҳар бир маҳсулотни ҳар бир қурилмада қайта ишлаш вақтлари ва сарф-харажатлар Ж.8.1. да келтирилган.

Қурилма I ва III лар корхонада 26 ва 39 соатдан кўп бўлмаган ҳолда, II қурилма 4 соатдан кўп бўлмаган вақт ичида ишлатилиши мумкин.

Ҳар бир маҳсулот таннархи ўртача минимал бўлиши учун,корхона ҳар бир турдаги маҳсулотдан қанча тайёрлаш керак.

Ж8.1.

Қурилма тури	1 та маҳсулотни қайта ишлашга сарфланадиган вақт	
	А	В
1	2	8
2	1	1
3	12	3
1 та маҳсулотга сарфланадиган харажат, минг сўм	2	3

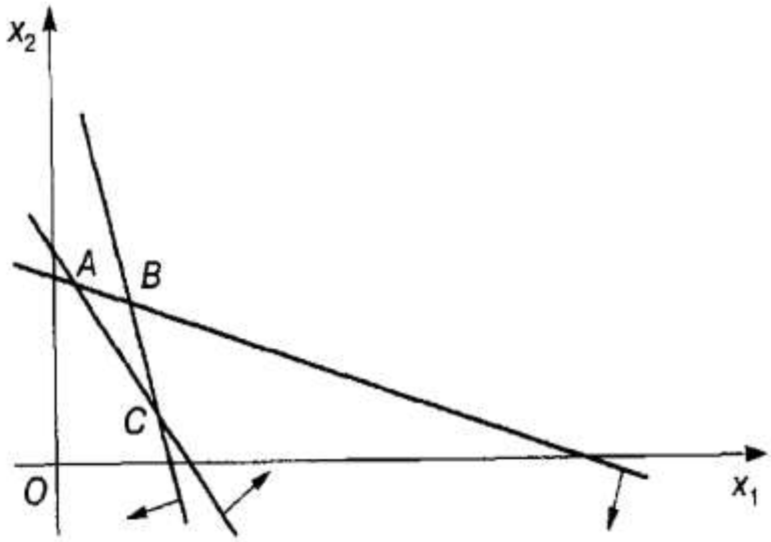
Ечиш. Масаланинг математик моделини қурамиз. Ф.қ. x_1, x_2 — корхонада тайёрланадиган А ва В маҳсулотлар сони бўлсин. Уларни тайёрлаш учун умумий сарф-харажат тенг $(2x_1 + 3x_2)$ минг сўм. , а уларнинг ўртача таннархи тенг бўлади:

$$(2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2).$$

Ш.қ. масаланинг математик модели қуйидагича бўлади:

$$L = (2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2) \to \min,$$
$$2x_1 + 8x_2 \le 26, x_1 + x_2 \ge 4, 12x_1 + 3x_2 \le 39, x_1, x_2 \ge 0.$$

ΔABC — мумкин бўлган ечимлар соҳаси (р. 8.11).



Расм 8.11.

x_2 ни топамиз: $L = (2x_1 + 3x_2)/(x_1 + x_2), 2x_1 + 3x_2 = L(x_1 + x_2), x_2(3 - L) = x_1(L - 2),$

$$x_2 = (L - 2)x_1/(3 - L) = kx_1.$$

Ш.қ. бурчак коэффициент тенг $(L - 2)/(3 - L) = k$, у ҳолда

$$\frac{dk}{dL} = \frac{(3 - L) - (-)(L - 2)}{(3 - L)^2} = \frac{1}{(3 - L)^2}.$$

$dk/dL > 0$ бўлганлиги учун, k = (L - 2)/(3 - L)=k(L) функция ўсувчан. Бу эса тўғри чизиқни соат стрелкасига тескари айланишини билдиради. Ш.у. С нуқтада (расм 8.11) мақсад функция энг кичик қиймат қабул қилади (глобал минимум).

С нуқтанинг координаталарини топамиз. Системани ечиб, топамиз:

$$12x_1+3x_2=39, x_1+x_2=4 \Rightarrow x_1=3, x_2=1.$$

Яъни, С(3,1), $\bar{x}=(3,1), \bar{L}=9/4.$

Ш.қ. корхона А турдаги маҳсулотдан 3 та, ва В турдаги маҳсулотдан, 1 та ишлаб чиқиши керак экан. Шунда маҳсулотларнинг таннархи энг кичик бўлиб, 2.25 минг сўмни ташкил этар экан.

Каср-чизиқли программалаш масаласини ЧПМ га келтириш

КЧПМ ни ЧПМ га келтириш мумкин ва уни симплекс усул билан ечиш мумкин. Агар

$$d=\sum_{j=1}^{n} d_j x_j \neq 0$$

бўлса, ушбу белгилаш киритиб $y_0=1/d$, янги ўзгарувчилар киритамиз: $y_j = y_0 x_j$. У ҳолда КЧПМ қуйидаги ЧПМ кўринишини олади:

$$L=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j - b_i y_0 = 0, \sum_{j=0}^{n} d_j y_j = 1, y_j \geq 0, i=1..m, j=0..n.$$

Қурилган масалани оптимал ечими топилгач, дастлабки масаланинг оптимал ечимини топамиз.

Мисол 7. КЧПМ берилган бўлсин

$$L=(2x_1-x_2)/(x_1+2x_2+1) \to \max,$$

$$x_1-2x_2+x_3=2, 2x_1+x_2+x_4=6, \ x_j \geq 0, \ j=1..4.$$

Ечиш. Белгилаймиз: $x_1+2x_2+1=1/y_0, y_0>0$, у =олда $L=2x_1y_0-x_2y_0.$

Белгилаймиз: $x_1y_0=y_1, x_2y_0=y_2, x_3y_0=y_3, x_4y_0=y_4.$

Чекланишлар системасини ўзгартирамиз,

бунинг учун, чекланишларни y_0 га кўпайтириб, янги ўзгарувчилар y_0, y_1, y_2, y_3, y_4 га ўтамиз. Масала ушбу кўринишни олади:

$$L=2y_1-y_2 \to \max,$$

$$-2y_0+y_1-2y_2+y_3=0, -6y_0+2y_1+y_2+y_4=0, y_0+y_1+2y_2=1, y_j \geq 0, \ j=1..4.$$

c_i	БП	0	2	-1	0	0	b_i
		y_0	y_1	y_2	y_3	y_4	
	y_3 y_4	-2 -6 *1*	1 2 1	-2 1 2	1 0 0	0 1 0	0 0 1
0 0	y_3 y_4	0 0	*3* 8	2 13	1 0	0 1	2 6

0	y_0	1	1	2	0	0	1
	Δ_j	0	-2	1	0	0	0
2 0 0	y_3 y_4 y_0	0 0 1	1 0 0	2/3 2/3 4/3	1/3 -8/3 -1/3	0 1 0	2/3 2/3 1/3
	Δ_j	0	0	7/3	2/3	0	4/3

ЧПМ ҳосил бўлди , симплекс усул билан ечамиз (жадвал 8.2). Оптимал ечим тенг

$$\bar{y} = (1/3, 2/3, 0, 0, 2/3)$$

у ҳолда

$$x_i = y_i / y_0, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 2.$$

Ж а в о б : $\bar{x} = (2, 0, 0, 2), \bar{L} = 4/3.$

8.4. Лагранж кўпайтувчилар усули (Лагранж принципи)

Масаланинг қўйилиши

НПМ берилган бўлсин:

$$L = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min), g_i(x) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = 1..m. \quad (8.5)$$

Ф.қ. функциялар $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ва $g_i(x) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ узлуксиз биринчи тартибли хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Чекланишлар тенгликлар билан берилган. Шунинг учун, шартли экстремум масалаларини шартсиз экстремум масаласига олиб келадиган Лагранж усули (минимум принципи) дан фойдаланамиз.

Масалани ечиш учун Лагранж функцияси қурилади

$$F(x, \lambda) = F(x) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x) \quad (8.6)$$

бу ерда λ_i — Лагранжа кўпайтувчилари.

Сўнг хусусий ҳосилалар аниқланади:

$$\frac{\partial F}{\partial x_j}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \frac{\partial F}{\partial \lambda_i}, \quad i = \overline{1, m}.$$

Уларни нолларга тенглаб ушбу системани оламиз:

$$\partial F / \partial x_j = \lambda_0 \partial f / \partial x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i / \partial x_j = 0, \ j = 1..n, \quad (8.7)$$

$$\partial F / \partial \lambda_i = g_i(x_1, ..., x_n) = 0, i = 1..m. \quad (8.8)$$

Системани ечиб функция L мумкин бўлган экстремал нуқталарни топамиз. Юқоридаги шартлар экстремумнинг зарурий шартларин беради холос. Топилган экстремал нуқталарни албатта текшириб кўриш керак.

Мисол 8. Функциянинг экстремуми топилсин:

$$L = x_1x_2 + x_2x_3,$$
$$x_1 - x_2 = 2, x_2 + 2x_3 = 4$$

Ечиш. Лагранж функциясини қурамиз:

$$F(x,\lambda) = \lambda_0(x_1x_2 + x_2x_3) + \lambda_1(x_1 - x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + 2x_3 - 4)$$

Ундан x_1, x_2, x_3, λ_1, λ_2 ўзгарувчилар бўйича хусусий ҳосилаларни топиб 0 га тенглаб экстремумнинг зарурий ўартларини топамиз:

$$F_{x_1} = \lambda_0 x_2 + \lambda_1 = 0,$$
$$F_{x_2} = \lambda_0(x_1 + x_3) - \lambda_1 + \lambda_3 = 0,$$
$$F_{x_3} = \lambda_0 x_2 + 2\lambda_2 = 0,$$
$$F_{\lambda_1} = x_1 - x_2 - 2 = 0,$$
$$F_{\lambda_2} = x_2 + 2x_3 - 4 = 0$$

1-ҳол. Агар десакки, $\lambda_0 = 0.$ У ҳолда барча Лагранж кўпайтувчилари нолга тенг: $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = 0.$ Бундай бўлиши мумкин эмас. Шунинг учун, $\lambda_0 \neq 0$ деймиз, масалан, $\lambda_0 = 1$ дейлик.

2-ҳол. $\lambda_0 = 1$ дейлик. У ҳолда оламиз $\lambda_1 = -x_2$, $\lambda_2 = -x_2/2$,

$x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$, $L = -8$.

Ҳосил қилинган ечимни ўзгартириб, экстремумнинг характерини ўрганмиз. Ўзгарилган қийматлар чекланишларни қаноатлантириши керак. Олайлик, $x_1 > -2$, масалан $x_1 = -1$, у ҳолда чекланишлар системасидан топамиз: $x_2 = -3$, $x_3 = 7/2$, $L = -15/2$. Олайлик, $x_1 < -2$, масалан $x_1 = -3$, у ҳолда топамиз $x_2 = -5$, $x_3 = 9/2$, $L = -15/2$. Демак, $L = -8$ — функциянинг минимал қиймати бўлар экан.

Ж а в о б . Экстремум нуқталар $x_1 = -2$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$, у ҳолда $\max L = -8$.

Мисол 9. Ун комбинати унни икки хил сотади: 1) магазин орқали; 2) агентлар орқали.

Магазинда x_1 кг унни сотишда x_1^2 пул бирлиги харажат қилинади, агентлар орқали x_2 кг унни сотишда x_2^2 пул бирлиги саоф-харажат қилинади.

5 000 кг унни сотиш учун уни қанча қисмини магазин ва қанча қисмини агент орқаои сотиш керакки, харажатлар энг кам бўлсин.

Ечиш. Масаланинг математик моднли қуйидагича бўлади:

Функциянинг минимумини

$$L = x_1^2 + x_2^2$$

ушбу чекланишларда топиш керак:

$$x_1 + x_2 = 5000, x_1, x_2 \geq 0$$

Ечиш. Маслани ечиш учун Лагранж принципидан фойдаланамиз:

$$F(x,\lambda) = \lambda_0(x_1^2 + x_2^2) + \lambda(x_1 + x_2 - 5000).$$

Ҳосилаларни топамиз:

$$F_{x_1} = 2\lambda_0 x_1 + \lambda_1 = 0,$$

$$F_{x_2} = 2\lambda_0 x_2 + \lambda_2 = 0,$$
$$F_\lambda = x_1 + x_2 - 5000 = 0\,.$$

1-ҳол. $\lambda_0 = 0$ десак, $\lambda_0 = \lambda = 0$**,** яъни барча Лагранж коэффициентлари нолга тенг. Бундай бўлиши мумкин эмас.

2-ҳол. $\lambda_0 = 1$ деймиз. У ҳолда

$$2x_1 + \lambda = 0, 2x_2 + \lambda = 0, x_1 + x_2 - 5000.$$

Бу ердан λ = -5 000, x_1 = 2 500, x_2 = 2 500, L = 12 500 000 пул бирлиги.
x_1 ўзгарувчига 2500 дан кичик ва катта қийматлар бериб кўриб, L функция экстремума функции $x_1 = x_2$ = 2 500 қайматларда минимумга эришишини кўрамиз.

Изоҳ. (8.3) масалани ўрнига ушбу тенгсизликлар билан берилган шартли экстремум масаласини қарайлик:

$$L = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min), g_i(x) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le 0, i = 1..m. \quad (8.9)$$

Бу масалани олдиги масалага, яъни тенгликлар билан берилган масалага қуйидагича келтириш мумкин:

$$L = f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max(\min), g_i(x) = g_i(x_1, x_2, ..., x_n) + u_i^2 = 0, i = 1..m.$$

Натижажа Лагранж функцияси қуйидаги кўринишни олади:

$$F(x, \lambda) = F(x) = \lambda_0 f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (g_i(x) + u_i^2)\,. \quad (8.10)$$

$$\partial F / \partial x_j = \lambda_0 \partial f / \partial x_j + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \partial g_i / \partial x_j = 0, \ j = 1..n, \quad (8.11)$$

$$\partial F / \partial \lambda_i = g_i(x) + u_i^2 = 0, \Leftrightarrow g_i(x) \le 0, i = 1..m. \quad (8.12)$$

$$\partial F / \partial u_i = \lambda_i g_i(x) = 0, i = 1..m. \quad (8.13)$$

Демак, бу ҳолда ҳам деярли бир хил иш бажарилар экан. Фақатгина, қўшимча (8.13) шарт пайдо бўляпти. Бу шартни пассивликни тўлдирувчи шарт дейилади.

Мисол 10. Ушбу масалани қарайлик**:**

$$L = f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 12x_1 + 16x_2 \to \max,$$
$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 - 25 \le 0.$$

Ечиш. Лагранж функциясини тузамиз (8.10) ва (8.11) ва (8.13):

$$F_{x_1} = \lambda_0(2x_1 - 12) + 2\lambda x_1 = 0, F_{x_2} = \lambda_0(2x_2 + 16) + 2\lambda x_2 = 0, \ \lambda g(x) = 0\,.$$

1-ҳол. Агар $\lambda_0 = 0$ десак, $\lambda = 0$ ва бўлиши мумкин эмас.

2-ҳол. $\lambda_0 = 1$ дейлик. У ҳолда

$$F_{x_1} = 2x_1 - 12 + 2\lambda x_1 = 0, F_{x_2} = 2x_2 + 16 + 2\lambda x_2 = 0, \ \lambda g(x) = 0\,.$$

Агар $\lambda = 0$ десак, $x_1 = 6, x_2 = -8, x_1^2 + x_2^2 - 25 \le 0 \to 100 - 25 \le 0$, мумкин эмас. Демак, $\lambda \ne 0$. Демак, пассивликни тўлдирувчи шартдан, $x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0$ ва ушбу системага келамиз:

$$F_{x_1} = x_1 - 6 + \lambda x_1 = 0, F_{x_2} = x_2 + 8 + \lambda x_2 = 0, \ x_1^2 + x_2^2 - 25 = 0.$$

Бу ердан иккита нуқта топамиз: A(3,-4) ва B(-3,4). Ҳисоблаймиз: $f(A) = -75 \to \min, f(B) = 125 \to \max$.

МАШҚЛАР

График усул ёрдамида экстремумларни топинг.

8.1.

$L = x_1 + 2x_2$,

$U = \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le 25, x_1, x_2 \ge 0\}$.

8.2. $L = x_1 + 3x_2$, $U = \{x \in R^2 \,|\, x_1 x_2 \le 8, x_1 \le 6, x_2 \le 4, x_1, x_2 \ge 0\}$

8.3.

$L = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 2)^2$,

$U = \{x \in R^2 \,|\, x_1 + 2x_2 \le 8, 3x_1 + x_2 \le 15, x_1 + x_2 \ge 1, x_1, x_2 \ge 0\}$

8.4. $L = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$,

$U = \{x \in R^2 \,|\, 3x_1 + 2x_2 \le 7, 10x_1 - x_2 \le 8, -18x_1 + 4x_2 \le 12, x_1, x_2 \ge 0\}$

8.5.

$L = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2$,

$U = \{x \in R^2 \,|\, 2x_1 + 3x_2 \ge 6, 3x_1 - 2x_2 \le 18, -x_1 + 2x_2 \le 8, x_1, x_2 \ge 0\}$

8.6.

$L = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2$,

$U = \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le 36, x_1, x_2 \ge 0\}$

8.7. $L = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$, $U = \{x \in R^2 \,|\, (x_1 - 1)(x_2 + 1) \le 4, x_2 \le 3, x_1, x_2 \ge 0\}$

8.8.

$L = x_1^2 + x_2^2$,

$U = \{x \in R^2 \,|\, x_1 x_2 \le 4, x_1 + x_2 \ge 5, x_1 \le 7, x_2 \le 6, x_1, x_2 \ge 0\}$

Каср-чизиқли функциянинг максимум ва минимумлари топилсин.

8.9. $L = (2x_1 - x_2) / (x_1 + x_2)$,

$U = \{x \in R^2 \,|\, 2x_1 - x_2 \ge -13, x_1 + x_2 \ge 6, 4x_1 - x_2 \le 19, x_1, x_2 \ge 0\}$.

8.10. $L = (3x_1 - x_2) / (x_1 + x_2)$,

$U=\{x \in R^2 \,|\, x_1 + x_2 \geq 5, -x_1 + 3x_2 \leq 7,\ 3x_1 - x_2 \leq 11,\ x_1, x_2 \geq 0\}$

8.11.
$L = (3x_1 + 7x_2) / (x_1 + x_2)$,
$U=\{x \in R^2 \,|\, x_1 - 2x_2 \leq 1, x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \leq 12,\ 5x_1 - x_2 \geq 2, x_1, x_2 \geq 0\}$

Лагранжа принципи асосида экстремумлар топилсин:
8.12.
$L = 2x_1x_3 - x_2x_3$,
$U=\{x \in R^2 \,|\, x_2 + 2x_3 = 3, x_1 + x_2 = 2\}$

8.13.
$L = x_1x_2 + x_2x_3$,
$U=\{x \in R^2 \,|\, x_1 + x_2 = 2, x_2 + x_3 = 2\}$

8.14. $L = x_1x_2 + x_2x_3$,
$U=\{x \in R^2 \,|\, x_1 - x_2 = 2, x_2 + x_3 = 4\}$

8.15.
$L = 2x_1 - x_2 + x_3$,
$U=\{x \in R^3 \,|\, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$

Мундарижага

M9. ДИНАМИК ПРОГРАММАЛАШ (ДП)

9.1. Масаланинг қўйилиши

Динамик программалаш — оптимал программалашнинг бир бўлими бўлиб, унда қарор қабул қилиш жараёни ва бошқариш бир неча алоҳида этапларга, қадамларга бўлинади.

Агар иқтисодий жараённинг ўзгаришига таъсир қилиш мумкин бўлса, у бошқарувчан дейилади. Бошқарув деб, ҳар бир этапда жараённинг ривожланишига таъсир кўрсатиши мумкин бўлган ечимлар мажмуасига айтилади. Масалан, маҳсулот ишлаб чиқариш-бошқарилувчи жараён. Йил бошида (квартал ва ҳ.к.) корхонанини хом ашё билан таъминлаш, техникани алмаштириш, маблағ билан таъминлаш ҳақида қабул қилинадиган қарорлар бошқарув ҳисобланади. Маҳсулот ишлаб чиқаришни шундай ташкал этиш керакки, алоҳида этапларда қабул қилинган қарорлар, энг катта ҳажмдаги маҳсулот ишлаб чиқишга ёки фойда олишга олиб келсин.

Динамик программалаш кўп ўзгарувчили мураккаб масалани кам ўзгарувчили оддийроқ масалага олиб келиш имкониятини беради. Бу ҳисоблашлар ҳажмини кескин камайтириб, бошқарувда қарор қабул қилиш жараёнини тезлаштиради.

Чизиқли программалаш масаласидан фарқлироқ, динамик программалаш масаласида масалаларни ечиш учун, симплекс усулга ўхшаш, универсал усул йўқ. ДПМ да масала ечишнинг асосий усулларидан бири, америкалик олим Р.Беллман ишлаб чиққан оптималлик принципига асосланган реккурент усулдир. Принцип қуйидагидан иборат: ихтиёрий қадамда қандай бошланғич ҳолат ва бошқарув бўлмасин, келгуси бошқарув шу қадам охиридаги ҳолатга нисбатан оптимал қилиб танлаб олиниши керак. Принципни қўллаш ҳар бир қандай қадамда танлаб олинган оптимал бошқарув маҳаллий оптимал бўлмасдан глобал оптимал бошқарув бўлишини таъминлайди.

ДПМда, кўпинча, бошқариш жараёни қадамларга бўлинади. Ресурсларни бир неча йил, кварталга тақсимлашда, қадам деб, вақт даврини олиш керак; ресурсларни корхоналар бўйича тақсимлашда қадам деб, навбатдаги корхона номерини олиш керак. Бошқа ҳолларда қадамни сунъий равишда киритиш керак бўлади. Масалан, узлуксиз вақт оралиғини шартли равишда вақт оралиқлари киритиб дискрет деб қараш мумкин. Конкрет масладан келиб чиқиб, вақт оралиғи шундай олинадики, соддароқ масала ҳосил бўлсин ва аниқлик ҳам етарли бўлсин.

9.2. ДПМ га келтирилиб ечиладиган баъзи иқтисодий масалалар

9.2.1.Техникани оптимал алмаштириш масаласи

Иқтисодиётда муҳим масалалардан бири ишлаб чиқаришда иштирок этаётган эски станоклар, агрегатлар, машиналарни ўз вақтида алмаштириш ҳисобланади.

Техниканини эскириши уни ҳам физик, ҳам аҳлоқий эскиришини билдиради, натижада эски техникада маҳсулот ишлаб чиқариш харажатлари ошади, уни ремонт қилиш ва унга хизмат кўрсатиш харажатлари ошади, унумдорлик камаяди, янги технологияларни юзага келиши туфайли нархи пасайиб боради. Шундай вақт келадики, эски техникани катта сарф-харажат билан ишлатиб тургандан кўра сотиб, ўшандай синфга тегишли, замонавий, такомиллашган, янги технологияларга асосланиб яратилган, янгисини сотиб олиш мақсадга мувофиқ бўлиб қолади.

Техникани оптимал алмаштириш стратегияси уни оптимал алмаштириш вақтларини аниқлашдан иборатдир. Техникани оптимал алмаштириш критерийси сифатида техникани ишлатишдан олинадиган даромад миқдори максималлаштириш ёки қаралаётган давр ичида техникага сарфланадиган харажатлар миқдорини минималлаштириш каби кўрсаткичларни олиш мумкин.

Белгилашлар киритамиз: $r(t)$ — t -ёшдаги техникада йил давомида ишлаб чиқарилган маҳсулот нархи;

$u(t)$ — t -ёшдаги техникага бир йилда кўрсатиладиган сарф-харажатлар;

$s(t)$ — t -ёшдаги техниканинг қолдиқ баҳоси;

p — янги техниканинг нархи.

n йилдан иборат даврни қараймиз, бу даврда техникани оптимал алмаштириш циклини топамиз.

$f_k(t)$ деб t -ёшдаги техниканинг ва n йилнинг k- этапидаги техникада маҳсулот ишлаб чиқиб олинадиган максимал фойдани белгилайлик. Техниканинг ёши жараённи бориш йўналишида ҳисобланади, вақт этаплари унга тескари йўналишда ҳисобланади. Масалан,

$t = 0$ янги техникадан фойдаланишга мос келади, $n = 1$ эса текшириш цикли тугагунча бир йил қолганини билдиради, $k = n$ — эса текшириш цикли энди бошланганини билдиради. (ж. 9.1).

n –даврли циклнинг ҳар бир этапида техникани сақлаб қолиш ёки алмаштириш ҳақида қарор қабул қилиниши мумкин. Фақат қарор, максимал фойда олишн кўзлаган бўлиши керак.

Жадвал 9. 1.

Техника ёши	0	1	2	3	…	t-1	t
Вақт этаплари	n	n-1	n-2	n-3		1	0

Оптималлик прнципига асосланган функционал тегламалар қуйидагича бўлади:

$$f_1(t) := \max(r(t) - u(t), s(t) - p + r(0) - u(0)), \qquad (9.1)$$

$$f_k(t) := \max(r(t) - u(t) + f_{k-1}(t+1), s(t) - p + r(0) - u(0)), k = 2, ..., n. \qquad (9.2)$$

(9.1) тенглама 1-этапли жараённи ифодалайди, (9.2) —k-этапли жараённи ифодалайди. Иккала тенглама ҳам икки қисмдан иборат: биринчи қисм- сақлаб қолинган техникадан олинадиган даромадни билдиради, иккинчи қисм-янгиланган техникадан олинадиган даромадни билдиради.

Тенгламаларда айирма $r(t)$ — $u(t)$ k- этапда ишлаб чиқилган маҳсулот нархи билан техникани ишлатиш учун сарфланган маблағларнинг айирмасини билдиради.

Функция f_{k-1} $(t + 1)$ ёши $(t + 1)$ га тенг ва цикл тугагунча k-1 вақт қолган техника учун умумий оптимал фойдани билдиради.

(9.1),(9.2) тенгликларнинг иккинчи қисмидаги $s(t)$ — p функция t ёшдаги техникани алмаштиришдаги соф фойдани билдиради.

Функция $r(0)$ эса 0 ёшдаги янги техникадан келадиган даромадни билдиради. t ёшдаги техникадан янги техникага ўтиш бир зумда амалга оширилади деб фараз қилинади. Бир этапли жараён ҳам шундай тушунилади. Бу ерда $f_0(t + 1)$ ҳад йўқ, чунки k ўзгарувчи 1, 2,..., N қийматларни қабул қилади. $f_0(t) = 0$ тенглик $f_k(t)$ функция таърифидан келиб чиқади.

(9.1) ва (9.2) тенгламалар берилган масала учун Р.Беллманнинг реккурент формуласи бўлиб, $f_k(t)$ ва $f_{k-1}(t + 1)$ миқдорлар орасидаги боғланишни беради. Уларнинг структураси шундайки, бир этапдан кейинги этапга ўтишда техниканинг ёши t дан $(t + 1)$ ошади, қолган этаплар эса k дан $(k — 1)$ гача камаяди.

Ҳисоблаш (9.1) тенгламадан бошланади. (9.1) ва (9.2) тенгламалар, техникани алмаштириш ёки сақлаб қолиш вариантларини кўрсатибгина қолмасдан, бу ишлар натижасида олинадиган даромадни ҳам кўрсатиб беради.

Мисол 1. (9.1) жадвалда берилган ва ушбу маълумотлар учун техникани оптимал алмаштириш цикли аниқлансин: $P = 10$, $S(t) = 0$, $f(t) = r(t) — u(t)$.

Ж.9.1.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

Ечиш. (9.1) ва (9.2) тенгламаларни қуйидагича ёзамиз:

$$f_k(t) = \max(f(t) + f_{k-1}(t+1), -p + f(0) + f_{k-1}(1))$$

$$f_1(t) = \max(f(t), -p + f(0)). \qquad (9.3)$$

k = 1 учун оламиз

$$f_1(0) = \max(f(0), -p + f(0)) = \max(10, -10 + 10) = 10,$$

$$f_1(1) = \max(f(1), -p + f(0)) = \max(9, -10 + 10) = 9,$$

....

$$f_1(12) = \max(f(12), -p + f(0)) = \max(0, -10 + 10) = 0$$

k = 2 учун оламиз

$$f_2(0) = \max(f(0) + f_1(1), -p + f(0) + f_1(1)) = \max(10 + 9, -10 + 10 + 9) = 19,$$

$$f_2(1) = \max(f(1) + f_1(1), -p + f(0) + f_1(1)) = \max(9 + 8, -10 + 10 + 9) = 17,$$

....

Ҳисоблашларни $f_1(1) \geq f_2(t), t = 0, \ldots, k$, ($f_1(1) > f_2(t)$) шарт бажарилгунча давом эттирамиз, чунки эски техникани янгисига алмаштиргандаги фойда эски техникани ишлатгандан кўпроқ.

Ҳисоблашларни ушбу жадвалга жойлаштирамиз, техникани алмаштириш моментини юлдузча билан белгилаймиз ва келгуси ҳисоблашларни тўхтатамиз (ж.9.2).

Ж.9.2.

$F_N(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	N	N-1	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9*	9						
$f_3(t)$	27	24	21	18	17*	17							
$f_4(t)$	34	30	26	24*	24								
$f_5(t)$	40	35	32	31	30*	30							
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35*	35						
$f_7(t)$	51	48	45	43	41*	41							
$f_8(t)$	58	54	51	48*	48								
$f_9(t)$	64	60	56	55	54*	54							
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60*	60							
$f_{11}(t)$	75	72	69	67	66	65*	65						
$f_{12}(t)$	82	78	75	72*	72								

(9.3) тенгламани ҳар сафар ечмасдан, ҳисоблашларни жадвал асосида олиб борса ҳам бўлади, масалан, $f_4(t), t = 0, \ldots, k$, ни ҳисоблаймиз:

$$f_4(0) = f_1(0) + f_3(1) = 10 + 24 = 34 = f_4(0) > f_3(1) = 24,$$
$$f_4(1) = f_1(1) + f_3(2) = 9 + 21 = 30 = f_4(1) > f_3(1) = 24,$$
$$f_4(2) = f_1(2) + f_3(3) = 8 + 18 = 26 = f_4(2) > f_3(1) = 24,$$
$$f_4(3) = f_1(3) + f_3(4) = 7 + 17 = 24 = f_4(3) \geq f_3(1) = 24,$$
$$f_4(4) = f_1(4) + f_3(5) = 6 + 17 = 23 = f_4(4) < f_3(1) = 24$$

$f_4(t)$ ни келгусидаги ҳисоблашларни тўхтатамиз, чунки, $f_4(4) = 23 < f_3(1) = 24$.

Ҳисоблашлар асосида, жадвалдаги техникани сақлаб қолиш ва алмаштириш соҳаларини чеклаб турувчи чизиқ асосида техникани оптимал алмаштириш даврини топамиз. Берилган масала учун у 4 йилни ташкил этади.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0	
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9								$f_1(1) \geq f_2(5)$
$f_3(t)$	27	24	21	18	17									$f_2(1) \geq f_2(4)$
$f_4(t)$	34	30	26	24										$f_3(1) \geq f_4(3)$
$f_5(t)$	40	35	32	31	30									$f_4(1) \geq f_5(4)$
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35								$f_6(1) \geq f_7(4)$
$f_7(t)$	51	48	45	43	41									$f_7(1) \geq f_8(3)$
$f_8(t)$	58	54	51	48										$f_8(1) \geq f_9(4)$
$f_9(t)$	64	60	56	55	54									$f_9(1) \geq f_{10}(4)$
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60									$f_{10}(1) \geq f_{11}(5)$
$f_{11}(t)$	75	72	69	67	66	65								$f_{11}(1) \geq f_{12}(3)$
$f_{12}(t)$	82	78	75	72										

Ж а в о б . 12 этапли техникадан фойдаланишда оптимал цикл ҳар 4 йилда техникани янгилашдан иборат бўлади.

Масала учун Паскаль тилида программа унинг ишлаш натижасини келтирамиз:

```
        program zamena_oborudovaniya;
        const p=10;
        var i,j,k,n:integer; g:array[0..100] of integer;
f:array[0..100,0..100] of integer;
        function max(a,b:integer):integer;begin if a>b then max:=a
else max:=b; end;
        begin write('n=?'); readln(n);
        for j:=0 to n do
        begin write('g[',j,']='); readln(g[j]);end;
        for j:=0 to n do f[0,j]:=g[j];
        for j:=0 to n do f[1,j]:=max(g[j],-p+g[0]);
        for i:=2 to n do for j:=0 to n-1 do
        begin f[i,j]:=max(g[j]+f[i-1,j+1],-p+g[0]+f[i-1,1]);end;
        for i:=0 to n do begin
        for j:=0 to n do
        begin write(f[i,j],' '); end;
        writeln;end;
        end.
```

```
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 0 0
10 9 8 7 6 5 4 3 2 1 0 0 0
19 17 15 13 11 9 9 9 9 9 9 9 0
27 24 21 18 17 17 17 17 17 17 17 17 0
34 30 26 24 24 24 24 24 24 24 24 24 0
40 35 32 31 30 30 30 30 30 30 30 30 0
45 41 39 37 36 35 35 35 35 35 35 35 0
51 48 45 43 41 41 41 41 41 41 41 41 0
58 54 51 48 48 48 48 48 48 48 48 48 0
64 60 56 55 54 54 54 54 54 54 54 54 0
70 65 63 61 60 60 60 60 60 60 60 60 0
75 72 69 67 66 65 65 65 65 65 65 65 0
82 78 75 73 72 72 72 72 72 72 72 72 0
```

9.2.2. Ресурсларни оптимал тақсимлаш

Ф.қ. маълум бир ресурслардан x миқдорда мавжуд, уни n та корхона, объект, ишлар орасида шундай тақсимлаш керакки, танланган тақсимлаш усулидан энг катта умумий даромад олинсин.

Айтайлик, x_i — i- корхонага ажратилган ресурс миқдори бўлсин ($i = \overline{1, n}$);

$g_i(x_i)$ — i- корхонага x_i –миқдордаги ресурсни тақсимлашдан олинадиган фойда бўлсин; $f_k(x)$ — x ресурсни биринчи k та корхонага тақсимлашдан олинадиган энг катта даромад; Баён этилган масалани математик тилда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^{n} f_i(x), \ \sum_{i=1}^{n} x_i = x, x_i \geq 0, i = 1,..,n$$

Масалани ечиш учун, $f_k(x)$ ва $f_{k-1}(x)$ лар орасида рекуррент формулалар топиш керак.

Обозначим через x_k деб, k- усул билан ажратилган ресурс миқдорини белгилайлик, $(0 \leq x_k \leq x)$, у ҳолда $(k — 1)$ тақсимот усулига $(x — x_k)$ ресурс миқдори қолади. У ҳолда $(x — x_k)$ миқдордаги ресурсдан биринчи $(k — 1)$ та усул билан фойдаланишдан олинадиган энг катта даромад $f_{k-1}(x — x_k)$ га тенг бўлади.

k- ва биринчи $(k — 1)$ усулдан фойдаланиб, умумий даромадни максималлаштириш учун x_k ни шундай танлаб олиш керакки, қуйидаги муносабатлар бажарилсин:

$$f_1(x) = g_1(x),$$
$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, k = 2..n$$

Корхоналар ўртасида маблағларни оптимал тақсимлаш ҳақидаги конкрет масалани қараймиз.

Корхона потенциалидан эффектив фойдаланиш учун инвестицияларни тақсимлаш

Фирманинг директорлар кенгаши фирмага қарашои тўртта корхонада бир турдаги маҳсулотнинг ишлаб чиқариш ҳажмини оширмоқчи.

Бунинг учун директорлар кенгаши умумий ҳажми 120 млн сўм бўлган маблағни 20 млн сўмдан корхоналарга ажратишни режалаштирмоқчи. Маҳсулот ишлаб чиқиш ажратилган маблағга боғлиқ бўлиб ушбу жадвалда (ж.9.3) келтирилган. Маблағни корхоналар ўртасида шундай тақсимлаш керакки, маҳсулот ишлаб чиқиш максимал равишда ошсин, битта корхона биттадан кўп бўлмаган инвестиция олиши мумкин.

Ж.9.3.

Ажратилган Маблағ, млн сўм	Маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ортиши, млн сўм			
	Корхона 1	Корхона 2	Корхона 3	Корхона 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

Ечиш. Масала ечишни корхоналар сонига қараб тўртта этапга бўламиз ва уларга инвестициялар берамиз.

Рекуррент муносабатлар қуйидаги кўринишни олади:

№ 1 корхона учун

$$f_1(x) = g_1(x)$$

қолган корхона учун

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, k = 2..n$$

Ечимни рекуррент муносабатлапр асосида тўртта этапда олиб борамиз.

1- этап. Инвестицияларни фақат биринчи корхонага ажратамиз. У ҳолда эгамиз

$$f_1(20) = 8, \quad f_1(40) = 16, \quad f_1(60) = 25,$$
$$f_1(80) = 36, \quad f_1(100) = 44, \quad f_1(120) = 62.$$

2- этап. Инвестицияларни биринчи ва иккинчи корхоналарга ажратамиз. Рекуррент муносабатлар қуйидагича бўлади:

$$f_2(x) = \max\{g_2(x_2) + f_1(x - x_2)\}.$$

У ҳолда

x = 20 да f_2(20) = max (8 + 0,0 + 10) = max (8, 10) = 10,

x = 40 да f_2(40) = max (16,8 + 10,20) = max (16, 18, 20) =20,

x = 60 да f_2(60) = max (25,16 + 10, 8 + 20,28) = max (25,26, 28,28) =28,

x = 80 да f_2(80) = max (36,25 + 10,16 + 20,8 + 28,40) = max (36, 35, 36, 36, 40) = 40,

x = 100 да f_2(100) = max (44,36 + 10,25 + 20,16 + 28,8 + 40,48) = max (44, 46, 45, 44, 48, 48) = 48,

x = 120 да f_2(120) = max (62,44 + 10,36 +20,25 + 28,16 + 40,8 + 48,62) = max (62, 54, 56, 53, 56, 56, 62) = 62.

3- этап. Инвестициялрнт 2- этапга ва 3-корхонага ажратамиз. Ҳисоблашларни формула

$$f_3(x) = \max\{g_3(x_3) + f_2(x - x_3)\}$$

асосида олиб борамиз.

У ҳолда

x = 20 да f_3(20) = max (10, 12) = 12,

x = 40 да f_3(40) = max (20,10 + 12,21) = max (20, 22, 21) = 22,

x = 60 да f_3(60) = max (28,20 + 12,10 + 21,27) = max (28, 32, 31, 27) = 32,

x = 80 да f_3(80) = max (40,28 + 12,20 + 21,10 + 27,38) = max (40, 40, 41, 37, 38) = 41,

x = 100 да f_3(100) = max (48,40 + 12,28 + 21,20 + 27,10 + 38,50) = max (48, 52, 49, 47, 48, 50) = 52,

x = 120 да f_3(120) = max (62,48 + 12,40 + 21,28 + 27,20 + 38,10 + 50,63) = max (62, 60, 61, 55, 58, 60, 63) = 63.

4- этап. 120 млн с. инвестицияларни 3-этап ва 4-корхона ўртасида тақсимлаймиз:

x = 120 да f_4(120) = max (63,52 + 11,41 + 23,32 + 30,22 + 37,12 + 51,63) = max (63, 63, 64, 62, 59, 63, 63) = 64.

Ш.қ. 1- ва 4- этапларни бошқарадиган шартлар топилди.

Вернемся от 4-этапдан 1-этапга қайтамиз. Маҳсулот ишлаб чиқиш 4-этапда 64 млн. с. 41+23 кўринишда топилган, яъни 23 млн. с. 40 млн.с. ни 4-корхонага ажратиш кўзда тутиш керак экан. (ж.9.3 га қаранг). 3 этапда 41 млн. с. 20+21 кўринишда топилган, яъни 21 млн.с. 3-корхонага 40 мин.с. ни ажратишни кўзда тутуди. 2-этапга асосан 20 млн.с. 40 млн.с. ни иккинчи корхонага ажратишни кўзда тутади.

Ш.қ. 120 млн.с. инвестицияларни 2-, 3-,4- корхрналарга 40 млн.с.дан ажратиш керак эканки, маҳсулотни ошиши фирмага 64 млн.с. фойда келтирар экан.

Масала учун Паскаль тилида программа унинг ишлаш натижасини келтирамиз:

```
{Optimalnoe_raspredeleniye_resursov}
var maxx,i,j,k,l,n,m:integer;
a,b:array[0..100,0..100] of integer;
function max(a,b:integer):integer;
begin if a>b then max:=a else max:=b;end;
begin write('n,m=');readln(n,m);
for i:=1 to m do
for j:=1 to n do
begin write('g[',i,',',j,'] = ');readln(a[i,j]); end;
for i:=0 to m do a[i,0]:=0; for j:=0 to n do a[0,j]:=0;
for i:=0 to 1 do
for j:=0 to n do b[i,j]:=a[i,j];
for k:=2 to m do
for j:=1 to n do
begin  maxx:=a[k,0]+b[1,j];
for i:=1 to j do
 begin   maxx:=max(maxx,a[k,i]+b[k-1,j-i]);   end;
 b[k,j]:=maxx;
end;
 for i:=1 to m do
begin  for j:=1 to n do write(b[i,j],' '); writeln;end;
end.
```

```
8 16 25 36 44 62
10 20 28 40 48 62
12 22 32 41 52 63
11 23 35 45 55 64
```

Изоҳ. Ушбу масала самолётни оптимал юклаш масаласи дейилади:

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^{n} f_i(x),\ f_i(x) = C_i x_i\,,\ \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \le w, x_i \ge 0, i = 1,..,n\,.$$

Бу масала ҳам олдинги масаладаги каби ечилади:

$$f_1(w) = [w/\,p_1]C_1,\ f_2(w) = \max_{0\le x_2\le[w/\,p_2]} \{C_2 x_2 + f_1(w - p_2 x_2)\}, ,...,$$

$$f_n(w) = \max_{0\le x_n\le[w/\,p_n]} \{C_n x_n + f_{n-1}(w - p_n x_n)\}\,,$$

бу ерда $[w/\,p_1]$ қавс ичида келтирилган ифоданинг бутун қисми.

9.2.3. Корхоналарни қуриш ва эксплуатация қилиш харажатларини минималлаштириш

Корхоналарни оптимал жойлаштириш масаласи ресурсларни оптимал тақсимлаш масаласига, яъни ўзгарувчиларга қўйиладиган бутунлик шартларига асосланган минималлаштириш масаласига келтирилиши мумкин.

Ф.қ. маълум бир территорияда маълум бир маҳсулотга талаб мавжуд. Шу маҳсулотни ишлаб чиқарувчи корхоналарни қуриш мумкин бўлган пунктлар аниқланган. Бу корхоналарни қуриш ва ишлатиш учун кетадиган харажатлар микдори ҳисоблаб чиқилган. Шу корхоналаони шундай жойлаштириш керакки, уларни қуриш ва ишлатиш учун харажатлар миқдори энг кичик бўлсин.

Белгилашлар киритамиз:

x — тақсимланадиган ресурс миқдори, уни n хил усулда фойдаланиш мумкин;

x_i — i-усул билан фойдаланиладиган ресурс миқдори ($i=1..n$);

$g_i(x_i)$ — харажатлар функцияси бўлиб, масалан, ишлаб чиқаришда x_i ресурс миқдорини i- усул билан фойдалангандаги сарф-харажат миқдорига тенг;

$\varphi_k(x)$ — энг кичик сарф-харажат бўлиб, x-миқдордаги сарф-ҳаражатни биринчи k та усул билан ишлатганда келиб чиқади.

Асосий масала, x-ресурсни барча усуллар билан сарфлаб энг кам мрқдорда сарф-харажат қилиш керак:

$$\varphi_n(x)=\min\sum_{i=1}^{n}g_i(x_i),\sum_{i=1}^{n}x_i=x,x_i\geq 0,i=1,..,n.$$

x_i-ўзгарувчиларнинг иқтисодий маъноси i- пунктга жойлаштирилиши мумкин бўлган корхоналар сонини билдиради. Қулайлик учун, қурилаётган корхоналар бир хил қувватга эга деб фараз қиламиз.

Корхоналарни оптимал жойлаштириш бўйича конкрет масалани кўриб чиқамиз.

Мисол. Шаҳарнинг учта районида нон ишлаб чиқадиган 5 та корхона қуриш керак. Корхоналарни шундай жойлаштириш керакки, аларни қуриш ва ишлатиш учун минимал харажатлар кетсин. Харажат функциялари $g_i(x)$ 9.4 жадвалда келтирилган.

Ж.9.4.

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	11	18	35	51	76
$g_2(x)$	10	19	34	53	75
$g_3(x)$	9	20	36	54	74

Ушбу мисолда $g_i(x)$ — i-районда қурилаётган ва ишлатилаётган корхоналарнинг сонига қараб аниқланадиган харажатлар функцияси, млн.с. ҳисобида;

$\varphi_k(x)$ — млн.с. ҳисобида биринчи k та районда қарилаётган ва ишлатилиши керак бўлган корхоналарнинг энг кичик сарф-харажати.

Ечиш. Ечишни рекуррент формулалар асосида олиб борамиз:

биринчи район учун

$$\varphi_1(x)=\min g_i(x_i)=g_1(x)?$$

қолган районлар учун

$$\varphi_k(x)=\min\{g_k(x_k)+\varphi_{k-1}(x-x_k)\},k=2..n$$

Масалани 3 этапда ечамиз (корхоналар сони учта).

1- этап. Агар барча корхоналарни 1-районда қурсак, у ҳолда эгамиз

$$\varphi_1(1)=g_1(1)=11,\quad \varphi_1(2)=g_1(2)=18,\quad \varphi_1(3)=g_1(3)=35,$$
$$\varphi_1(4)=g_1(4)=51,\quad \varphi_1(5)=g_1(5)=76,$$

ва минимал мумкин бўлган харажатлар $x=5$ да тенг бўлади 76 млн с.

2- этап. Корхоналарни биринчи 2 та районда қурамиз ва оптимал чтратегияни ушбу формула асосида ҳисоблаймиз:

$$\varphi_2(x)=\min\{g_2(x_2)+\varphi_1(x-x_2)\}.$$

Ҳисоблаймиз φ_2(l):

$$g_2(1)+\varphi_1(0)=10+0=10,$$
$$g_2(0)+\varphi_1(l)=0+11=11,$$
$$\varphi_2(l)=\min(10,11)=10.$$

Ҳисоблаймиз $\varphi_2(2)$:

$$g_2(2) + \varphi_1(0) = 19 + 0 = 19,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(1) = 10 + 11 = 21,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(2) = 0 + 18 = 18,$$
$$\varphi_2(2) = \min(19, 21, 18) = 18.$$

Ҳисоблаймиз $\varphi_2(3)$:

$$g_2(3) + \varphi_1(0) = 34 + 0 = 34,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(1) = 19 + 11 = 30,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(2) = 10 + 18 = 28,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(3) = 0 + 35 = 35,$$
$$\varphi_2(3) = \min(34, 30, 28, 35) = 28.$$

Ҳисоблаймиз $\varphi_2(4)$:

$$g_2(4) + \varphi_1(0) = 53 + 0 = 53,$$
$$g_2(3) + \varphi_1(1) = 34 + 11 = 45,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(2) = 19 + 18 = 37,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(3) = 10 + 35 = 45,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(4) = 0 + 51 = 51,$$
$$\varphi_2(4) = \min(53, 45, 37, 45, 51) = 37.$$

Ҳисоблаймиз $\varphi_2(5)$:

$$g_2(5) + \varphi_1(0) = 75 + 0 = 75,$$
$$g_2(4) + \varphi_1(1) = 53 + 11 = 64,$$
$$g_2(3) + \varphi_1(2) = 34 + 18 = 52,$$
$$g_2(2) + \varphi_1(3) = 19 + 35 = 54,$$
$$g_2(1) + \varphi_1(4) = 10 + 51 = 61,$$
$$g_2(0) + \varphi_1(5) = 0 + 76 = 76,$$
$$\varphi_2(5) = \min(75, 64, 52, 54, 61, 76) = 52.$$

3- этап. 5 та корхонанр 3 та районда қуриш оптимал стратегиясини топамиз:

$$\varphi_3(x) = \min\{g_3(x_3) + \varphi_2(x - x_3)\}.$$

Ҳисоблаймиз $\varphi_3(5)$:

$$g_3(5) + \varphi_2(0) = 74 + 0 = 74,$$
$$g_3(4) + \varphi_2(1) = 54 + 10 = 64,$$
$$g_3(3) + \varphi_2(2) = 36 + 18 = 54,$$
$$g_3(2) + \varphi_2(3) = 20 + 28 = 48,$$
$$g_3(1) + \varphi_2(4) = 9 + 37 = 46,$$
$$g_3(0) + \varphi_2(5) = 0 + 52 = 52,$$
$$\varphi_3(5) = \min(74, 64, 54, 48, 46, 52) = 46.$$

Ш.қ. $x = 5$ да мумкин бўлган минимал харажатлар тенг бўлар экан: 46 млн с.

Корхоналарни қуришни 1-дан 3-этапгача оптимал харажатлари топрлди. 3-этапдан 1-этапга қайтамиз. 46 млн с.га тенг харажатлар 3-этапда 9+37 кўринишда топилган, яъни 9 млн с. битта корхонани 3-районда қуриш кераклигини кўрсатади (ж.9.4 га қаранг). 2- этапга асосан, 37 млн с. 19 + 18 кўринишда топилган,яъни. 19 млн с. 2-районда 2 та корхона қуриш кераклигини кўрсатади. 1- этапга асрсан, 18 млн с. соответствуют 1-оайонга 2 та корхона қуриш кераклигини кўрсатади.

Ж а в о б. Оптимал стратегия битттa корхонани 3-районда, 2 тадан корхонани 2- ва 1- районларда қуриш краклигини билдиради. Бунда минимал харажатлар 46 млн с. ни ташкил этади. Дастлабки харажатлар 76 млн с. эди.

Масала учун Паскаль тилида программа унинг ишлаш натижасини келтирамиз:

```
        {Minimizatsiya rasxodov}
        var minn,i,j,k,l,n,m:integer;a,b:array[0..100,0..100] of integer;
        function min(a,b:integer):integer;begin  if a<b then min:=a else
min:=b;  end;
        begin write('n,m=');readln(n,m);
        for i:=1 to m do for j:=1 to n do
        begin write('g[',i,',',j,'] = ');readln(a[i,j]);end;
        for i:=0 to m do a[i,0]:=0; for j:=0 to n do a[0,j]:=0;
        for i:=0 to 1 do for j:=0 to n do b[i,j]:=a[i,j];
        for k:=2 to m do for j:=1 to n do
        begin  minn:=a[k,0]+b[1,j];
         for i:=1 to j do
         begin   minn:=min(minn,a[k,i]+b[k-1,j-i]); end;
         b[k,j]:=minn;
        end;
        for i:=1 to m do
        begin for j:=1 to n do write(b[i,j],' ');writeln; end;
        end.
```

```
11 18 35 51 76
10 18 28 37 52
9 18 27 37   46
```

9.2.4. Қувурлар ва йўлларини ўтказишда харажатларни минималлаштириш

А ва В пунктлар орасида шундай йўл (трубопровод, шоссе) ўтказиш керакки, умумий харажатлар минимал бўлсин.

Ечиш. А ва В пунктлар орасидаги йўлни қадамлар (кесмалар)га бўламиз. Ҳар бир қадамда фақат шарққа (X ўқи бўйлаб) ёки шимолга (Y ўқи бўйлаб) ҳаракатланиш мумкин бўлсин. У ҳолда А ва В нуқталар орасидаги масофа синиқ чизиқли йўлларга айланади. . Йўлнинг ҳар бир кесмаси бўйлаб қурилиш ишларининг харажатлари млн с. ларда маълум бўлсин.

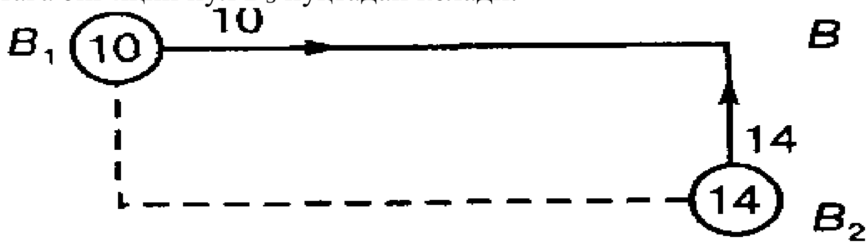
↑Y (шимол) B

13 11 12 8	9 12 14	9 13 9	10 14 14
13 15 12	10 11	10 16	8 10
10 13 13	12 13	9 10	12 14

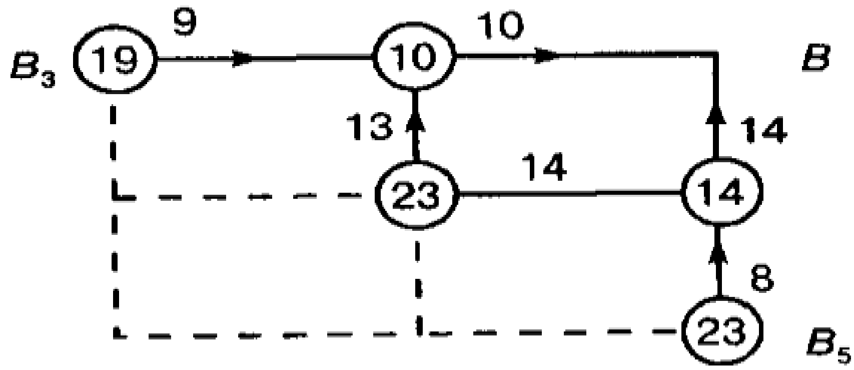
A →X(шарқ)

А ва В пунктлар орасидаги масофани шарқ йўналишида 4 га, шимол йўналишида 3 га бўлайлик. Ҳар бир кесма бўйича слжишнинг баҳоси берилган.Ҳар бир тугун нуқтадан кейинги нуқтага ўтиш учун оптимал йўл энг кам харажатли йўл бўлсин. Оптимизация масаласини ечиш учун, орқага қараб юрамиз, яъни В нуқтадан А нуқтага қараю юрамиз.

Охирги қадам учун оптимал қўл топамиз. В нуқтага ёки B_1 ёки B_2 нуқтадан келиш мумкин. Нуқталарда йўлнинг оптимал узунлигини ёзамиз. В нуқтага энг яқин йўл B_1 нуқтадан бўлади ва у 10 бирликка тенг. 10 оптимал масофани тугун нуқтада айлана ичига ёзамиз. Энди B_1 нуқтага энг яқин йўл B_3 нуқтадан келади.



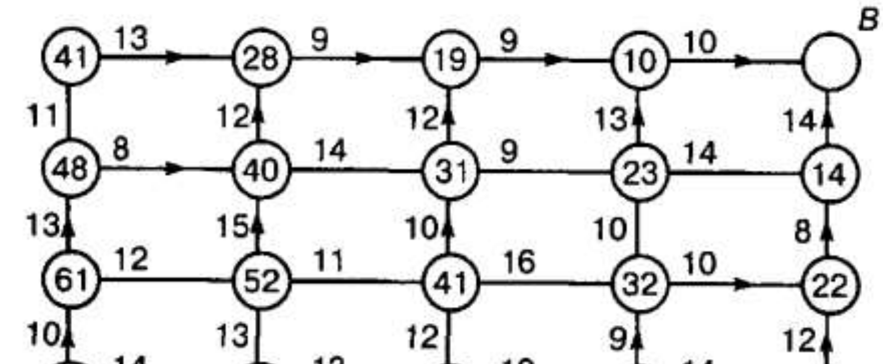
Охиридан битта олдинги қадамни қараймиз.



Яна орқага қайтиб, горизонтал йўлдан битта олдинги нуқтага келамиз. Кейин вертикал йўлдан битта пасига тушамиз. Кейин, горизонтал йўлдан чеккага чиқиб оламиз.Охирида 2 марта вертикал бўйлаб пасика тушамиз. Усумий оптимал йўл қуйидагидан иборат бўлади:

$$\bar{x} = (c, c, b, c, b, b, b)$$

бу ерда с-север (шимол), в-восток (шарқ) ни билдиради.



Минимал харажатлар тенг

10+13+8+12+9+9+10=71 млн.сўм

Бошқа ихтиёрий йўлни олсак масофа оптимал йўлдан узоқроқ: масалан. ушбу йўл учун

$$\bar{x} = (с,\ в,\ в,\ с,\ в,\ с,\ в)$$

харажатлар тенг ва катта оптимал йўлнинг харажаатларидан: 10 +12 + 11 + 10 + 9 + 13 +10 = 75 > 71.

Ж а в о б . Оптимал йўлн ушбу схема бўйлаб қуриш керак: *с, с, в, с, в, в, в*, бунда харажатлар тенг бўлади: 71 млн с.

МАШҚЛАР

9.1. Қаралаётган давр бошига келиб корхонада янги техника ўрнатилди. Ушбу техниканинг унинг ишлаш вақтига ва уни соз ҳолатда ушлаб туриш учун ремонт қилишга кетадиган харажатлар ж.9.5да келтирилган.

Маълумки, ўрнатилган техникага ўхшаш янги техникани сотиб олиш, ўрнатиш ва ишлатиш учун кетадиган харажатлар 40 млн с. ни ташкил этади, алмаштириладиган эски техника эса муомаладан чиқарилиб ташланади. 5 йилга мўлжаланган эскирган техникани алмаштирадиган шундай план тузингки, қаралаётган даврда даромад энг катта бўлсин.

Ж.9.5.

	Қурилмани ишлатиш вақти, йиллар					
	0	1	2	3	4	5
Маҳсулотни йиллик и.ч., млн. сўм	80	75	65	60	60	55
Қурилмани ишлатиш ва ремонт учун кетадиган йиллик сарф, млн.сўм	20	25	30	35	45	55

9.2. Қаралаётган давр (N=8 йил) бошига келиб корхонада янги техника ўрнатилди.

Ушбу маълумотларда эскирган техникани алмаштирадиган оптимал цикл тузинг:

янги техниканинг нархи (р) 12 пул бирлиги (масалан, 12 млн с.);

техниканинг қолдиқ баҳоси $S(t) = 0$;

$f_k(t) = r(t) — u(t)$ — ёши t га тенг ва цикл тугашига k йил қолган техникадан олинадиган максимал даромад, r(t)- техника ёрдамида 1 йилда олинадиган даромад, u(t)- t-ёшдаги техникага 1 йилда кўрсатиладиган техник хизмат нархи.

Функциянинг $f_k(t)$ k га боғликлиги ж. 9.6. да берилган.

Ж.9.6.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
f(t)	12	11	10	8	6	4	2	0	0

9.3. Савдо фирмаси 5 та автолавкага эга, улар дам олиш кунлари 3 та аҳоли яшайдиган пунктга жўнатилади. Фараз қилинадики, фирманинг товар алмашиши пунктларга жўнатилаётган товарларнинг сони ва ассортиментига ва аҳоли пунктларига жўнатилаётган машиналар сонига боғлиқ.

Ҳар бир пунктдаги товаралмашишнинг ўртача кўрсикичлари ж. 9.7 да кўрсатилган.

Ж.9.7.

Автолавкалар сони	Аҳоли пунктларидаги товар сотиш, минг сўм		
	1	2	3
1	15	12	18
2	24	20	23
3	30	31	29
4	37	38	36
5	41	42	39

Автолавкаларни аҳоли пунктларига жўнатишнинг шундай режасини топингки, фирманинг товар алмашиши энг катта бўлсин.

9.4. Жадвал 9.8 да вилоятдаги 4 та мева консерва заводларининг 200 млн.сўм инвестиция 50 млн. сўм дискрет қадам билан киритилганда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ортиши кўрсатилган, бунда ҳар бир завод фақат битта инвестиция олиши мумкин. Маҳсулот ишлаб чиқариш максимал бўлиши учун инвестицияларнинг тақсимот режаси топилсин.

Ж.9.8.

Инвестициялар, млн сўм	Маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ўсиши, млн сўм			
	Заводлар			
	1	2	3	4
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

9.5. 3 та вилоятда 5 та қишлоқ хўжалик маҳсулотларини қайта ишлайдиган бир хил кувватли корхона қуриш керак.

Корхоналарни шунда жойлаштириш керакки, уларни қуриш ва ишлатиш учун кетадиган харажатлар минимал бўлсин.

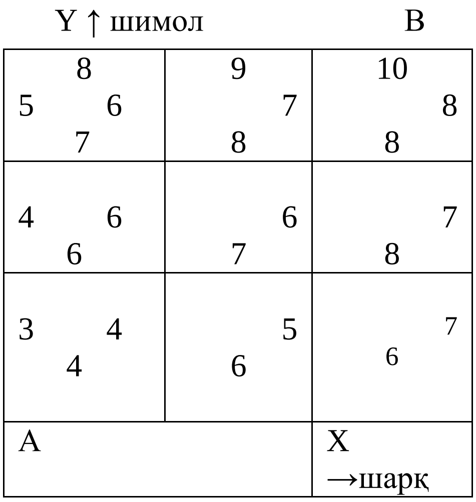
і-областдаги қурилаётган корхоналарни қуриш ва эксплуатация қилиш учун кетадиган харажатлар функцияси $g_i(x)$ объектлар сонига боғлиқ ва ж.9.9 да келтирилган.

Ж.9.9.

x	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	8	14	22	29	34
$g_2(x)$	10	17	18	27	31
$g_3(x)$	11	16	15	26	31

9.6. А ва В пунктлар орасида нархи (млн. с.) энг кам бўлган газ қувурлари ўтказиш керак. Ҳисоб-китоб учун дастлабки маълумотлар расм 9.6. да келтирилган.

Расм 9.6.



Мундарижага

M10. ЎЙИНЛАР НАЗАРИЯСИНИНГ АСОСИЙ ТУШУНЧАЛАРИ

Иқтисодиётда шундай вазият жуда кўп учрайди: кўпчилик қатнашган ишларда қарор қабул қилиш чоғида бир қатнашчининг қарори бошқа қатнашувчиларнинг қарорига боғлиқ бўлади. Масалан, савдо фирмасининг даромади товарларга ўрнатилган баҳоларгагина боғлиқ бўлмасдан, балки истеъмолчилар томонидан сотиб олинган товарлар сонига ҳам боғлиқ. Ёки товар ишлаб чиқаришда корхонада ассортиментини танлаш учун бошқа корхоналарда ишлаб чиқарилаётган товарларнинг ассортиментини ҳам ҳисобга олиш керак.

Бундай вазиятларни, яъни бир қатнашчи қабул қилган қарорнинг мақсадга мувофиқлиги бошқалар қабул қилган қарорга боғлиқ бўлган ҳолатларни, икки хил классификациялаш мумкин: қатнашувчиларнинг қизиқишлари мос келади, ва улар ўзаро ҳаракатларни келишиб олишлари мумкин ёки қатнашчиларнинг ҳаракатлари мос келмайди ва ўзаро келишув мумкин эмас. Кейинги ҳолда қатнашувчи ўз қарорини бошқа қатнашувчиларга эълон қилмасдан, сир тутиши таббиий, чунки акс ҳолда бошқалар биринчи қатнашчининг қароридан фойдаланиб, бошқалар ҳисобидан фойдаланиб кўпроқ ютуқ олишга ҳаракат қилишади. Бундай вазиятлар конфликт вазият дейилади. Конфликт вазиятларнинг математик моделини тузиш, шу асосда келиб чиққан масалаларни ечиш билан *ўйинлар назарияси* шуғулланади. Ўйинда икки ва ундан кўпроқ иштирокчилар қатнашиши мумкин. Шунинг учун ўйинлар жуфтлар ўйини (2 та қатнашчи) ва кўп қатнашчиларнинг ўйинларига бўлинади. Агар ўйинда бир неча ўйинчининг қизиқишлари мос келса, улар ўзаро бирлашиб коалициялар тузишлари мумкин. Бундай ўйинлар коалицияли ўйинлар ҳам деб айтишади.

Ўйинлар назариясининг асосий вазифаси ўйинчилар учун маслаҳатлар ишлаб чиқишдадир, яъни улар учун оптимал стратегияларни ишлаб чиқишдадир. *Ўйинчининг стратегияси* деб, ўйинда пайдо бўлган вазиятдан чиқиб кетиш мумкин бўлган қоидалар кетма-кетлигиидир. *Оптимал стратегия* деб ўйинни кўп марта такрорлаганда ўйинчига мумкин бўлган энг катта ўртача ютуқни таъминлайдиган стратегияга айтилади. Ҳар бир ўйинчида стратегиялар сони чекли ёки чексиз бўлиши мумкин, шунинг учун ўйинлар чекли ва чексиз ўйинларга бўлинади.

Конфликт вазиятларнинг энг содда вариантини, яъни ўйинда иккита ўйинчи бўлган ҳолни қарайлик, бу ўйинда биринчи ўйинчининг ютуғи иккинчи ўйинчининг мағлубиятига тенг бўлсин. Бундай модель йиғиндиси 0 га тенг бўлган антогонистик ўйин дейилади.

Масалан, ўйинда икки ўйинчи иштирок этяпти. Ҳар бир ўйинчи 1,2 ва 3 рақамларни ёзиши мумкин. Агар ўйинчилар ёзган рақамлар орасидаги айирма мусбат бўлса 1-ўйинчи шу сонга тенг бўлган очко олади, акс ҳолда бу очкони 2-ўйинчи олади. Агар айирма 0 га тенг бўлса ўйин ничья билан тугайди.

1-ўйинчида 3 та стратегия бор: A_1 (1 ёзиш), A_2 (2 ёзиш), A_3 (3 ёзиш); 2-ўйинчида ҳам 3 та стратегия бор: B_1, B_2, B_3 (ж.10.1).

Таблица 31.1

	$B_1 = 1$	$B_2 = 2$	$B_3 = 3$
$A_1 = 1$	0	-1	-2
$A_2 = 2$	1	0	-1
$A_3 = 3$	2	1	0

1-ўйинчининг вазифаси — ўзининг ютуғини максималлаш. 2-ўйинчининг вазифаси —ўз мағлубиятини минималлаш ёки 1-ўйинчи ютуғини минималлаш.

Ўйинни матрица кўринишда белгилаш мумкин. Унда сатрлар 1-ўйинчининг стратегиялари деб айтилади, устунлар 2-ўйинчиниг стратегиялари деб айтилади. Бундай матрицани *тўлов матрицаси* ёки *ютуқлар матрицаси* деб айтилади. Ушбу мисол учун тўлов матрицаси қуйидаги кўринишга эга

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Умумий ҳолда 0 суммали жуфтлик ўйиннинг ютуқлар матрицаси қуйидагича бўлади:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ҳар бир ўйинчининг вазифаси ўзи учун оптимал стратегия топишдадир.

Биринчи ўйинчининг оптимал стратегиясини топамиз: ҳар бир сатрдаги энг кичик элементни α_i ($i = \overline{1,m}$), дейлик

$$\alpha_i = \min_j \alpha_{ij}$$

α_i ҳар бир A_i стратегиядаги минимал ютуқдир, 1-ўйинчи минимал ютуқ энг катта бўлган стратегияни танлайди: уни α деб белгилаймиз, яъни

$$\alpha = \max_i \min_j \alpha_{ij}$$

Миқдор α — 1-ўйинчи олиши мумкин бўлган, энг катта ютуқ, уни ўйинни қуйи баҳоси, яъни *максмини* дейилади. Худди шу каби, 2-ўйинчи учун энг катта мумкин бўлган ютуқ бу устунлардаги энг катта элементларнинг энг кичиги ҳисобланади ва уни қуйидагича аниқланади:

$$\beta = \min_j \max_i \alpha_{ij}$$

бу ерда β — *ўйиннинг юқори чегарасидир (минимакси).*

Агар 2-ўйинчи минимакс стратегияга асосланиб ҳаракатланса, унинг мағлубияти чекланган, ҳар қандай вазиятда β дан кўп бўлаолмайди.

Матрицали ўйинлар чун ушбу тенгсизлик ўринли

$$\alpha \le \beta$$

Агар $\alpha = \beta$, бўлса, *ўйин эгар нуқтали* дейилади, жуфт оптимал стратегиялар ($A_{i\text{опт}}$, $B_{j\text{опт}}$) — матрицанинг эгар нуқтаси дейилади. Бу ҳолда $\alpha_{ij} = v$ элемент *ўйинннинг баҳоси* дейилади, у бир вақтда ҳам i-сатрда, ҳам j-устунда энг кичик элемент бўлади. Агар ўйин эгар нуқтага эга бўлса, ўйин соф стратегияларда ечилади деб айтилади.

Юқоридаги масалани ечимни топайлик.

$$\alpha = \max \alpha_i = \max(-2,-1,0) = 0,$$

$$\alpha = \alpha_3 = 0 - \text{ўйиннинг қуйи чегараси},$$

$$\beta = \min \beta_j = \min(2,1,0) = 0$$

$$\beta = \beta_3 = 0 - \text{ўйиннинг юқори чегараси},$$

$\alpha = \beta = 0$ бўлганлиги учун, матрицали ўйин эгар нуқтага эга.

1-ўйинчининг оптимал стратегияси — A_3, иккинчиники — B_3. Ж. 9.1 дан кўринадики, ҳар иккала ўйнчилар оптимал стратегиядан четлансалар, 1-ўйинчининг ютуғи камаяди, 2-ўйинчининг маблуғияти ошади.

Агар ютуқ матрицаси эгар нуқтага эга бўлмаса, яъни α < β, бўлса, оптимал стратегияларни топиш учун мураккаб стратегияни қўллашга тўғри келади. Мураккаб стратегия икки ва ундан кўпроқ стратегияларнинг чизиқли, тасодифий комбинацияларидан иборат бўлади. Бундай стратегиялар , шунинг учун ҳам, *аралаш стратегиялар* дейилади. Ўлчами m x n бўлган матрицали ўйинда, 1-ўйинчининг стратегияси ушбу кўринишдаги эҳтимоллар $\overline{x}$ = $(x_1, x_2,\dots ,x_m)$, билан бериладики, улар ёрдамида 1-ўйинчи ўзининг соф стратегияларини қўллайди. Бу стртегиянинг умумий кўриниши қуйидагича бўлади:

$$\xi_j = \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ij},\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1, x_i \ge 0, i = 0,..,m .$$

Худди шундай, 2-ўйинчи эҳтимоллар $\overline{y}$ = $(y_1, y_2, \dots , y_n)$, билан ўзининг соф

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij}, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \ge 0,\ j = 1,..,n$$

стратегияларини қўллайди.

1-ўйинчининг ўртача ютуғи аралаш стратегияларни қўллаганда ўйиннннинг математик кутилмасига тенг бўлади, яъни

$$\eta_i = \sum_{j=1}^{n} y_j a_{ij}, \sum_{j=1}^{n} y_j = 1, y_j \ge 0,\ j = 1,..,n$$

Теорема (фон Нейман-ўйинлар назариясининг асосий теоремаси). Ҳар бир чекли матрицали ўйин аралаш стритегиялар синфида ҳеч бўлмаганда битта $(\overline{x},\overline{y})$ ечимга эга.

Бу ўйин қуйидаги эгар нуқта кўринишида бўлади: $M(x,\overline{y}) \le M(\overline{x},\overline{y}) \le M(\overline{x},y)$.

Қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\alpha = \max_{x_i} \min_{y_j} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j, \beta = \min_{y_j} \max_{x_i} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j .$$

У ҳолда $M(\overline{x},\overline{y}) = \alpha = \beta$.

1-ўйинчининг оптимал стратегия $\overline{x}$ ни қўллаши унга 2-ўйинчининг ҳар қандай юришида ўйин ютуғидан кам бўлмаган ютуқ бериши керак. Шунинг учун ушбу тенгсизлик ўринли

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}\overline{x}_i \ge \nu .$$

Худди шу каби, 2-ўйинчига оптимал стратегия $\overline{y}$ унга ўйин ютуғидан ошмайдиган мағлубият келтириши мумкин холос ва ушбу тенгсизлик ўринли

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{y}_j \le \nu .$$

Агар ютуқлар матрицаси эгар нуқтага эга бўлмаса, аралаш стратегияларни аниқлаш матрицани ўлчамига қараб мураккаблашиб боради. Шунинг учун матрицанинг ўлчамини бир хил (такрорланадиган), ошкор бефойда стратегияларни ўчириб ютуқ матрицаси ўлчамларини пасайтириш керак. Ушбу ютуқ матрицаси билан берилган ўйинни қарайлик:

$$A=\begin{bmatrix}7 & 6 & 5 & 4 & 2\\ 5 & 5 & 3 & 2 & 3\\ 5 & 6 & 6 & 3 & 5\\ 2 & 3 & 3 & 2 & 4\end{bmatrix}$$

Бу ердан $\alpha=\max(2,2,3,2)=3, \beta=\min(7,6,6,4,5)=4, \alpha\neq\beta$.

Равшанки, $A_2\leq A_3, A_4\leq A_3$. Шунинг учун $\alpha=\max\min$ стратегияли 1-ўйинчи учун A_2 , A_4 стратегиялар ноқулай стратегиялардир. Бу сатрларни ўчирамиз. Равшанки, $B_1\geq B_4, B_2\geq B_4, B_3\geq B_4$, ва шунинг учун, $\beta=\min\max$ стратегияли 2-ўйинчи учун B_1, B_2, B_3 стратегиялар ноқулай. Шунинг учун, бу устунларни ўчирамиз.

Натижада ушбу ютуқлар матрицасини оламиз:

$$A_1=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}.$$

10.2. (2x2), (2 x *n*) ва (*m* x 2) ўйинларни график усулда ечиш

Мисол 1. (2x2) ўйинни аналитик ва график усулда ечиш. Агар ўйинда бирор ўйинчининг 2 та стратегиясигина бўлса ўйинлар график усулда ечилиши мумкин.
Ушбу 2x2 матрица билан берилган ўйинни қараймиз:

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 3 & 5\end{bmatrix}, \alpha=\max(2,3)=3, \beta=\min(4,5)=4, 3\leq\nu\leq 4.$$

Демак, ўйин аралаш стратегияларда ечимга эга. 1-ўйинчининг аралаш стратегияси $x=(x_1,x_2), x_1+x_2=1, x_i\geq 0, i=1,2$, кўринишда бўлади. 2-ўйинчининг аралаш стратегияси $y=(y_1,y_2), y_1+y_2=1, y_j\geq 0, j=1,2$, кўринишда бўлади.

1 ўйинчининг мумкин бўлган ютуқларини ушбу жадвалда ҳисоблаймиз:

2 ўйинчи соф стратегиялари	1 ўйинчининг МБЮ (мумкин бўлган ютуқлари)	
1 устун 2 устун	$a_{11}x_1+a_{21}x_2=(a_{11}-a_{21})x_1+a_{21}=x_1+3=\nu$ $a_{12}x_1+a_{22}x_2=(a_{12}-a_{22})x_1+a_{22}=-3x_1+5=\nu$	$x_1+3=-3x_1+5\Rightarrow 4x_1=2\Rightarrow$ $x_1=1/2, x_2=1/2, \nu=x_1+3=7/2$

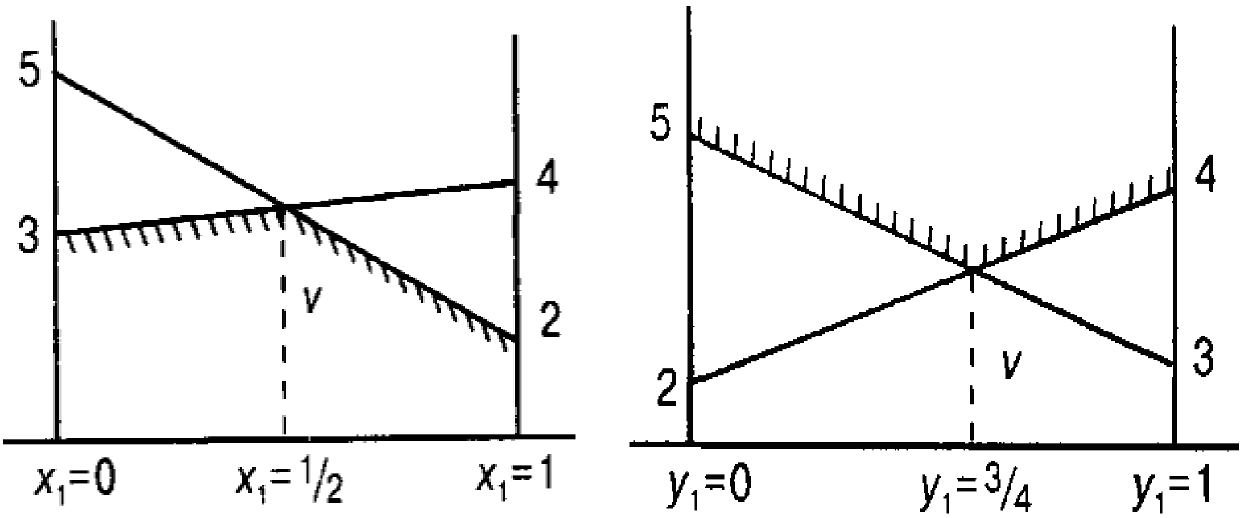
2 ўйинчининг мумкин бўлган ютуқларини ушбу жадвалда ҳисоблаймиз:

1 ўйинчи соф стратегиялари	2 ўйинчининг МБЮ (мумкин бшлган ютуқлари)	
1 сатр 2 сатр	$a_{11}y_1+a_{12}y_2=(a_{11}-a_{12})y_1+a_{12}=2y_1+2=\nu$ $a_{21}y_1+a_{22}y_2=(a_{21}-a_{22})y_1+a_{22}=-2y_1+5=\nu$	$2y_1+2=-2y_1+5\Rightarrow 4y_1=3\Rightarrow$ $y_1=3/4, y_2=1/4, \nu=2y_1+2=7/2$

1 ўйинчи учун масалани график усулда ечиш учун $x_1+3=\nu$ ва $-3x_1+5=\nu$ тўғри чизиқлар графигини чизамиз. Улар кесишган нуқта ва ўйин қиймати тенг: $x=(1/2,1/2), \nu=7/2$.

2 ўйинчи учун масалани график усулда ечиш учун $2y_1+2=\nu$ ва $-2x_1+5=\nu$ тўғри чизиқлар графигини чизамиз. Улар кесишган нуқта ва ўйин қиймати тенг: $y=(3/4,1/2), \nu=7/2$.

Графикларни келтирамиз:



Расм 10.1.

М2. (2 х n) тартибли ўйинни қарайлик, ж. 10.2. га қаранг.

Ж.10.2.

1-ўйинчининг Соф стратегиялари	2-ўйинчининг МБЮ			
	y_1	y_2	...	y_n
1 устун (x_1) 2 устун ($x_2 = 1 - x_1$)	a_{11} a_{21}	a_{12} a_{22}	...	a_{11} a_{2n}

Ф.қ. ўйин эгар нуқтага эга бўлмасин.

x_1 — деб, 1-ўйинчининг 1-стратегияни қўллаш эҳтимолини белгилайлик, x_2 — деб, 1-ўйинчининг 2-стратегияни қўллаш эҳтимолини белгилайлик. У ҳолда x_2 = 1 — x_1; y_i —деб 2-ўйинчининг i-стратегияни қўллаш эҳтимолини белгилайлик. 1-ўйинчининг 1-стратегияни қўллашдан олиши мумкин бўлган ютуғи тенг бўлади:

$$a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = a_{11}x_1 + a_{21}(1 - x_1) = (a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21}$$

Худди шу каби, 1-ўйинчининг 2-ўйинчи 2, 3,..., n-стратегияларини қўллашдан олиши мумкин бўлган ютуғини ушбу жадвалга жойлаштирамиз (ж.9.3.):

Ж.10.3.

2-ўйинчининг соф стратегиялари	1-ўйинчининг кутилган ютуқлари	
1-устун 2- устун ... n- устун	$(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21} = v$ $(a_{12} - a_{22})x_1 + a_{22}$ …… $(a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n} = v$	1,n устунлар актив стратегиялар бўлса $(a_{11} - a_{21})x_1 + a_{21} = (a_{1n} - a_{2n})x_1 + a_{2n}$ тенглама ечилиб, x_1, x_2, v топилади

Жадвалдан кўринадики, 1-ўйинчининг ютуғи x_1 га нисбатан чизиқли боғланишда экан, яъни тўғри чизиқлардан иборат экан. Уларни X_1 ,X_2 ўқларида 1-ўйинчининг мумкин бўлган ютуқларини тасвирлаймиз.

1-ўйинчи ўзининг минимал ютуқларини максималлаштириши керак. Шунинг учун, 1-ўйинчининг максимал ютуғи шу тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталарининг энг каттаси бўлади. 2 та шундай кесишадиган тўғри чизиқларга мос устун (сатр) актив стратегиялар дейилади. Уларнинг кесишган нуқталарининг координаталари оптимал стратегияни ва ютуқ қийматини беради.

Худди шу каби, 2-ўйинчининг оптимал стратегиясини топамиз. У максимал кутилаётган мағлубиятлари минималлаштириши керак. Ш.у. 2-ўйинчининг оптимал стратегияси-тўғри чизиқларни кесишган нуқтаси бўлиб, кутилаётган максимал мағлубиятларни минималлаштирувчи нуқта бўлиши керак.

Матрицаси билан берилган (2 x *n*), ўйиннинг ечимини топамиз (ж. 10.6)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & -1 \\ 4 & 3 & 2 & 6 \end{bmatrix}_{2x4}$$

Ж.10.6.

2-ўйинчининг соф стратегиялари	1-ўйинчининг кутилган ютуқлари	
1-устун 2-устун 3-устун 4-устун	$-2x_1+4$ $-x_1+3$ x_1+2 $-7x_1+6$	$-x_1+3=x_1+2 \rightarrow x_1=1/2,$ $x_2=1-x_1=1/2,$ $v=-x_1+3=-1/2+3=5/2$

Ечиш. Топамиз:

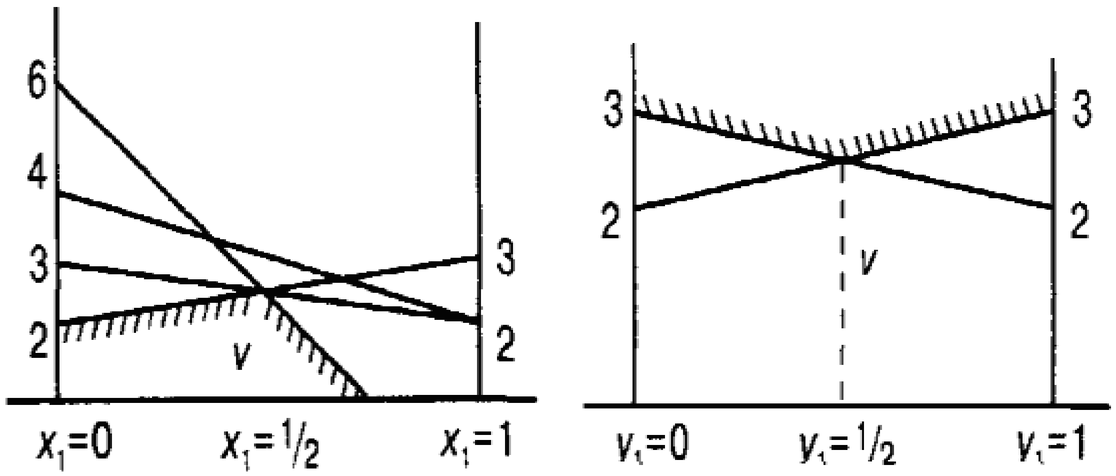
α = max (-1,2) = 2, β = min (4, 3, 3, 6) = 3, $2 \le v \le 3$.

1-ўйинчининг оптимал ечими:

$\bar{x}=(1/2,1/2)$, ўйин баҳоси тенг $v=5.2$.

2-ўйинчининг оптимал ечимини топамиз (ж. 10.7).

Расм 10.3 дан кўринадики, 1-ўйинчининг оптимал стратегияси ифодаларнинг $-x_1+3$ ва x_1+2 тенглигидан келиб чиқади, улар 2-ўйинчининг 2- ва 3- соф стратегияларга мос келади ва шунинг учун (ж. 10.5 га қ.), ва шунинг учун $y_1=y_4=0, y_3=1-y_2$.



Расм 10.2.

Ж.10.7.

1-ўйинчининг соф стратегияси	2-ўйинчининг кутилган ютуқлари	
1 2	$-y_2+3$ y_2+2	$-y_2+3=y_2+2 \rightarrow y_2=1/2,$ $y_3=1-1/2=1/2, v=y_2+2=1/2+2=5/2$

2-ўйинчининг оптимал ечими тенг (расм. 10.3):

$\bar{y}=(0,1/2,1/2,0)$, бунда ўйин баҳоси тенг v = 5/2 .

Ж а в о б . $\bar{x}$ = (1/2, 1/2), $\bar{y}=(0,1/2,1/2,0)$, v = 5/2.

Мисол 3. Тўлов сатрицаси *(m* x 2), бшлган ўйинни ечинг (ж. 9.8 га қ.)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 3 \\ 3 & 2 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$$

Ечиш. Топамиз α = max (2, 2, 2, -2) = 2, β = min (3, 6) = 3, $2 \le v \le 3$. Ф.қ. y_1 ва y_2 (бу ерда $y_2 = 1 - y_1$) — 2-ўйинчининг аралаш стратегияси бўлсин; x_1, x_2, x_3, x_4 —
1-ўйинчининг аралаш стратегияси бўлсин.

1ўйинчининг соф стратегиялари	2 ўйинчининг кутилган ютуқлари	
1 сатр 2 сатр 3 сатр 4 сатр	$(a_{11}-a_{12})y_1+a_{12}=-2y_1+4$ $(a_{21}-a_{22})y_1+a_{22}=-y_1+3$ $(a_{31}-a_{32})y_1+a_{32}=y_1+2$ $(a_{41}-a_{42})y_1+a_{42}=-8y_1+6$	$-2y_1+4=y_1+2 \Rightarrow y_1=2/3, y_2=1/3$ $v=2+2/3=8/3$

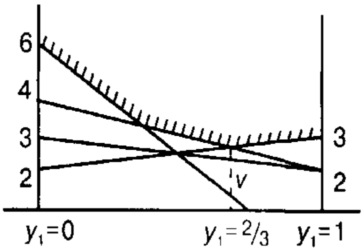


Рис. 31.5

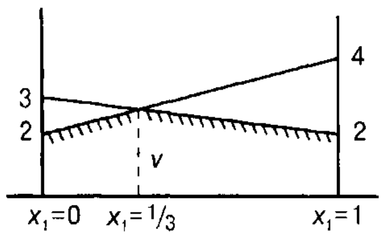


Рис. 31.6

Расм 9.3.

2 ўйинчининг оптимал стратегияси тенг (расм. 9.3):
$\bar{y}_{опт}$ = (2/3, 1/3), у ҳолда ўйин баҳоси тенг v = 8/3.

Минимакс нуқтада кесишувчи тўғри чизиқлар1-ўйинчининг 1-ва 3- соф стратегияларга мос келади. Бу $x_2 = x_4 = 0$ эканлигини билдиради. Шунинг учун , $x_1 = 1 - x_3$. 1-ўйинчининг оптимал стратегиясини топамиз. (ж. 9.9, расм. 9.6).

2 ўйинчининг соф стратегиялари	1 ўйинчининг кутилган ютуқлари	
1 устун 2 устун	$(a_{11}-a_{31})x_1+a_{31}=-x_1+3$ $(a_{12}-a_{32})x_1+a_{32}=2x_1+2$	$-x_1+3=2x_1+2 \Rightarrow x_1=1/3, x_2=2/3,$ $v=8/3$

1-ўйинчининг оптимал стратагияси тенг:
$\bar{x}_{опт}$ = (1/3, 0, 2/3, 0), бунда ўйин баҳоси тенг v = 8/3.
Ж а в о б . $\bar{x}_{опт}$ = (1/3, 0, 2/3, 0), $\bar{y}_{опт}$ = (2/3, 1/3), v = 8/3.

10.3. $(a_{ij})_{m \times n}$ ўйинни чизиқли программалаш масаласи ёрдамида ечиш

Матрицали ўйин масаласи чизиқли программалаш масалси билан чамбарчас боғланган, ва ҳар бир ноль йиғиндили ўйин масаласи чизиқли программалаш масаласига келтирилиб симплекс усул билан ечилиши мумкин ва аксинча ҳар бир чизиқли программалаш масаласига матрицали ўйинни мос қўйиш мумкин. Биринчи ўйинчи учун математик модел қуйидагича ёзилиши мумкин

$$L(\overline{x}) = \sum_{i=1}^{m} x_i = v \to \max,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i \ge v, \ j = 1,...,n;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = 1;$$

$$x_i \ge 0, i = 1,...,m$$

Математик моделни барча (n + 1) чекланишларни v га бўлиб соддалаштириш мумкин. Бу $v \neq 0$ бўлсагина мумкин. Агар v = 0 бўлса тўлов матрицасининг барча элементларига бир хил мусбат сонни қўшиш билан мксбаи қийматли ўйин ҳолатига келишни таъминлайди. Агар v < 0 бўлса, у ҳолда чекланишларнинг ишорасини ўзгартириш керак.

v > 0 деб фараз қилиб, чекланишлар системасини қуйидагича ёзиб оламиз:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} x_i / v \ge 1, \ j = 1,...,n;$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i / v = 1/v;$$

Белгилаш киритамиз $X_i = x_i/v$. Лекин $v \to \max$, шунинг учун $1 / v \to \min$. Шундай ушбу ЧПМ ни ҳосил қиламиз

$$L(\overline{X}) = \sum_{i=1}^{m} X_i \to \min,$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} X_i \ge 1, \ j = 1,...,n;$$

$$X_i \ge 0, i = 1,...,m$$

2-ўйинчи учун математик модел қуйидагича ёзилади

$$S(Y) = \sum_{j=1}^{n} Y_j \to \max,$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} Y_j \le 1, i = 1,...,m;$$

$$Y_j \ge 0, \ j = 1,...,n$$

бу ерда $S(\overline{Y}) = 1 / v$, $Y_j = y_j / v$.

2-ўйинчи учун ЧПМ 1-ўйинчи учун ЧПМ нинг қўшма ЧПМ бўлмоқда. Шундай қилиб, битта ўйинчи учун ЧПМ ни ечиб, 2-ўйинчи учун ечимни иккиёқламалик теоремалари ёрдамда олинар экан.

10.4. МАТРИЦАЛИ ЎЙИНЛАРНИ МАРКЕТИНГДА ҚЎЛЛАШ

Савдо фирмаси очиладиган ярмаркада бозор конъюнктураси ва харидорлар талабларини ҳисога олган ҳолда товарларни сотишни режалаштирди. Товарларни сотишдан фойда ж.9.1. да келтирилган. Товарларни оптимал сотиш режаси аниқлансин.

Ечиш. Савдо фирмасининг $П_i$ стратегиясининг қўллаш эҳтимоли x_i бўлсин. K_i стратегияни қўллаш эҳтимолини y_i дейлик, i=1,2,3.

Ж.10.10.

Сотиш режаси	Даромад , млн. Сўм		
	K_1	K_2	K_3
$П_1$	8	4	2
$П_2$	2	8	4
$П_3$	1	2	8

1-ўйинчи учун (фирма) масаланинг математик модели қуйидаги кўринишга эга

$$L(\bar{X}) = X_1 + X_2 + X_3 \to \min,$$
$$8X_1 + 2X_2 + X_3 \geq 1,$$
$$4X_1 + 8X_2 + 2X_3 \geq 1,$$
$$2X_1 + 4X_2 + 6X_3 \geq 1,$$
$$X_i \geq 0, i = 1..3, x_i = \nu X_i.$$

2-ўйинчи учун (бозор конъюнктураси ва харидорлар талаби) масаланинг математик модели қуйидаги кўринишга эга

$$S(\bar{Y}) = Y_1 + Y_2 + Y_3 \to \max,$$
$$8Y_1 + 4Y_2 + 2Y_3 \leq 1,$$
$$2Y_1 + 8Y_2 + 4Y_3 \leq 1,$$
$$Y_1 + 2Y_2 + 8Y_3 \leq 1,$$
$$Y_j \geq 0,\ j = 1..3, y_j = \nu Y_j.$$

2-ўйинчи учун масаланинг ечимини симплекс усул билан топамиз. Бунда охирги жадвал Ж.10.11. кўринишга эга.

Жадвалдан келиб чиқадики, $\bar{Y}$ = (1/14, 11/196, 5/49), $S(\bar{Y})_{\max}$ = 45/196.

Ўйин баҳоси $v = 1 / S(Y) = 196/45$.

Энди $y_i = Y_i v$, эканлигидан , $y_1 = 14/45$, $y_2 = 11/45$, $y_3 = 20/45$.

b_j	БЎ	1	1	1	0	0	0	c_i
		Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	Y_5	Y_6	
1	Y_1	1	0	0	1/7	-1/14	0	1/14
1	Y_2	0	1	0	-3/98	31/196	-1/14	11/196
1	Y_3	0	0	1	-1/98	-3/98	1/7	5/49
Δ_j		0	0	0	5/49	11/196	1/14	45/196

2-ўйинчининг оптимал стратегияси тенг:

$$\bar{y} = (14/45, 11/45, 20/45)$$

1-ўйинчининг оптимал стратегиясини охирги симплекс жадвалдан дастлабки ва қўшма масалаларнинг ўзгарувчилари орасидаги боғланишдан топамиз:

$$\bar{x} = (20/45, 11/45, 14/45)$$

Шундай қилиб, савдо фирмаси ярмаркада оптимал стратегия $\bar{x} = (20/45, 11/45, 14/45)$ ни қўллаши керак экан, бунда у v = 196/45 пул бирлигидан кам бўлмаган фойда олади.

Шу масалани MathCAD да ечамиз.

```
Решим задачу ( [1],31.3)
ORIGIN: =1                                   // индекснинг кичик қиймати
```

$A := \begin{bmatrix} 8 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ 1 & 2 & 8 \end{bmatrix}$ $m := rows(A)$ $n := cols(A)$ $m = 3$ $n = 3$ // тўлов матрица

$\xi_m := 1$ $f(\xi) := \sum_{i=1}^{m} \xi_i$ //1 ўйинчи мақсад функцияси

Given $A^T \xi \ge 1$ $\xi \ge 0$ // ички функцияга мурожаат

$r := Minimize(f, \xi)$ $r^T = \begin{bmatrix} 0.102 & 0.056 & 0.071 \end{bmatrix}$

$c := \dfrac{1}{f(r)}$ $c = 4.356$ $p := r * c$ $p^T = \begin{bmatrix} 0.44 & 0.25 & 0.31 \end{bmatrix}$ // 1 ўйинчи оптимал стратегия

$\eta_m := 1$ $g(\eta) := \sum_{j=1}^{n} \eta_j$ // 2 ўйинчи мақсад функцияси

Given $A\eta \le 1$ $\eta \ge 0$ // ички функцияга мурожаат

$s := Maximize(g, \eta)$ $s^T = \begin{bmatrix} 0.071 & 0.056 & 0.102 \end{bmatrix}$

$c := \dfrac{1}{g(s)}$ $c = 4.356$ $q := s * c$ $q^T = \begin{bmatrix} 0.311 & 0.244 & 0.444 \end{bmatrix}$ // // 1 ўйинчи оптимал стратегия

10.5. Матрицали ўйинни ЧПМ га келтириш

Юқоридаги масалада тўлов матрицаси билан берилган ўйин ЧПМ га келтирилди. Ўз навбатида ЧПМ матрицали ўйинга келирилиши мумкин.

ЧПМ берилган бўлсин:

$$L(\bar{x}) = cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max,$$
$$Ax \le b,$$
$$x \ge 0.$$

у ҳолда матрицали ўйиннинг тўлов матрицаси (m + n + 1)-тартибли ушбу матрица билан берилади:

$$\begin{bmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{bmatrix}$$

бу ерда A — ЧПМ нинг чекланишлар системасининг матрицаси; B — озод ўнг томонлар матрицаси (вектори) ; C — мақсад функция ўзгарувчилари олдидаги коэффициентлар вектори; A^T, B^T, C^T — транспонирланган A, B, C матрицалар.

Агар ЧПМ қуйидаги кўринишда берилган бўлса

$$L(\overline{x}) = cx = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$
$$Ax \le b,$$
$$x \ge 0.$$

у ҳолда матрицали ўйин ($m + n + 1$) ўлчовли ушбу тўлов матрицасига эга бўлади:

$$\begin{bmatrix} 0 & A^T & -B^T \\ -A & 0 & C \\ B & -C^T & 0 \end{bmatrix}$$

Мисол 4. Ушбу ЧПМ учун матрицали ўйин қуринг:

$$L(\overline{x}) = 2x_1 + 3x_2 \to \max,$$
$$2x_1 + x_2 \le 10,$$
$$-x_1 + 3x_2 \le 12,$$
$$x_j \ge 0,\ j = 1,2.$$

Ечиш. Белгилаймиз:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 10 \\ 12 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2 & 3 \end{bmatrix}$$

Транспонирланган матрицалар

$$A^T = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, B^T = \begin{bmatrix} 10 & 12 \end{bmatrix}, C^T = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$
$$m + n + 1 = 2 + 2 + 1 = 5.$$

Жавоб. Берилган ЧПМ учун матрицали ўйин ушбу тўлов матрицасига эга:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & -12 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 0 & 3 \\ 10 & 12 & -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

10.6. “Табиат” билан ўйин

Юқоридаги матрицали ўйинларда иккита қизиқишлари қарама-қарши ўйинчилар иштирок этишди. Шунинг учун, ҳар бир ўйинчининг ҳатти-ҳаракати ўз ютуғини (мағлубиятини) кўпайтириш (камайтириш)дан иборат эди. Лекин баъзи ўйинларга олиб келадиган масалаларда маълум бир аниқмасликлар мавжуд, бу аниқмаслик, ҳаракатлар содир этиш учун маъоумотларнинг йўқлигидан, камлигидан келиб чиқади (обу-ҳавл, талаб-эҳтиёж ва ҳ.к.). Бу шароитлар ўйинчига боғлиқ бўлмасдан, объектив сабаблар туфайли келиб чиқади. Бундай ўйинлар табиат билан ўйин деб айтилади. Инсон табиат билан ўйинларда, эҳтиёт бўлиб ҳаракат қилади, иккинчи ўйинчи эса (табиат, талаб-эҳтиёж ва ҳ.к.) тасодифий ҳаракатланади.

Барибир, ўйин шартлари тўлов матрицаси билан берилади: $A=[a_{ij}]_{mxn}$.

Оптимал стратегияни танлашда бир неча критерийлар мавжуд:

1.Критерий Вальде. Максмин стратегиясини қўллаш таклиф этилади. У ушбу шартдан аниқланади ва ўйиннинг қуйи баҳосига тенг:

$$\alpha = \min_i \max_j a_{ij}$$

Критерий пессимистик бўлиб, фараз қилинадики, табиат инсонга салбий муносабатда бўлади.

2. Максимум критерийси. У ушбу шартдан аниқланади ва ўйиннинг юқори баҳосига тенг:

$$\beta = \max_j \min_i a_{ij}$$

Критерий оптимистик бўлиб, фараз қилинадики, табиат инсонга ижобий муносабатда бўлади.

3. Гурвиц критерийси. Критерий ушбу формула билан аниқланадиган стратегияни таклиф қилади:

$$\gamma = \max\{t \min a_{ij} + (1-t)\max a_{ij}\}$$

бу ерда t —оптимизм коэффициенти бўлиб— [0, 1] кесмада ўзгаради.

Гурвиц критерийси ўртача позицияни эгаллаб, фойдаланувчи-ўйинчи инсон учун табиатнинг ҳам яхши, ҳам ёмон имкониятларини ҳисобга олади. Критерий t = 1 Вальде критерийсига, t = 0 — да максимум критерийсига айланади.

4. Сэвидж критерийси. Критерийнинг маъноси шундай стратегияни танлашки,мумкин бўлган йўқотишларнинг энг кичигига йўл қўйишдир. Бунинг учун аввало, хавфлар матрицаси тузилади,унинг элементлари,агар энг яхши стратегия танлаб олинмаса фирма (инсон) қанча зарар кўришини билдиради. Шундан сўнг энг кичик хавфга мос стратегия танланади. Хавфлар матрицаси ушбу формулалар билан аниқланади

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij},$$

бу ерда maxa_{ij} — устундаги максимал элемент. Оптимал стратегия қуйидагича топилади

$$\delta = \min\{\max(\max a_{ij} - a_{ij})\}$$

10.7. Корхонанинг ишлаб чиқариш программасини хавф-хатарлик ва аниқмаслик шароитларида матрицали ўйинлар ёрдамида аниқлаш

"Фармацевт" фирмаси регионда медикаментлар ва биомедикаментлар ишлаб чиқарувчи корхонадир. Маълумки баъзи дориларга талаблар ёзда (юрак-қон, аллергик), баъзи дориларга талаблар баҳор-куз (антиинфекцион, йўталга қарши) даврларида кучаяди. Сентябрь-октябрь ойларида доринининг шартли 1 бирлигининг нархи-20 с.(юрак-қон, аллергик), иккинчи группасига (антиинфекцион, йўтаога қарши)-15 с.ни ташкил этади.

Фирманинг маркетинг хизмати маълумотларига кўра, бир неча йиллар давомида кузатилганки, иссиқ кузда, 1-группа касалликлар учун 2 ойда 3050 шартли дона бирлик дори, 2-группа учун -1100 дона шартли дори сотилган. Совуқ куз шароитида уларнинг сони мос равишда 1525 та ва 3690 тани ташкил этади.

Обу ҳавонинг ўзгаришини ҳисобга олиб, фирманинг оптимал стратегияси аниқлансин. Фирма 1-группа дориларнинг шартли 1 бирлигини 40 сўм, 2-группа дориларининг 1 бирлигининг нархини 30-сўмдан сотмоқчи.

Ечиш. Фирманинг 2 та стратегияси бор.

A_1 — бу йил обу ҳаво иссиқ келади. A_2 — бу йил обу-ҳаво совуқ келади.

Агар фирма A_1 стратегияни қўлласа ва ҳақиқатан ҳам ҳаво иссиқ келса(табиат стратегиси B_2), у ҳолда ишлаб чиқарилган ҳамма дори (3050 ш.б. 1-группа дорилари ва 1100 ш.б.2-группа дорилари) тўла сотилади ва даромад тенг бўлади:

$$3050*(40-20)+1100*(30-15)=77500 \text{ с.}$$

Совуқ куз шароитида (табиатнинг B_2 стратегияси *)* дориларнинг 2-группаси тўла сотилади ва 1-группасидан 1525 ш.б. донаси сотилиб, маълум бир қисми сотилмай қолади. Даромад бу ҳолда тенг бўлади

$$1525*(40-20)+1100*(30-15)-20*(3050-1525)=16500 \text{ с.}$$

Худди шундай, агар фирма A_2 стратегияни қабул қилса ва ,ҳақиқатан ҳам куз совуқ келса, даромад тенг бўлади

$$1525*(40-20)+3690*(30-15)=85850 \text{ с.}$$

Иссиқ ҳавода даромад тенг бўлади

$$1525*(40-20)+1100*(30-15)-(3690-1100)*15=8150 \text{ с.}$$

Фирма ва табиатни икки ўйинчи деб, биз тўлов матрицасига келамиз:

$$\begin{bmatrix} 77500 & 16500 \\ 8150 & 85850 \end{bmatrix}$$

$$\alpha = \max(16500, 8150) = 16500\, c.,$$
$$\beta = \min(77500, 85850) = 77500\, c.$$

Ўйин баҳоси ушбу диапазонда ётади 16500 с. $\leq\ v \leq$ 77500 с.

Тўлов матрицасидан кўринадики, барча шароитларда фирма даромади 16 500 с.дан кўп, лекин ҳаво шароити танланган стратегия билан мос тушса, фирманинг даромади 77500 бўлиши мумкин.

Ўйиннинг ечимини топамиз.

Фирманинг A_i *стратегия қўллаш эҳтимолини* x_i , i=1.2, равшанки, $x_1 = 1 - x_2$. Ўйинни график усулда ечиб топамиз: $\bar{x}$ = (0,56; 0,44), ўйин баҳоси v = 46 986 р.

Дори ишлаб чиқишнинг оптимал плани тенг бўлади:

$$0.56*(3050;1100)+0.44*(1525;3690)=(2379;2239.6).$$

Шундай қилиб, фирма сентябрь ва октябрь ойларида 2379 ш. б. 1-группа дори-дармонлари, ва 2239,6 ш.б. 2-группа дори дармонлари ишлаб чиқиши керак эканки, унинг даромади 46 986 с. дан кам бўлмас экан.

Ноаниқлик шароитида, яъни фирма яна бошқа аралаш стратегиялар ишлатса (масалан, бошқа ташкилотлар билан шартномалар тузса), у ҳолда оптимал стратегияни аниқлаш учун табиат критерийларини ишлатамиз.

1. Вальде критерийси:

$$\max(\min a_{ij})=\max(16500,8150)=16500 \text{ с.},$$

Фирма A_1 стратегияни ишлатгани маъқул.

2. Максимум критерийси:

$$\max(\min a_{ij})=\max(77500,85850)=85850 \text{ с.},$$

Фирма A_2 стратегияни ишлатгани маъқул.

3. Гурвица критерийси: аниқлик учун t = 0,4, десак фирманинг A_1 стратегияси учун

$$t\min a_{ij} + (1-t)\max a_{ij} = 0.4*16500 + (1-0.4)*77500 = 53100\,c..$$

A_2 стратегия учун

$$t\min a_{ij} + (1-t)\max a_{ij} = 0.4*8150 + (1-0.4)*85850 = 54770c$$

Ш.қ. фирмага A_2 стратегия кўпроқ наф беради.

4. Сэвидж критерийси. 1-устунда максимал элемент тенг — 77 500, иккинчи устунда максимал элемент тенг — 85 850.

Хавф матрицасини ушбу формуладан топамиз:

$$r_{ij} = \max a_{ij} - a_{ij}$$

бу ердан r_{11} = 77500 - 77500 = 0, r_{12} = 85 850 - 16 500 = 69 350, r_{21} = 77 500 - 8150 = 69 350, r_{22} = 85 850 - 85 850 = 0.

Хавф матрицаси қуйидаги кўринишни олади ва Сэвидж стратегиясининг қиймати тенг

$$\begin{bmatrix} 0 & 69350 \\ 69350 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\min\{\max(\max a_{ij} - a_{ij})\} = \min(69350, 69350) = 69350\,c.$$

ундай қилиб, A_1 ёки A_2.стратегияни қўллаган маъқул.

Кўриниб туриблики, юқорида кўрилган ҳар бир критерий алоҳида –алоҳида қарор қабул қилиш учун қониқарли деб бўлмайди. Фақатгина, уларни биргаликдаги таҳлилигина қарор қабул қилиш учун сабаб бўлиши мумкин.

Эҳтимолларнинг маълум тақсимотида яхшигина критерий сифатида ютуқнинг математик кутилмасининг максимумини олиш мумкин. Масалан, иссиқ ва совуқ ҳавонинг эҳтимоллари бир хил бўлсин ва 0.5 га тенг бўлсин. У ҳолда фирманинг оптимал стратегияси ушбу формула билан аниқланади:

$$\max\{(0.5*77500 + 0.5*16500); (0.5*8150 + 0.5*85850)\} = \max(47500, 47500)$$

Шундай қилиб, фирма A_1 ва A_2 стратегияларни ишлатиши керак экан.

10.8. МАШҚЛАР

Оптимал стратегиялар ўйиннинг баҳоси топилсин.

10.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 4 \end{bmatrix}$. 10.2. $A = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 2 \\ 1 & 9 & 7 \end{bmatrix}$ 10.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -2 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

10.4. $A=\begin{bmatrix} 4 & 7 \\ 9 & 3 \\ 5 & 9 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$ 10.5. $A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

10.6. $A=\begin{bmatrix} 3 & 7 & 1 & 1 & 5 & 8 \\ 4 & 9 & 3 & 6 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 7 & 20 \end{bmatrix}$ 10.7. $A=\begin{bmatrix} 8 & 6 & 4 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ 6 & 7 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 3 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

ЧПМ учун матрицали ўйин қурилсин.

9.8. $L(\overline{x}) = x_1 + 2x_2 - x_3 \to \max$:

$$x_1 + x_2 - x_3 \le 1, 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 2, x_j \ge 0, j = 1..3.$$

Матрицали ўйин ёрдамида ечилсин.

9.9. Савдо ташкилоти янги очилаётган ярмаркада иштирок этиш учун бозор коньюнктураси ва харидорларнинг талабири ўрганиб, товарларни сотишнинг бир неча вариантини ишлаб чиқди. Савдодан олинадиган фойдалар ж. 9.12 да келтирилган.

Аниқланг: **а)** сотишнинг оптимал плани ва ўйин баҳоси топилсин;

б) савдо ташкилоти C_1 — 30%, C_2 — 30%, C_3 — 40% бўлиши учун қандай стратегияни қабул қилиши керак?

Ж.10.12

Сотиш режаси	Даромад миқдори, млн с.		
	C_1	C_2	C_3
$П_1$	2	1	3
$П_2$	1	2	3
$П_3$	2	3	1

9.10. Корхона аниқмас бозор коньюктураси шаротида янги товарларнинг уч хил партиясини ишлаб чиқаради. Алоҳида мумкин бўлган ҳолатлар P_1, P_2, P_3, P_4, ва бу ҳолатларда ҳар бир ваиант бўйича товарларни ишлаб чиқариш ҳажмлари маълум ва уларнинг шартли эҳтимоллари ж. 9.13 да берилган.

Ж.10.13.

Маҳсулот	Бозор конъюктурасининг ҳар хил шаротларида маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми			
	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	0.4 2.2	0.1 3.8	0.2 2.8	0.3 3.2
M_2	0.3 2.6	0.2 2.4	0.1 3.1	0.4 3.3
M_3	0.2 3.0	0.3 2.0	0.2 1.8	0.3 2.5

Товарларни оммавий ишлаб чиқариш ҳажмларининг режаси топилсин.

9.11. Фирма талабчан болаларнинг кўйнаклари ва костьюмларини ишлаб чиқади.

Уларни сотиш обу ҳавога боғлиқ. Фирманинг август-сентябрдаги харажатлари 1 та товарга қуйидагича: кўйнак — 7 пул бирлиги, костюмлар — 28 п.б. Уларни сотиш нархлари мос равишда 15 ва 50 п.б.

Кўп йиллик кузатувга асосан, иссиқ обу-ҳаводa 1950 та кўйлак ва 610 та костюм сотилади, слвуқ обу-ҳавода бу кўрсаткичлар — 630 кўйлак ва 1050 костюмдан иборат.

Обу ҳавони ўзгаришига қараб, фирманинг товар ишлаб чиқиш стратегиясини ишлаб чиқингки, ундан фирмага энг кўп даромад келсин. Масалани график усулда табиат критерийлари асосида ечинг. Оптимизм даражасини t = 0,5 деб олинг..

Мундарижага

Адабиёт

1. Вагнер Г. Основы исследований операции. Т. 1–3. М.: Мир. 1972-73.
2. Ху Т. Целочисленное программирование и потоки в сетях. М.: Мир, 1974.
3. Зайченко Ю. Б. Исследование операций. Киев. 1979.
4. Таха Х.А. Введение в исследование операций, — М.: "Вильямс", 2005. — 912 с.
5. Алексеев В. М., Тихомиров В. М. , Фомин С.В. Оптимальное управление. Наука, Учеб. пособие. ---изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 1979. – 432 с.
6. Алексеев В. М., Галеев Э. М., Тихомиров В. М. Сборник
задач по оптимизации. Теория. Примеры. Задачи: Учеб. пособие. — 2-е
изд. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 256 с. - ISBN 5-9221-0590-6.
6. Дюбин Г. Н., Суздал В. Г. Введение в прикладную теорию игр. М.: Наука, 1981.
76. Беллман Р. Динамическое программироваине. М.: ИИЛ, 1960.
8. Ховард Р. Дин. прог.-е и марковские процессы. М.: Сов. Радио, 1964, 192 с.
9. Майн Х., Осаки С. Марковские процессы принятия решений. М.: Наука, 1977. 176 с.
10. Справочник для экономистов.Под.ред. В.И. Ермакова. М.:ВШ.,1987.-336 с.
11. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учеб. — 2-е изд., испр. — М.: Дело, 2001. — 688 с.
12. Охорзин В.А. Прикладная математика в системе MathCAD. -СПб, Лань.2008.-352с.
13. Писарук, Н. Н. Исследование операций. — Минск : БГУ, 2014. —289 с.
14. Жумаев Х.Н., Отаниёзов Б., Югай Л.П., Жалилов А. Математик программалаш. Дарслик.Т.: “Адабиёт жамғармаси”,2005.-232 б.
15. Имомов А., Эргашев Б.С. Организация решения задач исследования операций в MATHCAD, . Молодой учёный, 8 (88), апрель 2, 2015 г.-с.5-9.
16.Имомов А., Бокиев Э. Организация решения задач динамического программирования. Молодой учёный, 12 (92), июнь 2, 2015 г.-с.10-15.