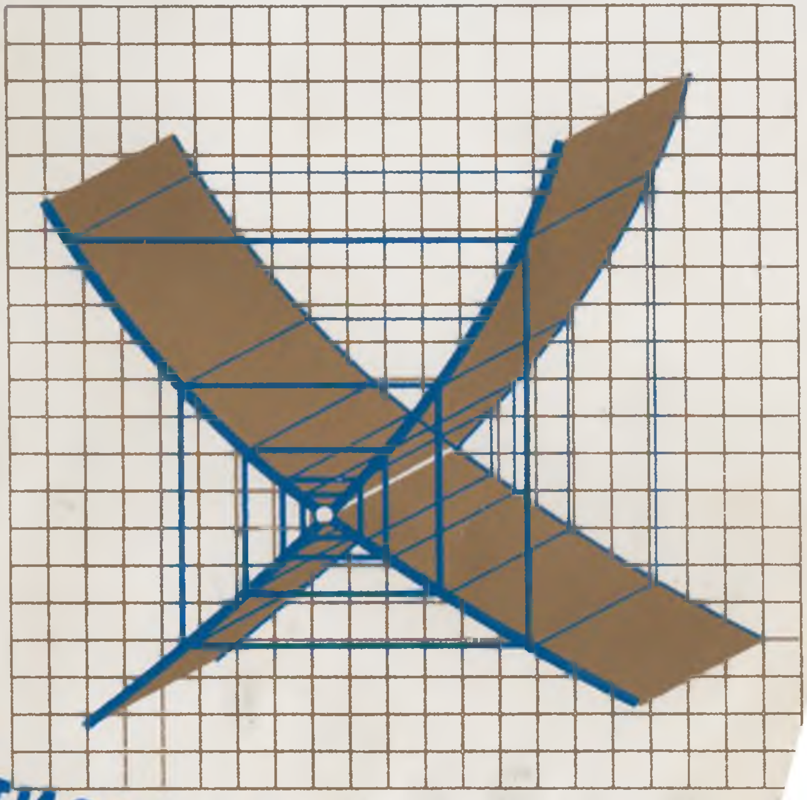
М. ҒОФУРОВ
М. ХОЛМУРОДОВ
Қ. ҲУСАНОВ



ИҚТИСОДИЙ-МАТЕМАТИК УСУЛЛАР ВА МОДЕЛЛАР

М. ҒОФУРОВ
М. ХОЛМУРОДОВ
Қ. ҲУСАНОВ

ИҚТИСОДИЙ-МАТЕМАТИК УСУЛЛАР ВА МОДЕЛЛАР

Тошкент – 2001

УДК 330.4

Ғофуров М., Холмуродов М., Ҳусанов Қ.

Иқтисодий-математик усуллар ва моделлар

Тошкент, 2001.-100 б.

Тақризчилар:

Тошкент Давлат Иқтисодиёт Университети
Иқтисодий кибернетика кафедраси
Кафедра мудири: проф. Т. Шодиев

Тошкент Давлат Иқтисодиёт Университети
проф. А. Каримов

Ўқув қўлланма иқтисод соҳасида қўлланадиган иқтисодий-математик моделлар ва усулларга бағишланган. Унда бошқа бир қатор моделлар билан биргаликда микроиқтисодга оид истеъмол ва ишлаб чиқаришни оптимал ташкил этиш моделлари, макроиқтисодий ўсиш моделлари, тармоқлараро баланс моделлари, эконометрик моделлар кўрилган.

Қўлланма «Иқтисодиёт» йўналишидаги бакалавриат тизимига мўлжалланган бўлиб, ундаги мавзулар «Иқтисодий-математик усуллар ва моделлар» фанининг мазмунини белгиловчи давлат ўқув стандартлари асосида танланган. Қўлланма талабалар, ўқитувчилар ҳамда иқтисодга математиканинг татбиқи билан шуғулланувчи мутахассислар учун мўлжалланган.

1-боб. Иқтисодиётда математик моделлар

1.1. Иқтисодий-математик моделлаштиришнинг мақсади

Ҳозирги замон иқтисодий назариясини, уни қандай савиясида ўрганишдан қатъий назар, математик моделлар ҳамда услубларсиз тасаввур этиш қийин.

Математик модел деганда, ўрганилаётган объект ёки жараённи белгиловчи омилларнинг ўзаро боғлиқлигини ифодаловчи математик муносабатлар мажмуаси тушунилади.

Объектнинг моделини топиш ва уни таҳлил этиш асосида тегишли хулосалар чиқариш жараёни *математик моделлаштириш* деб юритилади. Математик моделларнинг иқтисодиёт муаммоларини ўрганишга тадбиқ этишни ***иқтисодий-математик моделлаштириш***, уларни амалиётта қўллаш эса ***иқтисодий-математик усуллар*** дейилади.

Иқтисодиётда математиканинг қўлланилиши, асосан, қуйидаги мақсадларни ўз олдига қўяди:

1) иқтисодиётни белгиловчи асосий омиллар орасидаги муҳим боғланишларни акс эттириш;

2) берилган аниқ маълумотлар ва муносабатлар асосида дедукция услуби орқали ўрганилаётган объект учун адекват хулосалар олиш;

3) қизиқтираётган объектнинг амалдаги кузатилишига уни белгиловчи омилларнинг математик статистика усуллари ёрдамида шаклини ҳамда боғлиқлигини ўрганиш жараёнида объект ҳақида янги билимларга эга бўлиш;

4) иқтисодий назария ҳолатини математика тили орқали аниқ ва равшан ифодалаш.

Математик моделларнинг тадқиқот ишларида қўлланилиши XVI асрлардаёқ бошланган бўлиб, XIX асрларда дифференциал ва интеграл ҳисобнинг ривожланиши таъсирида ўша даврнинг бир қатор математиклари (Л. Вальрас, О. Курно, В. Парето, Ф. Эджворт ва бошқалар) бозор иқтисодиётини моделлаштиришга катта ҳисса қўшдилар. Ўтган XX аср иқтисодиётда математик усулларнинг моделлаштиришдаги кенг кўламда қўлланиши билан характерланади. Тадбиқий математика соҳасининг ўйинлар назарияси, математик дастурлаш, математик статистика ва бошқа бўлимларининг ривожланиши микро ҳамда макроиқтисодиётнинг кескин тараққий этишига муҳим туртки бўлиб хизмат қилди.

Муқаддима ўрнида

«Иқтисодий-математик усуллар ва моделлар» номли компьютерли ўқув қўлланма АҚШнинг «Евразия» фонди ажратган гранти асосида тайёрланган.

Ўқув қўлланма иқтисод соҳасида қўлланадиган иқтисодий-математик моделлар ва усулларга бағишланган. Унда, бошқа бир қатор моделлар билан биргаликда, микроиқтисодга оид истеъмол ва ишлаб чиқаришни оптимал ташкил этиш моделлари, макроиқтисодий ўсиш моделлари, тармоқлараро баланс моделлари, эконометрик моделлар кўрилган.

Қўлланма «Иқтисодиёт» йўналишидаги бакалавриат тизимига мўлжалланган бўлиб, ундаги мавзулар «Иқтисодий-математик усуллар ва моделлар» фанининг мазмунини белгиловчи давлат ўқув стандартлари асосида танланган. Шу билан бирга, бу қўлланма иқтисодга математиканинг тадбиқи билан шуғулланувчи мутахассислар учун ҳам қизиқарли бўлади деб, умид қиламиз.

Қўлланма муаллифларининг Тошкент автомобил йўллар институти, Наманган давлат университети, Наманган иқтисодиёт-муҳандислик институтларида ўқилган маърузалар ва олиб борилган машғулотлар асосида тайёрланган.

Ўқув қўлланма компьютерга мўлжалланган бўлиб, ундаги ўқув материал компьютерда бевосита бажариш мумкин бўлган дастурлар билан таъминланган. Дастурий таъминотини яратишда Қ. Ҳусанов раҳбарлигида НамДУ ходимлари, аспирантлар Я. Ғозиев, С. Ражабов, Н. Маматовлар қатнашишди.

Бу қўлланма компьютерли ўқитиш воситаларини яратишда Республикамиздаги илк бор қадамлардан бўлгани учун, айрим камчиликлардан холи бўлмаслиги мумкин. Муаллифлар барча таклифларни мамнуният билан қабул қилишади.

Мазкур компьютерли ўқув қўлланма Республикада иқтисодиёт соҳасида мутахассисларни тайёрлаш сифатини кўтаришда кўмак бўлади деган умиддамиз.

Муаллифлар

Ҳозирги вайтда иқтисодиётнинг ўтиш даврини моделлаштириш муҳим вазифалардан ҳисобланади. Ҳар қандай иқтисодий тадқиқот доимо назария (иқтисодий модел) ва амалиётни (статистик маълумотлар) биргаликда қарашни тақозо этади. Агар иқтисодий моделлар кузатилаётган жараёнларни изоҳлаш ва тушунтиришдан иборат бўлса, статистик маълумотлар уларни эмпирик қуришда ва асослашда муҳим восита ҳисобланади. Математик моделларнинг қулайлиги шундаки, ҳар бир модел бир қанча иқтисодий жараёнларни ифода этиш хусусиятига эга.

Иккита мисол кўрайлик.

1. Бир йилдан сўнг 12000 $ олиш учун банкка йилига 20% кўпайиш шарти билан қанча микдорда пул қўйиш зарур?

Ечиш. Масалада қаралаётган миқдорлар учун белгилашлар киритамиз:

M_0 – бошидаги пул;
M_1 – охирида олинган пул;
R – фоиз миқдори.

У ҳолда бу кўрсаткичлар орасидаги муносабатни

$M_1 = M_0(1 + R / 100)$

кўринишда ёзиш мумкин (математик модел). Бу муносабатдан масаланинг шартига кўра M_0=10000 $.

2. Агар заводни қайта жиҳозлантириш натижасида ўртача ишлаб чиқариш 20 % га ортиб завод 12000 дона маҳсулот ишлаб чиқараётган бўлса, заводнинг олдинги ишлаб чиқариш ҳажми қандай бўлган?

Ечиш. Худди олдинги масаладагидек белгилашлар киритамиз.

Q_0-бошланғич ишлаб чиқариш ҳажми;

Q_1-охирги ишлаб чиқариш ҳажми;

R-ишлаб чиқаришнинг ўсиш коэффициенти фоизи.

У ҳолда

$Q_1 = Q_0(1 + R / 100)$.

Бу ердан

$Q_0 = Q / (1 + (R / 100)) = 12000\$ / 1.2 = 10000\$$.

Ҳар иккала масалага мос моделларни ва натижаларни солиштирсак, у ҳолда

$Y = x_1 (1 + x_2 / 100)$

(бу ерда x_1, x_2 ва Y қандайдир ўзгарувчи миқдорлар) математик муносабатдан фойдаланаётганимизни кўрамиз. Мисоллардаги миқдорларнинг сонли қийматлари ҳам бир хил бўлишига қарамай охирги модел ҳар хил иқтисодий масалаларни акс этувчи математик моделдир. Шундай қилиб, математик моделлар ва услублар мазмунан мутлақо ҳар хил иқтисодий жараёнларда ишлатилиши мумкин.

1.2. Моделларни синфлаштириш

Моделлаштириш ва моделлар ўзининг турли соҳалардаги тадбикларига қараб, моддий ва абстракт деб аталувчи синфларга бўлинади.

Моддий моделлар асосан ўрганилаётган объект ва жараённи геометрик, физик, динамик ёки функционал характеристикаларини ифодалайди. Масалан, объектнинг кичиклаштирилган макети (масалан, лицей, коллеж, университет) ва турли хил физик, химик ва бошқа хилдаги макетлар бунга мисол бўла олади. Бу моделлар ёрдамида турли хил технологик жараёнларни оптимал бошқариш, уларни жойлаштириш ва фойдаланиш йўллари ўрганилади. Умуман олганда, моддий моделлар тажрибавий характерга эга бўлиб, техника фанларида кенг қўлланилади.

Аммо моддий моделлаштиришдан иқтисодий масалаларни ечиш учун фойдаланишда маълум чегараланишлар мавжуд. Масалан, халқ хўжалигини бирор соҳасини ўрганиш билан бутун иқтисодий объект ҳақида хулоса чиқариб бўлмайди. Кўпгина иқтисодий масалалар учун эса моддий моделлар яратиш қийин бўлади ва кўп харажат талаб этади.

Абстракт (идеал) моделлар инсон тафаккурининг маҳсули бўлиб, улар тушунчалар, гипотезалар ва турли хил қарашлар системасидан иборат. Иқтисодий тадқиқотларда, бошқариш соҳаларида, асосан, абстракт моделлаштиришдан фойдаланилади.

Илмий билишда абстракт моделлар маълум тилларга асосланган белгилар мажмуидан иборат. Ўз навбатида, белгили абстракт моделлар математик ва логик тиллар шаклидаги математик логик моделларни ифодалайди.

Математик моделлаштириш турли хил табиатли, аммо бир хил математик боғланишларни ифодалайдиган воқеа ва жараёнларга асосланган тадқиқот усулидир.

Ҳозирги пайтда математик моделлаштириш иқтисодий тадқиқотларда, амалий режалаштиришда ва бошқаришда етакчи ўрин эгаллаб, компьютерлаштириш билан чамбарчас боғланган.

Математика, компьютерлаштириш соҳалари, умумуслубий ва предмет фанларининг ривожланиши натижасида математик моделлаштириш узлуксиз ривожланиб, янги-янги математик моделлаштириш шакллари вужудга келмоқда.

Объект (жараён, воқеа)нинг математик модели камида иккита гуруҳ элементларини ўз ичига олган математик масаладан иборат бўлади. Улардан биринчиси – объектнинг аниқланиши керак бўлган элементи ($\vec{y} = (y_i)$ векторининг координаталари), иккинчиси эса маълум шартлар асосида ўзгарадиган элементлар ($\vec{x} = (x_i)$ вектор элементлари).

Математик моделлар ўзининг ташқи шартлари, ички ва топилиши зарур бўлган элементлари бўйича функционал ва структурали қисмларга бўлинади.

Функционал модел – X га қиймат бериб, Y нинг қийматини олиш бўйича объектнинг ўзгаришини ифодалайди. Бунда $Y = D(X)$ богланиш мавжуд бўлади.

Структурали моделлар объектнинг ички тузилишини, унинг тузилиш қисмларини, ички параметрларини, улар орасидаги боғланишларни ифодалайди.

Структурали моделларнинг энг кўп тарқалгани қуйидагилардан иборат:

а) ҳамма номаълумлар объектнинг ташқи шартлари ва ички параметрлари функциялари шаклида ифодаланади:

$$y_i = f_i(A, X), \; i \in J \qquad (1)$$

б) номаълумлар i тартибли (тенгламалар, тенгсизликлар ва ҳоказо) системалар ёрдамида аниқланади:

$$\Phi_i(A, X) = 0, \; i \in J, \qquad (2)$$

бу ерда A — параметрлар тўплами.

Ҳар доим ҳам (2) кўринишдаги масалалар (1) кўринишга келтирилавермайди. Масалан, 5-ичи ёки ундан ортиқ тартибли алгебраик тенгламаларнинг умумий ечимини (1) кўринишда ифодалаб бўлмайди.

Функционал ва структурали моделлар бир-бирини тўлдиради. Функционал моделларни ўрганишда ўрганилаётган объектнинг структураси ҳақида гипотезалар пайдо бўлади, ва шу билан структурали моделга йўл очилади. Иккинчи томондан эса, структурали моделларни таҳлил қилиш объектнинг ташқи ўзгариш шартларини такомиллаштиради.

ЭҲМ нинг вужудга келиши билан моделлаштиришнинг янги йўналиши пайдо бўлади. Модел яратиш ва унда тажрибалар ўтказишда ЭҲМ катта рол ўйнайди. Бундай моделларни ***иммитацион моделлар*** дейилади.

Иқтисодий жараёнлар ва воқеаларнинг математик моделларини қисқача ***иқтисодий-математик моделлар*** дейилади.

Амалий мақсадларда иқтисодий-математик моделлар иқтисодий жараёнларнинг умумий хоссалари ва қонуниятлари бўйича ***назарий-аналитик моделларга***, конкрет иқтисодий масалаларни ечиш (иқтисодий таҳлил, башоратлаш ва бошқариш моделлари) бўйича эса ***тадбиқий моделларга*** бўлинади.

Иқтисодий-математик моделлардан халқ хўжалигининг турли соҳаларини ва айрим қисмларини тадқиқ этишда фойдаланиш мумкин. Масалан, савдо жараёнларини моделлаштиришда статистик усуллар ёрдамида статистик моделлар қурилади. Назарий статистика асослари ёрдамида эса индексли, балансли ва корреляцион-регрессион моделлар қурилади.

Мисол учун, товароборот динамикасини қуйидаги индекс модели шаклида ёзиш мумкин:

$$J_{pq} = J_p \cdot J_q$$

бу ерда J_{pq} – товароборот динамикаси индекси, J_p – баҳо индекси, J_q – товароборот ҳажми индекси.

Баланс усули ёрдамида дўкондаги моддий ресурслар баланси, савдо ташкилоти доирасида товарлар ҳаракати балансини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$\sum_i a_i + \sum_j b_j = \sum_n c_n + \sum_m k_m$$

бу ерда $\sum_i a_i$ – йил бошидаги қолдиқ, $\sum_j b_j$ – йил давомида олиб келинган моддий ресурслар, $\sum_n c_n$ – йил давомида харажат қилинган моддий ресурслар, $\sum_m k_m$ – йил охиридаги қолдиқ.

Корреляцион-регрессион таҳлил ёрдамида белгилар ўртасидаги боғланишни ифодаловчи регрессия тенгламаси аниқланади ва уни маълум эҳтимол (ишонч даражаси) билан баҳолаш, боғланиш зичлигини аниқлаш ўрганилади.

Масалан, тумандаги оила аъзоларининг ўртача бир ойлик даромади (X) билан бир суткада ҳар бир оила аъзоси томонидан истеъмол қилинадиган ёғ миқдори (Y) ўртасидаги корреляцион боғланиш учун регрессия тенгламаси $Y = a + kX$ кўринишда бўлиши мумкин, бу ерда a, k — кузатиш натижалари асосида аниқланадиган регрессия тенгламаси коэффициентлари.

1.3. Моделлаштириш босқичлари

Бу бўлимда иқтисодий-математик моделлаштириш босқичларининг мазмуни ва унинг кетма-кетлигини баён қиламиз.

Босқичлар қуйидагилардан иборат:

1. Иқтисодий муаммони қўйилиши ва уни таҳлил қилиш.

Мақсаднинг қўйилиши моделлаштиришда муҳим ўрин эгаллайди. Аниқ қўйилган мақсад асосий элементлар ва улар орасидаги боғланиш таркиби ва миқдорий характеристикасини аниқлайди.

Моделлаштиришнинг дастлабки босқичида маълумотлар тўпланади ва таҳлил қилинади. Таҳлил учун танланган маълумотларнинг тўғрилиги бу моделлаштиришнинг сўнги натижаларига боғлиқ. Тўпланган маълумотлар абсолют миқдорларда ва ягона ўлчов бирликларда ифодаланиши керак. Бу босқичда моделлаштириладиган объект ва уни абстракциялашнинг муҳим томонлари ва хоссалари белгиланади. Объектнинг структураси ва элементлари орасидаги асосий боғланишлар, унинг ўзгариши ва ривожланиши бўйича гипотезаларни шакллантириш масалалари ўрганилади.

2. Математик моделлар қуриш.

Бунда иқтисодий муаммолар конкрет математик боғланишлар ва муносабатлар (функция, тенгсизлик ва ҳоказо) шаклида ифодаланади.

Математик моделлар қуриш жараёни математика ва иқтисодиёт бўйича илмий билимларнинг ўзаро уйғунлашувидан иборат. Албатта, бунда математик моделни яхши ўрганилган математик масалалар синфига тегишли бўлиши учун ҳаракат қилинади. Бироқ, шундай бўладики, иқтисодий масалани моделлаштириш олдиндан маълум бўлмаган математик структураларга олиб келиши ҳам мумкин. XX аср ўрталаридан бошлаб, иқтисодиёт фани ва унинг амалиёти эҳтиёжларидан келиб чиқиб, математик дастурлаш, ўйинлар назарияси, функционал анализ, ҳисоблаш математикаси фанлари ҳам ўз ривожини топди. Иқтисодиёт фанларининг ривожланиши, айтиш жоиз-ки, математиканинг янги бўлимларини очилиши учун муҳим восита бўлиши мумкин.

3. Моделни математик таҳлил қилиш.

Бу босқичнинг мақсади – моделнинг умумий хоссаларини ифодалашдан иборат. Бу ерда тадқиқотларнинг математик усуллари қўлланилади. Энг муҳим жойи – тузилган моделларнинг ечимга эгалигини исботлашдир. Агар математик масаланинг ечимга эга эмаслиги исбот қилинса, у ҳолда қўйилган математик модел рад этилади. Шунга мувофиқ, иқтисодий масаланинг қўйилиши ёки математик моделини бошқача кўринишлари тадқиқ этилади. Моделларни аналитик тадқиқ этиш уларни эмпирик (сонли) тадқиқ қилишга нисбатан устуликка эга, чунки, олинган хулосалар моделлардаги ички ва ташқи параметрларнинг ҳар хил қийматларида ҳам ўз кучини сақлайди.

Умуман олганда, мураккаб иқтисодий масалалар қийинчиликлар билан аналитик тадқиқотларга келтирилади. Агар уларни аналитик усулларга келтириб бўлмаса, у ҳолда масалани сонли усулларидан фойдаланиб ечилади.

4. Дастлабки маълумотларни тайёрлаш.

Моделлаштиришда маълумотлар тизимига муҳим талаблар қўйилади. Шу билан биргаликда, маълумотларни олиш учун реал имкониятлар амалий мақсадларга мўлжалланган моделларни танлаш учун маълум чегаралар қўяди. Маълумотларни тайёрлаш жараёнида эҳтимоллар назарияси, математика, статистика, назарий статистика усулларидан кенг кўламда фойдаланилади.

5. Сонли ечимлар.

Бу босқич қўйилган масалани сонли ечиш учун алгоритмлар, компьютер учун дастурлар тузиш ва бевосита ҳисоблашлар ўтказиш учун мўлжалланган. Одатда иқтисодий-математик моделларда ҳисоб-китоб ишлари кўпвариантли характерга эга. Замонавий компьютерларнинг пайдо бўлиши бу ишларни енгиллаштиради. Сонли усуллар ёрдамида қилинган тадқиқотлар аналитик тадқиқотларни тўлдиради. Ҳозирги пайтда сонли усуллар билан ечиладиган иқтисодий масалалар синфи аналитик тадқиқотларга нисбатан кўпроқ ҳисобланади.

6. Сонли натижалар таҳлили ва унинг тадбиқлари.

Бу сўнги босқичда моделлаштириш натижаларининг тўғрилиги ва тўлалиги ҳақидаги саволларга жавоб олинади. Назарий хулосалар ва модел ёрдамида бевосита олинган сонли натижалар ўзаро таққосланади. Шунга қараб, қўйилган иқтисодий масала ва моделларининг ютуқ ёки камчиликлари аниқланади.

Иқтисодий-математик модел аниқлангандан сўнг, унда иштирок этаётган омилларининг натижавий белгига таъсирининг мукаммаллиги баҳоланади. Агар модел ва унга киритилган барча омиллар талаб этилган эҳтимол билан моҳиятли бўлса, у адекват модел дейилади. Адекват модел бўлмаган ҳолда унинг кўриниши ўзгартирилади. Янги модел олдингисидан моҳиятсиз омилларини чиқариш йўли билан аниқланади.

Шу натижалар асосида моделларни такомиллаштириш, уларни ахборот ва математик таъминлаш йўналишлари аниқланади.

Моделлаштиришдан амалий мақсадларда фойдаланишда иқтисодий таҳлил, бошқариш, режалаштириш соҳасидаги мутахассислар муҳим рол ўйнайдилар.

Асосий мавзулар

- модел ва моделлаштириш тушунчалари
- математик модел тушунчаси, унинг хусусиятлари
- моделларни синфлаштириш
- иқтисодий-математик модел хусусиятлари, аҳамияти
- моделлаштириш босқичлари

Таянч иборалар, формулалар

- модел
- математик модел
- моделлаштириш
- иқтисодий-математик модел
- иқтисодий-математик моделлаштириш
- моддий моделлар
- абстракт моделлар
- функционал модел, $Y = D(X)$
- структурали моделлар, $\Phi_i = (A, X),\ i \in J$
- иммитацион моделлар
- назарий-аналитик моделлар
- татбиқий моделлар

Саволлар

- «Модел» ва «моделлаштириш» нима?
- Моделлари қандай синфларга бўлинади?
- Моделлаштириш босқичлари қандай?
- Иқтисодий-математик модел хусусиятлари нималардан иборат?

2-боб. Истеъмол

2.1. Фойдалилик функцияси

Иқтисодий-математик моделларни ўрганишни микроиқтисод жараёнларидан бошлаймиз. Микроиқтисодий таҳлил истеъмолчиларнинг товарларга бўлган талаби билан ишлаб чиқарувчиларнинг шу товарларни бозордаги мувозанатини баҳолар ёрдамида ўрнатилиши асосида олиб борилади. Талаб ва таклиф ишлаб чиқариш ва истеъмол билан боғлиқдир. Агар ишлаб чиқаришни корхоналар энг катта фойдани мўлжаллаб, ташкил қилишса, истеъмолчилар истеъмолни энг фойдалилигини танлайдилар.

Истеъмол товарлари векторини $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ деб белгилаймиз. Буни ***истеъмол режаси*** вектори дейилади. Бу векторларни бир-биридан фарқлашда ***афзаллик функцияси*** деб аталувчи $u(x)$ функция ишлатилади. Агар x ва y товар векторлари учун $u(x) > u(y)$ бўлса, x вектор y га нисбатан афзалроқ деб қабул қилинади. Шунинг учун ҳам $u(x)$ ни x режанинг фойдалилик ўлчови сифатида қараш мумкин. Афзаллик функцияни бу маънода ***фойдалилик функцияси*** деб ҳам аталади. Истеъмолчи товарларни шу функция қийматига қараб танлашга ҳаракат қилади.

Истеъмолчининг товарларга бўлган талабини аниқловчи фойдалилик функцияси қуйидаги шартларни қаноатлантириши табиийдир: x-векторнинг координаталари манфий бўлмаган қийматларни қабул қилсин ва $u(x)$ функция ўсувчи ёки ҳеч бўлмаганда товарлар сони ўсиши билан, камаювчи бўлмасин: яъни $x \le y$ бўлганда ($x \le y$ тартибни $x_i \le y_i, \quad i = \overline{1,n}$ деб тушунилади),

$$u(x) \le u(y) \qquad (1)$$

бўлсин. Агар $u(x)$ дифференциалланувчи бўлса, бу шартни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$u_i(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i} \ge 0, \quad i = 1, 2, ..., n. \qquad (2)$$

(1) шарт фойдалилик функциясини ўрганишда ва уни қуришда муҳим аҳамиятга эга. Шу асосда бефарқлик сирти тушунчасини киритамиз:

$$u(x) = c \qquad (3)$$

шартни қаноатлантирувчи x-векторлар тўпламини *бефарқлик сирти* дейилади. Бефарқлик сирти – бу истеъмолчи учун бир хил фойдаликка эга бўлган истеъмол режаси векторларидан ташкил топган тўпламдир.

Бефарқлик сиртлари хоссаларини кўриб чиқамиз. Фойдалилик функцияси дифференциаллануvчи бўлиб, қуйидаги муносабат ўринли бўлсин:

$$u_i(x)=\frac{\partial u}{\partial x_i}>0,\ i=1,2,...,n \qquad (4)$$

Яъни, $u(x)$ функция ҳар бир аргумент бўйича қатъий ўсувчи бўлсин. Аргументларнинг кичик ўзгаришлари бўйича афзаллик функциясининг ўзгариши тўла дифференциал орқали ифодаланади:

$$du(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}dx_i=\sum_{i=1}^{n}u_i dx_i$$

(3) шартга кўра бефарқлик сиртида ётувчи x нуқтадан $x+\Delta x$, $\Delta x=(\Delta x_1,...,\Delta x_n)$ нуқтага ўтилса, фойдалилик функцияси қиймати ўзгармайди, яъни:

$$u(x+\Delta x)=u(x).$$

Демак,

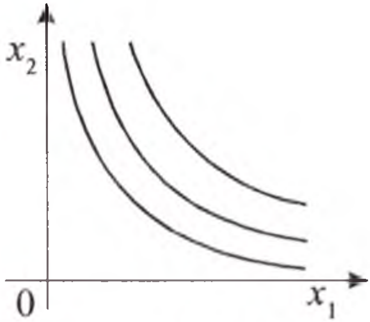
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\Delta x_i=\sum_{i=1}^{n}u_i dx_i=0 \qquad (5)$$

тенглик ўринли бўлади. Агар j-нчи ва k-нчи маҳсулотлардан бошқаси ўзгармаса, у ҳолда (5) дан $u_k dx_k+u_j dx_j=0$ келиб чиқади. Бундан эса

$$\frac{dx_j}{dx_k}=-\frac{u_k(x)}{u_j(x)} \qquad (6)$$

ўринли бўлади. $-\dfrac{u_k(x)}{u_j(x)}$ миқдори j-нчи ва k-нчи *маҳсулотларни эквивалент алмаштириш коэффициенти* дейилади. (4) шартга кўра бу коэффициент манфий бўлади.

Агар моделда иккита маҳсулот қаралаётган бўлса, бефарқлик чизиқларини текисликда тасвирлаш мумкин (2.1- расм).



2.1-расм.

Бефарқлик чизиқлари $\frac{dx_1}{dx_2} = -\frac{u_2(x)}{u_1(x)} < 0$ муносабатни қаноатлантиради ва ўзаро кесишмайди.

Фойдалилик функцияларини тузиш истеъмолчиларнинг товарларни сотиб олишга қилган харажатлари, аҳолининг турмуш тарзи, аҳоли даромадлари ва ҳоказоларга боғлиқ бўлиб, уни кўринишини ахтаришда математиканинг турли усулларидан, масалан, корреляция-регрессия таҳлилидан фойдаланилади. Дастлабки фойдалилик функциялари қуйидаги квадратик функция кўринишида топилган:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + 0{,}5 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j\,, \qquad (7)$$

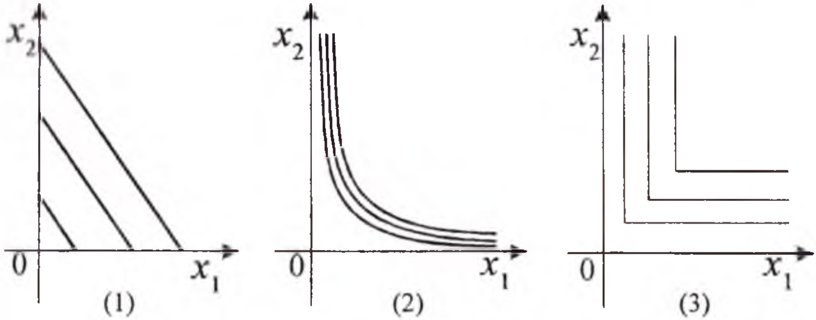
бу ерда b_i, b_{ij} $(i=\overline{1,n}\,;\, j=\overline{1,n})$ – маълум коэффициентлар.

Ҳозирги пайтда фойдалилик функцияларининг ҳар хил кўринишлари мавжуд. Кўп қўлланадиган фойдалилик функцияларидан бири

$$u\,(x) = a_i \ln(x_i - x_i^0), \quad i = 1,2,...,n \qquad (8)$$

бўлиб, бу ерда $x_i > x_i^0 > 0$ ва x_i^0 – истеъмол қилинадиган товарнинг энг кичик қиймати, α_i коэффициентлар корреляцион назарияси усуллари ёрдамида топилади.

Қуйида маҳсулотлар сони иккита бўлган ҳолда иқтисодиёт назариясида ва амалиётида кенг фойдаланадиган функциялар билан танишамиз. (2.2-расм)



2.2-расм. Фойдалилик функцияларининг бефарқлик чизиқлари.

1. Маҳсулотларни ўзаро тўла алмаштириш асосидаги фойдалилик функцияси:

$$U = b_1x_1 + b_2x_2, \quad b_1, b_2 \geq 0$$

2. Неоклассик фойдалилик функцияси:

$$U = x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \quad \text{бу ерда } 0 \leq b_1 + b_2 \leq 1$$

3. Маҳсулотларни ўзаро тўла тўлдириш асосидаги фойдалилик функцияси:

$$U = min\left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}\right), \quad b_1, b_2 > 0$$

2-кўринишдаги фойдалилик функциялар микроиқтисодиёт назариясида, 1, 3-кўринишдаги функциялар чизиқли иқтисодиётда, жумладан, чизиқли дастурлашда ўрганилади.

2-кўринишдаги неоклассик фойдалилик функцияси учун камаювчи лимит фойдалилиги гипотезаси ўринли, яъни агар фақат биринчи турдаги маҳсулотни истеъмол қилиб, иккинчиси ўзгармаса, истеъмолчи учун фойдалилик ошиб боради. Аммо бу фойдалиликнинг ўсиши истеъмолнинг ўсишидан кичик бўлади:

$$\partial U / \partial x_i > 0, \; \partial^2 U / \partial x_i^2 < 0, \quad i = 1, 2. \qquad (9)$$

Бу шартни қолган 1, 3 функциялар қаноатлантирмайди. Лекин ҳар бири учун бефарқлик чизиқлари ўзаро кесишмайди ва бу чизиқлар ботиқ бўлади. Алоҳида истеъмолчи учун фойдалилик функциясини топиш иқтисодиётнинг муҳим муаммоларидан ҳисобланади.

Иккита маҳсулотдан бирига бўлган талабнинг ортиши иккинчисига бўлган талабнинг пасайишига олиб келса, у ҳолда бу маҳсулотларни ўзаро алмашинувчи маҳсулотлар дейилади (масалан, чой ва кофе). 1-кўринишдаги фойдалилик функцияси қиймати ўзгармас бўлган ҳолда x_1 нинг ортиши, x_2 нинг камайишига олиб келади. 3-куринишдаги фойдалилик функциясида эса $\frac{x_1}{x_2}=\frac{b_1}{b_2}=const$ бўлса, x_1 нинг ортиши x_2 нинг ҳам пропорционал равишда ортишини келтириб чикаради. Бундай маҳсулотларни ўзаро тўлдирувчи маҳсулотлар дейилади (масалан чой ва шакар).

2.2. Лимит фойдалилик ва алмаштиришнинг лимит нормаси

Истеъмол назариясининг асосий тушунчаларидан лимит фойдалилик ва алмаштиришнинг лимит нормасидир. $U = U(x_1, x_2)$ фойдалилик функцияси берилган бўлсин. Биринчи маҳсулотни истеъмол қилиш ўзгармас бўлганда иккинчи маҳсулот истеъмолини кичик ўзгариши ҳисобига фойдалилик функцияси ўзгаришининг лимит қийматини иккинчи маҳсулотнинг *лимит фойдалилиги* дейилади. Фойдалилик функциясининг x_1, x_2 лар бўйича хусусий ҳосилалари биринчи ва иккинчи маҳсулотнинг лимит фойдалилигини беради.

Биринчи маҳсулотни dx_1 га камайтирилса, фойдалилик олдинги даражага чиқиши учун иккинчи маҳсулотни dx_2 га орттириш керак. Шундай қилиб, биринчи маҳсулотни иккинчи маҳсулотга алмаштирилади. Ушбу

$$M = -\frac{dx_2}{dx_1}\bigg|_{U = const}. \qquad (1)$$

нисбат *алмаштиришнинг лимит нормаси* дейилади.

Маълумки, $dx_2/dx_1 \approx \Delta x_2/\Delta x_1$. Унда $-\Delta x_2/\Delta x_1$ бўлинмани биринчи маҳсулотни иккинчисига *алмаштириш нормаси* дейилади. Бу норма биринчи маҳсулот истеъмоли 1 бирликка камайса (кўпайса), иккинчи маҳсулот истеъмоли қанчага кўпайиш (камайиш) кераклигини кўрсатади. Албатта, бунда истеъмолнинг умумий фойдалилиги ўзгармаслиги талаб қилинади.

Агар $A(x_1, x_2)$ ва $B(x_1+dx_1, x_2+dx_2)$ нуқталар битта бефарқлик чизигида ётса, у ҳолда

$$U(x_1, x_2) = U(x_1+dx_1, x_2+dx_2) \qquad (2)$$

ўринли бўлади. Бундан

$$\frac{\partial U}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial U}{\partial x_2}dx_2 = 0 \qquad (3)$$

ўринли, ва бу тенгликка асосан алмаштиришнинг лимит нормаси учун қуйидаги формула келиб чиқади:

$$M = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}} \qquad (4)$$

Демак, алмаштиришнинг лимит нормаси лимит фойдаликларнинг нисбати билан ифодаланар экан.

Мисол. $u = 4lnx_1+6lnx_2$ фойда функцияси берилган бўлсин.

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = \frac{4}{x_1}, \qquad \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{6}{x_2},$$

бўлгани учун алмаштиришнинг лимит нормаси $M = 2/3$ бўлади.

x_1 ва x_2 ларнинг қийматлари бўйича алмаштиришнинг лимит нормасини топиш мумкин.

Фойдалилик функцияси кўп омилларга боғлиқ бўлган ҳолда, одатда, статистик маълумотлар асосида ахтарилади.

Масалан, математик модел сифатида квадратик функция олинган бўлсин. Фараз қилайлик, a — бирор оиланинг аъзолари сони, x_1 — шу оилада озиқ-овқат маҳсулотларини истеъмол қилиш, x_2 — саноат товарларини истеъмол қилиш, x_3 — пулли хизматлар тўловини (пулда) ифодалаган бўлсин. У ҳолда статистик маълумотларга биноан фойдалилик функцияси қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$u(x) = (1-1,841a)\,x_1 + (1-2,054a)\,x_2 + (1-2,116a)x_3 +$$
$$+0.668 \cdot 10^{-4}x_1^2 + 1,23 \cdot 10^{-4}x_1x_2 + 1,243 \cdot 10^{-4}x_1x_3 +$$
$$+0,506 \cdot 10^{-4}x_2^2 + 1,104 \cdot 10^{-4}x_2x_3 + 0,492 \cdot 10^{-4}x_3^2$$

2.3. Элементар истеъмол назарияси. Бюджет чизиги

Ҳар бир истеъмолчининг афзаллик муносабатлари бефарқлик чизиқлар ёрдамида, истеъмол имкониятлари эса бюджет чегаралашлар орқали ифодаланади.

Фараз қилайлик, қандайдир оиланинг бюджети 30000 сўм бўлсин ва бу бюджет 2 хил товар: уст-бош ва озиқ-овқатлар орасида тақсимлансин. Уст-бош (товар y) бирлигининг нархи 3000 сўм, озиқ-овқатники (товар x) эса 750 сўм бўлсин. У ҳолда қуйидаги муносабатни ёзиш мумкин:

$$3000\,y + 750\,x = 30000. \qquad (1)$$

Бу тенглама билан аниқланадиган тўғри чизиқни *бюджет чизиғи* деб аталади.

Бу ерда x га қиймат бериб, y ни ёки аксинча y га қиймат бериб, x ни топиш мумкин.

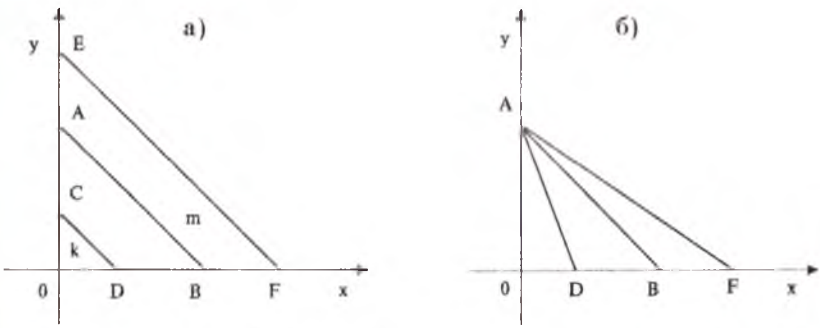
Масалан: $x = 20$ бўлсин, у ҳолда $3000y = 30000 - 750 \cdot 20$ ёки $y = 5$ бўлади. Демак, $x = 20$ бўлса $y = 5$ бўлади ёки x товардан 20 та, y товардан 5 та сотиб олиш мумкин.

Бюджет чизиғининг умумий кўриниши қуйидагича ифодаланади:

$$p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = d\,, \qquad (2)$$

бу ерда p_i, x_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) — истеъмол қилинадиган товарлар баҳоси ва миқдори, d — оила бюджети (даромади).

Икки хил истеъмол товарлар учун бюджет чизиғи графигини ясаймиз:



2.3 — расм. Бюджет чизиғининг оила даромади ва товар баҳоси ҳар хил бўлгандаги ўзгариши.

Чизмадан кўринадики, оила AB бюджет чизиғидан пастда жойлашган (масалан, k нуқтаси) хоҳлаган вариант билан кўрсатилган товарларни сотиб олиш мумкин, аммо m нуқтадаги вариантдан фойдаланиш мумкин эмас, чунки оила бюджети чегараланган.

Агар оила даромади камайса, бюджет чизиғи, баҳо ўзгармаганда, AB чизиғига параллел равишда пастдан ўтади: CD-чизиғи. Бунда оила озроқ товар сотиб олишига тўғри келади. Оила даромади кўпайганда эса, баҳо ўзгармас бўлганда, кўпроқ товар сотиб олиш имконияти пайдо бўлади ва EF бюджет чизиғи AB чизиғига параллел равишда юқоридан ўтади.

Агар даромад ва баҳо бир хил ўзгарса (пропорционал равишда), бюджет чизиғи ўзгармайди.

Агар оила даромади ўзгармасдан, x ва y товарларга баҳо камайса, кўпроқ товар сотиб олиниши мумкин бўлади, шунинг учун бюджет чизиғи ўнгга силжийди, ва аксинча, x ва y товарларга баҳо кўтарилса, товар сотиб олиш имконияти пасаяди ва бюджет чизиғи чапга силжийди, масалан, б) расмдаги AD бюджет чизиғи товарлар баҳосини ортиши, AF эса товарлар баҳосини камайиши туфайли ҳосил бўлди.

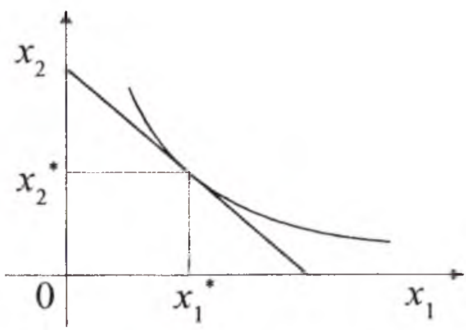
Шундай қилиб, даромад ва баҳони ўзгариши бюджет чизиғи ҳолатини ўзгартиради.

Истеъмолни оптимал режалаш модели

Истеъмолчи учун бюджет чегараларида энг афзал товарлар аралашмаси (x_1^*, x_2^*) – ***оптимал истеъмол режаси*** дейилади. ***Истеъмолни оптимал режалаш модели*** қуйидаги чизиқли дастурлаш масаласига келади:

$$U \to max, (p,x) \le d, \;\; p,x \ge 0 \qquad (3)$$

бу ерда U – фойдалилик, мақсад функцияси; p, x – товарларнинг баҳолари ва истеъмоли, d – бюджет ҳажми. (3) масаланинг ечими (x_1^*, x_2^*) – оптимал истеъмол режаси – график усулида топилиши мумкин. Бу ечимга бефарқлик чизиғига бюджет чизиғининг уриниш нуқтаси мос келади (2.4-расм):



2.4 – расм.

Юқорида айтилганларга асосан оптимал истеъмол режаси баҳолар ва даромаднинг ўзгаришига боғлиқ равишда ҳар хил бўлади. Бошқача қилиб айтганда,

$$x_1^* = D_1(p_1,p_2,d), \qquad x_2^* = D_2(p_1,p_2,d) \qquad (4)$$

бу ерда D_1 ва D_2 лар қавс ичида кўрсатилган катталикларнинг қандайдир функцияларидир. (4) функцияларни ***хўжаликнинг талаб функциялари*** дейилади. Бу функциялар ёрдамида баҳолар ўзгармас бўлганда, даромаднинг ўзгаришига қараб, товарлар истеъмоли ўзгаришини, ёки даромад ўзгармаганда, баҳолар ўзгаришининг товарлар истеъмолига таъсир этишини ўрганилиши мумкин.

Асосий мавзулар

- истеъмол режалари, бефарқлик чизиқлар, фойдалилик функцияларини микроиқтисодий таҳлилда қўллаш
- лимит фойдалилик ва алмаштиришнинг лимит нормаси
- элементар истеъмол назарияси; оила (якка тартибдаги хўжалик) бюджети чизиғи, оптимал истеъмол модели, истеъмолчиларнинг талаб функциялари

Таянч иборалар, формулалар

- истеъмол режаси, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
- фойдалилик функцияси, $u(x)$
- бефарқлик сирти, чизиғи, $\{x: u(x)=const\}$
- маҳсулотларни эквивалент алмаштириш коэффициенти, $\frac{dx_j}{dx_k} = -\frac{u_k(x)}{u_j(x)}$
- маҳсулотларни ўзаро тўла алмаштириш асосидаги фойдалилик функцияси, $U = b_1x_1 + b_2x_2$, $b_1, b_2 \geq 0$
- неоклассик фойдалилик функцияси, $U = x_1^{b_1} x_2^{b_2}$, $b_1 + b_2 \leq 1$
- махсулотларни ўзаро тўла тўлдириш асосидаги фойдалилик функцияси, $U = min\left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}\right)$, $b_1, b_2 > 0$
- камаювчи лимит фойдалилиги гипотезаси,

$$\partial U / \partial x_i > 0, \quad \partial^2 U / \partial x_i^2 < 0, \quad i = 1,2$$

- лимит фойдалилик, $\partial U / \partial x_i$
- алмаштиришнинг лимит нормаси, $M = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_1}}{\frac{\partial U}{\partial x_2}}$
- алмаштириш нормаси, $-dx_2 / dx_1$
- бюджет чизиғи, $p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = d$
- оптимал истеъмол режаси, (x_1^*, x_2^*)
- истеъмолни оптимал режалаш модели, $U \to max$, $(p, x) = d$
- хўжаликнинг талаб функциялари, $x_1^* = D_1(p_1, p_2, d)$, $x_2^* = D_2(p_1, p_2, d)$

Саволлар

- Фойдалилик функцияларнинг энг муҳим хоссалари нимадан иборат?
- Нима учун бефарқлик чизиқлари ўзаро кесишмайди?
- Неоклассик функцияси хусусиятлари қандай?
- Камаювчи лимит фойдалилиги гипотезасини шарҳлаб беринг
- Алмаштиришнинг лимит нормаси ва алмаштириш нормаларнинг иқтисодий маъноси қандай?
- Даромад ва баҳони ўзгариши бюджет чизиғи ҳолатига қандай таъсир этади?
- Истеъмолни оптимал режалаш модели доим ечимга эга бўладими? Ечим ягона бўладими?

Машқлар

1-машқ. $u=15lnx_1+24lnx_2$ фойдалилик функцияси берилган бўлсин. Алмаштиришнинг лимит нормасини топинг.

2-машқ. $y=ax_1^{\alpha}\cdot x_2^{\beta}$ Кобб-Дуглас функцияси ва $y=a_0+a_1x_1+a_2x_2$ чизиқли ишлаб чиқариш функцияси учун алмаштиришнинг лимит нормаларини топинг.

3-машқ. 150 y + 500 x = 10000 бюджет тенгламаси графигини тузинг ва бир нечта ечимларини топинг.

4-машқ. Юқоридаги тенгламада бюджет икки баробар ортганда графигини ясанг.

5-машқ. Юқоридаги тенгламада баҳолар 75 ва 250 бўлганда графигини ясанг.

6-машқ. $u = 10lnx_1+ 15lnx_2 \rightarrow max$, $150x_1+200x_2 \leq 5000$, x_1, $x_2 \geq 0$ оптимал истеъмол модели ечимини график усулида топинг.

7-машқ. $u = 10x_1+ 25x_2 \rightarrow max$, $150x_1+200x_2 \leq 5000$, x_1, $x_2 \geq 0$ оптимал истеъмол модели ечимини график усулида топинг.

3-боб. Ишлаб чиқариш

Ҳар қандай иқтисодий ишлаб чиқариш жараёнини, у хоҳ халқ хўжалиги бўлсин, ёки моддий ишлаб чиқариш соҳаси бўлсин, иқтисодий туман, ишлаб чиқариш бирлашмаси, корхона, алоҳида ишлаб чиқариш цехи ёки бўлим бўлсин, унинг ишлаб чиқариш технологиясини моделлаштириш моддий ишлаб чиқариш қонуниятлари, тақсимоти ва истеъмол асосида амалга оширилади.

Китобнинг олдинги бўлимларидан кўринадики, ўрганилаётган иқтисодий жараёнларни моделлаштиришда маълум чегаралар қўйилади. Шундайларидан бири чизиқлилик талабидир. Шубҳасиз, чизиқли моделлар содда бўлиб, иқтисодий жараённи моделлаштиришда улар бошланғич босқич ҳисобланади. Тузилган чизиқли моделларнинг адекватлиги изланувчининг талабига мос бўлмаган ҳолларда ундан фарқли ночизиқли моделларни ахтаришга тўғри келади. Бундай моделларнинг аналитик кўриниши мураккаброқ бўлсада, уларнинг ўрганилаётган иқтисодий жараённи ифодалаши аниқроқ бўлади.

Чизиқли бўлмаган моделлар назарий жиҳатдан ҳам муҳим ҳисобланади. Шу билан биргаликда ҳозирги пайтда йирик ҳажмдаги ишлаб чиқаришга эга бўлган иқтисодий жараёнларни ўрганиш, уларни моделлаштириш қийин масалалардан ҳисобланади, чунки ҳар доим ҳам модел қуриш учун ишлаб чиқаришнинг ички структураси ҳақидаги зарурий статистик маълумотларни олиб бўлавермайди.

Бу бобда ишлаб чиқаришда иқтисодий-математик моделлаштиришга оид тушунчалар ва баъзи моделлар ўрганилади.

3.1. Ишлаб чиқариш функциялари

Америкалик иқтисодчи олимлар П. Дуглас ва Д. Коббнинг – «Ишлаб чиқариш назарияси» номли мақоласида, АҚШ саноатининг 1899-1922 йиллардаги статистик маълумотлар асосида, қайта ишлаш саноатидаги ишлаб чиқарилган маҳсулот ва унга таъсир этувчи капитал ва меҳнат харажатларининг боғланишини акс эттирувчи математик моделни топиш масаласи ҳал қилинган.

Улар, статистик маълумотларга асосланган ҳолда, ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажми Y, асосий капитал ҳажми K ва меҳнат харажатлари L орасидаги боғланишни $Y=AK^{\alpha}L^{\beta}$ кўринишда таклиф этганлар. Бу ерда $A > 0, \alpha, \beta \geq 0, \ \alpha+\beta=1$.

A, α, β нинг сонли қийматлари Y, K ва L нинг юқорида кўрсатилган йиллар мобайнида кузатилган қийматлари бўйича энг кичик квадратлар усули ёрдамида топилиб, $Y=1{,}01K^{0{,}25}L^{0{,}75}$ эканлиги аниқланган. Топилган муносабатнинг амалдаги боғланишдан катта фарқ қилмаслиги текширилган.

Дуглас-Коббларнинг бу тадқиқоти кўп иқтисодчиларнинг диққатини ўзига тортди. Бу тадқиқотга асосланган ҳолда, иқтисодий жараёнларни математик моделларини топишда муҳим рол ўйновчи ишлаб чиқариш функциялари назарияси яратилди. Қуйида ишлаб чиқариш функцияси тушунчаси ва унинг хоссалари устида тўхталиб ўтамиз.

Ишлаб чиқариш функцияси аналитик ёки жадвал кўринишда берилиши мумкин. Фараз қилайлик $x_1,\dots, x_n$, $n \geq 1$ ишлаб чиқариш ресурслари миқдорларини, $y_1,\dots y_m$, $m \geq 1$ ишлаб чиқарилган маҳсулотлар ҳажмини билдирсин, $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ эса қандайдир параметрлар бўлсин. $x = (x_1,\dots, x_n)$, $y=(y_1,\dots,y_m)$ ва $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_k)$ векторларни қарайлик. x-ресурслар вектори, y - ишлаб чиқариш вектори, α эса ишлаб чиқариш функциясининг параметрлари вектори деб аталади. Бу белгилашлар бўйича ишлаб чиқариш функциясини умумий

$$F(x, y, a) = 0 \qquad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин. Хусусан (1) ни y га нисбатан ечиш мумкин бўлса, ишлаб чиқариш функцияси

$$y = f(x, a) \qquad (2)$$

кўринишга эга бўлади.

Қуйида соддалик учун ишлаб чиқариш функцияларини 1 та маҳсулот ва бир нечта ресурслар, ҳамда α параметрнинг қиймати маълум бўлган ҳолда ўрганамиз. Бу ҳолда ишлаб чиқариш функцияси

$$y = f(x) \qquad (3)$$

кўринишни олади. Ишлаб чиқариш функцияларини умумий тарзда ўрганишда уларга нисбатан ҳар хил шартлар: узлуксизлик, ҳосилаларга эга бўлишлик ва ҳ.к. шартлари қўйилади. Қуйида мисоллар кўрамиз.

1. Фараз қилайлик, ишлаб чиқаришга жалб этилган (меҳнат) ресурсларининг ҳар бирисиз маҳсулот етиштириб бўлмайди, уларни бошқа ресурслар билан алмаштириш эса маъносиз. Бошқача қилиб айтганда, жалб этилган ресурслардан энг камида биттаси йўқлигидан

$y = 0$ бўлади. Бундай шартни қаноатлантирувчи ишлаб чиқариш функциялари кўп, масалан

$$y = x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}, \quad x_i \geq 0,\ 0 < \alpha_i < 1,\ i = \overline{1,n}.$$

II. Ишлаб чиқариш харажатлари кўпайиши билан маҳсулот ишлаб чиқариш камаймасин. Бошқача айтганда,

$$x_i \leq z_i,\ i = \overline{1,n} \text{ дан } f(x) \leq f(z),\ z = (z_1, \dots, z_n). \quad (4)$$

Бундай ишлаб чиқариш жараёнига мос келувчи ишлаб чиқариш функцияси $f(x)$ (кўриниши маълум бўлмаса да)

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \geq 0, \quad i = \overline{1,n} \quad (5)$$

шартни қаноатлантиради. $\dfrac{\partial f}{\partial x_i} = \upsilon_i$, миқдорни *i-ресурснинг лимит самарадорлиги* дейилади. Лимит самарадорлик x_i-ресурс миқдорининг ўзгаришини ишлаб чиқариш маҳсулот миқдорининг ўзгаришига таъсирини кўрсатади.

Шуни таъкидлаш керакки, (4) шарт табиий бўлсада, лекин у ҳар доим ҳам бажарилавермайди. Масалан, қишлоқ хўжалигида ғалла етиштиришда минерал ўғитни кўпайтирилса, аввалига ғалла ишлаб чиқарилиши кўпаяди, кейин эса камайиб кетиши мумкин.

Ресурслардан фойдаланиш самарадорлигини ўрганиш учун қуйидаги *ресурснинг ўртача самарадорлиги* (унумдорлиги) тушунчаси киритилади:

$$\mu_i = \frac{f(x)}{x_i}. \quad (6)$$

Албатта, ўртача самарадорлик лимит самарадорликдан фарқ қилади. Масалан, $y = x^\alpha, x \geq 0,\ 0 < \alpha < 1$ ишлаб чиқариш функцияси учун лимит самарадорлик $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1} > 0$, ўртача самарадорлик $\mu = \dfrac{f(x)}{x} = x^{\alpha-1}$. Бу ишлаб чиқариш функцияси учун $0 < \alpha < 1$ бўлганда, лимит самарадорлик ўртача самарадорликдан кичик бўлади.

Маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ўзгаришини характерлайдиган лимит ва ўртача самарадорликдан ташқари ишлаб чиқариш эластиклиги тушунчасидан ҳам фойдаланилади. *i*-нчи ресурснинг лимит самарадорлигини ўртача самарадорликка нисбатини *ишлаб чиқаришнинг харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклиги* дейилади ва қуйидагича ёзилади:

$$\varepsilon_i(x) = \frac{\upsilon_i}{\mu_i} = \frac{x_i \partial f}{f(x) \cdot \partial x_i} \qquad (7)$$

$\varepsilon_i \approx (\Delta f / f(x)) / (\Delta x_i / x_i)$ тақрибий формуладан келиб чиқадики, эластиклик – ресурс харажатлари 1% ортганда, ишлаб чиқариш ҳажми қанча фоизга ошишини кўрсатади.

$\varepsilon_i(x)$ миқдорни унга тенг кучли бўлган бошқа формула орқали ҳам ифодалаш мумкин. Агар $x_i > 0$ ва $f(x) > 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{dx_i}{x_i} = d(\ln x_i)$ ва

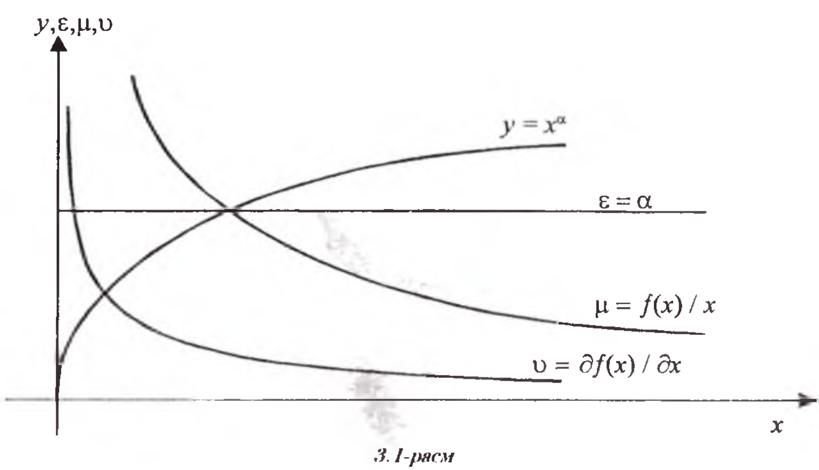
$\frac{dx}{f(x)} = d(\ln f(x))$ бўлгани учун (7) муносабатни

$$\varepsilon_i(x) = \frac{\partial(\ln f(x))}{\partial(\ln x_i)}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Масалан, $y = x^\alpha$, $x > 0$ бир ресурсли ишлаб чиқариш функцияси учун ишлаб чиқариш эластиклигини ҳисоблайлик:

$$\varepsilon(x) = \frac{\partial(\ln f(x))}{\partial(\ln x)} = \frac{\partial(\alpha \ln x)}{\partial(\ln x)} = \alpha$$

Демак, бу ишлаб чиқариш функцияси ресурснинг ўзгаришига нисбатан ўзгармас ишлаб чиқариш эластикликка эга экан. 3.1-расмда $y = x^\alpha$ ($x > 0$, $0 < \alpha < 1$) ишлаб чиқариш функцияси, унинг лимит ва ўртача эффективлиги, ҳамда ресурс бўйича ишлаб чиқариш эластиклиги тасвирланган.



3.1-расм

III. Маълумки, битта(i-нчи) ресурс миқдорини кўпайтириб, қолган ресурсларни ўзгартирмаганда, бу ресурсдан фойдаланишнинг лимит самарадорлиги ошмайди. Бу қоидани *камаювчи лимит самарадорлик қоидаси* дейилади. Унинг математик ифодаси

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \le 0,\ i = 1, 2, ..., n \qquad (8)$$

кўринишда бўлади. Кўриш мумкинки, $y = x^{\alpha}$ ($x > 0, 0 < \alpha < 1$) функция учун (8) шарт бажарилади.

Демак, ишлаб чиқариш воситаларини ўсиши маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ўсишига олиб келади, аммо бу ҳолда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ўсиш суръати камаяди. Мисол учун, $y = x^{\alpha}$ ($x > 0, 0 < \alpha < 1$) функция орқали ифодаланган ишлаб чиқаришда станоклар сони кўпайиб, уларни ишлатаётган ишчилар сони ошмаса, бир ишчига тўғри келаётган станоклар сони(қуролланганлик даражаси) ошади ва ишлаб чиқариш ҳам маълум даражада ошади, аммо бу станоклардан фойдаланиш унумдорлиги камаяди: баъзи бир станоклар ишчилар етишмаганидан тўхтаб қолади.

(8) муносабат ўрнига кучлироқ бўлган, мусбат $x^{(1)}$ ва $x^{(2)}$ қийматларда $f(x)$ функциянинг қабариқлиги (қабариқлиги юқорига) талаби қўйилиши мумкин, яъни ҳар қандай α, $\beta \ge 0$ ва $\alpha+\beta=1$ учун қуйидаги тенгсизлик ўринли бўлсин:

$$f(\alpha x^{(1)} + \beta x^{(2)}) \ge \alpha f(x^{(1)})+\beta f(x^{(2)}). \qquad (9)$$

Агар ягона ресурсдан фойдаланилса, у ҳолда (8), (9) шартлар бир-бирига тенг кучли бўлади.

IV. Ишлаб чиқариш функциянинг бир жинслилиги. Агар t-скаляр учун

$$f(tx) = t^k f(x), \quad k > 0 \qquad (10)$$

муносабат бажарилса, $f(x)$ функцияни k-даражали бир жинсли функция дейилади. Бу шарт, маҳсулот ишлаб чиқариш нуқтаи назаридан, ишлаб чиқаришнинг ресурс харажатлари пропорционал ўзгарганда (ҳар бир x_i мусбат t-скалярга кўпайтирилганда), ишлаб чиқариш ҳажми қай даражада ўзгаришини ифодалайди. Бу ўзгариш даражаси $k > 1$ бўлса – ўсувчи, $k = 1$ бўлганда – ўзгармас, $k < 1$ да камаювчи бўлади.

1-мисол. $y = x^{\alpha}$ ишлаб чиқариш функцияси берилган бўлсин. У ҳолда $f(tx) = (tx)^{\alpha} = t^{\alpha}x^{\alpha} = t^{\alpha}f(x)$ ва бу функция бир жинсли бўлиб, $0 < \alpha < 1$ да ишлаб чиқариш харажатлари пропорционал ошганда, ишлаб чиқариш ҳажми камаяди.

2-мисол. $f(x) = (x_1)^{2/3}(x_2)^{2/3}$ иккита ресурсли ишлаб чиқариш функция берилган бўлсин. Бу функция учун $f(tx) = (tx_1)^{2/3}(tx_2)^{2/3} = t^{4/3}f(x)$ бўлади. $k=4/3>1$ бўлгани учун, ишлаб чиқариш харажатлари пропорционал ошганда, ишлаб чиқариш ҳажми ҳам ортади.

Шуни таъкидлаш керакки, (10) шарт барча ишлаб чиқариш функциялари учун ҳам бажарилавермайди. Шу мақсадда ишлаб чиқаришнинг ўзгариш масштабини характерлайдиган қуйидаги *ишлаб чиқариш эластиклиги* деб аталувчи кўрсаткич киритилади:

$$\varepsilon(x) = \lim_{t \to 1} \frac{t}{f(tx)} \cdot \frac{\partial f(tx)}{\partial x} \qquad (11)$$

Бу кўрсаткич, x-ресурсларнинг структураси ўзгармасдан, ишлаб чиқариш харажатлари 1% га ўзгарганда, маҳсулот ишлаб чиқарилиши неча фоизга ўзгаришини ифодалайди. Текшириб кўриш мумкинки, (10) шартни қаноатлантирувчи функциялар учун $\varepsilon(x) = k$ бўлади.

Ишлаб чиқариш эластиклиги билан харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклик орасида боғланиш қуйидагича:

$$\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x) \cdot \qquad (12)$$

3.2. Ишлаб чиқариш функциянинг изокванта, изоклина ва изокосталари

Фараз қилайлик, ишлаб чиқариш жараёнида маълум ресурсларни бошқа ресурслар билан алмаштириш мумкин бўлсин. Жумладан, бир хил ишлаб чиқариш миқдорини ресурсларнинг ҳар хил қийматлар аралашмасида ташкил қилиш мумкин. Бу ҳолатни

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = C = const \qquad (1)$$

тенглик билан ифодалаш мумкин. (1) тенгликни қаноатлантирадиган $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ векторлар тўплами $F(x)$ *функция изоквантаси* дейилади. Агар икки факторли $F(L,K)$ ишлаб чиқариш функцияси берилган бўлса, бу функция учун

$$F(L,K) = C = const \qquad (2)$$

C-га нисбатан эгри чизиқлар оиласи ҳосил бўлади, бу ерда L — меҳнат ресурси, K — капитал (асосий фонд) ресурси. Эгри чизиқлар оиласининг ҳар бир эгри чизиғи ишлаб чиқариш функция изоквантаси бўлади.

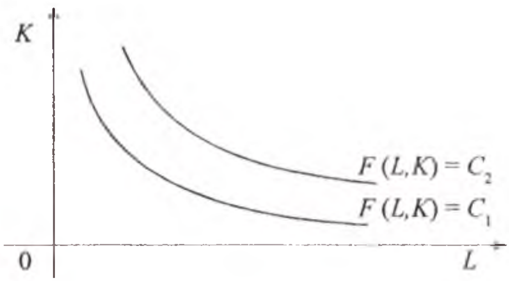
Берилган (2) изокванталар оиласи учун дифференциал тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бунинг учун (2) муносабатнинг икки томонини дифференциаллаймиз:

$$\frac{\partial F(L,K)}{\partial K}dK + \frac{\partial F(L,K)}{\partial L}dL = 0, \qquad (3)$$

бундан:

$$\frac{dK}{dL} = -\frac{\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial L}}{\dfrac{\partial F(L,K)}{\partial K}} \qquad (4)$$

ҳосил бўлади. Топилган (4) дифференциал тенглама изокванталарнинг дифференциал тенгламасидир. (3.2-расм, унда L – горизонтал, K – вертикал ўқлар).



3.2-расм

(2) изокванталарнинг умумий хоссаларини келтирамиз.

1-хосса. Берилган ишлаб чиқариш функциянинг изокванталари ўзаро кесишмайди.

2-хосса. Ҳар бир (2) изокванта бўйлаб $K = K(L)$ функция камаювчи ва ботиқ бўлади. Ҳақикатдан ҳам, (4)га асосан $dK / dL < 0$ (ишлаб чиқариш функциялар ўсувчи) ва шунга кўра $K = K(L)$ функция камаювчи. Энди иккинчи тартибли ҳосилани ҳисоблаймиз:

$$\frac{d^2K}{dL^2} = -\frac{\dfrac{\partial^2 F}{\partial L^2}\cdot\dfrac{\partial F}{\partial K} - \dfrac{\partial F}{\partial L}\cdot\dfrac{\partial^2 F}{\partial K^2}\cdot\dfrac{dK}{dL}}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial K}\right)^2}$$

Бу формуладаги каср суратида манфий ифода турибди, чунки $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} < 0$ ва $\frac{\partial F}{\partial K} > 0$ бўлгани учун, $\frac{\partial^2 F}{\partial L^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial K} < 0$, шунга ўхшаш, $\frac{\partial F}{\partial L} > 0$,

$\frac{\partial^2 F}{\partial K^2} < 0$, $\frac{dK}{dL} < 0$ бўлгани учун, $\frac{\partial F}{\partial L} \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial K^2} \cdot \frac{dK}{dL} > 0$. Юқоридагиларга

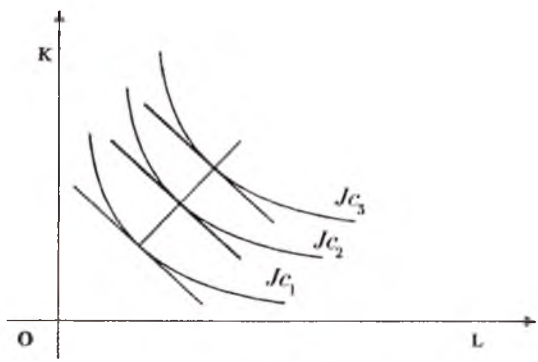
асосан $\frac{d^2 K}{dL^2} > 0$, бундан $K = K(L)$ функциянинг ботиқлиги келиб чиқади.

3-хосса. Агар ишлаб чиқаришда ҳар икки ресурслар қатнашса, у ҳолда изокванталар координата ўқлари билан кесишмайди.

4-хосса. Юқоридаги 3-хосса ўринли бўлган изокванталар учун координата ўқлари асимптота вазифасини бажаради.

$F(L,K) = C$ изоквантани J_c каби белгилаймиз.

Таъриф. Агар J_c изокванталарнинг шундай нуқталари мавжуд бўлсаки, бу нуқталарда уларнинг ҳар бирига ўтказилган уринмалар ўзаро параллел бўлса, бундай нуқталар тўплами *изоклина* дейилади. Мос параллел уринмалар эса, *изокосталар* дейилади.



3.3-расм.

Бу таърифга кўра, изоклиналар асосий фонд ва меҳнат ресурсларининг вақтинча алмашишнинг лимит нормаси $S = -\frac{dK}{dL}$ бир хил бўлган жуфтликлар тўпламини билдиради. Изоклинани ишлаб чиқаришни узоқ муддатли кенгайтириш йўли деб ҳам юритилади. Агар $(L_i, K_i) \in Jc_i$ бўлса, изокосталар тенгламасини ёзиш мумкин:

$$K - K_i = \frac{dK}{dL}(L - L_i). \qquad (5)$$

$\frac{dK}{dL}$ ни γ билан белгиласак ($\gamma = \text{const}$), (5) тенгламани $K - K_i = \gamma L - \gamma L_i$ ёки $K - \gamma L = K_i - \gamma L_i$ кўринишда ёзиш мумкин. Бу тенглама қуйидаги умумий кўринишда ифодаланади:

$$\omega_1 K + \omega_2 L = \omega. \qquad (6)$$

Бу ерда $\omega_1 K + \omega_2 L$ — ишлаб чиқариш харажатларини ифодалайди. Демак, изокосталар ишлаб чиқариш харажатлари ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрнидан иборат.

3.3. Ишлаб чиқариш функцияларининг турлари

Иккита ресурсли ишлаб чиқариш функцияларнинг кенг ишлатиладиган учта хилини ажратиш мумкин.

1. Маҳсулотларни ўзаро тўла алмаштириш функцияси:

$$y = b_1x_1 + b_2x_2$$

2. Неоклассик ишлаб чиқариш функцияси:

$$y = x_1^{b_1} x_2^{b_2}, \quad \text{бу ерда } b_1 + b_2 \le 1.$$

3. Маҳсулотларни ўзаро тўла тўлдириш функцияси:

$$y = min\left(\frac{x_1}{b_1}, \frac{x_2}{b_2}\right)$$

бу ерда b_1, b_2, — функциянинг мусбат параметрлари.

Бу функциялар истеъмолда (2-боб) кўрилган фойдалилик функцияларининг ўзи. Масалан, неоклассик ишлаб чиқариш функциясига нисбатан истеъмол назариясидаги лимит фойдалиликка ишлаб чиқариш назариясида лимит унумдорлик мос келади. Камаювчи лимит фойдалилик ва истеъмол товарларнинг камаювчи лимит алмаштириш нормаси қоидалари эса бу ерда камаювчи лимит унумдорлик, ҳамда ресурсларнинг камаювчи лимит алмаштириш нормаси қоидалари билан ифодаланади.

Энди конкрет ишлаб чиқариш функцияси учун муҳим характеристикаларни кўриб чиқамиз, хусусан, ҳар бир ресурс бўйича лимит унумдорлигини ва ресурсларни алмаштириш лимит нормасини ҳисоблаймиз.

Кобб-Дуглас функциясини кўриб чиқамиз:

$$y = x_1^{0,75} x_2^{0,25}$$

Бу функция учун меҳнатнинг лимит унумдорлиги (эффективлиги)

$$\frac{\partial y}{\partial x_1} = 0,75\, x_1^{-0,25} x_2^{0,25},$$

капиталнинг лимит унумдорлиги (эффективлиги)

$$\frac{\partial y}{\partial x_2} = 0,25\, x_1^{-0,75} x_2^{0,75}$$

бўлади.

Ресурсларни алмаштириш лимит нормаси

$$-\left.\frac{dx_2}{dx_1}\right|_{y=const} = \frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}$$

билан белгиланади. Бу норма y — ишлаб чиқаришни ўзгартирмаган ҳолда биринчи ресурсни иккинчиси билан алмаштиришнинг лимит нисбатини ифодалайди. Биздаги Кобб-Дуглас функцияси учун ресурсларни алмаштириш лимит нормаси қуйидагича ифодаланади:

$$\frac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2} = (0,75)\, x_1^{-0.25} x_2^{0.25}) / (0,25)\, x_1^{0.75} x_2^{-0,75}) =$$

$$= 3\, x_1^{-1} x_2^{1} = 3(x_2 / x_1)$$

3.4. Ишлаб чиқаришнинг элементар назарияси

Бу бўлимда қисқа муддатли ишлаб чиқариш жараёни ўрганилади. Бу муддатда корхонадаги ишлаб чиқариш факторлар ўзгармас деб ҳисобланади.

Харажатлар функцияси

3.3-расмда изоклинада ётган, ҳамда изокванталар ва изокосталарнинг кесишган нуқталари берилган ишлаб чиқаришга эришиш учун минимал харажатга эга ресурсларни ифодалайди. Агар ишлаб чиқариш миқдори

y^* га мос келадиган бундай нукта координаталари $(L^*, K^*) = (x_1^*, x_2^*)$ бўлса, у ҳолда ишлаб чиқариш харажатларининг ўзгарувчи қисми $\omega_1 x_1^* + \omega_2 x_2^*$ ни топиш мумкин. Бунга ўзгармас харажатлар қўшилса, умумий ишлаб чиқариш харажатлари келиб чиқади.

Ўртача ва лимит харажатлар

Ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг 1 бирлигига тўғри келадиган ишлаб чиқариш харажатларини *ўртача харажат* C дейилади. Агар ишлаб чиқариш функцияси

$$y = A\, x_1^{b_1} x_2^{b_2}$$

ва харажатлар функцияси

$$\omega = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_0$$

берилган бўлса, ўртача харажат учун қуйидаги формулани келтириб чиқариш мумкин:

$$C = \frac{\omega}{y} = (\omega_1 \cdot \frac{b_1 + b_2}{b_1} \cdot \left(\frac{y}{Q}\right)^{\frac{1}{b_1+b_2}} + \omega_0) / y$$

бу ерда $Q = A \cdot \left(\frac{b_2}{b_1} \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2}\right)^{b_1}$.

Лимит харажат (LC) деб умумий харажатларнинг ишлаб чиқариш бўйича ҳосиласига ($d\omega/dy$) айтилади. Юқоридаги ишлаб чиқариш ва харажат функциялар учун

$$LC = \frac{d\omega}{dy} = \frac{\omega_1}{b_1 \cdot Q} \cdot \left(\frac{y}{Q}\right)^{\frac{1}{b_1+b_2}-1}$$

Асосий мавзулар

- ишлаб чиқариш функциялар тарихи, Кобб-Дуглас функцияси.
- ишлаб чиқариш функцияси ва унинг хоссалари, асосий тушунчалар.
- ишлаб чиқариш функциянинг изокванталари, изоклиналари ва изокосталари.
- ишлаб чиқариш функцияларининг турлари, ресурсларнинг лимит унумдорлиги ва алмаштириш нормаси.
- ишлаб чиқаришнинг элементар назарияси, харажатлар функцияси, ҳамда ўртача ва лимит харажатлар тушунчаси.

Таянч иборалар, формулалар

- ишлаб чиқариш функцияси, $F(x,y,a) = 0$, $y = f(x)$
- ресурс бўйича лимит эффективлик (унумдорлик), $\upsilon_i = \dfrac{\partial f}{\partial x_i}$
- ресурснинг ўртача эффективлиги (унумдорлиги), $\mu_i = \dfrac{f(x)}{x_i}$
- ишлаб чиқаришнинг харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклиги, $\varepsilon_i(x) = \dfrac{\upsilon_i}{\mu_i} = \dfrac{x_i \partial f}{f(x) \cdot \partial x_i}$
- камаювчи эффективлик қоидаси, $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right) \le 0$, $i = 1,2,..,n$
- бир жинсли ишлаб чиқариш функцияси, $f(tx) = t^k f(x)$, $k > 0$
- ишлаб чиқариш эластиклиги, $\varepsilon(x) = \lim\limits_{t \to 1} \dfrac{t}{f(tx)} \cdot \dfrac{\partial f(tx)}{\partial x}$ $\qquad \varepsilon(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x)$
- функция изоквантаси, $F(x_1,x_2,..,x_n) = C$, $F(L,K) = C$
- изоклина, $S = -\dfrac{dK}{dL}$
- изокоста, $\omega_1 K + \omega_2 L = \omega$
- маҳсулотларни ўзаро тўла алмаштириш функцияси, $y = b_1 x_1 + b_2 x_2$
- неоклассик ишлаб чиқариш функцияси, $y = x_1^{b_1} x_2^{b_2}$, $b_1 + b_2 \le 1$
- маҳсулотларни ўзаро тўла тўлдириш функцияси, $y = \min\left(\dfrac{x_1}{b_1}, \dfrac{x_2}{b_2}\right)$
- Кобб-Дуглас функцияси, $y = x_1^{0,75} x_2^{0,25}$
- ресурсларни алмаштириш лимит нормаси, $-\dfrac{dx_2}{dx_1}\Big|_{y=const} = \dfrac{\partial y / \partial x_1}{\partial y / \partial x_2}$
- харажатлар функцияси, $\omega = \omega_1 x_1 + \omega_2 x_2 + \omega_0$
- ўртача харажат, $C = \dfrac{\omega}{y} = (\omega_1 \cdot \dfrac{b_1 + b_2}{b_1} \cdot \left(\dfrac{y}{Q}\right)^{\frac{1}{b_1+b_2}} + \omega_0)/y$
- лимит харажат, $LC = \dfrac{d\omega}{dy} = \dfrac{\omega_1}{b_1 \cdot Q} \cdot \left(\dfrac{y}{Q}\right)^{\frac{1}{b_1+b_2}-1}$

Саволлар

- Ишлаб чиқариш функция фойдалилик функциядан нима билан фарқ қилади?
- Ўртача ва лимит эффективликлар орасида қандай фарқ бор?
- Эластиклик коэффициентининг иқтисодий маъноси қандай?
- Камаювчи эффективлик қоидасини шарҳлаб беринг
- Изоклина ва изокостанинг иқтисодий маъноси қандай?

Машқлар

1-машқ. $y = 5x^{0,75}$ ишлаб чиқариш функциянинг ўртача ва лимит эффективлигини топинг, ҳамда уларни ресурс $x = 12$ қийматида таққосланг.

2-машқ. Аввалги машқдаги ишлаб чиқариш функцияси учун ишлаб чиқаришнинг харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклигини ҳисобланг.

3-машқ. $y = 3x_1^{0,4}x_2^{0,3}$ ишлаб чиқариш функцияси учун ишлаб чиқаришнинг харажатлар ўзгаришига нисбатан эластиклигини ҳамда ишлаб чиқариш эластиклигини ҳисобланг.

4-машқ. $y = 3x_1^2+5x_1x_2$ функцияни биржинслилигини текширинг ва пропорционаллик даражасини топинг.

5-машқ. $y = 4x_1+6x_2$ ишлаб чиқариш функция изокванталарини ишлаб чиқариш ҳажми 12, 24, 36 қийматлар учун чизинг.

6-машқ. $y = x_1^{0,75}+x_2^{0,25}$ ишлаб чиқариш функцияси ҳамда $\omega = 12x_1+8x_2$ харажатлар функцияси берилган. (3;5) нуқтада ўртача ва лимит харажатларни топинг.

7-машқ. $y = ax_1^{\alpha}\ x_2^{\beta}$ Кобб-Дуглас функцияси берилган. Берилган функция учун μ_1, μ_2, υ_1, υ_2 ларни ҳисобланг.

8-машқ. $y = a_0+a_1x_1+a_2x_2$ чизиқли ишлаб чиқариш функцияси учун μ_1, μ_2, υ_1, υ_2 ларни ҳисобланг.

9-машқ. Кобб-Дуглас функцияси ва $y = a_1x_1+a_2x_2$ чизиқли ишлаб чиқариш функцияси учун $\varepsilon_1(x)$, $\varepsilon_2(x)$ ва $\varepsilon(x)$ эластикликларни ҳисобланг.

10-машқ. Фирманинг ишлаб чиқариш функцияси $Z = -4x_1^2 + 24x_1 + 2x_1x_2 + 6x_2 - x_2^2$ берилган, бу ерда x_1, x_2 – ресурс харажатлари. Бу ресурс харажатлари бўйича максимал ишлаб чиқариш қийматини топинг.

4-боб. Бозор модели

Исьтеъмол билан ишлаб чиқариш ўртасида мувозанат ўрнатишда, бозор муҳим воситачи ҳисобланади. Бу бобда бозор жараёнига оид асосий тушунчалар, жумладан баҳо ва унинг бозордаги ўрни кўриб чиқилади, баъзи бир кенг тарқалган иқтисодий математик моделлар ўрганилади

4.1. Баҳо мувозанати ва баҳо динамикаси

Маълумки баҳо бозор иқтисодиётининг асосий категориялардан бири бўлиб, у ғоят муҳим иқтисодий восита, бозор иқтисодиётнинг қудратли қуроли ҳисобланади. Баҳонинг маълум вазифалари (функциялари) мавжуд.

Бозорнинг мувозанатини таъминлаш функцияси.
Рақобат воситаси функцияси.
Ҳисоб-китоб ва ўлчов функцияси.
Иқтисодий тартиблаш каби маълум вазифалари (функциялари) мавжуд.

Баҳонинг мувозанатни таъминлаш функцияси талаб ва таклиф мувозанати орқали амалга оширилиб, бозордаги талаб ва таклифи ҳажмини шунга мос келишини таъминлайди. Баҳо туфайли амалга ошириладиган мувозанат товарларнинг йиғилиб қолмай, сотилиб кетишини таъминлайди ҳамда шу билан бирга товар тақчиллилига йўл қўймайди. Баҳо орқали ишлаб чиқариш билан истеъмол ўртасида мослик ўрнатилади.

Рақобатнинг асосий тури бу баҳо воситасида рақобат қилишдир. Бозорда рақобатчилар нархларни тез-тез ўзгартириб турадилар. Маълум товар ишлаб чиқарувчилар ўз рақибларини бозордан сиқиб ва харидорларни ўзларига оғдириб олиш мақсадида, имкони борича баҳони пасайтиришдан фойдаланишга ҳаракат қиладилар.

Баҳо бозорнинг тартибга солинишида катта ўрин эгаллайди. Муайян товар нархининг ошиши унга талаб кўплигини, яхши фойда келтиришини билдиради. Баҳонинг пасайиб кетиши товарга талаб камлигини ёки унинг талабга нисбатан кўплигини, ундан фойда камлигини кўрсатади. Баҳонинг ошиб бориши товар ишлаб чиқариладиган соҳаларга ресурсларнинг кўплаб олиб келинишини тақозо этади, чунки бунда фойда кўп бўлади, натижада товарлар таклифи кўпайиб, кейинчалик баҳо пасаяди. Шу билан ресурслар бу ердан чиқиб, бошқа соҳага кўчади. Демак, баҳонинг тебраниб туриши ресурсларни керакли соҳаларга буриб туради. Шу билан баҳо орқали ишлаб чиқариш тартибланади.

Умуман олганда, баҳо иқтисодиётни тартибга солишда, моддий бойликлар ва хизматлар ўлчовини бажаришда катта аҳамиятга эга.

Қуйида бозордаги мувозанатга қандай эришилади, бунда баҳонинг таъсири қандай — деган саволларга тўхталамиз. Аввал моделлаштириш жараёнида қўлланадиган рекурент тенгламалар ҳақида маълумотлар келтирилади, кейин эса конкрет бозор моделлари кўриб чиқилади.

4.2. Биринчи тартибли рекуррент тенгламалар

Кўп холатларда иқтисодий жараёнларни тенгламалар ёрдамида ифодалашда унинг қандайдир хусусиятини белгиловчи t-вақтга боғлиқ $y(t)$ миқдорини $y(t-1)$, $y(t-2)$ ва ҳоказолар орқали боғловчи рекурент тенгламалар деб аталувчи муносабатларни ўрганиш муҳим аҳамиятга эгадир. Масалан, биринчи тартибли рекуррент тенгламани қарайлик:

$$y(t) = ky(t-1)+b\,, \qquad (1)$$

бу ерда k, b — ўзгармас коэффициентлар. Бу тенгламанинг умумий ечими қуйидаги формула билан аниқланади:

$$y(t) = y^* + Akt, \qquad (2)$$

бу ерда $y^* = b/(1-k)$ — вақтга боғлиқ бўлмаган ечим, A — параметр. Агар бошланғич қиймат $y(0) = y_0$ берилган бўлса, юқоридаги ечим қуйидаги кўринишда бўлади:

$$y(t) = y^* + (y_0-y^*)kt \qquad (3)$$

1-масала. $y(t) = 3y(t-1)+2$ рекуррент тенгламанинг $y_0= 1$ бошланғич шартни қаноатлантирадиган ечимини топинг.

Ечиш. k=3, b=2. Демак, $y^* = 2 / (1-3) = -1$. (3) формулага кўра

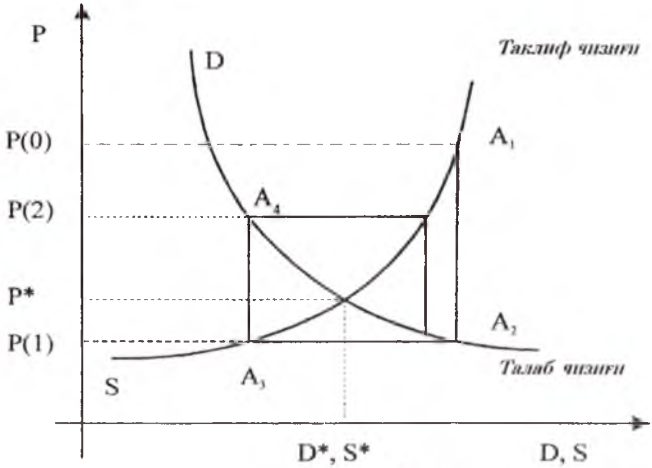
$$y(t) = -1 + (1-(-1))3t = -1+2\cdot 3t$$

4.3. Ўргамчик тўрисимон модел

Умумий ҳолат

Бу бўлимда якка маҳсулотли бозор модели кўрилади. Бунда биз бозордаги маҳсулот баҳоси, таклифи ва унга бўлган талаб орасидаги боғланишларни ўрганамиз. Бозор иқтисодиётида талаб ва таклиф мувозанати муҳим рол ўйнайди. Талаб ва таклиф баҳо орқали бир — бири билан боғланади. Асосий кўриладиган масаламиз, берилган шароитда қандай қилиб бозор мувозанатига эришилади, деган саволга жавоб топишдан иборат бўлади.

Фараз қилайлик, бозордаги якка маҳсулот қандайдир вақт давомида кўрилмоқда. Унга бўлган талаб D, унинг баҳоси P ва таклифи S қуйидаги чизмадагидек бўлсин:



4.1-расм

Идеал ҳолатда бозордаги баҳо, таклиф ва талаб P^*, S^*, D^* қийматларга тенглашади. Бунда $D^* = S^*$ мувозанат тенглиги бажарилади. Аммо аслида ҳар хил сабабларга кўра (Мисол учун, қишлоқ хўжалиги маҳсулоти учун сув танқислиги туфайли етиштирилган ҳосил камайиши мумкин ва унинг бозордаги баҳоси кўтарилиб кетади) бозор бу идеал ҳолатда бўлмайди. Фараз қилайлик, биз кузатяпган T_0 вақтда баҳо $P(0)$ бўлсин. Бу баҳодан келиб чиққан таклиф $T_1 = T_0+1$ вақтда $S(1)$га тенг бўлади (расм 4.1. да A_1 нуқта) ва миқдори унга тенг бўлган талаб $D(1)$(A_2 нуқта) ва мос баҳо $P(1)$ бўлади. Бу баҳога нисбатан кейинги $T_2 = T_1+1$ вақтдаги таклиф яна ўзгаради (A_3 нуқта) ва яна янги талаб(A_4 нуқта) ва янги $P(2)$ баҳо ҳосил бўлади. Кейинги даврларда юқоридаги циклик ўзгаришлар расм 4.1. да кўрсатилгандек ўргамчик тўрисимон бўлади. Кўриниб турибдики, биз ўрганяпган жараёнда баҳолар $P(0)$, $P(1)$, $P(2)$,... кетма-кетликни ташкил қилиб, мувозанат P^* баҳога яқинлашмоқда.

Чизиқли ҳолат

Фараз қилайлик, бозор жараёни маълум.

Бозорда муайян бир товарга бўлган эҳтиёжнинг t моментдаги ёки ундан олдинги моментдаги талаб ва таклиф функциялари ($P(t)$ баҳодан ёки $P(t-1)$ баҳодан) қуйидагича бўлсин:

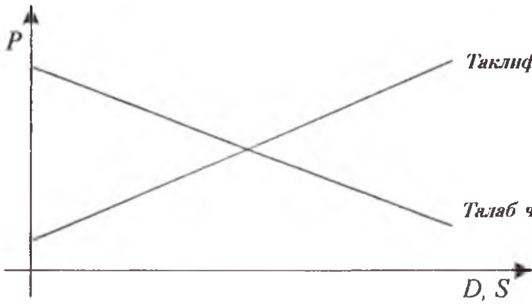
талаб функцияси $D(t) = a - bP(t)$ (1)

бу ерда a, b – ўзгармас мусбат параметрлар ва $P(t)$ - t моментдаги маҳсулот баҳоси;

таклиф функцияси $S(t) = -c + dP(t-1)$ (2)

бу ерда c, d – ўзгармас мусбат параметрлар, $P(t-1)$ – $(t-1)$ моментдаги маҳсулот баҳоси. $S(t)$ таклиф аввалги $t-1$ даврдаги $P(t-1)$ баҳога қараб шаклланади, $D(t)$ талаб эса кўрилаётган t даврдаги $P(t)$ баҳога боғланади.

(1) ва (2) функцияларнинг текисликдаги графикларини ясаймиз:



4.2-расм

(1) ва (2) талаб ва таклиф функцияларини тенгласак, баҳога нисбатан тенглама ҳосил бўлади:

$$P(t) = -\frac{d}{b}P(t-1) + \frac{c+a}{b}. \quad (3)$$

$P(t) = P(t-1)$ бўлгандаги P^* – баҳо мувозанати учун қуйидаги формула ҳосил бўлади:

$$P^* = \frac{c+a}{b+d}.$$

Юқоридагиларга асосан, $t \to \infty$ да $P(t) \to P^*$ бўлиши учун $d < b$ тенгсизлик асос бўлади. Шунга қараб бозордаги ўзгариш жараёнлар яқинлашувчи (стабилланувчи) ёки узоқлашувчи (стабиллашмайдиган) бўлади.

Бозор жараёнини стабиллантирувчи $d < b$ шартнинг иқтисодий маъноси қуйидагича: агар таклифнинг ўзгариш тезлиги (d параметр) талабникидан (b параметр) кичик бўлса, ёки бошқача айтганда, таклиф талабга нисбатан секинроқ ўзгарса, бозор стабилланувчи бўлади, акс ҳолда, бозор мувозанатдан узоқлашиб боравереди.

2-масала. Бозордаги талаб ва таклиф $D(t) = 4P(t) - 4$, $S(t) = 8-2P(t-1)$ кўринишда бўлсин. $P(t)$ нарх учун рекуррент формулани топинг ва бошланғич нарх $P_0=3$ бўлганда ихтиёрий t учун таклиф миқдорини аниқланг.

Ечиш. $4P(t) - 4 = 8 - 2P(t-1)$. Бундан

$$P(t) = 3 - 0{,}5P(t-1)$$

рекуррент тенглама келиб чиқади. Вақтга боғлиқ бўлмаган ечим $P^*= 3 / 1{,}5 = 2$ ва керакли ечим

$$P(t) = P^*+ (P_0- P^*)(-0{,}5)^t= 2 + (-0{,}5)^t$$

бўлади. Нархлар камаювчи амплитуда билан тебранади ва ошиб борган сари $P^* = 2$ га яқин бўлади. Таклиф учун формула қуйидагича топилади:

$$S(t) = 8 - 2P(t-1) = 8 - 2(2+(-0{,}5)^{t-1}) = 4 - 2(-0{,}5)^{t-1}$$

4.4. Умумий мувозанат модели

Умумий мувозанат модели ҳам ўргамчик тўрисимон модели каби бозор фаолиятини ифодалайди. Бу моделни микроиқтисодий таҳлил асосчиларидан бири Л. Вальрас номи билан юритилади.

Моделни ўрганишда содда ҳолатни кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик, бозорда иккита корхона ўз маҳсулоти билан қатнашмоқда. Иккови ҳам ягона ресурсдан фойдаланади (мисол учун, меҳнат ресурси) ва фақат биттадан турдаги маҳсулот ишлаб чиқаради. Бу маҳсулотларга бозорда битта истеъмолчи томонидан талаб мавжуд ва товар айирбоши фақат битта аукцион-воситачи орқали амалга оширилади. Бундай иқтисод модели қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} &U(D_1,D_2) \to \max \\ &Y_i = F_i(L_i) \geq D_i \qquad (1) \\ &L_1 + L_2 \leq L \end{aligned}$$

бу ерда D_i – i-нчи маҳсулотга бўлган талаб, U – фойда функцияси, Y_i – i-нчи маҳсулот таклифи, L_i – i-нчи корхона томонидан ресурсга бўлган талаб, F_i – i-нчи корхонанинг ишлаб чиқариш функцияси, L – ресурс таклифи (ўзгармас миқдор).

Моделни конкрет функцияларда ўрганамиз. Ишлаб чиқариш функциялар ва фойда функцияси қуйидагича бўлсин:

$$\begin{aligned} &Y_i = c_i(L_i)^{\alpha_i} \quad (\alpha_i<1) \\ &U = \beta_1 lnD_1 + \beta_2 lnD_2 \qquad (2) \end{aligned}$$

Бозордаги мувозанатта бирин-кетин яқинлашув итерациялардан иборат алгоритм асосида эришилади. Ҳар бир итерация тўртта қадамдан иборат бўлади:

1) ҳар бир корхонага маҳсулот нархи $P_i(t)$ ва ресурс нархи $R(t)$, истеъмолчига эса яна $P_i(t)$ нархлар ва

$$\partial U / \partial D_i(t-1), \quad i = 1,2 \tag{3}$$

лимит фойда формуласи ёрдамида аниқланадиган талаб нархини маълум қилинади;

2) корхоналар берилган нархларга қараб максимал фойда келтирадиган харажатлар ва ишлаб чиқаришни ташкил қилишади, бунда уларнинг фойдаси қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$\Phi_i(t) = P_i(t)c_i(L_i)^{\alpha_i} - R(t)\, L_i(t)\, ; \tag{4}$$

бу функцияга максимал қиймат етказиб берувчи $L_i(t)$ қуйидагича топилади:

$$\partial \Phi_i(t) / \partial L_i(t) = P_i(t)c_i\alpha_i(L_i)^{\alpha_i - 1} - R(t) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{L}_i(t) = \left(\frac{P_i(t)c_i\alpha_i}{R(t)} \right)^{\frac{1}{1-\alpha_i}} \quad ; \tag{5}$$

3) истеъмолчининг маҳсулотга бўлган талаби қуйидаги формула билан ифодаланади:

$$D_i(t) = max\left\{ k\left(\frac{\partial U}{\partial D_i(t-1)} - P_i(t) \right) + D_i(t-1), 0 \right\}, \tag{6}$$

$i = 1,2;$

бу ерда $\partial U / \partial D_i = \beta_i / D_i$, k – ўзгармас пропорционаллик коэффициенти; истеъмолчи талабини ҳосил қилишда қуйидагича иш тутади: агар лимит фойда лимит харажатлардан кичик бўлса, ёки мавжуд талаб йўқ бўлса, талаб ўзгартирилмайди, акс ҳолда талаб миқдорини лимит фойда билан лимит харажатлари айирмасига пропорционал кўпайтирилади;

4) аукцион-воситачи томонидан нархлар ўзгартирилади:

$$P_i(t+1) = max\,\{m\,(D_i(t) - \mathrm{Y}_i(t)) + P_i(t),\ 0\}, \quad i=1,2;$$
$$R(t+1) = max\,\{s\,(L_1(t) + L_2(t) - L) + R(t),\ 0\}, \tag{7}$$

бу ерда m, s – ўзгармас пропорционаллик коэффициентлари; агар маҳсулотга талаб таклифдан юқори бўлса, нарх оширилади ва аксинча;

лекин агар ортиқча талаб манфий бўлса ва мос нархлар нолга тенг бўлса, нархларни мавжуд қийматидан пасайтириб бўлмайди.

4.5. Икки-секторли ишлаб чиқариш модели

Фараз қилайлик, иқтисодда фақат икки хил маҳсулот ишлаб чиқарилмоқда (2 ишлаб чиқариш сектори мавжуд) ва ҳар бир турдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун иккинчи турдаги маҳсулот ҳам сарфланади (ички истеъмол). Масалан, электр энергия ва газ ишлаб чиқариш секторларини олсак, электр энергия ишлаб чиқариш учун газ — ёқилғи сифатида ва, аксинча, газни ишлаб чиқаришда маълум миқдорда электр энергия ишлатилади. Ўрганиладиган муаммо, ҳар бир турдаги маҳсулотдан қанча ҳажмда ишлаб чиқарилса, иқтисоднинг ички талаби қондирилади, ҳамда маълум қисми товар сифатида четга чиқиши мумкин, деган саволга жавоб топишдан иборат.

Бу муаммони ҳал қилиш учун қуйидаги системани қурамиз:

$$\begin{cases} x_1 = k_1 x_2 + s_1 \\ x_2 = k_2 x_1 + s_2\,, \end{cases} \tag{1}$$

бу ерда x_1, x_2 — маҳсулотларни ишлаб чиқиш режаси, k_1, k_2, s_1, s_2 — манфий бўлмаган параметрлар бўлиб, шулардан s_1, s_2 — четга чиқариладиган маҳсулотлар ҳажми, k_1, k_2 — i нчи турдаги 1 бирлик маҳсулот учун 3-i нчи маҳсулотнинг сарфи ($i = 1,2$).

(1) системани *икки-секторли ишлаб чиқариш модели* дейилади.

Тенгламалар системаси қуйидаги ечимга эга:

$$x_1 = (s_1 + k_1 s_2) / (1 - k_1 k_2), \quad x_2 = (s_2 + k_2 s_1) / (1 - k_1 k_2) \tag{2}$$

бу ерда $k_1 k_2 \neq 1$ деб фараз қилинади, ва ечим ягона бўлади. Агар $k_1 k_2 = 1$ бўлган ҳолатни кўрсак, бунда $k_1 = 1/k_2$ бўлади ва бу ифодани (1) системага қўйсак,

$$\begin{cases} x_1 = x_2 / k_2 + s_1 \\ x_2 = k_2 x_1 + s_2 \end{cases}, \quad \text{ёки} \quad \begin{cases} x_2 = k_2 x_1 - k_2 s_1 \\ x_2 = k_2 x_1 + s_2 \end{cases}$$

система ҳосил бўлади. Бундан эса $s_2 = -k_2 s_1$ ифода келиб чиқади. k_1, k_2, s_1, s_2 параметрлар манфий бўлмаганини ҳисобга олсак, $s_2 \neq -k_2 s_1$ ўринли бўлади, ва (1) система ечимга эга эмас деган хулосага келамиз.

Шундай қилиб (1) система билан ифодаланган икки-секторли ишлаб чиқариш модели $k_1 k_2 \neq 1$ бўлса, ягона ечимга эга бўлади, акс ҳолда ечим мавжуд бўлмайди.

Ечимнинг мавжудлиги ва ягоналиги ўз-ўзидан келиб чиқади, агарда моделдаги барча параметрлар ва ўзгарувчилар пул бирлигида ифодаланса. Бу ҳолатда x_1, x_2 ва s_1, s_2 — пул ҳисобида ишлаб чиқариладиган ва четга чиқариладиган маҳсулотлар ҳажми, $k_1 k_2$ — ҳар бир турдаги бир сўмлик маҳсулотни ишлаб чиқариш учун иккинчи турдаги маҳсулотнинг пул ҳисобидаги сарфи бўлади. Табиий равишда $k_1 < 1$, $k_2 < 1$, ва $k_1 k_2 < 1$, демак, $k_1 k_2 \neq 1$ шарт бажарилади.

3-масала. Икки-секторли ишлаб чиқариш моделида 1 сўмлик биринчи маҳсулотдан ишлаб чиқариш учун 0,2 сўмлик иккинчи маҳсулот сарфланади, 1 сўмлик иккинчи маҳсулот ишлаб чиқариш учун 0,3 сўмлик биринчи маҳсулот сарфланади. Яна 2 млн. сўмлик биринчи маҳсулот ва 5 млн. сўмлик иккинчи маҳсулот четга сотилиш режалаштирилади. Бу режани амалга ошириш учун маҳсулотларни қандай ҳажмларда ишлаб чиқариш зарур?

Ечиш. Икки-секторли ишлаб чиқариш модел қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{cases} x_1 = 0,3x_2 + 2000000 \\ x_2 = 0,2x_1 + 5000000 \end{cases}$$

бу ерда $k_1 = 0,3$; $k_2 = 0,2$; $s_1 = 2000000$; $s_2 = 5000000$ ва $k_1 k_2 = 0,3 \cdot 0,2 \neq 1$. Система ягона ечимга эга:

$$x_1 = \frac{2000000 \ \ + 0,3 \cdot 5000000}{1 - 0,3 \cdot 0,2} = 3,72 \text{ млн. сўм}$$

$$x_2 = \frac{5000000 + 0,2 \cdot 2000000}{1 - 0,3 \cdot 0,2} = 5,74 \text{ млн. сўм}$$

Бундан кўринадики, 2 млн. сўмлик биринчи маҳсулот четга чиқади ва 1,72 млн. сўмлиги ички истеъмолга сарфланади, худди шунингдек, иккинчи маҳсулотдан 5 млн. сўмлиги четга чиқади ва 0,74 млн. сўмлиги ички истеъмолни ташкил этади.

Асосий мавзулар

- бозор модели; баҳо, талаб ва таклиф орасидаги боғланишлар
- бозор мувозанати
- ўргамчик тўрисимон модели: умумий ҳолат
- ўргамчик тўрисимон модели: чизиқли ҳолат
- ўргамчик тўрисимон моделининг стабилланиши таҳлили
- умумий мувозанат модели
- икки-секторли ишлаб чиқариш моделини қуриш
- модел ечимини топиш
- ечимлар мавжудлигини таҳлил қилиш

Таянч иборалар, формулалар

- талаб функцияси, $D(t)=\alpha - bP(t)$
- таклиф функцияси, $S(t)=-c+dP(t-1)$
- мувозанат баҳо, $P^*=(a+c)/(b+d)$
- ўргамчик тўрисимон модел, $S(t)=S(P(t-1)),\ D(t)=D(P(t))$
- стабилланувчи ва стабилланмайдиган ўргамчик тўрисимон модел
- стабилланиш шарти: $S=-c+dP,\ D=\alpha-bP$ бўлганда, $d<b$
- умумий мувозанат модели, $U(D_1,D_2)\to max$,
  $Y_i=F_i(L_i)\geq D_i,\quad L_1+L_2\leq L$
- икки-секторли ишлаб чиқариш модели,
  $x_1=k_1x_2+s_1,\qquad x_2=k_2x_1+s_2,\qquad k_1,k_2,s_1,s_2\geq 0$
- икки-секторли ишлаб чиқариш моделининг ечими,
  $x_1=(s_1+k_1s_2)/(1-k_1k_2),\ x_2=(s_2+k_2s_1)/(1-k_1k_2)$
- ечим мавжуд ва ягоналик шарти, $k_1k_2\neq 1$

Саволлар

- Нима учун бозор мувозанати бузилади?
- Бозор мувозанати доим битта нуқтада эришиладими?
- Нима учун таклиф вақтга нисбатан аввалги баҳога боғланади, талаб эса айнан қурилаётган вақтдаги баҳога қараб шаклланади?
- Ўргамчик турисимон моделда бошланғич $P(0)$ баҳо P^* дан кичик бўлгандаги ҳолатларни изоҳлаб беринг.
- Стабилланиш шартида $d = b$ бўлган ҳолатни изоҳланг.
- Чизиқли бўлмаган моделда стабилланиш шарти нимага боғлиқ бўлиши мумкин?
- Икки-секторли моделда $k_1 = 0$, ёки $k_2 = 0$ ва $s_1 = 0$, ёки $s_2 = 0$ шартларнинг иқтисодий маъноси қандай?
- Нима учун қурилган 3-масалада $k_1 k_2 \neq 1$ шарт бажарилади?
- Иқтисодда ишлаб чиқариш секторлар сони иккитадан кўп бўлса, модел қандай ўзгариши мумкин?

Машқлар

1-машқ. Тенгламаларни ечмасдан ўргамчик турисимон модели яқинлашувчи бўлишини аниқланг.

2-машқ. Ўргамчик турисимон моделда маҳсулот учун таклиф ва талаб функциялар қуйидагича бўлсин: $S = 12P - 32$, $D = 35 - 8P$. Иҳтиёрий t учун нарх ва маҳсулот миқдорини топинг.

3-машқ. Тенгламалар системасини ечинг:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5 \\ -5x_1 + 4x_2 = 11 \end{cases}$$

4-машқ. Икки-секторли ишлаб чиқариш моделида 1 сўмлик биринчи маҳсулотдан ишлаб чиқариш учун 0,15 сўмлик иккинчи маҳсулот сарфланади, 1 сўмлик иккинчи махсулот ишлаб чиқариш учун 0,25 сўмлик биринчи маҳсулот сарфланади. Яна 250000 сўмлик биринчи маҳсулот ва 100000 сўмлик иккинчи маҳсулот четга сотилиш режалаштирилади. Бу режани амалга ошириш учун маҳсулотларни қандай ҳажмларда ишлаб чиқариш зарур?

5-боб. Макроиқтисод жараёни моделлари

5.1. Миллий иқтисоднинг соддалаштирилган модели

Миллий иқтисодни соддалаштирилган ҳолатда ўрганамиз: уни ёпиқ (ташқи алоқалар йўқ) ва давлат аралашуви йўқ (мисол учун, ҳеч қандай солиқлар йўқ) деб ҳисоблаймиз. Бу ҳолда иқтисод ҳолатини қуйидаги кўрсаткичлар белгилайди: Инвестиция (I), Ишлаб чиқариш (Q), Даромад (Y), Истеъмол (C). Бу кўрсаткичларнинг ҳар бири бошқалар билан бевосита ёки билвосита боғланган: инвестициялар ишлаб чиқаришни келтиради, ишлаб чиқаришдан эса даромад ҳосил бўлади, даромаднинг маълум қисми истеъмолга сарфланади, у ўз навбатида яна инвестицияларни талаб қилади ва бу жараён такрорланади. I, Q, Y, C миқдорлар орасидаги боғланишлар кенг маънода талаб ва таклифлар балансини ифодалайди. Ишлаб чиқариш даромад билан балансланади, даромад эса истеъмол ва инвестициялар орасида тақсимланади:

$$Q = Y, \qquad Y = C + I. \tag{1}$$

Бу тенгликлар *мувозанат шартлари* деб юритилади.

Бу муносабатлар ёрдамида миллий даромадни самарали (*effective*) талаб принципи асосида аниқлаш мумкин. *Самарали талаб принципига* биноан агар кузатув давр қисқа вақтни ташкил қилса, бу даврда миллий даромад (ишлаб чиқариш ҳажми) талабни ифодаловчи омиллар билан аниқланади.

Ялпи *самарали талаб* истеъмол ва инвестиция йиғиндиси билан ифодаланади:

$$D = C + I. \tag{2}$$

Истеъмол талабини қуйидаги кўринишда ифодалаш мумкин:

$$C = cY + a \quad (0 < c < 1), \tag{3}$$

бу ерда C – талаб бўлиб, у Y – миллий даромадга чизиқли боғлиқ, c, a – ўзгармас сонлар, Y – даромад ўсганда истеъмол ҳам ўсади; c – коэффициентни *истеъмолга оғиш коэффициенти* дейилади; a – *базис истеъмолни* ифодалайди. (3) формула ёрдамида берилган функцияни *чизиқли истеъмол функцияси* дейилади.

Y_m – мувозанатли миллий даромад талаб ва таклифнинг қуйидаги тенглик шарти орқали ифодаланади:

$$D = Y_m\,. \tag{4}$$

(2),(3)га асосан

$$Y_m = cY_m + a + I \qquad (5)$$

тенгламадан ***мувозанатли миллий даромад*** аниқланади:

$$Y_m = \frac{1}{1-c}(a+I). \qquad (6)$$

$\frac{1}{1-c}$ ифода миллий даромад берилган инвестиция бўйича қай тарзда ўсишини кўрсатади. Шунинг учун уни инвестиция мультипликатори ёки оддий қилиб, ***мультипликатор*** дейилади.

Юқоридаги модел статик модел (яъни иқтисоднинг маълум вақтдаги ҳолатини ифодаловчи) бўлиб, унда миллий иктисоднинг вақт давомида ўзгариши ўрганилмаган. Иқтисод динамикасига оид масалалар кейинги бўлимларда кўрилади.

5.2. Ўсишнинг макромодели

Бу бўлимда ишлаб чиқариш қувватининг эффектив ошишига инвестиция ва капитал жамғариш жараёнини таъсир этишини ҳисобга олган ҳолда ўсишнинг макромоделини ўрганамиз. Ўсишнинг макромоделлари қаторига, жумладан, ишлаб чиқаришнинг ўзгармас коэффициентли Харрод-Домар модели ва ишлаб чиқаришнинг ўзгарувчи коэффициентли неоклассик модели киради. Ҳар иккала моделда ҳам ишлаб чиқариш функцияси $Y = F(K,L)$ ни бир жинсли деб оламиз. Бунда Y – миллий даромад, K – капитал, L – меҳнат бўлиб, марказий ўзгарувчи сифатида капиталнинг меҳнатга нисбати қаралади:

$$x = \frac{K}{L} \qquad (1)$$

(1)нинг ҳар икки томонини логарифмласак

$$\ln x = \ln K - \ln L$$

тенглик келиб чиқади. Бу тенгликни t бўйича дифференциаллаймиз. У ҳолда

$$\frac{\dot{x}}{x} = \frac{\dot{K}}{K} - \frac{\dot{L}}{L} \qquad (2)$$

муносабат ҳосил бўлади, бу ерда

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{K} = \frac{dK}{dt}, \dot{L} = \frac{dL}{dt}.$$

Агар $y = \dfrac{Y}{L}$ деб белгиласак, ишлаб чиқариш функциянинг чизиқли ва бир жинсли бўлганлиги сабабли, уни $y = F\left(\dfrac{K}{L}, 1\right)$ кўринишда ёзишимиз мумкин. Тенгликнинг ўнг томонини $f(x)$ деб белгиласак,

$$y = f(x) \qquad (3)$$

муносабатни ҳосил қиламиз. Бу муносабат меҳнат унумдорлиги $y = \dfrac{Y}{L}$ ни $x = \dfrac{K}{L}$ жамғарма билан алоқадорлигини кўрсатади.

Энди қуйидаги шартларни қўямиз:

1) ҳар бир вақт оралиғида *жамғариш меъёри* деб аталувчи $s = (Y–C) / Y$ катталик (бу ерда C – истеъмол миқдори) ўзгармас бўлсин ва жамғарилган капиталнинг ошиши шу вақтга тўғри келган янги инвестицион талабга тенг бўлсин, яъни

$$I = \dot{K}; \qquad (4)$$

2) меҳнат таклифининг ўсиши ўзгармас бўлиб, у n га тенг бўлсин, яъни

$$\frac{\dot{L}}{L} = n \qquad (5)$$

Бу ерда n – меҳнатнинг ўсиш суръатини характерлайди.

Энди макроиқтисодий ўсишнинг асосий тенгламасини келтириб чиқарамиз. Юқоридаги шартлар асосида (2) тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\dot{x} = x\frac{\dot{K}}{K} - nx$$

Аммо миллий даромад истеъмол ва жамғармадан иборат бўлганлигидан, яъни $Y = C + I$ бўлгани сабабли, (4)га асосан

$$x \cdot \frac{\dot{K}}{K} = x \cdot \frac{I}{K} = \frac{K}{L} \cdot \frac{I}{K} = \frac{Y}{L} \cdot \frac{I}{Y} = \frac{Y - C}{Y} \cdot \frac{Y}{L} = sf(x)$$

Бу ифодани юқоридаги тенгламага қўйилса,

$$\dot{x} = sf(x) - nx \tag{6}$$

ўсишнинг макромодел тенгламаси ҳосил бўлади.

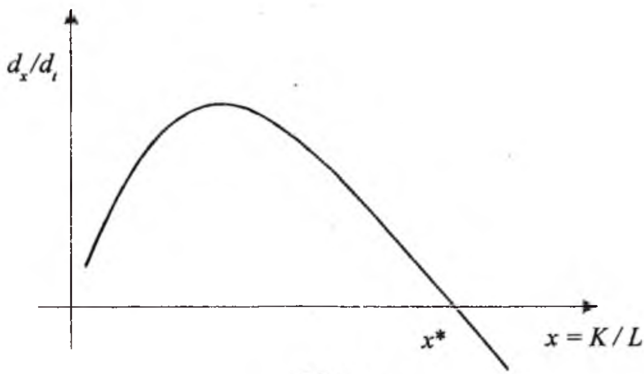
(6) тенгламани яна қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\Delta x = sf(x) - nx\ . \tag{7}$$

$\Delta x = 0$ бўлганда турғун мувозанатга эришилади. Бу ҳолда ўзгармас мувозанат нуқтасини x^* десак, иш билан бандликнинг, яъни меҳнатнинг *ўсиш суръати* ҳосил бўлади:

$$n = \frac{sf(x^*)}{x^*}\ .$$

Агар x нинг бошланғич қиймати x^*га тенг бўлмаса, x x^*га яқинлашган сари ўсиш чизиғи барқарорлашиб боради, аксинча, x^* дан узоқлашган сари чизиқ турғун бўлмайди (5.1-расм).



5.1-расм

5.1-расмда $Y = K^{0.75}L^{0.25}$ Кобб-Дуглас неоклассик ишлаб чиқариш функцияси учун капиталнинг меҳнатга нисбатининг ўсиш моделини ифодаловчи графиги тасвирланган.

5.3. Иккинчи тартибли рекуррент тенгламалар

Иқтисодий динамик моделларни ўрганишда рекуррент тенламалардан кенг фойдаланилади. 4-бобда биринчи тартибли рекуррент тенгламалар қўлланган эди. Қуйида иккинчи тартибли рекуррент тенгламалар ҳақида асосий маълумотларни келтирамиз.

p,q ва k лар ўзгармас сонлар бўлсин. У ҳолда

$$y(t) + py(t-1) + qy(t-2) = k \qquad (1)$$

тенгламани *2нчи тартибли ўзгармас коэффициентли рекуррент тенглама* дейилади.

$$y(t) + py(t-1) + qy(t-2) = 0 \qquad (2)$$

тенгламани *бир жинсли рекуррент тенглама* дейилади. Тенглама ечимлари

$$z^2 + pz + q = 0 \qquad (3)$$

характеристик тенглама ечимлари ёрдамида топилади.

1) дискриминат $D = p^2 - 4q > 0$ бўлса, (3) тенглама илдизлари

$$z_1 = \frac{-p-\sqrt{D}}{2}, \quad z_2 = \frac{-p+\sqrt{D}}{2}$$

бўлиб, (2) рекуррент тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишга эга:

$$y(t) = A_1 z_1^{\,t} + A_2 z_2^{\,t}, \qquad (4)$$

бу ерда A_1, A_2 – ўзгармас сонлар;

2) бўлганда, характеристик тенглама $z_1 = z_2 = -p/2$ илдизга эга, ва (2) тенгламанинг умумий ечими қуйидагича бўлади:

$$y(t) = (A_1 t + A_2) z_1^{\,t}; \qquad (5)$$

3) $D < 0$ да характеристик тенглама ҳақиқий илдизларга эга эмас. Бу ҳолда (2) рекуррент тенгламанинг умумий ечими

$$y(t) = r^t (A_1 \cos\theta t + A_2 \sin\theta t) \qquad (6)$$

формула билан ифодаланади,бу ерда $r = \sqrt{q}$; $\cos\theta = -p/2r$.

Бир жинсли бўлмаган (1) рекуррент тенгламанинг умумий ечими

$$y(t) = y^* + y_0(t) \qquad (7)$$

кўринишда бўлади. Бу ерда y^* – (1) рекуррент тенгламанинг хусусий ечими, $y_0(t)$ - бир жинсли тенгламанинг умумий ечими. y^* – хусусий ечим сифатида $y^* = k/(1+p+q)$ ечимни олиш мумкин. Умумий ечимдаги A_1, A_2 параметрларни $y(0)=y_0$, $y(1)=y_1$ бошланғич шартлар асосида топилади.

1-мисол. $y(t)-7y(t-1)+12y(t-2)=0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

Ечиш. Характеристик тенглама $z^2-7z+12=0$ иккита ечимга эга: $z_1=3$; $z_2=4$. Демак, умумий ечим (4) га кўра $y(t)=A_1 3^t+A_2 4^t$ бўлади.

2-мисол. $y(t)-2y(t-1)+2y(t-2)=1$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг ва бошланғич $y_0=2$, $y_1=3$ шартларни қаноатлантирадиган хусусий ечимни топинг.

Ечиш. Характеристик тенглама ечимга эга эмас. Демак, умумий ечим қуйидагича бўлади:

$$y(t)=r^t(A_1\cos\theta t+A_2\sin\theta t)+y^*$$

бу ерда $r=\sqrt{q}=\sqrt{2}$, $\cos\theta=-\dfrac{p}{2r}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta=\pi/4$ $y^*=k/(1+p+q)=1$.

Бошланғич шартлардан фойдаланиб A_1, A_2 коэффициентларни аниқлаймиз:

$$y(0)=A_1+1=y_0=2;\qquad A_1=1;$$
$$y(1)=\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+A_2\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+1=2+A_2=y_1=3;\qquad A_2=1$$

Демак, масала ечими қуйидагича бўлади:

$$y(t)=(\sqrt{2})^t(\cos(\pi t/4)+\sin(\pi t/4))+1.$$

5.4. Иқтисод динамикаси

5.1 да статик иқтисод модели кўрилган эди. Энди эса ундан фарқли иқтисодий-динамик моделларни, яъни иқтисоднинг ривожланишини ифодаловчи математик моделларни кўриб ўтамиз.

Юқоридаги мувозанат шартларини ўзгарувчан ҳолатда кўриб чиқамиз. Фараз қилайлик, иқтисод кўрсаткичлари бир хил узунликдаги даврлар мобайнида ўлчанмоқда (мисол учун, ҳар йилда). t билан вақт даврини белгилаймиз. Унда кўрсаткичлар t га боғлиқ бўлади ва 5.1 бўлимдаги мувозанат шартлари қуйидаги кўринишга эга бўлади:

$$Q(t)=Y(t),\quad Y(t)=C(t)+I(t). \qquad (1)$$

Иқтисодниинг ўзгаришини ёки динамикасини ифодалаш мақсадида асосий кўрсаткичлар орасидаги боғланишларни топиш асосий муаммо ҳисобланади. Қуйида Америкалик иқтисодчи Пауль Самуэльсон томонидан ривожлантирилган *мультипликатор-акселератор моделини* кўриб чиқамиз. Бу моделда юқоридаги кўрсаткичларни боғловчи шартлар қўйилади.

1. Бу йилги истеъмол аввалги йилдаги даромадга чизиқли боғлиқ:

$$C(t)=c+вY(t-1),\quad (c,в>0). \qquad (2)$$

2. Бу йилги инвестициялар олдинги йиллардаги ишлаб чиқаришнинг ўсишига чизиқли боғлиқ:

$$I(t)=i+v(Q(t-1)-Q(t-2)),\quad (i,v>0) \qquad (3)$$

бу ердаги ўзгармас v *акселерация коэффициенти* дейилади.

Бу шартларни биргаликда кўрилса, фақат Y га боғлиқ тенгламани ҳосил қилиш мумкин:

$$\begin{aligned} Y(t)=C(t)+I(t)&=(c+вY(t-1))+i+v(Q(t-1)-Q(t-2))=\\ &=(c+вY(t-1))+i+v(Y(t-1)-Y(t-2))=\\ &=c+i+(в+v)Y(t-1)-vY(t-2), \end{aligned}$$

ёки

$$Y(t)-(в+v)Y(t-1)+vY(t-2)=c+i \qquad (4)$$

2нчи тартибли рекуррент тенглама ҳосил бўлади. Бу тенглама вақтга боғлиқ бўлмаган $Y^*=(c+i)/(1-в)$ хусусий ечимга эга (бу ечимни $Y(t)=Y(t-1)=Y(t-2)=Y^*$ шартларни (4)га қўйиб, топилади).

Тенгламани ечиш учун унинг характеристик тенгламасини тузамиз ва қуйидаги 3та ҳолни кўриб чиқамиз:

1) характеристик тенглама дискриминанти $D=(в+v)^2-4v>0$. Бунда характеристик ечимлар

$$z_1=\frac{(в+v)-\sqrt{D}}{2},\quad z_2=\frac{(в+v)+\sqrt{D}}{2}, \qquad (6)$$

бўлади ва рекуррент тенгламанинг умумий ечими

$$Y(t) = Y^* + A_1 z_1^t + A_2 z_2^t \qquad (7)$$

бўлади. Бу ерда A_1, A_2 – ўзгармас параметрлар.

2) $D = 0$, ёки $(в + v)^2 = 4v$. Бунда характеристик тенглама иккита устма-уст тушувчи $z = \dfrac{в + v}{2}$ ечимга эга ва рекуррент тенгламанинг умумий ечими қуйидаги кўринишда бўлади:

$$Y(t) = Y^* + (A_1 t + A_2)\left(\frac{в + v}{2}\right)^t. \qquad (8)$$

3) $D < 0$. Бунда характеристик тенглама ҳақиқий ечимга эга эмас, рекуррент тенгламанинг ечими тебранувчи чизиқни ифодаловчи

$$Y(t) = Y^* + r^t\left(A_1 \cos\theta t + A_2 \sin\theta t\right), \qquad (9)$$

муносабатдан иборат бўлиб, бу ерда $r = \sqrt{v}$, $\cos\theta = (в + v)/(2\sqrt{v})$. Бунда, агар $v < 1$ бўлса, тебраниш амплитудаси камайиб боради ва t нинг қиймати ошиши билан $Y(t)$ Y^* га яқинлашиб боради. Аксинча, $v > 1$ бўлса, тебраниш амплитудаси ортиб боради ва t нинг катта қийматларида $Y(t)$ нинг қийматлари ҳам катталашади.

Ечимнинг тебранувчанлиги унда қатнашган $cos\theta t$ ва $sin\theta t$ функцияларнинг даврийлигидан келиб чиқади. Мисол сифатида 5.3 да қаралган 2-мисол ечимини келтириш мумкин:

$$y(t) = (\sqrt{2})^t\left(\cos(\pi t/4) + \sin(\pi t/4)\right) + 1.$$

Биринчи бир нечта $y(t)$ ларни ҳисобласак, қуйидаги кетма-кетлик ҳосил бўлади:

2; 3; 3; 3,83; –3; –7; –7; 12,4; 17; ...

Кўриниб турибдики, бу ечим ўсувчи амплитуда билан тебранмоқда

Умуман олганда, рекуррент тенгламанинг ечимлари унга мос характеристик тенглама ҳақиқий ечимларга эга бўлган ҳолда ҳам тебранувчанлик хоссасига эга бўлиши мумкин. Шу муносабат билан қуйидаги мисолни кўрайлик.

3-мисол. $y(t) + 2y(t-1) - 8 = 0$ тенгламанинг $y(0) = 0$, $y(1) = 6$ бошланғич шартларини қаноатлантирадиган ечимини топинг ва уни изоҳланг.

Ечиш. Масаланинг ечими $y(t) = 2^t - (-4)^t$ бўлади. Ёки $y(t) = (-4)^t((-\frac{1}{2})^t - 1)$.

Охирги тенгликдан кўринадики, t ўсиб борган сари $y(t)$ ифода мусбат ва манфий қийматларни қабул килади ва бу қийматлар модул бўйича чексиз ўсиб боради. Демак, ечим ўсувчи амплитуда билан тебранувчи бўлар экан.

5.5. Бизнес-цикллар

Юқорида келтирилган динамик моделлар айрим ҳолларда тебранувчи характерга эга эканлигини кўриб ўтдик. Иктисодий ўзгаришларни тўлқинсимон кўринишдаги ривожланишига тегишли қонуниятларни топиш иқтисодчилар эътиборини доимо жалб қилиб келади. Бу муаммо *бизнес-цикл (business cycle)* муаммоси деб юритилади.

Фараз қилайлик, t-йилда миллий даромад $Y(t)$

$$Y(t)-(в+v)Y(t-1)+vY(t-2)=c+i,\ в>0,\ n>0 \qquad (1)$$

рекуррент тенглама билан аниқлансин. (1)га мос характеристик тенгламанинг ечимларини аниқлашда 3та ҳолни кўриб чикамиз:

1) $(в+v)^2>4v$. У ҳолда

$$z_1=\frac{(в+v)-\sqrt{(в+v)^2-4v}}{2},\quad z_2=\frac{(в+v)+\sqrt{(в+v)^2-4v}}{2}.$$

Кўриниб турибдики, $0<z_1<z_2$. (1) тенламанинг умумий ечими

$$Y(t)=Y^*+A_1z_1^t+A_2z_2^t \qquad (2)$$

тенглик билан ифодаланади, бу ерда хусусий ечим $Y^*=(c+i)/(1-в)$. (2) муносабатни бошқача кўринишда ифодалаймиз:

$$Y(t)=Y^*+\ z_2^t\,(A_1(z_1/z_2)^t+A_2) \qquad (3)$$

Бу ердан вақт ўтиши билан $Y(t)$ нинг қийматларини $Y^*+A_2z_2^t$ ифода қийматлари билан алмаштириш мумкинлиги келиб чиқади. Аниқроғи, агар $A_2=0$ бўлса, $Y(t)\approx Y^*$; $A_2>0$ ($A_2<0$) бўлса, $Y(t)$ чексиз катталашади (кичиклашади).

2) $(в+v)^2=4v$. Бунда тенглама ечими қуйидагича бўлади:

$$Y(t)=Y^*+(A_1t+A_2)z^t, \qquad (4)$$

бу ерда $z = \left(\frac{в+v}{2}\right)^t$. t нинг катта қийматларида $Y(t)$ $Y^* + A_1tz^t$ га яқинлашади ва A_1 нинг қийматига қараб: $A_1 = 0$ бўлса, $Y(t) \approx Y^*$; $A_2>0$ ($A_2<0$) бўлса, $Y(t)$ чексиз катталашади (кичиклашади).

3) $(в+v)^2<4v$. Бунда тенглама ечими қуйидагича бўлади:

$$Y(t) = Y^* + r^t(A_1 cos\theta t + A_2 sin\theta t) \ , \qquad (5)$$

бу ерда $r = \sqrt{v}$, $cos\theta = (в+v) / (2r)$. Бу ҳолатда ечимнинг тебранувчан бўлиши v-акселерация коэффициентига боғлиқлиги 5.4 бўлимда кўрсатилди.

Шундай қилиб, биз кўриб чиққан миллий иқтисод моделида бир нечта турдаги ҳолатлар мавжуд бўлиб, уларнинг энг эътиборлиги параметрларнинг баъзи қийматларида жараённинг тебранувчан хусусиятта эга бўлишидир. Хусусан, $(в+v)^2<4v$ бўлганда миллий даромад $Y(t)$ тебранувчан характерга эга ва $v>1$ бўлганда, ўсувчи амплитуда билан тебранади, $v<1$ да эса камаювчи амплитуда билан $(c+i) / (1-в)$ қийматга яқинлашади.

Асосий мавзулар

- асосий макроиқтисодий қарашлар
- мувозанатли миллий даромадни ҳисоблаш
- ўсишнинг макромодели
- иккинчи тартибли биржинсли чизиқли рекуррент тенгламанинг умумий ечими
- иккинчи тартибли биржинсли бўлмаган чизиқли рекуррент тенгламанинг умумий ечими
- бошланғич шартлардан фойдаланиш
- мультипликатор-акселератор модели
- мультипликатор-акселератор тенгламаларнинг ечимлари
- бизнес-цикллар

Таянч иборалар, формулалар

- инвестиция, I; ишлаб чиқариш, Q; даромад, Y; истеъмол, C
- мувозанат, $Q = Y$, $Y = C + I$
- самарали талаб, $D = C + I$
- истеъмолга оғиш коэффициенти, c, $C = cY + a$
- мувозанатли миллий даромад

$$Y_m = \frac{1}{1-c}(a + I)$$

- мультипликатор, $1 / (1-c)$
- ўсишнинг макромодели, $\dot{x} = sf(x) - nx$
- ўсиш суръати, $n = \dfrac{sf(x^*)}{x^*}$
- иккинчи тартибли биржинсли чизиқли рекуррент тенглама, $y(t) + py(t-1) + qy(t-2) = 0$
- характеристик тенглама, $z^2 + pz + q = 0$
- характеристик ечимларга боғлиқ биржинсли тенгламанинг ечими:
  иккита ҳар хил ечимлар, z_1, z_2: $y(t) = A_1 z_1^t + A_2 z_2^t$
  битта ечим, z_0: $y(t) = (A_1 t + A_2) z_0^t$
  ечим йўқ: агар $r = \sqrt{q}$ ва $\cos\theta = -\dfrac{p}{2r}$ бўлса,

$$y(t) = r^t (A_1 \cos\theta t + A_2 \sin\theta t)$$

- бошланғич шартлар, y_0, y_1
- биржинсли бўлмаган тенглама ечими: хусусий ечим + биржинсли тенгламанинг умумий ечими
- $y(t) + py(t-1) + qy(t-2) = k$ нинг ечими: $y^* = k / (1 + p + q)$
- динамик кўрсаткичлар, $I(t)$, $Q(t)$, $Y(t)$, $C(t)$
- мультипликатор-акселератор модели, $C(t) = c + вY(t-1)$, $I(t) = i + v(Q(t-1) - Q(t-2))$
- бизнес-цикл муаммоси

Саволлар

- Чизиқли талаб функциясида (5.1, (3)) ($0< c <1$) шартни изоҳлаб беринг
- Динамик иқтисод моделда 3 нчи ҳолатда $\nu = 1$ бўлганда, қандай тебраниш ҳосил бўлади?

Машқлар

1-машқ. $y(t) - 8y(t-1) + 16 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

2-машқ. $y(t) + 8y(t-1) - 9 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

3-машқ. $y(t) + 2y(t-1) + 3 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

4-машқ. $y(t) + y(t-1) - 12 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг ва $y_0 = 0$, $y_1 = 2$ бошланғич шартларини қаноатлантирувчи хусусий ечимни аниқланг.

5-машқ. $y(t) - 2-(t-1) + 5 = 0$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг ва $y_0 = 0, y_1 = 5$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни аниқланг.

6-машқ. $y(t) - 9y(t-1) + 20 = 18$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг.

7-машқ. $y(t) + 4y(t-1) + 4 = 12$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг ва $y_0 = 1$, $y_1 = 11$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни аниқланг.

8-машқ. $y(t) + 2y(t-1) + 3 = 5$ рекуррент тенгламанинг умумий ечимини топинг ва $y_0 = 1/2$, $y_1 = 5/2$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни аниқланг.

9-машқ. Қуйидаги тенгламалар соддалаштирилган иқтисод моделига тегишли:

$$C(t) = \frac{2}{5} Y(t-1), \quad I(t) = 25 + \frac{1}{5}\,(Q(t-1) - Q(t-2))$$

Y га нисбатан рекуррент тенгламани тузинг ва $Y_0 = 12$, $Y_1 = 25$ бошланғич шартларни қаноатлантирувчи хусусий ечимни аниқланг. Ечимни изоҳлаб беринг.

6-боб. Тармоқлараро баланс моделлари

6.1. Кўп тармоқли иқтисод

4-бобда икки тармоқли иқтисод моделини ўрганган эдик. Энди кўп тармоқли иқтисодда тармоқлараро баланс моделини кўриб чиқамиз. Бунда n та бир-бирига боғлиқ бўлмаган ишлаб чиқариш тармоқлар ўрганилади. Ҳар бир тармоқда маҳсулот ишлаб чиқариш учун бошқа тармоқдаги маҳсулотлардан фойдаланишга тўғри келади (ички истеъмол). Бу моделни ***«ишлаб чиқариш — сарфлаш» модели (input-output)*** деб юритиш мумкин. Моделга машҳур иқтисодчи В. Леонтьев асос солди (В. Леонтьев 1973 йили иқтисод соҳасида Нобел мукофоти лауреати бўлган).

Ҳар бир тармоқда фақат битта маҳсулот ва бу маҳсулот фақат шу тармоқдагина ишлаб чиқилмоқда деб фараз қилайлик.

α_{ij} билан j-нчи маҳсулотнинг 1 бирлигини ишлаб чиқариш учун i-нчи маҳсулот сарфининг миқдорини белгилаймиз ($\alpha_{ij} \geq 0$). Элементлари α_{ij} (i,j =1,2,..., n) коэффициентлардан ташкил топган А матрицани *технологик матрица* дейилади. s_i — ташқи истеъмолга режалаштирилган, x_i — ички ва ташқи истеъмолни қоплайдиган i-нчи (i=1,2,..., n) маҳсулот ҳажми бўлсин. Унда берилган s_i қийматлар, ҳамда конкрет A технологик матрица учун қуйидаги баланс тенгламалари системасини тузиш мумкин:

$$\begin{cases} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + s_1 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + s_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + s_{nn}x_n + s_n \end{cases} \qquad (1)$$

Бу системанинг матрицавий кўриниши:

$$X = AX+S \qquad (2)$$

бўлади, бунда, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_n \end{pmatrix}.$

(2) тенгламанинг ечими

$$X = (I - A)^{-1} S \qquad (3)$$

кўринишда бўлади, бу ерда I — бирлик матрица, $L = I - A$ матрицани *Леонтьев матрицаси* дейилади.

1-мисол. 3 тармоқли иқтисодда 2 хил маҳсулот — кўмир, электр энергия ишлаб чиқарилади ҳамда транспорт хизмати ташкил қилинган. 1 сўмлик кўмир маҳсулотини ишлаб чиқариш учун 0,2 сўмлик электр энергия ва 0,25 сўмлик транспорт харажати сарфланади. Шунингдек, 1 сўмлик электр энергияни ишлаб чиқариш учун 0,7 сўмлик кўмир маҳсулоти, 0,1 сўмлик электр энергия ва 0,05 сўмлик транспорт харажатлари сарфланади. 1 сўмлик транспорт хизмати учун 0,6 сўмлик кўмир ва 0,1 сўмлик электр энергия сарфланади. Кўриладиган муддат учун 40 млн. сўмлик кўмир ва 15 млн. сўмлик электр энергия ҳамда 20 млн. сўмлик транспорт хизмати ташқи истеъмолга режалаштирилади. Маҳсулотларни ишлаб чиқариш режасини топинг.

Ечиш. Баланс тенгламаларини тузамиз:

$$\begin{cases} x_1 = 0,7x_2 + 0,6x_3 + 40000000 \\ x_2 = 0,2x_1 + 0,1x_2 + 0,1x_3 + 15000000 \\ x_3 = 0,25x_1 + 0,05x_2 + 20000000 \end{cases}$$

Бунда технологик матрица

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0,7 & 0,6 \\ 0,2 & 0,1 & 0,1 \\ 0,25 & 0,05 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 40000000 \\ 15000000 \\ 20000000 \end{pmatrix}.$$

Леонтьев матрицаси

$$I - A = \begin{pmatrix} 1 & -0,7 & -0,6 \\ -0,2 & 0,9 & -0,1 \\ -0,25 & -0,05 & 1 \end{pmatrix}.$$

Бундан

$$(I - A)^{-1} = \begin{pmatrix} 1,49 & 0,38 & 0,39 \\ 1,22 & 1,42 & 0,54 \\ 1,02 & 0,37 & 1,27 \end{pmatrix} \quad \text{ва} \quad X = (I - A)^{-1} S = \begin{pmatrix} 73100000 \\ 80900000 \\ 71750000 \end{pmatrix}.$$

Демак $x_1 = 73,1$ млн. сўм, $x_2 = 80,9$ млн. сўм, $x_3 = 71,75$ млн. сўм.

6.2. Харажат коэффициентларини ҳисоблаш

Юқорида кўрилган A матрица коэффициентларини *бевосита харажат коэффициентлари* дейилади. Бу коэффициентлар бирор бир тармоқнинг бир бирлик маҳсулотини ишлаб чиқариш учун барча тармоқлардаги маҳсулотлар сарфини ифодалайди. Масалан, j-нчи тармоқда 1 бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$ маҳсулотлар зарур бўлади. Табиийки, $\sum_{i=1}^{n} a_{ij} < 1, \quad j = \overline{1,n}$. Бу тенгсизликнинг иқтисодий маъноси шундан иборатки, 1 сўмлик ихтиёрий j махсулот учун кетган барча тармоқлардаги маҳсулотлар харажати 1 дан кичик бўлади. Юқоридаги тенгсизлик эса $\sum_{m=0}^{\infty} A^m, \quad A^0 = I$ матрицавий қаторни яқинлашувини таъминлайди.

Ўз навбатида, бу маҳсулотларнинг ҳар бирини ишлаб чиқариш учун яна барча тармоқлардаги маҳсулотлар сарфланади. Бу билвосита харажатлар $A \cdot A = A^2$ матрицани ташкил қилади.

2-мисол. Бевосита харажат коэффициентлари матрицаси: $A = \begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix}$ бўлсин. Бунда $\begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{bmatrix}$ векторлар 1-нчи ва 2-нчи маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун маҳсулотлар харажатини ифодалайди. Ўз навбатида бу маҳсулотларни ишлаб чиқариш учун мос равишда 1 ва 2 – маҳсулотлардан қуйидаги ҳажмда харажат зарур бўлади:

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,4 \\ 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \cdot 0,4 + 0,6 \cdot 0,5 \\ 0,5 \cdot 0,4 + 0,8 \cdot 0,5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,46 \\ 0,60 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0,4 & 0,6 \\ 0,5 & 0,8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0,6 \\ 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,4 \cdot 0,6 + 0,6 \cdot 0,8 \\ 0,5 \cdot 0,6 + 0,8 \cdot 0,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,72 \\ 0,94 \end{bmatrix}$$

Бу векторлар қуйидаги матрицани ташкил этади:

$$\begin{bmatrix} 0,46 & 0,72 \\ 0,60 & 0,94 \end{bmatrix} = A^2$$

Бундан, масалан, биринчи маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун иккинчи маҳсулотнинг билвосита харажати 0,60 га, иккинчи маҳсулотнинг бир бирлигини ишлаб чиқариш учун биринчи маҳсулотнинг билвосита харажати 0,72 га тенглиги келиб чиқади.

Шунга ўхшаш мулоҳазаларни давом эттириб, билвосита харажатлар учун A^3, A^4 ва ҳоказо матрицаларни ташкил қилиш мумкин. Бу жараён тўлиқ харажатлар тушунчасига олиб келади. Барча бевосита ва билвосита харажатлар йиғиндиси ***тўлиқ харажатлар*** дейилади.

Тўлиқ моддий харажат коэффициентлари матрицаси C қуйидагича аниқланади:

$$C = A + A^2 + A^3 + \ldots$$

Бу қаторнинг чеклилигини аниқлаш учун $B = I + C$ матрицани киритамиз, бу ерда I - бирлик матрица, C - тўлиқ моддий харажатлар матрицаси. У ҳолда

$$B = I + C = I + \sum_{k=1}^{\infty} A^k = \sum_{k=0}^{\infty} A^k$$

матрицали қатор ҳосил бўлади. Юқоридаги A матрица ҳақидаги айтилганларга биноан , B матрица Леонтьев матрицасининг тескариси билан устма-уст тушганини кўрамиз, ва 6.1-бўлимдаги таҳлилга кўра B матрица ва, демак, C матрица ҳам маънога эга бўлади.

Асосий мавзулар

- «ишлаб чиқариш — сарфлаш» моделини тузиш
- модел ечимини топиш
- ечимнинг мавжуд ва ягоналиги таҳлили
- харажат коэффициентларини ҳисоблаш

Таянч иборалар, формулалар

- «ишлаб чиқариш-сарфлаш» модели $X = AX + S$,
- технологик матрица, $A = (a_{ij})$
- Леонтьев матрицаси, $L = I - A$
- ечим мавжуд ва ягоналигининг етарли шарти, $\sum_i a_{ij} < 1$
- бевосита харажатлар коэффициенти, a_{ij}
- тўлиқ харажатлар матрицаси, $C = A + A^2 + A^3 + \ldots$

Саволлар

- Нима учун тармоқлараро баланс моделини «ишлаб чиқариш — сарфлаш» модели дейилади ?
- Ташқи истеъмол режалаштирилмаган бўлса, қандай масала ҳосил бўлади ?
- Тўлиқ харажатлар деб нимага айтилади?
- $\sum_i a_{ij} < 1, \quad j = 1,2,...,n$ шартни иқтисодий шарҳи қандай?

Машқлар

1-машқ. «Ишлаб чиқариш — сарфлаш» модели икки секторли иқтисодиёт учун қуйидаги матрица билан ифодаланган бўлсин:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}$$

Модел тенгламаларини ташқи истеъмол S ва ишлаб чиқариш миқдорлар X га нисбатан тузинг ва ечимларини топинг.

2-машқ. Корхона 2 хил маҳсулот: M_1 ва M_2 ишлаб чиқмоқда. 1 сўмлик M_1 маҳсулот ишлаб чиқариш учун 0,25 сўмлик M_1 ва 0,15 сўмлик M_2 маҳсулотлар сарфланади. 1 сўмлик M_2 маҳсулот учун 0,1 сўмлик M_1 ва 0,2 сўмлик M_2 маҳсулотлар сарфланади. Бозордаги маҳсулотларга бўлган талаб маълум давр учун 600000 сўмлик M_1 ва 400000 сўмлик M_2 маҳсулотлар миқдорини ташкил этади. Бозор талабини қондирадиган маҳсулотлар ишлаб чиқариш ҳажмини аниқланг.

3-машқ. Корхона уч хил M_1, M_2, M_3 маҳсулот ишлаб чиқади. 1 сўмлик M_1 маҳсулот ишлаб чиқиш учун 0,05 сўм M_1; 0,1 сўм M_2 ва 0,1 сўм M_3 маҳсулотлар сарфланади, 1 сўмлик M_2 маҳсулот ишлаб чиқиш учун 0,3 сўм M_1 ва 0,1 сўм M_3 маҳсулотлар сарфланади, 1 сўмлик M_3 маҳсулот ишлаб чиқиш учун 0,1 сўм M_1 ва 0,2 сўм M_2 маҳсулотлар сарфланади. Ҳар ойда бу маҳсулотларга ташқи талаб 160000, 400000 ва 1200000 сўмни ташкил этади. Ҳар бир маҳсулот учун ойлик ишлаб чиқариш режасини топинг.

7-боб. Чегаравий оптимизация

7.1. Шартли экстремумга доир масалаларни ечишда Лагранж усули

Лагранж кўпайтувчилари усули

Қуйидаги масалани қараймиз. $y = f(x_1, x_2)$ функциянинг $g(x_1, x_2)= 0$ чегаравий шарт бўйича (бу ерда x_1 ва x_2 ўзгарувчилар бир-бирига боғлиқ эмас) локал максимум (локал минимум) қийматини топиш талаб этилсин, яъни:

$$f(x_1, x_2) \to max\ (f(x_1,x_2) \to min), \qquad (1)$$
$$g(x_1, x_2)= 0. \qquad (2)$$

(1)-(2) масала *шартли локал максимум (минимум) масаласи* дейилади. Бу ерда f ва g функцияларни ўзларининг биринчи тартибли хусусий ҳосилалари билан биргаликда узлуксиз деб фараз қилинади.

Юқоридаги масалани ечиш учун *Лагранж функцияси* деб аталувчи қуйидаги уч ўзгарувчили функция тузилади:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2). \qquad (3)$$

Бу билан (1)−(2) шартли экстремум ҳақидаги масала x_1, x_2, λ уч ўзгарувчили $L(x_1, x_2, \lambda)$ функциянинг абсолют (шартсиз) экстремумини топишга келтирилади. $L(x_1, x_2, \lambda)$ Лагранж функцияси (1) мақсад функция ҳамда (2) чегаравий функциянинг λ − янги, эркли ўзгарувчига кўпайтманинг йиғиндисидан иборат. λ − ўзгарувчини *Лагранж кўпайтувчиси* дейилади.

$f(x_1, x_2)$ ва $g(x_1, x_2)$ функциялар узлуксиз ва узлуксиз хусусий ҳосилаларга эга бўлсин. Шунингдек, (x_1^0, x_2^0) − мақсад функциянинг шартли локал экстремум нуқтаси бўлсин. У ҳолда шундай λ^0 сон топиладики, у қуйидаги тенгламалар системасини қаноатлантиради:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_1} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial x_2} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial L(x_1,x_2,\lambda)}{\partial \lambda} = g(x_1, x_2)= 0\,. \end{cases} \qquad (4)$$

Бошқача қилиб айтганда, агар (x_1^0, x_2^0) нуқта (1) функциянинг шартли локал экстремум нуқтаси бўлса, у ҳолда $(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ нуқта Лагранж функциясининг критик нуқтаси бўлади. Демак, (1) функциянинг шартли локал экстремум нуқтасини топиш учун Лагранж функциясининг критик нуқтаси топилар экан.

$(x_1^0, x_2^0, \lambda^0)$ нуқтада $L(x_1, x_2, \lambda)$ функция экстремал қийматларга эга бўлади. Аммо критик нуқтада максимум ёки минимум қийматларга эга бўлишини аниқлаш учун аниқланиш соҳасига тегишли критик нуқтада функция қийматини текширишга тўғри келади.

Мисол. $y = x_1 x_2$ функциянинг $x_1 + x_2 - 1 = 0$ шарт бўйича экстремумларини топинг.

Ечиш. Лагранж методига кўра

$$L(x_1, x_2, \lambda) = x_1 x_2 + \lambda(x_1 + x_2 - 1).$$

Лагранж функциясининг хусусий ҳосилаларини топамиз:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 + \lambda = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 + \lambda = 0\,, \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 1 = 0\,.$$

Бундан ҳосил бўлган тенгламалар системасини ечамиз:

$$\begin{cases} x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1^0 = x_2^0 = \tfrac{1}{2} \quad \lambda^0 = -\tfrac{1}{2}$$

Система ягона $\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -\frac{1}{2}\right)$ ечимга эга экан. Демак, $(x_1^0, x_2^0) = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$ нуқта берилган функциянинг шартли локал минимум нуқтаси бўлади, чунки бевосита текшириш мумкинки, $x_1 + x_2 - 1 = 0$ шартни қаноатлантирадиган ихтиёрий (x_1, x_2), ҳамда (x_1^0, x_2^0) нуқталар учун $f(x_1, x_2) \geq f(x_1^0, x_2^0) = \frac{1}{4}$ бўлади.

Лагранж усули: умумий кўриниши

Юқорида Лагранж усулини икки ўзгарувчили функция ва битта чегаравий шартга нисбатан қўлланиши кўрилди. Бу усулни умумлаштириш мумкин ва n та ўзгарувчи, ҳамда m та чегаравий шарт учун қўлласа бўлади. Фараз қилайлик, $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функциянинг $g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \ldots, g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$ шартлар бажарилганда минимал ёки максимал қийматини топиш масаласи қўйилган бўлсин. Лагранж функциясини қуйидагича киритамиз:

$$L = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \lambda_1 g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \ldots + \lambda_m g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (5)$$

бу ерда $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ – Лагранж кўпайтувчилари. Масала ечими

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial L}{\partial x_2}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial L}{\partial x_n}=0,\quad g_1=0, g_2=0, \ldots, g_m=0 \qquad (6)$$

тенгламалар системасини ечиш орқали топилади.

7.2. Фирманинг элементар назарияси

3-бобда ишлаб чиқаришнинг оптимал ташкил қилиш масаласи кўрилган эди ва ечими геометрик усули билан топилган эди. Энди бу масалага яна қайтиб, Лагранж усули ёрдамида харажатларни минималлаштириш масаласини ечиб кўрамиз.

Фирмада (корхонада) ишлаб чиқариш жараёнини k-капитал ва l-меҳнат ресурсларга боғлиқ икки ўзгарувчили $F(k, l)$ ишлаб чиқариш функцияси ифодалайди деб фараз қилайлик.

Агар капитал ва меҳнатларининг бир бирликлари нархлари мос равишда s, v бўлса, ишлаб чиқаришда ресурсларга сарфланган W харажатлар

$$W = sk + vl \qquad (1)$$

бўлади. Корхона Q^* ҳажмда маҳсулотни ишлаб чиқаришни режалаштирган бўлса, бунга энг кам харажатлар билан эришишга интилиши табиийдир. Ишлаб чиқаришни бундай оптимал ташкил этишнинг иқтисодий математик моделини чизиқли чегаравий оптимизация масаласи кўринишда ифодалаш мумкин.

$$W = sk + vl \to \min, \qquad (*)$$
$$F(k, l) = Q^* \qquad (**)$$

Бунда *W-мақсад функция*, (**) – *чегаравий шарт* дейилади. Масаланинг *оптимал ечими* (оптимал режа) (k^*, l^*) чегаравий шартни қаноатлантирувчи режалар орасида W-мақсад функцияга энг кичик қиймат келтирувчи режа ҳисобланади.

Мисол $s = 20$, $v = 4$, ишлаб чиқариш функцияси $5kl$ бўлсин. Корхона $Q^* = 3600$ бирлик маҳсулот ишлаб чиқаришни режалаштирмоқда.

Бу масалани қуйидаги кўринишда ифодаласа бўлади:

$$W = 20k + 4l \to \min$$
$$5kl = 3600 \qquad (2)$$

(2) масалани шартли экстремумни топиш масаласи деб қараш мумкин ва уни ечиш учун 7.1. да кўрилган Лагранж кўпайтувчилари усулини қўлласа бўлади:

$$L=(20k+4l)+\lambda(5kl-3600),\quad \partial L/\partial k=20+5\lambda l=0,$$
$$\partial L/\partial l=4+5\lambda k=0,\quad \partial L/\partial\lambda=5kl-3600=0\Rightarrow k^*=12;\quad l^*=60.$$

Демак, 3600 бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун корхона 12 бирлик капитал ва 60 бирлик меҳнат ресурсларидан фойланади. Бунда ишлаб чиқариш харажатлари $W=20\cdot 12+4\cdot 60=480$ бўлади ва бу харажатлар мумкин бўлган энг кичик қийматни ташкил этади.

Буни текшириш учун $5kl=3600$ тенгламадан $k=720/l$ ни топиб, харажат функциясини бир ўзгарувчили кўринишга келтирамиз: $W=20\cdot(720/l)+4l$, ёки $W=14400/l+4l$. Энди бу функциянинг иккинчи ҳосиласини $l=60$ қийматида ҳисобласак, $d^2W(60)/dl^2>0$ тенгсизлик ҳосил бўлади. Бу шарт эса $l=60$ қийматда $W(l)$ функция минимумга эришишини билдиради. Шу билан бирга (12;60) нуқтада ишлаб чиқариш харажати минимал бўлиши ҳам исботланади.

Қурилган масалада корхона режалаштирган $Q^*=3600$ бирлик маҳсулотни минимал харажатлар билан ишлаб чиқариш масаласи ечилди. Агар бундай оптималлаштириш масалани ихтиёрий Q учун қўйиб ечсак, оптимал ишлаб чиқариш учун мос *минимал харажатлар функцияси* $C(Q)$ ни топган бўламиз. $C(Q)$ – берилган Q миқдорда маҳсулот ишлаб чиқариш баҳосини ифодалайди. Масалан, 7.2 даги мисолни $Q^*=3600$ ўрнида ихтиёрий Q учун ечсак, $k=\frac{1}{5}\sqrt{Q}$, $l=\sqrt{Q}$ бўлади ва Q миқдорда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг минимал баҳоси

$$C(Q)=20k+4l=8\sqrt{Q}$$ бўлади.

Албатта фирма ишлаб чиқариш жараёнини ташкил этишда минимал харажатларга интилади. Аммо бош мақсад – ишлаб чиқилган маҳсулотни сотиб, кўпроқ фойда кўришдир.

Фараз қилайлик, корхонадаги ишлаб чиқариш жараёни

$$F(k,l)=Ak^{\alpha}l^{\beta}\,(A,\alpha,\beta>0)\qquad(3)$$

Кобб-Дуглас ишлаб чиқариш функцияси билан аниқланган. Агар s, v – капитал ва меҳнат ресурслари бир бирликларининг баҳолари бўлса, Q миқдорда маҳсулот ишлаб чиқаришнинг минимал баҳосини

$$sk+vl\to\min,\quad Ak^{\alpha}l^{\beta}=Q\qquad(4)$$

оптимизация масаласи ечими кўринишида топиш мумкин. Ечимни Лагранж усулидан фойдаланиб топамиз:

$$L = (sk + vl) + \lambda(Ak^{\alpha}l^{\beta} - Q),\ \partial L / \partial k = s + \lambda\alpha Ak^{\alpha-1}l^{\beta} = 0,$$

$$\partial L / \partial l = v + \lambda\beta Ak^{\alpha}l^{\beta-1} = 0,$$

$$\partial L / \partial \lambda = Ak^{\alpha}l^{\beta} - Q = 0 \quad \Rightarrow \quad k = \left[\frac{Q}{A(s\beta / v\alpha)^{\beta}}\right]^{1/(\alpha+\beta)},$$

$$l = \left[\frac{Q}{A(v\alpha / s\beta)^{\alpha}}\right]^{1/(\alpha+\beta)}.$$

Бунда минимал баҳо

$$C(Q) = sk + vl = ZQ^{1/(\alpha+\beta)} \qquad (5)$$

кўринишда бўлади, бу ерда

$$Z = s\left[\frac{1}{A(s\beta / v\alpha)^{\beta}}\right]^{1/(\alpha+\beta)} + v\left[\frac{1}{A(v\alpha / s\beta)^{\alpha}}\right]^{1/(\alpha+\beta)}.$$

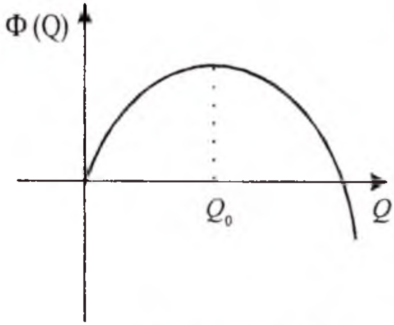
Фирма самарали ишлаши учун мумкин даражада катта фойда олишга ҳаракат қилади. Агар ишлаб чиқарилган маҳсулотнинг сотилиш баҳосини P деб белгиласак, у ҳолда Q миқдордаги ишлаб чиқаришдан олинган фойда

$$\phi(Q) = pQ - ZQ^{1/(\alpha+\beta)} \qquad (6)$$

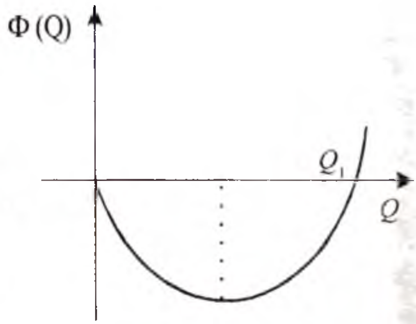
функция билан аниқланади. Бу функция $\alpha + \beta \neq 1$ да $\phi'(Q_0) = p - \dfrac{1}{\alpha+\beta}ZQ^{1/(\alpha+\beta)-1} = 0$ шартни қаноатлантирувчи Q_0 критик нуқтага эга. Бу нуқтада фойда функциянинг иккинчи ҳосиласи қуйидагича бўлади:

$$\phi''(Q_0) = -Z/(\alpha+\beta)(1/(\alpha+\beta)-1)\,Q_0^{1/(\alpha+\beta)-2} = (1-1/(\alpha+\beta))p / Q_0.$$

Бундан кўринадики, агар $\alpha + \beta < 1$ бўлса, энг катта фойдага Q_0 миқдордаги ишлаб чиқаришда эришилар экан. $\phi(Q)$ фойда функциянинг графиги 7.1-, 7.2-расмларда тасвирланган.



7.1-расм (α +β < 1)



7.2-расм (α +β > 1)

Агар (α+β>1) бўлса, корхона фойда кўриш учун

$$Q > Q_1 \quad \left(Q_1 = (Z / p)^{(\alpha+\beta)/(\alpha+\beta-1)}\right)$$

миқдорда маҳсулот ишлаб чиқаришга қодир бўлиши керак.

7.3. Тармоқлараро оптимизацион моделлар

Кўп тармоқли иқтисодий жараёнларни таҳлил қилишда тармоқлараро баланснинг турли моделларини ўрганиш, баланс тенгламалари системасининг манфиймас ечимларини қидириш билан биргаликда, кам харажат қилиб, кўпроқ маҳсулот ишлаб чиқариш, кам меҳнат сарф қилиб, маҳсулот унумдорлигини оширишдек муҳим омилларни ҳам ҳисобга олиш катта аҳамиятга эга. Бундай омилларни ҳисобга олган иқтисодий моделлар *оптимизацион моделлар* дейилади.

Биз бу бўлимда оптимизацион моделлардан Леонтьевнинг умумлашган моделини кўриб чиқамиз.

Олдинги бобларда тармоқлараро алоқалар моделида (Леонтьев модели) ҳар бир соҳа фақат битта ишлаб чиқариш технологиясидан иборат эди. Агар бу чегараланишни кенгайтирсак, яъни ҳар бир соҳа бир нечта технологиялардан иборат бўлса, у ҳолда ҳосил қилинадиган моделни *Леонтьевнинг умумлашган модели* дейилади.

Иқтисодиётда n та ишлаб чиқариш технологияси бўлиб, унда m турдаги (mn) маҳсулот ишлаб чиқарилган бўлсин. υ технология бўйича j-турдаги маҳсулот ишлаб чиқариш учун зарур бўлган i-нчи ресурс миқдорини ва меҳнат ҳажмини мос равишда қуйидагича белгилаймиз:

$$a_{ij}^{\vartheta}; \quad i, j = 1,2,..., m; \quad \vartheta = 1,2,..., \vartheta(j);$$

$$c_j^{\vartheta}; \quad j = 1,2,..., m; \quad \vartheta = 1,2,..., \vartheta(j).$$

У ҳолда бевосита *харажат коэффициентларининг умумлашган матрицаси* $- A$ (Леонтьевнинг умумлашган матрицаси) ва *сарфланган меҳнат коэффициентлари вектори* $- C$ ҳосил бўлади:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11}^{1} \cdots a_{11}^{\vartheta(1)} & a_{12}^{1} \cdots a_{12}^{\vartheta(2)} \cdots a_{1m}^{1} \cdots a_{1m}^{\vartheta(m)} \\ a_{21}^{1} \cdots a_{21}^{\vartheta(1)} & a_{22}^{1} \cdots a_{22}^{\vartheta(2)} \cdots a_{2m}^{1} \cdots a_{2m}^{\vartheta(m)} \\ - - - - - - & - - - - - - - - - - - - \\ a_{m1}^{1} \cdots a_{m1}^{\vartheta(1)} & a_{m2}^{1} \cdots a_{m2}^{\vartheta(2)} \cdots a_{mm}^{1} \cdots a_{mm}^{\vartheta(m)} \end{bmatrix},$$

$$C = (c_1^{1} \cdots c_1^{\vartheta(1)}, c_2^{1} \cdots c_2^{\vartheta(2)}, \cdots c_m^{1} \cdots c_m^{\vartheta(m)}).$$

Ишлаб чиқариш матрица коэффициентлари бирлик матрицани «кенгайтириш» орқали ҳосил қилинади:

$$E = \begin{bmatrix} 1 \ldots 1 & 0 \ldots 0 \ldots 0 \ldots 0 \\ 0 \ldots 0 & 1 \ldots 1 \ldots 0 \ldots 0 \\ - - - & - - - - - - \\ 0 \ldots 0 & 0 \ldots 0 \ldots 1 \ldots 1 \end{bmatrix}.$$

X – ишлаб чиқарилган маҳсулот ҳажмлари вектори ва F – ташқи истеъмолга мос сўнги талаблар вектори бўлсин:

$$X = \begin{bmatrix} x_1^{1} \\ \vdots \\ x_1^{\upsilon(1)} \\ \vdots \\ x_m^{\upsilon(m)} \end{bmatrix}, \qquad F = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_m \end{bmatrix}.$$

Ҳар бир соҳада мавжуд технологиялардан битта яроқлиси танланади. Агар технологияни танлаш сўнги талабни ҳисобга олган ҳолда амалга оширилса ва шунингдек, ҳар бир соҳа бўйича меҳнат харажатларини минималлаштиришга асосланган бўлса, у ҳолда технологик танлаш муаммоси чизиқли дастурлаш масаласига келтирилади:

$$\begin{cases} (E - A)X \geq F \\ X \geq 0 \\ CX \to \min \end{cases}$$

Бу масалани ечишда ҳар хил усуллардан фойдаланиш мумкин. Жумладан, чизиқли дастурлаш масалаларини ечишда юқори самарали бўлган симплекс-усулни қўллаш мумкин.

Қурилган моделда ишлаб чиқариш маҳсулоти бўлган ички ресурслардан ташқари фақат меҳнат ресурси эътиборга олинган. Умумий ҳолда бошқа, ишлаб чиқариш жараёнида ҳосил бўлмаган ресурсларни (мисол учун, асосий фондлар ёки табиий ресурслар) ҳам чегаравий шартларга қўшиш мумкин.

Асосий мавзулар

- шартли экстремумга доир масалаларни ечишда Лагранж усули
- умумий кўринишдаги Лагранж усули
- фирманинг элементар назарияси; капитал ва меҳнат ресурсларга кетган умумий харажатларни минималлаштириш
- баҳо функцияси; максимал фойда олиш учун ишлаб чиқариш ҳажмини режалаштириш
- тармоқлараро оптимизацион моделлар; Леонтьевнинг умумлашган модели

Таянч иборалар, формулалар

- шартли локал максимум (минимум) масаласи, $f(x_1,x_2) \to max\ (f(x_1,x_2) \to min),\ g(x_1,x_2) = 0$
- Лагранж функцияси, $L(x_1,x_2,\lambda) = f(x_1,x_2) + \lambda g(x_1,x_2)$
- Лагранж кўпайтувчиси, λ
- капитал, k; меҳнат, l
- умумий ишлаб чиқариш харажатлари, $W = sk + vl$
- мақсад функцияси, чегаравий шартлар
- оптимал ечим, оптимал режа, (k^*,l^*)
- минимал харажатлар функцияси, $C(Q)$
- фойда функцияси, $\phi(Q) = pQ - ZQ^{1/(\alpha+\beta)}$
- оптимизацион моделлар
- Леонтьевнинг умумлашган модели, $\begin{cases} (E-A)X \ge F \\ X \ge 0 \\ CX \to \min \end{cases}$

Саволлар

- Чегаравий оптимизация масаласининг умумий кўриниши қандай?
- Лагранж усулида ечимни топиш учун тузиладиган тенгламалар системасининг ечими мавжудлиги ҳақида қандай мулоҳазалар юритса бўлади?
- Ишлаб чиқаришни оптимал режалаш модели қандай?
- Фирмада маҳсулот ишлаб чиқариш қуввати чекланган бўлса, фойда функцияси графиги қандай бўлади?
- 2-бобда қурилган истеъмолчи бюджет асосида оптималлаш масаласини Лагранж усули ёрдамида қандай ечилади?

Машқлар

1-машқ. функциянинг $x_1^2 + x_2^2 = 25$ шарт бўйича экстремумларини топинг.

2-машқ. Фирмада ойлик ишлаб чиқариш функцияси $k^{1/3}l^{1/2}$, капитал ва меҳнатларнинг бир бирлик нархлари $s = 10$, $v = 5$ бўлсин. 500 бирлик маҳсулот ишлаб чиқариш учун минимал харажатларни, ҳамда унга мос ресурслар қийматларини топинг.

3-машқ. Фирмада ишлаб чиқариш функцияси $5k^{1/2}l^{1/4}$, капитал ва меҳнатларнинг бир бирлик нархлари $s = 10$, $v = 10$ бўлсин. Фирманинг минимал баҳо функциясини топинг. Максимал фойда олиш учун қанча миқдорда маҳсулот ишлаб чиқариш керак?

4-машқ. Кичик фирмада ишлаб чиқариш функцияси $k^{1/4}l^{1/4}$, капитал ва меҳнатларнинг бир бирлик нархлари $s = 4$, $v = 3$ бўлсин. Агар фирманинг ишлаб чиқариш қуввати R миқдордан ошмаса, ишлаб чиқаришнинг оптимал таклифи қандай бўлади?

5-машқ. Кичик фирмада ишлаб чиқариш функцияси $2k^{1/3}l^{1/3}$, капитал ва меҳнатларнинг бир бирлик нархлари $s = 6$, $v = 2$ бўлсин. Агар фирманинг ишлаб чиқариш қуввати хафтасига 500 бирлик миқдордан ошмаса, максимал фойда олиш учун қанча миқдорда маҳсулот ишлаб чиқариш керак?

8-боб. Тармоқлараро моделлар

8.1. Текис пропорционал ўсиш траекторияси

Нейман траекторияси

Ишлаб чиқаришнинг ўсиш моделини кўриб чиқамиз. Бу моделда ишлаб чиқариш ҳажми текис пропорционал ўзгаради деб фараз қилинади. Бу бўлимда барча маҳсулотлар учун ишлаб чиқаришнинг ўсиш суръати ўзгармас бўлгандаги тармоқлараро динамик моделни кўриб чиқамиз. Бу модел текис пропорционал ўсиш модели бўлади.

7-бобдаги тармоқлараро моделни вақтга боғлаб, қуйидагича ифодалаш мумкин:

$$X(t) = AX(t) + F(t), \qquad (1)$$

бу ерда t – вақт моменти.

Иккита компонентадан: яъни C – талаб вектори ва I – инвестиция векторидан ташкил топган сўнги талаб вектори учун

$$F(t) = C(t) + I(t) \qquad (2)$$

мунасабат ўринли. Агар t – вақт моментидаги даромадни $y(t)$ деб белгиласак, у ҳолда алоҳида турлар бўйича товарларнинг *истеъмол функцияси* қуйидагича бўлиши мумкин:

$$C_i(t) = h_i y(t), \quad i = 1,2, ..., n. \qquad (3)$$

$y(t)$ даромадни қуйидагича тасвирлаш мумкин:

$$y(t) = \vartheta_1 x_1(t) + \vartheta_2 x_2(t) + \ldots + \vartheta_n x_n(t), \qquad (4)$$

бу ерда ϑ_i – i-нчи маҳсулот учун қўшилган қийматнинг улуши. Қуйидаги векторларни киритамиз:

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \ldots \\ h_n \end{pmatrix}, \quad \vartheta = \begin{pmatrix} \vartheta_1 \\ \vartheta_2 \\ \ldots \\ \vartheta_n \end{pmatrix}.$$

(3) ва (4) формулалардан қуйидаги муносабатни келтириб чиқариш мумкин:

$$C(t) = h\vartheta X(t). \qquad (5)$$

j-нчи маҳсулотни ишлаб чиқариш учун заруp бўлган i-нчи турдаги капитал миқдорини b_{ij} деб белгиласак, B капитал матрицанинг коэффициентлари қуйидагича ёзилади:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Фараз қилайлик, маҳсулот ишлаб чиқариш ва хом ашё харажати ҳамда капитал орасидаги боғланиш пропорционал бўлсин. Агар маҳсулот ишлаб чиқариш ўсишини қуйидагича белгиланса:

$$\Delta x_i(t)=x_i(t+1) - x_i(t),$$

у ҳолда i-нчи маҳсулотга t-вақт давомидаги инвестицион талаб

$$I_i(t) = b_{i1}\Delta x_1(t) + b_{i2}\Delta x_2(t) + \dots + b_{in}\Delta x_n(t) \qquad (6)$$

кўринишда бўлади, бу ерда i=1, 2, …, n.

Агар $\Delta x_i(t)$ элементлардан тузилган n-ўлчовли векторни $\Delta X(t)$ деб белгиласак, у ҳолда (6) формулани матрица кўринишда ёзиш мумкин:

$$I(t) = B\Delta X(t) = \mathrm{B}\,(X(t+1) - X(t)). \qquad (7)$$

(1), (2), (5), (7) тенгламалардан *тармоқлараро динамик модел*нинг асосий тенгламаси келиб чиқади:

$$X(t) = (A + h\vartheta)\, X(t) + \mathrm{B}\,(X(t+1) - X(t)). \qquad (8)$$

Агар $\overline{A} = A + h\vartheta$ деб белгиласак, у ҳолда (8) тенглама қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$X(t) = \overline{A}\, X(t) + B(X(t+1) - X(t)). \qquad (9)$$

Юқорида таъкидланганидек, ишлаб чиқаришнинг ўсиш суръати ўзгармас деб фараз қилинади. Агар ўсиш суръатини g деб белгиласак, қуйидаги тенламани тузиш мумкин:

$$X(t+1) - X(t) = gX(t).$$

Агар маҳсулотнинг бирор йилдаги ишлаб чиқариш векторини X деб қабул қилсак, у ҳолда *текис пропорционал ўсишнинг динамик модели* тенгламаси қуйидаги кўринишда бўлади:

$$X = (\bar{A} + gB)X\,. \qquad (10)$$

Бундан

$$(I - \bar{A})^{-1}BX = \frac{1}{g}X \qquad (11)$$

келиб чиқади.

(11) тенгламада $(I-\bar{A})^{-1} > 0$ ва A матрицанинг ҳар бир қаторида энг камида битта мусбат элемент бўлсин. У ҳолда $(I-\bar{A})^{-1}B > 0$ бўлгани учун, мусбат аниқланган матрицалар ҳақидаги теоремага асосан $(I-\bar{A})^{-1}B$ матрица учун характеристик илдизи λ^* ва X^* – ўнг мусбат характеристик вектори бир қийматли аниқланади. Демак, иқтисодий талқинга эга бўлган текис пропорционал ўсиш траекторияси (уни *Нейман траекторияси – магистрали* дейилади) $\{\alpha X^*, \alpha \geq 0\}$ векторни ифодалайди, g^* ўсиш суръати эса бу моделда λ^* га тескари миқдор сифатида аниқланади.

8.2. Нейман баҳолари

Нейман баҳолари аввалги бўлимдаги Нейманнинг ўсиш моделига мос келади. P – баҳолар вектори бўлсин. У ҳолда текис ўсишга мос *Нейман баҳолари моделини*

$$P = P(\bar{A} + rB) \qquad (1)$$

кўринишда ёзиш мумкин, бу ерда r – фойда нормаси.

Асосий масала P ва r ларнинг қийматини ҳисоблашдан иборат. (1) тенгламани бошқача кўринишда ёзиш мумкин:

$$PB(I - \bar{A})^{-1} = \frac{1}{r}P\,. \qquad (2)$$

Фойда нормаси қиймати $B(I-\bar{A})^{-1}$ матрицанинг характеристик қийматига тескари миқдор сифатида, $P = P^*$ баҳо вектори эса бу матрицанинг чап характеристик векторига тенг бўлади.

P^* ва r^* ларни қуйидаги алгоритм ёрдамида топиш мумкин:

$$P^{(k+1)} = P^{(k)}\bar{A} + r^{(k)}P^{(k)}B\,,$$

$$r^{(k)} = P^{(k)}(I-\bar{A})X / P^{(k)}BX, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

бу ерда X – ихтиёрий мусбат ишлаб чиқариш вектори (қиймати фиксирланган). Баҳо векторининг ихтиёрий бошланғич мусбат қийматида бу алгоритм ёрдамида мувозанатли P^* ва r^* ларни ҳисоблаш мумкин (алгоритм P^* ва r^* ларга яқинлашувчи бўлади).

8.3. Магистрал моделлар

Жамғариш магистрал модели

Магистрал назариясининг асосий ғояси энг яхши эффектив иқтисодий ўсишга ўтиш учун иқтисодиётни магистрал йўлга олиб чиқиш (Нейман траекторияси) ва шу асосида мақсадга эришишдан иборат. Магистрал моделлар асосан икки турга бўлинади: жамғариш магистрал модели; истеъмол магистрал модели. Жамғариш магистрал моделини кўриб чиқамиз.

Жамғариш магистрал моделининг мақсади, жамғарилган капитал суммасини режалаштирилган даврда максималлаштиришдан иборат. Уни кўп ўлчовли чизиқли дастурлаш масаласи сифатида қараш мумкин:

$$PBX(T) \to max$$

$$\begin{cases} X(t) \geq \bar{A}X(t) + B(X(t+1) - X(t)), & t = 0,1,2 \ldots T \\ X(t) \geq 0, \quad t = 0,1,2\ldots, T & \end{cases} \qquad (*)$$

бу ерда $X(t)$ – $t = 0,1,2\ldots,T$ вақт давомида ишлаб чиқарилган $(n\times1)$ ўлчовли маҳсулот вектори, $\bar{A}$ ва B лар мос равишда манфий бўлмаган харажатларни орттириш коэффициентлар матрицаси ва капитал коэффициентлар матрицаси. Ҳар иккала матрицанинг ўлчови $(n\times n)$дан иборат. P – охирги даврдаги захиралар баҳоси бўйича ўлчови $(1\times n)$ бўлган вектор.

Шунга мувофиқ, $X(0)$ вектор берилган ҳисобланади ва

$$(I-\bar{A}+B)X(0) > 0, \quad PB \geq 0$$

шартлар бажарилади. $\bar{A}$ ва B матрицалар қуйидагича аниқланади :

$$\bar{A} = A + h\vartheta, \quad A = A^{(1)} + A^{(2)}, \quad B = B^{(1)} + B^{(2)}.$$

Бу ерда A, $A^{(1)}$ ва $A^{(2)}$ – $(n\times n)$ ўлчовли манфий бўлмаган матрицалар бўлиб, A – барча турдаги ресурслар, $A^{(1)}$ – жорий харажатлар, $A^{(2)}$ – асосий капитал амортизацияси матрицаларини ифодалайди.

B, $B^{(1)}$, $B^{(2)}$ матрицалар ($n \times n$) ўлчовли манфий бўлмаган матрицалар бўлиб, B – ҳамма актив турлари бўйича коэффициентлар матрицаси, $B^{(1)}$ – асосий фондлар кўринишидаги активлар бўйича, $B^{(2)}$ – товар захиралари кўринишидаги активлар бўйича коэффициентлардан тузилган матрицалар. h – истеъмол бўйича ($n \times 1$) ўлчовли устун-вектор, ϑ – қўшимча қиймат нормаси мусбат вектори.

(*) масалага тегишли мумкин траекториялар сифатида қараладиган ишлаб чиқариш магистрали тенгламаси

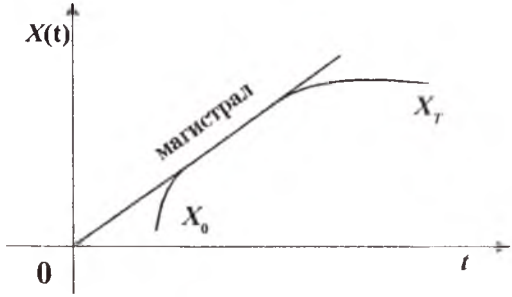
$$X = (\bar{A} + gB)X, \quad eX = 1$$

кўринишда ифодаланиши мумкин, бу ерда e – бирлик вектор, яъни $e = (1,\ldots,1)$. X – текис пропорционал ишлаб чиқариш ҳажми вектори, g – текис пропорционал ишлаб чиқаришдаги ўсиш суръатининг мусбат қиймати. Юқорида келтирилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$g^{-1}X = (I - \bar{A})^{-1}BX.$$

$(I - \bar{A})^{-1} > 0$ ва B да ҳар бир сатрда камида битта мусбат элемент мавжуд деб фараз қиламиз. Бу фаразга кўра $(I - \bar{A})^{-1}B > 0$ ва у ҳолда $(I - \bar{A})^{-1}B$ матрица учун абсолют қиймат бўйича максимал λ^* характеристик илдизи ва унга тегишли X^* мусбат ўнг характеристик вектор бир қийматли аниқланади. Иқтисодий нуқтаи назаридан, магистрал модел $\{\alpha X^*; \alpha \geq 0\}$ шарт билан ифодаланади. g^* – текис ўсиш суръати эса λ^* миқдорга тескари миқдор сифатида аниқланади.

Иқтисодий динамик моделлар тадбиқларида ***магистрал ҳақидаги теоремалар*** исботланади. Унга кўра, режалаштирилган даврнинг етарлича узоқ вақт давомида, маълум T_0 даврдан ташқари (T_0 режалаштирилган давр узунлигига боғлиқ эмас), динамик моделнинг оптимал траекторияси бошланғич ҳолат ва P баҳолар векторига боғлиқ бўлмаган ҳолда магистралга яқин келади (кучсиз магистрал теоремаси). Кучли магистрал теоремага кўра ихтиёрий X_0 бошланғич ҳолати ва X_T сўнги ҳолати бўйича траектория учта соҳадан иборат бўлади: 1) X_0 дан магистрал томонига ҳаракат; 2) магистрал бўйича ёки бевосита унга яқин ҳаракат; 3) магистралдан X_T – ҳолатга томон ҳаракат.



8.1-расм

Магистрал ҳақидаги теоремаларга кўра траекторияларнинг бошланиши ва якуни унинг режалаштирилган даврдаги давомийлигига боғлиқ эмас.

Истеъмолнинг магистрал модели

Маълумки, жамғариш магистрал модели режалаштирилган даврда жамғарилган капиталнинг максималлаштириш билан ифодаланар эди. Бироқ, иқтисодиётни режалаштиришнинг мақсади истеъмол даражасини оширишдан иборат бўлиши керак. Истеъмол даражасини максималлаштиришни мақсад қилиб қўйган режалаштириш моделларидан бири – бу *истеъмол магистрал моделидир.*

$L(t)$ – t-вақт давомида таклиф қилинган ишчи кучи бўлсин. $L(0)$ – берилган бўлиб, g – ўсиш суръати (ўзгармас миқдор) бўлса, у ҳолда қуйидаги тенглама ўринли бўлади:

$$L(t) = (1+g)^t L(0) .$$

g-нинг қиймати g_1 – иш билан банд бўлган аҳолининг ўсиш суръати ва g_2 – меҳнат унумдорлигининг ўртача ўсиш суръати билан аниқланади: $g = g_1 + g_2 + g_1 g_2$.

Юқоридагиларга асосан *истеъмолнинг магистрал моделини* қуриш мумкин:

$$\sum_{t=0}^{T}(1+\delta)^{-1}\theta(t) \to \max$$

$$\begin{cases} X(t) \geq AX(t) + B(X(t+1) - X(t)) + \theta(t)q; \\ lX(t) \leq (1+g)^t L(0) \\ X(t) \geq 0,\ \theta(t) \geq 0,\ (t = 0,1,2,...,T) \end{cases} \qquad (**)$$

$X(0), X(T+1)$ векторлар берилган бўлиб,

$$(I - A + B)X(0) > 0, \quad X(T+1) \geq 0$$

Бу ерда q – бир бирлик даврдаги манфий бўлмаган истеъмол структурасининг $(nx1)$ ўлчовли вектори, $\theta(t)$ – t-вақтдаги истеъмол ҳажми, δ – чегириш проценти.

Бу моделда ҳам, жамғариш магистрал модели каби, қуйидагича шартлар қўйилади:

$$(I - A)^{-1} > 0, \quad (I - A - gB)^{-1} > 0 \text{ ва } \det(B) \neq 0\,.$$

У ҳолда қуйидаги тасдиқ ўринли: (**) ечимни ифодаловчи ишлаб чиқариш ва истеъмолнинг оптимал траекториялари ва ишлаб чиқариш ва истеъмолнинг магистрал траекториялари орасида магистрал ҳақидаги «кучли» ва «кучсиз» теоремалардан келиб чиқадиган муносабатлар мавжуд бўлади.

Ишлаб чиқариш ва истеъмолнинг магистрал траекториялари

$$X = AX + gBX + \theta q, \ lX = L(0)$$

тенгламанинг X^* ва θ^* мусбат ечимлари асосида қуйидаги формулалар ёрдамида топилиши мумкин:

$$X^*(t) = (1+g)^t X^*, \ \theta^*(t) = (1+g)^t \theta^*$$

Бу ерда $X(T+1) = X^*(T+1) = (1+g)^{T+1} X^*$ деб олинади.

Асосий мавзулар

- тармоқлараро динамик модел; текис пропорционал ўсиш (Нейман) модели
- текис ўсишга мос Нейман баҳоларини ва фойда нормасини ҳисоблаш
- жамғариш магистрал модели
- истеъмол магистрал модели

Таянч иборалар, формулалар

- истеъмол функцияси, $C_i(t) = h_i y(t)$, $i = 1, 2, \ldots, n$
- тармоқлараро динамик модел,

  $X(t) = (A + h\vartheta)X(t) + B(X(t+1) - X(t))$
- текис пропорционал ўсишнинг динамик модели,

  $X = (\overline{A} + gB)X$
- Нейман траекторияси — магистрал, $\{\alpha X^*, \alpha \geq 0\}$
- Нейман баҳолари модели, $P = P(\overline{A} + rB)$
- жамғариш магистрал модели, $PBX(T) \to max$

$$\begin{cases} X(t) \geq \overline{A}X(t) + B(X(t+1) - X(t), & t = 0,1,2...T \\ X(t) \geq 0, & t = 0,1,2...,T \end{cases}$$

- ишлаб чиқариш магистрали тенгламаси,

  $X = (\overline{A} + gB)X, \quad eX = 1$
- магистрал теоремалар

$$\sum_{t=o}^{T} (1+\delta)^{-1} \theta(t) \to \max$$

- истеъмолнинг магистрал модели,

$$\begin{cases} X(t) \geq AX(t) + B(X(t+1) - X(t)) + \theta(t)q; \\ lX(t) \leq (1+g)^t L(0) \\ X(t) \geq 0, \theta(t) \geq 0, (t = 0,1,2,..., T) \end{cases}$$

- ишлаб чиқариш ва истеъмолнинг магистрал траекториялари,

  $X^*(t) = (1+g)^t X^*, \quad \theta^*(t) = (1+g)^t \theta^*$

Саволлар

- Нима учун текис пропорционал ўсиш модели дейилади?
- Қандай траекторияни Нейман траекторияси дейилади?
- Магистрал нима?
- Магистрал теоремалар мазмуни нимадан иборат?
- Нейман баҳолар — бу қандай баҳолар?
- Оптимал баҳо ва фойда нормасини қандай топилади?
- Жамғариш магистрал модел мақсади нимадан иборат?
- Истеъмол магистрал модел мақсади нимадан иборат?

Машқлар

1-машқ. A — бевосита харажатлар матрицаси, B — капитал матрица бўлсин:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}1269 & 0{,}0695 & 0{,}0014 \\ 0{,}2312 & 0{,}4884 & 0{,}1958 \\ 0{,}0547 & 0{,}1065 & 0{,}1374 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0{,}2170 & 0{,}0033 & 0{,}0081 \\ 1{,}7287 & 0{,}6067 & 1{,}0710 \\ 0{,}0702 & 0{,}0424 & 0{,}0987 \end{bmatrix}$$

$C = \begin{bmatrix} 0{,}0142 & 0{,}3589 & 0{,}3962 \end{bmatrix}$ — истеъмол коэффициентлари ва

$V = \begin{bmatrix} 0{,}6591 & 0{,}3351 & 0{,}7523 \end{bmatrix}$ — қўшимча қиймат улуши бўлса, маҳсулот ишлаб чиқаришнинг ўсиш суръатини топинг.

2-машқ. Агар A — ресурслар матрицаси, B — капитал матрица коэффициентлари, C — истеъмол вектори, V — қўшимча қиймат нормасини вектори бўлса, ўсишнинг оптимал траекториясини ҳисобланг. A, B, C, V қийматлари аввалги машқдагидек бўлсин.

9-боб. Иқтисодий-статистик усуллар ва эконометрик моделлар

Иқтисодий математик услублар ёрдамида иқтисодий жараёнларни белгиловчи кўрсаткичлар ва уларга таъсир этувчи омиллар орасидаги миқдорий боғланишларни ифодаловчи моделлар муҳим ўрнига эга.

Иқтисодий жараёнларни ана шундай миқдорий томонларини ҳамда иқтисодиинг назарий таҳлилларини математик статистиканинг усуллари орқали талқин қилувчи фанни *эконометрика* деб аталади. Эконометриканинг асосида параметрлари математик статистиканинг усуллари орқали баҳоланадиган омиллар таҳлилининг иқтисодий математик модели ётади. Бу модел статистик асосида у ёки бу иқтисодий жараёнларни башоратлар, таҳлил этиш каби тадқиқотлар юритиш учун хизмат қилади. Бундай моделларни *эконометрик моделлар* деб юритилади.

Ушбу бобда баъзи иқтисодий масалаларнинг эконометрик моделлари таҳлил этилади.

9.1. Башоратлаш усуллари

Ҳозирги шароитда, халқ хўжалиги жараёнларининг тараққиётини режалаштиришда, илмий асосланган башоратлар ёрдамида бошланғич марраларнинг аниқланиши муҳим аҳамиятга эгадир.

Башоратлаш оқибатида халқ хўжалигини келгусида эгаллаши мумкин бўлган ҳолати аниқланади, ҳозирги кунда қабул қилинадиган қарорларнинг натижалари тахминан белгилаб чиқилади.

Иқтисодий башоратлашда иқтисодиётни ривожлантириш масалаларини ҳал қилиш вақтида, биз дуч келишимиз мумкин бўлган муаммолар ва вазифалар маълум бўлади. Биз иқтисодиётнинг келажакдаги аҳволини аниқлар эканмиз, халқ хўжалигини ривожлантиришдаги ижобий ва салбий томонларини башоратлаш орқали кўраоламиз.

Биз башоратлаш вақтида аниқланган ва ҳал этилиши лозим бўлган бир қатор вазифаларга эга бўлиб, конкрет тадбирларни турли дастурлар шаклида ишлаб чиқаоламиз, бу дастурлардан эса режа топшириқларини ишлаб чиқиш вақтида фойдаланишимиз мумкин бўлади.

Ижтимоий ҳодисалар ва жараёнларнинг бир-бирига боғлиқ равишда ва бир-бирини тақозо этиб ривожланиш принципи социал-иқтисодий башоратлаш назариясининг бошланғич шарт-шароитидир.

Ижтимоий ҳаётдаги кўпгина жараёнлар ўз тараққиётида инерцион хоссаларга эга бўлиб, кўриб чиқилаётган тизим қанчалик мураккаб бўлса, унинг инерционлиги ҳам шунчалик кўп бўлади. Халқ хўжалиги иқтисодиётини режали ривожлантириш шароитида тараққиётнинг инерционлиги кўпроқ содир бўлади.

Бир хил ҳодисалар ҳақидаги ахборотни тарқатиш усули, муайян шарт-шароитда ахборот ҳажмини бир ҳодисадан иккинчисига ўтказиш *экстраполяция усули* дейилади. Экстраполяция тадқиқот объектининг ҳозирги вақтда текшириш мумкин бўлган қисми учун қулай ахборотга, бутун объектнинг аниқланишини таъминлайдиган умумий қонуниятларга асосланади. Экстраполяция усули билиш усули сифатида илмий башорат учун асос бўлади, чунки рўй бераётган ҳодисаларни башоратлаш вақтида у тизимни (объектни) келгусида ривожлантириш қонуниятларига татбиқ қилинади.

Башоратлашнинг мақсади тизимнинг ўтмишдаги ва ҳозирги аҳволини, ўзгариш қонуниятларини ўрганиш ва таҳлил қилиш асосида унинг келгусидаги ривожланишини илмий асосланган ҳолда белгилаб чиқиш, содир бўладиган вазиятнинг характери ва мазмунини очиб беришдан иборат.

Башоратлаш ҳодисалар ва жараёнларнинг келажакдаги мумкин бўлган ривожланиш йўлини ва натижасини белгилаб беради, озми-кўпми узоқроқ истиқбол учун бу ҳодиса ва жараёнларни характерловчи кўрсаткичларга баҳо беради.

Башоратлаш вазифалари кўп жиҳатдан башорат мўлжалланадиган даврнинг муддатига боғлиқдир. Башоратлаш даврининг муддати бўйича уч группага бўлинади: қисқа муддатли башоратлар – даври 5 йилгача; ўртача муддатли башоратлар – 15 йилгача; узоқ муддатли башоратлар – 30 йилгача; жуда узоқ муддатга мўлжалланган башоратлар – 30 йилдан кўпроқ даврни ўз ичига олади.

Амалда башоратлашнинг барча усулларини 3 группага бўлиш мумкин:

• мутахассислар тузиб чиқадиган ва маълум ахборотларга асосланадиган эксперт усуллари;

• маълум маълумотлардан фойдаланишга асосланган, башоратлаш объектининг ўтмишини характерловчи маълумотга асосланган статистик (иқтисодий-математик) усуллар;

• мавжуд ҳамда эксперт ахборотдан фойдаланишга асосланган аралаш усуллар.

Бир-бирига боғланган тенгламалар тизимига асосланган энг оддий башоратлаш моделларидан бирини кўрамиз. Бу моделда кўрсаткичлар қиймати уларга таъсир этувчи омиллар бўйича тегишли тенгламалар ёрдамида аниқлаб чиқилади. Қаралаётган омиллар одатда тасодифий характерга эга бўлганлиги сабабли аниқлашнинг кенг тарқалган усуллардан бири корреляцион-регрессион усулдан иборат бўлиб, бу усул омиллар орасидаги боғланишларни ўлчаш ҳамда улардан бирининг миқдорий ўзгариши бошқаларига қандай таъсир этиш даражасини аниқлашдан иборатдир.

Бошқача қилиб айтганда, тадқиқот қилиши лозим бўлган кўрсаткичларни ўзаро боғловчи ва улар орасидаги боғланишларни ифодаловчи катталикларни ўз ичига олган математик муносабатларни келтириб чиқариш ва уларни таҳлил этиш шу усулнинг моҳиятини ташкил этади.

Бу муносабатлар масаланинг қўйилишига ҳамда талаб қилинаётган аниқликка қараб хилма-хил кўринишга эга бўлиши мумкин. Айтилганларни формал равишда математик тил билан баён қилишга ҳаракат қиламиз.

Фараз қилайлик, $y, x_1,..., x_k$ қандайдир жараённинг ўзаро боғлиқ тасодифий белгили омиллари бўлиб, улар орасидаги муносабат

$$y = f(x_1,..., x_n) \qquad (1)$$

кўринишда бўлсин. Бу муносабатга асосан бизни қизиқтираётган y нинг қийматларини бошқа x_1, ..., x_k омиллар қийматлари бўйича f-қоидани қўллаб топиш мумкин. (1) даги f-«қоидани» танлаш тадқиқотчининг ихтиёридаги мавжуд статистик маълумотларига таянган ҳолда эришилади.

Қуйидаги содда ҳоллар билан чегаралинишга ҳаракат қилган ҳолда, уларга мос математик моделни қандай тузиш мумкинлигини кўрсатамиз. Шу боис, масалани математик тилда ифодалаймиз. Фараз қилайлик, қараётган y, x_1, ..., x_k тасодифий белгили омиллар ўзаро корреляцион боғлиқликда бўлиб, улар ҳақидаги сонли статистик маълумотлар қуйидаги жадвал кўринишда берилган бўлсин.

y	x_1	x_2	....	x_k	қайтарилиш частотаси
y_1	$x_1^{(1)}$	$x_2^{(1)}$	-	$x_k^{(1)}$	n_1
.	.	.	-	.	.
.	.	.	-	.	.
.	.	.	-	.	.
.	.	.	-	.	.
y_m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	-	$x_k^{(m)}$	n_m

Қаралаётган y ва $x_1, ..., x_k$ белгилар орасидаги энг содда статистик боғланиш – улар орасидаги чизикли корреляцион боғланишдир:

$$y = c + a_1x_1 + ... + a_kx_k, \qquad (2)$$

бунда c, $a_1, ..., a_k$ – қандайдир ўзгармас сонлар бўлиб, улар белгилар орасида ўзаро муносабатларга боғлиқдир.

Агар (2) муносабат тадкикотчи томонидан танланган бўлса, унинг кейинги вазифаси c, $a_1, ..., a_k$ ўзгармасларни шундай танлаши керакки, натижада y нинг (2) формула бўйича топилган қийматлари, амалда кузатилган қийматларига етарли даражада (тадқиқотчини қаноатлантирадиган) яқин бўлсин. Бу масалани ҳал қилишда энг кичик квадратлар усули деб аталувчи усул қулай воситадир. Бу усулнинг моҳиятини қуйидагича тушунтириш мумкин. (2) тенгликнинг ўнг томонига жадвалдаги $x_1^{(i)}, ..., x_k^{(i)}$, $i = 1,2,...,m$ ларни қўйсак, умуман y_i лардан фарқланувчи Y_i қийматларни ҳосил қиламиз.

У ҳолда $Y_i - y_i$ айирма (2) бўйича ҳисоблангандаги билан жадвалда унга мос қиймат орасидаги фарқни билдиради. Энг кичик квадратлар усули бўйича c, $a_1, ..., a_k$ ларнинг шундай қийматларини топиш лозимки, натижада

$$s = s(c, a_1, ..., a_k) = \sum_{i=1}^{m}\left[\sum_{j=1}^{k} a_jx_j^{(i)} + c - y_i\right]^2 \cdot n_i$$

функция энг кичик қийматга эришсин.

Бу масалани ечиш ушбу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial s}{\partial c} = 0 \\ \dfrac{\partial s}{\partial a_\nu} = 0, \quad \nu = \overline{1,k} \end{cases} \qquad (3)$$

тенгламалар тизимини ечимларини топишга келтирилади.

$k+1$ номаълумли бу тизимни ечиш учун қуйидаги белгилашларни киритамиз:

$$\overline{x}_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_j^{(i)} n_i,\ \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} y_i n_i,$$

$$\overline{x_e x_j} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m} x_e^{(i)} x_j^{(i)} n_i,\ \ e=\overline{1,k},\ \ j=\overline{1,k},\ \ n=\sum_{i=1}^{m} n_i.$$

Бу белгилашлар орқали (3)ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} c + a_1\overline{x}_1 + a_2\overline{x}_2 + \ldots + a_k\overline{x}_k = \overline{y} \\ c\overline{x}_j + a_1\overline{x_1 x_j} + a_2\overline{x_2 x_j} + \ldots + a_j\overline{x_j^2} + \ldots + a_k\overline{x_k x_j} = \overline{x_j y} \\ \qquad j=\overline{1,k} \end{cases} \tag{4}$$

Бу ердан,

$$c = \overline{y} - a_1\overline{x}_1 - \ldots - a_k\overline{x}_k \tag{5}$$

га эга бўламиз, у ҳолда шу тенглик ва (2) дан

$$y = \overline{y} + a_1(x_1 - \overline{x}_1) + \ldots + a_k(x_k - \overline{x}_k) \tag{6}$$

муносабатни ҳосил қиламиз.

(4) ва (5)ларни биргаликда қарасак k-та номаълумли k-та тенгламалар тизимига эга бўламиз.

$$\begin{cases} a_1(\overline{x_1 x_j} - \overline{x}_1\overline{x}_j) + \ldots + a_{j-1}(\overline{x_{j-1} x_j} - \overline{x}_{j-1}\overline{x}_j) + a_j(\overline{x_j^2} - (\overline{x}_j)^2) + \ldots + \\ \qquad + a_k(\overline{x_k x_j} - \overline{x}_k\overline{x}_j) = \overline{x_j y} - \overline{x}_j\overline{y} \qquad j=\overline{1,k} \end{cases} \tag{7}$$

Энди $\delta_{x_j}^2 = \overline{x_j^2} - (\overline{x}_j)^2$ — x_j танланманинг дисперсияси, $\tau_{x_i x_j} = \dfrac{\overline{x_i x_j} - \overline{x}_i\overline{x}_j}{\delta_{x_i}\delta_{x_j}}$ $(i=\overline{1,k};\ j=\overline{1,k})$ – x_i ва x_j-нинг корреляция коэффициентларини киритсак, (7)нинг кўриниши қуйидагича бўлади.

$$\begin{cases} a_1\delta_{x_1} + a_2\tau_{x_1 x_2}\delta_{x_2} + \ldots + a_k\delta_{x_k}\tau_{x_1 x_k} = \tau_{x_1 y}\delta_y \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_1\tau_{x_1 x_k}\delta_{x_1} + a_2\tau_{x_1 x_k}\delta_{x_2} + \ldots + a_{k-1}\tau_{x_{k-1} x_k}\delta_{x_{k-1}} + a_k\delta_{x_k} = \tau_{x_k y}\delta_y. \end{cases} \tag{8}$$

Ҳосил бўлган тизимдан a_1, ..., a_k лар топилиб (2)га қўйилса, талаб қилинган y учун аниқ муносабат келиб чиқади (c-нинг қийматлари a_1, ..., a_k нинг қийматлари бўйича (5) дан топилиб (2)га қўйилади).

(2) кўринишдаги чизикли моделлар иқтисодиётнинг кўп масалаларига мос келади. Қуйида шу моделни тадбиқ сифатида яқинда М. Ғофуров раҳбарлигида бажарилган илмий тадқиқотдан намуналар келтирамиз (Отақузиева З. М. Тошкент. Номз. диссертацияси. 2000 й.).

Бу тадқиқотда хусусан чиқинди газларнинг атроф-муҳит ифлосланишига ва ҳар хил касалликларнинг келиб чиқишга салбий таъсир этиш даражасини иқтисодий баҳолаш услублари ишлаб чиқарилган.

Чиқинди газлар сифатида автомобилларникини оламиз. Уларнинг таъсирида пайдо бўладиган ва юқумли бўлмаган 10 та касаллик турларининг миқдорий ўзгаришлар таҳлилини кўрайлик.

Чиқинди газларни ташкил этувчилари орасида қуйидаги 5 хилини кўриш билан кифояланамиз:

x_1 – углерод оксиди, x_2 – азот оксиди, x_3 – углеводородлар, x_4 – олтингугурт оксиди, x_5 – қурум.

y_1, y_2, ..., y_{10} орқали қуйидаги касалликлар билан оғриган беморлар сонини белгилайлик:

1. Нафас олиш аъзолари сили;
2. Янги пайдо бўлган ўсимталар;
3. Асаб тизими ва сезги аъзолари касалликлари;
4. Қон босими касаллиги;
5. Қон босими билан келган камқонлик;
6. Қон босимисиз камқонлик;
7. Нафаси олиш йўлларининг сурункали яллиғланиши;
8. Нафас йўли буғма хафақон касаллиги;
9. Нафас олиш аъзоларининг бошқа касалликлари;
10. Тери ва тери ости тўқималар касалликлари.

y_i ларнинг x_1, x_2, x_3, x_4 ва x_5 лар орқали ифодаланишини топиш муҳим аҳамиятга эга бўлиб, топилган муносабат орқали башоратлаш жараёнини ҳам олиб бориш мумкин бўлади. y_i лар x_j ларнинг функцияси эканлиги равшан. Ана шу функция қаралаётган омиллар устида кузатилган кўп йиллик маълумотлар асосида $y_i = c^{(i)} + a_1^{(i)}x_1 + a_2^{(i)}x_2 + a_3^{(i)}x_3 + a_4^{(i)}x_4 + a_5^{(i)}x_5$, i=1,2,...,10 кўринишда ахтарилган.

Энг кичик квадратлар усули ёрдамида y_i (i=1,2,...,10) ларнинг x_j (j=1,2,...,5) орқали аниқ чизиқли боғланишларини топиш мумкин.

Хусусан, нафас олиш аъзолари сили бўйича касаллар сони $y_1 = 2046{,}3321 - 574{,}264x_1 - 3152{,}051x_2 + 4686{,}981x_3 - 4646{,}592x_4 - 170936x_5$ формула орқали топилиши мумкин.

Шу аснода, қаралаётган омилларнинг бир-бирига боғлиқ равишда миқдорий ўзгаришларини таҳлил қилувчи регрессион изланиш ҳам олиб борилган. Шу масала бўйича қилинган бошқа таҳлиллар ҳақида юқорида эслатилган адабиётга мурожаат қилиш мумкин.

Умуман олганда, халқ хўжалигини ва тармоқни иқтисодий-математик башоратлаш жараёни қуйидаги босқичларни ўз ичига олади:

- муайян мақсадга йўналтирилган концепцияни ишлаб чиқиш;
- башорат қилинаётган объектнинг дастлабки ҳолатини аниқлаш;
- башоратлаш усулларини танлаш;
- башоратлаш натижаларини тузатиб чиқиш ва баҳолаш;
- узоқ муддатга мўлжалланган режалар ва комплекс дастурларни ишлаб чиқишга доир хулосалар ва тавсиялар.

Башоратлаш босқичида иқтисодий объектларни ривожлантириш мақсадлари аниқ муаммолар асосида белгилаб чиқилади.

9.2. Эконометрик моделлар

Иқтисодий-математик моделларни қуриш ва уларнинг тадбиқларини чизиқли регрессион моделлар, кўп факторли моделлар асосида кўриб чиқамиз.

Кўриладиган масалаларнинг асосий математик аппаратини математик статистика, корреляцион ва регрессион таҳлиллар ташкил этади. *Корреляцион-регрессион таҳлил усуллари* асосан қуйидагича 3 та масалани ечишни тақозо этади: натижавий ва фактор белгилар орасидаги боғланиш кўринишини аниқлаш; улар ўртасидаги боғланиш даражасини аниқлаш; ҳар бир фактор белгилар таъсирини аниқлаш. Бу масалаларни ечишни конкрет иқтисодий масалаларни таҳлил қилиш орқали баён этамиз.

Жадвалда 9та оиланинг озиқ-овқат маҳсулотларига харажати ва киши бошига оладиган даромади ҳамда келтирилган оила аъзоларининг сони берилган.

9.1.-жадвал

№	Озиқ-овқат харажати (y)	Киши бошига даромад (x)	Оиланинг ўлчови
1	433	628	1,5
2	616	1574	2,1
3	900	2659	2,7
4	1113	3701	3,2
5	1305	4796	3,4
6	1488	5926	3,6
7	1645	7281	3,7
8	1914	9350	4,0
9	2411	18807	3,7

Бу ерда озиқ-овқат харажатларини киши бошига даромад ва оила аъзоларининг сонига боғлиқлигини таҳлил қилиш масаласини кўрайлик.

Натижавий белгини y билан, омил белгиларни x_1 ва x_2 орқали белгилаймиз.

Дастлаб бир омилли чизиқли моделни кўрамиз. У қуйидаги чизиқли функция орқали ифодаланади:

$$\hat{y} = a_0 + a_1 x_1 \ . \qquad (1)$$

Бу формуладаги a_0 ва a_1 параметрларни олдинги боблардаги каби, нормал тенгламалар системасини ечиш орқали ифодаланади. Нормал тенгламалар системаси бунда қуйидагича бўлади:

$$\begin{cases} na_0 + (\sum x_1)a_1 = \sum y \\ (\sum x_1)a_0 + (\sum x_1^2)a_1 = \sum yx_1 \ . \end{cases} \qquad (2)$$

Берилган жадвал асосида тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{cases} 9a_0 + 54725a_1 = 11825 \\ 54725a_0 + 540789321a_1 = 98049159 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасидан модел коэффициентларини топамиз:

$$a_0 = 549{,}68; \qquad a_1 = 0{,}1257.$$

Шундай қилиб, модел кўриниши

$$\hat{y} = 549{,}68 + 0{,}1257x_1 \qquad (3)$$

бўлади.

(3) тенгламани *регрессия тенгламаси* дейилади, a_1-коэффициентни *регрессия коэффициенти* дейилади. y ва x_1 миқдорлар орасидаги боғлашни кучини *корреляция коэффициентини* ҳисоблаш орқали топилади:

$$r_{yx_1} = \sqrt{1 - \frac{S^2_{yx_1}}{S^2_y}} \qquad (4)$$

бу ерда S_y – y танланманинг ўртача квадратик четланиши ва у қуйидаги формула билан топилади:

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum (y - \bar{y})^2}{n}}$$

бу ерда $\bar{y}$ – y миқдорларининг ўртача арифметик қиймати.

S_{yx_1} – (3) тенгламанинг $n-2$ озодлик даражаси бўйича ўртача квадратик хатоси:

$$S_{yx_1} = \sqrt{\frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n-2}},$$

бу ерда $\hat{y}$ – (3) модел бўйича ҳисобланган озиқ-овқат харажатларининг қиймати.

Олдинги боблардаги каби ҳисоблашлар бажарилса, қуйидагилар ҳосил бўлади: $S^2 = 454070$, $S^2_{yx_1} = 63846$. Бундан

$$r_{yx_1} = \sqrt{1 - \frac{62846}{454070}} = 0{,}927.$$

r_{yx_1} нинг қиймати кўрсатадики, озиқ-овқат харажатлари ва киши бошига даромадлар кучли боғланишга эга экан.

Юқоридаги моделда эластиклик коэффициенти қуйидаги формула билан топилади:

$$Э_{yx_1} = \frac{a_1 \bar{x}_1}{\bar{y}} \qquad (5)$$

Бизнинг мисолда $x_1 = 6080,6$; $y = 1313,9$. У ҳолда

$$Э_{yx_1} = \frac{0,1257 \cdot 6080,6}{1313,9} = 0,58 .$$

Бундан даромадни 1% кўтарилиши озиқ-овқат харажатларининг 0,58%га ошишини кўрсатади.

Энди озиқ-овқат харажатларини даромад (x_1) ва оила аъзолари (x_2) сонига боғлиқ бўлган икки омилли чизиқли моделни кўрамиз. Модел кўриниши қуйидагича бўлади:

$$y = a_0 + a_1x_1 + a_2x_2 . \qquad (6)$$

a_0, a_1, a_2параметрлар қуйидаги тенгламалар системасини ечиш орқали топилади:

$$\begin{cases} na_0 + (\sum x_1)a_1 + (\sum x_1)a_2 = \sum y \\ (\sum x_1)a_0 + (\sum x_1^2)a_1 + (\sum x_1x_2)a_2 = \sum yx_1 \\ (\sum x_2)a_0 + (\sum x_1x_2)a_1 + (\sum x_2^2)a_2 = \sum yx_2 . \end{cases} \qquad (7)$$

Берилган статистик маълумотлар асосида қуйидаги тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{cases} 9a_0 + 54725a_1 = 11825 \\ 54725a_0 + 540789321a_1 + 194341,8a_2 = 98049159 \\ 27,9a_0 + 194341,8a_1 + 92,1a_2 = 40391,7 \end{cases}$$

Бу тенгламалар системасини ечсак, $a_0 = 18,63$; $a_1 = 0,0985$; $a_2 = 224,6$ бўлади ва у ҳолда (6) модел қуйидагича ифодаланади:

$$y = 18,63 + 0,0985x_1 + 224,6\,x_2.$$

Боғланиш кучини аниқлаш учун олдин қуйидаги корреляция коэффициентлари топилади:

$$r_{yx_1}, r_{yx_2}, r_{x_1x_2} .$$

Корреляция коэффициентлари топилгандан сўнг қуйидагича кўп омилли корреляция коэффициенти топилади:

$$r_{yx_1x_2} = \sqrt{\frac{r_{yx_1}^2 + r_{yx_2}^2 - 2r_{yx_1} \cdot r_{yx_2} \cdot r_{x_1x_2}}{1 - r_{x_1x_2}^2}}$$

Бизнинг мисолимиздаги ҳисоблашларни бажарилса, $r_{yx_1x_2} = 0{,}983$ бўлади. Бундан озиқ-овқат харажатларини даромад ва оила аъзолари сонига боғлиқлиги юқори эканлиги келиб чиқади.

Кўп омилли моделларда айрим омилларнинг таъсирини хусусий эластиклик коэффициентларини топиш орқали аниқлаш мумкин:

$$Э_{yx_1(x_2)} = \frac{a_1\bar{x}_1}{\bar{y}}, \quad Э_{yx_2(x_1)} = \frac{a_2\bar{x}_2}{\bar{y}}, \qquad (8)$$

Бизнинг мисолимизда $a_1 = 0{,}0985$; $a_2 = 224{,}6$; $\bar{y} = 1313{,}9$; $\bar{x}_1 = 6080{,}6$; $\bar{x}_2 = 3{,}1$. У холда (8) формулага асосан,

$$Э_{yx_1(x_2)} = \frac{0{,}0985 \cdot 6080{,}6}{1313{,}9} = 0{,}456, \quad Э_{yx_2(x_2)} = \frac{224{,}6 \cdot 3{,}1}{1313{,}9} = 0{,}53.$$

Бундан, оила аъзоларининг сони ўзгармаганда даромад 1% га ошиши озиқ-овқат харажатларининг 0,456% га кўпайишига, оила аъзоларининг сони 1% га ортиши эса, озиқ-овқат харажатларининг 0,53% га ошишига олиб келади.

Кобб-Дуглас ишлаб чиқариш функцияси асосидаги моделлар

Омиллар орасидаги боғланишлар доимо чизиқли бўлавермайди. Шу нуқтаи назардан мутахассисларга маълум бўлган Кобб-Дугласнинг ишлаб чиқариш функцияси ҳақида мулоҳаза юритамиз.

Айтайлик, Y – ишлаб чиқариш индекси, K – асосий капитал индекси ва L – мехнат индексини билдирсин. Американинг 1899-1922 йиллардаги қайта ишлаш саноати бўйича юқоридаги катталиклар учун Кобб ва Дуглас қуйидаги маълумотлар жадвалини тузган.

9.2-жадвал

Paul H. Douglas. The Theory of Wages. New York, 1934.

Йил	Y	K	L	Йил	Y	K	L
1899	100,0	100,0	100,0	1911	153,0	216,0	148,1
1900	101,0	107,0	104,8	1912	177,0	226,0	155,0
1901	112,0	114,0	110,0	1913	184,0	236,0	156,2
1902	122,0	122,0	117,2	1914	189,0	244,0	152,2
1903	124,0	131,0	121,9	1915	189,0	266,0	155,8
1904	122,0	138,0	115,6	1916	225,0	298,0	183,0
1905	143,0	149,0	125,0	1917	227,0	335,0	197,5
1906	152,0	163,0	134,2	1918	223,0	366,0	201,1
1907	151,0	176,0	139,9	1919	218,0	387,0	195,9
1908	126,0	185,0	123,2	1920	231,0	407,0	194,4
1909	155,0	198,0	142,7	1921	179,0	417,0	146,4
1910	159,0	208,0	147,0	1922	240,0	431,0	160,5

Ишлаб чиқариш саноатининг ривожланиш қонуниятларини башорат қилиш мақсадида, жадвалдаги берилганларга таянган ҳолда, y ва K, L орасидаги боғланишни

$$y = aK^{\alpha} L^{\beta}, \quad \alpha > 0, \beta > 0 \qquad (9)$$

кўринишда изланади. Масала юқоридаги жадвалда берилганларга кўра номаълум a, α ва β ларни сонли қийматини топишдан иборат. (9) кўринишдаги функциялар хозирги пайтда Кобб-Дуглас функцияси номи билан машхур бўлиб, кўриниб турибдики, y чизиқли функция эмас. Масалани соддалаштириш учун (9) ни ҳар икки томонини логарифмласак,

$$\ln y = \ln a + \alpha \ln K + \beta \ln L \qquad (10)$$

кўринишни ҳосил қиламиз. Агар $\ln a = c$, $\ln y = Z$, $\ln K = x_1$, $\ln L = x_2$ белгиласак, (10) қуйидаги кўринишга келади:

$$Z = c + \alpha x_1 + \beta x_2 .$$

α, β, c ларни топиш учун энг кичик квадратлар усулини қўлласак, жадвалдаги маълумотлар асосида қилинган ҳисоб-китоблар қуйидаги натижаларни беради: $a = 0{,}956$; $\alpha = 0{,}245$; $\beta = 0{,}767$; $R^{*2} = 0{,}95$. Демак, $\alpha + \beta \approx 1$ тенглик бажарилмоқда.

Шундай қилиб, Кобб-Дуглас моделини кўриниши

$y = 0{,}956\, K^{0{,}245} L^{0{,}767}$ бўлар экан.

CES-функциясини ночизиқли энг кичик квадратлар усули бўйича баҳолаш

Юқорида кўрилган Кобб-Дуглас функцияси билан бирга ресурсларни алмашишнинг ўзгармас эластиклик функциясидан (*CES*-функция – ***constant elasticity of substitution***) ҳам турли тадқиқотларда фойдаланилади. Бу функциянинг умумий кўриниши:

$$y = a_0 \Big(\sum_{i \in I} a_i x_i^{-\rho}\Big)^{-\frac{1}{\rho}}, \quad a_i > 0, \quad i \in I$$

бунда $\rho = \dfrac{1-\sigma}{\sigma}$ бўлиб, $\rho > 0$ бўлганда, $0 < \sigma < 1$; $-1 < \rho < 0$ бўлганда эса, $\sigma > 1$ бўлади. CES-функцияни ўрганиш учун икки факторли макроэкономик функция деб юритиладиган

$$y = a_0 \left(a_1 K^{-\rho} + a_2 L^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}, \quad a_0 > 0, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0$$

функцияни кўрамиз. Бу функция 1961 йилда К. Эрроу, Х. Ченери, Б. Минал ва Р. Солоу томонидан киритилган. Кўпинча $a_1+a_2=1$, $a_1>0$, $a_2>0$ бўлган ҳол иқтисодий жараёнларда учрайди. Биз кейинги мулоҳазаларда шу шарт бажарилган деб қараймиз (қулайлик учун $a_0=a$, $a_1=\delta$, $a_2=1-\delta$ деб белгилаймиз). У ҳолда, илмий-техник тараққиётни ҳисобга олинса, CES-функция қуйидагича ёзилади:

$$y = a\, e^{\lambda t}(\delta K^{-\rho}+(1-\delta)\, L^{-\rho})^{-1/\rho}. \qquad (1)$$

Маълумки, вақтинча алмашиш эластиклиги $y = F(K, L)$ чизиқли бир жинсли ишлаб чиқариш функцияси учун қуйидагича топилар эди:

$$\sigma = \left(\frac{\partial F}{\partial L}\cdot\frac{\partial F}{\partial K}\right) / \left(F\cdot\frac{\partial^2 F}{\partial K \partial L}\right). \qquad (2)$$

Кобб-Дуглас функцияси учун $\sigma = 1$, CES-функция учун эса $\sigma = \dfrac{1}{1+\rho}$. Шундай қилиб, CES-функцияси учун $\sigma \neq 1$ ва шунингдек, Кобб-Дуглас функцияси каби ўзгармасдир.

Агар $\rho \to 0$ бўлса, $\sigma \to 1$, яъни биз Кобб-Дуглас функциясига келамиз. Демак, CES-функция Кобб-Дуглас функциясининг умумлашган варианти экан.

(1) формулани логарифмланса ҳам у чизиқли бўлмаган функцияни ифодалайди. Шуниг учун унинг параметрларини ночизиқли дастурлаш усуллари ёрдамида аниқланади. Ҳозирги пайтда уларни энг кичик квадратлар усули ёрдамида баҳолашда компьютер техникасидан кенг фойдаланилмоқда.

CES-функциясини логарифмлаш ёрдамида қуйидаги кўринишга келтирилади:

$$f_i = \ln a + \lambda\,(i-1) + \frac{\sigma}{\sigma-1}\ln(\delta K_i^{-\rho} + (1-\delta)\, L_i^{-\rho}) + F_i$$

бу ерда y_i, K_i, L_i, $i=1, 2, \ldots m$ – кузатиш натижалари, $\rho = \dfrac{1-\sigma}{\sigma}$, F_i – қолдиқ.

Энг кичик квадратлар усулига кўра

$$s = \sum_{i=1}^{m} F_i^2$$ минималлаштирилади.

Асосий мавзулар

- Иқтисодий-математик усуллар; башоратлаш усуллари; башоратлаш муддатлари
- Истеъмол функциясини баҳолаш; регрессион анализ методлари; чизиқли регрессион анализ; энг кичик квадратлар усули
- Кобб-Дуглас ишлаб чиқариш функциясини регрессион таҳлил усули, энг кичик квадратлар усули ёрдамида баҳолаш
- CES-функциясини ночизиқли энг кичик квадратлар усули бўйича баҳолаш

Таянч иборалар, формулалар

- Эконометрика, эконометрик модел, башоратлаш, экстраполяция, башоратлаш турлари, энг кичик квадратлар усули, корреляция коэффициенти, эластиклик коэффициенти;

$$\sum_{k=1}^{n}\left[y_k-(\alpha+\beta x_k)\right]^2\to min$$

- нормал тенгламалар системаси,

$$\begin{cases}\dfrac{\partial s}{\partial\alpha}=-2\sum\limits_{k=1}^{n}[y_k-\alpha-\beta x_k)]=0\\ \dfrac{\partial s}{\partial\beta}=-2\sum\limits_{k=1}^{n}\left[y_k-\alpha-\beta x_k)\right]x_k=0\end{cases}$$

- чизиқли регрессия тенгламаси, $y=\alpha+\beta x$
- Кобб-Дуглас функцияси, $y=aK^{\alpha}L^{\beta}{}_1\ \alpha>0,\ \beta>0$
- CES-функция, $y=a_0\left(\sum\limits_{i\in I}a_ix_i^{-\rho}\right)^{-\frac{1}{\rho}}$, $a_i>0,\ i\in I$

Саволлар

- Эконометрика деб нимага айтилади?
- Башоратлаш усулларини таърифланг?
- Экстраполяция усули деб нимага айтилади?
- Корреляцион-регрессион усулларни таърифланг
- Энг кичик квадратлар усули ва унинг моҳиятини таърифланг
- Эконометрик моделларга мисоллар келтиринг
- Корреляция коэффициентини таърифланг
- CES – функцияси хоссаларини айтинг

Машқлар

1-машқ. Тасодифий равишда 8 та оила танлаб олинди. Шу оилага тегишли қуйидаги маълумотлар олинди:

1) оила аъзосига тўғри келган бир ойлик ўртача даромад (x сўм);
2) оила аъзолари сони (y);
3) бир ойда ўртача жон бошига истеъмол қилинган гўшт (z кг).

x	70	85	90	100	125	150	130	160
y	4	4	3	3	2	2	1	1
z	3	3,3	4,2	5	4,5	6,8	6,2	7

Энг кичик квадратлар усули ёрдамида регрессия тенгламасини $z = a_0 + a_1x + a_2y$ кўринишда топинг.

2-машқ. Қуйидаги жадвалда Ўзбекистон Республикасида истеъмол молларини ишлаб чиқариш бўйича статистик маълумотлар берилган:

	1991 й.	1992 й.	1993 й.	1994 й.	1995 й.
Истеъмол моллари (млн. сўм)	24,7	178,3	1883,3	26873,7	77361,0

Энг кичик квадратлар усули ёрдамида регрессия тенгламасини $y = ax^2 + bx + c$ кўринишда топинг. Берилган жадвал қийматларини ва унга мос квадрат функция графигини чизинг.

3-машқ. Кобб-Дуглас ишлаб чиқариш функцияси учун алмаштиришнинг эластиклик коэффициентини топинг.

4-машқ. Қуйидаги жадвалда Ўзбекистон Республикаси қишлоқ хўжалигини ривожлантириш бўйича статистик маълумотлар келтирилган(*«Ўзбекистон мустақиллик йилларида. 1991-1996 йиллар таҳлили». Тошкент, 1996*):

	1991 й.	1992 й.	1993 й.	1994 й.	1995 й.
Донли экин майдонлари (минг *га*)	1079,9	1212,2	1280,3	1522,2	1656,5
Дон ишлаб чиқариш (минг *т*)	1908,2	2257,2	2142,4	2466,9	3215,3
Гўшт ишлаб чиқариш (минг *т*)	191,8	469,2	503,6	509,2	523,5

Энг кичик квадратлар усули ёрдамида гўшт ишлаб чиқаришни (y) донли экин майдонлари (x_1) ва дон ишлаб чиқаришга (x_2) боғловчи икки параметрли регрессия тенгламасини $y=a_1x_1+a_2x_2+a_0$ кўринишда топинг.

5-машқ. Қуйидаги жадвалда Ўзбекистон Республикаси аҳолисини сони ва структураси бўйича статистик маълумотлар келтирилган(минг киши):

	1991 й.	1992 й.	1993 й.	1994 й.	1995 й.
Жами аҳоли	20863	21360	21853	22282	22690
Меҳнатга қобилиятли ёшда	10234	10463	10707	10963	11157
Меҳнатга қобилиятли ёшга қадар	9005	9239	9462	9604	9788
Меҳнатга қобилиятли ёшдан ошганлар	1624	1658	1684	1716	1745

Жадвалда чап устундаги катталикларнинг ўзгариш динамикасини ифодаловчи чизиқли регрессия тенгламаларини тузинг. Ўзаро корреляция коэффициентларини ҳисобланг. Модел параметрларини баҳоланг.

6-машқ. Қуйидаги жадвалда Ўзбекистон Республикасида чет эл сармоялари иштирокидаги корхоналар фаолияти бўйича статистик маълумотлар берилган:

	1991 й.	1992 й.	1993 й.	1994 й.	1995 й.
Жами корхоналар	128	288	644	1039	1235
Маҳсулот ишлаб чиқариш ҳажми (млн. сўм)	7,7	112,6	1708,1	7344,3	10561,4
Экспорт (млн. АҚШ дол.)	34,8	23,0	17,6	73,1	81,2
Ишловчилар сони	9126	16604	25016	33618	40000

Экспорт ҳажмини учта параметр: ишловчилар сони, жами корхоналар ва маҳсулот ишлаб чиқаришга боғловчи чизиқли модел тузинг. Ишлаб чиқариш ҳажми билан ишловчилар сони орасидаги корреляцияни аниқланг.

Фойдаланилган адабиётлар

1. Anthony M., Biggs N. Mathematics for economics and finance. Methods and modelling. Cambridge, 1998.
2. Varian Hal R. Computational Economics and Finance Modeling and Analysis with Mathematics (Disk is included). NY, 1996.
3. Гамбаров Г. М. и др. Статистичекое моделирование и прогнозирование. М., 1990.
4. Ғуломов С. С., Маҳмудов Н. М., Исмоилов А. А. Бозор иқтисодиёти моделлари. Тошкент, 1995.
5. Замков О. О. и др. Математические методы в экономике. М., 1999.
6. Кубоніва М. и др. Математическая экономика на персональном компьютере. М., 1991.
7. Лотов А. В. Введение в экономико-математическое моделирование. М., 1984.
8. Шодиев Т. Ш. ва бошқ. Ишлаб чиқаришни режалаштиришда математик усуллар. Тошкент, 1995.
9. Шадиев Т. Ш. и др. Эконометрика. Ташкент, 1999.
10. Экономико-математические методы и прикладные модели. Под ред. Г. Федосеева. М., 2000.

МУНДАРИЖА

Муҳаммаджон Ғофуров, Маматхон Холмуродов, Қосимхон Ҳусанов

ИҚТИСОДИЙ-МАТЕМАТИК УСУЛЛАР ВА МОДЕЛЛАР

Илмий муҳаррир М. Ғофуров

Масъул муҳаррир Қ. Ҳусанов

Оригинал-макет «MEDIA LAND» матбуот агентлигининг
техник ва дастурий воситалари ёрдамида тайёрланган

Муссавир Т. Гез

Компьютер техник Н. Рўзибоев

Босишга 03.12.2001 й. да рухсат этилди. Бичими 60x84 $^{1}/_{16}$

Bodo_uzb гарнитураси. 6,25 босма тобоқ. Жами 1000 нусха

152-сонли буюртма

Алмати ш. «АГНИ» нашриёти босмахонасида чоп этилди