М. М. Рахматуллаев, Ж. Д. Дехконов, Слабо периодические меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k = 2$, *ТМФ*, 2021, том 206, номер 2, 210–224

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9970

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 206, № 2
февраль, 2021

 М. М. Рахматуллаев*, **Ж. Д. Дехконов**†

СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ИЗИНГА НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ ПОРЯДКА $k=2$

Доказано существование слабо периодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k=2$ относительно нормального делителя индекса 4.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Изинга, слабо периодическая мера.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf9970

1. ВВЕДЕНИЕ

При определении гамильтониана основная проблема заключается в описании всех отвечающих ему предельных мер Гиббса. Известно, что для модели Изинга множество таких мер образует непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер. Решение задачи полного описания элементов этого множества далеко от своего завершения. Описаны трансляционно-инвариантные (см., например, [1]–[4]), периодические [5], [6] меры Гиббса и континуальные множества непериодических [2], [7] мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли.

Описанию периодических мер Гиббса для некоторых моделей с конечным значением радиуса взаимодействия, которые в основном были либо трансляционно-инвариантными, либо периодическими с периодом 2, посвящены работы [5], [6], [8]–[13].

Чтобы получить более широкое множество мер Гиббса, в работах [14]–[17] введено более общее понятие периодической меры Гиббса, т. е. слабо периодическая мера Гиббса, и доказано существование таких мер для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k \geqslant 4$. В работах [2], [7], [17] изучены континуальные множества непериодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. В работе [18] изучена слабо периодическая мера Гиббса для модели Изинга с внешними полями.

В работах [14], [15] на некоторых инвариантных множествах при некоторых условиях на параметры найдены слабо периодические (непериодические) меры Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли. В работе [12] для модели Изинга на дереве

*Наманганское отделение Института математики им. В. И. Романовского Академии наук Республики Узбекистан, Наманган, Узбекистан. E-mail: mrahmatullaev@rambler.ru

†Андижанский государственный университет, Андижан, Узбекистан.
E-mail: dehqonovjasur@bk.ru

Кэли порядка $k \geqslant 2$ найдены новые классы мер Гиббса, подобных слабо периодическим. В работах [19], [20] доказано, что на дереве Кэли порядка $k = 2$ относительно нормального делителя индекса 2 не существует слабо периодической меры Гиббса. Для других нормальных делителей задача о существовании слабо периодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k \leqslant 4$ остается открытой.

Настоящая работа является продолжением работ [14], [15], [19] и [20], точнее дополнением данных работ. Для нормального делителя индекса 4 доказывается существование новых слабо периодических мер Гиббса на дереве Кэли порядка $k = 2$, отличных от мер, описанных в работах [14], [15], [19] и [20].

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 даются необходимые определения и постановка задачи. Раздел 3 посвящен изучению существования слабо периодических мер. В разделе 4 содержится обсуждение полученных результатов.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geqslant 1$, – дерево Кэли порядка k, т. е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, где V – множество вершин, L – множество ребер τ^k. Известно, что τ^k можно представить как G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп второго порядка.

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим $W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\}$, $V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m$, $L_n = \{\langle x, y\rangle \in L \mid x,\, y \in V_n\}$, где $d(x, y)$ – расстояние между x и y на дереве Кэли, т. е. число ребер пути, соединяющего x и y.

Пусть $\Phi = \{-1, 1\}$ и $\sigma \in \Omega = \Phi^V$ – конфигурация, т. е. $\sigma = \{\sigma(x) \in \Phi\colon x \in V\}$. Пусть $A \subset V$. Обозначим через Ω_A пространство конфигураций, определенных на множестве A, принимающих значения из $\Phi = \{-1, 1\}$.

Рассмотрим гамильтониан модели Изинга

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \sigma(x)\sigma(y), \tag{1}$$

где $J \in R$, $\langle x, y\rangle$ – ближайшие соседи. Известно, что каждой мере Гиббса модели Изинга соответствует совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$, удовлетворяющих соотношению

$$h_x = \sum_{y \in S(x)} f(h_y, \theta), \tag{2}$$

где $S(x)$ – множество *прямых потомков*, точки $x \in V$ и $f(x, \theta) = \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} x)$, $\theta = \operatorname{th}(J\beta)$, $\beta = 1/T$, $T > 0$ – температура (см. [1]–[4]).

Пусть $G_k/\widehat{G}_k = \{H_1, \dots, H_r\}$ – факторгруппа, где $\widehat{G}_k$ – нормальный делитель индекса $r \geqslant 1$. Для $x \in G_k$ введем обозначение $x_\downarrow = \{y \in G_k\colon \langle x, y\rangle\} \setminus S(x)$.

Определение 1. Совокупность величин $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется *$\widehat{G}_k$-периодической* (*$\widehat{G}_k$-слабо периодической*), если $h_x = h_i$ при $x \in H_i$ ($h_x = h_{ij}$ при $x \in H_i$, $x_\downarrow \in H_j$) для любого $x \in G_k$. G_k-периодическая мера называется *трансляционно-инвариантной мерой.*

Определение 2. Говорят, что мера μ является *$\widehat{G}_k$-(слабо) периодической*, если она соответствует $\widehat{G}_k$-(слабо) периодической совокупности величин h.

Цель работы – описать множество слабо периодических мер Гиббса для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k = 2$.

3. СЛАБО ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ

Отметим, что слабо периодические меры Гиббса зависят от выбора нормального делителя.

Пусть $A \subset \{1, 2, \ldots, k+1\}$ и $H_A = \{x \in G_k \colon \sum_{i \in A} w_x(a_i)$ четно$\}$, где $w_x(a_i)$ – число букв a_i в слове $x \in G_k$, $G_k^{(2)} = \{x \in G_k \colon |x|$ четно$\}$ и $G_k^{(4)} = H_A \cap G_k^{(2)}$ – соответствующий ему нормальный делитель индекса 4.

Рассмотрим факторгруппу $G_k/G_k^{(4)} = \{H_0, H_1, H_2, H_3\}$, где

$$H_0 = \left\{x \in G_k \colon \sum_{i \in A} w_x(a_i) \text{ четно}, \ |x| \text{ четно}\right\},$$
$$H_1 = \left\{x \in G_k \colon \sum_{i \in A} w_x(a_i) \text{ нечетно}, \ |x| \text{ четно}\right\},$$
$$H_2 = \left\{x \in G_k \colon \sum_{i \in A} w_x(a_i) \text{ четно}, \ |x| \text{ нечетно}\right\},$$
$$H_3 = \left\{x \in G_k \colon \sum_{i \in A} w_x(a_i) \text{ нечетно}, \ |x| \text{ нечетно}\right\}.$$

Тогда в силу (2) G_k-слабо периодическая совокупность h имеет вид

$$h_x = \begin{cases} h_1, & x \in H_3, \quad x_\downarrow \in H_1, \\ h_2, & x \in H_1, \quad x_\downarrow \in H_3, \\ h_3, & x \in H_3, \quad x_\downarrow \in H_0, \\ h_4, & x \in H_0, \quad x_\downarrow \in H_3, \\ h_5, & x \in H_1, \quad x_\downarrow \in H_2, \\ h_6, & x \in H_2, \quad x_\downarrow \in H_1, \\ h_7, & x \in H_2, \quad x_\downarrow \in H_0, \\ h_8, & x \in H_0, \quad x_\downarrow \in H_2, \end{cases} \tag{3}$$

где h_j, $j = \overline{1, 8}$, удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} h_1 &= (k-i)f(h_2, \theta) + if(h_4, \theta), \\ h_2 &= (k-i)f(h_1, \theta) + if(h_6, \theta), \\ h_3 &= (k-i+1)f(h_2, \theta) + (i-1)f(h_4, \theta), \\ h_4 &= (k-i+1)f(h_7, \theta) + (i-1)f(h_3, \theta), \\ h_5 &= (k-i+1)f(h_1, \theta) + (i-1)f(h_6, \theta), \\ h_6 &= (k-i+1)f(h_8, \theta) + (i-1)f(h_5, \theta), \\ h_7 &= (k-i)f(h_8, \theta) + if(h_5, \theta), \\ h_8 &= (k-i)f(h_7, \theta) + if(h_3, \theta), \end{aligned} \tag{4}$$

где $i = |A|$ – мощность множества A.

Пользуясь тем, что

$$f(h,\theta) = \operatorname{arcth}(\theta \operatorname{th} h) = \frac{1}{2}\ln\frac{(1+\theta)e^{2h}+(1-\theta)}{(1-\theta)e^{2h}+(1+\theta)},$$

и обозначая $\alpha = (1-\theta)/(1+\theta)$, $z_i = e^{2h_i}$, где $i = \overline{1,4}$, из (4) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned}
z_1 &= (\varphi(z_2))^{k-i}(\varphi(z_4))^i,\\
z_2 &= (\varphi(z_1))^{k-i}(\varphi(z_6))^i,\\
z_3 &= (\varphi(z_2))^{k-i+1}(\varphi(z_4))^{i-1},\\
z_4 &= (\varphi(z_7))^{k-i+1}(\varphi(z_3))^{i-1},\\
z_5 &= (\varphi(z_1))^{k-i+1}(\varphi(z_6))^{i-1},\\
z_6 &= (\varphi(z_8))^{k-i+1}(\varphi(z_5))^{i-1},\\
z_7 &= (\varphi(z_8))^{k-i}(\varphi(z_5))^i,\\
z_8 &= (\varphi(z_7))^{k-i}(\varphi(z_3))^i,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $\varphi(z) = (z+\alpha)/(\alpha z+1)$. Запишем систему уравнений (5) в виде

$$\begin{aligned}
z_1 &= (\varphi(z_2))^k\left(\frac{\varphi(z_4)}{\varphi(z_2)}\right)^i,\\
z_2 &= (\varphi(z_1))^k\left(\frac{\varphi(z_6)}{\varphi(z_1)}\right)^i,\\
z_3 &= (\varphi(z_2))^k\left(\frac{\varphi(z_4)}{\varphi(z_2)}\right)^{i-1},\\
z_4 &= (\varphi(z_7))^k\left(\frac{\varphi(z_3)}{\varphi(z_7)}\right)^{i-1},\\
z_5 &= (\varphi(z_1))^k\left(\frac{\varphi(z_6)}{\varphi(z_1)}\right)^{i-1},\\
z_6 &= (\varphi(z_8))^k\left(\frac{\varphi(z_5)}{\varphi(z_8)}\right)^{i-1},\\
z_7 &= (\varphi(z_8))^k\left(\frac{\varphi(z_5)}{\varphi(z_8)}\right)^i,\\
z_8 &= (\varphi(z_7))^k\left(\frac{\varphi(z_3)}{\varphi(z_7)}\right)^i.
\end{aligned} \tag{6}$$

Разделив в этой системе уравнений первое уравнение на третье, второе на пятое, шестое на седьмое, четвертое на восьмое, получим систему уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_3} &= \frac{\varphi(z_4)}{\varphi(z_2)},\\
\frac{z_2}{z_5} &= \frac{\varphi(z_6)}{\varphi(z_1)},\\
\frac{z_6}{z_7} &= \frac{\varphi(z_8)}{\varphi(z_5)},\\
\frac{z_4}{z_8} &= \frac{\varphi(z_7)}{\varphi(z_3)}.
\end{aligned}$$

Используя эти соотношения, систему (6) можно записать в следующем виде:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (\varphi(z_2))^k\left(\frac{z_1}{z_3}\right)^i,\\
z_2 &= (\varphi(z_1))^k\left(\frac{z_2}{z_5}\right)^i,\\
z_3 &= (\varphi(z_2))^k\left(\frac{z_1}{z_3}\right)^{i-1},\\
z_4 &= (\varphi(z_7))^k\left(\frac{z_8}{z_4}\right)^{i-1},\\
z_5 &= (\varphi(z_1))^k\left(\frac{z_2}{z_5}\right)^{i-1},\\
z_6 &= (\varphi(z_8))^k\left(\frac{z_7}{z_6}\right)^{i-1},\\
z_7 &= (\varphi(z_8))^k\left(\frac{z_7}{z_6}\right)^i,\\
z_8 &= (\varphi(z_7))^k\left(\frac{z_8}{z_4}\right)^i.
\end{aligned}
\tag{7}
$$

Из первого уравнения системы (7) найдем z_3, из второго – z_5, из седьмого – z_6, из восьмого – z_4 и, подставив их в восьмое, седьмое, второе и первое уравнения системы (5) соответственно, получим

$$
\begin{aligned}
z_1 &= (\varphi(z_8^{(i-1)/i}(\varphi(z_7))^{k/i}))^i(\varphi(z_2))^{k-i},\\
z_2 &= (\varphi(z_7^{(i-1)/i}(\varphi(z_8))^{k/i}))^i(\varphi(z_1))^{k-i},\\
z_7 &= (\varphi(z_2^{(i-1)/i}(\varphi(z_1))^{k/i}))^i(\varphi(z_8))^{k-i},\\
z_8 &= (\varphi(z_1^{(i-1)/i}(\varphi(z_2))^{k/i}))^i(\varphi(z_7))^{k-i}.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Рассмотрим отображение $W\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, определенное следующим образом:

$$
\begin{aligned}
z_1' &= (\varphi(z_8^{(i-1)/i}(\varphi(z_7))^{k/i}))^i(\varphi(z_2))^{k-i},\\
z_2' &= (\varphi(z_7^{(i-1)/i}(\varphi(z_8))^{k/i}))^i(\varphi(z_1))^{k-i},\\
z_7' &= (\varphi(z_2^{(i-1)/i}(\varphi(z_1))^{k/i}))^i(\varphi(z_8))^{k-i},\\
z_8' &= (\varphi(z_1^{(i-1)/i}(\varphi(z_2))^{k/i}))^i(\varphi(z_7))^{k-i}.
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Легко доказать следующую лемму.

Лемма 1. *Отображение W имеет следующие инвариантные множества*:

$$
\begin{aligned}
&I_1 = \{z \in \mathbb{R}^4\colon z_1 = z_2 = z_7 = z_8\}, && I_2 = \{z \in \mathbb{R}^4\colon z_1 = z_7;\ z_2 = z_8\},\\
&I_3 = \{z \in \mathbb{R}^4\colon z_1 = z_2;\ z_7 = z_8\}, && I_4 = \{z \in \mathbb{R}^4\colon z_1 = z_8;\ z_2 = z_7\}.
\end{aligned}
$$

Замечание 1. Из определений 1 и 2 следует, что в случае I_2 (или I_j, $j = 3, 4$) слабо периодическая совокупность величин не совпадает с периодической, если хотя бы одно из равенств $z_1 = z_3$, $z_2 = z_5$, $z_4 = z_8$, $z_6 = z_7$ не выполняется.

Лемма 2. *Если на инвариантных множествах I_j, $j = 2, 3, 4$, существуют слабо периодические меры Гиббса, то они являются либо трансляционно-инвариантными, либо слабо периодическими (непериодическими).*

Доказательство. Рассмотрим инвариантное множество I_3. Пусть $z_1 = z_2$, $z_7 = z_8$. Из (5) имеем $z_4 = z_6$, $z_3 = z_5$. Если $z_1 = z_3$, имеем $z_2 = z_5$. Из равенства $z_2 = z_5$ и из второго и пятого уравнений системы (5) получим $z_1 = z_6$. Из равенства $z_1 = z_3$ и из первого и третьего уравнений системы (5) получим $z_2 = z_4$. Следовательно, $z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = z_5 = z_6 = z_7 = z_8$, т. е. соответствующие меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными. Если $z_1 \neq z_3$, то ясно, что соответствующие меры Гиббса являются слабо периодическими. В остальных случаях I_j, $j = 2, 4$, лемма доказывается аналогичным образом.

3.1. Случай $i = 1$.

3.1.1. *Случай I_2.* Запишем систему уравнений (9) для I_2 при $k = 2$, $i = 1$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi((\varphi(z_1))^2)\varphi(z_2), \\ z_2 &= \varphi((\varphi(z_2))^2)\varphi(z_1). \end{aligned} \tag{10}$$

Учитывая, что $\varphi(z_i) = (z_i+\alpha)/(\alpha z_i+1)$, $i = 1, 2$, из системы уравнений (10) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{z_2+\alpha}{\alpha z_2+1}\,\frac{(z_1+\alpha)^2+\alpha(\alpha z_1+1)^2}{\alpha(z_1+\alpha)^2+(\alpha z_1+1)^2}, \\ z_2 &= \frac{z_1+\alpha}{\alpha z_1+1}\,\frac{(z_2+\alpha)^2+\alpha(\alpha z_2+1)^2}{\alpha(z_2+\alpha)^2+(\alpha z_2+1)^2}, \end{aligned} \tag{11}$$

где $\alpha = (1-\theta)/(1+\theta)$, $z_i = e^{2h_i}$, $i = 1, 2$. Введя обозначения $x = (z_1+\alpha)/(\alpha z_1+1)$, $y = (z_2+\alpha)/(\alpha z_2+1)$, получим систему уравнений

$$\begin{aligned} x &= \psi(y), \\ y &= \psi(x), \end{aligned} \tag{12}$$

где

$$\psi(x) = \frac{x-\alpha}{1-\alpha x}\,\frac{\alpha x^2+1}{x^2+\alpha}.$$

Чтобы найти слабо периодические меры Гиббса, не являющиеся трансляционно-инвариантными, надо найти корни уравнения

$$x - \psi(\psi(x)) = 0, \tag{13}$$

отличные от корней уравнения

$$x - \psi(x) = 0. \tag{14}$$

Легко видеть, что уравнения (13) и (14) равносильны следующим уравнениям соответственно:

$$\begin{gathered} (x-1)(x+1)(\alpha x^2+(\alpha-1)x+\alpha)(x^2-(\alpha-1)x+1)\times \\ \times(\alpha x^4-2\alpha x^3+(2\alpha^2-2\alpha+2)x^2-2\alpha x+\alpha) = 0, \\ (x-1)(x+1)(\alpha x^2+(\alpha-1)x+\alpha) = 0. \end{gathered} \tag{15}$$

Из сказанного выше для слабо периодических мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными, получим уравнение

$$(x^2-(\alpha-1)x+1)(\alpha x^4-2\alpha x^3+(2\alpha^2-2\alpha+2)x^2-2\alpha x+\alpha)=0. \tag{16}$$

Второй множитель в (16) перепишем в следующем виде:

$$\alpha x^2(x-1)^2+2(\alpha-1)^2x^2+\alpha(x-1)^2=0.$$

Он равняется нулю только при $\alpha=1$, $x=1$, но значение $x=1$ соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса. Поэтому рассмотрим только первый множитель в (16). Он равняется нулю только при

$$x_{1,2}=\frac{\alpha-1\pm\sqrt{(\alpha-3)(\alpha+1)}}{2}.$$

Легко проверить, что при $\alpha>3=\alpha_{\mathrm{cr}}$ корни $x_{1,2}$ положительны.

3.1.2. *Случай I_3.* Запишем систему уравнений (8) для I_3 при $k=2$, $i=1$:

$$\begin{aligned} z_1&=\varphi((\varphi(z_7))^2)\varphi(z_1),\\ z_7&=\varphi((\varphi(z_1))^2)\varphi(z_7). \end{aligned} \tag{17}$$

Учитывая, что $\varphi(x)=(zi+\alpha)/(\alpha z_i+1)$, $i=1,2$, из системы уравнений (17) получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z_1&=\frac{z_1+\alpha}{\alpha z_1+1}\frac{(z_7+\alpha)^2+\alpha(\alpha z_7+1)^2}{\alpha(z_7+\alpha)^2+(\alpha z_7+1)^2},\\ z_7&=\frac{z_7+\alpha}{\alpha z_7+1}\frac{(z_1+\alpha)^2+\alpha(\alpha z_1+1)^2}{\alpha(z_1+\alpha)^2+(\alpha z_1+1)^2}, \end{aligned} \tag{18}$$

где $\alpha=(1-\theta)/(1+\theta)$, $z_i=e^{2h_i}$, $i=1,2$. Введя обозначения $x=(z_1+\alpha)/(\alpha z_1+1)$, $y=(z_7+\alpha)/(\alpha z_7+1)$, из (18) получим систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{x-\alpha}{1-\alpha x}&=x\frac{y^2+\alpha}{\alpha y^2+1},\\ \frac{y-\alpha}{1-\alpha y}&=y\frac{x^2+\alpha}{\alpha x^2+1}, \end{aligned} \tag{19}$$

где $x\neq 1/\alpha$, $y\neq 1/\alpha$. Отметим, что в случае $x=1/\alpha$, $y=1/\alpha$ получим $\alpha=1$, т. е. $x=y=1$, что соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса. Вычитая из первого уравнения (19) второе уравнение, получим

$$(x-y)(xy-\alpha xy+2\alpha^2(x+y)+1-\alpha)=0.$$

Отметим, что значение $x=y$ соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса. Следовательно, имеем $y=(\alpha-1-2\alpha^2x)/(2\alpha^2-(\alpha-1)x)$. Подставляя значение y в первое уравнение (19), получим следующее уравнение:

$$\frac{(4\alpha^4-3\alpha^3+\alpha^2-4)x^4-(4\alpha^3-7\alpha^2+4\alpha-1)(x^3+x)-4\alpha^4+3\alpha^3-\alpha^2}{x(\alpha x-1)[(4\alpha^4-4\alpha^3+4\alpha^2-3\alpha+1)x^2-(4\alpha^3-4\alpha^2)x+4\alpha^3-3\alpha^2+\alpha]}=0.$$

Решая это уравнение, находим корни

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = \frac{\alpha - 1 + \sqrt{-4\alpha^4 + \alpha^2 - 2\alpha + 1}}{2\alpha^2},$$
$$x_4 = \frac{\alpha - 1 - \sqrt{-4\alpha^4 + \alpha^2 - 2\alpha + 1}}{2\alpha^2}.$$

Значение $x = 1$ соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса. Чтобы третий и четвертый корни были вещественными, зададим следующее условие: $-1 \leqslant \alpha \leqslant 1/2$. Но в этом интервале эти решения будут также отрицательными, следовательно, в этом случае не существует слабо периодических мер Гиббса, которые не являются трансляционно-инвариантными.

3.1.3. *Случай I_4.* Запишем систему уравнений (8) для I_4 при $k = 2$, $i = 1$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi((\varphi(z_2))^2)\varphi(z_2), \\ z_2 &= \varphi((\varphi(z_1))^2)\varphi(z_1). \end{aligned} \tag{20}$$

Отметим, что $\varphi(x) = (zi + \alpha)/(\alpha z_i + 1)$, $i = 1, 2$. Тогда система уравнений (20) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{z_2 + \alpha}{\alpha z_2 + 1} \frac{(z_2 + \alpha)^2 + \alpha(\alpha z_2 + 1)^2}{\alpha(z_2 + \alpha)^2 + (\alpha z_2 + 1)^2}, \\ z_2 &= \frac{z_1 + \alpha}{\alpha z_1 + 1} \frac{(z_1 + \alpha)^2 + \alpha(\alpha z_1 + 1)^2}{\alpha(z_1 + \alpha)^2 + (\alpha z_1 + 1)^2}, \end{aligned} \tag{21}$$

где $\alpha = (1 - \theta)/(1 + \theta)$, $z_i = e^{2h_i}$, $i = 1, 2$.

Введем обозначение $x = z_1$, $y = z_2$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x &= \psi(y), \\ y &= \psi(x), \end{aligned} \tag{22}$$

где

$$\psi(x) = \frac{x + \alpha}{\alpha x + 1} \frac{(x + \alpha)^2 + \alpha(\alpha x + 1)^2}{\alpha(x + \alpha)^2 + (\alpha x + 1)^2}.$$

Разложим выражение $x - \psi(x)$ на множители:

$$x - \psi(x) = (x - 1)(x + 1)(\alpha^2 x + (\alpha^2 + 2\alpha - 1)x + \alpha^2).$$

Корни уравнения $x - \psi(x) = 0$ имеют следующий вид:

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = \frac{-\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \sqrt{(1 - 3\alpha)(\alpha + 1)(\alpha - 1)^2}}{2\alpha^2},$$
$$x_4 = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha - 1 + \sqrt{(1 - 3\alpha)(\alpha + 1)(\alpha - 1)^2}}{2\alpha^2}.$$

Теперь найдем корни уравнения

$$x - \psi(\psi(x)) = 0. \tag{23}$$

Корнями этого уравнения являются

$$x_1 = 1, \qquad x_2 = -1, \qquad x_3 = \frac{-\alpha^2 - 2\alpha + 1 + \sqrt{(1-3\alpha)(\alpha+1)(\alpha-1)^2}}{2\alpha^2},$$
$$x_4 = -\frac{\alpha^2 + 2\alpha - 1 + \sqrt{(1-3\alpha)(\alpha+1)(\alpha-1)^2}}{2\alpha^2},$$
$$x_5 = \frac{-\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 3) + \sqrt{(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha-1)^2(\alpha^2-\alpha+2)}}{2(\alpha^2-\alpha+1)},$$
$$x_6 = \frac{-\alpha(\alpha^2 - 2\alpha + 3) + \sqrt{(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha-1)^2(\alpha^2-\alpha+2)}}{2(\alpha^2-\alpha+1)}$$

и корни симметричного уравнения четвертой степени

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Bx + A = 0, \tag{24}$$

где

$$A = \alpha^5 + 3\alpha^4 + 4\alpha^2 - \alpha + 1, \qquad B = 6\alpha^5 + 20\alpha^3 + 6\alpha, \qquad C = 2\alpha^6 - 2\alpha^5 + 24\alpha^4 + 22\alpha^2 + 2\alpha.$$

Так как мы ищем слабо периодическую меру Гиббса, не являющуюся трансляционно-инвариантной, рассмотрим корни x_5, x_6 и корни симметричного уравнения четвертой степени (24). Легко проверить, что только при $\alpha < -1$ корни x_5, x_6 имеют положительные значения. При $\alpha > 0$ коэффициенты симметричного уравнения (24) положительны:

$$A = \alpha^5 + 3\alpha^4 + 3\alpha^2 + \alpha + (\alpha-1)^2 > 0,$$
$$B = 6\alpha^5 + 20\alpha^3 + 6\alpha > 0,$$
$$C = 2\alpha^4(\alpha-1)^2 + 2\alpha^5 + 22\alpha^4 + 22\alpha^2 + 2\alpha > 0.$$

Отсюда имеем, что система уравнений (20) не имеет положительного решения, т. е. не существует слабо периодической меры Гиббса, не являющейся трансляционно-инвариантной.

В результате с учетом леммы 2 доказана следующая

Теорема 1. *Для модели Изинга в случае нормального делителя индекса* 4 *верны следующие утверждения.*

1. *Пусть* $k = 2$, $i = 1$, $\alpha_{\mathrm{cr}} = 3$. *Тогда при* $\alpha \leqslant \alpha_{\mathrm{cr}}$ *на инвариантном множестве* I_2 *не существует* $G_k^{(4)}$*-слабо периодической* (*не трансляционно-инвариантной*) *меры Гиббса*; *при* $\alpha > \alpha_{\mathrm{cr}}$ *существуют две* $G_k^{(4)}$*-слабо периодические* (*не трансляционно-инвариантные*) *меры Гиббса.*

2. *Пусть* $k = 2$, $i = 1$. *Тогда на* I_j, $j = 1, 3, 4$, *не существует* $G_k^{(4)}$*-слабо периодической* (*не трансляционно-инвариантной*) *меры Гиббса.*

Замечание 2. Заметим, что слабо периодическая мера Гиббса зависит от выбора нормального делителя группы G_k. В случае $|A| = k + 1$ соответствующий нормальный делитель $G_k^{(4)}$ совпадает с $G_k^{(2)}$, что и есть нормальный делитель индекса 2, а в этом случае слабо периодическая мера Гиббса совпадает с периодической мерой, которая была изучена в работе [6].

3.2. Случай $i = 2$. Рассмотрим случай $|A| = i = 2$.

3.2.1. *Случай I_2.* Запишем систему уравнений (8) для I_2 при $k = 2$, $i = 2$:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi^2(\sqrt{z_2}\varphi(z_1)),\\ z_2 &= \varphi^2(\sqrt{z_1}\varphi(z_2)), \end{aligned} \tag{25}$$

где $\alpha = (1-\theta)/(1+\theta)$, $z_i = e^{2h_i}$, $\varphi(z_i) = (z_i+\alpha)/(\alpha z_i + 1)$, $i = 1, 2$. Систему уравнений (25) перепишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} x &= \frac{y-\alpha}{1-\alpha y}\frac{\alpha y^2+1}{y^2+\alpha},\\ y &= \frac{x-\alpha}{1-\alpha x}\frac{\alpha x^2+1}{x^2+\alpha}. \end{aligned} \tag{26}$$

Введем обозначение

$$\psi(x) = \frac{x-\alpha}{1-\alpha x}\frac{x^2+\alpha}{\alpha x^2+1}.$$

Тогда система (26) сводится к системе уравнений

$$\begin{aligned} x &= \psi(y),\\ y &= \psi(x). \end{aligned} \tag{27}$$

Чтобы найти слабо периодические меры Гиббса, не являющиеся трансляционно-инвариантными, надо найти корни уравнения

$$x - \psi(\psi(x)) = 0, \tag{28}$$

отличные от корней уравнения

$$x - \psi(x) = 0. \tag{29}$$

Легко видеть, что уравнения (28) и (29) равносильны следующим уравнениям соответственно:

$$\begin{aligned} &(x-1)(x+1)(\alpha x^2 + (\alpha-1)x + \alpha)(x^2 - (\alpha-1)x + 1)\times\\ &\qquad\times(\alpha x^4 - 2\alpha x^3 + (2\alpha^2 - 2\alpha + 2)x^2 - 2\alpha x + \alpha) = 0,\\ &(x-1)(x+1)(\alpha x^2 + (\alpha-1)x + \alpha) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Из вышесказанного для слабо периодических мер Гиббса, не являющихся трансляционно-инвариантными, получим уравнение

$$(x^2 - (\alpha-1)x + 1)(\alpha x^4 - 2\alpha x^3 + (2\alpha^2 - 2\alpha + 2)x^2 - 2\alpha x + \alpha) = 0. \tag{31}$$

Второй сомножитель в (31) перепишем в следующем виде:

$$\alpha x^2(x-1)^2 + 2(\alpha-1)^2x^2 + \alpha(x-1)^2.$$

Он равняется нулю только при $\alpha = 1$, $x = 1$, но значение $x = 1$ соответствует трансляционно-инвариантной мере Гиббса.

Рассмотрим теперь первый сомножитель в (31). Он равняется нулю только при

$$x_{1,2} = \frac{\alpha - 1 \pm \sqrt{(\alpha-3)(\alpha+1)}}{2}.$$

Легко проверить, что $x_{1,2}$ при $\alpha > \alpha_{\mathrm{cr}} = 3$ положительны.

3.2.2. *Случай* I_3. Запишем систему уравнений (8) на I_3 при $k = 2$, $i = 2$. Она имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi^2(\sqrt{z_7}\varphi(z_7)), \\ z_7 &= \varphi^2(\sqrt{z_1}\varphi(z_1)), \end{aligned} \tag{32}$$

где $\alpha = (1-\theta)/(1+\theta)$, $z_i = e^{2h_i}$, $\varphi(z_i) = (z_i+\alpha)/(\alpha z_i+1)$, $i = 1,2$. Введем обозначения $x = \sqrt{z_1}$, $y = \sqrt{z_7}$ и $\psi(x) = (x^3+\alpha x^2+\alpha^2x^2+\alpha)/(\alpha x^3+\alpha^2 x+\alpha x^2+1)$. Тогда получим систему уравнений

$$\begin{aligned} x &= \psi(y), \\ y &= \psi(x). \end{aligned} \tag{33}$$

Сначала найдем решение уравнения

$$x - \psi(x) = 0. \tag{34}$$

Легко видеть, что

$$x - \psi(x) = \frac{(x-1)(x+1)(\alpha x^2+(\alpha-1)x+\alpha)}{\alpha x^3+\alpha^2 x+\alpha x^2+1}. \tag{35}$$

Так как $\alpha > 0$, $x > 0$, имеем, что $(x+1)(\alpha x^2+1) \neq 0$. Находим корни уравнения (34):

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = \frac{1-\alpha+\sqrt{(1-3\alpha)(\alpha+1)}}{2\alpha},$$
$$x_4 = \frac{1-\alpha-\sqrt{(1-3\alpha)(\alpha+1)}}{2\alpha}.$$

После этого найдем решения уравнения

$$x - \psi(\psi(x)) = 0. \tag{36}$$

Находим корни уравнения (36) с помощью пакета прикладных программ `Maple 18`:

$$x_1 = -1, \qquad x_2 = 1, \qquad x_3 = \frac{1-\alpha+\sqrt{(1-3\alpha)(\alpha+1)}}{2\alpha},$$
$$x_4 = \frac{1-\alpha-\sqrt{(1-3\alpha)(\alpha+1)}}{2\alpha},$$
$$x_5 = \frac{\alpha-\alpha^2-\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-2)(\alpha^2-\alpha+2)}}{2},$$
$$x_6 = \frac{\alpha-\alpha^2+\sqrt{(\alpha+1)(\alpha-2)(\alpha^2-\alpha+2)}}{2},$$

или с помощью решения следующего симметрического уравнения четвертой степени:

$$(1+\alpha^2)x^4 + 2\alpha(\alpha+1)x^3 + 2\alpha(\alpha^2+1)x^2 + 2\alpha(\alpha+1)x + (1+\alpha^2) = 0. \tag{37}$$

Так как мы ищем слабо периодическую меру Гиббса, не являющуюся трансляционно-инвариантной, рассмотрим корни x_5, x_6 и корни симметричного уравнения четвертой степени (37).

Легко проверить, что при $\alpha > 2$ корни x_5, x_6 будут вещественными, но в этом случае они отрицательны.

Заметим, что левая часть уравнения (37) является симметрическим многочленом. Введем обозначение $x_1 + 1/x_1 = \xi$, тогда уравнение (37) принимает следующий вид:

$$(\alpha^2+1)\xi^2 + 4\alpha(\alpha+1)\xi + 2(\alpha-1)(\alpha^2+1) = 0. \tag{38}$$

Ясно, что уравнение (38) при $\alpha > 1$ не имеет положительного решения. При $\alpha < 1$ уравнение (38) имеет решение

$$\xi_1 = \frac{-2\alpha^2 - 2\alpha + \sqrt{6\alpha^4 + 4\alpha^3 + 8\alpha^2 + 2 - 2\alpha - 5\alpha^5}}{1+\alpha^2},$$
$$\xi_2 = \frac{-2\alpha^2 - 2\alpha - \sqrt{6\alpha^4 + 4\alpha^3 + 8\alpha^2 + 2 - 2\alpha - 5\alpha^5}}{1+\alpha^2}.$$

Очевидно, что при $\alpha < 1$ решение $\xi_2 < 0$. Согласно обозначению $x_1 + 1/x_1 = \xi$ должно выполняться условие $\xi_1 > 2$. Тогда имеем

$$\sqrt{6\alpha^4 + 4\alpha^3 + 8\alpha^2 + 2 - 2\alpha - 5\alpha^5} > 4\alpha^2 + 2\alpha + 2,$$

следовательно,

$$0 > 5\alpha^5 + 10\alpha^4 + 12\alpha^3 + 12\alpha^2 + 10\alpha + 2.$$

Но это невозможно при $\alpha > 0$. В результате получим, что уравнение (37) не имеет положительного решения. Следовательно, уравнение (36) тоже не имеет положительного решения, т. е. в этом случае не существует слабо периодической меры Гиббса, которая не является трансляционно-инвариантной.

3.2.3. *Случай I_4.* Записывая систему уравнений (8) для I_4 при $k = 2$, $i = 2$, имеем

$$\begin{aligned} z_1 &= \varphi^2(\sqrt{z_1}\varphi(z_2)), \\ z_2 &= \varphi^2(\sqrt{z_2}\varphi(z_1)), \end{aligned} \tag{39}$$

где $\alpha = (1-\theta)/(1+\theta)$, $z_i = e^{2h_i}$, $\varphi(z_i) = (z_i+\alpha)/(\alpha z_i+1)$, $i = 1, 2$. Введем обозначения $x = \sqrt{z_1}$, $y = \sqrt{z_7}$. Тогда получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{x-\alpha}{1-\alpha x} &= x\frac{y^2+\alpha}{\alpha y^2+1}, \\ \frac{y-\alpha}{1-\alpha y} &= y\frac{x^2+\alpha}{\alpha x^2+1}. \end{aligned} \tag{40}$$

В п. 3.1 в случае I_3 доказано, что система уравнений (40) не имеет решения с положительными координатами кроме $x = y$, а решению вида (x, x) соответствуют трансляционно-инвариантные меры Гиббса.

В результате доказана следующая

Теорема 2. *Для модели Изинга в случае нормального делителя индекса* 4 *верны следующие утверждения.*

1. *Пусть* $k = 2$, $i = 2$, $\alpha_{\rm cr} = 3$. *Тогда при* $\alpha \leqslant \alpha_{\rm cr}$ *на инвариантном множестве* I_2 *не существует* $G_k^{(4)}$*-слабо периодической* (*не трансляционно-инвариантной*) *меры Гиббса*; *при* $\alpha > \alpha_{\rm cr}$ *существуют две* $G_k^{(4)}$*-слабо периодические* (*не трансляционно-инвариантные*) *меры Гиббса.*

2. *Пусть* $k = 2$, $i = 2$. *Тогда на* I_j, $j = 1, 3, 4$, *не существует* $G_k^{(4)}$*-слабо периодической* (*не трансляционно-инвариантной*) *меры Гиббса.*

Замечание 3. Заметим, что в работах [19] и [20] доказано, что для модели Изинга на дереве Кэли порядка $k = 2$ относительно нормального делителя индекса 2 не существует слабо периодической (не трансляционно-инвариантной) меры Гиббса, но в нашем случае (случае нормального делителя индекса 4) существуют такие меры Гиббса на дереве Кэли порядка $k = 2$.

4. ОБСУЖДЕНИЕ

Широко распространена (см. [21]–[24]) формулировка модели Изинга, согласно которой каждому узлу x решетки сопоставляется переменная $\sigma(x)$, принимающая численные значения $+1$ или -1.

Если объекты, связанные с узлами x и x', находятся в одном состоянии, то $\sigma(x)\sigma(x') = +1$, а если в разных, то $\sigma(x)\sigma(x') = -1$. Ясно, что в такой интерпретации понятие *объекта*, связанного с узлом x, может трактоваться весьма широко. Это может быть, например, магнитный момент иона в кристалле, имеющий два возможных направления [25], или атомы двух сортов в бинарном сплаве [26] (значение $\sigma(x) = +1$ соответствует занятию узла x атомом одного сорта, а $\sigma(x) = -1$ отвечает узлу, занятому атомом другого сорта). Другие интерпретации модели Изинга связаны с исследованиями явления адсорбции на поверхности [27], плавления ДНК [28], с теорией решеточного газа [29] и целым рядом других вопросов теории фазового перехода типа порядок-беспорядок.

Отметим, что слабо периодическая мера Гиббса зависит от выбора нормального делителя. Рассматриваются два нормальных делителя индекса 4 $G_k^{(4)}(A)$, где $|A| = 1$ и $|A| = 2$. Для рассматриваемой модели на дереве Кэли порядка $k = 2$ найдено критическое значение $\alpha_{\rm cr} = 3$, такое, что в случаях $|A| = 1$ и $|A| = 2$ при $\alpha > \alpha_{\rm cr}$ существует две $G_k^{(4)}$-слабо периодические меры Гиббса. Различные меры Гиббса соответствуют различным фазам системы. В этом случае существуют фазовые переходы.

Заметим, что построенные в рассмотренных нами случаях фазы отличаются от известных фаз этой модели и что они соответствуют слабо периодическим мерам Гиббса (см. [14]–[20]).

Благодарности. Авторы выражают глубокую признательность профессору У. А. Розикову за полезные советы.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.

[2] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, "О чистых фазах модели Изинга на решетках Бете", *Теория вероятн. и ее примен.*, **35**:2 (1990), 220–230.

[3] F. Spitzer, "Markov random fields on an infinite tree", *Ann. Probab.*, **3**:3 (1975), 387–398.

[4] S. Zachary, "Countable state space Markov random fields and Markov chains on trees", *Ann. Probab.*, **11**:4 (1983), 894–903.

[5] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, "Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли", *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.

[6] У. А. Розиков, "Структуры разбиений на классы смежности группового представления дерева Кэли по нормальным делителям конечного индекса и их применения для описания периодических распределений Гиббса", *ТМФ*, **112**:1 (1997), 170–175.

[7] У. А. Розиков, "Построение несчетного числа предельных гиббсовских мер неоднородной модели Изинга", *ТМФ*, **118**:1 (1999), 95–104.

[8] U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, "Gibbs measures for SOS models on a Cayley tree", *Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top.*, **9**:3 (2006), 471–488.

[9] J. B. Martin, U. A. Rozikov, Yu. M. Suhov, "A three state hard-core model on a Cayley tree", *J. Nonlinear Math. Phys.*, **12**:3 (2005), 432–448.

[10] У. А. Розиков, "Описание предельных гиббсовских мер для λ-моделей на решетках Бете", *Сиб. матем. журн.*, **39**:2 (1998), 427–435.

[11] F. M. Mukhamedov, U. A. Rozikov, "On Gibbs measures of models with competing ternary and binary interactions and corresponding von Neumann algebras", *J. Statist. Phys.*, **114**:3–4 (2004), 825–848.

[12] D. Gandolfo, J. Ruiz, S. Shlosman, "A manifold of pure Gibbs states of the Ising model on a Cayley tree", *J. Statist. Phys.*, **148**:6 (2012), 999–1005.

[13] У. А. Розиков, Ш. А. Шоюсупов, "Меры Гиббса для модели SOS с четырьмя состояниями на дереве Кэли", *ТМФ*, **149**:1 (2006), 18–31.

[14] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, "Описание слабо периодических мер Гиббса модели Изинга на дереве Кэли", *ТМФ*, **156**:2 (2008), 292–302.

[15] "Слабо периодические основные состояния и меры Гиббса для модели Изинга с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли", *ТМФ*, **160**:3 (2009), 507–516.

[16] У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, "О слабо периодических гиббсовских мерах модели Изинга на дереве Кэли", *Докл. АН РУз*, **4** (2008), 12–15.

[17] М. М. Рахматуллаев, "Новые гиббсовские меры модели Изинга на дереве Кэли", *Узб. матем. журн.*, **2** (2009), 144–152.

[18] М. М. Рахматуллаев, "О слабо периодических мерах Гиббса модели Изинга с внешним полем на дереве Кэли", *ТМФ*, **183**:3 (2015), 434–440.

[19] М. М. Рахматуллаев, "О новых слабо периодических гиббсовских мерах модели Изинга на дереве Кэли", *Изв. вузов. Матем.*, 2015, № 11, 54–63.

[20] M. M. Rahmatullaev, "On new weakly periodic Gibbs measures of the Ising model on the Cayley tree of order $\leqslant 5$", *J. Phys.: Conf. Ser.*, **697** (2016), 012020, 7 pp.

[21] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов* (*строгие результаты*), Наука, М., 1980.

[22] C. Preston, *Gibbs States on Countable Sets*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1974.

[23] В. А. Малышев, Р. А. Минлос, *Гиббсовские случайные поля. Метод кластерных разложений*, Наука, М., 1985.

[24] Д. Рюэль, *Статистическая механика*, Мир, М., 1971.

[25] L. J. de Jongh, A. R. Miedema, "Experiments on simple magnetic model systems", *Adv. Phys.*, **23**:1 (1974), 1–260.

[26] Р. Фейнман, *Статистическая механика*, Мир, М., 1978.

[27] P. W. Kasteleyn, “Phase transitions”, *Fundamental Problems in Statistical Mechanics* II, Proceedings of 2nd NUFFIC International Summer Course (Noordwijk, The Netherlands, 1967), ed. E. G. D. Cohen, North-Holland, Amsterdam, 1968, 30–70.

[28] B. Zimm, P. Doty, K. Iso, “Determination of the parameters for helix formations in poly-γ-benzil-L-glutamate”, *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, **45** (1959), 1601–1607.

[29] К. Хуанг, *Статистическая механика*, Мир, М., 1966.

Поступила в редакцию 12.08.2020,
после доработки 12.08.2020,
принята к публикации 14.09.2020