Matematika Instituti Byulleteni
2021, Vol. 4, №3, 1-5 b.

Bulletin of the Institute of Mathematics
2021, Vol. 4, №3, pp.1-5

Бюллетень Института математики
2021,Vol. 4, №3, стр.1-5

$\mathbb{Q}_p$ MAYDONDA KVADRAT ILDIZGA DOIR AYRIM MASALALAR

To'xtabayev A. M. [1] **Bunazarov X. K.** [2]

Some problems related to the square root in the field $\mathbb{Q}_p$
In this paper, we study the existence of a prime number p such that a fixed integer has a square root in the field $\mathbb{Q}_p$. Moreover, we show that there exists a polynomial such that it has roots in $\mathbb{R}$ and in all $\mathbb{Q}_p$, at the same time, it has not any root in $\mathbb{Q}$.
Keywords: p-adic number; congruence; quadratic residue; Legendre symbol.

Некоторые проблемы связанные с квадратным корнем в поле $\mathbb{Q}_p$
В этой статье мы изучаем существование простого числа p такого, что фиксированное целое число имеет квадратный корень в поле $\mathbb{Q}_p$. Более того, мы показываем, что существует такой многочлен, который имеет корни в $\mathbb{R}$ и во всем $\mathbb{Q}_p$, в то же время он не имеет никакого корень в $\mathbb{Q}$.
Ключевые слова: p-адическое число; сравнение; квадратичный вычет; символ Лежандра.

MSC 2010: 11D79, 11S31
Kalit so'zlar: p-adik son, taqqoslama, kvadratik qoldiq, Lejandr simvoli.

Kirish

p-adik sonlarni birinchi bo'lib nemis matematigi K.Hensel tomonidan 1897-yilda fanga kiritilgan. Bu sonlar dastlab sonlar nazariyasining bir qismi sifatida o'rganilgan. Keyinchalik p-adik sonlarning boshqa fan sohalarida tadbiqlari topila boshlagach, p-adik sonlar nazariyasi, p-adik analiz, p-adik differensial tenglamalar, p-adik funksional analiz, p-adik dinamik sistemalar, p-adik ehtimolliklar nazariyasi, p-adik o'lchovlar nazariyasi kabi yangi fan sohalar rivojlana boshladi [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Bundan tashqari, kvant mexanikasiga, garmonik to'lqinlar nazariyasiga, stoxastik jarayonlarga ham p-adik analizni tatbiq etib kelinmoqda[7].

p-adik sonlar maydoni fazo sifatida to'la normalangan fazo, lekin algebraik yopiq bo'lmagan maydondir. Ya'ni har qanday p-adik koeffitsiyentli algebraik ko'phad bu maydonda ildizga ega emas. p-adik analiz tatbiq etiladigan turli sohalarda, xususan, p-adik Gibbs o'lchovlar nazariyasida ba'zi radikal ifodalarga ko'plab duch kelinadi. Bu radikallar biror maydonda mavjudmi? Agar mavjud bo'lsa, qaysi tub sonlar uchun mavjud?, kabi savollarga javob topishga to'g'ri keladi. Ushbu maqolada kvadrat radikallarga doir ayrim muhim masalalar, xususan, har bir fiksirlangan butun sonning kvadrat ildizi mavjud bo'ladigan $\mathbb{Q}_p$ maydon mavjudligi, bundan tashqari barcha p tub sonlarlar uchun $\mathbb{Q}_p$ p-adik sonlar maydonida va $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydonida ildizga ega, lekin ularning kesishmasi bo'lgan $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydonida ildizga ega bo'lmagan ratsional koeffitsiyentli ko'phad mavjudligi keltirilgan.

Boshlang'ich tushunchalar

$\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydoni bo'lsin. Fiksirlangan p tub son uchun har bir $x \neq 0$ ratsional sonni $x = p^r \frac{m}{n}$ ko'rinishida tasvirlash mumkin. Bunda $r, m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, m va n p bilan o'zaro tub sonlardir. Ya'ni $(m, p) = 1$,

[1] Namangan davlat universiteti, Namangan, O'zbekiston. E-mail: akbarxoja.toxtaboyev@mail.ru
[2] Namangan muhandislik-qurilish instituti, Namangan, O'zbekiston. E-mail: bunazarov68@mail.ru

$(n,p)=1$. x ratsional sonning p-adik normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$|x|_p=\begin{cases} p^{-r}, \; x\neq 0, \\ 0, \quad x=0. \end{cases} \tag{1}$$

Ushbu kiritilgan (1) norma $\forall x,y\in\mathbb{Q}$ uchun *kuchli uchburchak tengsizligi* deb ataluvchi quyidagi $|x+y|_p\leq\max\{|x|_p,|y|_p\}$ tengsizlikni qanoatlantiradi. Kuchli uchbuchak tengsizligini qanoatlantiruvchi norma *noarximed normasi* deyiladi [2]. p-adik norma ta'rifidan quyidagi xossalarni oson keltirib chiqarish mumkin:
1) Agar $|x|_p\neq|y|_p$, u holda $|x\pm y|_p=\max\{|x|_p,|y|_p\}$;
2) Agar $|x|_p=|y|_p$, u holda $|x\pm y|_p\leq|x|_p$.

$\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydonini p-adik norma bilan toʻldirilsa, $\mathbb{Q}_p$ p-adik sonlar maydoni hosil boʻladi. $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydonini biror norma bilan toʻldirilsa, yoki $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydoni yoki biror p tub son uchun $\mathbb{Q}_p$ p-adik sonlar maydoni hosil boʻladi (Ostrovskiy teoremasi [2]). Har qanday p-adik soni yagona usulda quyidagicha kanonik koʻrinishida ifodalanadi:

$$x=p^{\gamma(x)}(x_0+x_1p+x_2p^2+...), \tag{2}$$

bunda $\gamma=\gamma(x)\in\mathbb{Z}$, x_i p-adik raqamlar bo'lib, $x_0>0,\ 0\leq x_i\leq p-1$ va $|x|_p=p^{-\gamma(x)}$ [2, 3].

1-Teorema [3]. *$x^2=a$ tenglama $a\neq 0$, $a=p^{\gamma(a)}(a_0+a_1p+a_2p^2+...)$, $0\leq a_j\leq p-1$, $a_0>0$ boʻlganda $x\in\mathbb{Q}_p$ yechimga ega boʻlishi uchun quyidagi shartlarni qanoatlantirishi zarur va yetarli:*
i) $\gamma(a)$ juft son;
ii) $p\neq 2$ boʻlsa, $y^2\equiv a_0(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega; $p=2$ boʻlsa, $a_1=a_2=0$.

1-Natija [3]. *$x^2=-1$ tenglama yechimga ega boʻlishi uchun $p\equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ boʻlishi zarur va yetarli.*

$m\in\mathbb{N}$ son berilgan boʻlib, $a\in\mathbb{Z}$ va $(a,m)=1$ soni uchun $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\, m)$ taqqoslama yechimga ega boʻlsa, a soni m *modul boʻyicha kvadratik qoldiq* deyiladi, $x^2\equiv a(\mathrm{mod}\, m)$ taqqoslama yechimga ega boʻlmasa a soni m *modul boʻyicha kvadratik qoldiq emas* deyiladi[8].

p tub son, a esa p soniga boʻlinmaydigan butun son boʻlsin. *Lejandr simvoli* quyidagicha aniqlangan:

$$\left(\frac{a}{p}\right)=\begin{cases} 1, & \text{agar } a \text{ soni } p \text{ modul bo'yicha kvadratik qoldiq bo'lsa;} \\ -1, & \text{agar } a \text{ soni } p \text{ modul bo'yicha kvadratik qoldiq bo'lmasa.} \end{cases}$$

Lejandr simvolining asosiy xossalari

1^0. $\left(\frac{a}{p}\right)\equiv a^{\frac{p-1}{2}}(\mathrm{mod}\, p)$;
2^0. Agar $a\equiv b(\mathrm{mod}\, p)$ boʻlsa, u holda $\left(\frac{a}{p}\right)=\left(\frac{b}{p}\right)$;
3^0. $\left(\frac{ab}{p}\right)=\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right)$;
4^0. $\left(\frac{a^2}{p}\right)=1$;
5^0. p biror fiksirlangan tub son boʻlib, A va B toʻplamlar quyidagicha aniqlangan boʻlsin:
$A=\left\{x|\left(\frac{x}{p}\right)=1,\ x\in\{1,2,...,p-1\}\right\}$, $B=\left\{x|\left(\frac{x}{p}\right)=-1,\ x\in\{1,2,...,p-1\}\right\}$.
U holda $|A|=|B|=\frac{p-1}{2}$ boʻladi.
6^0. $\left(\frac{2}{p}\right)=(-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$.
7^0. p va q toq tub sonlar uchun $\left(\frac{q}{p}\right)\left(\frac{p}{q}\right)=(-1)^{\frac{p-1}{2}\frac{q-1}{2}}$ tenglik oʻrinli.

Asosiy natijalar

Endi asosiy natijalarni bayon qilamiz.

2-Teorema. *Har bir m butun son uchun $x^2 = m$ tenglama $\mathbb{Q}_p$ maydonda yechimga ega boʻladigan p tub son mavjud.*

Isbot.

1-hol. $|m| \leq 3$ boʻlsin. $m = 0$ yoki $m = 1$ boʻlsa, u holda 1-teoremaga koʻra $x^2 = m$ tenglama barcha $\mathbb{Q}_p$ maydonlarda yechimga ega.

$m = 2$ boʻlsin. 1-teoremaga koʻra $x^2 = 2$ tenglama biror $\mathbb{Q}_p$ maydonlarda yechimga ega boʻlishi uchun shunday p tub son topilib, $x^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega boʻlishi zarur va yetarli (Bunda (2) kanonik koʻrinishda $\gamma = 0$ boʻladi.) $x^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega boʻlishi uchun $p \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\, 8)$ boʻlishi zarur va yetarli [8].

$m = 3$ boʻlsin. Yana 1-teoremaga koʻra $x^2 = 3$ tenglama biror $\mathbb{Q}_p$ maydonlarda yechimga ega boʻlishi uchun shunday p tub son topilib, $x^2 \equiv 3(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega boʻlishi zarur va yetarli. $x^2 \equiv 2(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega boʻlishi uchun $p \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\, 12)$ boʻlishi zarur va yetarli [8].

$m = -1$ boʻlsin. 1-natijaga koʻra $x^2 = -1$ tenglama yechimga ega boʻlishi uchun $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 4)$ boʻlishi zarur va yetarli.

$m = -2$ boʻlsin. Yana 1-teoremaga koʻra $x^2 = -2$ tenglama biror $\mathbb{Q}_p$ maydonlarda yechimga ega boʻlishi uchun shunday p tub son topilib, $x^2 \equiv -2(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega boʻlishi zarur va yetarli. $x^2 \equiv -2(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega boʻlishi uchun $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 8)$ yoki $p \equiv 3(\mathrm{mod}\, 8)$ boʻlishi zarur va yetarli [8].

$m = -3$ boʻlsin. Yana 1-teoremaga koʻra $x^2 = -3$ tenglama biror $\mathbb{Q}_p$ maydonlarda yechimga ega boʻlishi uchun shunday p tub son topilib, $x^2 \equiv -3(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega boʻlishi zarur va yetarli. $x^2 \equiv -2(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega boʻlishi uchun $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 6)$ boʻlishi zarur va yetarli [8].

2-hol. $|m| > 3$ boʻlsin. Quyidagicha belgilash kiritamiz: $s = m - 1$.

2.1-hol. s tub son boʻlsin. Ushbu hol uchun ravshanki, $|s| \neq 2$. 1-teoremaga koʻra $x^2 = m = s + 1$ tenglama $\mathbb{Q}_s$ maydonda yechimga ega boʻladi.

2.2-hol. s murakkab son boʻlsin.

Agar s murakkab son 2 dan farqli biror p tub boʻluvchiga ega boʻlsa, u holda $x^2 = m = s+1 = pk+1, k \in \mathbb{Z}$ tenglama 1-teoremaga koʻra $\mathbb{Q}_p$ maydonda yechimga ega.

Agar s murakkab son 2 dan farqli tub boʻluvchiga ega boʻlmasa, u holda shunday $t \in \mathbb{N}, t \geq 2$ son topilib, $s = \pm 2^t$ boʻladi. $t = 2$ da $x^2 = 5$ yoki $x^2 = -3$ tenglama hosil boʻladi.

$x^2 = 5$ tenglamani qaraylik. $x^2 \equiv 5(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega boʻlishi uchun $\left(\frac{5}{p}\right) = 1$ boʻlishi zarur va yetarli. Lejandr simvolining 7^0 xossasiga koʻra $\left(\frac{5}{p}\right)\left(\frac{p}{5}\right) = 1$ boʻladi. Oxirgi tenglikning ikkala tomonini $\left(\frac{p}{5}\right)$ ga koʻpaytirib, 3^0 va 4^0 xossalarni qoʻllasak, $\left(\frac{5}{p}\right) = \left(\frac{p}{5}\right)$ natijani olamiz. Bundan va 1-teoremadan $x^2 = 5$ tenglama yechimga ega boʻlishi uchun $p \equiv \pm 1(\mathrm{mod}\, 5)$ boʻlishi zarur va yetarli ekanligini topamiz.

$x^2 = -3$ tenglama yechimga ega boʻlishi uchun $p \equiv 1(\mathrm{mod}\, 6)$ boʻlishi zarur va yetarli (1-holga qarang).

$t > 2$ da $x^2 = 1 \pm 2^t$ tenglama 1-teoremaga koʻra $\mathbb{Q}_2$ maydonlarda yechimga ega boʻladi. 2-Teorema isbotlandi. $\square$

1-Eslatma. 2-Teorema $x^2 = m, m \in \mathbb{Z}$ tenglama yechimga ega boʻladigan $\mathbb{Q}_p$ maydon mavjudligi haqidagi teorema boʻlib, teorema isbotidan bunday maydonlar yagona emasligini, hatto cheksiz koʻp ekanligini ham koʻrish mumkin.

3-Teorema. *Turli p va q tub sonlar berilgan boʻlsin. U holda quyidagilar oʻrinli:*
1) Shunday $n \in \mathbb{Z}$ son mavjudki, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}_p$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}_q$ boʻladi;
2) Shunday $n \in \mathbb{Z}$ son mavjudki, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}_p$, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}_q$ boʻladi;
3) Shunday $n \in \mathbb{Z}$ son mavjudki, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}_p$, $\sqrt{n} \notin \mathbb{Q}_q$ boʻladi;
4) 1), 2) va 3) da aniqlangan $n \in \mathbb{Z}$ sonlar cheksiz koʻp.

Isbot.

1) a) $p \neq 2$, $q \neq 2$ boʻlsin. Agar $n = pqk + 1, k \in \mathbb{Z}$ koʻrinishida tanlansa, u holda Lejandr simvolining xossalaridan $\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{pqk+1}{p}\right) = \left(\frac{1}{p}\right) = 1$, $\left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{pqk+1}{q}\right) = \left(\frac{1}{q}\right) = 1$ natijalarni olamiz. 1-teoremaga koʻra $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}_p$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}_q$ boʻladi.

b) $p \neq 2$, $q = 2$ boʻlsin. 1-teoremadan $n = 8x + 1, x \in \mathbb{Z}$ koʻrinishidagi sonlar uchun $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}_2$ ekanligi maʼlum. $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$ boʻladigan $x \in \mathbb{Z}$ mavjudligini koʻrsatamiz. Lejandr simvolining 5^0 xossasiga koʻra p modul boʻyicha kvadratik qoldiq boʻladigan ixtiyoriy a sonni tanlaymiz. $(p, 2) = 1$ boʻlgani uchun $8x + 1 \equiv a(\mathrm{mod}\, p)$ taqqoslama yechimga ega. Shu yechimga mos kelgan n uchun $\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{8x+1}{p}\right) = \left(\frac{a}{p}\right) = 1$ ekani kelib chiqadi. 1-teoremaga koʻra $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}_p$, $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}_2$ boʻladi.

2) Lejandr simvolining 5^0 xossasiga ko'ra p modul bo'yicha kvadratik qoldiq bo'lmaydigan ixtiyoriy b sonni tanlaymiz, ya'ni $\left(\frac{b}{p}\right) = -1$. $\{pk+b|k \in \mathbb{Z}\}$ to'plamni qaraymiz. $\left(\frac{c}{q}\right) = -1$ bo'ladigan ixtiyoriy c sonini olamiz. $(p,q) = 1$ bo'lgani uchun $px + b \equiv c(\operatorname{mod} q)$ taqqoslama yechimga ega. Uning biror yechimi k_0 bo'lsin. $n = c$ deb tanlasak, $\left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{c}{q}\right) = -1$ va $\left(\frac{n}{p}\right) = \left(\frac{c}{p}\right) = \left(\frac{pk_0+b}{p}\right) = \left(\frac{b}{p}\right) = -1$ natijalarni olamiz. 1-teoremaga ko'ra $\sqrt{n} \neq \mathbb{Q}_p$, $\sqrt{n} \neq \mathbb{Q}_q$ bo'ladi.

3) a)$p \neq 2$, $q \neq 2$ bo'lsin. Agar $n = px+1, x \in \mathbb{Z}$ ko'rinishida tanlansa, u holda Lejandr simvolining xossalaridan $\left(\frac{n}{p}\right) = 1$ natijani olamiz. $\left(\frac{n}{q}\right) = -1$ bo'ladigan $x \in \mathbb{Z}$ ni mavjudligini ko'rsatamiz. $\left(\frac{a}{q}\right) = -1$ bo'ladigan ixtiyoriy a sonni tanlaymiz. $(p,q) = 1$ bo'lgani uchun $px + 1 \equiv a(\operatorname{mod} q)$ taqqoslama yechimga ega. Shu yechimga mos kelgan n uchun $\left(\frac{n}{q}\right) = \left(\frac{px+1}{q}\right) = \left(\frac{a}{q}\right) = -1$ bo'ladi. Bundan va 1-teoremadan $\sqrt{n} \in \mathbb{Q}_p$, $\sqrt{n} \neq \mathbb{Q}_q$ ekanligi kelib chiqadi.

b) $p \neq 2$, $q = 2$ bo'lsin. Bu hol ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

4) 1), 2) va 3) xossaga ega bo'lgan $n \in \mathbb{Z}$ sonlar cheksiz ko'p ekanligi har bir hol uchun n ning tuzilishidan kelib chiqadi.

3-Teorema isbotlandi. □

Ostrovskiy teoremasidan ma'lumki, $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydonini biror norma bilan to'ldirilsa, yoki $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydoni yoki biror p tub son uchun $\mathbb{Q}_p$ p-adik sonlar maydoni hosil bo'ladi. Haqiqiy sonlar maydoni ham p-adik sonlar maydoni ham algebraik yopiq emas. Ya'ni har qanday haqiqiy koeffitsiyentli yoki p-adik koeffitsiyentli ko'phad shu maydonda ildizga ega emas. Ratsional koeffitsiyentli $P(x) = x^2 + 1$ ko'phad haqiqiy sonlar maydonida ildizga ega emas, lekin $p \equiv 1(\operatorname{mod} 4)$ bo'lganda p-adik sonlar maydonida ildizga ega.

$\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydonida ildizga ega bo'lgan ko'phad ratsional sonlar maydonining kengaytmalari $\mathbb{R}$ haqiqiy, $\mathbb{Q}_p$ p-adik va $\mathbb{C}$ kompleks sonlar maydonlarida ham ildizga ega bo'lishi ravshan. Lekin, aksi doim ham o'rinli emas. Endi, ratsional sonlar maydonining kengaytmalari bo'lgan barcha p tub sonlar uchun $\mathbb{Q}_p$ p-adik sonlar maydonlarida va $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydonlarida ildizga ega, lekin ularni kesishmasi bo'lgan $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_p \cap \mathbb{R}$ ratsional sonlar maydonida ildizga ega bo'lmagan ratsional koeffitsiyentli ko'phad mavjudligi haqidagi teoremani keltiramiz.

4-Teorema. *Barcha p tub sonlar uchun $\mathbb{Q}_p$ p-adik sonlar maydonida va $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydonida ildizga ega, lekin $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydonida ildizga ega bo'lmagan ko'phad mavjud.*

Isbot.

$P(x) = x^8 - 16x^6 - 21x^4 + 64x^2 + 68$ ko'phad biz izlagan ko'phad ekanligini ko'rsatamiz. Bu ko'phadni ko'paytuvchilarga ajratib, $P(x) = (x^2 - 17)(x^2 - 2)(x^2 + 1)(x^2 + 2)$ ko'rinishda yozamiz.

1-hol. $P(x)$ ko'phad $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydonida $x_{1,2} = \pm\sqrt{17}$, $x_{3,4} = \pm\sqrt{2}$ ildizlarga ega.

2-hol. $P(x)$ ko'phad $\mathbb{Q}$ ratsional sonlar maydonida ildizga ega emas.

3-hol. $P(x)$ ko'phad barcha p tub sonlar uchun $\mathbb{Q}_p$ p-adik sonlar maydonida ildizga ega ekanligini ko'rsatamiz.

3.1-hol. $P(x)$ ko'phad $\mathbb{Q}_2$ sonlar maydonida ildizga ega. Chunki, $x^2 - 17 = 0$ tenglama 1-teoremaga ko'ra yechimga ega.

3.2-hol. $P(x)$ ko'phad $p \equiv \pm1(\operatorname{mod} 8)$ bo'lganda $\mathbb{Q}_p$ sonlar maydonida ildizga ega. Chunki, $x^2 - 2 \equiv 0(\operatorname{mod} p)$ taqqoslama $p \equiv \pm1(\operatorname{mod} 8)$ bo'lgan p tub sonlar uchun yechimga ega. Demak, 1-teoremaga ko'ra $x^2 - 2 = 0$ tenglama $p \equiv \pm1(\operatorname{mod} 8)$ bo'lganda $\mathbb{Q}_p$ sonlar maydonida yechimga ega.

3.3-hol. $P(x)$ ko'phad $p \equiv 3(\operatorname{mod} 8)$ bo'lganda $\mathbb{Q}_p$ sonlar maydonida ildizga ega. Chunki, $x^2 + 2 \equiv 0(\operatorname{mod} p)$ taqqoslama $p \equiv 1(\operatorname{mod} 8)$ yoki $p \equiv 3(\operatorname{mod} 8)$ ko'rinishidagi p tub sonlar uchun yechimga ega. Demak, 1-teoremaga ko'ra $x^2 + 2 = 0$ tenglama xususan, $p \equiv 3(\operatorname{mod} 8)$ bo'lganida $\mathbb{Q}_p$ sonlar maydonida yechimga ega.

3.4-hol. $P(x)$ ko'phad $p \equiv 5(\operatorname{mod} 8)$ bo'lganda $\mathbb{Q}_p$ sonlar maydonida ildizga ega. Chunki, 1-natijaga ko'ra $x^2 + 1 = 0$ tenglama $p \equiv 1(\operatorname{mod} 4)$ bo'lganida $\mathbb{Q}_p$ sonlar maydonida yechimga ega. Xususan, $x^2 + 1 = 0$ tenglama $p \equiv 5(\operatorname{mod} 8)$ bo'lganida ham $\mathbb{Q}_p$ sonlar maydonida yechimga ega bo'ladi.

Har qanday p tub son quyidagi sinflardan biriga tegishli:
$p = 2$, $p \equiv 1(\operatorname{mod} 8)$, $p \equiv 3(\operatorname{mod} 8)$, $p \equiv 5(\operatorname{mod} 8)$, $p \equiv 7(\operatorname{mod} 8)$. Biz qurgan $P(x)$ ko'phad barcha p tub sonlar uchun $\mathbb{Q}_p$ p-adik sonlar maydonida yechimga ega ekan.

4-Teorema isbotlandi. □

Maqolani quyidagicha ochiq masala bilan yakunlaymiz:

Masala. Barcha p tub sonlar uchun $\mathbb{Q}_p$ p-adik sonlar maydonida ildizga ega bo'lmagan, $\mathbb{R}$ haqiqiy sonlar maydonida ildizga ega bo'lgan ratsional koeffitsiyentli ko'phad mavjudmi?

Adabiyotlar

1. Alan Adolphson, Steven Sperber, Marvin Tretkoff. p-adic methods in number theory and algebraic geometry. AMS, Founded, 1992.
2. N. Koblitz. p-adic numbers, p-adic analysis and zeta-functions. Springer, New York, 1977.
3. V.S. Vladimorov, I.V. Volovich and E.I. Zelenov. p-adic analysis and mathematical physics. World Sci. Publ., Singapore, 1994.
4. Kiran S. Kedlaya. p-adic differential equations. Cambridge University Press, 2010.
5. A.C.M. van Rooij. Non-Archimedean functional analysis. New York and Basel, Pure and applied mathematics, 1978.
6. U.A.Rozikov. Gibbs measure on a Cayley tree. World Scientific, 2013.
7. N.M. Chuong, Yu.V. Egorov, A. Khrennikov, Y. Meyer, D. Mumford. Harmonic, wavelet and p-adic analysis. World Scientific, 2007.
8. K.H.Rosen. Elementary number theory and its applications. Addison-Westley, Reading, Mass.,1986.

Olindi: 22/03/2021

Qabul qilindi: 22/07/2021

Cite this article

Tokhtabayev A. M., Bunazarov Kh. K. Some problems are related to the square root in the field $\mathbb{Q}_p$. *Bull. Inst. Math.*, 2021, Vol.4, №3, pp. 1-5. [In russian]