У. А. Розиков, М. М. Рахматуллаев, Р. М. Хакимов, Периодические меры Гиббса для модели Поттса с трансляционно-инвариантным и периодическим внешними полями на дереве Кэли, *ТМФ*, 2022, том 210, номер 1, 156–176

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10158

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ
И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ
ФИЗИКА
Том 210, № 1
январь, 2022

У. А. Розиков[*†‡], **М. М. Рахматуллаев**[*§], **Р. М. Хакимов**[*§]

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА ДЛЯ МОДЕЛИ ПОТТСА С ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫМ И ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВНЕШНИМИ ПОЛЯМИ НА ДЕРЕВЕ КЭЛИ

Изучается модель Поттса с трансляционно-инвариантным и периодическим внешними полями на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$. Для модели Поттса с трансляционно-инвариантным внешним полем при $k \geqslant 2$ показана неединственность трансляционно-инвариантной и периодической меры Гиббса. Доказано, что для модели Поттса с внешним полем, не являющимся трансляционно-инвариантным, на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$ не существуют трансляционно-инвариантные меры Гиббса. Также изучены периодические меры Гиббса для модели Поттса с периодическим внешним полем. Доказано, что при некоторых условиях количество таких мер может быть не менее трех.

Ключевые слова: дерево Кэли, мера Гиббса, модель Поттса, периодическое внешнее поле, трансляционно-инвариантное внешнее поле.

DOI: https://doi.org/10.4213/tmf10158

1. ВВЕДЕНИЕ

Решение задач, возникающих при исследовании термодинамических свойств физических и биологических систем, как правило, проводится в рамках теории мер Гиббса. Мера Гиббса – это фундаментальное понятие, определяющее вероятность микроскопического состояния данной физической системы (определенной конкретным гамильтонианом). Известно, что каждой мере Гиббса сопоставляется одна фаза физической системы, и если мера Гиббса не единственна, то говорят, что существует

[*]Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан.
E-mail: rozikovu@yandex.ru, mrahmatullaev@rambler.ru, rustam-7102@rambler.ru

[†]Университет АКФА, Ташкент, Узбекистан

[‡]Национальный университет Узбекистана им. Мирзо Улугбека, Ташкент, Узбекистан

[§]Наманганский государственный университет, Наманган, Узбекистан

фазовый переход. Для достаточно широкого класса гамильтонианов известно, что множество всех предельных мер Гиббса (соответствующих данному гамильтониану) образует непустое выпуклое компактное подмножество в множестве всех вероятностных мер (см., например, [1]–[3]) и каждая точка этого выпуклого множества однозначно разлагается по его крайним точкам. В связи с этим особый интерес представляет описание всех крайних точек этого выпуклого множества, т. е. крайних мер Гиббса.

Для удобства сначала дадим основные понятия данной работы и потом приведем постановку задачи и историю изучения вопроса.

Дерево Кэли. Пусть $\tau^k = (V, L)$, $k \geqslant 1$, – дерево Кэли порядка k, т. е. бесконечное дерево, из каждой вершины которого выходит ровно $k+1$ ребер, V – множество вершин, L – множество ребер τ^k. Пусть G_k – свободное произведение $k+1$ циклических групп $\{e, a_i\}$ второго порядка с соответствующими образующими $a_1, a_2, \dots, a_{k+1}$, т. е. $a_i^2 = e$. Существует взаимно однозначное соответствие между множеством вершин V дерева Кэли порядка k и группой G_k (см. [4]–[6]).

Для произвольной точки $x^0 \in V$ положим

$$W_n = \{x \in V \mid d(x^0, x) = n\}, \qquad V_n = \bigcup_{m=0}^{n} W_m,$$
$$L_n = \{\langle x, y\rangle \in L \mid x, y \in V_n\},$$

где $d(x, y)$ – расстояние между x и y на дереве Кэли, т. е. число ребер пути, соединяющего x и y.

Обозначим через $S(x)$ множество "прямых потомков" точки $x \in G_k$, т. е. если $x \in W_n$, то $S(x) = \{y \in W_{n+1} : d(x, y) = 1\}$.

Модель Поттса. Рассмотрим модель, в которой спиновые переменные принимают значения из множества $\Phi = \{1, 2, \dots, q\}$, $q \geqslant 2$, и расположены на вершинах дерева. Тогда *конфигурация* σ на V определяется как функция $x \in V \to \sigma(x) \in \Phi$. Аналогично определяются конфигурации σ_n и ω_n на V_n и W_n соответственно. Множество всех конфигураций на V (соответственно V_n, W_n) совпадает с $\Omega = \Phi^V$ (соответственно $\Omega_{V_n} = \Phi^{V_n}$, $\Omega_{W_n} = \Phi^{W_n}$). Легко видеть, что $\Phi^{V_n} = \Phi^{V_{n-1}} \times \Phi^{W_n}$.

Объединение конфигураций $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ и $\omega_n \in \Phi^{W_n}$ определяется следующей формулой [7]:

$$\sigma_{n-1} \vee \omega_n = \{\{\sigma_{n-1}(x), x \in V_{n-1}\}, \{\omega_n(y), y \in W_n\}\}.$$

Гамильтониан модели Поттса со специальным внешним полем имеет вид

$$H(\sigma) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \sum_{i=1}^{q} \sum_{x \in V} \widetilde{\alpha}_{i,x} \delta_{i\sigma(x)}, \tag{1}$$

где $J \in \mathbb{R}$ и $\widetilde{\alpha}_x = (\widetilde{\alpha}_{1,x}, \dots, \widetilde{\alpha}_{q,x}) \in \mathbb{R}^q$.

Конечномерные распределения. Определим конечномерное распределение вероятностной меры μ в объеме V_n как

$$\mu_n(\sigma_n) = Z_n^{-1} \exp\biggl\{-\beta H_n(\sigma_n) + \sum_{x \in W_n} \widetilde{h}_{\sigma(x),x}\biggr\}, \tag{2}$$

где $\beta = 1/T$, $T > 0$ – температура, $\{\widetilde{h}_x = (\widetilde{h}_{1,x}, \dots, \widetilde{h}_{q,x}) \in \mathbb{R}^q, x \in V\}$ – совокупность векторов, Z_n^{-1} – нормирующий множитель,

$$H_n(\sigma_n) = -J \sum_{\langle x,y\rangle \in L_n} \delta_{\sigma(x)\sigma(y)} - \sum_{i=1}^{q} \sum_{x \in V_n} \widetilde{\alpha}_{i,x} \delta_{i\sigma(x)}.$$

Говорят, что последовательность вероятностных распределений (2) *согласованная*, если для всех $n \geqslant 1$ и $\sigma_{n-1} \in \Phi^{V_{n-1}}$ справедливо равенство

$$\sum_{\omega_n \in \Phi^{W_n}} \mu_n(\sigma_{n-1} \vee \omega_n) = \mu_{n-1}(\sigma_{n-1}), \tag{3}$$

где $\sigma_{n-1} \vee \omega_n$ – объединение конфигураций. В этом случае существует единственная мера μ на Φ^V такая, что для всех n и $\sigma_n \in \Phi^{V_n}$

$$\mu(\{\sigma|_{V_n} = \sigma_n\}) = \mu_n(\sigma_n).$$

Такая мера называется расщепленной мерой Гиббса (РМГ), соответствующей гамильтониану (1) и векторнозначной функции $\widetilde{h}_x$, $x \in V$.

Постановка задачи. Основная задача состоит в изучении структуры множества $\mathcal{G}(H)$ всех мер Гиббса, соответствующих данному гамильтониану H.

Мера $\mu \in \mathcal{G}(H)$ называется крайней, если она не выражается как $\mu = \lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2$ для $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{G}(H)$ с $\mu_1 \neq \mu_2$.

Как было отмечено выше, множество $\mathcal{G}(H)$ всех мер Гиббса (для данного гамильтониана H) является непустым выпуклым компактом $\mathcal{G}(H)$ в пространстве всех вероятностных мер на Ω.

Используя теорему (12.6) из [1] и раздел 1.2.4 из [8], отметим следующее.

- Любая крайняя мера Гиббса $\mu \in \mathcal{G}(H)$ является РМГ; поэтому вопрос описания мер Гиббса сводится к описанию множества РМГ. Для каждой заданной температуры описание множества $\mathcal{G}(H)$ эквивалентно полному описанию множества всех крайних РМГ, поэтому нас интересуют только РМГ на дереве Кэли.
- Любая РМГ соответствует решению уравнения (4), данного в теореме 1 (см. ниже). Таким образом, наша основная задача сводится к решению функционального уравнения (4).

Следующее утверждение описывает условие на $\widetilde{h}_x$ и $\widetilde{\alpha}_x$, обеспечивающее согласованность $\mu_n(\sigma_n)$.

Теорема 1 [8], [9]. *Последовательность* (2) *вероятностных распределений* $\mu_n(\sigma_n)$, $n = 1, 2, \dots$, *является согласованной тогда и только тогда, когда для любого* $x \in V$ *имеет место следующее равенство*:

$$h_x = \alpha_x + \sum_{y \in S(x)} F(h_y, \theta), \tag{4}$$

где $\alpha_x = (\alpha_{1,x}, \alpha_{2,x}, \dots, \alpha_{q-1,x}) \in \mathbb{R}^{q-1}$, $\alpha_{i,x} = \beta\widetilde{\alpha}_{i,x} - \beta\widetilde{\alpha}_{q,x}$, $h_x = (h_{1,x}, \dots, h_{q-1,x})$, $h_{i,x} = \widetilde{h}_{i,x} - \widetilde{h}_{q,x} + (\beta\widetilde{\alpha}_{i,x} - \beta\widetilde{\alpha}_{q,x})$ *и* $F : h = (h_1, \dots, h_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \to F(h, \theta) =$

$(F_1, \dots, F_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1}$ *определяется как*

$$F_i = \ln \frac{(\theta - 1)e^{h_i} + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j} + 1}{\theta + \sum_{j=1}^{q-1} e^{h_j}},$$

$\theta = e^{J\beta}$, $S(x)$ – *множество прямых потомков точки* x.

Пусть G_k^* – нормальный делитель конечного индекса $r \geqslant 1$, $G_k/G_k^* = \{H_1, \dots, H_r\}$ – фактор-группа.

Определение 1. Совокупность векторов $h = \{h_x, x \in G_k\}$ называется G_k^*-*периодической*, если $h_{yx} = h_x$ для любого $x \in G_k$, $y \in G_k^*$. G_k-периодические совокупности называются *трансляционно-инвариантными*.

Определение 2. Мера μ называется G_k^*-*периодической*, если она соответствует G_k^*-периодической совокупности векторов h.

История изучения РМГ для модели Поттса. Представим краткий обзор работ, связанных с моделью Поттса на дереве Кэли.

В случае $q = 2$ модель Поттса с внешним полем совпадает с моделью Изинга с внешним полем $\alpha \in \mathbb{R}$. Для модели Изинга известны следующие факты (см. [1], глава 12).

1. Если $J > 0$ и $-(k-1)J < \alpha < (k-1)J$, то существует критическая температура $T_c = T_c(\alpha)$ такая, что для $T < T_c$ существуют две трансляционно-инвариантные крайние меры Гиббса.

2. Если $J < -\frac{1}{2} \ln \frac{k+1}{k-1}$ и $(k-1)J < \alpha < -(k-1)J$, то существуют две 2-периодические (трансляционно-неинвариантные) крайние меры Гиббса.

3. В работе [10] построено несчетное множество крайних мер Гиббса, а в работе [11] найдены необходимое и достаточное условия крайности неупорядоченной фазы модели Изинга на дереве Кэли. В работе [12] рассмотрена ферромагнитная модель Изинга с дихотомичным внешним случайным полем на дереве Кэли. Сравнивая ее с моделью с постоянным внешним полем, авторы [12] показали существование фазового перехода и дали конструктивное описание основных состояний.

В случае $q \geqslant 3$ в работах [13], [14] для модели Поттса на дереве Кэли произвольного (конечного) порядка показано существование критической температуры T_c такой, что при $T < T_c$ существуют не менее $q + 1$ трансляционно-инвариантных РМГ (ТИРМГ) и несчетное число трансляционно-неинвариантных РМГ.

В работе [5] доказано, что ТИРМГ антиферромагнитной (т. е. $J < 0$) модели Поттса с внешним полем на дереве Кэли единственна.

Работа [15] посвящена модели Поттса со счетным числом состояний и с ненулевым внешним полем на дереве Кэли. Доказано, что эта модель имеет единственную ТИРМГ.

В работе [16] найдены все ТИРМГ, в частности показано, что при достаточно низких температурах их количество равно $2^q - 1$. Доказано, что существуют $[q/2]$ критических температур и дано точное количество ТИРМГ для каждой промежуточной температуры.

В статьях [17], [18] найдены некоторые области температуры, в которых гарантировано, что данная ТИРМГ является крайней (либо не является крайней) в множестве всех мер Гиббса. В частности, показано, что существует интервал температуры, для которого существуют не менее $2^{q-1}+q$ крайних ТИРМГ.

В работе [19] для модели Поттса изучены слабо периодические основные состояния и слабо периодические меры Гиббса. Полученные в работе [19] слабо периодические меры Гиббса также являются трансляционно-инвариантными.

В работе [20] доказано существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса, не являющихся трансляционно-инвариантными. В работе [21] изучена модель Поттса с внешним полем на дереве Кэли порядка $k \geqslant 2$. Для антиферромагнитной модели Поттса с внешним полем при $k \geqslant 6$ и $q \geqslant 3$ показана неединственность слабо периодической меры Гиббса, не являющейся трансляционно-инвариантной. В работе [22] изучена слабо периодическая мера Гиббса для модели Поттса со специальным внешним полем на дереве Кэли.

В недавной работе [8] дан обширный анализ единственности и неединственности ТИРМГ модели Поттса со случайным и постоянным внешним полем. В некоторых частных случаях доказано, что верхняя граница количества таких мер равна 2^q-1.

Детальный обзор результатов и применения модели Поттса можно найти в работе [23].

Настоящая работа посвящена трансляционно-инвариантным и периодическим мерам Гиббса для модели Поттса с трансляционно-инвариантным и периодическим внешними полями на дереве Кэли. В разделе 2 изучены ТИРМГ для модели Поттса с трансляционно-инвариантным и трансляционно-неинвариантным внешними полями, доказана неединственность ТИРМГ для модели Поттса с трансляционно-инвариантным внешним полем, а также доказано, что не существует ТИРМГ для модели Поттса с трансляционно-неинвариантным внешним полем. В разделе 3 изучены периодические меры Гиббса с трансляционно-инвариантным внешним полем и доказано, что для ферромагнитной (т. е. $J>0$) модели Поттса с трансляционно-инвариантным внешним полем и с q состояниями на дереве Кэли периодические меры Гиббса с периодом 2 являются трансляционно-инвариантными, а для антиферромагнитной (т. е. $J<0$) модели Поттса с трансляционно-инвариантным внешним полем и с q состояниями на дереве Кэли порядка 2 дано полное описание периодических мер Гиббса с периодом 2. В разделе 4 доказаны существование и неединственность периодических мер Гиббса с периодическим внешним полем.

2. ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫЕ МЕРЫ

Рассмотрим ТИРМГ с трансляционно-инвариантным внешним полем, т. е. α_x и h_x не зависят от x: $\alpha_x \equiv \alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_{q-1})$ и $h_x \equiv h = (h_1,\dots,h_{q-1})$. Тогда равенство (4) имеет следующий вид:
$$h = \alpha + kF(h,\theta). \tag{5}$$
Введя обозначения $z_i = e^{h_i}$, $\lambda_i = e^{\alpha_i}$, $i=1,\dots,q-1$, из (5) получим следующую систему уравнений:
$$z_j = \lambda_j\left(\frac{(\theta-1)z_j+\sum_{i=1}^{q-1} z_i+1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_i+\theta}\right)^k, \tag{6}$$
где $j=1,2,\dots,q-1$.

Лемма 1. *Пусть вектор* $\vec{z} = (z_1, \dots, z_{q-1})$ *является решением системы* (6). *Компонента этого вектора* $z_j = 1$ (*при некотором* j) *тогда и только тогда, когда* $\lambda_j = 1$.

Доказательство. Если $z_j = 1$, то из (6) следует, что $\lambda_j = 1$. При $\lambda_j = 1$ уравнение (6) относительно z_j может иметь несколько решений, среди которых имеется $z_j = 1$ независимо от значений параметров $k \geqslant 1$, $\theta > 0$. Лемма доказана.

Из леммы 1 следует, что количество единиц в решении системы (6) совпадает с количеством единиц в векторе $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1})$.

Рассмотрим отображение $U\colon \mathbb{R}_+^{q-1} \to \mathbb{R}_+^{q-1}$, определенное формулой

$$U\colon\ z'_j = \lambda_j \left(\frac{(\theta - 1)z_j + \sum_{i=1}^{q-1} z_i + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_i + \theta} \right)^k, \qquad j = 1, 2, \dots, q-1. \tag{7}$$

Тогда уравнение (6) является уравнением для неподвижных точек оператора U, т. е. $z = U(z)$. В общем случае поиск всех неподвижных точек этого нелинейного оператора является сложной задачей. Поэтому неподвижные точки будем искать на некоторых инвариантных множествах оператора U.

Для $m \in \{1, 2, \dots, q-1\}$ и $a, b > 0$ рассмотрим множества

$$I_m = \{(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \colon x_1 = \dots = x_m;\ x_{m+1} = \dots = x_{q-1}\},$$
$$I_{m,a,b} = \{(x_1, x_2, \dots, x_{q-1}) \in \mathbb{R}^{q-1} \colon x_1 = \dots = x_m = a;\ x_{m+1} = \dots = x_{q-1} = b\}.$$

Лемма 2. *Пусть* $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}) \in I_{m,a,b}$ *для некоторых* $a, b > 0$. *Тогда множество* I_m *является инвариантным относительно оператора* U.

Доказательство. Пусть $\lambda_i = a$, $i \leqslant m$, и $\lambda_i = b$, $i > m$. Тогда оператор (7) имеет вид

$$\begin{aligned} z'_j &= a \left(\frac{(\theta - 1)z_j + \sum_{i=1}^{q-1} z_i + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_i + \theta} \right)^k, \qquad j = 1, \dots, m, \\ z'_j &= b \left(\frac{(\theta - 1)z_j + \sum_{i=1}^{q-1} z_i + 1}{\sum_{i=1}^{q-1} z_i + \theta} \right)^k, \qquad j = m+1, \dots, q-1. \end{aligned} \tag{8}$$

Из этих равенств легко видеть, что если $z \in I_m$, то $z' = U(z) \in I_m$. Лемма доказана.

Пусть $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_{q-1}) \in I_{m,\lambda,\mu}$ и $\vec{z} = (z_1, \dots, z_{q-1}) \in I_{m,u,v}$. Тогда система уравнений (6) сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} u &= \lambda \left(\frac{(\theta + m - 1)u + (q - m - 1)v + 1}{mu + (q - m - 1)v + \theta} \right)^k, \\ v &= \mu \left(\frac{mu + (\theta + q - m - 2)v + 1}{mu + (q - m - 1)v + \theta} \right)^k. \end{aligned} \tag{9}$$

Заметим, что при $\theta \neq 1$, $\lambda \neq 1$, $\mu \neq 1$ мы имеем $u \neq \lambda$ и $v \neq \mu$. Поэтому можно ввести функцию

$$f_k(u, m, \theta, \lambda) = \frac{(mu + \theta)u^{1/k} - ((m + \theta - 1)u + 1)\lambda^{1/k}}{(q - m - 1)(\lambda^{1/k} - u^{1/k})}.$$

Таблица 1

k	θ	λ	μ	m	q	Число положительных решений уравнения (11)
3	0.5	0.3	0.5	1	7	1
3	20	0.3	1.5	1	7	2
3	10	0.3	1.5	1	7	3
3	10	0.3	1.01	1	7	4

Из первого уравнения системы (9) находим v, а из второго находим u:

$$v = f_k(u, m, \theta, \lambda), \qquad u = f_k(v, q - m - 1, \theta, \mu). \tag{10}$$

Из последней системы получим уравнение

$$u = f_k(f_k(u, m, \theta, \lambda), q - m - 1, \theta, \mu). \tag{11}$$

При общих значениях параметров решение (11) кажется невозможным. Но компьютерный анализ показывает, что при конкретном выборе параметров число положительных решений этого уравнения может быть 1, 2, 3 и 4 (см. табл. 1). Более того, каждому положительному решению уравнения (11) в силу первого уравнения системы (10) соответствует положительное значение v.

В системе (9) для простоты положим $\mu = 1$, тогда $v = 1$ является решением второго уравнения независимо от остальных параметров. При $v = 1$ из первого уравнения (9) получим

$$u = \lambda\left(\frac{(\theta + m - 1)u + q - m}{mu + \theta + q - m - 1}\right)^k. \tag{12}$$

Замечание 1. Заметим, что при $m = 1$ уравнение (12) изучено в работе [8].

Далее, заменив $u = (q - m)y/(\theta + m - 1)$, уравнение (12) можно переписать в следующем виде:

$$ay = \left(\frac{1 + y}{b + y}\right)^k, \qquad y > 0, \tag{13}$$

где

$$a := \frac{(q - m)m^k}{\lambda(\theta + m - 1)^{k+1}}, \qquad b := \frac{(\theta + q - m - 1)(\theta + m - 1)}{q - m}. \tag{14}$$

Из предложения 10.7 работы [2] для решений уравнения (13) следует справедливость следующей леммы.

Лемма 3. *Обозначим* $b_0 \equiv b_0(k) := ((k + 1)/(k - 1))^2$ *и пусть* $\nu \equiv \nu(a, b, k)$ *означает количество решений уравнения* (13) *с* $a, b > 0$ *и* $k \geqslant 2$. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если* $b \leqslant b_0$, *то для любого* $a > 0$ *уравнение* (13) *имеет единственное решение, т. е.* $\nu = 1$.

2. *Для* $b > b_0$ *положим*

$$a_\pm \equiv a_\pm(b, k) = \frac{1}{y_\pm}\left(\frac{1 + y_\pm}{b + y_\pm}\right)^k, \qquad 0 < a_- < a_+,$$

где $y_\pm = y_\pm(b,k) > 0$ *– два различающихся вещественных решения квадратного уравнения*

$$y^2 + (2-(b-1)(k-1))y + b = 0$$

такие, что

$$y_\pm = \frac{(b-1)(k-1) - 2 \pm \sqrt{D(b,k)}}{2},$$

$D(b,k) := (2-(b-1)(k-1))^2 - 4b = (b-1)(k-1)^2(b-b_0)$. *Тогда число решений* ν *определяется следующим образом:*

$$\nu = \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ 0 < a < a_- \ \ \text{или} \ \ a > a_+, \\ 2, & \text{если} \ \ a = a_- \ \ \text{или} \ \ a = a_+, \\ 3, & \text{если} \ \ a_- < a < a_+. \end{cases} \tag{15}$$

Число ТИРМГ для модели Поттса с трансляционно-инвариантным внешним полем обозначим через $\mathrm{card}(GM)_{\mathrm{TI}}$.

Из (14) легко видеть, что условие $b > b_0$ равносильно следующему неравенству:

$$\theta > \theta_{\mathrm{c}} \equiv \theta_{\mathrm{c}}(k,q,m) = \frac{1}{2}\big(2 - q + \sqrt{(q-2)^2 + 4(q-1)b_0 + (q-m-1)(m-1)}\big). \tag{16}$$

Когда выполняется условие (16), т. е. $b > b_0$, согласно лемме 3 уравнение (13) (уравнение (12)) имеет три решения при $\lambda^+ < \lambda < \lambda^-$, два решения при $\lambda = \lambda^+$ или $\lambda = \lambda^-$ и одно решение при $\lambda \notin [\lambda^+, \lambda^-]$, где

$$\frac{(q-m)m^k y_+}{(\theta+m-1)^k}\left(\frac{b+y_+}{1+y_+}\right)^k = \frac{(q-m)m^k}{(\theta+m-1)^k a_+} = \lambda^+,$$
$$\frac{(q-m)m^k y_-}{(\theta+m-1)^k}\left(\frac{b+y_-}{1+y_-}\right)^k = \frac{(q-m)m^k}{(\theta+m-1)^k a_-} = \lambda^-.$$

Условия следующей теоремы получаются из условия леммы 3 при

$$\alpha_-(\theta,q,m) = \ln\lambda^-, \qquad \alpha_+(\theta,q,m) = \ln\lambda^+.$$

Теорема 2. *Пусть* $k \geqslant 2$. *Тогда имеем*

$$card(GM)_{TI} \geqslant \begin{cases} 1, & \text{если} \ \ \theta \leqslant \theta_{\mathrm{c}} \ \ \text{или} \ \ \theta > \theta_{\mathrm{c}}, \ \alpha \notin [\alpha_-(\theta,q,m), \alpha_+(\theta,q,m)], \\ 2, & \text{если} \ \ \theta > \theta_{\mathrm{c}} \ \ \text{и} \ \ \alpha = \alpha_-(\theta,q,m) \ \ \text{или} \ \ \alpha = \alpha_+(\theta,q,m), \\ 3, & \text{если} \ \ \theta > \theta_{\mathrm{c}} \ \ \text{и} \ \ \alpha \in (\alpha_-(\theta,q,m), \alpha_+(\theta,q,m)). \end{cases} \tag{17}$$

Рассмотрим вопрос существования ТИРМГ с трансляционно-неинвариантным внешним полем. Тогда $\vec{h}_x$ не зависит от x, т. е. $\vec{h}_x \equiv \vec{h} = (h_1, \dots, h_{q-1})$, а вектор $\vec{\alpha}_x$ не является трансляционно-инвариантным.

Верна следующая теорема.

Теорема 3. *Для модели Поттса с трансляционно-неинвариантным внешним полем не существуют трансляционно-инвариантные меры Гиббса.*

Доказательство. Предположим обратное, т. е. для модели Поттса с трансляционно-неинвариантным внешним полем существуют ТИРМГ. Так как вектор $\vec{\alpha}_x$ не является трансляционно-инвариантным, то существуют вершины x и x' такие, что $\vec{\alpha}_x \neq \vec{\alpha}_{x'}$, но в этих вершинах $\vec{h}_x = \vec{h}_{x'} = h$. Тогда из (4) имеем

$$\vec{h} = \vec{\alpha}_x + kF(\vec{h}, \theta), \qquad \vec{h} = \vec{\alpha}_{x'} + kF(\vec{h}, \theta). \tag{18}$$

Отсюда получим $\vec{\alpha}_x - \vec{\alpha}_{x'} = 0$, т. е. $\vec{\alpha}_x \equiv \vec{\alpha}_{x'}$. Это противоречие доказывает теорему.

3. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА С ТРАНСЛЯЦИОННО-ИНВАРИАНТНЫМ ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть H – нормальный делитель конечного индекса, а $G_k^{(2)}$ – подгруппа, состоящая из слов четной длины в G_k. Тогда для модели Поттса с внешним полем все H-периодические меры Гиббса являются либо $G_k^{(2)}$-периодическими, либо трансляционно-инвариантными.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2 работы [16].

Рассмотрим $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса для модели Поттса с трансляционно-инвариантным внешним полем. $G_k^{(2)}$-периодическая совокупность векторов $\vec{h} = \{h_x \in \mathbb{R}^{q-1} \colon x \in G_k\}$ имеет следующий вид:

$$\vec{h}_x = \begin{cases} \vec{h}_1, & \text{если} \ \ x \in G_k^{(2)}, \\ \vec{h}_2, & \text{если} \ \ x \in G_k \setminus G_k^{(2)}, \end{cases}$$

и трансляционно-инвариантное внешнее поле имеет вид

$$\vec{\alpha}_x = \vec{\alpha} \quad \forall x \in G_k.$$

Здесь $\vec{h}_i = (h_{i1}, h_{i2}, \dots, h_{iq-1})$, $i = 1, 2$, $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_{q-1})$.

Тогда в силу (4) имеем

$$\begin{aligned} \vec{h}_1 &= \vec{\alpha} + kF(\vec{h}_2, \theta), \\ \vec{h}_2 &= \vec{\alpha} + kF(\vec{h}_1, \theta). \end{aligned} \tag{19}$$

Введя обозначения $z_{ij} = e^{h_{ij}}$, $\lambda_i = e^{\alpha_i}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, q-1$, из (19) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z_{1j} &= \lambda_j \left(\frac{(\theta - 1) z_{2j} + \sum_{r=1}^{q-1} z_{2j} + 1}{\sum_{r=1}^{q-1} z_{2j} + \theta} \right)^k, \\ z_{2j} &= \lambda_j \left(\frac{(\theta - 1) z_{1j} + \sum_{r=1}^{q-1} z_{1j} + 1}{\sum_{r=1}^{q-1} z_{1j} + \theta} \right)^k, \end{aligned} \tag{20}$$

где $j = 1, 2, \dots, q-1$.

Пусть $\vec{z}_r = (z_{r1}, z_{r2}, \dots, z_{rq-1}) \in I_m$, $r = 1, 2$, и $\vec{\lambda} = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{q-1}) \in I_m$. Обозначим через z_r, $r = 1, 2$, координаты вектора $\vec{z}_r$, отличные от единицы, а через λ

обозначим координаты вектора $\vec{\lambda}$, отличные от единицы. Тогда из системы уравнений (20) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z_1 &= \lambda\biggl(\frac{(\theta+m-1)z_2+q-m}{mz_2+\theta+q-m-1}\biggr)^k, \\ z_2 &= \lambda\biggl(\frac{(\theta+m-1)z_1+q-m}{mz_1+\theta+q-m-1}\biggr)^k. \end{aligned} \tag{21}$$

Введя обозначения $\sqrt[k]{z_1}=x$, $\sqrt[k]{z_2}=y$, $\sqrt[k]{\lambda}=\zeta$, из (20) получим

$$\begin{aligned} x &= \zeta\frac{(\theta+m-1)y^k+q-m}{my^k+\theta+q-m-1}, \\ y &= \zeta\frac{(\theta+m-1)x^k+q-m}{mx^k+\theta+q-m-1}. \end{aligned} \tag{22}$$

Рассмотрим функцию $g\colon(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, определенную как

$$g(x)\equiv g(x,\zeta,\theta,q,m,k)=\zeta\frac{(\theta+m-1)x^k+q-m}{mx^k+\theta+q-m-1}.$$

Лемма 4. *Функция $g(x)$, $x>0$, имеет следующие свойства*:

1) *возрастает при $\theta>1$ и убывает при $\theta<1$*;

2) *ограничена*:

$$\zeta\,\cdot\,\min\biggl\{\frac{q-m}{\theta+q-m-1},\frac{\theta+m-1}{m}\biggr\}<g(x)<\zeta\,\cdot\,\max\biggl\{\frac{q-m}{\theta+q-m-1},\frac{\theta+m-1}{m}\biggr\};$$

3) *строго выпукла при $\theta>1$, $x\in(0,\hat{x})$ и $\theta<1$, $x\in(\hat{x},+\infty)$ (строго вогнута при $\theta>1$, $x\in(\hat{x},+\infty)$ и $\theta<1$, $x\in(0,\hat{x})$), где*

$$\hat{x}=\biggl(\frac{(k-1)(\theta+q-m-1)}{m(k+1)}\biggr)^{1/k}.$$

Доказательство. Имеем

$$g'(x)=\frac{\zeta k(\theta-1)(\theta-1+q)x^{k-1}}{(mx^k+\theta+q-m-1)^2},$$

$$g''(x)=\frac{\zeta k(\theta-1)(\theta-1+q)x^{k-2}}{(mx^k+\theta+q-m-1)^3}[-m(k+1)x^k+(k-1)(\theta+q-m-1)].$$

Все утверждения леммы следуют из этих равенств. Лемма доказана.

Пусть $\vec{\alpha}\in I_1$ и α есть координата вектора $\vec{\alpha}$, отличная от нуля.

Следующая теорема дает условия на параметры системы уравнений (22), описывающие $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса.

Теорема 5. *Для модели Поттса с трансляционно-инвариантным внешним полем и с q состояниями на дереве Кэли верны следующие утверждения.*

1. *При $k\geqslant 2$, $\theta>1$ все $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.*

2. *При* $k=2$, $\theta<1$, $m=2,\dots,q-2$, $q\geqslant 4$ *все* $G_k^{(2)}$*-периодические меры Гиббса являются трансляционно-инвариантными.*
3. *При* $k=2$, $\theta<1$, $m=1$ *справедливы следующие утверждения.*
   3.1. *При* $\theta\in(0,\theta^*)$ *и* $\alpha\in(\ln\lambda_1(\theta,q),\ln\lambda_2(\theta,q))$, *где*

$$\theta^*=\frac{\sqrt{32-32q+9q^2}+6-3q}{6}, \tag{23}$$

   существуют две $G_k^{(2)}$*-периодические (трансляционно-неинвариантные) меры Гиббса.*

   3.2. *При* $\theta=\theta^*$ *и* $\alpha=\ln\lambda^*(\theta,q)$ *существует одна* $G_k^{(2)}$*-периодическая (трансляционно-неинвариантная) мера Гиббса.*

   3.3. *При* $\theta>\theta^*$ *и* $\theta\neq 1$ *не существует* $G_k^{(2)}$*-периодической (трансляционно-неинвариантной) меры Гиббса, где*

$$\lambda_{1,2}(\theta,q)=\frac{-[3\theta^2(\theta+q-2)^2+6\theta(q-1)(\theta+q-2)-(q-1)^2]\pm\sqrt{D'}}{8(q-1)\theta^3},$$
$$\lambda^*(\theta,q)=-\frac{(3\theta^*)^2(\theta^*+q-2)^2+6\theta^*(q-1)(\theta^*+q-2)-(q-1)^2}{8(q-1)(\theta^*)^3}$$

   и

$$D':=[3\theta^2(\theta+q-2)^2+6\theta(q-1)(\theta+q-2)-(q-1)^2]^2-64\theta^3(\theta+q-2)^3(q-1).$$

4. *При* $k=2$, $\theta<1$, $m=q-1$ *справедливы следующие утверждения.*
   4.1. *При* $\theta\in(0,\theta^*)$ *и* $\alpha\in(\ln\lambda_3(\theta,q),\ln\lambda_4(\theta,q))$, *где* θ^* *определено в* (23), *существуют две* $G_k^{(2)}$*-периодические (трансляционно-неинвариантные) меры Гиббса.*

   4.2. *При* $\theta=\theta^*$ *и* $\alpha=\ln\lambda_3(\theta,q)$ *существует одна* $G_k^{(2)}$*-периодическая (трансляционно-неинвариантная) мера Гиббса.*

   4.3. *При* $\theta>\theta^*$ *и* $\theta\neq 1$ *не существует* $G_k^{(2)}$*-периодической (трансляционно-неинвариантной) меры Гиббса, где* $\lambda_3(\theta,q)\leqslant\lambda_4(\theta,q)$ *являются решениями уравнения*

$$[4(q+\theta-2)((\theta-1)^2+(q-1)(2\theta+q-3))]\lambda^2-[(\theta-1)^2((\theta+q-1)^2-\\ -4\theta^2)-4(q-1)\theta(\theta+q-2+(2\theta+q-3)\theta)]\lambda+4(q-1)\theta^3=0. \tag{24}$$

Доказательство. 1. При $x=y$ система уравнений (22) приводится к уравнению $g(x)=x$, решения которого соответствуют ТИРМГ. При $\theta>1$ докажем, что уравнение $g(g(x))=x$ не имеет решений, отличных от решений уравнения $g(x)=x$. Предположим, что существует x с $g(x)\neq x$. Тогда $g(x)>x$ (или $g(x)<x$). В случае $g(x)>x$ (аналогично в случае $g(x)<x$) в силу леммы 4 имеем $g(g(x))>g(x)>x$, т. е. x не может быть решением уравнения $g(g(x))=x$.

2. Пусть $\theta<1$. При $k=2$ уравнение $g(x)=x$ имеет вид

$$mx^3-\zeta(\theta+m-1)x^2+(\theta+q-m-1)x-\zeta(q-m)=0, \tag{25}$$

решения которого описывают ТИРМГ. При $k=2$ в системе уравнений (22), подставив выражение для y из второго уравнения в первое, получим уравнение пятой степени относительно x. Разделив многочлен пятой степени на многочлен третьей степени (25), получим квадратное уравнение

$$[m(\theta+q-m-1)+\zeta^2((\theta-1)^2+m(m+2\theta-2))]x^2+[\zeta(\theta-1)(\theta+q-1)]x+ \\ +\zeta^2(q-m)(\theta+m-1)+(\theta+q-m-1)^2=0, \tag{26}$$

которое описывает периодические меры Гиббса. Изучим решения этого квадратного уравнения. Для этого вычислим его дискриминант, учитывая, что $\sqrt{\lambda}=\zeta$:

$$D=-4\lambda^2(q-m)(\theta+m-1)[(\theta-1)^2+m(m+2\theta-2)]+\lambda[(\theta-1)^2\{(\theta+q-1)^2- \\ -4(\theta+q-m-1)^2\}-\{(q-m)(\theta+m-1)+(m+2\theta-2)(\theta+q-m-1)\}\times \\ \times 4m(\theta+q-m-1)]-4m(\theta+q-m-1)^3. \tag{27}$$

Известно, что уравнение (26) имеет два положительных действительных решения, если $D>0$ и $\zeta(\theta-1)(\theta+q-1)<0$. При $\theta<1$ ясно, что $\zeta(\theta-1)(\theta+q-1)<0$. Далее, решим неравенство $D>0$. Умножив обе части этого неравенства на -1, получим

$$A\lambda^2-B\lambda+C<0, \tag{28}$$

где

$$\begin{aligned} &A=4(q-m)(\theta+m-1)[(\theta-1)^2+m(m+2\theta-2)],\\ &B=(\theta-1)^2[(\theta+q-1)^2-4(\theta+q-m-1)^2]-\\ &\quad-4m(\theta+q-m-1)[(q-m)(\theta+m-1)+(m+2\theta-2)(\theta+q-m-1)],\\ &C=4m(\theta+q-m-1)^3. \end{aligned}$$

Заметим, что при условиях п. 2 теоремы мы имеем $A>0$, $C>0$. Поэтому при $\lambda>0$, для того чтобы неравенство (28) имело решение, необходимо выполнение условия $B>0$, т. е.

$$B\equiv B(\theta)=(\theta-1)^2[(\theta+q-1)^2-4(\theta+q-m-1)^2]- \\ -4m(\theta+q-m-1)[(q-m)(\theta+m-1)+(m+2\theta-2)(\theta+q-m-1)]>0. \tag{29}$$

Нас интересует решение (29) в интервале $\theta\in(0,1)$. Заметим, что $B(\theta)$ есть полином четвертой степени относительно θ, т. е.

$$\begin{aligned} B(\theta)=\;&-3\theta^4-6(q-2)\theta^3+3(4m^2-4mq-q^2+6q-6)\theta^2+\\ &+6(2m^2q-2mq^2-4m^2+4mq+q^2-3q+2)\theta-\\ &-8m^4+16m^3q-8m^2q^2-12m^2q+12mq^2+12m^2-12qm-3q^2+6q-3. \end{aligned}$$

При $m=2,3,\ldots,q-2$, $q\geqslant 4$ введем обозначение

$$E(m,q)=-8m^4+16m^3q-8m^2q^2-12m^2q+12mq^2+12m^2-12qm-3q^2+6q-3.$$

Следующая лемма полезна для доказательства теоремы 5.

Лемма 5. *При всех* $m = 2, 3, \dots, q-2$, $q \geqslant 4$ *имеет место* $E(m,q) < 0$.

Доказательство. Уравнение $E(m,q) = 0$ имеет следующие корни (относительно m):

$$m_{1,2} = \frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - (3-\sqrt{3})(q-1)},$$
$$m_{3,4} = \frac{q}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{q^2 - (3+\sqrt{3})(q-1)}.$$

При $q \geqslant 4$ имеем

$$m_1 > q-2, \qquad m_2 < 2, \qquad m_3 > q-2, \qquad m_4 < 2. \tag{30}$$

Так как коэффициент при m^4 в $E(m,q)$ отрицательный, то из (30) следует утверждение леммы.

Продолжим доказательство теоремы 5. С помощью компьютерных расчетов можно получить явный вид всех решений уравнения $B(\theta) = 0$:

$$\theta_1 = 1 - \frac{q}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{9q^2 - (72-24\sqrt{3})m(q-m)},$$
$$\theta_2 = 1 - \frac{q}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{9q^2 - (72-24\sqrt{3})m(q-m)},$$
$$\theta_3 = 1 - \frac{q}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{9q^2 - (72+24\sqrt{3})m(q-m)},$$
$$\theta_4 = 1 - \frac{q}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{9q^2 - (72+24\sqrt{3})m(q-m)}.$$

Заметим, что

$$m(q-m) \in \left\{q-1, 2(q-2), \dots, \left[\frac{q}{2}\right]\left(q - \left[\frac{q}{2}\right]\right)\right\}, \tag{31}$$

поэтому

$$9q^2 - (72-24\sqrt{3})m(q-m) \geqslant 9q^2 - (72-24\sqrt{3})\frac{q}{2}\left(q - \frac{q}{2}\right) = 3\sqrt{3}q^2(2-\sqrt{3}) > 0$$

при всех $1 \leqslant m < q$ и

$$9q^2 - (72+24\sqrt{3})m(q-m) > 0$$

при достаточно больших q и $m \in (1, (q/4)(2-\sqrt{1+\sqrt{3}})) \cup ((q/4)(2+\sqrt{1+\sqrt{3}}), q-1)$. Более того, $\theta_i < 0$, $i = 2, 3, 4$. Но условие $\theta_1 > 0$ выполняется только при $m = 1$ и $m = q-1$. Действительно, условие $\theta_1 > 0$ сводится к виду

$$3(q-1) > (6-2\sqrt{3})m(q-m). \tag{32}$$

Легко видеть, что если m есть решение последнего неравенства, то $q-m$ тоже будет его решением. Очевидно, что (32) верно при $m=1$ и $m=q-1$. Но при $m\geqslant 2$, т.е. $m(q-m)\in\{2(q-2),\dots,[q/2](q-[q/2])\}$, из (32) имеем

$$q<\varphi(m)=\frac{(6-2\sqrt{3})m^2-3}{(6-2\sqrt{3})m-3}. \tag{33}$$

Покажем, что неравенство (33) не выполняется при $q\geqslant 4$ и $m=2,\dots,q-2$. Заметим, что $\varphi(m)$ – возрастающая функция. Поэтому достаточно показать, что неравенство (33) не выполняется при $q\geqslant 4$ и $m=q-2$:

$$q<\varphi(q-2)\quad\Leftrightarrow\quad q<\frac{21-8\sqrt{3}}{9-4\sqrt{3}}\approx 3.448,$$

т.е. действительно неравенство (33) не выполняется при $q\geqslant 4$.

Таким образом, при всех $m=2,\dots,q-2$ имеем $\theta_i<0$, $i=1,2,3,4$. Из леммы 5 и в силу того, что коэффициент при θ^4 в $B(\theta)$ отрицательный, следует, что $B(\theta)<0$ для всех $\theta\in(0,1)$. Следовательно, неравенство (28) не имеет решений при условиях п. 2 теоремы.

3. Если $k=2$, $m=1$, то из (26) имеем

$$[\theta^2\zeta^2+\theta+q-2]x^2+(\theta-1)(\theta+q-1)\zeta x+(q-1)\theta\zeta^2+(\theta+q-2)^2=0. \tag{34}$$

В этом случае неравенство (29) при $0<\theta<1$ имеет решение вида

$$0<\theta<\theta_1,$$

где

$$\theta_1=1-\frac{q}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{9q^2-(72-24\sqrt{3})(q-1)}. \tag{35}$$

При таких значениях θ и $m=1$ неравенство (28) имеет решения, если

$$D':=(3\theta^2(\theta+q-2)^2+6\theta(q-1)(\theta+q-2)-(q-1)^2)^2-64\theta^3(\theta+q-2)^3(q-1)\geqslant 0. \tag{36}$$

Из (36) получим

$$(\theta-1)^3(\theta+q-1)^3\left(\theta-\left(1-\frac{q}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{9q^2-32(q-1)}\right)\right)\times$$
$$\times\left(\theta-\left(1-\frac{q}{2}-\frac{1}{6}\sqrt{9q^2-32(q-1)}\right)\right)\geqslant 0.$$

Введем обозначение

$$\theta^*=1-\frac{q}{2}+\frac{1}{6}\sqrt{9q^2-32(q-1)}.$$

Тогда при $0<\theta<1$ неравенство (36) имеет следующее решение:

$$0<\theta\leqslant\theta^*.$$

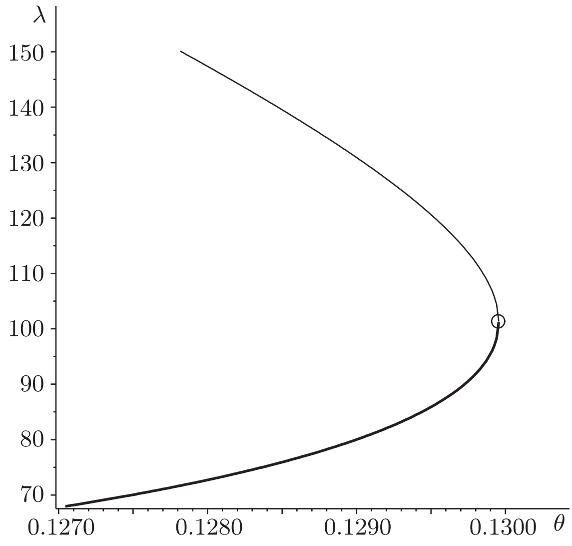

Рис. 1. Графики функций λ_1 (жирная кривая) и λ_2 при $q = 7$.

Легко проверить, что при $q \geqslant 2$ верно $\theta^* < \theta_1$, следовательно, при $0 < \theta \leqslant \theta^*$ выполняются неравенства (29) и (36). Следовательно, при $\theta \in (0, \theta^*)$ неравенство (28) имеет решение вида (см. рис. 1)

$$\lambda_1(\theta, q) < \lambda < \lambda_2(\theta, q),$$

где $\lambda_1(\theta, q), \lambda_2(\theta, q)$ являются корнями квадратного уравнения

$$4(q-1)\theta^3\lambda^2 + [3\theta^2(\theta+q-2)^2 + 6\theta(q-1)(\theta+q-2) - (q-1)^2]\lambda + 4(\theta+q-2)^3 = 0$$

и имеют вид

$$\lambda_{1,2}(\theta, q) = \frac{-[3\theta^2(\theta+q-2)^2 + 6\theta(q-1)(\theta+q-2) - (q-1)^2] \pm \sqrt{D'}}{8(q-1)\theta^3}. \tag{37}$$

Отметим, что при $0 < \theta < \theta^*$ значения $\lambda_1(\theta, q)$ и $\lambda_2(\theta, q)$ положительны. Так как $m = 1$, имеем $\vec{\lambda} \in (\vec{\lambda}_1(\theta, q), \vec{\lambda}_2(\theta, q))$, где $\vec{\lambda}_i(\theta, q) = (1, \dots, 1, \lambda_i^{\{j\}}(\theta, q), 1, \dots, 1) \in I_1$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \dots, q-1$, и $\lambda_i^{\{j\}}(\theta, q)$ есть j-я координата вектора $\vec{\lambda}_i(\theta, q)$. Отсюда получим $\vec{\alpha} \in (\vec{\alpha}_1(\theta, q), \vec{\alpha}_2(\theta, q))$, где

$$\vec{\alpha}_i(\theta, q) = (0, \dots, 0, (\ln \lambda_i(\theta, q))^{\{j\}}, 0, \dots, 0), \qquad i = 1, 2. \tag{38}$$

Если $D' < 0$, т. е. $\theta^* < \theta < 1$, квадратное уравнение (34) не имеет действительных решений.

Пусть $\theta = \theta^*$, т. е. $D' = 0$. Тогда при

$$\lambda = \lambda^*(\theta, q) = -\frac{(3\theta^*)^2(\theta^*+q-2)^2 + 6\theta^*(q-1)(\theta^*+q-2) - (q-1)^2}{8(q-1)(\theta^*)^3},$$

т. е.

$$\vec{\alpha} = \vec{\alpha}^*(\theta, q) := (0, \dots, 0, (\ln \lambda^*(\theta, q))^{\{j\}}, 0, \dots, 0), \tag{39}$$

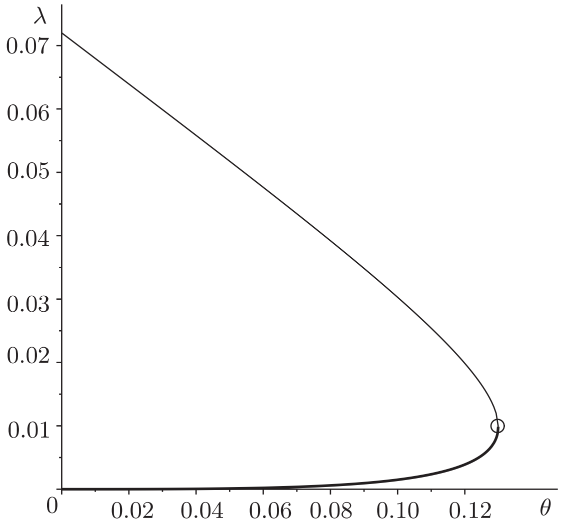

Рис. 2. Графики функций λ_3 (жирная кривая) и λ_4 при $q=7$.

имеем $D=0$, здесь $(\ln\lambda^*(\theta,q))^{\{j\}}$ – j-я компонента вектора $\vec{\alpha}^*(\theta,q)$. Значит, в этом случае уравнение (34) имеет одно решение.

4. Если $k=2$, $m=q-1$, из (26) имеем

$$[((\theta-1)^2+(q-1)(2\theta+q-3))\zeta^2+(q-1)\theta]x^2+ \\ +(\theta-1)(\theta+q-1)\zeta x+(q+\theta-2)\zeta^2+\theta^2=0. \tag{40}$$

В этом случае, как и в случае 3, неравенство (29) имеет решение вида $0<\theta<\theta_1$, где θ_1 определено в (35).

Как в случае 3, легко показать, что при $m=q-1$ неравенство (28) имеет решения, если $0<\theta\leqslant\theta^*$. Следовательно, при $m=q-1$ и $0<\theta\leqslant\theta^*$ выполняется неравенство (29). Тогда при $m=q-1$, $\theta\in(0,\theta^*)$ неравенство (28) имеет решение вида

$$\lambda_3(\theta,q)<\lambda<\lambda_4(\theta,q),$$

где $\lambda_3(\theta,q),\lambda_4(\theta,q)$ суть решения уравнения (24) (см. рис. 2).

Таким образом, имеем два решения $\vec{\alpha}\in(\vec{\alpha}_3(\theta,q),\vec{\alpha}_4(\theta,q))$, где

$$\vec{\alpha}_i(\theta,q)=(0,\dots,0,(\ln\lambda_i(\theta,q))^{\{j\}},0,\dots,0),\qquad i=3,4. \tag{41}$$

Пусть $\theta=\theta^*$. В этом случае уравнение (40) имеет одно решение. Теорема доказана.

Пусть $\vec{z_i}\in I_m$, $\vec{\lambda}\in I_n$, $i=1,2$. Если $m<n$, из системы уравнений (20) получим

$$\begin{aligned} z_1&=\lambda f^k(z_2),\\ z_2&=\lambda f^k(z_1),\\ 1&=\lambda f^k(1), \end{aligned} \tag{42}$$

где
$$f(z)=\frac{(\theta+m-1)z+q-m}{mz+\theta+q-m-1}.$$

Так как $f(1)=1$, из (42) имеем $\lambda=1$. Таким образом, система уравнений (42) сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} z_1&=f^k(z_2),\\ z_2&=f^k(z_1), \end{aligned} \tag{43}$$

решения которой описывают периодические меры Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем.

При $m>n$ аналогичным образом получим систему уравнений для периодических мер Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем.

Если $m=n$ и координаты векторов $\vec{\lambda}$ и $\vec{z}$, отличные от единицы, не совпадают, т.е. если существует i_j такое, что $\lambda_{i_j}=1$, $z_{i_j}\neq 1$ или $\lambda_{i_j}\neq 1$, $z_{i_j}=1$, тогда аналогичным методом получим систему уравнений (43).

Замечание 2. Периодические меры Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем были изучены в работах [24], [25].

4. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ МЕРЫ ГИББСА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ ВНЕШНИМ ПОЛЕМ

Рассмотрим периодические меры Гиббса с периодическим внешним полем. В силу теоремы 4 всякая H-периодическая мера Гиббса является либо трансляционно-инвариантной, либо $G_k^{(2)}$-периодической. Поэтому рассмотрим $G_k^{(2)}$-периодические меры Гиббса.

Пусть $G_k^{(2)}=\{x\in G_k: |x| \text{ четно}\}$, тогда $G_k/G_k^{(2)}=\{G_k^{(2)}, G_k\setminus G_k^{(2)}\}$ – фактор-группа. $G_k^{(2)}$-периодические совокупности векторов $h=\{h_x\in\mathbb{R}^{q-1}: x\in G_k\}$ имеют следующий вид:
$$h_x=\begin{cases}\vec{h}_1, & \text{если}\ \ x\in G_k^{(2)},\\ \vec{h}_2, & \text{если}\ \ x\in G_k\setminus G_k^{(2)}.\end{cases}$$

Пусть внешнее поле также является $G_k^{(2)}$-периодическим, т.е.
$$\alpha_x=\begin{cases}\vec{\alpha}_1, & \text{если}\ \ x\in G_k^{(2)},\\ \vec{\alpha}_2, & \text{если}\ \ x\in G_k\setminus G_k^{(2)},\end{cases}$$

где $\vec{\alpha}_1\neq\vec{\alpha}_2$. Отметим, что при $\vec{\alpha}_1=\vec{\alpha}_2$ модель Поттса с периодическим внешним полем совпадает с моделью Поттса с трансляционно-инвариантным внешним полем, которая изучена в разделе 3.

Тогда в силу (4) имеем
$$\begin{aligned} \vec{h}_1&=\vec{\alpha}_1+kF(\vec{h}_2,\theta),\\ \vec{h}_2&=\vec{\alpha}_2+kF(\vec{h}_1,\theta), \end{aligned} \tag{44}$$

где $\vec{h}_i=(h_{i1},h_{i2},\dots,h_{iq-1})$, $\vec{\alpha}_i=(\alpha_{i1},\alpha_{i2},\dots,\alpha_{iq-1})$, $i=1,2$.

Справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $k \geqslant 2$. Тогда для модели Поттса с периодическим внешним полем при любом значении $\theta > 0$, $\theta \neq 1$ существует не менее одной $G_k^{(2)}$-периодической (трансляционно-неинвариантной) меры Гиббса.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Введем обозначения $z_{ij} = e^{h_{ij}}$, $\lambda_{ij} = e^{\alpha_{ij}}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots, q-1$. Пусть $\vec{z}_i = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{iq-1}) \in I_m, \vec{\lambda}_i = (\lambda_{i1}, \lambda_{i2}, \ldots, \lambda_{iq-1}) \in I_m$. Тогда система уравнений (44) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \lambda_{11} f(z_{21}), \\ z_{21} &= \lambda_{21} f(z_{11}), \end{aligned} \tag{45}$$

где

$$f(z) = \left(\frac{(\theta+m-1)z + q - m}{mz + \theta + q - m - 1} \right)^k.$$

Из (45) получим

$$z_{11} = \lambda_{11} f(\lambda_{21} f(z_{11})). \tag{46}$$

Функция $f(z)$ имеет следующие свойства:

1. Так как $m \leqslant q-1$ и $\theta > 0$, имеем

$$f(0) = \left(\frac{q-m}{\theta + q - m - 1} \right)^k > 0.$$

2. Рассмотрим производную

$$f'(z) = k \left(\frac{(\theta+m-1)z + q - m}{mz + \theta + q - m - 1} \right)^{k-1} \frac{(\theta-1)(\theta+q-1)}{(mx + \theta + q - m - 1)^2}.$$

Функция $f(z)$ возрастает при $\theta > 1$ и убывает при $\theta < 1$.

3. Функция $f(z)$ ограничена. Это вытекает из равенства

$$\lim_{z \to +\infty} f(z) = \left(\frac{\theta + m - 1}{m} \right)^k$$

и из свойств 1 и 2.

Введем обозначение $\varphi(z) := \lambda_{11} f(\lambda_{21} f(z))$. Из положительности $\lambda_{11}, \lambda_{21}$ и из свойств 1–3 имеем, что $\varphi(0) > 0$ и функция $\varphi(z)$ ограничена. Отсюда получим, что для любых $\theta > 0$, $\theta \neq 1$ и λ_{11}, λ_{21} уравнение (46) имеет не менее одного решения $z_{11} := x_*$. Следовательно, система уравнений (45) имеет решение вида $(z_{11}, z_{21}) := (x_*, y_*)$. Согласно теореме 1 этому решению соответствует одна $G_k^{(2)}$-периодическая мера Гиббса. Так как рассматриваемое внешнее поле трансляционно-неинвариантно, то согласно теореме 3 имеем, что полученная мера не является трансляционно-инвариантной. Теорема доказана.

Введем обозначение

$$\begin{aligned} A(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \theta, q, m) &= \lambda_{11}\lambda_{21}(\theta-1)^2(\theta+q-1)^2(mx_* + \theta + q - m - 1) \times \\ &\times \frac{\lambda_{21}(\theta+m-1)((\theta+m-1)x_* + q - m)^2 + (q-m)(mx_* + \theta + q - m - 1)^2}{[\lambda_{21} m((\theta+m-1)x_* + q - m)^2 + (\theta + q - m - 1)(mx_* + \theta + q - m - 1)^2]^3}. \end{aligned}$$

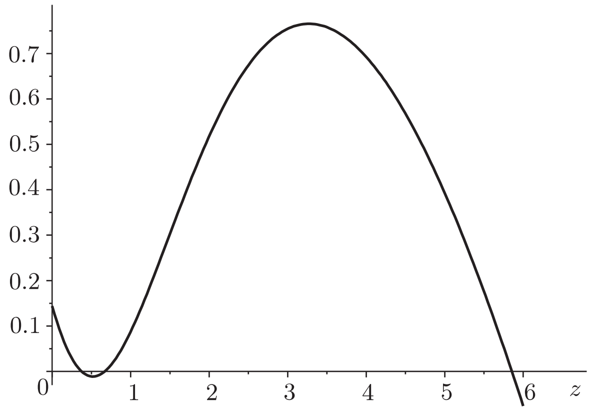

Рис. 3. График функции $\varphi(x) - x$ при $q = 3$, $m = 1$, $\lambda_{11} = 1/\lambda_{21} = 0.53$, $\theta = 4.7$.

Теорема 7. *Пусть $k = 2$. Если $A(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \theta, q, m) < 1/4$, для модели Поттса с периодическим внешним полем существует не менее одной $G_k^{(2)}$-периодической меры Гиббса. Если $A(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \theta, q, m) = 1/4$, существует не менее двух $G_k^{(2)}$-периодических мер Гиббса. Если $A(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \theta, q, m) > 1/4$, существует не менее трех $G_k^{(2)}$-периодических мер Гиббса.*

Доказательство. Введем обозначения $z_{ij} = e^{h_{ij}}$, $\lambda_{ij} = e^{\alpha_{ij}}$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2, \ldots, q-1$. Пусть $k = 2$ и $\vec{z}_i \in I_m, \vec{\lambda}_i \in I_m$, $i = 1, 2$. Тогда система уравнений (44) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \lambda_{11} f(z_{21}), \\ z_{21} &= \lambda_{21} f(z_{11}), \end{aligned} \tag{47}$$

где

$$f(z) = \left(\frac{(\theta + m - 1)z + q - m}{mz + \theta + q - m - 1} \right)^2 .$$

Рассмотрим $\varphi(z) := \lambda_{11} f(\lambda_{21} f(z))$. Известно, что $\varphi(0) > 0$, функция $\varphi(z)$ ограничена и имеет неподвижную точку $z = x_*$. Ясно, что если $\varphi'(x_*) > 1$, уравнение

$$z_{11} = \lambda_{11} f(\lambda_{21} f(z_{11})) \tag{48}$$

имеет не менее трех решений (см. рис. 3), при $\varphi'(x_*) = 1$ имеет не менее двух решений, а при $\varphi'(x_*) < 1$ имеет не менее одного решения. Вычислив $\varphi'(x_*) = 4A(\lambda_{11}, \lambda_{21}, \theta, q, m)$, получим доказательство теоремы.

Пусть $\vec{z}_i \in I_m, \vec{\lambda}_1 \in I_n$, $i = 1, 2$. Если $m < n$, тогда из системы уравнений (44) получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} z_{11} &= \lambda_{11} f^k(z_{21}), \\ z_{21} &= \lambda_{21} f^k(z_{11}), \\ z_{11} &= f^k(z_{21}), \\ z_{21} &= f^k(z_{11}), \\ 1 &= \lambda f^k(1), \end{aligned} \tag{49}$$

где

$$f(z) = \frac{(\theta + m - 1)z + q - m}{mz + \theta + q - m - 1}.$$

Так как $f(1) = 1$, из (49) имеем $\lambda = 1$. Таким образом, система уравнений (49) сводится к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} z_{11} &= f^k(z_{21}), \\ z_{21} &= f^k(z_{11}), \end{aligned} \tag{50}$$

решения которой описывают периодические меры Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем.

Если $m > n$, аналогичным образом получим систему уравнений для периодических мер Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем.

Если $m = n$ и координаты векторов $\vec{\lambda_i}$ и $\vec{z}_i$, $i = 1, 2$, отличных от единицы, не совпадают, т. е. если существует i_j такое, что $\lambda_{i_j} = 1$, $z_{i_j} \neq 1$ или $\lambda_{i_j} \neq 1$, $z_{i_j} = 1$, тогда аналогичным методом получим систему уравнений (49).

Как отмечалось выше, периодические меры Гиббса для модели Поттса с нулевым внешним полем были изучены в работах [24], [25].

Замечание 3. Заметим, что для модели Поттса с периодическим внешним полем не существует трансляционно-инвариантной меры, следовательно все меры, указанные в теореме 7, являются $G_k^{(2)}$-периодическими (трансляционно-неинвариантными).

Благодарности. Авторы выражают свою признательность рецензентам за полезные замечания.

Конфликт интересов. Авторы заявляют, что у них нет конфликта интересов.

Список литературы

[1] Х.-О. Георги, *Гиббсовские меры и фазовые переходы*, Мир, М., 1992.

[2] К. Престон, *Гиббсовские состояния на счетных множествах*, Мир, М., 1977.

[3] Я. Г. Синай, *Теория фазовых переходов. Строгие результаты*, Наука, М., 1980.

[4] Н. Н. Ганиходжаев, “Групповое представление и автоморфизмы дерева Кэли”, *Докл. АН РУз*, 1994, № 4, 3–5.

[5] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, “Описание периодических крайних гиббсовских мер некоторых решеточных моделей на дереве Кэли”, *ТМФ*, **111**:1 (1997), 109–117.

[6] Н. Н. Ганиходжаев, У. А. Розиков, “Групповое представление леса Кэли и его некоторые применения”, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **67**:1 (2003), 21–32.

[7] N. N. Ganikhodjaev, F. M. Mukhamedov, J. F. F. Mendes, “On the three state Potts model with competing interactions on the Bethe lattice”, *J. Stat. Mech.*, **2006**:8 (2006), P08012, 29 pp.

[8] L. V. Bogachev, U. A. Rozikov, “On the uniqueness of Gibbs measure in the Potts model on a Cayley tree with external field”, *J. Stat. Mech.*, **2019**:7 (2019), 073205, 76 pp.

[9] U. A. Rozikov, *Gibbs Measures on Cayley Trees*, World Sci., Singapore, 2013.

[10] П. М. Блехер, Н. Н. Ганиходжаев, “О чистых фазах модели Изинга на решетках Бете”, *Теория вероятн. и ее примен.*, **35**:2 (1990), 220–230.

[11] P. M. Bleher, J. Ruiz, V. A. Zagrebnov, “On the purity of the limiting Gibbs states for the Ising model on the Bethe lattice”, *J. Stat. Phys.*, **79**:1–2 (1995), 473–482.

[12] P. M. Bleher, J. Ruiz, V. A. Zagrebnov, “On the phase diagram of the random field Ising model on the Bethe lattice”, *J. Stat. Phys.*, **93**:1–2 (1998), 33–78.

[13] Н. Н. Ганиходжаев, “О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса с тремя состояниями на решетке Бете второго порядка”, *ТМФ*, **85**:2 (1990), 163–175.

[14] Н. Н. Ганиходжаев, “О чистых фазах ферромагнитной модели Поттса на решетке Бете”, *Докл. АН РУз*, 1992, № 6–7, 4–7.

[15] N. N. Ganikhodjaev, U. A. Rozikov, “The Potts model with countable set of spin values on a Cayley tree”, *Lett. Math. Phys.*, **75**:2 (2006), 99–109.

[16] C. Külske, U. A. Rozikov, R. M. Khakimov, “Description of translation-invariant splitting Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree”, *J. Stat. Phys.*, **156**:1 (2014), 189–200, arXiv: 1310.622.

[17] У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, Ф. Х. Хайдаров, “Крайность трансляционно-инвариантных мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли”, *ТМФ*, **196**:1 (2018), 117–134.

[18] C. Külske, U. A. Rozikov, “Fuzzy transformations and extremality of Gibbs measures for the Potts model on a Cayley tree”, *Random Struct. Algor.*, **50**:4 (2017), 636–678.

[19] М. М. Рахматуллаев, “Слабо периодические меры Гиббса и основные состояния для модели Поттса с конкурирующими взаимодействиями на дереве Кэли”, *ТМФ*, **176**:3 (2013), 477–493.

[20] М. М. Рахматуллаев, “Существование слабо периодических мер Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли”, *ТМФ*, **180**:3 (2014), 307–317.

[21] М. М. Рахматуллаев, “О слабо периодических мерах Гиббса для модели Поттса с внешним полем на дереве Кэли”, *Укр. матем. журн.*, **68**:4 (2016), 529–541.

[22] M. M. Rahmatullaev, “On weakly periodic Gibbs measures of the Potts model with a special external field on a Cayley tree”, *Журн. матем. физ., анал., геом.*, **12**:4 (2016), 302–314.

[23] U. A. Rozikov, “Gibbs measures of Potts model on Cayley trees: A survey and applications”, *Rev. Math. Phys.*, **33** (2021), 2130007, 58 pp.

[24] У. А. Розиков, Р. М. Хакимов, “Периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли”, *ТМФ*, **175**:2 (2013), 300–312.

[25] Р. М. Хакимов, Ф. Х. Хайдаров, “Трансляционно-инвариантные и периодические меры Гиббса для модели Поттса на дереве Кэли”, *ТМФ*, **189**:2 (2016), 286–295.

Поступила в редакцию 5.08.2021,
после доработки 24.09.2021,
принята к публикации 28.09.2021