O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA`LIM, FAN VA INNOVASIYALAR VAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

Matematik analiz кafedrasi

“EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA”

fanidan

O’QUV– USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi:	**100 000 - Gumanitar soha**
Ta’lim sohasi:	**130 000 - Matematika**
Ta’lim yo’nalishi:	**5130100 - Matematika**

Namangan-2023

O`quv uslubiy majmua 2012 yil 07.01dagi O`R OO`MTV tomonidan № BD 5130100-3.09. raqami bilan 2022 yil 25.08. buyrug'i bilan tasdiqlangan fan dasturi asosida ishlab chiqilgan.

Tuzuvchi:

M.Xolmurodov, NamDU dotsenti.

Taqrizchilar: A.Mashrabboev, NamDU dotsenti
R.Ibragimov-f.m.f.n., NamDU prof.

O'quv uslubiy majmua Namangan davlat universiteti Kengashining 2023 yil "28…" avgustidagi ".1.." – son yig'ilishida ko'rib chiqilgan va foydalanishga tavsiya etilgan.

M U N D R I J A

Ehtimollar nazariyasi ba matematik statisukadan o'quv materiallar

4-SEMESTR

1-mavzu: Ehtimollar nazariyasi-6 soat

1.1-mavzu: Ehtimollar nazariyasi fanining maqsadi va vazifalari, uning rivojlanish tarixhi. Stoxastik tajriba. Elementar hodisalar va hodisalar algebrasi

Reja

1. Ehtimollar nazariyasi fanining maqsadi va vazifalari, uning rivojlanish tarixhi

2. Stoxastik tajriba.

3. Elementar hodisalar va hodisalar algebrasi

TAYANCH TUSHUNCHALAR

Ehtimollar nazariyasi fani, tajriba, shartlar majmuasi, tasodify hodisa, muqarrar hodisa, mumkin bo'lmagan hodisa, teskari hodisa, hodisalar tengligi, hodisalar ustida amallar, elementar hodisalar, to'plam va hodisalar orasidagi bog'lanish.

1. EHTIMOLLAR NAZARIYASI FANI

Nazariya so'zi – fan bilan bog'liq; fan esa qonuniy hodisalarni o'rganadi; «ehtimol» so'zi esa tasodifiy, noaniq, noqonuniy so'zlar bilan aloqadordir. Shuning uchun «Ehtimollar nazariyasi» fanidan bexabar odamlar bu fan to'g'risida istehzoli fikr yuritadilar. Lekin, ehtimollar nazariyasi fani o'sib borayotgan matematikaning asosiy bo'limlaridan biri bo'lib, bu tasodifiy hodisalar qonuniyatlarini o'rganadigan fandir.

Yuzaki qaralsa tasodifiy hodisalar hech qanday qonuniyatga bo'ysunmaganday ko'rinadi, aslini olganda, har qanday tasodif, biror qonuniyatga bo'ysunadi. Bunday qonuniyatni birinchi bor Ya.Bernulli[1] o'rgangan.

Matematika, boshqa fanlar singari, moddiy dunyodagi hodisalar bo'ysunadigan qonuniyatlarini ochadi. Masalan, Ulug'bek, o'zining ko'p yillik kuzatishlari natijasida, ekliptikaning ekvatorga og'ish burchagi $23°30'49''$ ekanligini topdi yoki Jamshid Koshiy

$$1+2+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

tenglikni ko'rsatdi; bunday misollarni istalgancha keltirish mumkin.

---

[1] Yakob Bernulli (1654-1705) – Shvetsariyalik matematik.

Lekin, kuzatish natijasida, hayotda sodir bo'ladigan ko'pgina jarayonlarda tasodifiy xolatlarni ko'ramiz.

Masalan, bozorda sotadigan mahsulotingiz siz o'ylagan narxda sotilmasligi yoki ertaga yomg'ir yog'ishi yoki yog'masligi mumkin.

Ana shunday tasodifiy hodisalar qandaydir ehtimolliy qonuniyatiga bo'ysunar ekan, bu erda bir xil sharoitda doim takrorlanadigan hodisalar to'g'risida gap boradi.

Masalan, n ta tajribada kuzatilayotgan A hodisa n(A) marta ro'y bersa, $\frac{n(A)}{n}$ ifoda A ning ro'y berish chastotasini bildiradi, bu son tajriba soni ortgan sari qandaydir o'zgarmas xarakterga ega. Bu tajriba bir necha bor takrorlansa

$$\frac{n_1(A)}{n_1} \approx \frac{n_2(A)}{n_2} \approx . \quad . \quad . \approx \frac{n_k(A)}{n_k}$$

munosabatni hosil qilamiz. Bu sonlar qandaydir miqdor atrofida tebranadi, bu songa A hodisani ehtimolligi deyiladi va P(A) bilan belgilanadi. Masalan, o'g'il bolaning dunyo bo'yicha tug'ilish chastotasi 0,51-0,52 ga teng. Bu turg'un chastota moddiy borlikdagi tasodifiy hodisaning mavjud xossasidir.

Ehtimollar nazariyasi tasodifiy hodisalarning matematik modelini o'rganadi. Bu fan murakkab hodisalarning ehtimolligini oddiy hodisalar ehtimolliklari yordamida ifodalab hisoblaydi.

Ehtimollar nazariyasi kombinatorika, matematik tahlil, algebra, mantiq, to'plamlar nazariyasi kabi matematik fanlardan foydalanadi va ko'pgina nomatematik masalalarni hal qiladi.

2. EHTIMOLLAR NAZARIYASINING ASOSIY TUSHUNCHALARI

2. **Hodisa**. Ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri «tajriba» dir. Tajriba[2] - hodisani ro'yobga keltiruvchi shartlar majmui (shartlar kompleksi) S ning bajarilishini ta'minlashdan iboratdir. Tajribadan tajribaga o'tganda ro'y berayotgan hodisalar o'zgarib turadigan hollar hayotda keng miqyosda uchrab turadi, bu erda, albatta, tajribani vujudga keltiruvchi shartlar majmui[3] (kompleksi) S o'zgarmas bo'lgan xollar tushiniladi.

1-misol. Kuzatilayotgan tajriba biror aloqa bo'limidan bir kunda jo'natilayotgan telegrammalar sonini aniqlash bo'lsin, bu erda tajribadan-tajribaga o'tganda, ya'ni kundan-kunga o'tganda ro'y berishi mumkin bo'lgan hodisalar (telegrammalar sonining biror natural songa tengligi) har xil bo'lishi mumkin.

2-misol. O'tkazilayotgan tajriba aniq bir kompyuterdagi kundalik internetidan foydalangan mijozlar sonini aniqlashdan iborat bo'lsin. Bu erda - kompleks shart - aniq bir kompyuter va bir xil vaqt haftaning barcha kunlaridan iborat.

Ehtimollar nazariyasining keyingi tushunchasi bu «hodisadir». Tajriba natijasida ro'y berishi oldindan aniq bo'lmagan hodisa «tasodifiy hodisa» [4] deyiladi.

Moddiy dunyoda tasodifiy hodisa - tajriba yoki kuzatish natijasi bo'lib, ro'y berishi shuningdek, ro'y bermasligi ham mumkin.

3-misol. Tajriba shashqoltoshni (kubik, bir jinsli materialdan tayyorlangan, simmetrik bo'lib, uning tomonlariga birdan oltigacha raqamlar yozilgan, tashlanganda yuqori tomondagi raqam hisoblanadi) tashlashdan iborat bo'lsin. Bu tajribada juft raqamli tomonlari tushish hodisasi - A, tushgan raqamlarning 3 dan oshmaslik hodisasi - B bo'lsin.

Demak, $A=\{a_2,a_4,a_6\}$, $B=\{a_1,a_2,a_3\}$ bu erda a_i... i - nchi $i=\overline{1,n}$ tomonning tushish hodisasini bildiradi.

Aslida hodisa ta'riflanmaydigan tushuncha bo'lib, o'zining xossasi bilan xarakterlanadi.

Agar bir vaqtda bir nechta hodisa qaraladigan bo'lsa, bularni bitta tajribada ro'y berishi yoki ro'y bermasligi e'tiborga olinadi.

Tajriba natijasida har gal ro'y beradigan hodisaga muqarrar hodisa [5] **deyiladi** va Ω bilan belgilanadi.

Tajriba natijasida hech qachon ro'y bermaydigan hodisaga mumkin bo'lmagan [6] **hodisa deyiladi** va $\varnothing$ bilan belgilanadi.

Agar tajriba natijasida A hodisa ro'y bermasa, u holda unga teskari $\overline{A}$ hodisa ro'y berdi deyiladi.

Agar A hodisani tashkil etgan hodisalar B hodisaga ham tegishli bo'lsa, A hodisa B hodisani ergashtiradi deyiladi va $A\subseteq B$ kabi belgilanadi. Ko'rinib turibdiki, bu holda A ro'y bersa, B ham albatta ro'y beradi, lekin B ro'y bersa, A ning ro'y berishi shart emas.

A va B hodisalar bir xil hodisalar to'plamidan tashkil topgan bo'lsa, ya'ni A ni tashkil etgan barcha hodisalar albatta B ga ham tegishli va aksincha, B ni tashkil etgan barcha hodisalar albatta A ga ham tegishli bo'lsa, A va B hodisalar teng deyiladi va $A=B$ kabi belgilanadi, e elementar hodisa.

A va B hodisalarning yig'indisi deb, A yoki B ning yoki, ikkalasining ham ro'y berishidan iborat S hodisaga aytamiz. A va B hodisalarning yig'indisini $A\cup B$ (yoki $A+B$) orqali belgilanadi.

A va B hodisalarning bir vaqtda ro'y berishini ta'minlovchi barcha $e\in\Omega$ lardan tashkil topgan S hodisa A va B hodisalarning ko'paytmasi deyiladi va $A\cap B$ (yoki AB) kabi belgilanadi.

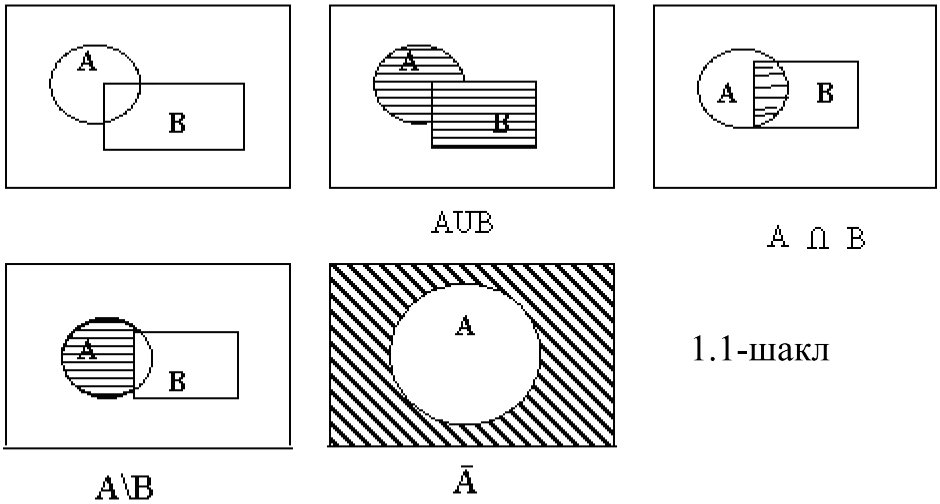
A va B hodisalarning ayirmasi deb, A ro'y berib, B ro'y bermasligidan iborat S hodisaga aytiladi. A va B hodisalarning ayirmasi $A\setminus B$ (yoki $A-B$) kabi belgilanadi.

Agar $A\cap B=\varnothing$ bo'lsa, A va B hodisalar birgalikda emas deyiladi.

Yuqoridagi ta'riflardan $A\cap\overline{A}=\varnothing,\ A\cup\overline{A}=\Omega$ bo'lishi kelib chiqadi.

Hodisalar orasidagi yuqorida kiritilgan tushunchalarni Eyler-Venn diagrammasi (I.1 shakl) yordamida tushuntirish qulaydir. S- shartlar kompleksi 1-shakldagi katta kvadratga moddiy nuqtani tavakkaliga tashlashdan iborat bo'lsin.

«Tashlangan moddiy nuqtaning doirada yotishi» hodisasini A orqali, «tashlangan moddiy nuqtaning kvadrat ichida yotishi» hodisasini B orqali belgilaylik. U holda $A\cup B, A\cap B, A\setminus B, \overline{A}$ hodisalar tashlangan moddiy nuqtaning 1-shakldagi mos figuralarning shtrixlangan sohalariga tushishidan iborat bo'ladi:



1.1-шакл

Ehtimollar nazariyasida ta'riflanmaydigan «elementar hodisa» tushunchasidan ham keng foydalaniladi. Oddiy misol sifatida quyidagini ko'rib chiqamiz. Faraz qilaylik, xaltada n ta shar bor (sportlotto). Tajriba - xaltadan tasodifan bitta shar olamiz va bu modelni quyidagicha belgilaymiz: $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$.

Agar tajribada $\omega_i \in A$ shar chiqsa, u holda A hodisa ro'y berdi deyiladi, aks holda A ro'y bermadi. $(\omega_i \notin A)$ deyiladi. Bu erda A Ω ning barcha to'plam ostilaridan iborat bo'lib, uni elementar hodisalar deyiladi.

Umumiy holda $\Omega = \{\omega\}$ to'plamda ω larni elementar hodisalar, Ω ni esa elementar hodisalar fazosi, uning A to'plam ostilarini -hodisa deymiz. To'plam va hodisa orasidagi munosabatlarni quyidagi 1-jadvalda ifodalaymiz.

1-jadval.

Belgi	To'plam tilida	Hodisalar tilida
Ω	Fazo(universal to'plam)	Elementar hodisalar fazosi, mukarrar hodisa.
$\omega,\ (\omega \in \Omega)$	ω fazo elementi	ω elementar hodisa
$A,\ (A \in \Omega)$	A to'plam	A hodisa
$A \cup B$ yoki $A + B$	A va B to'plamlar yig'indisi	A va B hodisalar yig'indisi.
$A \cap B$ yoki $A \cdot B,$	A va B to'plamlar ko'paytmasi	A va B hodisalar ko'paytmasi.
$A \setminus B$	A va B to'plamlar ayirmasi	A va B hodisalar ayirmasi.
$\varnothing$	Bo'sh to'plam	Mumkin bo'lmagan hodisa
$\overline{A}$	A to'plam to'ldirmasi (teskari to'plam)	A hodisaga teskari hodisa.
$A \cdot B = \varnothing$	A va B to'plamlar kesishmaydi.	A va B hodisalar birgalikda emas.
$A \subseteq B$	A to'plam B to'plamning to'plam osti	A hodisa B hodisani ergashtiradi.

$A = B$	A va B to'plamlar o'zaro teng.	A va B hodisalar teng kuchli.

Hodisalar ustida bajariladigan yig'indi va ko'paytma amalini chekli yoki cheksiz hodisalarga umumlashtirish mumkin: $\bigcup_\alpha A_\alpha$, $\bigcap_\alpha A_\alpha$ kabi belgilaymiz. Quyidagi xossalarni keltirish mumkin:

$$\overline{\bigcup_\alpha A_\alpha} = \bigcap_\alpha \overline{A_\alpha}, \quad \overline{\bigcap_\alpha A_\alpha} = \bigcup_\alpha \overline{A_\alpha}, \qquad \overline{\overline{A}} = A,$$

$$\overline{A} = \Omega \setminus A, \quad \overline{\varnothing} = \Omega, \qquad \overline{\Omega} = \varnothing, \qquad A \mid B = A \mid AB = A\overline{B},$$

$$A \setminus (A \setminus B) = AB, \qquad A \subseteq B \Rightarrow \overline{B} \subseteq \overline{A}.$$

Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ lar juft-jufti bilan birgalikda bo'lmasa, $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ yozuv o'rniga $\sum_{i=1}^{n} A_i$ yozuv ishlatiladi.

Umumiy holda Ω elementar hodisalar fazosining barchasini emas, bu fazolardan "algebra" va «σ-algebra» deb ataluvchi fazolarni ajratib o'rganiladi.

1-ta'rif. Agar

1) $\varnothing \in, \mathrm{A} \quad \Omega \in \mathrm{A}$;

2) $A \in$ A dan $\overline{A} \in$ A kelib chiqsa;

3) $A, B \in \mathrm{A}$ dan $A \cup B \in \mathrm{A}$, $A \cap B \in \mathrm{A}$ kelib chiqsa, u holda A ni Ω ning qismlari bo'lgan A hodisalarning algebrasini tashkil qiladi deyiladi [18].

1. 2-mavzu. Elementar hodisalar va hodisalar sigma algebrasi. Hodisa ehtimoli tushunchasi va uni klassik, geometrik, aksiomatik hamda statistik ta`riflari

Reja

1. Elementar hodisalar va hodisalar sigma algebrasi
2. Ehtimollikning klassik ta'rifi
3. Ehtimollikning geometrik ta'rifi
4. Statistik ta'rifi

Tayanch iboralar: teng imkoniyatli, elementar hodisalar, funksiya. Ehtimollikning geometrik ta'rifini ayting. Teng imkoniyatli, elementar hodisalar, soha.

1-ta'rif. Bo'linmaydigan hodisaga elementar hodisa deyiladi

2-ta'rif. Agar yuqoridagi ta'rifning uchinchi punktini quyidagicha almashtirilsa: $A_n \in$ A dan $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in$ A, $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in$ A kelib chiqsa, u holda A ga hodisalar σ-algebrasi deyiladi.

1.**Chekli ehtimollar fazosi. Klassik ta'rif.**

Faraz qilaylik, $\Omega=\{\omega\}$ chekli fazo, A Ω dagi algebra bo‘lsin. Bu holda A dagi ixtiyoriy A hodisa uchun P(A) ehtimolni quyidagicha aniqlaymiz:

$$P(A)=\sum_{\omega\in A}P_\omega ,$$

buning uchun $\omega\geq 0$ ni shunday tanlaymizki, $\sum_{\omega}P_\omega=1$.

Bunday aniqlangan P(A) ehtimollik ehtimollarning barcha aksiomalarini qanoatlantiradi.

$|A|$ bilan A to‘plamdagi elementlar sonini belgilaymiz. Agar P_ω - lar o‘zaro teng bo‘lsa, u holda $P_\omega=\frac{1}{|\Omega|}$

va

$$P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}, \qquad \text{(I.2.1)}$$

chunki, bu holda $1=\sum_{\omega\in\Omega}P_\omega=P_\omega|\Omega|$

(1) ko‘rinishda aniqlangan ta’rifga ehtimollikning klassik ta’rifi[24] deyiladi. Bunda barcha elementar hodisalar teng imkoniyatli bo‘ladi. Bunga turli lotereya o‘yinlari, shashqoltoshni tashlash kabilar misol bo‘la oladi.

Kombinatorika elementlari.

Klassik ta’rifdan foydalanib masalalar yechishda kombinatorika elementlari muhim rol o‘ynaydi, shuning uchun kombinatorikaning ayrim masalalarini ko‘rib chiqamiz.

Turli to‘plamdan bittadan tanlab olishlar kombinasiyasi[25].

r ta turli to‘plam berilgan bo‘lsin. Birinchi to‘plam n_1 ta $\left(a_1^{(1)},a_2^{(1)},..,a_{n_1}^{(1)}\right)$ elementlardan, ikkinchi to‘plam n_2 ta $\left(a_1^{(2)},a_2^{(2)},..,a_{n_2}^{(2)}\right)$ elementlardan va hokazo, r-chi to‘plam n_r ta $\left(a_1^{(r)},a_2^{(r)},..,a_{n_r}^{(r)}\right)$ elementlardan tuzilgan bo‘lsin.

Isbotlash mumkinki, har bir to‘plamdan bittadan element olib r elementli $\left(a_{i_1}^{(1)},a_{i_2}^{(2)},\ ..a_{i_r}^{(r)}\right)$ to‘plam hosil qilishlar soni

$$N=n_1\cdot n_2 ...\ n_r$$

ga tengdir.

Qaytariladigan tanlashlar soni[26]. Faraz qilaylik, n ta turli elementga ega bo‘lgan $(a_1,a_2,...,a_n)$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamdan bittalab element olib, uni fiksirlagach, o‘rniga qaytarib qo‘yamiz va bu jarayonni yana takrorlaymiz. Bu usuldan r marta foydalanib, r elementli $\left(a_{i_1},a_{i_2},\ ..a_{i_r}\right)$ to‘plamni hosil qilamiz. Bu usulda tanlab olishlar soni

$$N=n^r$$

ga tengdir.

Qaytarilmaydigan tanlashlar soni[27].

Faraz qilaylik, n ta turli elementga ega bo‘lgan $(a_1,a_2,...,a_n)$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Bu to‘plamdan bittalab element olib, qayta qo‘ymaslik sharti bilan, r elementli $\left(a_{i_1},a_{i_2},..\ .a_{i_r}\right)$ to‘plam hosil qilishlar soni

$$N = n(n-1)(n-2)\ .\ .\ .(n-r+1) = A_n^r$$

formula bilan topiladi.

Ayrim hollarda A_n^r o'rinlashtirishni $n^{[r]}$ ko'rinishida ham ifodalanadi. Xususan, $r=0$ da $A_n^0 = n^{[0]} = 1$ deb qabul qilamiz.

Agar to'plapmning barcha elementlari bittadan, qayta qo'ymaslik sharti bilan olinsa unday o'rinlashtirishlar soni ushbu formula bilan topiladi.

$$A_n^n = n^{[n]} = n!.$$

Birlashma[28] **(Kombinasiya).** n elementli to'plamdan r tadan element olib to'plam hosil qilishlar soni uchun

$$C_n^r = \frac{A_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

formula o'rinli.

Quyidagilar o'rinli, – deb kelishib olamiz: $0! = 1$, $C_n^0 = 1$ agar r butun manfiy, yoki $r > n$ bo'lsa, $C_n^r = 0$.

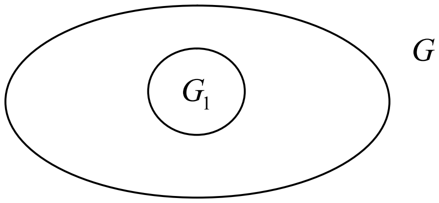
1-misol. Xaltada nomerlangan m ta ok, $n-m$ ta qora shar bo'lsin. Bu sharlardan tasodifan bittadan shar olib, nomerini yozib qo'yib, qaytadan xaltaga qo'yish sharti bilan r ta shar olganda roppa-rosa k tasining oq chiqish hodisasi ehtimolligi topilsin.

Yechish. Ma'lumki, n ta shardan, qayta qo'yish sharti bilan, bittadan olib r ta shar olishlar soni n^r ga teng. Lekin m ta oqdan k ta olishlar soni m^k ga, qolgan $n-m$ dan $r-k$ ta olishlar soni esa $(n-m)^{r-k}$ ga teng. Natijada izlanayotgan ehtimollik quyidagicha topiladi:

$$P = C_r^k \left(\frac{m}{n}\right)^k \left(1 - \frac{m}{n}\right)^{r-k}.$$

3. **Ehtimollikning geometrik va statistik ta'riflari**.

Biror G soha berilgan bo'lib, bu soxa G_1 sohani o'z ichiga olsin, $G_1 \subset G$. G sohaga tavakkaliga (tasodifan) tashlangan nuqtaning G_1- sohaga ham tushish ehtimolligini topish talab etilsin (2-shakl). Bu yerda Ω ehtimollik fazosi G ning barcha nuqtalaridan iborat va kontinuum quvvatga ega. Binobarin, bu holda klassik ta'rifdan foydalana olmaymiz.



1. 2-shakl.

Tashlangan nuqta G ga albatta tushgan va uning biror G_1 qismiga tushish ehtimoli shu G_1 qismning o'lchoviga (uzunligiga, yuziga, hajmiga) proporsional bo'lib, G_1 ning formasiga va G_1 ni G ning qaerda joylanganligiga bog'liq bo'lmasin. Bu shartlarda qaralayotgan hodisaning ehtimoli[29]

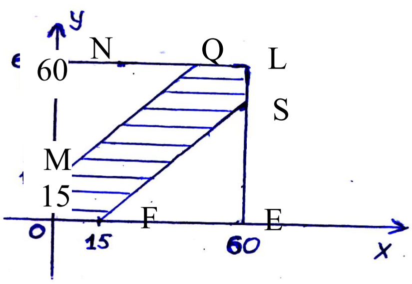
$$P = \frac{mesG_1}{mesG}$$

formula yordamida aniqlanadi (bu yerda $mesG - G$ sohaning o‘lchovi). Ushbu bu formula yordamida aniqlangan P – funksiya ehtimolning barcha xossalarini qanoatlantirishini ko‘rish qiyin emas.

(O‘quvchilarga yuqoridagi xossalarni tekshirib chiqishni tavsiya etamiz).

2-misol. (Uchrashuv masalasi).Ikki do‘st soat 8 bilan 9 o‘rtasida uchrashmoqchi bo‘lishdi. Birinchi kelgan kishi do‘stini chorak soat davomida kutishini avvaldan kelishib olishdi, agar bu vaqt mobaynida do‘sti kelmasa, u ketishi mumkin. Agar ular soat 8 bilan 9 o‘rtasidagi ixtiyoriy vaqtda kelishi mumkin bo‘lib, kelish vaqti kelishilgan vaqt mobaynida tasodifiy va bu vaqtlar o‘zaro kelishib olinmagan bo‘lsa, u holda bu ikki do‘stning uchrashish ehtimoli topilsin.

Yechish. Birinchi kishining kelish momenti x, ikkinchisiniki esa y bo‘lsin $(0 \le x; y \le 60)$. Ularning uchrashishlari uchun $|x-y| \le 15$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir. x va y larni tekislikdagi Dekart koordinatalarida tasvirlaymiz. Ro‘y berishi mumkin bo‘lgan barcha imkoniyatlar uchi koordinata boshida, tomonlari OX va OY o‘qda yotgan, tomonlari uzunligi 60 bo‘lgan kvadrat nuqtalaridan va uchrashishga qulaylik tug‘diruvchi imkoniyatlar shtrixlangan yuzadan iboratdir. Izlanayotgan ehtimol shtrixlangan yuzning kvadrat yuziga bo‘lgan nisbatiga teng (I.3-shakl).



1.3-шакл

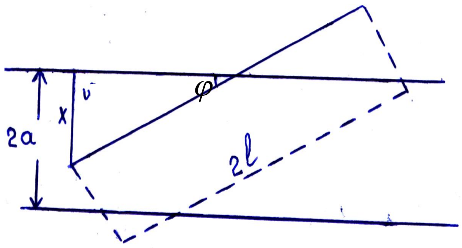
Ushbu extimollikning qiymati

$$P = \frac{S_{OMQLSF}}{S_{ONLE}} = \frac{7}{16}.$$

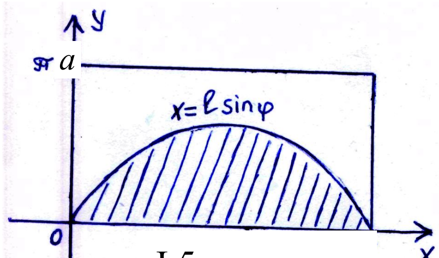
(Ushbu masalaning texnik muammolarga tatbiqi haqidagi misollarni $[10]$ dan topish mumkin).

3-misol. **Byuffon masalasi**. Tekislikda bir-biridan 2a masofada turuvchi parallel to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazilgan. Tekislikka uzunligi $2l(l<a)$ bo‘lgan igna tavakkaliga tashlangan. Ignaning birorta to‘g‘ri chiziqni kesish ehtimolini toping.

Yechish. x orqali ignaning o‘rtasidan unga yaqinroq bo‘lgan parallelgacha bo‘lgan masofani va φ orqali igna bilan bu parallel chiziq orasidagi burchakni aniqlaymiz (I.4-shakl).



I.4-шакл



I.5-шакл

x va φ kattaliklar ignaning holatini to‘la aniqlaydi. Ignaning barcha holatlari tomonlari a va π bo‘lgan to‘g‘ri to‘rburchak nuqtalari bilan aniqlanadi. Ignaning parallel to‘g‘ri chiziq bilan kesishishi uchun $x \le l \sin\varphi$ tengsizlikning bajarilishi zarur va yetarlidir. Qilingan farazlarga ko‘ra izlanayotgan ehtimol 1.5-shakldagi shtrixlangan yuzaning to‘g‘ri to‘rtburchak yuziga nisbatiga teng bo‘ladi:

$$P = \frac{1}{a\pi} \cdot \int_0^{\pi} l \sin\varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Bu formula yordamida π ni hisoblash uchun $\pi = \frac{2l}{a}$ ifodani hosil qilingan (bundan π-soning taqribiy qiymatini topish mumkin).

Shartlar kompleksi o‘zgarmas bo‘lganda biror A hodisaning ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi ustida ko‘p marta kuzatishlar o‘tkazilganda, uning ro‘y berishi yoki ro‘y bermasligi ma’lum turg‘unlik xarakteriga ega bo‘ladi.

Ta’rif. A hodisaning n ta tajribada ro‘y berishlar sonini ν deb olsak, u holda juda ko‘p sondagi kuzatishlar seriyasi uchun $\frac{\nu}{n}$ nisbat deyarli o‘zgarmas miqdor bo‘lib qolaveradi.

$\frac{\nu}{n}$ nisbat A hodisa ro‘y berishlarining nisbiy chastotasi[30] (ehtimollikning statistik ta’rifi) deyiladi.

Nisbiy chastotaning turg‘unlik xususiyati birinchi bor, demografik xarakterdagi hodisalarda ochilgan. Eramizdan 2260 yil burun Qadimiy Xitoyda o‘g‘il bola tug‘ilishlar sonining jami tug‘ilgan bolalar soniga nisbati deyarli $\frac{1}{2}$ ga tengligi hisoblab topilgan.

P.S.Laplas[*] - London, Peterburg va Fransiyadagi juda ko‘p statistik materiallarga tayanib, tug‘ilgan o‘g‘il bolalar sonining jami bolalar soniga nisbati taxminan, $\frac{22}{43}$ ga tengligini ko‘rsatgan.

Agar tajribalar soni yetarlicha ko‘p bo‘lsa, u holda shu tajribalarda qaralayotgan A hodisaning ro‘y berish chastotasi biror o‘zgarmas $p \in [0,1]$ son

[*] Per Simon Laplas (1749-1827) – Fransuz munajjimi, matematik va fizik.

atrofida turg'un ravishda tebransa, shu p sonni A hodisaning ro'y berish ehtimoli, - deb qabul qilinadi.

Bunday usulda aniqlangan ehtimol statistik ehtimol[31], - deyiladi. R.Mizes[**] hodisaning ehtimolini ushbu munosabat yordamida kiritgan:

$$P = \lim_{n\to\infty} \frac{n_r}{n}.$$

Ehtimolning bu ta'rifi juda noqulay, chunki biror hodisaning ro'y berishi chastotalarining ketma-ketligi turli tajribalar o'tkazilganda turlicha bo'ladi. Bundan tashqari, amalda biz chastotalar ketma-ketligini emas, balki uning chekli elementlarini olgan bo'lamiz, chunki ketma-ketlikning hamma elementlarini olib bo'lmaydi. Shu sababli, ehtimollar nazariyasini aksiomalar asosida qurish maqsadga muvofiqdir.

Foydalaniladigan asosiy darslıklar va o'quv qo'llanmalar ro'yhati

Asosiy adabiyotlar

1. Sh. Mirziyoyev Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent "O'zbekiston" 2017. 488 b.
2. Sh. Mirziyoyev Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganligining 24 yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi ma'ruza. 2016-yil 7-dekabr. Toshkent - "O'zbekiston" - 2017. 32 b.
3. Ш.Мирзиёев Танқидий тахлил, қатъий тартиб – интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Тошкент – "Ўзбекистон" 2017.
4. Ш.Мирзиёев Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ. Тошкент – "Ўзбекистон". 2016. 56 б.

5 Ш.Қ.Форманов "Эҳтимолликлар назарияси", Тошкент "Университет" 2014 й.
6.Ross, Sheldon M. A first course in probability. Pearson Education, Inc. 2010.
7.Robert B. Ash Basic probability theory. Dover Publications, Inc. 2008.

Qo'shimcha adabiyotlar

5. А.А.Абдушукуров, Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, ЎзМУ, 2010 й.
6. А.А.Абдушукуров, Т.М.Зупаров, "Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика", Тафаккур Бўстони, 2015 й.
7. А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» Тошкент, «Университет», 2003 й.
8. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
9. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
10. Б.А.Севастьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

[**] Rixard Mizes (1883-1953) – Nemis matematigi va mexanigi.

11. С.Ҳ.Сирожиддинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
12. Севастянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
13. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука»,1989 г.
14. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.

11. Mamatov M., Ibragimov R., Mashrabboev A., Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistika.T., 2008 y

12. Ibragimov R..,Mashrabboev A. Polvanov R. Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistikadan masalalar to'plamiми, Namangon 2018y.

Internet saytlari

15. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали.
16. www.lex.uz -Ўзбекистон Республикаси Қонун хужжатлари маълумотлари миллий базаси.
17. http://www.rsl.ru
18. https://www.khanacademy.org/math/probability
19. http://www.msu.ru
20. http://sunzi.lib.hku.hk/ER/subject/hkul/510/ej/1
21. http://www.nlr.ru
22. http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/business-stat/R.htm

2-mavzu 8-soat

Ehtimolliklarni qo'shih va ko'paytrish teoremalari

2.1 -MAVZU: Hodisa ehtimoli tushunchasi-kengaytrilgan. Ehtimolning xossalari

REJA

1. Ehtimollar fazosi
2. Chekli additivlik
3. Kolmogorov aksiomalari
4. Ehtimolning xossalari

Tayanch tushunchalar: Ehtimollar fazosi Chekli additivlik, σ - additivlik, Ehtimollar fazosi

Ta'rif. Ω elementar hodisalar fazosi, A Ω dagi σ - algebra, R ehtimollik bo'lib, quyidagi aksiomalar

1. $P(A)\geq 0,\ \forall A\in$ A (R ning nomanfiyligi),
2. $P(\Omega)=1$ (R ning normallanganligi),
3. $P(A+B)=P(A)+P(B),\quad AB=\varnothing$ (R ning chekli additivligi),
4. Agar $A_n\downarrow\varnothing$, ya'ni $A_1\supseteq A_2\supseteq A_3\supseteq ...\supseteq A_k\supseteq ...,\quad \bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\varnothing,$

da

$$\lim_{n\to\infty}P(A_n)=0\,(\text{uzluksizlik})$$

bajarilsa, u holda $\{\Omega, \mathrm{A}, P\}$ ga ehtimollar fazosi deyiladi.

Bu aksiomalardan ehtimollarning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) Agar $A \subseteq B$ bo'lsa, $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

Haqiqatan ham, $B = A + (B \setminus A)$ va $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$,

Natijada, 3 aksiomaga ko'ra

$$P(B) = P(A) + P(B \setminus A). \qquad \text{(I.1.1)}$$

2) Agar $A \subseteq B$ bo'lsa, u holda

$$P(A) \le P(B).$$

Bu xossaning (1) isbotidan kelib chiqadi.

3) $\forall A \in \mathrm{A}$ uchun $0 \le P(A) \le 1$.

$\varnothing \subseteq A \subseteq \Omega$ dan, 2- aksiomaga ko'ra, 3) xossaning isboti kelib chiqadi.

4) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

$A + \overline{A} = \Omega$ va $A \cdot \overline{A} = \varnothing$ ligidan 3-aksiomaga ko'ra 4-xossa isbotlanadi.

5) $P(\varnothing) = 0$.

Bu xossa 4) xossadan va 2-aksiomadan kelib chiqadi.

5. **Chekli additivlik.**
6. Agar $A_i \cdot A_j = \varnothing \quad i \ne j \ (i, j = 1, \dots, n)$ bo'lsa, u holda

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) \ . \qquad \text{(I.1.2)}$$

Oxirgi xossa 3 aksiomadan, matematik induksiya usulini qo'llash yordamida isbotlanadi.

7) $\forall A_1, A_2, \dots, A_n$ hodisalar uchun

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \le \sum_{k=1}^{n} P(A_k). \qquad \text{(I.1.3)}$$

(I.1.3) xossani isbotlash uchun $\bigcup_{k=1}^{n} A_k$ ni juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisi ko'rinishda ifodalaymiz. $B_k = A_k \setminus (A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_{k-1})$ belgilashni kiritsak, u holda

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} B_k \ .$$

va oxirgi tenglikdan

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(B_k).$$

Lekin $P(B_k) \le P(A_k)$, ekanligini e'tiborga olsak, (I.1.3) tengsizlik kelib chiqadi.

8) $\forall A$ va B uchun

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B).$$

Ma'lumki, $A \cup B = A + B \setminus AB$. Bundan $P(A \cup B) = P(A) + P(B \setminus A \cdot B)$ va $P(B \setminus A \cdot B) = P(B) - P(A \cdot B)$ dan 8-xossa kelib chiqadi.

3 va 4 aksiomalarni «σ- additivlik» (sanoqli additivlik) aksiomasi bilan almashtiramiz.

3*(σ**- additivlik**). Agar $A_1, A_2, \dots A_n, \dots$ juft-jufti bilan bog'liqsiz bo'lsa,

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k). \qquad \text{(I.1.4)}$$

1-teorema. 1,2,3,4 aksiomalar 1,2,3* aksiomalar bilan teng kuchlidir.

Teorema isbotini o'quvchiga qoldiramiz.

Ω elementar hodisalar fazosidagi A σ-algebrada 1,2,3,4 aksiomalar ehtimollikni aniqlaydi, bu aksiomalarni A.N.Kolmogorov* kiritgan.

1,2,3 aksiomalarni hodisalarning chastotalari tilida quyidagicha izohlash mumkin:

Faraz qilaylik, A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lib, $N(A)/N$ va $N(B)/N$ lar kuzatish natijasi bo'lgan nisbiy chastotalar bo'lsin.

$N(A)\geq 0$ ligidan $N(A)/N\geq 0$, va $P(A)$ ni $N(A)/N$ ga yaqinligidan $P(A)\geq 0$.

Muqarrar hodisa uchun $N(\Omega)=N$ va demak, $P(\Omega)=1$ ni talab qilsak,

$$N(A+B)=N(A)+N(B).$$

Bundan

$$\frac{N(A+B)}{N}=\frac{N(A)}{N}+\frac{N(B)}{N}.$$

6) **Chekli additivlik.** Agar $A_i\cdot A_j=\varnothing \quad i\neq j \quad (i,j=1,\dots,n)$ bo'lsa, u holda

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\ . \qquad \text{(I.1.2)}$$

Oxirgi xossa 3 aksiomadan, matematik induksiya usulini qo'llash yordamida isbotlanadi.

7) $\forall A_1,A_2,\dots,A_n$ hodisalar uchun

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)\leq\sum_{k=1}^{n}P(A_k). \qquad \text{(I.1.3)}$$

(I.1.3) xossani isbotlash uchun $\bigcup_{k=1}^{n}A_k$ ni juft-jufti bilan birgalikda bo'lmagan hodisalar yig'indisi ko'rinishda ifodalaymiz. $B_k=A_k\setminus(A_1\cup A_2\cup\dots\cup A_{k-1})$ belgilashni kiritsak, u holda

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k=\sum_{k=1}^{n}B_k\ .$$

va oxirgi tenglikdan

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n}A_k\right)=\sum_{k=1}^{n}P(B_k).$$

Lekin $P(B_k)\leq P(A_k)$, ekanligini e'tiborga olsak, (I.1.3) tengsizlik kelib chiqadi.

9) $\forall A$ va B uchun

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Ma'lumki, $A\cup B=A+B\setminus AB$. Bundan $P(A\cup B)=P(A)+P(B\setminus A\cdot B)$ va $P(B\setminus A\cdot B)=P(B)-P(A\cdot B)$ dan 8-xossa kelib chiqadi.

3 va 4 aksiomalarni «σ- additivlik» (sanoqli additivlik) aksiomasi bilan almashtiramiz.

3*(σ- **additivlik**). Agar $A_1,A_2,\dots A_n,\ \dots$ juft-jufti bilan bog'liqsiz bo'lsa,

$$P\left(\sum_{k=1}^{\infty}A_k\right)=\sum_{k=1}^{\infty}P(A_k). \qquad \text{(I.1.4)}$$

---

* Andrey Nikolayevich Kolmogorov (1903-1987)- mashhur rus matematigi

1-teorema. 1,2,3,4 aksiomalar 1,2,3* aksiomalar bilan teng kuchlidir.

Teorema isbotini o'quvchiga qoldiramiz.

Ω elementar hodisalar fazosidagi A σ-algebrada 1,2,3,4 aksiomalar ehtimollikni aniqlaydi, bu aksiomalarni A.N.Kolmogorov* kiritgan.

1,2,3 aksiomalarni hodisalarning chastotalari tilida quyidagicha izohlash mumkin:

Faraz qilaylik, A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lib, $N(A)/N$ va $N(B)/N$ lar kuzatish natijasi bo'lgan nisbiy chastotalar bo'lsin.

$N(A)\geq 0$ ligidan $N(A)/N\geq 0$, va $P(A)$ ni $N(A)/N$ ga yaqinligidan $P(A)\geq 0$.

Muqarrar hodisa uchun $N(\Omega)=N$ va demak, $P(\Omega)=1$ ni talab qilsak,

$$N(A+B)=N(A)+N(B).$$

Bundan

$$\frac{N(A+B)}{N}=\frac{N(A)}{N}+\frac{N(B)}{N}.$$

Adabiyotlar

2.2-MAVZU: SHARTLI EHTIMOLLIK,HODISALARNING BOG'LIKSIZLIGI

REJA

1. SHartli ehtimollik ta'rifi
2. Misillar
3. Ko'paytirish teoremasi

Tayanch iboralar: shartli ehtimollik, shartli ehtimollik xossalari, ko'shish formulasi.

B hodisaning ro'y berish sharti bilan A hodisaning ro'y berish chastotasi (shartli chastota) deb

$$\frac{N(AB)}{N(B)}$$

nisbatga aytiladi.

Agar $\frac{N(A)}{N}\approx P(A)$, $\frac{N(B)}{N}\approx P(B)$, $\frac{N(AB)}{N}\approx P(AB)$ va $P(B)>0$ bo'lsa, u holda

---

* Andrey Nikolayevich Kolmogorov (1903-1987)- mashhur rus matematigi

$$\frac{N(AB)}{N(B)}=\frac{\frac{N(AB)}{N}}{\frac{N(B)}{N}}\approx\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{I.2.2}$$

bo‘ladi.

Ta’rif: $P(B)>0$ bo‘lsin, u holda B hodisaning ro‘y berish sharti ostidagi A hodisaning ro‘y berish ehtiolligi deb,

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)} \tag{I.2.3}$$

ifodaga aytiladi. (1.2.3) formylaga shartli ehtimollik deyiladi.

Ayrim hollarda $P(A/B)$ o‘rniga $P_B(A)$ ifoda ishlatiladi.

Agar B tayinlab qo‘yilsa (fiksirlansa), $A\in$A hodisa (Ω, A, P) -ehtimollar fazosidan olingan bo‘lsa, u holda $P_B(A)$ ehtimollik A ning funksiyasi sifatida yangi (Ω, A ,$P_B(A)$)[34] fazoni tashkil qiladi. Bu tasdiqni isbotlash uchun $P_B(A)$ ehtimollik ehtimolning barcha aksiomalarni qanoatlantirishini tekshirib ko‘ramiz.

(I.2.3) ga asosan:

$$P_B(A)=\frac{P(AB)}{P(B)}\geq 0,\qquad P_B(\Omega)=\frac{P(\Omega B)}{P(B)}=1,$$

agar $A_1A_2=\varnothing$ bo‘lsa, $(A_1B)\cap(A_2B)=\varnothing$ va

$$P_B(A_1+A_2)=\frac{P(A_1B+A_2B)}{P(B)}=\frac{P(A_1B)}{P(B)}+\frac{P(A_2B)}{P(B)}=P_B(A_1)+P_B(A_2)$$

bo‘ladi.

Agar $A_n\downarrow\varnothing$ bo‘lsa, $BA_n\downarrow\varnothing$ kelib chiqadi va

$$P_B(A_n)=\frac{P(BA_n)}{P(B)}\downarrow 0$$

bajariladi, (I.2.3) formuladan

$$P(AB)=P(B).\ P_B(A) \tag{I.2.4}$$

kelib chiqadi va buni ehtimollarni ko‘paytirish formulasi deyiladi.

1-misol. Yashikda M ta oq va $N-M$ ta qora shar mavjud bo‘lib, qayta qo‘ymaslik sharti bilan ketma-ket ikkita shar olinganda ikkalasini oq chiqish hodisasining ehtimolligi topilsin.

Yechish. $A=\{$birinchi olingan oq$\}$, $B=\{$ikkinchi olingan shar oq$\}$. U holda

$$P(A)=\frac{M}{N},\quad P_A(B)=\frac{M-1}{N-1}$$

Natijada, (I.2.4) ga ko‘ra

$$P(AB)=P(A)P_A(B)=\frac{M\cdot(M-1)}{N\cdot(N-1)}.$$

Matematik induksiya usulidan foydalanib quyidagi teoremani isbotlash mumkin.

1-Teorema(ko‘paytirish teoremasi)[36]. Agar $P(A_1A_2A_3.\,.\,.A_{n-1})>0$ bo‘lsa, u holda

$$P(A_1.\,.\,.A_n)=P(A_1)\cdot P_{A_1}(A_2)\cdot P_{A_1,A_2}(A_3).\,.\,.P_{A_1A_2\ldots A_{n-1}}(A_n). \tag{I.2.5}$$

(I.2.4) va (I.2.5) dan A σ-algebra aniqlangan Ω elementar hodisalar fazosida $P(A)$ ehtimollik bilan birgalikda $P_B(A)$ shartli ehtimollikni ham qarash mumkin.

2.3-MAVZU To‘la ehtimol va Bayes formulalari

REJA

1. To‘la ehtimollik formulasi.
2. Bayes formulasi formulasi.
3. Bayes formulasi_va to’la ehtimollik orasidagi munosabat. misollar,

1-ta’rif. Agar $A_i \cap A_j = \varnothing,\ \ i \neq j$, ya’ni $A_i$lar juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmasa va

$$A_1 + A_2 + . \ \ . \ \ . + A_n = \Omega \qquad (I.2.6)$$

bo‘lsa, u holda $A_1, A_2, . \ . \ ., A_n$ ga chekli bo‘linish [37] (hodisalarning to‘liq gruppasi) deyiladi.

1- **teorema.** (**To‘la ehtimollik formulasi** [38]).

Agar $A_1, A_2, . \ . \ ., A_n$ bo‘linish berilgan bo‘lib, $P(A_k) > 0$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy B uchun

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k) P(B / A_k) \qquad (I.2.7)$$

o‘rinlidir, bu formulaga to‘la ehtimollik formulasi deyiladi.

Isbot. (I.2.6) dan

$$B = B\Omega = BA_1 + BA_2 + . \ \ . \ \ . + BA_n,$$

bunda BA_i lar $\left(i = \overline{1, n}\right)$ birgalikda bo‘lmagani uchun

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(BA_k),$$

U holda (I.2.4) ni e’tiborga olinsa, (I.2.7) kelib chiqadi.

1-**misol.** 1-misolda ikkinchi olingan sharning oq chiqish hodisasi B ning ehtimolligi topilsin.

Yechish. Klassik ta’rifdan

$$P(A) = \frac{M}{N}, \quad P(\overline{A}) = \frac{N-M}{N}, \quad P_A(B) = \frac{M-1}{N-1}, \quad P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N-1},$$

To‘la ehtimollik formulasiga ko‘ra

$$P(B) = P(A)P_A(B) + P(\overline{A})P_{\overline{A}}(B) = \frac{M}{N} \cdot \frac{M-1}{N-1} + \frac{N-M}{N} \cdot \frac{M}{N-1} = \frac{M}{N},$$

ya’ni $P(A) = P(B)$. Xuddi shunday keyingi uchinchi sharni oq chiqish ehtimolligi ham $\frac{M}{N}$ bo‘ladi.

Bundan, agar xaltadan bitta yoki bir nechta oq shar yo‘qolgan bo‘lsa ham xaltadan tasodifan olingan ixtiyoriy sharni oq chiqishi ehtimolligi bir xil $\frac{M}{N}$ bo‘ladi.

TAYANCH TUSHUNCHALAR

2. **Bayes formulasi.**

2**- teorema.** Agar 1-teorema shartlari bajarilsa va $P(B)>0$ bo‘lsa, u holda

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{\sum_{i=1}^{n}P(A_i)P(B/A_i)} \qquad (I.2.8)$$

o‘rinlidir.

Bu formulaga Bayes [39] formulasi deyiladi.

Isbot. Ko‘paytirish formulasidan

$$P(A_kB)=P(A_k)\ P(B/A_k)=P(B)\cdot P(A_k/B),$$

bundan

$$P(A_k/B)=\frac{P(A_k)P(B/A_k)}{P(B)}.$$

bunga (I.2.7) formulani qo‘llab (I.2.8) formulani hosil qilamiz.

2**-misol.** Ikkita yashikda N tadan shar bo‘lib, birinchisida M_1 ta oq, ikkinchisida M_2 ta oq shar bo‘lsin.

Tasodifan olingan shar oqligi ma’lum bo‘lgan holda, bu $i-$nchi $i=1,2$ yashikga tegishlilik ehtimolligi topilsin.

Yechish. B hodisa olingan sharning oq chiqishi, A_i olingan shar $i-$nchi yashikga tegishliligini ifodalasin. U holda $P(A_1)=P(A_2)=\frac{1}{2}$,

$$P(B/A_k)=\frac{M_k}{N}, \quad k=1,2$$

Bayes formulasidan

$$P(A_k/B)=\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{M_k}{N}}{\frac{1}{2}\frac{M_1}{N}+\frac{1}{2}\frac{M_2}{N}}=\frac{M_k}{M_1+M_2}, \qquad k=1,2\,.$$

Agar $M_2<M_1$ bo‘lsa va shar bitta emas, qayta ko‘ymaslik sharti bilan ketma-ket n ta shar olinsa, u holda bularni hammasining oq chiqish hodisasi ehtimolligi, B sharti ostida

$$P(A_1/B)=\frac{M_1^n}{M_1^n+M_2^n}, \qquad k=1,2$$

ga teng va $n\to\infty$ da $P(A_1/B)\to 1$ bo‘ladi.

2.4-MAVZU: Bog‘liqsiz tajribalar ketma-ketligi. Bernulli sxemasi va formulasi.Binomial ehtimollar xossalari

REJA

1. Bog‘liqsizlik tushunchasi
2. Bog‘liqsiz bo‘linish, algebra va σ-algebra
3. Bog‘liqsiz tajriba
4. Bernulli formylasi

bog‘liqsizlik tushunchasi ehtimollar nazariyasining asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Ta’rif. Agar $P(B)>0$ bajarilsa, u holda, $P(A/B)$ mavjud bo‘ladi.

Agar $P(A \setminus B)=P(A)$ bajarilsa, u holda A hodisasi B hodisaga bog‘liq emas [40] deyiladi.

Agar $P(A)>0$ bo‘lsa,

$$P(B/A)=\frac{P(AB)}{P(A)}=\frac{P(B)P(A/B)}{P(A)}=P(B),$$

ya’ni A ning B ga bog‘liqsizligidan, B ning A ga bog‘liqsizligi kelib chiqadi.

Ehtimolliklarni ko‘paytirish formulasiga ko‘ra, A va B hodisalarning bog‘liqsizligidan

$$P(AB)=P(A)P(B).$$

Agar oxirgi ifoda bajarilmasa, u holda, A va B hodisalar o‘zaro bog‘liq deyiladi.

Bog‘liqsiz holatning, ehtimollik modelini ozgina o‘zgartirilsa, bog‘liqlikga aylanishi mumkin.

1-misol. 52 tali kartadan tasodifan bitta karta olinadi, A hodisasi tuz chiqishi, B g‘isht chiqishi bo‘lsa, u holda $A\cdot B$ olingan kartaning g‘isht tuz bo‘lishini anglatadi va

$$P(A)=\frac{4}{52}, \qquad P(B)=\frac{13}{52}=\frac{1}{4}, \qquad P(AB)=P(A)\cdot P(B),$$

ya’ni A va B hodisalari bog‘liqsiz.

Agar 52 kartaga bitta djoker karta qo‘shilsa, u holda

$$P(A)=\frac{4}{53}, \qquad P(B)=\frac{13}{53}, \qquad P(A\cdot B)=\frac{1}{53}\neq P(A)\cdot P(B),$$

ya’ni A va B hodisalar o‘zaro bog‘liqdir.

Agar ixtiyoriy $1\le i_1 \le i_2 \le . . . \le i_m, 2\le m<n$ uchun

$$P(A_{i_1}\cdot A_{i_2}\cdot \ . \ . \ . \cdot A_{i_m})=P(A_{i_1}) . \ . \ . P(A_{i_m})$$

bajarilsa, $A_1, A_2, \ , \ , A_n$ lar bog‘liqsiz [41] deyiladi, aks holda o‘zaro bog‘liq deyiladi.

Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar bog‘liqsiz bo‘lsa, uning ixtiyoriy to‘plam ostilari $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_m}$ ham bog‘liqsiz bo‘ladi.

$A_1, A_2, \ldots, A_n$ larning bog‘liqsizligi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ larning juft-jufti bilan bog‘liqsizligidan kuchliroqdir.

2-misol. Kartochkalar yozib qutilarga solingan $2,3,5,30$ sonlaridan biri $\frac{1}{4}$ ehtimollik bilan olinadi. A_k hodisa olingan son k ga bo‘linishini bildirsa, A_2, A_3, A_5 lar juft-jufti bilan bog‘liqsiz va

$$P(A_2) = P(A_3) = P(A_5) = \frac{1}{2},$$

$P(A_2 A_3) = P(A_2 A_5) = P(A_3 A_5) = \frac{1}{4}$ va $P(A_2 A_3 A_5) = \frac{1}{4}$, demak A_2, A_3, A_5 lar umuman uchlik sifatida bog‘liq.

Quyidagi teorema o‘rinlidir:

1-**teorema.** Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ hodisalar bog‘liqsiz va $i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_s$ indekslar turlicha bo‘lib, $P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r}) > 0$ bo‘lsa, u holda quyidagi tenglik o‘rinli

$$P(A_{j_1} \ldots A_{j_5} / A_{i_1 \ldots A_{i_r}}) = P(A_{j_1} \ldots A_{j_5}).$$

Isbot. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ larning bog‘liqsizligidan

$$P(A_{i_1} A_{i_2} A_{i_r}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_r}),$$
$$P(A_{j_1} \ldots A_{j_5}) = P(A_{j_1}) \ldots P(A_{j_5})$$

va

$$P(A_{i_1} A_{i_2} \ldots A_{i_r} A_{j_1} \ldots A_{j_5}) = P(A_{i_1}) \ldots P(A_{i_r}) P(A_{j_1}) \ldots P(A_{j_5}).$$

Bulardan $P(A_{i_1}, \ldots A_{i_2} \cap A_{j_1} \ldots A_{j_5}) = P(A_{i_1} \ldots A_{i_r}) \cdot P(A_{j_1} \ldots A_{j_5})$.

Oxirgi ifodadan teoremaning isboti kelib chiqadi.

BOG‘LIQSIZ BO‘LINISH, ALGEBRA VA σ-ALGEBRA

1-ta’rif: α-to‘plamlar sistemasi bo‘lsin. α ni o‘z ichiga olgan A(α) to‘plamdagi eng kichik algebraga to‘plamlarning α sistemasi yuzaga keltirgan algebra [42] deyiladi.

To‘plamlarning α sistemasi yuzaga keltirgan σ-algebra ham shu kabi aniqlanadi.

Agar α to‘plamlar sistemasi o‘rniga $A_1, A_2, \ldots, A_n$ bo‘linishni olsak va $A_1 + A_2 + \ldots + A_n = \Omega$ va $A_i \cdot A_j = \varnothing$, $i \neq j$ bo‘lsa, u holda, α to‘plamlar sistemasi yuzaga keltirgan A (α) algebra cheklidir, bular bo‘sh to‘plam $\varnothing$ va $A_{i_1} + A_{i_2} + \ldots + A_{i_m}$ lardan iborat.

2- teorema. Har qanday chekli to‘plamning algebrasi qandaydir bo‘linishni yuzaga keltiradi.

Isbot. B chekli algebra, B_ω lar shunday B larki $B \in \mathrm{B}$, $\omega \in B$. Har qanday $\omega \in \Omega$ uchun $B_\omega = \bigcap\limits_{B \in \mathrm{B}_\omega} B$.

Ixtiyoriy $\omega \in \Omega$ va $B \subset \mathrm{B}$ uchun quyidagi xossa o‘rinli:

Agar $\omega \in B$ bo‘lsa, $B_\omega \subseteq \mathrm{B}$. Agar $\omega \in B_\omega$, bo‘lsa, u holda $B_\omega \subseteq B_{\omega'}$.

Agar $\omega' \in B_\omega$ bo‘lsa, u holda $B_{\omega'} \subseteq B_\omega$ va $B_{\omega'} = B_\omega, \omega' \leq B_\omega$ hol bajarilmaydi, chunki $B_{\omega'} \subseteq \overline{B}_\omega$ ga qarama-qarshidir.

B_ω lar ichidan $B_1, B_2, ..., B_r$ turli to‘plamlarni ajratamiz. Bular $B_1 + ... + B_r = \Omega$ va $B_i \cdot B_j = \varnothing$, $i \neq j$ bo‘linishni yuzaga keltiradi.

Ixtiyoriy $B \in \mathrm{B}$, $B = \bigcup\limits_{\omega \in B} B_\omega$ bo‘lgani uchun, bu bo‘linish B algebrani hosil qiladi.

Agar Ω n ta elementdan tuzilgan bo‘lsa, B algebra 2^n element bo‘ladi.

3-misol. $A + \overline{A} = \Omega$ bo‘linish $\mathrm{B} = \{\varnothing, \Omega, A, \overline{A}\}$ algebrani yuzaga keltiradi. (B da $2^2 = 4$ ta element bo‘ladi).

4-misol. $A_1 + A_2 + A_3 = \Omega$ bo‘linish

$$\mathrm{B} = \{\varnothing, \Omega, A_1, A_2, A_3, A_1 + A_2, A_1 + A_3, A_2 + A_3\}$$

algebrani hosil qiladi. (B da $2^3 = 8$ ta element bo‘ladi).

2-ta’rif: Agar ixtiyoriy i_k, $1 \leq i_k \leq r_k$, $k = 1,...,n$ lar uchun

$$P\left(A_{1_{i_1}} \cdot A_{2_{i_2}} ... A_{n_{i_n}}\right) = P\left(A_{1_{i_1}}\right) \cdot P\left(A_{2_{i_2}}\right) .. P\left(A_{n_{i_n}}\right)$$

bajarilsa, u holda α_k : $A_{k_1} + A_{k_2} + ... + A_{k_{r_2}} = \Omega$ bo‘linish bog‘liqsiz[43] deyiladi.

3-ta’rif: $P(A_1 A_2 ... A_n) = P(A_1) P(A_2) .... P(A_n)$, $A_i \in \mathrm{A}$ bajarilsa, A_1 A_2 . . . A_t algebralar (σ - algebralar) bog‘liqsiz deyiladi.

3-teorema. A_1 A_2 … A_t algebralar bog‘liqsiz bo‘lishi uchun ularni yuzaga keltiruvchi $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ bo‘linishlar bog‘liqsiz bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu teoremani isbotlash uchun quyidagi lemmani isbotlaymiz:

Lemma. Agar A va B bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda $\overline{A}$ va B bog‘liqsiz, agar A_1 va B bog‘liqsiz bo‘lsa, A_2 va B bog‘liqsiz bo‘lib, $A_1 A_2 = \varnothing$ bo‘lsa, $A_1 + A_2$ va B bog‘liqsiz bo‘ladi.

Isbot. A va B larning bog‘liqsizligidan

$$P\left(B\overline{A}\right) = P(B / AB) = P(B) - P(AB) = P(B) - P(A)P(B) = P(B)(1 - P(A)) = P(B)P\left(\overline{A}\right),$$

ya’ni B va $\overline{A}$ bog‘liqsiz. A_i $(i = 1,2)$ va B larning bog‘liqsizligidan

$$P(A_i B) = P(A_i)P(B);\ P((A_1 + A_2)B) = P(A_1 B) + P(A_2 B) = P(A_1)P(B) + P(A_2) \cdot P(B) =$$
$$= (P(A_1) + P(A_2))P(B) * P(A_1 + A_2) \cdot P(B),$$

demak, $A_1 + A_2$ va B bog‘liqsiz.

3-teoremaning isboti. α_i bo‘linish yuzaga keltirgan A_{i} $(1 \leq i \leq n)$ larning bog‘liqsizligidan α_i lar bog‘liqsizligi kelib chiqadi. Ixtiyoriy $A \in \mathrm{A}_i$ juft-jufti bilan bog‘liqsiz α_i bo‘linishdagi hodisalardan iborat bo‘lgani uchun, lemmadan teoremaning yetarli qismining isboti ham kelib chiqadi.

BOG‘LIQSIZ TAJRIBA, BERNULLI FORMULASI

Tajriba bu ehtimollar fazosining berilishini bildiradi. n ta tajriba o'tkazilsa, $(\Omega_1,\ \mathsf{A}_1,\ \mathsf{P}_1),...,(\Omega_n,\ \mathsf{A}_n,\ \mathsf{P}_n)$ ehtimollar fazosi berilgan bo'ladi.

Biror tajriba natijasida ro'y bergan hodisa, ehtimoli ikkinchi tajribada shu hodisaning ro'y berish ehtimoliga bog'liq bo'lmasa bunday tajribaga[45] bog'liqsiz tajriba deyiladi.

Agar n ta tajribalar ketma-ketligi bog'liqsiz bo'lsa $\mathrm{A}_1,\ \mathrm{A}_2,...,\ \mathrm{A}_n$ σ-algebralar bog'liqisizdir.

Biz, xususiy holda, tajriba natijasida A hodisaning ro'y berishi yoki ro'y bermasligini kuzatamiz.

n ta bog'liqsiz tajriba o'tkazilayotgan bo'lib, har bir tajribada kuzatilayotgan A hodisaning ro'y berishi ehtimoli p va ro'y bermaslik ehtimoli $q=1-p$ bo'lsin.

n ta tajriba o'tkazilganda kuzatilayotgan A hodisaning m marta ro'y berib, $n-m$ ro'y bermaslik imkoniyatlarining soni C_n^m ga teng ekanini ko'rish qiyin emas.

n ta ketma-ket o'tkazilgan tajribani bitta murakkab tajriba desak, bu murakkab tajriba natijasida ro'y beradigan hodisaning ko'rinishi $A_1, A_2,..., A_n$ bo'lib, $A_i\left(i=\overline{1,n}\right)$ A ga yoki $\overline{A}$ ga teng bo'ladi. Bunday hodisalar soni 2^n ga teng.

Haqiqatan ham, $A_1, A_2,..., A_n$ hodisalar ichida:

1) $A_i = A\left(i=\overline{1,n}\right)$ shartni qanoatlantiruvchi hodisalar bitta.

2) Bittasi $\overline{A}$, qolganlari A dan iborat bo'lgan hodisalar n ta, chunki $\overline{A}$ ni n ta o'ringa bir martadan qo'yish bilan n ta turli hodisa hosil qilish mumkin va hokazo, $(n-m+1)n-m$ tasi $\overline{A}$, qolganlari A dan iborat bo'lgan hodisalar soni - n ta o'rniga $n-m$ ta $\overline{A}$ larni joylashtirishlar soni $C_n^{n-m}=C_n^m$ ga teng va hokazo.

Demak, biz ko'rayotgan murakkab tajriba natijasida ro'y berishi mumkin bo'lgan barcha elementar hodisalar soni

$$C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$$

ga teng ekan.

Agar n ta tajribada kuzatilayotgan A hodisaning m marta ro'y berish hodisasini B desak,

$$B=\left(A\cdot A\cdot\cdots\cdot A\cdot\overline{A}\cdot\overline{A}\cdots\overline{A}\right)\cup\left(A\cdot\overline{A}\cdot A\cdots A\cdot\overline{A}\right)\cup...\left(\overline{A}\cdots\overline{A}\cdot A\cdot A\cdots A\right) \qquad \text{(II.6.1)}$$

bo'lib, u C_n^m qo'shiluvchidan iborat bo'ladi. Tajribalar ketma-ketligi bir-biriga bog'liq bo'lmagani uchun

$$P\left(\underbrace{A\cdots A}_{m}\cdot\underbrace{\overline{A}\cdots\overline{A}}_{n-m}\right)=\underbrace{P(A)\cdot P(A)\cdots P(A)}_{m}\cdot\underbrace{P(\overline{A})\cdots P(\overline{A})}_{n-m}=P^m q^{n-m}$$

bo'ladi. (II.6.1) tenglikning o'ng tomonidagi C_n^m ta hodisaning ikkitasi bir vaqtda ro'y bermasligidan

$$P_n(B)=C_n^m p^m q^{n-m}$$

kelib chiqadi. Agar A hodisaning n ta tajribada m marta ro'y berish ehtimolini $P_n(m)$ deb belgilasak,

$$P_n(m)=C_n^m p^m q^{n-m} \qquad \text{(II.6.2)}$$

hosil bo‘ladi.

(II.6.2) ni **Bernulli formulasi** deyiladi. $P_n(m)$ ehtimollar uchun $\sum_{m=0}^{n} P_n(m)=1$ o‘rinli bo‘lishini ko‘rish qiyin emas. Haqiqatan ham,

$\sum_{m=0}^{n} C_n^m p^m q^{n-m} = (p+q)^n = 1$. (II.6.2) ifoda $(px+q)^n$ binom yoyilmasidagi x^m katnashgan hadning koeffisenti bo‘lgani uchun, $P_n(m)$ larni ehtimolning binomial taqsimot qonuni deyiladi.

Fiksirlangan n da $P_n(m)$ ehtimol m ning funksiyasi ekani ravshan. Bu funksiyani tekshiraylik,

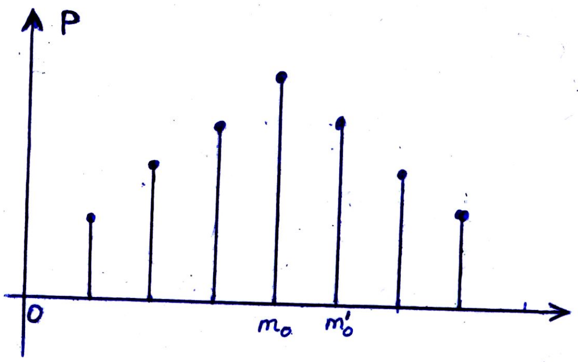
Quyidagi nisbatni ko‘ramiz:

$$\frac{P_n(m+1)}{P_n(m)} = \frac{n-m}{m+1}\cdot\frac{p}{q} \qquad \text{(II.6.3)}$$

a) Agar $(n-m)p > (m+1)q$, ya’ni $np-q > m$ bo‘lsa, (II.6.3) tenglikdan $P_n(m+1) > P_n(m)$ natijaga ega bo‘lamiz.

Yuqoridagi tekshirishlardan ko‘rinadiki, $P_n(m)$ ehtimol m ning o‘sishi bilan, avvval o‘sib borib, eng katta kiymatiga erishib, m ning keyingi o‘sishlarida esa kamayuvchi funksiya bo‘lar ekan.

Bundan tashqari, agar $np-q$ butun son bo‘lsa, $P_n(m)$ ehtimol m ning ikkita $m_0 = np-q$ va $m_0' = np-q+1$ qiymatida eng katta qiymatga erishishligini ko‘ramiz (I.5-shakl).



1.5-шакл

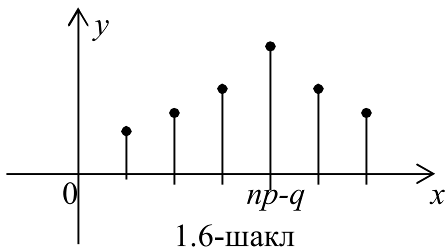
Agar qaralayotgan hodisaning eng katta ehtimolli yuz berishlar conini μ desak, $np-q$ son butun bo‘lmaganda, ushbu

$$np-q < \mu < np+p$$

tengsizliklar hosil bo‘ladi. Ular n ta tajribada A hodisaning eng katta ehtimolli yuz berishlar soni yotadigan chegarani ko‘rsatadi.

Yuqoridagi tengsizliklardan μ ning aniq bitta butun songa teng bo‘lishini ko‘rish qiyin emas: $\mu = [np-q]+1$.

Agar $np-q<0$ bo‘lsa, $P_n(0) > P_n(1) > \cdots > P_n(n)$ va $np-q=0$ bo‘lganda $P_n(0) = P_n(1) > \ldots > P_n(n)$ bo‘lishini ko‘rish kiyin emas (I.6-shakl).



1.6-шакл

3- misol. $n=8$, $m=3$, $p=q=\frac{1}{2}$.

U holda $$P_n(m)=P_8(3)=C_8^3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{7}{32},$$

$$\mu=[np-q]=[8\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}]=[3{,}6]=3$$

$$P_8(4)=C_8^4\left(\frac{1}{2}\right)^8=\frac{5\cdot6\cdot7\cdot8^8}{1\cdot2\cdot5}\cdot\frac{1}{2^8}=\frac{35}{128}$$

2.5-mavzu **MUAVR-LAPLASNING LOKAL TEOREMASI**

REJA

1. **Asosie teorema**
2. **Stirling formylasi**

Tayanch iboralar. Bernulli sixemasi, katta n-larda bernulli sixemasi uchun asimptotik formula

Binomial taqsimot qonunida, (V.15.1), $M\mu=np, D\mu=npq, \sigma=\sqrt{npq}$ lar o‘rinli.

1**-Teorema.** Bernulli sxemasida $\sigma=\sqrt{npq}\to\infty$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $C>0$ da $|x|=\left|\frac{m-np}{\sigma}\right|\le C$ uchun

$$P\left(\frac{\mu-np}{\sqrt{npq}}\le x\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}(1+0(1))$$

tekis bajariladi, bu yerda m manfiy bo‘lmagan butun son.

Isbot. $m=np+x\sigma$ ligini hisobga olib,

$$P(\mu=m)=P\left(\frac{\mu-np}{\sigma}=x\right)=\frac{n!}{m!(n-m)!}p^m q^{n-m}$$

ifodani logarifmlaymiz:

$$\ln P(\mu=m)=\ln n!-\ln m!-\ln(n-m)!+m\ln p+(n-m)\ln q$$

.

Ushbu $n!=n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}e^{-\theta_n}, \theta_n=0\left(\frac{1}{n}\right)$ **Stirling formulasini**

$$\ln n! = n\ln n + \ln\sqrt{2\pi n} - n + \theta_n$$

ko‘rinishda yozamiz.

Teorema shartiga ko‘ra, $m = np\left(1 + \frac{xq}{\sigma}\right) \to \infty,\ k = n - m = nq\left(1 - \frac{xp}{\sigma}\right) \to \infty$,

shuning uchun $\ln n!$, $\ln m!, \ln k!$ larni hisoblashda Stirling formulasidan foydalanamiz. U holda

$$\ln P(\mu = m) = n\ \ln n - m\ln m - k\ln k + m\ln p + k\ln q + \frac{1}{2}\ln\frac{n}{2\pi mk} + \theta_n - \theta_m - \theta_k .$$

(V.17.1)

Ikkinchi tomondan

$$\ln\frac{n}{mk} = \ln\frac{1}{npq} - \ln\left(1 + \frac{xq}{\sigma}\right) - \ln\left(1 - \frac{xp}{\sigma}\right) = 2\ln\frac{1}{\sigma} + 0\left(\frac{1}{\sigma}\right),\ \frac{1}{n} = 0\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),\ \frac{1}{m} = \frac{1}{n\left(1 + \frac{xq}{\sigma}\right)} =$$

$$= 0\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),\ \frac{1}{k} = 0\left(\frac{1}{\sigma^2}\right),\ \ln(1 + \varepsilon) = 0(\varepsilon),\ \varepsilon \to 0 .$$

U holda, (V.17.1) dan

$$\ln P(\mu = m) = -m\ln\frac{m}{np} - k\ln\frac{k}{np} + \ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + 0\left(\frac{1}{\sigma}\right)$$

Bundan

$$\ln P(\mu = m) = -(np + x\sigma)\ln\left(1 + \frac{xq}{\sigma}\right) - (nq - x\sigma)\ln\left(1 - \frac{xp}{\sigma}\right) + \ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} + 0\left(\frac{1}{\sigma}\right) = \ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} -$$

$$-(np - x\sigma)\left(\frac{xq}{\sigma} - \frac{x^2q^2}{2\sigma^2} + 0\left(\frac{1}{\sigma^3}\right)\right) - (nq - x\sigma)\left(-\frac{xp}{\sigma} - \frac{x^2p^2}{2\sigma^2} + 0\left(\frac{1}{\sigma^3}\right)\right) + 0\left(\frac{1}{\sigma}\right) =$$

$$= \ln\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} - \frac{x^2}{2} + 0\left(\frac{1}{\sigma}\right).$$

Teoremaning isboti oxirgi tenglikdan kelib chiqadi.

Ilovada

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funksiyaning x argument musbat qiymatlariga mos tuzilgan 1-jadval mavjud, $\varphi(x)$ funksiyaning juftligidan, bu jadval argumentning manfiy qiymatlari uchun ham yaroqlidi.

1-misolni Puasson teoremasi yordamida hisoblaymiz:

$$a = np = 10000 \cdot 0{,}0005 = 5,$$

$$P(\mu = 5) \sim \frac{5^5}{5!}e^{-5} .$$

Ilovadagi 3-jadvaldan $P(\mu = 5) \approx 0{,}1755$.

2-misol. Tadbirkor ishlab chiqqan mahsulotining yuqori nav chiqishi ehtimolligi 0,2 ga teng bo‘lgan holda, 400 ta mahsulotdan 80 tasining yuqori navli chiqish hodisasi ehtimolligi topilsin.

Yechish. Shartga ko‘ra $n = 400,\ m = 80,\ p = 0{,}2,\ q = 0{,}8$.

U holda

$$P_{400}(80) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}} = \frac{\varphi(x)}{8}, \qquad x = \frac{m-np}{\sqrt{npq}} = 0.$$

Ilovadagi 1- jadvaldan $\varphi(0) = 0{,}3989$ ekanligini e'tiborga olsak,

$$P_{400}(80) \approx \frac{0{,}3989}{8} = 0{,}04986.$$

Asl qiymati esa $0{,}049813272$.

2.6-MAVZU MUAVR –LAPLASNING INTEGRAL TEOREMASI

REJA

1. Katta N-larda Bernulli sixemasi uchun oraliqga tushish ehtimolligi
2. Limit teorema

Tayanj iboralar. Asimptotik formula. Muavr formulasi, Laplas formylasi.

Faraz qilaylik, n ta tajriba o'tkazilayotgan bo'lib, ularning har birida A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas va $p(0<p<1)$ ga teng bo'lsin. n ta tajribada A hodisaning kamida k_1 marta va ko'pi bilan k_2 marta ro'y berish ehtimoli $P_n(k_1, k_2)$ ni qanday hisoblash mumkin. Bernulli sxemasiga ko'ra bu $P_n(k_1, k_2)$ ehtimol

$$P_n(k_1, k_2) = P_n(k_1 \le m \le k_2) = \sum_{m=k_1}^{k_2} C_n^m p^m q^{n-m} \qquad (V.15.2)$$

ga teng. Agar n, k_1, k_2 lar yetarlicha katta bo'lsa, (V.15.2) ifodani hisoblash ancha qiyindir. Bu qiyinchilikdan qutulish maqsadida yuqoridagi ifodaga asimptotik formula topamiz.

<u>**Teorema.**</u> Agar har bir tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli p o'zgarmas bo'lib, nol va birdan farqli bo'lsa, u holda $n \to \infty$ da

$$P_n(k_1, k_2) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

munosabat a va b $(-\infty \le a \le b \le +\infty)$ ga nisbatan tekis bajariladi, bu yerda

$$a = \frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}}, \qquad b = \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

<u>**Isbot.**</u> Aniqlik uchun a va b chekli bo'lsin (a va b cheksiz bo'lganda ham teoremani isbotlash mumkin). U holda Muavr-Laplasning lokal teoremasiga ko'ra (V.15.2) ni

$$P_n(k_1, k_2) = P_n\left(\frac{k_1 - np}{\sqrt{npq}} \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le \frac{k_2 - np}{\sqrt{npq}}\right) = P_n\left(a \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b\right) =$$

$$= \sum_{a \le \frac{m-np}{\sqrt{npq}} \le b} \frac{1}{\sqrt{2\pi npq}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2} \cdot \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) =$$

$$= \sum_{a \le x_m \le b} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{1}{2}x_m^2} \cdot \Delta x_m \left(1 + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \qquad (V.15.3)$$

ko‘rinishda yozamiz. Bu formulada

$$x_m=\frac{m-np}{\sqrt{npq}};\quad \Delta x_m=x_{m+1}-x_m=\frac{1}{\sqrt{npq}}.$$

Endi

$$I(x_m)=\int_{x_m}^{x_{m+1}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad (V.15.4)$$

yordamchi funksiyani qaraylik. Bu integralda $x=x_m+u$ almashtirish bajaramiz, natijada

$$I(x_m)=\int_0^{\Delta x_m} e^{-\frac{x_m^2}{2}}e^{-ux_m-\frac{u^2}{2}}du=e^{-\frac{x_m^2}{2}}\int_0^{\Delta x_m} e^{-ux_m-\frac{u^2}{2}}du.$$

n ni yetarlicha katta qiymatlarida $0\le u\le \Delta x_m=\frac{1}{\sqrt{npq}}$ bo‘lgani uchun u nolga yetarlicha yaqin bo‘ladi, bu esa

$$e^{-ux_m-\frac{u^2}{2}}=1+o\left(ux_m+\frac{u^2}{2}\right)$$

ekanini ko‘rsatadi. U holda

$$I(x_m)=e^{-\frac{x_m^2}{2}}\Delta x_m\left(1+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

yoki

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{a\le x_m\le b}\int_{x_m}^{x_{m+1}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\sum_{a\le x_m\le b}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x_m^2}{2}}\cdot\Delta x_m\left(1+o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right). \qquad (V.15.5)$$

Natijada $n\to\infty$ da (V.15.3) va (V.15.5) larni solishtirib, ifodalarning o‘ng tomonlari asimptotik tengligidan, chap tomonlarining ham asimptotik tengligiga ishonch hosil qilamiz. Shu bilan teorema isbot bo‘ldi.

Muavr - Laplasning integral teoremasini qo‘llash bilan yechiladigan masalalarda

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

ifodani hisoblashga to‘g‘ri keladi. Kitobning oxiridagi ilovada bu integral uchun jadval keltirilgan. Jadvalda $\Phi(x)$ funksiyaning musbat x larga mos qiymatlari keltirilgan, $\Phi(x)$ funksiyaning toqligidan foydalanib, jadvaldan $x<0$ bo‘lgan holda ham foydalaniladi. Jadvalda $\Phi(x)$ funksiyaning $x\in[0, 5]$ segmentdagi qiymatlari berilgan, agar $x>5$ bo‘lsa, u holda $\Phi(x)\approx 0,5$ deb olinadi.

Jadvaldan foydalanish oson bo‘lishi uchun quyidagi formuladan foydalanish qulaydir:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^b e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\Phi(b)-\Phi(a).$$

1-misol. Fakultet talabalarining imtihon sessiyasidan “4” va “5” bilan o‘tish ehtimoli 0,9 ga teng. Tasodifan olingan 400 talabadan 34 tadan 55 tagachasi hech bo‘lmasa bitta fandan “4” dan kichik bho olish ehtimolini toping.

Yechish. Shartga ko‘ra

$$p=0,1;\ q=0,9;\ n=400;\ k_1=34;\ k_2=55.$$

Demak,

$$a=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{34-400\cdot 0,1}{\sqrt{400\cdot 0,1\cdot 0,8}}=-\frac{6}{6}=-1;$$

$$b=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{55-400\cdot 0,1}{6}=\frac{15}{6}=2,5.$$

Izlanayotgan ehtimol yuqoridagi teoremaga ko‘ra quyidagiga teng:

$$P_{400}(34;\ 55)\approx\Phi(2,5)-\Phi(-1).$$

Jadvaldan

$$\Phi(2,5)=0,4938,$$

$$\Phi(-1)=-\Phi(1)=-0,3413$$

ekanini topamiz. Demak, $P_{400}(34;\ 55)\approx 0,4938+0,3413=0,8351$. Asl qiymati esa 0,8551.

2-misol. Ixtiyoriy olingan pillaning yaroqsiz chiqish ehtimoli 0,2 ga teng. Tasodifiy olingan 400 ta pilladan 70 tadan 130 tagachasi yaroqsiz bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Shartga ko‘ra

$$p=0,2;\ q=0,8;\ n=400;\ k_1=70;\ k_2=130.$$

U holda

$$a=\frac{k_1-np}{\sqrt{npq}}=\frac{70-400\cdot 0,2}{\sqrt{400\cdot 0,2\cdot 0,8}}=\frac{-10}{8}=-1,25;$$

$$b=\frac{k_2-np}{\sqrt{npq}}=\frac{130-400\cdot 0,2}{8}=\frac{55}{8}=6,25.$$

Jadvaldan $\Phi(-1,25)=-\Phi(1,25)=-0,39435$, $\Phi(6,25)=0,5$, chunki $x>5$ da $\Phi(x)=0,5$.

Demak, $P_{400}(70;\ 130)\approx\Phi(6,25)+\Phi(1,25)=0,5+0,39435=0,89435$.

Asl qiymati 0,9069927.

2.7 –MAVZU PUASSON FORMULASI

REJA

1.Hodisaning ehtimolligining birga yaqin bo’lgandagi hol
2.Puasson teoremasi

1-teorema (Puasson teoremasi). Agar $p\to 0$ va $n\to\infty$ da $np\to a$, bo‘lsa, u holda ixtiyoriy tayinlangan $m=0,1,2,....,$ lar uchun

$$P(\mu=m)=C_n^m p^m q^{n-m}\to\frac{a^m}{m!}e^{-a}$$

bo‘ladi.

Isbot. Bernulli formulasidan

$$P(\mu=m)=\frac{(np)^m}{m!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)...\left(1-\frac{m-1}{n}\right)(1-p)^{n-m} \qquad \text{(V.16.1)}$$

$n\to\infty, np\to a$ da $(1-p)^n\to e^{-a}$.

Ikkinchi tomondan

$$\left|P(\mu=m)-\frac{a^m}{m!}e^a\right|\le\frac{a^2}{n}. \qquad \text{(V.16.2)}$$

Bu tengsizlik va (V.16.2) ifodadan teoremaning isboti kelib chiqadi.

Bernulli sxemasida har bir bog‘liqsiz tajribada A hodisa ro‘y berishi ehtimolligi turlicha P_i, ro‘y bermaslik ehtimolligi $q_i=1-p_i$ bo‘lgan holda A hodisaning n ta bog‘liqsiz tajribada μ marta ro‘y berish ehtimolligi

$$p(\mu=m)=P_n(m,p_1,p_2,...,p_n)$$

ni hisoblaymiz, bu sxema Puasson sxemasi deyiladi.

Xususan

$$P(\mu=0)=q_1\cdot q_2....q_n,$$
$$P(\mu=1)=p_1q_2....q_n+q_1p_2q_3\cdots q_n+...+q_1q_2\cdots q_{n-1}p_n,$$
$$\dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots\ \dots$$
$$P(\mu=n)=p_1p_2\cdots p_n,\ \ P(\mu=m)=0,\ \ m<0,\ \ m>n.$$

2- teorema. Puasson sxemasida ixtiyoriy n, $p_1, p_2, ..., p_n$ va B lar uchun

$$\left|P(\mu\in B)-\sum_{m\in B}\prod(m,a)\right|\le\sum_{i=1}^{n}p_i^2,$$

,

o‘rinlidir, bu yerda

$$a=p_1+p_2+...+p_n,\ \prod(m,a)=\frac{a^m\cdot e^{-a}}{m!}.$$

2.8-MAVZU. INTEGRAL LIMIT TEOREMA TADBIQLARI

REJA

1. $\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ **hodisa ehtimolligi**

2. $P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\alpha\right\}\ge\beta$ **ni hisoblash**.

o’rganish savollari.

$\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon$ **ni n = 80, p=0,3, *E*=0,003 uchun hisoblang,**

$p=0,25;\ q=0,75;\ n=600,$

$P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=0,92$ ni taxlil g’ling

Faraz qilaylik, Muavr – Laplasning integral teoremasidagi barcha shartlar bajarilgan bo‘lsin. $\frac{m}{n}$ nisbiy chastotaning o‘zgarmas p ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymati bo‘yicha avvaldan berilgan $\varepsilon > 0$ sondan katta bo‘lmaslik ehtimolini topish masalasi bilan shug‘ullanamiz. Shunday qilib,

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon$$

tengsizlikning ehtimolini baholaymiz. Ushbu

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = P\left\{-\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}} < \frac{m-np}{\sqrt{npq}} < \varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right\}$$

Tenglikni e’tiborga olsak, Mavr – Laplasning integral teoremasiga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} = 2\lim_{n\to\infty} \Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = 1\,.$$

Bu munosabat Bernulli sxemasi uchun katta sonlar qonuni yoki Bernulli teoremasi deyiladi. Bernulli teoremasi ehtimollar nazariyasining asosiy teoremalaridan hisoblanib, bu teorema yordamida ko‘pgina tatbiqiy masalalar hal qilinadi.

A hodisaning nisbiy chastotasi $\frac{m}{n}$ ning o‘zgarmas p ehtimoldan chetlanishi absolyut qiymat bo‘yicha α sondan oshmaslik ehtimoli ushbu

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right\} \approx 2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad \text{(V.15.6)}$$

formulaga ko‘ra topiladi.

Shunday qilib, $\left|\frac{m}{n} - p\right| < \alpha$ tengsizlikni ro‘y berish ehtimoli taqriban Laplas funksiyasining $x = \alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}$ nuqtadagi qiymatining ikkilanganiga teng ekan.

1-misol. Tajriba tanga tashlashdan iborat bo‘lsin. P tashlangan tanganing raqamli tomoni bilan tushish hodisasi bo‘lsin. Tangani 400 marta tashlanganda P hodisaning nisbiy chastotasi $\frac{m}{400}$ ning $\frac{1}{2}$ ehtimoldan absolyut qiymat bo‘yicha chetlanishi 0,08 dan kichik bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra $n = 400,\ p = q = \frac{1}{2},\ \alpha = 0{,}08$. U holda (V.15.6) formulaga ko‘ra quyidagi ifodani hosil qilamiz:

$$P\left\{\left|\frac{m}{400} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}08\right\} = 2\Phi\left(0{,}08\cdot\sqrt{\frac{400}{\frac{1}{4}}}\right) = 2\Phi(3{,}2)\,.$$

Jadvaldan

$$\Phi(3{,}2) = 0{,}49931 \quad \text{yoki} \quad P\left\{\left|\frac{m}{400} - \frac{1}{2}\right| < 0{,}08\right\} \approx 0{,}99862\,.$$

Bundan quyidagicha xulosa chiqarish mumkin: agar tajriba tanga tashlashdan iborat bo‘lib, tangani yetarlicha ko‘p sonda tashlab, uni har bir 400 ta tashlagandan so‘ng tashlash natijalari fiksirlab turilsa, u holda bu tashlashlarning taxminan 99,8% ida nisbiy chastota bilan gerb tushish (raqam tushish) hodisasining ehtimoli orasidagi ayirma absolyut qiymat jihatdan 0,08 dan katta bo‘lmaydi yoki m son 0,99 ehtimol bilan $168 < m < 232$ orasida yotadi.

2-misol. Qorako‘l terining yaroqsiz chiqish ehtimoli $p = 0,09$ ga teng bo‘lsin. Nechta qorako‘l teri olinganda qorako‘lning yaroqsiz chiqishi nisbiy chastotasining 0,09 ehtimoldan farqi absolyut qiymati jihatdan 0,02 dan kichik bo‘lish ehtimoli 0,9962 ga teng bo‘ladi.

Yechish. Shartga ko‘ra $p = 0,09;\ q = 0,91;\ \alpha = 0,02$ $P\left\{\left|\frac{m}{n} - 0,09\right| < 0,02\right\} = 0,9962$.

Bu ifodadan n ni topamiz. Muavr – Laplasning integral teoremasiga asosan

$$2\Phi\left(0,002\sqrt{\frac{n}{0,09 \cdot 0,91}}\right) \approx 2\Phi\left(0,071\sqrt{n}\right) = 0,9962 .$$

Natijada $\Phi\left(0,071\sqrt{n}\right) = 0,4981$, jadvaldan $\Phi(2,9) = 0,4981$ ekanini topamiz. Demak, $0,071\sqrt{n} = 2,9;\ n = 1664$. Xosil qilingan natijaga ko‘ra, olingan 1664 ta qorako‘l terining yaroqsiz chiqish nisbiy chastotasi 0,9962 ehtimol bilan quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$0,07 < \frac{m}{1664} < 0,11 .$$

Navbatdagi masala

$$P\left\{\left|\frac{m}{n} - p\right| < \alpha\right\} \geq \beta \qquad \text{(V.15.7)}$$

tengsizlikni qanoatlantiradigan minimal n ni topishdan iborat, ya’ni A hodisaning nisbiy chastotasi bilan uning p ehtimoli orasidagi ayirma absolyut qiymat jihatdan α dan oshmaslik ehtimoli β dan kichik bo‘lmasligi uchun ko‘pi bilan nechta tajriba o‘tkazish kerak. Bu sonni topish uchun (V.15.7) ifodaning chap tomonini Muavr – Laplas teoremasiga ko‘ra yozamiz:

$$2\Phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right) \geq \beta \qquad \text{(V.15.8)}$$

munosabatdan n ning izlanayotgan minimal qiymati topiladi.

3-misol. Berilgan: $p = \frac{1}{4},\ q = \frac{3}{4},\ \alpha = 0,01,\ \beta = 0,99$. Bu ifodalarni (V.15.8) ga qo‘ysak,

$$\Phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{\frac{3}{16}}}\right) \geq 0,495 . \qquad \text{(V.15.9)}$$

Jadvalga asosan $\Phi(2,58) \geq 0,495$. Demak, $\Phi(x)$ funksiyaning (V.15.9) tengsizlikni qanoatlantiradigan qiymatiga mos keluvchi eng kichik x 2,58 ga tengligini ko‘ramiz. Buni e’tiborga olsak,

$$0,01\sqrt{\frac{16}{3}n} \geq 2,58 \quad \text{yoki } n > 12481 = n_0 .$$

4-misol. O‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalarning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,25 ga teng. 600 ta tajriba o‘tkazilganda 0,92 ehtimol bilan hodisa ro‘y berishi nisbiy chastotasi hodisa ehtimolidan qanchaga chetlanishi mumkin?

Yechish. Shartga ko‘ra $p = 0,25;\ q = 0,75;\ n = 600$,

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 0,92.$$

Yechimni topish uchun

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$$

formuladan foydalanamiz.

$$P\left(\left|\frac{m}{600} - 0,25\right| < \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{600}{0,25\cdot 0,75}}\right) = 0,92$$

yoki

$$\Phi\left(56,57\cdot\varepsilon\right) = 0,46,$$

jadvaldan

$$56,57\cdot\varepsilon = 1,755.$$

Demak,

$$\varepsilon = 0,031.$$

Foydalaniladigan asosiy darslıklar va o’quv qo’llanmalar ro’yhati

Asosiy adabiyotlar

1 Sh. Mirziyoyev Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent “O’zbekiston” 2017. 488 b.

23. Sh. Mirziyoyev Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta’minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O’zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganligining 24 yilligiga bag’ishlangan tantanali marosimdagi ma’ruza. 2016-yil 7-dekabr. Toshkent - “O’zbekiston” - 2017. 32 b.
24. Ш.Мирзиёев Танқидий тахлил, қатъий тартиб – интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Тошкент – “Ўзбекистон” 2017.
25. Ш.Мирзиёев Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига баг‘ишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ. Тошкент – “Ўзбекистон”. 2016. 56 б.

6 Ш.Қ.Форманов “Эҳтимолликлар назарияси”, Тошкент “Университет” 2014 й.

6.Ross, Sheldon M. A first course in probability. Pearson Education, Inc. 2010.

7.Robert B. Ash Basic probability theory. Dover Publications, Inc. 2008.

Qo’shimcha adabiyotlar

26. А.А.Абдушукуров, Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, ЎзМУ, 2010 й.
27. А.А.Абдушукуров, Т.М.Зупаров, “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика”, Тафаккур Бўстони, 2015 й.

28. А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» Тошкент, «Университет», 2003 й.
29. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
30. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
31. Б.А.Севастьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
32. С.Ҳ.Сирожиддинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
33. Севастянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
34. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука»,1989 г.
35. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.

11. Mamatov M., Ibragimov R., Mashrabboev A., Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistika.T., 2008 y

12. Ibragimov R..,Mashrabboev A. Polvanov R. Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistikadan masalalar to'plamiми, Namangon 2018y.

Internet saytlari

36. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали.
37. www.lex.uz -Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
38. http://www.rsl.ru
39. https://www.khanacademy.org/math/probability
40. http://www.msu.ru
41. http://sunzi.lib.hku.hk/ER/subject/hkul/510/ej/1
42. http://www.nlr.ru
43. http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/business-stat/R.htm

3-MAVZU. 8-SOAT
TASODIFIY MIQDORLAR VA TAKSIMOT FUNKSIYA

3.1 MAVZU. TASODIFIY MIQDORLAR VA TAKSIMOT FUNKSIYA
REJA

1. **Tasodifiy miqdorlar**
2. **Indikatorlar**
3 **Taqsimot qonun**
4. **Taqsimot funksiya**

O'rganish savollari. Tasodifiy miqdor tushunchasi, taqsimot funksiya, zichlik funksiya

<u>Ta'rif:</u> Chekli ehtimollar fazosi (Ω, A, P) berilgan bo'lsa, ω elementar hodisa uchun aniqlangan $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$ sonli funksiyaga **tasodifiy miqdor** deyiladi.

Ko‘pincha, tasodifiy miqdorlarni grek yozma harflari $\xi, \eta, \zeta, \nu, ...$ kabilar bilan belgilaymiz.

Umumiy xoldagi ta’rif

Ta’rif $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlar yuzaga keltirgan $\mathrm{A}_{\xi_1}, \mathrm{A}_{\xi_2}, ..., \mathrm{A}_{\xi_n}$ algebralar bog‘liqsiz bo‘lsa $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz deyiladi.

Ma’lumki, A_{ξ_i} lar $\{\xi_i \in B\}$, $B \subseteq R'$ ko‘rinishdagi hodisalardan tuzilganligini hisobga olsak, u holda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ larni bog‘liqsiz bo‘lishi uchun

$$P\{\xi_1 \in B_1, ..., \xi_n \in B_n\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i \in B_i\}$$

bo‘lishi kerak.

Ma’lumki $\mathrm{A}_{\xi_1}, ..., \mathrm{A}_{\xi_n}$ algebralarning bog‘liqsizligi bilan ular hosil kilgan $\alpha_{\xi_1}, ..., \alpha_{\xi_n}$ larning bog‘liqsizligi teng kuchlidir, shunga asosan $\xi_1, ..., \xi_n$ ni bog‘liqsiz bo‘lishi uchun, ixtiyoriy $x_{1j}, ..., x_{nj_n}$ larda $P\{\xi_1 = x_{1j_1}, ..., \xi_n = x_{nj_n}\} = \prod_{i=1}^{n} P\{\xi_i = x_{ij_i}\}$ bo‘lishi kerak.

1-misol. Bernulli sxemasida $\Omega \ni \omega = (\omega_1, \omega_2, .., \omega_n)$, bo‘lib, agar $i-$nchi tajribada biz kutgan hodisa ro‘y bersa, $\omega_i = 1$, agar $i-$nchi tajribada biz kutgan hodisa ro‘y bermasa $\omega_i = 0$. U holda n ta tajribada biz kutgan hodisalarning ro‘y berishlar soni $\mu = \mu(\omega) = \omega_1 + \omega_2 + ... + \omega_n$ bo‘ladi.

2-misol. Yashikda M ta oq va $N - M$ ta qora shar bor. Qayta qo‘ymaslik sharti bilan n $(n \le N)$ ta shar olingan bo‘lsin. Agar oq sharlar 1 dan M gacha nomerlangan bo‘lsa, Ω elementar hodisalar fazosi $\omega = \{i_1, i_2, ..., i_n\}$, $i_1 < i_2 <, ..., < i_n$ ko‘rinishdagi elementlardan tuzilgan bo‘ladi.

Bu holda chiqqan oq sharlar soni ξ tasodifiy miqdor bo‘lib, $\xi = \zeta(\omega) = m, i_m \le M < i_{m+1}$, $1 \le m \le M$ bo‘ladi.

Agar $q(x_1, x_2, ..., x_r)$-sonli funksiya bo‘lib, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_r$ lar tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, u holda

$$\eta = \eta(\omega) = q(\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), ..., \xi_2(\omega))$$

murakkab funksiya ham tasodifiy miqdor bo‘ladi.

Ta’rif: A, $A \in \mathrm{A}$ **hodisaning indikatori** deb, ushbu

$$J_A = J_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A, \\ 0, & \omega \in \overline{A}; \end{cases}$$

tasodifiy miqdorga aytiladi.

Indikator quyidagi xossalarni qanoatlantiradi.

$$J_\varnothing = 0,\ J_\Omega = 1, \qquad J_{AB} = J_A \cdot J_B,\ J_A = 1 - J_{\overline{A}}. \tag{III.7.1}$$

Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ lar juft-jufti bilan bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda

$$J_{\sum_{k=1}^{n} A_k} = \sum_{k=1}^{n} J_{A_k}.$$

Xususan, $J_{A_1+A_2}=J_{A_1}+J_{A_2}$.

Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ lar ixtiyoriy bo‘lsa, u holda (III.7.1) ni hisobga olgan holda, $\overline{\bigcup_k A_k}=\bigcap_K \overline{A}_k$,

$$J_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}}=1-J_{\overline{\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k}}=1-J_{\bigcap\limits_{k=1}^{n}\overline{A}_k}=1-\prod_{k=1}^{n}J_{\overline{A}_k}=1-\prod_{k=1}^{n}\left(1-J_{A_k}\right)$$

ligidan,

$$J_{\bigcup\limits_{k=1}^{n}A_k}=\sum_{k=1}^{n}J_{A_k}-\sum_{1\le k\le i\le n}J_{A_kA_i}+....+\sum_{1\le k\le i\le m\le m}J_{A_kA_iA_m}-\cdots+(-1)^{n-1}J_{A_1\cdots A_n}$$

(III.7.2)

hosil bo‘ladi.

ξ tasodifiy miqdorni indikatorlar orqali ifodalash mumkin. Agar $A_1+\cdots+A_n=\Omega$ bo‘linish berilgan bo‘lsa,

$$\xi=\xi(\omega)=\sum_{i=1}^{k}x_iJ_{A_i}(\omega) \qquad \text{(III.7.3)}$$

bo‘ladi (bu yerda x_i -lar ξ ning qabul qiladigan qiymatlari).

$P(\xi\in B)$ ehtimollikni B ning sonli funksiyasi sifatida, ξ ning taqsimot qonuni deb yuritiladi.

Agar $P\{\xi=x_i\}=P_i$ bo‘lsa, u holda bu **taqsimot qonunni** quyidagi 2-jadval orqali ifodalash mumkin:

2-jadval

ξ	x_1	x_2	x_3	. . . . .	x_k
P	P_1	P_2	P_3		P_k

bu yerda $\sum\limits_{i=1}^{k}P_i=1,\ x_1,x_2,..,x_k$ lar ξ tasodifiy miqdorning kiymatlari bo‘ladi va

$$P(\xi\in B)=\sum_{x_i\in B}P_i \qquad \text{(III.7.4)}$$

A hodisaning indikatori J_A ning taqsimot qonuni quyidagi jadvalda keltirilgan:

3-jadval

ξ	0	1
P	$1-P(A)$	$P(A)$

3-misol. Bernulli sxemasida n ta bog‘liqsiz tajribada A hodisaning μ marta ro‘y berish taqsimot qonuni

$$P(\mu=m)=C_n^m p^m(1-p)^{n-m}, \quad m=0,1,....,n$$

bo‘ladi.

Bunday taqsimotga binomial taqsimot qonun deyiladi.

4-misol. Yashikda M ta oq $N-M$ ta qora shar bo‘lgan holda, qayta qo‘ymaslik sharti bilan, $n-$ta shar olganda ulardan ξ tasining oq chiqish taqsimot qonuni

$$P(\xi=m)=\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \qquad m=0,1,.....,\min(n,M)$$

bo‘ladi. Bu taqsimot qonuniga *gipergeometrik taqsimot qonun* deyiladi.

5-misol.

$$P(\xi = m) = \frac{1}{N}, \qquad m = 1,2,...,N$$

ga *tekis taqsimlangan taqsimot qonun* deyiladi.

6-misol.

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \qquad \lambda > 0$$

ga λ – parametrli *Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan taqsimot qonun* deyiladi.

1- **ta’rif.** Ixtiyoriy x uchun

$$\{\xi \le x\} = \{\omega : \xi(\omega) \le x\} \in \mathrm{A}, \quad \omega \in \Omega, \qquad \text{(VII.21.1)}$$

o‘rinli bo‘lsa, $\xi = \xi(\omega)$ sonli funksiyaga (Ω, A, P) da aniqlangan uzluksiz tasodifiy miqdor deyiladi.

Demak, ξ ning son o‘qida $\{\xi \le x\}$ to‘plamga tushish ehtimollari to‘g‘risida gapirish mumkin bo‘lib, o‘z navbatida $\{\xi \le x\}$ hodisani tashkil qiladi. Quyida uning ehtimolligi to‘g‘risida so‘z boradi.

T**a’rif.** Barcha $x \in R$ da aniqlangan

$$F(x) = F_\xi(x) = P(\xi \le x) \qquad \text{(VII.21.2)}$$

funksiyani ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deyiladi.

(VII.21.2) formula yordamida ξ ning turli oraliqlarga tushish ehtimolligini hisoblash mumkin.

$x_1 < x_2$ bo‘lsin, u holda $\{\xi \le x_1\} + \{x_1 < \xi \le x_2\}$ dan

$$P(\xi \le x_2) = P(\xi \le x_1) + P(x_1 < \xi \le x_2), \qquad P(x_1 < \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1). \quad \text{(VII.21.3)}$$

$\{\xi < x\}$ hodisani birgalikda bo‘lmagan sanoqli hodisalar yig‘indisi orqali ifodalash mumkin:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ x - \frac{1}{n-1} < \xi \le x - \frac{1}{n} \right\},$$

bundan, (VII.21.3) ga asosan:

$$P\{\xi < x\} = \sum_{n=1}^{\infty} P\left\{ x - \frac{1}{n-1} < \xi \le x - \frac{1}{n} \right\} = F(x-1) + \lim_{N\to\infty} \sum_{n=2}^{N} (F(x - \frac{1}{n}) - F(x - \frac{1}{n-1})) =$$

$$\lim_{N\to\infty} F(x - \frac{1}{N}) = F(x-0). \qquad \text{(VII.21.4)}$$

Matematik tahlilda kiritilgan quyidagi

$$F(x-0) = \lim_{y\uparrow x} F(y), \qquad F(x+0) = \lim_{y\downarrow x} F(y),$$

$$F(+\infty) = \lim_{y\to\infty} F(y), \qquad F(-\infty) = \lim_{y\to\infty} F(y)$$

belgilashlarni hisobga olsak,

$$\begin{aligned} &P\{\xi = x\} = F(x) - F(x-0), \\ &P(x_1 \le \xi \le x_2) = F(x_2) - F(x_1 - 0), \\ &P(x_1 < \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1), \\ &P(x_1 \le \xi < x_2) = F(x_2 - 0) - F(x_1 - 0) \end{aligned} \qquad \text{(VII.21.5)}$$

bo‘ladi.

3.2**-mavzu Taksimot funksiya xossalari.Diskret tipdagi tasodifiy miqdor**

Reja

1. $F(x)$ **kamaymovchi,**

2.O‘ngdan uzluksiz, **(VII.21.6)**

3. $F(+\infty)=1$**,**

4. $F(-\infty)=0$**.**

Diskret tipdagi tasodifiy miqdor

O’rganadigan savollar. Diskret tasodifiu mikdor, uzluksiz tasodifiy mirdor,xossalar

Teorema. $F(x)$ taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $F(x)$ kamaymovchi,

2.O‘ngdan uzluksiz, (VII.21.6)

3. $F(+\infty)=1$,

4. $F(-\infty)=0$.

Isbot. 1) xossa (3) dan, 2) xossa uzluksizlik aksiomasidan kelib chiqadi, chunki $B_n=\left\{x<\xi\le x+\frac{1}{n}\right\}\downarrow$ bundan $P(B_n)=F(x+\frac{1}{n})-F(x)\to 0,$ ya’ni $F(x+0)=F(x).$

3) va 4) xossalarni isbotlash uchun additivlik xossasidan foydalanamiz:

$$\Omega=\sum_{n=-\infty}^{\infty}A_n,\quad A_n=\{\omega: n-1<\xi(\omega)\le n\}$$

dan

$$1=P(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}P(A_n)=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N+1}^{N}P(A_n)=\lim_{N\to\infty}(F(N)-F(-N))$$

va demak,

$$F(\infty)=\lim_{N\to\infty}F(N)=1,\qquad F(-\infty)=\lim_{N\to\infty}F(-N)=0.$$

Ta’rif. $x_1<x\le x_2$intervallar yuzaga keltirgan B $\sigma-$algebra tashkil qilgan sonli to‘plamga va B ga kirgan B to‘plamlarga Borel to‘plami deyiladi.

Ishonch hosil kilish mumkinki, $(x_1,x_2]$ yarim intervalllardan tashkil topgan B_0 B $\sigma-$algebrani yuzaga keltiradi. Agar $F_\xi(x)$ taqsimot funksiya berilgan bo‘lsa, $P_\xi(B)=P\{\xi\in B\},\quad B\in\mathsf{B}_0$ ni aniqlash mumkin.

Shunday qilib, $\xi=\xi(\omega)$ tasodifiy miqdor Ω ni R ga akslantiradi, natijada yangi (R,B,P_ξ) ehtimollar fazosi hosil bo‘ladi.

$P\{\xi=x\}=F(x)-F(x-0)$ dan x uzilish nuqtasida $P\{\xi=x\}>0$kelib chiqadi.

Har bir butun n da, ko‘pi bilan, n tadan ko‘p bo‘lmagan x uchun $P(\xi=x)\ge\frac{1}{n}$ ligidan $F(x)$ funksiya, ko‘pi bilan, sanoqli nuqtada uzilishga ega bo‘ladi.

Ta'rif. $F_\xi(x)$ ning barcha uzilish nuqtalari $x_1, x_2, ...x_n, ...$ bo'lsa va $P\{\xi = x_k\} = P_k$, $\sum_{r=1}^{\infty} P_k = 1$ bajarilsa, u holda, ξ tasodifiy miqdorga diskret tasodifiy miqdor deyiladi.

Bunday tasodifiy miqdorlarga Binomial, Puasson, Geometrik taqsimotga ega bo'lgan tasodifiy miqdorlarni misol keltirish mumkin:

1) Binomial $P(\xi = k) = C_n^k P^k (1-P)^{n-k}$, $k = 0,1,...,n$, $0 < P < 1$;
2) Puasson $P(\xi = k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}$, $k = 0,1,....,..$ $0 < a$ $a > 0$,
3) Geometrik $P(\xi = k) = p(1-p)^k$, $k = 0,1,....,..$ $0 < p < 1$.

3.3-MAVZU. UZLUKSIZ TIPDAGI TASODIFIY MIQDORLAR

REJA **1. UZLUKSIZ TIPDAGI TASODIFIY MIQDORLAR**

2.ZICHLIK FUNKSIYA

O'RGANADIGAN SAVOLLAR

$$P\{x_1 < \xi < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} P_\xi(x)dx \qquad \text{(VII.22.1)}$$

bajarilsa, $P_\xi(x)$ funksiyaga ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deyiladi.

(VII.22.1) dan $P_\xi(x)$ ning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

$P_\xi(x)$ ning uzluksizlik nuqtalarda:

1. $F_\xi^{'}(x) = P_\xi(x)$;
2. $F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x} P_\xi(u)du$;
3. $F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} P_\xi(u)du$, $.x_1 < x_2$;
4. $P_\xi(x) \geq 0$;
5. $\int_{-\infty}^{\infty} P(x)dx = 1$.

Ta'rif. Agar ξ tasodifiy miqdor uchun $P_\xi(x)$ mavjud bo'lsa, u holda ξ tasodifiy miqdor absolyut uzluksiz taqsimotga ega deyiladi.

Quyida uzluksiz taqsimot funksiya mavjud, lekin uning zichlik funksiyasi mavjud bo'lmagan misolni keltiramiz:

$$F(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0,\\ \frac{1}{2}F(3x), & 0<x\le\frac{1}{3},\\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}<x\le\frac{2}{3},\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}F(3x-2), & \frac{2}{3}<x\le 1,\\ 1, & x>1. \end{cases}$$

Bunday taqsimot funksiyaga singulyar taqsimot funksiya deyiladi.

teorema. Agar B Borel* to'plam bo'lsa, u holda unda aniqlangan $q(\xi)$ funksiya tasodifiy miqdor (tasodifiy funksiya) bo'ladi.

Isbot. $\eta=\eta(\omega)$ ni $\eta=q(\xi(\omega))$ murakkab funksiya sifatida kiritamiz. $B\in \mathsf{B}$ deb olsak, u holda $q(x)$ Borel to'plamida aniqlangani uchun $q^{-1}(B)=B_1\in \mathsf{B}$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan $\eta^{-1}(B)=\xi^{-1}(B_1)\in \mathsf{A}$ bo'lgani uchun η tasodifiy miqdordir. Teorema isbot bo'ldi.

misol. $q(x)=x^2$, $F_\xi(x)$, $P_\xi(x)$ mavjud bo'lib, $\eta=\xi^2$ bo'lsin. η tasodifiy miqdorning taqsimot va zichlik funksiyalarini aniqlang.

Yechish. $F_\eta(x)=P(\eta\le x)=P(\xi^2\le x)=P(-\sqrt{x}<\xi\le\sqrt{x})=F_\xi(\sqrt{x})-F_\xi(-\sqrt{x})$

va

$$P_n(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}(P_\xi(\sqrt{x})+P_\xi(-\sqrt{x}))$$

bo'ladi.

3.3-mavzu . Ba`zi muhim taqsimotlar. Ko'p o'lchovli taqsimotlar. Tasodifiy miqdorlardan olingan funksiyalarning taqsimotlari,kompozitsion formylalar.va xossalari

Reja.

1.Gaus taksimoti

2.Tekis taksimot

3. Gamma taksimoti

4.Ekponensialqonun bo'yicha taksimlangan tasodifiy miqdor

O'RGANADIGAN SAVOLLAR

BOGLIRSIZ TASODIFIY MIKDORLAR, IKKI O'LCHOVLI NORMAL KONUN

Misol. (***Normal yoki Gauss taqsimoti***). Zichlik funksiyasi (Taqsimot funkiyasi) ushbu

$$P_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\qquad \left(F_\xi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx\right)$$

---

* Armand Borel (1923-) – Amerikalik matematik.

funksiyadan iborat tasodifiy miqdorga (a,σ), $(-\infty < a < \infty,\ \sigma > 0)$ parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Agar $a=0, \sigma=1$ bo‘lsa, u holda bu taqsimotga standart normal taqsimot deyiladi.

misol. Zichli funksiyasi (Taqsimot funkiyasi) ushbu

$$P_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a<x\le b,\\ 0, & x\overline{\in}[a,b)\end{cases}\qquad \left(F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x\le a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a<x\le b,\\ 1, & x>b\end{cases}\right)$$

funksiyadan iborat tasodifiy miqdorga $[a,\ b]$ kesmada tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

4-misol. Zichlik funksiyasi quyidagi

$$P_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ \dfrac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\cdot e^{-\lambda x}, & x\ge 0,\end{cases}$$

($\alpha>0,\ \lambda>0,\quad \Gamma(\alpha)$-gamma funksiya) funksiyadan iborat tasodifiy miqdorga gamma-taqsimot deyiladi.

5-misol. Taqsimot funksiyasi (Zichlik funksiyasi) ushbu

$$F_\xi(x)=\begin{cases}1-e^{-\alpha x}, & x\ge 0,\quad \alpha>0,\\ 0, & x<0\end{cases}\qquad \left(P_\xi(x)=\begin{cases}\alpha e^{-\alpha x}, & x\ge 0,\\ 0, & x<0\end{cases}\right)$$

funksiyadan iborat tasodifiy miqdorga eksponensial qonun bo‘yicha taksimlangan tasodifiy miqdor deyiladi.

Misollar

Betta taksimot, Koshi taksimiti

SFERIK NORMAL TAQSIMOT

Ta’rif. $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi

$$P_\xi(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{k}{2}}\sigma^k}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{l=1}^{k}x_l^2} \qquad \text{(XV.42.1)}$$

ko‘rinishda bo‘lsa, u holda ξ sferik normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

χ^2-TAQSIMOT

$\sigma=1$ bo‘lgan sferik normal taqsimotni qaraymiz. Quyidagi tasodifiy miqdorning

$$\chi_k^2=\xi_1^2+\dots+\xi_k^2$$

taqsimot qonunini topamiz.

$x < \chi_k < x + dx$ hodisaning zichlik funksiyasini (XV.42.1) formuladan topamiz. $\sigma = 1$ bo‘lgan holda, (XV.42.1) ni integrallab

$$P_{\chi_k}(x) = C_k x^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

funksiyani hosil qilamiz, C_k ni topish uchun zichlik funksiya xossasidan foydalanamiz: $\int_0^\infty P_{\chi_k}(x)dx = 1$, bundan

$$C_k \int_0^{+\infty} x^{k-1} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 2^{\frac{k}{2}-1} \Gamma\left(\frac{k}{2}\right) C_k = 1 .$$

Natijada

$$P_{\chi_k}(x) = \frac{x^{k-1}}{2^{\frac{k}{2}-1}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad x \geq 0 \qquad \text{(XV.43.1)}$$

$P_{\chi_k}(x)$ va $P_{\chi_k^2}(x)$ lar orasidagi munosabatdan

$$P_{\chi_k^2}(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} P_{\chi_k}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{x^{\frac{k}{2}-1}}{2^{\frac{k}{2}}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x \geq 0 \qquad \text{(XV.43.2)}$$

(XV.43.2) funksiyaga ozodlik darajasi k bo‘lgan χ^2 taqsimotning zichlik funksiyasi deyiladi.

Xususan, $k = 2$ da zichlik funksiya $\frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \geq 0$ bo‘ladi.

$k = 3$ bo‘lganda, (XV.43.1) dan *Maksvel taqsimoti* deb ataluvchi taqsimot hosil bo‘ladi, bunda zichlik funksiya gazlarning kinetik nazariyasini, taqsimoti esa zarracha tezligini ifodalaydi.

STYUDENT TAQSIMOTI

$(0, 1)$ parametrli normal taqsimlangan bog‘liqsiz, $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ tasodifiy miqdor berilgan bo‘lib,

$$\tau_k = \frac{\xi_0}{\sqrt{\frac{1}{k}\sum_{\alpha=1}^{k} \xi_k^2}} \qquad \text{(XV.44.1)}$$

bo‘lsin.

Bu tasodifiy miqdorning taqsimotiga ozodlik darajasi k bo‘lgan styudent qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi, uning zichlik funksiyasi

$$S_k(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{k\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad -\infty < x < \infty \qquad \text{(XV.44.2)}$$

bo‘ladi.

Agar (XV.44.2) da $k \to \infty$ bo‘lsa, u holda

$$S_k(x) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

bo‘ladi.

F-TAQSIMOT

$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_p$ va $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_q$ tasodifiy miqdorlar $(0, 1)$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsin, u holda

$$F_{pq} = \frac{\frac{1}{p}\sum_{\alpha=1}^{p}\xi_\alpha^2}{\frac{1}{q}\sum_{\beta=1}^{q}\eta_\beta^2}$$

tasodifiy miqdorning taqsimot qonuniga F-Fisher taqsimoti deyiladi.

Fisher taqsimotining zichlik funksiyasi ushbu

$$p^{\frac{p}{2}} q^{\frac{q}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q}{2}\right)} \cdot \frac{x^{\frac{p}{2}-1}}{(q+xp)^{\frac{p+q}{2}}}, \; x \geq 0$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Foydalaniladigan asosiy darslıklar va o’quv qo’llanmalar ro’yhati

Asosiy adabiyotlar

44. Sh. Mirziyoyev Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent “O’zbekiston” 2017. 488 b.
45. Sh. Mirziyoyev Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta’minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O’zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganligining 24 yilligiga bag’ishlangan tantanali marosimdagi ma’ruza. 2016-yil 7-dekabr. Toshkent - “O’zbekiston” - 2017. 32 b.
46. Ш.Мирзиёев Танқидий тахлил, қатъий тартиб – интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Тошкент – “Ўзбекистон” 2017.
47. Ш.Мирзиёев Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ. Тошкент – “Ўзбекистон”. 2016. 56 б.

7 Ш.Қ.Форманов “Эҳтимолликлар назарияси”, Тошкент “Университет” 2014 й.
6.Ross, Sheldon M. A first course in probability. Pearson Education, Inc. 2010.
7.Robert B. Ash Basic probability theory. Dover Publications, Inc. 2008.

Qo’shimcha adabiyotlar

48. А.А.Абдушукуров, Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, ЎзМУ, 2010 й.
49. А.А.Абдушукуров, Т.М.Зупаров, “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика”, Тафаккур Бўстони, 2015 й.

50. А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» Тошкент, «Университет», 2003 й.
51. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
52. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
53. Б.А.Севастьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
54. С.Ҳ.Сирожиддинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
55. Севастянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
56. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука»,1989 г.
57. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.

11. Mamatov M., Ibragimov R., Mashrabboev A., Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistika.T., 2008 y

12. Ibragimov R..,Mashrabboev A. Polvanov R. Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistikadan masalalar to'plamiми, Namangon 2018y.

Internet saytlari

58. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали.
59. www.lex.uz -Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
60. http://www.rsl.ru
61. https://www.khanacademy.org/math/probability
62. http://www.msu.ru
63. http://sunzi.lib.hku.hk/ER/subject/hkul/510/ej/1
64. http://www.nlr.ru
65. http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/business-stat/R.htm

4-MAVZU-6 SOAT

TASODIFIY MIQDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI

4.1.-MAVZY TASODIFIY MIKDORLARNING SONLI XARAKTERISTIKALARI.

MATEMATIK KUTILMA

REJA

1. **MATEMATIK KUTILMA,**
2. **MATEMATIK RUTILMA XJSSALARI**

O'rganadigan savollar.

Boshlang'ich momentlar.Markaziy momentlar

Koshi taksimoti matematik kutilmasi mavjudmi

. Agar $p(\omega)$ chekli $(\Omega, \mathrm{A}, \mathrm{P})$ ehtimollar fazosidan olingan bo'lib,

$$\sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega)=M\xi$$

qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $M\xi$ ga ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi deyiladi.

Xususan $q(\xi)=\xi^n$ bo‘lsa,

$$M\xi^n = \sum_{i=1}^{k} x_i^{\,n} P(\xi = x_i),$$

$$M|\xi|^n = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^n P(\xi = x_i).$$

$M\xi^n$ ga ξ tasodifiy miqdorning $n-$nchi momenti, $M|\xi|^n$ ga esa $n-$nchi absolyut moment, $M(\xi - M\xi)^n$ ga $n-$nchi markaziy moment, $M|\xi - M\xi|^n$ ga $n-$nchi absolyut markaziy moment deyiladi.

Ikkinchi tartibli markaziy momentga ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi deyiladi va

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

kabi belgilanadi.

$\sqrt{D\xi}$ ga esa o‘rta kvadratik og‘ish deyiladi.

Faraz qilaylik, chekli $[a,b]$ intervalda aniqlangan $f(x)$ funksiya va shu intervalda aniqlangan, variasiyasi chekli bo‘lgan, kamaymovchi $F(x)$ funksiya berilgan bo‘lsin. Aniqlik uchun, $F(x)$ chapdan uzluksiz bo‘lsin, - deb faraz qilamiz. $[a,b]$ intervalni x_i $\left(i=\overline{0,n}\right)$ nuqtalar yordamida quyidagicha

$$a = x_0 < x_1 < .... < x_n = b$$

n ta bo‘lakka bo‘lamiz va ushbu

$$I_n = \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_n})|F(x_i) - F(x_i - 1)| \qquad \text{(IX.25.1)}$$

yig‘indini tuzamiz, bu yerda (x_{i-1}, x_i) nuqta $\bar{x}_i$ intervalga tegishli ixtiyoriy nuqtadir.

Endi, bo‘linish nuqtalarining sonini shunday ortiramizki, xususiy intervallardan eng kattasining (maksimumining) uzunligi nolga intilsin.

Ta’rif. Agar, I_n yig‘indi quyidagi

$$I = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\overline{x_n})|F(x_i) - F(x_i - 1)|$$

chekli limitga intilsa, bu limitni $f(x)$ funksiyadan $F(x)$ integrallovchi funksiya bo‘yicha olingan Stiltes* integrali deyiladi va

$$I = \int_a^b f(x)dF(x)$$

kabi belgilanadi.

Integral chegaralari cheksiz bo‘lgandagi Stiltesning xosmas integrali ham odatdagicha aniqlanadi:

Agar

$$\lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to\infty}} \int_a^b f(x)dF(x)$$

---

* Tomas Ioannes Stiltes (1856-1894) – Niderlandiyalik matematik.

mavjud bo‘lsa, bu limitni $f(x)$ funksiyadan $F(x)$ funksiya bo‘yicha $\left]-\infty,+\infty\right[$ oraliqda olingan Stiltes integrali deyiladi va

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dF(x)$$

O’rganadigan savollar. Yukori tartibli momentlar

Matematik kutilma xossalari

Matematik kutilma quyidagi xossalarga ega.

1) $MJ_A = P(A)$.

Haqiqatan ham,

$$MJ_A = \sum_{\omega\in\Omega} J_A(\omega)P(\omega) = \sum_{\omega\in A} P(\omega) = P(A).$$

2) Additivlik

$$M(\xi+\eta) = M\xi + M\eta,$$

chunki

$$M(\xi+\eta) = \sum_{w\in\Omega}(\xi(\omega)+\eta(\omega))P(\omega) = \sum_{\omega\in\Omega}\xi(\omega)P(\omega) + \sum_{\omega\in\Omega}\eta(\omega)P(\omega) = M\xi + M\eta.$$

Matematik induksiya usulini qo‘llab,

$$M(\xi_1+\xi_2+....+\xi_n) = M\xi + ...+ M\xi_n$$

bo‘lishini ko‘rsatish mumkin.

3)Ixtiyoriy S o‘zgarmas son uchun

$$MC\xi = CM\xi, \qquad MC = C.$$

4) Agar $\xi \ge \eta$ bo‘lsa, $M\xi \ge M\eta$ va $\xi \ge 0$ bo‘ladi va $M\xi = 0$ bo‘lsa, $P(\xi = 0) = 1$ bo‘ladi.

<u>Isbot</u>. $M(\xi-\eta) = \sum_{\omega}(\xi(\omega)-\eta(\omega))P(\omega)$ va $\xi \ge \eta$ ligidan $M(\xi-\eta) \ge 0$; oxirgi tengsizlik va 2),3) xossalardan $M\xi \ge M\eta$ kelib chiqadi.

Agar $\xi \ge 0$ va $M\xi = 0$ bo‘lsa, u holda $\omega \in \Omega$

$$\xi(\omega)p(\omega) = 0, \qquad p(\omega) > 0 \Rightarrow \xi(\omega) = 0.$$

5) $M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i P(\xi = x_i)$.

Haqiqatan ham,

$$\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i J_{\xi = x_i}$$

bo‘lgani va 1), 2), 3) lardan

$$M\xi = \sum_{i=1}^{k} x_i MJ_{\xi=x_i} = \sum_{i=1}^{k} x_i P(\xi = x_i).$$

<u>7-misol.</u> Binomial qonun bilan taksimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. ξ orqali A hodisaning n ta o‘zaro bog‘liqmas tajribalarda ro‘y berish sonini belgilansa,

$$P(\xi = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$$

tenglik o‘rinli ekani bizga ma’lum.

Matematik kutilmaning ta’rifiga ko‘ra

$$M\xi = \sum_{k=1}^{n} kP(\xi = k) = \sum_{k=1}^{n} kC_n^k p^k q^{n-k} = np\sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np .$$

8-misol. $\lambda-$parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping.

Yechish. Ma’lumki

$$P(\xi = k) = \frac{\lambda^k e^{-k}}{k!}, \qquad k = 0,1,2,....$$

Ta’rifga ko‘ra

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \lambda .$$

Demak, λ parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi λ parametrga teng ekan.

Agar $q(x)$ sonli funksiya bo‘lsa, u holda, x o‘rniga ξ ni qo‘ysak $\eta = q(\xi)$ tasodifiy miqdor (tasodifiy funksiya) hosil bo‘ladi, u holda matematik kutilma ta’rifiga ko‘ra

$$M\eta = Mq(\xi) = \sum_{i=1}^{k} q(x_i)P(\xi = x_i).$$

1-misol. Agar ξ tasodifiy miqdor (a,σ) parametrli normal taqsimlangan bo‘lsa, u holda $\frac{\xi - a}{\sigma} = \eta$ ning matematik kutilmasi va dispersiyasini hisoblang (η - ni markazlashgan va normallashgan tasodifiy miqdor deyiladi).

Yechish. So‘ralgan matematik kutilma va dispersiya quyidagicha topiladi:

$$M\eta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{x^2}{2}}dx = 0, \qquad M\xi = a,$$

$$D\eta = M\eta^2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{x^2}{2}}dx = -\frac{xe^{-\frac{x^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = 1; \qquad D\xi = \sigma^2,$$

bu yerda $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{2\pi}$.

2-misol. $[a,b]$ da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi va dispersiyasini toping.

Yechish. O‘rta qiymat va dispersiyani topish formulalaridan foydalansak:

$$M\xi = \frac{1}{b-a}\int_a^b xdx = \frac{a+b}{2},$$

Foydalaniladigan asosiy darslиклar va o’quv qo’llanmalar ro’yhati

Asosiy adabiyotlar

66. Sh. Mirziyoyev Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent “O’zbekiston” 2017. 488 b.

67. Sh. Mirziyoyev Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganligining 24 yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi ma'ruza. 2016-yil 7-dekabr. Toshkent - "O'zbekiston" - 2017. 32 b.
68. Ш.Мирзиёев Танқидий тахлил, қатъий тартиб – интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Тошкент – "Ўзбекистон" 2017.
69. Ш.Мирзиёев Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига бағишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ. Тошкент – "Ўзбекистон". 2016. 56 б.

8 Ш.Қ.Форманов "Эҳтимолликлар назарияси", Тошкент "Университет" 2014 й.
6.Ross, Sheldon M. A first course in probability. Pearson Education, Inc. 2010.
7.Robert B. Ash Basic probability theory. Dover Publications, Inc. 2008.

Qo'shimcha adabiyotlar

70. А.А.Абдушукуров, Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, ЎзМУ, 2010 й.
71. А.А.Абдушукуров, Т.М.Зупаров, "Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика", Тафаккур Бўстони, 2015 й.
72. А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» Тошкент, «Университет», 2003 й.
73. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
74. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
75. Б.А.Севастьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
76. С.Ҳ.Сирожиддинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
77. Севастянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
78. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука»,1989 г.
79. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
11. Mamatov M., Ibragimov R., Mashrabboev A., Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistika.T., 2008 y
12. Ibragimov R..,Mashrabboev A. Polvanov R. Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistikadan masalalar to'plamiмi, Namangon 2018y.

Internet saytlari

80. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали.
81. www.lex.uz -Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
82. http://www.rsl.ru
83. https://www.khanacademy.org/math/probability
84. http://www.msu.ru

85. http://sunzi.lib.hku.hk/ER/subject/hkul/510/ej/1
86. http://www.nlr.ru
87. http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/business-stat/R.htm

4.2-Mavzy Dispersiya va xossalari

Reja

1.Dispersiya

2.Dispersiya xossalari

3.Misollar

Asosy iboralar. Dispersiya xossalar, Iensen tengsizligi. Lyapunov tengsizligi.
Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.

Agar $q(x)$ sonli funksiya bo‘lsa, u holda, x o‘rniga ξ ni qo‘ysak $\eta = q(\xi)$ tasodifiy miqdor (tasodifiy funksiya) hosil bo‘ladi, u holda matematik kutilma ta’rifiga ko‘ra

$$M\eta = Mq(\xi) = \sum_{i=1}^{k} q(x_i)P(\xi = x_i).$$

Xususan $q(\xi) = \xi^n$ bo‘lsa,

$$M\xi^n = \sum_{i=1}^{k} x_i^{\,n} P(\xi = x_i),$$

$$M|\xi|^n = \sum_{i=1}^{k} |x_i|^n P(\xi = x_i).$$

$M\xi^n$ ga ξ tasodifiy miqdorning $n-$nchi momenti, $M|\xi|^n$ ga esa $n-$nchi absolyut moment, $M(\xi - M\xi)^n$ ga $n-$nchi markaziy moment, $M|\xi - M\xi|^n$ ga $n-$nchi absolyut markaziy moment deyiladi.

Ikkinchi tartibli markaziy momentga ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi deyiladi va

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2$$

kabi belgilanadi.

$\sqrt{D\xi}$ ga esa o‘rta kvadratik og‘ish deyiladi.

Dispersiya quyidagi xossalarga ega bo‘ladi:

1) $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$.

Haqiqatdan ham

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2 = M\left(\xi^2 - 2M(\xi \cdot M\xi) + (M\xi)^2\right) = M\xi^2 - 2M\xi M\xi + (M\xi)^2 = M\xi^2 - (M\xi)^2.$$

2) $D\xi \geq 0$ va $D\xi = 0$ bo‘lishi uchun shunday C o‘zgarmas mavjud bo‘lishi kerakki, $P(\xi = C) = 1$ bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu tasdiqning isboti matematik kutilma xossasidan kelib chiqadi.

3) Ixtiyoriy C uchun

$$D(C\xi) = C^2 D\xi, \qquad D(\xi + C) = D\xi$$

o‘rinlidir.

9-misol. Binomial qonun bilan taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. Ma'lumki $M\xi = np$, demak

$$D\xi = \sum_k k^2 C_n^k p^k q^{n-k} - (np)^2 = np\left[(n-1)p\sum_k^n C_{n-2}^{n-2} p^{k-2} q^{n-x} + \sum_k^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k}\right] -$$

$$-(np)^2 = np((n-1)p+1) - (np)^2 = npq\,.$$

10-misol. Puasson qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodfiy miqdorning dispersiyasini toping.

Yechish. Ma'lumki $M\xi = \lambda$. Buni e'tiborga olsak, ta'rifga ko'ra

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{m!} - \lambda^2 = \lambda \sum_{k=1}^{\infty} k \frac{\lambda^{k-1} e^{-\lambda}}{(k-1)!} - \lambda^2 = \lambda\left[\sum_{m=0}^{\infty} m \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}\right] - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda$$

.

Quyidagi tengsizliklarni isbotsiz keltiramiz:

Iensen tengsizligi.

$$Mq(\xi) \geq q(M\xi).$$

Lyapunov tengsizligi.

$$\left(M|\xi|^{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leq \left(M|\xi|^{\beta}\right)^{\frac{1}{\beta}}, \qquad \alpha < \beta\,.$$

3.3-mavzu.Yukori tartibli momentlar

Reja

1.Yukori tartibli momentlar

2. Korrelyatsiya koefisienti

.

O'rganadigan savollar Assimetriya,eksses,Yukori tartibli momentlar ,

$P_{\xi}(x)$ zichlik funksiya mavjud bo'lsa, tasodifiy $q(\xi)$ funksiyaning matematik kutilmasi quyidagicha

$$Mq(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} q(x) P_{\xi}(x) dx$$

bo'ladi.

Odatdagidek, diskret tasodifiy miqdor va uning funksiyasi uchun matematik kutilmalar quyidagidek **Koshi- Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.**

$|M(\xi\eta)| \leq \sqrt{M\xi^2 M\eta^2}$ **Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi.**

.

FAKTORIAL MOMENTLAR

Hosil qiluvchi funksiya ξ tasodifiy miqdorning momentlarini hisoblashning kulay usulini ishlatishga imkon yaratadi.

ξ ning $r-$nchi faktorial momenti deb

$$M\xi^{[r]} = M\xi(\xi-1)...(\xi-r+1)$$

ifodaga aytiladi (bu yerda $[r]$ - r soning butun qismi).

Xususan, $M\xi^{[2]} = M\xi^2 - M\xi$ yoki

$$M\xi^2 = M\xi^{[2]} + M\xi, \quad D\xi = M\xi^{[2]} + M\xi - (M\xi)^2.$$

Agar $r > 1$ bo‘lsa, u holda

$$\varphi_\xi^{(r)}(1) = \sum_n n^{[r]} P_n. \qquad \text{(X.28.1)}$$

Agar $|s| \le 1$ bo‘lsa,

$$\lim_{s\uparrow 1} \varphi^{(r)}(s) = \sum_n n^{[r]} P_n$$

bo‘ladi. (X.28.1) ifodaning ikkala tomoni cheksiz bo‘lishi mumkin.

$M\xi$ va $D\xi$ ni $\varphi_S^{(r)}$ (X.27.1) orqali quyidagicha ifodalaymiz:

$$M\xi = \varphi'_\xi(1), \; D\xi = \varphi''_\xi(1) + \varphi'_\xi(1) - (\varphi'_\xi(1))^2.$$

4-misol. Hosil qiluvchi funksiya yordamida Binomial, Puasson va Geometrik qonun bo‘yicha taqsimlanagan tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi va dispersiyalari topilsin.

Yechish.

Binomial qonun uchun:

$$\varphi'_\xi(s) = np(ps+q)^{n-1}, \qquad \varphi_\xi''(s) = n(n-1)p^2(ps+q)^{n-2},$$

$$M\xi = np, \quad D\xi = n(n-1)p^2 + np - n^2p^2 = npq.$$

Geometrik qonun uchun:

$$\varphi'_\xi(s) = \frac{pq}{(1-qs)^2}, \qquad \varphi''_\xi(s) = \frac{2pq}{(1-qs)}, \qquad M\xi = \frac{q}{p}, \quad D\xi = \frac{2q^2}{p^2} + \frac{q}{p} - \frac{q^2}{p^2} = \frac{q}{p^2}.$$

Puasson qonuni uchun:

$$\varphi_\xi'(s) = ae^{a(s-1)}, \qquad \varphi''_\xi(s) = a^2e^{a(s-1)}, \qquad M\xi = a, \quad D\xi = a^2 + a - a^2 = a.$$

Xususan, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ tasodifiy vektorning koordinatalari butun qiymatli tasodifiy miqdorlar bo‘lsa, u holda, uning hosil qiluvchi funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$$\varphi_\xi(s_1, s_2, \ldots, s_n) = Ms_1^{\xi_1} \cdots s_n^{\xi_n} = \sum_\alpha p_\alpha s_1^{\alpha_1} \cdots s_n^{\alpha_n}, \qquad p_\alpha = p(\xi = \alpha),$$

bu yerda $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$.

ξ ning faktorial momenti

$$M\xi_1^{[K_1]} \ldots \xi_n^{[K_n]} = \left.\frac{\partial^{K_1 + \ldots + K_n} \varphi_\xi(s_1, \ldots, s_n)}{\partial s_1^{K_1} \ldots \partial s_n^{K_n}}\right|_{s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 1}.$$

5.MISOL. POLINOMIAL QONUN BO‘YICHA TAQSIMLANGAN TASODIFIY MIQDORNING HOSIL QILUVCHI FUNKSIYASINI TOPING.

Yechish. Polinomial taqsimot

$$P(\xi = \alpha) = \frac{n!}{\alpha_1! \cdots \alpha_r!} P_1^{\alpha_1} \cdots P_r^{\alpha_r}, \qquad \alpha_1 + \ldots + \alpha_r = n, \qquad p_1 + p_2 + \ldots + p_r = 1$$

ning hosil qiluvchi funksiyasi

$$\varphi_\xi(s_1, \ldots, s_r) = (p_1 s_1 + \ldots + p_r s_r)^n$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

1-teorema. Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ lar bog‘liqsiz butun qiymatli tasodifiy miqdorlar bo‘lib, $\varphi_{\xi_k}(s)$ hosil qiluvchi funksiya bo‘lsa, u holda

$$\varphi_{\xi_1+....+\xi_n}(s)=\prod_{k=1}^{n}\varphi_{\xi_k}(s)$$

munosabat o‘rinli.

Isbot.

$$Ms^{\xi_1+....+\xi_n}=Ms^{\xi_1}\cdots s^{\xi_n}=\prod_{k=1}^{n}Ms^{\xi_k}.$$

Xususan, ξ va η bog‘liqsiz va $p_n=p(\xi=n)$, $q_n=p(\eta=n)$ bo‘lib, $r_n=p(\xi+\eta=n)$ deyilsa, u holda

$$r_n=\sum_{k=0}^{n}p(\xi=k)p(\eta=n-k)=\sum_{k=0}^{n}p_k q_{n-k} \qquad \text{(X.28.2)}$$

bo‘ladi.

r_n ning taqsimot qonuni (X.28.2) ga p_n va q_n larning kompozisiyasi deyiladi.

1-teorema orqali ham ikkita tasodifiy miqdorning kompozisiyasini hisoblash mumkin:

$$(ps+q)^{n_1}(ps+q)^{n_2}=(ps+q)^{n_1+n_2}.$$

Bundan, ikkita binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning kompozisiyasi yana binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lishi kelib chiqadi.

Xuddi shunday, Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan ξ va η lar yig‘indisi yana Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

6-misol. $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ butun qiymatli, bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar, butun qiymatli v tasodifiy miqdorga bog‘liq bo‘lmasin.

$\varphi_v=\xi_1+...+\xi_v \quad v\geq 1$ ning (tasodifiy sondagi tasodifiy miqdorlar yig‘indisi) hosil qiluvchi funksiyasini toping.

Yechish.

$$M\left\{s^{\xi_1+....+\xi_v}\setminus v=n\right\}=\left[MS^{\xi_i}\right]^n=\left(\varphi_\xi(s)\right)^n,$$

$$\varphi_{\xi_v}(s)=Ms^{\xi_v}=M\left(Ms^{\xi_v}/v\right)=M\left(\varphi_\xi(s)\right)^v=\varphi_v\left(\varphi_\xi(s)\right).$$

7-misol. 6-misolda $D\xi_v$ larni toping.

Yechish.

$$\varphi'_{\xi_v}(s)=\varphi'_v\left(\varphi_\xi(s)\right)\cdot\varphi'_\xi(s),\qquad \varphi'_{\xi_v}(1)=\varphi'_v(1)\quad\varphi'_\xi(1),$$

$$\varphi''_{\xi_v}(1)=\varphi''_v\left(\varphi'_\xi(1)\right)^2+\varphi'_v(1)\quad\varphi''_\xi(1).$$

Bundan

$$M\xi_v=Mv\cdot M\xi,$$

$$D\xi_v=Dv\cdot(M\xi)^2+MvD\xi.$$

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz:

2-teorema. Agar $\varphi_r(s)$ hosil qiluvchi funksiyalar ketma-ketligi bo‘lsa, $r=1,2,...$, u holda

$$\varphi_r(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n^{(r)}s^n\to\varphi(s)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n s^n,\qquad r\to\infty$$

bajarilishi uchun

$$\lim_{r\to\infty}P_n^{(r)}=p_n$$

ifodaning o‘rinli bo‘lishi zarur va yetarlidir.

8-misol. Binomial taqsimot qonunining hosil qiluvchi funksiyasi $p=\frac{a}{n}$ uchun quyidagiga teng:

$$\left(s\frac{a}{n}+1-\frac{a}{n}\right)^n=\left(1+\frac{a}{n}(s-1)\right)^n.$$

Bu munosabatdan foydalanib, Puasson teoremasini isbotlang.

Yechish. Ushbu

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a}{n}(s-1)\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{a(s-1)}{n}\right)^{\frac{n}{a(s-1)}\cdot a(s-1)}=e^{a(s-1)}$$

tenglikdan, 2-teoremaga asosan

$$\lim_{n\to\infty}C_n^m\left(\frac{a}{n}\right)^m\left(1-\frac{a}{n}\right)^{n-m}=\frac{a^m}{m!}\cdot e^{-a},$$

bu esa Puasson teoremasini isbot etadi.

Bu erda

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k P(\xi = x_k),$$

eerda

$$Mq(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} q(x_k) P(\xi = x_k).$$

Хусусан, барча мумкин бўлган қийматлар (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$D[\varphi(x)] = \int_a^b (\varphi(x) - M[\varphi(x)]^2 f(x)\,dx$$

ёки

$$D[\varphi(x)] = \int_a^b \varphi^2(x) f(x)dx - [M[\varphi(X)]]^2.$$

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг k-тартибли бошланғич назарий моменти

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx$$

тенглик билан аниқланади.

X узлуксиз тасодифий миқдорнинг k-тартибли марказий назарий моменти

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^k f(x)\,dx$$

тенглик билан аниқланади.

Хусусан, агар барча мумкин бўлган қийматлар (a, b) интервалга тегишли бўлса, у ҳолда

$$\nu_k = \int_a^b x^k f(x)\,dx; \quad \mu_k = \int_a^b (x - M(X))^k f(x)\,dx.$$

Равшанки, агар $k=1$ бўлса, у ҳолда $\nu_1 = M(X)$, $\mu_1 = 0$; агар $k=2$ бўлса, у ҳолда $\mu_2 = D(X)$.

Марказий моментлар бошланғич моментлар орқали қуйидаги формулалар билан ифодаланади:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2,$$
$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3,$$
$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

275. X тасодифий миқдор $(0; 1)$ интервалда $f(x) = 2x$ дифференциал функция билан берилган; бу интервалдан ташқарида $f(x) = 0$. X миқдорнинг математик кутилишини топинг.

Ечилиши. Ушбу формуладан фойдаланамиз:

$$M(X) = \int_a^b x f(x)\,dx.$$

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar ro'yhati

Asosiy adabiyotlar

88. Sh. Mirziyoyev Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent "O'zbekiston" 2017. 488 b.
89. Sh. Mirziyoyev Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganligining 24 yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi ma'ruza. 2016-yil 7-dekabr. Toshkent - "O'zbekiston" - 2017. 32 b.
90. Ш.Мирзиёев Танқидий тахлил, қатъий тартиб – интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Тошкент – "Ўзбекистон" 2017.
91. Ш.Мирзиёев Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига баgʻишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ. Тошкент – "Ўзбекистон". 2016. 56 б.

9 Ш.Қ.Форманов "Эҳтимолликлар назарияси", Тошкент "Университет" 2014 й.

6.Ross, Sheldon M. A first course in probability. Pearson Education, Inc. 2010.

7.Robert B. Ash Basic probability theory. Dover Publications, Inc. 2008.

Qo'shimcha adabiyotlar

92. А.А.Абдушукуров, Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, ЎзМУ, 2010 й.
93. А.А.Абдушукуров, Т.М.Зупаров, "Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика", Тафаккур Бўстони, 2015 й.
94. А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» Тошкент, «Университет», 2003 й.
95. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
96. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
97. Б.А.Севастьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
98. С.Ҳ.Сирожиддинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
99. Севастянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
100. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука»,1989 г.
101. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.

11. Mamatov M., Ibragimov R., Mashrabboev A., Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistika.T., 2008 y

12. Ibragimov R..,Mashrabboev A. Polvanov R. Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistikadan masalalar to'plamiми, Namangon 2018y.

Internet saytlari

102. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали.

103. www.lex.uz -Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
104. http://www.rsl.ru
105. https://www.khanacademy.org/math/probability
106. http://www.msu.ru
107. http://sunzi.lib.hku.hk/ER/subject/hkul/510/ej/1
108. http://www.nlr.ru
109. http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/business-stat/R.htm

5-MAVZU- 4 SOAT
TASODIFIY VEKTORLAR
5.1 MAVZU KO'P O'LCHOVLI TASODIFIY MIQDOPLAR

Ko'p o'lchovli taqsimotlar.Tasodifie mikdorlardan .olingan funksiyalarning **Ta'rif.** (Ω, A, P) da $\xi_1, \xi_2, ...\xi_n$ tasodifiy miqdorlarni qaraymiz, u holda $\{\xi_k \le x_k\} \in \mathrm{A}$ bo'lganligidan $\bigcap_{k=1}^{n}\{\xi_k \le x_k\} \in \mathrm{A}$ bo'ladi, bu hodisaning

$$P\{\xi_1 \le x_1, ..., \xi_n \le x_n\} = F_{\xi_1 ....\xi_n}(x_1, ..., x_n)$$

ehtimolligini ko'p o'lchovli ($n-$o'lchovli) taqsimot funksiya deyiladi.

Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\Delta_{h_1} F(x_1, ..., x_n) = F(x_1 + h_1, x_2, ..., x_n) - F(x_1, ..., x_n),$$

$$\Delta_{h_1 h_2} F(x_1, ..., x_n) = \Delta_{h_2}(\Delta_{h_1} F(x_1, ..., x_n)) = F(x_1 + h_1, x_2 + h_2, x_3, ..., x_n) -$$
$$- F(x_1 + h_1, x_2, ..., x_n) - F(x_1, x_2 + h_2, x_3, ..., x_n) + F(x_1, ..., x_n),$$

... ...

$$\Delta_{h_1 .. h_n} F(x_1, ..., x_n) = \sum_{\theta_1, ...\theta_n = 0}^{1} (-1)^{n + \theta_1 + ... + \theta_n} F(x_1 + \theta_1 h_1, ..., x_n + \theta_n h_n).$$

$F(x_1, ..., x_n)$ yordamida $x_i < \xi_i \le x_i + h_i,\ i = 1, ..., n$ oraliqqa tushish hodisalarining ehtmolligini topish mumkin:

$$P\{x_1 < \xi_1 \le x_1 + h_1, \xi_2 \le x_2, ..., \xi_n \le x_n\} = P\{\xi_1 \le x_1 + h_1, \xi_2 \le x_2, ..., \xi_n \le x_n\} -$$
$$- P\{\xi_1 \le x_1, ..., \xi_n \le x_n\} = \Delta_{h_1} F_{\xi_1 \xi_2 ....\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n);$$

$$P\{x_1 < \xi_1 \le x_1 + h_1, x_2 < \xi_2 \le x_2 + h_2, \xi_3 \le x_3, ..., \xi_n \le x_n\} =$$
$$P\{x_1 < \xi_1 \le x_1 + h_1, \xi_2 \le x_2 + h_2, \xi_3 \le x_3, ..., \xi_n \le x_n\} - P\{x_1 < \xi_1 \le x_1 + h_1, \xi_2 \le x_2, ..., \xi_n \le x_n\} =$$
$$= \Delta_{h_2}(\Delta_{h_2} F_{\xi_1 \xi_2 ....\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) = \Delta_{h_2 h_2} F_{\xi_1 \xi_2 ....\xi_n}(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad \text{(1(VIII.23.1)}$$

va hokazo.

(VIII.23.1) va ko‘p o‘lchovli taqsimot funksiya ta’rifidan $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ ning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ har bir argument bo‘yicha uzluksiz va kamaymovchi;

2) $F(-\infty, x_2, ..., x_n) = F(x_1, -\infty, x_2, ..., x_n) = F(x_1, ..., x_{n-1}, -\infty) = 0;$

3) $F(+\infty, +\infty, ..., +\infty,) = 1;$

4) Ixtiyoriy $h_1 \geq 0, ..., h_n \geq 0$ uchun

$$\Delta_{h_1 h_2 .... h_n} F(x_1, ..., x_n) \geq 0.$$

Bu xossalarning isboti bir o‘lchovli taqsimot funksiya xossalarining isbotidek bajariladi.

Odatdagidek,

$$F(-\infty, x_2, ..., x_n) = \lim_{x_1 \to -\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n),$$

$$F(+\infty, x_2, ..., x_n) = \lim_{x_1 \to +\infty} F(x_1, x_2, ..., x_n).$$

(Ω, A, P) fazoda ehtimollik kiritilishi o‘lchov bo‘yicha integrallash imkonini beradi.

Agar $\varphi(x)$ funksiya R^n ni R ga akslantiruvchi Borel funksiyasi bo‘lsa, u holda $\varphi(\xi_1(\omega), ..., (\xi_n(\omega))$ funksiya boshlang‘ich fazoni Ω ga o‘lchov bo‘yicha yaqinlashtiradi, hamda

$$\int_{\Omega} \varphi(\xi_1(\omega), ..., (\xi_n(\omega)) P(d\omega)$$

integral aniqlangan bo‘ladi, bu integral quyidagi

$$\int_{R^n} \varphi(\overline{X}) P_{\xi}(d\overline{x}), \qquad \overline{X} = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n) \in R^n$$

integral bilan bir xildir.

Xuddi bir o‘lchovli tasodifiy miqdorlar kabi tasodifiy vektorni ham diskret va absolyut uzluksiz hollarga ajratish mumkin.

1-ta’rif. Agar chekli yoki sanoqli $(x_1, ..., x_n)$ nuqtalar to‘plami uchun

$$P\left(\xi_1 = x_{m_1}, ..., \xi_n = x_{m_k}\right) = P_{x_{m_1} ... x_{m_k}};$$

va

$$\sum_{(x_{m_1} .... x_{m_k})} P_{x_{m_1}, ..., x_{m_k}} = 1$$

munosabatlar bajarilsa, u holda $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ vektorni diskret xildagi tasodifiy vektor deyiladi.

1-Misol. ξ_1 va ξ_2 tasodifiy miqdorlar quyidagicha taqsimotga ega bo‘lsin:

$$P\left(\xi_1 = x_k\right) = p_k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

$$P\left(\xi_2 = y_s\right) = q_s, \quad s = 0, \pm 1, \pm 2, ...$$

Agar $\eta = \xi_1 + \xi_2$ bo‘lsa, $P(\eta = z_m)$ topilsin.

Yechish. Xususiy holda $x_k = k, \ \ y_s = s, \ \eta = m = k + s$ xolni ko‘ramiz:

$$P(\eta = m) = P(\xi_1 + \xi_2 = m) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P(\xi_1 = n, \ \xi_2 = m - n).$$

Ta'rif. Ko'p o'lchovli $P_\xi(x)$ zichlik funksiya deb

$$P_\xi(B) = P(\xi \in B) = \int_B P_\xi(x)dx \qquad \text{(VIII.23.2)}$$

tenglikni qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi.

Xususan, $P(x) \geq 0, \quad \int_B P_\xi(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} ..... \int_{-\infty}^{+\infty} P(x_1...x_n)dx_1...dx_n = 1$ kelib chiqadi.

(VIII.23.2) dan $F_\xi(x)$ va $P_\xi(x)$ $(\xi = (\xi_1,...,\xi_n),\ x = (x_1,\ ...\ ,x_n))$ funksiyalar orasidagi bog'lanishni topamiz:

$$F_\xi(x) = \int_{-\infty}^{x_1} ... \int_{-\infty}^{x_2} P_\xi(u_1,...,u_n)du_1...du_n,$$

$$P_\xi(x_1,...\ ,x_n) = \frac{\partial^n F(x_1,...,x_n)}{\partial x_1\ ...\ \partial x_n};$$

$X = (x_1,...,x_n)$ uzluksizlik nuqtalarida

$$P\{x_i < \xi_i < x_i + \Delta x_i,\ \ i = 1,...,n\} = P(x_1,....,x_n)\Delta x_1...\Delta x_n + o(\Delta x_1...\Delta x_n),$$

$$\max_i \Delta x_i \to 0.$$

2-misol. $S \subseteq R^n$, $|S|$ $n-$o'lchovli hajm bo'lsa,

$$P_\xi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|s|}, & x \in s, \\ 0, & x \notin s \end{cases}$$

funksiyaga $n-$o'lchovli s da tekis taqsimlangan tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi deyiladi.

Bu holda

$$P(\xi \in B) = \frac{|B \cap s|}{|s|}$$

bo'ladi.

3-misol. Zichlik funksiyasi

$$P_\xi(x_1,....,x_n) = \frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2}Q(x_1,...,x_n)} \qquad \text{(VIII.23.3)}$$

ko'rinishga ega bo'lgan $\xi = (\xi_1,....,\xi_n)$ tasodifiy vektor normal qonun bo'yicha taqsimlangan tasodifiy vektor deyiladi, bunda

$$Q(x_1,...,x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

musbat aniqlangan kvadratik forma va $|A| = \det\|a_{ij}\|$.

Xususan $n = 2$ bo'lsa,

$$P_\xi(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-r^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2(1-r^2)}\left(\frac{(x_1-a)^2}{\sigma_1^2} - 2r\frac{(x_1-a)(x_2-b)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(x_2-b)^2}{\sigma_2^2}\right)}, \qquad \text{(VIII.23.4)}$$

bu yerda $a,b-$ haqiqiy sonlar, $-1 \leq r \leq 1$, σ_1,σ_2 musbat sonlar.

Agar $r = \pm 1$ bo'lsa, ξ_1 va ξ_2 lar chiziqli bog'lanan bo'ladi.

(VIII.23.3) ga mos taqsimot funksiya quyidagi ko'rinishga ega:

$$F_\xi(x_1,...,x_n)=\frac{\sqrt{|A|}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\cdot\int\limits_{-\infty}^{x_1}....\int\limits_{-\infty}^{x_n}e^{-\frac{1}{2}Q(x_1,...,x_n)}dx_1...dx_n$$

BOG‘LIQSIZ TASODIFIY MIQDORLAR

Ta’rif. Agar quyidagi $\mathcal{A}_{\xi_1}, \mathcal{A}_{\xi_2}, ..., \mathcal{A}_{\xi_k}$ $\sigma-$algebralar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda bularni yuzaga keltirgan $\xi_1,...,\xi_n$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

Bu ta’rif quyidagi ifodaga teng kuchlidir:

$$P\{\xi_1\in B_1,...,\xi_n\in B_n\}=\prod_{j=1}^{n}P\{\xi_i\in B_i\}.$$

Bu tenglikning xususiy xoli

$$F_{\xi_1...\xi_n}(x_1,...,x_n)=F_{\xi_1}(x_1)....F_{\xi_n}(x_n)$$

barcha x_i larda o‘rinli.

Bundan esa, x_i *ва* $h_i>0$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ larda

$$\Delta_{h_1...h_n}F_{\xi_1...\xi_n}(x_1,...,x_n)=\prod_{i=1}^{n}\Delta_{h_i}F_{\xi_i}(x_i)$$

bo‘ladi.

Agar tasodifiy miqdorlar diskret taksimlangan bo‘lsa, u holda $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$ ni bog‘liqsizligi ta’rifini

$$P\{\xi_i=x_i, i=1,2,...,n\}=\prod_{i=1}^{n}P\{\xi_i=x_i\}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Zichlik funksiya yordamida bog‘liqsiz tasodifiy miqdorlarni quyidagicha ifodalanadi:

$$P_{\xi_1...\xi_n}(x_1,...,x_n)=P_{\xi_1}(x_1)....P_{\xi_n}(x_n).$$

Agar $\xi_1,....,\xi_n$ lar bog‘liqsiz bo‘lib, $q_i(x)$ $\left(i=\overline{1,n}\right)$ Borel funksiyasi bo‘lsa, $q_1(\xi_1),....,q_n(\xi_n)$ lar ham bog‘liqsiz bo‘ladi, chunki $\mathcal{A}_{q_i(\xi_1)}\subseteq\mathcal{A}_{\xi_i}$.

Agar ξ va η bog‘liqsiz va $P_\xi(x), P_\eta(x)$ funksiyalar ularning zichlik funksilari bo‘lsa, u holda $\xi+\eta$ ning taqsimot funksiyasi

$$F_{\xi+\eta}(Z)=P\{\xi+\eta\le Z\}=\iint\limits_{x+y\le Z}P_\xi(x)P_\eta(y)dxdy$$

ko‘rinishida bo‘ladi.

Bu integralni

$$F_{\xi+\eta}(Z)=\int\limits_{-\infty}^{\infty}F_\eta(z-x)P_\xi(x)dx=\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{z}P_\xi(x)P_\eta(y-x)dydx=\int\limits_{-\infty}^{z}dy\int\limits_{-\infty}^{\infty}P_\xi(x)P_\eta(y-x)dx=$$

$$=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P_\xi(x)\int\limits_{-\infty}^{z}P_\eta(y-x)dydx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P_\xi(x)dx\int\limits_{-\infty}^{z-x}P_\eta(y)dy=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}P_\eta(z-x)P_\xi(x)dx$$

ko‘rinishida ham ifodalash mumkin.

Bu formulalarga ξ va η ning kompozisiyasi (svertkasi) deyiladi.

4-misol. ξ_1 va ξ_2 o‘zaro bog‘liq emas, hamda

$$\xi_1: \begin{matrix} -1 & 0 & 1 \\ P: \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{matrix} \,;\qquad \xi_2: \begin{matrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ P: \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{matrix}$$

bo‘lsa, $\eta = \xi_1 + \xi_2$ ning taqsimot qonunini toping.

Ye**chish.**

$$P(\eta = 0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{3}{20},$$

$$P(\eta = 1) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} = \frac{1}{4},$$

$$P(\eta = -3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{20},$$

$$P(\eta = -2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} + \frac{1}{20} = \frac{3}{20},$$

$$P(\eta = 2) = \frac{1}{4}\cdot\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{5},$$

$$P(\eta = 3) = \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{1}{20}.$$

Demak, η tasodifiy miqdorning taqsimoti quyidagi ko‘rinishga ega:

$$\eta: \begin{matrix} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ P: \frac{1}{20} & \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{3}{20} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{20} \end{matrix}.$$

5-misol. ξ va η bog‘liqsiz va $F_\xi(x)$ mavjud bo‘lib,

$$P_\eta(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & a < x \le b \ , \\ 0 \ , & x \notin (a,\, b] \end{cases}$$

bo‘lsa, $\xi + \eta$ ning taqsimot funksiyasini toping.

Yechish.

$$F_{\xi+\eta}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F_\xi(z-x)P_\eta(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b F_\xi(z-x)dx$$

va

$$F_{\xi+\eta} = \frac{1}{b-a}\int_{z-b}^{z-a} F_\xi(u)du.$$

Bundan

$$P_{\xi+\eta}(z) = \frac{F_\xi(z-a) - F_\xi(z-b)}{b-a}.$$

6-misol. $\xi = (\xi_1, \xi_2)$ vektor normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lib, ξ_1, ξ_2 bog‘liqsiz bo‘lsa, uning zichlik funksiyasini toping.

Yechish. Bu holda (VIII.23.4) dan $(r = 0$ ga teng)

$$P(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2} - \frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

kelib chiqadi.

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar ro'yhati

Asosiy adabiyotlar

110. Sh. Mirziyoyev Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent "O'zbekiston" 2017. 488 b.
111. Sh. Mirziyoyev Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganligining 24 yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi ma'ruza. 2016-yil 7-dekabr. Toshkent - "O'zbekiston" - 2017. 32 b.
112. Ш.Мирзиёев Танқидий тахлил, қатъий тартиб – интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Тошкент – "Ўзбекистон" 2017.
113. Ш.Мирзиёев Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига баg'ишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ. Тошкент – "Ўзбекистон". 2016. 56 б.

10 Ш.Қ.Форманов "Эҳтимолликлар назарияси", Тошкент "Университет" 2014 й.
6.Ross, Sheldon M. A first course in probability. Pearson Education, Inc. 2010.
7.Robert B. Ash Basic probability theory. Dover Publications, Inc. 2008.

Qo'shimcha adabiyotlar

114. А.А.Абдушукуров, Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, ЎзМУ, 2010 й.
115. А.А.Абдушукуров, Т.М.Зупаров, "Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика", Тафаккур Бўстони, 2015 й.
116. А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» Тошкент, «Университет», 2003 й.
117. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
118. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
119. Б.А.Севастьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
120. С.Ҳ.Сирожиддинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
121. Севастянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
122. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука»,1989 г.
123. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
11. Mamatov M., Ibragimov R., Mashrabboev A., Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistika.T., 2008 y
12. Ibragimov R..,Mashrabboev A. Polvanov R. Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistikadan masalalar to'plamiми, Namangon 2018y.

Internet saytlari

124. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали.

125. www.lex.uz -Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
126. http://www.rsl.ru
127. https://www.khanacademy.org/math/probability
128. http://www.msu.ru
129. http://sunzi.lib.hku.hk/ER/subject/hkul/510/ej/1
130. http://www.nlr.ru
131. http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/business-stat/R.htm

:

6-.MAVZU -4 SOAT
KATTA SONLAR QONUNI
6.1 Mavzu. Katta sonlar qonuni. Chebishev teoremasi va tengsizligi..

Reja

1. Katta sonlar qonuni.
2. Chebishev tengsizligi.
3. Chebishev toremasi

Tayanj iboralar. Bernulli teoremasi.Binomial sxema.Chebishev tengsizligi.Chebishev teoremasi.

Bernuli sxemasini qaraymiz: O‘zaro bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi Bernulli sxemasi bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsin, u holda $M\xi_k = p,\ D\xi_k = pq \quad \left(k = \overline{1,n}\right)$. Bu tasodifiy miqdorlar n tasining o‘rta arifmetigi A hodisa ro‘y berishlarining nisbiy chastotasi $\frac{S_n}{n}$ bo‘ladi, bu yerda $S_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ $n-$ta o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribada A hodisaning ro‘y berishlar soni. Ma’lumki, $MS_n = np, DS_n = npq$. Bunday sxema uchun quyidagi teorema (Bernulli teoremasi) o‘rinli:

5-Teorema. Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) = 0.$$

Isbot. Chebishev tengsizligiga asosan

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n} - p\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{pq}{n\varepsilon^2}$$

Bu tengsizlikdan $n \to \infty$ da limitga o‘tsak, teoremaning isboti kelib chiqadi.

Demak, tajribalar soni yetarlicha katta bo‘lsa, A hodisa ro‘y berishining nisbiy chastotasi A hodisaning ro‘y berish ehtimoliga yaqin bo‘lar ekan.

Bu teoremadan shunday xulosa chiqarish mumkin.

4-teorema. Ixtiyoriy $x > 0$ uchun

$$P\{|\xi| \geq x\} \leq \frac{M|\xi|}{x}, \qquad P\{|\xi - M\xi| \geq x\} \leq \frac{D\xi}{x^2}$$

bajariladi.

Isbot. Ma’lumki,

$$|\xi| = |\xi| J_{\{|\xi|\geq x\}} + |\xi| J_{\{|\xi|<x\}} \geq |\xi| J_{\{|\xi|\geq x\}} \geq x J_{\{|\xi|\geq x\}},$$

bundan

$$M|\xi| \geq xMJ_{|\xi|\geq x\}} = xP\{|\xi| \geq x\}.$$

Agar $\eta = (\xi - M\xi)^2$ deb belgilasak, $M\eta = D\xi$ tenglikdan teoremaning isboti kelib chiqadi.

Ikkinchi tengsizlikdan $D\xi$ yetarli kichik bo‘lganda, ξ $M\xi$ atrofida jamlangan bo‘ladi:

$$p\{|\xi - M\xi| < x\} \geq 1 - \frac{D\xi}{x^2}.$$

2. Misol. Tajriba Oyning suratini olish yordamida Oyning diametrini o‘lchashdan iborat bo‘lsin. Buning uchun Oyning turli vaqtda olingan suratlaridan foydalaniladi. Ma’lumki, turli vaqtda olingan surat atmosfera ta’siri natijasida turli kattalikka ega. Oy diskining haqiqiy qiymatini biror masshtabda a bilan belgilasak, u holda $\xi - a$ ayirma har bir o‘lchash natijasi a dan qay darajada farqlanishini belgilaydi. Faraz qilaylik, bog‘liqsiz ravishda n ta o‘lchash asbob berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$S_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + ... + \xi_n)$$

ifodani tuzaylik. Bu yerda ξ_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$lar o‘zaro bog‘liq emas va $M\xi_i = a,\ D\xi_i = \sigma^2$ bo‘lsin. Demak, $MS_n = a,\ DS_n = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

n o‘sishi bilan S_n va a orasidagi farq kichrayib borishini ko‘ramiz. Shuning uchun a sonni S_n orqali baholash mumkin, ya’ni

$$P\{|S_n - a| \leq \varepsilon\} \leq \frac{DS_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\cdot\varepsilon^2}.$$

Xususan, $P(|S_n - a| \geq 0{,}1) \leq 0{,}02$ tengsizlik

$$P(|S_n - a| \geq 0{,}1) \leq \frac{\sigma^2}{0{,}01n} \leq 0{,}02,$$

bundan $\sigma^2 = 1$ desak, $n \geq 5000$.

Ayrim shartlar ostida qo‘shiluvchilar soni yetarlicha katta bo‘lganda tasodifiy miqdorlar yig‘indisi o‘zining tasodifiylik xarakterini ma’lum ma’noda «yo‘qotar» ekan. Ana shu shartlarni bilish ehtimollar nazariyasida asosiy masalalardan biri hisoblanadi.

Faraz qilaylik, $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va $\eta_n = \mathrm{f}_n(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. Agar shunday o‘zgarmas sonlar ketma-ketligi $\{a_n\},\ n = 1,2,..$ mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\eta_m - a_n| < \varepsilon\} = 1$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ..$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi deyiladi.

<u>6-teorema. (Chebishev teoremasi)</u>. Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ..$ o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ularning dispersiyalari C son bilan tekis chegaralangan bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ son uchun quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi:

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i\right| \geq \varepsilon\right\} = 0,$$

ya’ni $\xi_1, \xi_2, ...$ tasodifiy miqdorlar katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi.

<u>Isbot.</u> Ta’rifda $\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i$, $a_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\xi_i$ deb olinsa, u holda Chebishev tengsizligiga asosan, teorema shartiga ko‘ra

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\xi_j\right| \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{D\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j\right)}{\varepsilon^2} = \frac{\sum_{j=1}^{n}D\xi_j}{n^2\varepsilon^2} \leq \frac{c}{n\varepsilon^2}$$

o‘rinlidir. Bundan esa $n \to \infty$ teorema isboti kelib chiqadi.

6.2-mavzu

Ratta sonlar qonunining tadbiqlari

Reja

1.Markov teoremasi

2. Xinchin teoremasi

3.Rolmogorov tengsizligi

Tayanj so’zlar. Yaqinlashish turlari. Markov teoremasi Xinchin teoremasi.Kolmogorov tengsizligi

<u>7-teorema (Markov teoremasi)</u>. Agar

$$\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ..$$

tasodifiy miqdorlar uchun $n \to \infty$ da

$$\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right) \to 0$$

munosabat bajarilsa, $\{\xi_i\}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi.

o‘lchashdan iborat bo‘lsin. Buning uchun Oyning turli vaqtda olingan suratlaridan foydalaniladi. Ma’lumki, turli vaqtda olingan surat atmosfera ta’siri natijasida turli kattalikka ega. Oy diskining haqiqiy qiymatini biror masshtabda a bilan belgilasak, u holda $\xi - a$ ayirma har bir o‘lchash natijasi a dan qay darajada farqlanishini belgilaydi. Faraz qilaylik, bog‘liqsiz ravishda n ta o‘lchash asbob berilgan bo‘lsin. Ushbu

$$S_n = \frac{1}{n}(\xi_1 + ... + \xi_n)$$

ifodani tuzaylik. Bu yerda ξ_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$lar o‘zaro bog‘liq emas va $M\xi_i = a,\ D\xi_i = \sigma^2$ bo‘lsin. Demak, $MS_n = a,\ DS_n = \dfrac{\sigma^2}{n}$.

n o‘sishi bilan S_n va a orasidagi farq kichrayib borishini ko‘ramiz. Shuning uchun a sonni S_n orqali baholash mumkin, ya’ni

$$P\{|S_n - a| \le \varepsilon\} \le \frac{DS_n}{\varepsilon^2} = \frac{\sigma^2}{n\cdot\varepsilon^2}.$$

Xususan, $P(|S_n - a| \ge 0{,}1) \le 0{,}02$ tengsizlik

$$P(|S_n - a| \ge 0{,}1) \le \frac{\sigma^2}{0{,}01n} \le 0{,}02,$$

bundan $\sigma^2 = 1$ desak, $n \ge 5000$.

$\{\xi_i\}_1^n$ bog‘liqsiz bo‘lsa, $S_n = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ uchun, Chebishevning

$$P\{|S_n - MS_n| \ge x\} \le \frac{DS_n}{x^2}$$

tengsizligidan

$$\frac{S_n - MS_n}{n} \xrightarrow{P} 0 \qquad \text{(XVI.47.1)}$$

munosabat bajarilishi kelib chiqadi.

Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots$ bog‘liqsiz va bir xil taqsimlangan bo‘lsa, u holda $\{\xi_k\}_1^n$ uchun $M\xi_k = a$ ning mavjudligi (XVI.47.1) ning bajarilishi uchun yetarlidir.

2-teorema (Xinchin teoremasi). Agar $\{\xi_i\}_1^\infty$ bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan va $M\xi_n = a$ mavjud bo‘lsa, u holda katta sonlar qonuni o‘rinlidir:

$$\frac{\xi_1 + \ldots + \xi_n}{n} \xrightarrow{P} a.$$

Isbot. $\xi_k - a$ ni $f(t)$ xarakteristik funksiyasi uchun nol atrofida $f(t) = 1 + 0(t)$ munosabat bajariladi, shu sababli

$$S_n = \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - na$$

ning xarakteristik funksiyasi

$$f_{\frac{S_n}{n}}(t) = \left[f\left(\frac{t}{n}\right)\right]^n \to 1$$

bo‘ladi, bundan $\dfrac{S_n}{n}$ ifodaning 0 ga sust yaqinlashishi kelib chiqadi.

3-teorema (Kolmogorov tengsizligi). $\xi_1, \ldots, \xi_n$ bog‘liqsiz va $D\xi_k$, $k = 1,\ 2,\ \ldots$ chekli bo‘lsin.

U holda $S_k = \xi_1 + \ldots + \xi_k$ uchun

$$P\left\{\max_{1\le k\le n}\left|S_k - MS_k\right| \ge x\right\} \le \frac{DS_n}{x^2}$$

tengsizlik bajariladi.

Isbot. Umumiylikka ziyon keltirmasdan, $M\xi_k = 0$ deb qabul qilish mumkin.

$\nu = \min\{k : |S_k| \ge x\}$ belgilashni kiritamiz.

$\max\limits_{1\le k\le n}|S_n| < x$ bo‘lganda $\nu = n+1$ deb qabul qilamiz.

$$S_n^2 \ge S_n^2 \sum_{k=1}^{n} \Im_{(\nu=k)}$$

ligidan

$$MS_n^2 \ge \sum_{k=1}^{n} MS_n^2 \Im_{(\nu=k)} = \sum_{k=1}^{n} M\left(\xi_1 + \ldots + \xi_k + \xi_{k+1} + \ldots + \xi_n\right)^2 \Im_{(\nu=k)} \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{n} M\left(\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_k\right)^2 \Im_{(\nu=k)} + 2\sum_{k=1}^{n-1} M\left(\xi_1 + \ldots + \xi_k\right)\Im_{(\nu=k)}\left(\xi_{k+1} + \ldots + \xi_n\right).$$

$\Im_{(\nu=k)}$ $\xi_1, \ldots, \xi_k$ larga bog‘liq, shuning uchun $\left(\xi_1 + \ldots + \xi_k\right)$ $\Im_{(\nu=k)}$ tasodifiy miqdor $\xi_{k+1},...,\xi$ ga bog‘liq emas va

$$M\left(\xi_1 + ... + \xi_n\right)\Im_{(\nu=k)}\left(\xi_{k+1} + ... + \xi_n\right) = M\left(\xi_1 + ... + \xi_k\right)\Im_{(\nu=k)} \cdot M\left(\xi_{k+1} + ... + \xi_n\right) = 0\,.$$

$\omega \in (\nu = k)$ uchun $S_k \ge x$ va

$$P(\nu \le n) = P\left(\max_{1\le k\le n}|S_k| \ge x\right)$$

ligidan

$$MS_n^2 \ge \sum_{k=1}^{n} MS_k^2 \Im_{(\nu=k)} \ge x^2 P(\nu \le n) = x^2 P\left(\max_{1\le k\le n}|S_k| \ge x\right).$$

Teorema isbotlandi.

6.2-MAVZU. KUCHAYTIRILGAN KATTA SONLAR QONUNI

Reja

1.Bir ehtimollik bilan yaqinlashish.

2. Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni ta’rifi.

4-teorema (Kuchaytirilgan katta sonlar qonuni). Agar $\xi_1, \xi_2, \ldots$ tasodifiy miqdorlar bog‘liqsiz, $M\xi_n = 0$, $D\xi_n = \sigma_n^2$ va $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$ bo‘lsa, u holda $n \to \infty$ da $\dfrac{\xi_1 + ... + \xi_n}{n} \to 0$

deyarli bajariladi, ya'ni

$$P\left(\left\{\omega : \frac{S_n}{n} \to 0\right\}\right) = 1 .$$

<u>Isbot.</u> Ixtiyoriy $\varepsilon > 0$ uchun

$$P\left\{\sup_{k \ge n}\left|\frac{S_k}{k} > \varepsilon\right|\right\} \to 0, \ n \to \infty \qquad \text{(XVI.47.2)}$$

bajariladi.

$$A_n = \left\{\max_{2^{n-1} \le k \le 2^n}\left|\frac{S_k}{k}\right| > \varepsilon\right\}$$

belgilash kiritsak, u holda (XVI.47.2)

$$P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \to 0, \ n \to \infty$$

bilan teng kuchlidir.

Kolmogorov tengsizligidan

$$P(A_n) \le P\left\{\max_{2^{n-1} \le k \le 2^n}|S_n| > \varepsilon \cdot 2^{n-1}\right\} \le P\left\{\max_{1 \le k \le 2^n}|S_k| > \varepsilon \cdot 2^{n-1}\right\} \le 4\frac{DS_{2^n}}{\varepsilon^2 \cdot 2^{2n}}$$

bajariladi.

$$\sum_{k=k_0}^{\infty} 2^{-2k} \le 2 \cdot 2^{-2k_0}$$

tengsizlikdan esa

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) \le 4\varepsilon^{-2}\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-2k}\sum_{n=1}^{2^k}\sigma_n^2 \le 4\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_n^2\sum_{(k:2^k \ge n)} 2^{-2k} \le 8\varepsilon^{-2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2} < \infty$$

hosil bo'ladi.

Keyingi teoremani isboti uchun quyidagi lemmani keltiramiz.

<u>Lemma.</u> ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi chekli bo'lishi uchun

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\{|\xi| > n\} < \infty$$

bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Ma'lumki, $M\xi$ chekli bo'lsa, $M|\xi|$ chekli bo'ladi va aksincha.

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P(n-1<|\xi|\le n)\le M|\xi|\le \sum_{n=1}^{\infty} nP(n-1<|\xi|\le n)$$

va

$$\sum_{n=1}^{\infty} nP(n-1<|\xi|\le n)=\sum_{n=1}^{\infty} P|\xi|>n\le 1+\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi|>n),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)P(n-1<|\xi|\le n)=\sum_{n=1}^{\infty} nP(n-1<|\xi|\le n)-P(\xi>0)=\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi|>n)$$

lardan

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi|>n)\le M|\xi|\le 1+\sum_{n=1}^{\infty} P(|\xi|>n)$$

kelib chiqadi, bundan esa lemmaning isbotini olish mumkin.

7-semestr

7---MAVZU-6 SOAT

EHTIMOLIKLAR UCHUN LIMIT TEOPEMALAR

7.1-MAVZU MARKAZIY LIMIT TEOREMA.LYAPUNOV TEOREMASI

REJA

1. **BOG'LIQSIZ BIR XIL TAQSIMLANGAN TASODIFIY MIQDORLAR UCHUN MARKAZIY LIMIT TEOREMA**
2. **LYAPUNOV TEOREMASI**

TAYANJ SO'ZLAR. NORMAL QONUN. BERNULLI SXEMASI. LYAPUNOV TEOREMASI.

Ma'lumki, Bernulli sxemasida $n\to\infty$, $0<p<1$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\mu_n - M\mu_n}{\sqrt{D\mu_n}}\le x\right\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{x} e^{-\frac{x^2}{2}}dx \qquad \text{(XIII.35.1)}$$

bajariladi, bu yerda μ_n A hodisaning n ta tajribada ro'y berishlar soni.

Bu formula markaziy limit teoremaning xususiy holi bo'ladi. Faraz qilaylik $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n, ...$ bog'liqsiz tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo'lib, $S_n=\xi_1+\xi_2+...+\xi_n$ bo'lsin.

Agar

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n - MS_n}{\sqrt{DS_n}}\le x\right\}=\Phi(x) \qquad \text{(XIII.35.2)}$$

bajarilsa, u holda $\{\xi_i\}_1^{\infty}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun markaziy limit teorema o'rinli deyiladi.

(XIII.35.2) bajarilishi uchun $\{\xi_i\}_1^{\infty}$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun ayrim shartlar qo'yiladi.

1-Teorema. Agar $\{\xi_i\}_1^\infty$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan va chekli $M\xi_i$, $D\xi_i = \sigma^2 > 0$ mavjud bo‘lsa, u holda

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} \le x\right\} = \Phi(x)$$

bajariladi.

Isbot. $\overline{\xi}_k = \xi_k - a$, $\overline{S}_n = \dfrac{S_n - na}{\sigma\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\overline{\xi}_k$ belgilashlarni kiritamiz. $f_{\overline{\xi}_k}(t)$ bilan $\overline{\xi}_k$ ning xarakteristik funksiyasini belgilasak, u holda $M\overline{\xi}_k = 0$ ligidan, xarakteristik funksiyaning 6-xossasiga asosan, $t \to \infty$ da $f(t) = 1 - \dfrac{t^2\sigma^2}{2} + 0(t^2)$ va demak ixtiyoriy tayinlangan t uchun $f_{\xi_n}(t) = \left[f\left(\dfrac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right]^n = \left(1 - \dfrac{t^2}{2n} + 0\left(\dfrac{t^2}{n}\right)\right)^n \to e^{-\frac{t^2}{2}}$ bajariladi.

Bundan 1-teorema isboti kelib chiqadi.

Faraz qilaylik $\{\xi_i\}_1^\infty$ bog‘liqsiz va

$$M\xi_k = a_k,\ \ D\xi_k = b_k^2,\ \ M|\xi_k - a_k|^3 = C_k^3,$$

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\ \ B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2,\ \ \ C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} C_k^3$$

bo‘lsin.

2-teorema (S.Lyapunov teoremasi). Agar $\{\xi_i\}_1^\infty$ bog‘liqsiz, a_k, b_k, C_k chekli va $n \to \infty$ da $\dfrac{C_n}{B_n} \to 0$ bajarilsa,

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n} \le x\right\} = \Phi(x) \qquad \text{(XIII.35.3)}$$

o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. $\overline{\xi}_k = \xi_k - a_k$, $f_k(t) = f_{\overline{\xi}_k}(t)$ kabi belgilasak va teorema shartiga ko‘ra $M\overline{\xi}_k = 0$, $M\overline{\xi}_k^2 = b_k^2$, $M\left|\overline{\xi}_k\right|^3 = C_k^3 < \infty$ o‘rinliligini hisobga olsak, ushbu yoyilmaga ega bo‘lamiz:

$$f_k(t) = 1 - \frac{t^2}{2}b_k^2 + r_k(t) \qquad \text{(XIII.35.4)}$$

bu yerda

$$|r_k(t)| \le \frac{C_k^3|t|^3}{\sigma},\ \ \left|-\frac{t^2 b_k^2}{2} + r_k(t)\right| \le \frac{|t|^2}{2}b_k^2. \qquad \text{(XIII.35.5)}$$

$\{\xi_i\}_1^\infty$ ketma-ketlik tasodifiy miqdorlarining bog‘liqsizligidan, $S_n = \dfrac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}\overline{\xi}_k$ ning xarakteristik funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$f_{S_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_k\left(\frac{1}{B_n}\right).$$

Bu ifodani logarifmlaymiz:

$$\log f_{S_n}(t)=\sum_{k=1}^{n}\log f_n\left(\frac{1}{B_n}\right). \qquad \text{(XIII.35.6)}$$

Ma'lumki,

$$\log(1+x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}=x+\alpha(x), \qquad \text{(XIII.35.7)}$$

$$|x|\le\frac{1}{2},\ |\alpha(x)|=\left|\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}x^k}{k}\right|\le\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{\infty}|x|^k\le|x|^2. \qquad \text{(XIII.35.8)}$$

Teorema shartiga ko‘ra,

$$\left(M|\xi|^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\left(M|\xi|^{r+1}\right)^{\frac{1}{r+1}}$$

ligidan,

$$\frac{b_k^2}{B_n^2}\le\frac{\left(M|\overline{\xi}_k|^3\right)^{\frac{2}{3}}}{B_n^2}=\frac{C_k^2}{B_n^2}\le\left(\frac{\overline{C}_n}{B_n}\right)^2\to 0, \qquad \text{(XIII.35.9)}$$

bundan $n\to\infty$ da $1\le k\le n$ lar uchun $\frac{b_k^2}{B_n^2}\to 0$ tekis bajariladi.

Agar $T>0$ va $|t|\le T$ bo‘lsa, (XIII.35.4) va (XIII.35.5) ga asosan

$$f_k\left(\frac{t}{B_n}\right)=1+\varepsilon_k\left(\frac{1}{B_n}\right),$$

(XIII.35.9) dan

$$\left|\alpha_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|=\left|1-\frac{t^2}{2}\cdot\frac{b_k^2}{B_n^2}+r_k\left(\frac{1}{B_n}\right)\right|\le\frac{T^2}{2}\cdot\frac{b_k^2}{B_n^2}, \qquad \text{(XIII.35.10)}$$

$n\ge n_0$ uchun n_0 ni $\left|\varepsilon_k\left(\frac{1}{B_n}\right)\right|\le\frac{1}{2}$ bajariladigan qilib tanlaymiz.

(XIII.35.6)-(XIII.35.8) ga asosan

$$\log f_{S_n}(t)=-\frac{t^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}r_k\left(\frac{t}{B_n}\right)+\sum_{k=1}^{n}\theta_k\varepsilon_k^2\left(\frac{t}{B_n}\right),\quad |\theta_k|\le 1. \qquad \text{(XIII.35.11)}$$

(XIII.35.5), (XIII.35.10) baholarni hisobga olib, (XIII.35.11) dan

$$\left|\log f_{S_n}(t)+\frac{t^2}{2}\right|\le\sum_{k=1}^{n}\left|r_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|+\max_{1\le k\le n}\left|\varepsilon_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\sum_{k=1}^{n}\left|\varepsilon_k\left(\frac{t}{B_n}\right)\right|\le\frac{T^3}{\sigma}\left(\frac{C_n}{B_n}\right)^3+\frac{T^4}{4}\cdot\frac{\max\limits_{1\le k\le n}b_k^2}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_k^2}{B_n^2}\to 0.$$

Bundan

$$\lim_{n\to\infty}f_{S_n}(t)=e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

Teorema isbotlandi.

7.2-MAVZU. MARKAZIY LIMIT TEOREMANING TADBIQLARI

REJA

1. **<u>O‘lchash xatosi</u>**
2. **<u>O‘lchash xatosi</u>**

3. linberg sharti

Tayanj so'zlar. Normal qonun.Xatolik. Logarifmik normal qonun

Ehtimollar nazariyasida markaziy limit teorema muhim o‘rin tutadi. Ma’lumki, agar

$$\lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{S_n - A_n}{B_n} \le x\right\} = \Phi(x) \qquad \text{(XIII.37.1)}$$

bajarilsa, S_n tasodifiy miqdor $(A_n;\ B_n)$ parametrli normal taqsimlangan deyiladi va (XIII.37.1) ifoda $P\left\{\frac{S_n - A_n}{B_n} \le x\right\}$ ehtimollikni taqribiy hisoblashda ishlatiladi.

1-misol. (O‘lchash xatosi). a sonni o‘lchash natijasida biror taqribiy ξ ni hosil qilamiz. U holda, yo‘l qo‘yilgan $\delta = \xi - a$ xatolikni

$$\delta = (\xi - M\xi) + (M\xi - a)$$

ko‘rinishda ifodalash mumkin, bunda $\xi - M\xi$ ga tasodifiy xatolik, $M\xi - a$ ga sistemali xatolik deyiladi. Albatta, to‘g‘ri o‘lchaganda sistemali xatolik deyarli bo‘lmasligi kerak, shuning uchun $M\xi = a$ deb qabul qilamiz va $M\delta = 0$ bajariladi.

Faraz qilaylik $\delta = \sigma^2$ bo‘lsin. Bu xatolikni kamaytirish uchun n ta bog‘liqsiz tajriba olib boramiz: $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ va a o‘rniga quyidagi $\bar{a} = \frac{1}{n}(\xi_1 + \ldots + \xi_n)$ ni olamiz. Markaziy limit teoremaga ko‘ra $\{\xi_i\}_1^\infty$ bog‘liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar va $M\xi_1 = a,\ D\xi_1 = \sigma^2$ bo‘lib, $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ yig‘indi $\left(na, \sigma\sqrt{n}\right)$ parametrli asimptotik normal taqsimlangan va demak, $\bar{a}$ katta n larda $\left(a, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ parametrli asimptotik normal taqsimlangan bo‘lib, ushbu munosabat o‘rinli bo‘ladi:

$$P\{|\bar{a} - a| \le \varepsilon\} \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{e\sqrt{n}}{a}}^{\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{a}} e^{-\frac{u^2}{2}} du\,. \qquad \text{(XIII.37.2)}$$

2-misol. Logarifmik normal taqsimot. Antropologiyada odam bo‘yi, og‘irligi, tasodifiy miqdor bo‘lib, ular ma’lum yoshda normal qonunga bo‘ysunadi. Kuzatishlar bu tasodifiy miqdorning parametrlari logarifmik normal qonunga bo‘ysunishini ko‘rsatadi.

Ta’rif. Agar $\xi = \ln \eta$ normal qonunga bo‘ysunsa, u holda η logarifmik normal qonun bo‘yicha taqsimlangan deyiladi.

3-misol. Markaziy limit teorema yordamida

$$\lim_{n\to\infty} e^{-n} \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

ligini ko‘rsatish mumkin.

Agar $y_n = \xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$, ξ_n bog‘liqsiz, $M\xi_n = 1$ bo‘lsa va y_n n parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsa,

$$P\{y_n \le n\} = e^{-n}\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{k!}$$

ligidan $n \to \infty$ da y_n $(n,\ \sqrt{n})$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi va

$$P(y_n \le n) \to \frac{1}{2}$$

o‘rinlidir.

7.3 MAVZU. XARAKTERISTIK FUNKSIYA VA XOSSALARI

REJA

1. XARAKTERISTIK FUNKSIYA TA’RIFI

2. XARAKTERISTIK FUNKSIYA XOSSALARI

TAYANJ SO’ZLAR. Kompleks tasodifiy miqdor. **XARAKTERISTIK FUNKSIYA.MOMENT VA XARAKTERISTIK FUNKSIYA ORASIDAGINBOG’LANISH**

Oldingi mavzuda hosil qiluvchi funksiya butun qiymatli tasodifiy miqdorlarni o‘rganish uchun qulay apparat hisoblangan bo‘lsa, ixtiyoriy tasodifiy miqdorni o‘rganish uchun xarakteristik funksiyani kiritamiz. Buning uchun $\zeta = \xi + i\eta$ kompleks tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini hisoblaymiz: $M\xi = M\xi + iM\eta$. Bu matematik kutilma quyidagi tengsizlikni

$$|M\zeta| \le M|\zeta| \qquad \text{(XI.30.1)}$$

qanoatlantiradi.

Bu tengsizlikni isbotlaymiz.

Faraz qilaylik $\xi \approx x_k + iy_k = z_k$ oddiy tasodifiy miqdor berilgan bo‘lsin va $P(\xi = z_k) = P_k$ bo‘lsin, u holda

$$|M\zeta| = \left|\sum_k z_k p_k\right| \le \sum_k |z_k| p_k = M|\zeta|.$$

Endi $\xi = \xi^+ - \xi^-$, $\eta = \eta^+ - \eta^-$ ni ko‘ramiz, $\xi_n^{\pm}$, $\zeta_n^{\pm}$ lar tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi bo‘lib, $\xi_n^{\pm} \uparrow \xi^{\pm}, \eta_n^{\pm} \uparrow \eta^{\pm}$ bo‘lsin, u holda

$$\xi_n = \xi_n + i\eta \to \zeta$$

va bundan $M\zeta = \lim_{n\to\infty} M\zeta_n$.

Natijada (XI.30.1) dan $|M\zeta_n| \le M|\zeta_n|$.

Ikkinchi tomondan

$$|\zeta_n| \le |\xi_n| + |\eta_n| \le \xi^+ + \xi^- + \eta^+ + \eta^{-1} = |\xi| + |\eta|, \quad \zeta_n \to \zeta .$$

Demak, $M|\zeta_n| \to M|\zeta|$.

1-ta’rif. ξ tasodifiy miqdorning xarakteristik funksiyasi deb, $Me^{it\xi}$ ga aytiladi va $f_\xi(t)$ bilan belilanadi (t-haqiqiy son).

Eyler formulasidan

$$f_\xi(t) = Me^{it\xi} = M\cos\xi t + iM\sin\xi t \qquad \text{(XI.30.2)}$$

Agar $F_\xi(x)$ va $P_\xi(x)$ mos ravishda, taqsimot va zichlik funksiyalar bo‘lsa, u holda

$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} dF_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} p_\xi(x)dx \qquad \text{(XI.30.3)}$$

bo‘ladi.

Agar ξ diskret tasodifiy miqdor bo‘lsa, uning xarakteristik funksiyasi quyidagicha bo‘ladi:

$$f_\xi(t) = \sum_k e^{itx_k} p(\xi = x_k).$$

XARAKTERISTIK FUNKSIYANING XOSSALARI

1-Xossa. $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiya uchun quyidagi munosabatlar o‘rinli: $|f_\xi(t)| \le 1, \quad t \in R, \quad f(0) = 1.$

Isbot. (XI.30.2) ga asosan $\left|e^{it\xi}\right| = 1$ va $|f_\xi(t)| = \left|Me^{it\xi}\right| \le M\left|e^{it\xi}\right| = 1$.

2-Xossa. $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiya t bo‘yicha tekis uzluksiz.

Bu xossani isbotlash uchun quyidagi lemmani keltiramiz.

Lemma. Haqiqiy φ uchun butun n≥1 da

$$\left| e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \right| \le \frac{|\varphi|^n}{n!} \qquad \text{(XI.31.1)}$$

tengsizlik bajariladi.

Lemmaning isboti. $\left|e^{i\varphi}\right| = 1$ munosabatdan

$$\left| \int_0^{\varphi} e^{iu} du \right| = \left|e^{i\varphi} - 1\right| \le \int_0^{|\varphi|} du = |\varphi|.$$

Endi matematik induksiya usulini qo‘llaymiz: (XI.31.1) tengsizlik qandaydir n da o‘rinli bo‘lsin va quyidagi munosabat bajarilsin:

$$\int_0^{\varphi} \left(e^{iu} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(iu)^k}{k!} \right) du = \frac{1}{i} \left(e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \right).$$

U holda

$$\left| e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \right| = \left| \int_0^{\varphi} \left(e^{iu} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(iu)^k}{k!} \right) du \right| \le \int_0^{|\varphi|} \frac{u^n}{n!} du = \frac{|\varphi|^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Endi 2-xossani isbotlaymiz. Buning uchun $A = \{|\xi| \le x\}$ hodisani qaraymiz, u holda

$$|f_\xi(t+h) - f_\xi(t)| = \left|Me^{it\xi}\left(e^{it\xi} - 1\right)\right| \le M\left|e^{i\eta\xi} - 1\right|J_A + M\left|e^{it\xi} - 1\right|J_{\overline{A}},$$

bu yerda J_A va $J_{\overline{A}}$ lar A va $\overline{A}$ larning indikatorlari.

Lemmani $n = 1$ da qo‘llaymiz: $\left|e^{it\xi} - 1\right| \le 2$ va

$$|f_\xi(t+\eta) - f_\xi(t)| \le |h| M|\xi| J_A + 2MJ_{\overline{A}} \le |h|x + 2p(|\xi| > x)$$

Endi $\varepsilon > 0$ da, X ni $P(|\xi| > x) < \frac{\varepsilon}{4}$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladigan qilib tanlaymiz, u holda $\delta = \frac{\varepsilon}{2x}$, natijada $|h| < \delta$ da

$$\left| f_\xi(t+\eta) - f_\xi(t) \right| < \varepsilon .$$

<u>3-Xossa.</u> Agar a va b o‘zgarmas sonlar bo‘lsa, u holda

$$f_{a\xi+b}(t) = e^{itb} f_\xi(at)$$

<u>Isbot.</u>

$$f_{a\xi+b}(t) = Me^{it(a\xi+b)} = e^{itb} Me^{ita\xi} = e^{itb} f_\xi(at).$$

<u>4-Xossa.</u> Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ lar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda

$$f_{\xi_1+\xi_2+...+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t) \qquad \text{(XI.31.2)}$$

<u>Isbot.</u> $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ larni bog‘liqsizligidan $e^{it\xi_1}, ..., e^{it\xi_n}$ larning bog‘liqsizligi kelib chiqadi, natijada

$$f_{\xi_1+...+\xi_n}(t) = M \exp\left(it \sum_{k=1}^{n} \xi_k \right) = M \prod_{k=1}^{n} \exp it\xi_k = \prod_{k=1}^{n} M \exp it\xi_k .$$

<u>5-Xossa.</u> Xarakteristik funksiya uchun

$$f_\xi(-t) = \overline{f_\xi(t)}$$

tenglik o‘rinlidir.

<u>Isbot.</u> 3-xossa va $\overline{e^{i\xi}} = e^{-it\xi}$ dan 5- xossaning isboti kelib chiqadi.

<u>6-Xossa.</u> $m_n = M\xi^n$ chekli bo‘lsa, u holda $f^{(k)}(t),\ k \le n$ mavjud bo‘ladi va

$$f^{(k)}(0) = i^k M\xi^k , \qquad \text{(XI.31.3)}$$

shu bilan birga

$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(it)^k}{k!} m_k + R_n(t), \qquad R_n(t) = 0(t^n), \qquad t \to \infty . \qquad \text{(XI.31.4)}$$

<u>Isbot.</u> (XI.31.2) dan, k marta differensiallab, quyidagini topamiz:

$$f_\xi^{(k)}(t) = i^k M\xi^k e^{it\xi} = i^k \int_{-\infty}^{\infty} x^k e^{itx} dF_\xi(x). \qquad \text{(XI.31.5)}$$

Bundan $t = 0$ da (XI.31.3) ni hosil qilamiz. (XI.31.5) da matematik kutilma ichida differensiallashning qonuniyligini ko‘rsatish uchun induksiya usulini qo‘llaymiz.

Faraz qilaylik, (XI.31.5)

$k < n$ da o‘rinli bo‘lsin.

Ma’lumki,

$$\frac{f^{(k)}(t+h) - f^{(k)}(t)}{h} = i^k M\xi^k \frac{e^{it\xi}\left(e^{i\xi h} - 1\right)}{h}, \qquad \text{(XI.31.6)}$$

$$\left| \xi^k e^{it\xi} \frac{\left(e^{it\xi} - 1\right)}{h} \right| \le |\xi|^{k+1}, \qquad M|\xi|^{k+1} < \infty$$

bo‘lganligidan, (XI.31.6) da $h \to 0$ da (XI.31.5) ning $k+1$ da o‘rinlili bo‘lishini ko‘ramiz. Endi $R_n(t) \to 0$ ni ko‘rsatamiz:

$$|R_n(t)| = \left| M\left(e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it\xi)^k}{k!} \right) \right| \le M \left| e^{it\xi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(it\xi)^k}{k!} \right| \le \frac{|t|^{n+1}}{(n+1)!} M|\xi|^{n+1} J_A + 2M \frac{|t|^n |\xi|^n}{n!} J_A,$$

(XI.31.7)

bu yerda $A = \{|\xi| \le x\}$. Bundan tashqari

$$\left| e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \right| \le \left| e^{i\varphi} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(i\varphi)^k}{k!} \right| + \frac{|\varphi|^n}{n!} \le 2\frac{|\varphi|^n}{n!}.$$

$|\xi| \le x$ da $J_A = 1$ ligi uchun, (XI.31.7) dan

$$|R_n(t)| \le \frac{|t|^{n+1} x^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{2|t|^n}{n!} M|\xi^n| J_{\bar{A}}.$$

$\varepsilon > 0$ va x ni shunday tanlaymizki $M|\xi|^n J_{\bar{A}} < \frac{\varepsilon}{4}$ va $\delta = \frac{(n+1)}{2x}\varepsilon$ bo‘lsin, u holda, $|t| < \delta$ uchun

$$|R_n(t)| \le \frac{|t|^n}{n!}\varepsilon$$

ni hosil qilamiz, bu esa o‘z navbatida $t \to \infty$ da $R_n(t) \to 0$ ligini ko‘rsatadi.

<u>7-Xossa.</u> Agar $\varphi_\xi(S) = MS^\xi$ bo‘lsa, xarakteristik funksiya ta’rifidan

$$f_\xi(t) = \varphi_\xi(e^{it}) \qquad \text{(XI.31.8)}$$

bo‘lishi kelib chiqadi.

AYLANTIRISH FORMULASI

$\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ tasodifiy vektor uzluksiz $P_\xi(x)$ zichlik funksiyaga va $\int_{R^k} |f_\xi(t)| dt < \infty$ shartni qanoatlantiruvchi $f_\xi(t)$ xarakteristik funksiyaga ega bo‘lsin, u holda

$$P_\xi(x) = \frac{1}{(2\pi)^k} \int_{R^k} e^{-i(t,\, x)} f_\xi(t) dt \qquad \text{(XIV.39.1)}$$

bajariladi.

(XIV.39.1) ga asoslangan holda aylantirish formulasini ko‘rsatamiz. $\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_k)$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_k)$ tasodifiy vektorlar bog‘liqsiz koordinatlarga ega, η_α $(-l_\alpha, l_\alpha)$ da tekis, $(0, 1)$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lib, $S = \xi + \eta + \sigma\,\theta$ desak va ξ, η, θ lar bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda S ning xarakteristik funksiyasi

$$f_S(t) = f_\xi(t) \prod_{\alpha=1}^{k} \frac{\sin l_\alpha t_\alpha}{l_\alpha t_\alpha} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\sum_{\alpha=1}^{k} t_\alpha^2} \in L_1$$

ko‘rinishda bo‘ladi (ya’ni $\int_{R^k} |f_S(t)| dt < \infty$).

Oxirgi tenglik va (XIV.39.1) dan

$$P_S(x)=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{R^k} e^{-i(t,\,x)} f_S(t)dt \qquad \text{(XIV.39.2)}$$

ni hosil qilamiz.

$\Delta(x,\, b)$ bilan uchlari $x_\alpha \pm l_\alpha,\ \alpha=1,\ldots,k$ nuqtada bo‘lgan to‘g‘ri burchakni belgilaymiz.

Bir o‘lchovli holdagidek, $\delta \to 0$ da, zichlik funksiyaning uzluksiz nuqtalarida

$$P_S(x)\to P_{\xi+\eta}(x)=\frac{1}{2^{kb_1 \ldots b_k}} P(\xi\in\Delta(x,\, l))$$

bajariladi. Shuning uchun, (XIV.39.2) dan foydalanilgan holda, aylantirish formulasi

$$P(\xi\in\Delta(x,\, t))=\frac{1}{\pi^k}\lim_{\sigma\to 0}\int_{R^k} e^{-i(t,x)} f_\xi(t)\prod_{\alpha=1}^{k}\frac{\sin l_\alpha t_\alpha}{t_\alpha} e^{-\frac{\sigma^2}{2}\sum_{\alpha=1}^{k} t_\alpha^2} dt \qquad \text{(XIV.39.3)}$$

Munosabat bilan bir qiymatli aniqlanadi.

7.4-MAVZU
MARKOV ZANJIRI

REJA

1. **BOG‘LIQ TAJRIBALAR**
2. **MARKOV ZANJIRI**

TAYANJ ZO’ZLAR. BOG’LIQ TAJRIBALAR. MARKOV ZANJIRI. O‘TISH EHTIMOLLIGI.

Hozirga qadar o‘zaro bog‘liq bo‘lmagan tajribalar bilan ish ko‘rgan edik. Endi esa, bog‘liq tajribalar ketma-ketligining sodda holi bilan tanishaylik. Faraz qilaylik, qandaydir sistema fazoda $E=\{l_1,l_2,\ldots,l_r\}$ holatni ifodalasin, ko‘pincha E ning elementlarini $1,2,\ldots,r$ bilan ham belgilash mumkin. Xususiy holda t vaqtni diskret deb qabul qilaylik: $t=0,1,2,\ldots.,T$. O‘rganilayotgan sistema fazoda qandaydir traektoriyani tashkil etadi, agar sistema t vaqtda i holatda bo‘lsa, bu holda $\omega_t=i$ bo‘ladi, (Ω, A, P) da $\Omega=\{\omega\}$ fazodagi trayektoriyalaridan, A algebra esa Ω ning barcha to‘plam ostilaridan, P elementar hodisalar ehtimollaridan iborat bo‘ladi. t larda $A_i(t)=\{\omega:\omega_t=i\},\ i=1,\ldots,2$ hodisasi α_t bo‘linishlarni hosil qilib, A algebrani yuzaga keltiradi, bu holda

$$\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots., \mathrm{A}_T \qquad \text{(VI.18.1)}$$

tasodifiy tajribalarni hosil qilamiz.

Bu modelni birinchi bor A.A.Markov* 1907 yilda kiritgan. Hozirgi vaqtda bu model atroflicha o‘rganilgan bo‘lib, umumiy hollarda o‘rganish hali ham davom etmoqda.

Biz, xususiy hollarda, diskret Markov zanjirlarini o‘rganamiz. (VI.18.1) tajribalar ketma-ketligida t vaqtni tayinlaymiz, unda A_t-hozirgi, $\mathrm{A}_0, \mathrm{A}_1, \ldots., \mathrm{A}_{t-1}$

---

* A.A.Markov

yuzaga keltirgan A_0^{t-1} ni o‘tgan, $\mathsf{A}_t,...,\mathsf{A}_T$ lar yuzaga keltirgan A_{t+1}^T ga keyingi holat deb nomlaymiz.

Masalan, $\{\omega:$ shunday k topiladiki, $t<k<T$ va $\omega_k=\omega_{k+1}\}$ hodisa keyingi holatga, $\{\omega:$ barcha k lar uchun $0\le k<t,\ \omega_k\ne r\}$ hodisa o‘tgan holatga kiradi.

<u>Ta’rif:</u> Agar ixtiyoriy tayinlangan $\omega_k=k$ uchun o‘tgan A_0^{t-1} algebra va A_{t+1}^T keyingi algebra bog‘liqsiz bo‘lsa, ya’ni ixtiyoriy $1\le k\le r,\ t=1,2,\ ...\ ,T-1,\ A\in\mathsf{A}_0^{t\text{-}1},\ B\in\mathsf{A}_{t+1}^T$ lar uchun

$$P\{AB\setminus\omega_t=k\}=P\{A\setminus\omega_t=k\}\cdot P\{B\setminus\omega_t=k\} \qquad \text{(VI.18.2)}$$

bajarilsa, u holda (VI.18.1) tajribalar kema-ketligi markov zanjirini tashkil qiladi, - deyiladi.

Shartli ehtimollik ta’rifidan, ixtiyoriy $A,B,C,\ P(AC)>0$ larda

$$\frac{P(AB\setminus C)}{P(A\setminus C)}=P(B\setminus AC)$$

ligidan (VI.18.2) ifodani

$$P\{B\setminus\omega_t=k,A\}=P\{B\setminus\omega_t=k\}, \qquad \text{(VI.18.3)}$$

yoki

$$P(A_k(t)\setminus A_i(0),A_i(1),...,A_i(t-1))=P(A_k(t)\setminus A_i(t-1))$$

ko‘rinishda ham yozish mumkin.

Ehtimolliklarni ko‘paytirish formulasiga asosan

$$P\{\omega=(\omega_0=i_0,\ \omega_1=i_1,...,\omega_T=i_T)\}=P\{\omega=(i_0,i_1,i_2,...,i_T)\}=$$
$$=P(A_i(0))\prod_{t=1}^{T}P(A_{i_t}(t)\setminus A_{i_0}(0)A_{i_1}(1).....A_{i_{t-1}}(t-1)). \qquad \text{(VI.19.1)}$$

$$P(A_{i_t}(t)\setminus A_{i_0}(0)A_{i_1}(1).....A_{i_{t-1}}(t-1))=P(A_{i_t}(t)\setminus A_{i_{t-1}}(t-1)),$$

(VI.18.3) dan foydalanib, Markov zanjiri uchun

ni yozish mumkin, bundan (VI.19.1) ifodani

$$P\{\omega=(i_0,i_1,...,i_T)\}=P_{i_0}(0)\prod_{t=1}^{T}P(A_{i_t}(t)\setminus A_{i_{t-1}}(t-1)) \qquad \text{(VI.19.2)}$$

ko‘rinishida ifodalaymiz.

1. $P(A_j(t)\setminus A_i(t-1))=P_{ij}(t)=P_{ij}$ bo‘lsa, bunday jarayonga bir jinsli Markov zanjiri deyiladi, P_{ij} ga esa bir qadamda o‘tish ehtimollligi deyiladi. Markov zanjirida ixtiyoriy ω traektoriyaning ehtimolligini hisoblash uchun $P_i(0)=P(A_i(0))$ boshlang‘ich taqsimot va

$$P=\begin{Vmatrix}P_{11}\ \ P_{12}\ ....P_{1r}\\ P_{21}\ \ P_{22}\ ....P_{2r}\\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\ P_{r1}\ \ P_{r2}\ ....P_{rr}\end{Vmatrix} \qquad \text{(VI.19.3)}$$

o‘tish ehtimollari matrisasi berilishi yetarlidir. Bu holda (VI.19.2) ifoda

$$P\{\omega=(i_0,i_1,...,i_T)\}=P_{i_0}(0)\prod_{t=1}^{T}P_{i_{t-1}i_t} \qquad \text{(VI.19.3)}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bir qadamda o‘tish ehtimolligi

$$P_{ij}\geq 0,\quad \sum_{j=1}^{r}P_{ij}=1 \qquad \text{(VI.19.4)}$$

xossalarga ega bo‘lgan matrisaga <u>stoxastik matrisa</u> deyiladi.

t qadamda o‘tish ehtimolligi

$$P_{ij}(t)=P\{A_j(t+S)\setminus A_i(S)\}$$

matrisasi $P(t)=\|P_{ij}(t)\|$ ham stoxastik matrisa bo‘ladi. O‘tish ehtimolligi $t>0, S>0$ da

$$P_{ij}(t+S)=\sum_{k=1}^{r}P_{i_k}(t)P_{kj}(S) \qquad \text{(VI.19.5)}$$

tenglamani qanoatlantiradi.

Haqiqatan ham, to‘la ehtimollik formulasiga ko‘ra

$$P_{ij}(t+S)=P(A_j(t+S)\setminus A_i(0))=\sum_{k=1}^{r}P(A_j(t+S)\setminus A_i(0)A_k(S))\cdot P(A_k(S)\setminus A_i(0))$$

(VI.19.6) Markov zanjiri uchun

$$P(A_j(t+S)\setminus A_i(0)A_k(S))=P(A_j(t+S)\setminus A_k(S))$$

o‘rinli va bir jinslilik xossasiga ko‘ra

$$P(A_j(t+S)/A_k(S))=P(A_j(t)\setminus A_k(0))$$

bo‘lgani uchun, (VI.19.6) formulaga asosan, (VI.19.5) kelib chiqadi.
(VI.19.5) formulani matrisa ko‘rinishida

$$P(t+S)=P(t)P(S) \qquad \text{(VI.19.7)}$$

kabi yozamiz, bu formulaga <u>Markov tenglamasi</u> deyiladi, bundan $P(t)=P^t$, $P(1)=P$ - (VI.19.3) matrisa, xususan

$$P_i(t)=P(A_i(t))=\sum_{k=1}^{r}P_k(0)P_{ki}(t) \qquad \text{(VI.19.8)}$$

bo‘ladi.

<u>1-misol. Yutuvchi ekranli daydish.</u>

Zarracha $0,1,2,...,N$ nuqtalar bo‘yicha to‘g‘ri chiziqda harakat qilgan holda o va N nuqtalarga kelsa, harakatdan to‘xtaydi. t vaqtda zarracha i nuqtada bo‘lsa, $t+1$ vaqtda oldingi $t-1$ vaqtga bog‘liq bo‘lmagan holda P_{ij} ehtimollik bilan j nuqtaga kelsin.

Agar $\|P_{ij}\|$ matrisada P_{ij} quyidagicha berilsa:
$P_{00}=P_{NN}=1,\ P_{i,i+1}=P_j,\ P_{i,i-1}=1-P,\ 1\leq i\leq N-1$ va $|i-j|>1$ da $P_{ij=0}$ bo‘lsa, u holda bu sxema Markov zanjirini tashkil qiladi.

<u>2- Misol. Qaytuvchi ekranli daydish.</u> O‘tish ehtimolliklari $1\leq i\leq N-1$ uchun $P_{i,i+1}, P_{i,i-1}$ va $|i-j|>1$ da $P_{ij}=0$ bo‘lib, $P_{00}=1-P, P_{01}=P, P_{NN}=P, P_{N,N-1}=1-P$ bo‘lsin, bu daydish ham $\left(-\frac{1}{2},N+\frac{1}{2}\right)$ orasida Markov zanjirini tashkil qiladi hamda $P_{00}=1-P,\ P_{NN}=P$ ehtimollik zarrachani 0 va N dan qaytishini ta’minlaydi.

3-misol. Zarracha t vaqtda $0,1,2,...,N$ nuqtalar bo‘yicha harakatda bo‘lib, bir qadamda o‘ngga yoki chapga, mos ravishda, $P,\ q=1-P$ ehtimollik bilan siljishi mumkin. Zarrachaning o‘z o‘rnida qolish ehtimoli esa nolga teng bo‘lsin.

Agar zarracha a nuqtada bo‘lsa, turtki natijasida bir ehtimol bilan o‘ngga, b nuqtada bo‘lsa, bir ehtimol bilan chapga siljisin. Ushbu zanjir uchun o‘tish ehtimollarining matrisasi tuzilsin.

Yechish. Bu holda

$$P=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0\ldots0 & \\ q & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & q & 0\ldots0 & 0 & \\ . & . & . & . & . . . . \\ 0 & 0 & 0 & 0..1 & 0 \end{pmatrix}$$

bo‘lib, 10 qadamda o‘tish matrisasi esa $[P]^{10}$ dan iborat bo‘ladi.

Teorema. Agar biror t_0 da p^{t_0} matrisasining barcha $P_{ij}(t_0)$ elementlari musbat bo‘lsa, u holda

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t)=P_j,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ r$$

bajariladi va P_j limitik ehtimol boshlang‘ich $i-$nchi holatga bog‘liq emas, hamda

$$\sum_{k=1}^{r} x_k P_{kj}=x_j,\ \ j=1,2,\ldots,r,\qquad \sum_{j=1}^{r} x_j=1 \qquad \text{(VI.20.1)}$$

tenglamaning yagona yechimidan iborat bo‘ladi.

Isbot. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz.

$$M_j(t)=\max_i P_{ij}(t),\qquad m_j(t)=\min_i P_{ij}(t).$$

$m_j(t)\le P_{kj}(t)\le M_j(t),\ k=1,2,\ldots,r,$ o‘rinliligidan,

$$P_{ij}(t+1)=\sum_k P_{ik}P_{kj}(t)$$

tenglikni hisobga olsak,

$$m_j(t)\le P_{ij}(t+1)\le M_j(t)$$

bo‘ladi. Oxirgi tengsizlikdan

$$m_j(t)\le m_j(t+1)\le M_j(t+1)\le M_j(t).$$

Bundan $m_j(t), M_j(t)$ larning limitga ega bo‘lishlari kelib chiqadi. Endi $m_j(t)$ va $M_j(t)$ lar limitlarining tengligini ko‘rsatamiz.

Ixtiyoriy i va j da

$$P_{ik}(t+t_0)=M_k(t+t_0),\ P_{jk}(t+t_0)=m_k(t+t_0)$$

bo‘lsin, u holda

$$M_k(t+t_0)=P_{ik}(t+t_0)=\sum_{l=1}^{r} P_{il}(t)P_{lk}(t),$$

$$m_k(t+t_0)=P_{jk}(t+t_0)=\sum_{l=1}^{r} P_{jl}(t_0)P_{lk}(t)$$

tengliklardan

$$M_k(t+t_0)-m_k(t+t_0)=\sum_{l=1}^{r}\left(P_{il}(t_0)-P_{jl}(t_0)\right)P_{lk}(t).$$

Bu tenglikning o‘ng tomonidagi musbat qo‘shiluvchilardan tuzilgan $\sum^{+}$ yig‘indini alohida, manfiy qo‘shiluvchilardan tuzilgan $\sum^{-}$ yig‘indini alohida baholaymiz. U holda

$$M_k(t+t_0)-m_k(t+t_0)\le M_k(t)\sum_l{}^{+}\left(P_{il}(t_0)-P_{jl}(t_0)\right)+m_k(t)\sum_l^{-}\left(P_{il}(t_0)-p_{jl}(t_0)\right). \quad \text{(VI.20.2)}$$

Ammo

$$0=\sum_l\left(P_{ie}(t_0)-P_{jl}(t_0)\right)=\sum^{+}+\sum^{-},\ \text{bundan}\ \sum^{-}=-\sum^{+}\ .$$

Teorema shartidan, barcha d_{ij} lar quyidagi tengsizlikni qanoatlantiradi:

$$d_{ij}=\sum_l^{+}\left(P_{i,l}(t_0)-P_{jl}(t_0)\right)<1.$$

(VI.20.2) dan $t\to\infty$ da

$$M_k(t+t_0)-m_k(t+t_0)\le\max_{i,j}d_{ij}\left(M_k(t)-m_k(t)\right)$$

va

$$0\le M_k(t)-M_k(t_0)\le\max_{i,j}d_{ij}^{[\frac{t}{t_0}]}\to 0,$$

$m_k(t)\le P_{ik}(t)\le M_k(t)$ ligini hisobga olsak, (VI.19.8) ning o‘rinliligi kelib chiqadi.

Teorema isbotining ikkinchi qismini ko‘rsatamiz:

$$P_{ij}(t+1)=\sum_{k=1}^{r}P_{ik}(t)P_{kj}$$

tenglikdan $t\to\infty$ da

$$P_j=\sum_{k=1}^{r}P_kP_{kj},\qquad \sum_{j=1}^{r}P_j=1$$

kelib chiqadi va p_j lar (VI.20.1) sistemaning yechimi bo‘ladi.

Faraz qilaylik, qandaydir $x_1,x_2,\ldots,x_r$ lar (VI.20.1) ni qanoatlan-tirsin, u holda $x_1,x_2,\ldots,x_r$ lar ixtiyoriy t da

$$x_j=\sum_{k=1}^{r}x_kP_{kj}(t) \quad \text{(VI.20.3)}$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiradi.

Haqiqatan ham,

$$\sum_{k=1}^{r}x_kP_{kj}(t+1)=\sum_{k=1}^{r}x_k\sum_{l=1}^{r}P_{kl}P_{lj}(t)=\sum_{l=1}^{r}\left(\sum_{k=1}^{r}x_kP_{kl}\right)P_{lj}(t)=\sum_{l=1}^{r}x_lP_{lj}(t)=x_j\ .$$

(VI.20.3) tenglamada $t\to\infty$ da limitga o‘tib

$$x_j=\sum_{k=1}^{r}x_kP_j=P_j$$

ifodaga ega bo‘lamiz. Teorema isbot bo‘ldi.

4-misol. O‘tish matrisasi

$$P=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

bo‘lsa, P^t matrisa uchun limit teorema o‘rinlimi?

<u>Yechish.</u>

$$P^2=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

P^2 matrisani elementlari musbat bo‘lgani uchun limit teorema o‘rinlidir.

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o’quv qo’llanmalar ro’yhati

Asosiy adabiyotlar

132. Sh. Mirziyoyev Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent “O’zbekiston” 2017. 488 b.
133. Sh. Mirziyoyev Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta’minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O’zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganligining 24 yilligiga bag’ishlangan tantanali marosimdagi ma’ruza. 2016-yil 7-dekabr. Toshkent - “O’zbekiston” - 2017. 32 b.
134. Ш.Мирзиёев Танқидий тахлил, қатъий тартиб – интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Тошкент – “Ўзбекистон” 2017.
135. Ш.Мирзиёев Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига баg‘ишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ. Тошкент – “Ўзбекистон”. 2016. 56 б.

11 Ш.Қ.Форманов “Эҳтимолликлар назарияси”, Тошкент “Университет” 2014 й.
6.Ross, Sheldon M. A first course in probability. Pearson Education, Inc. 2010.
7.Robert B. Ash Basic probability theory. Dover Publications, Inc. 2008.

Qo’shimcha adabiyotlar

136. А.А.Абдушукуров, Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, ЎзМУ, 2010 й.
137. А.А.Абдушукуров, Т.М.Зупаров, “Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика”, Тафаккур Бўстони, 2015 й.
138. А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» Тошкент, «Университет», 2003 й.
139. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
140. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.

141. Б.А.Севастьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
142. С.Ҳ.Сирожиддинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
143. Севастянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
144. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука»,1989 г.
145. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
11. Mamatov M., Ibragimov R., Mashrabboev A., Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistika.T., 2008 y
12. Ibragimov R..,Mashrabboev A. Polvanov R. Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistikadan masalalar to'plamiми, Namangon 2018y.

Internet saytlari

146. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси ҳукумат портали.
147. www.lex.uz -Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
148. http://www.rsl.ru
149. https://www.khanacademy.org/math/probability
150. http://www.msu.ru
151. http://sunzi.lib.hku.hk/ER/subject/hkul/510/ej/1
152. http://www.nlr.ru
153. http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/business-stat/R.htm

MATEMATIK STATISTIKANING PREDMETI

8-mavzu. Matematik statistikaning asosiy masalasi-4 soat

8.1 Bosh to'plam. Tanlanma to'plam

Reja

1. **Statistik kuzatish**
2. **Statistik gipoteza**
3. **Tanlanma usul**
4. **Bosh to'plam.**
5. **Tanlanma to'plam**

Tayanj iboralar. Kuzatish.Gipoteza. Tanlanma usul. CHastota. Nisbiy chastota

Matematik statistika mustaqil fan bo'lib ehtimollar nazariyasi asosida quriladi va ehtimollar nazariyasi usullaridan foydalaniladi.

Statistik kuzatishlar natijasida olingan natijalarga statistik ma'lumotlar deyiladi. Statistik ma'lumotlar sonli qiymatlar bilan xarakterlanadi va bu miqdorlar yordamida ehtimollar nazariyasining ma’lum sxemasi (modeli) asosida kerakli xulosalar chiqariladi. Masalan, Bernulli sxemasida n-ta bog‘liqsiz kuzatish olib borilsin va bulardan m tasida A hodisasi ro‘y bersin. Bunda kuzatish soni n va uning ehtimolligi $P(A)$ sxemani aniqlar ekan va demak n ta bog‘liqsiz kuzatishda A hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $P = P(A)$ ni topish masalasi kelib chiqadi. Bu esa matematik statistika masalasidir. Bundan tashqari bu sxemada matematik statistikani quyidagi masalalari kelib chiqadi:

a) Statistik gipotezalarni (farazlarni) tekshirish. Statistik gipoteza deb, noma’lum taqsimotning ko‘rinishi haqidagi yoki ma’lum taqsimotlarning parametrlari haqidagi gipotezaga aytiladi.

Faraz qilaylik, bizga kundalik tajriba natijasida $P = P_0$ ekani deyarli ma’lum bo‘lsin, bunda P_0-qandaydir o‘zgarmas son. Sxemadan ma’lumki, A hodisasining ro‘y berishlar chastotasi $\frac{m}{n}$ katta n larda P ga yaqin bo‘ladi, shular asosida $P = P_0$ ni to‘g‘riligini tekshirish talab qilinsin. Buning uchun $\left|\frac{m}{n} - P_0\right|$ tahlil qilinishi kerak.

Agar, bu ayirma yetarlicha kichik bo‘lsa, u holda gipoteza qabul qilinadi aks hoda rad etiladi.

b) Noma’lum parametrlarning statistik bahosi. Bernulli sxemasining noma’lum P ni o‘rniga $\hat{P}$ ni P ga yaqinlik darajasini aniqlash muhimdir.

v) Ishonchli interval deb, baholanayotgan parametrni berilgan γ ehtimollik bilan qoplaydigan intervalga aytiladi.

Tanlanma usul

Ko‘pgina statistik masalalarni quyidagi sxema orqali tushuntiriladi.

Faraz qilaylik, yashikda

$$x = (x_1,\ x_2, \ldots, x_N) \qquad \text{(XVII.49.1)}$$

belgili sharlar mavjud va tasodifan n ta

$$x_1, x_2, \ldots x_n \qquad \text{(XVII.49.2)}$$

sharlar olinsin.

ξ ning kuzatilgan x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ qiymatlari variantalar, n ga tanlanma hajmi deyiladi.

Agar olingan variantalar qaytarib qo‘ymasdan olingan bo‘lsa, u holda (XVII.49.2) qatorni chiqish ehtimolligi $\frac{1}{C_N^n}$, qaytarib qo‘yilsa uning chiqish ehtimolligi $\frac{1}{N^n}$ ga teng bo‘ladi.

Bundan ko‘rinadiki variantalar qaytarib qo‘yilsa (XVII.49.2) lar bog‘liqsiz tasodifiy miqdorni tashkil qiladi va uning taqsimoti $P(\xi = x_i) = \frac{1}{N}$; $i = \overline{1, N}$ bo‘lgan ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini beradi.

Agar (XVII.49.2) da variantalarni oshib borish tartibida joylashtirilsa, ya’ni

$$x_{(1)} \le x_{(2)} \le ... \le x_{(n)},$$

u holda bunday tartibda yozilgan variantalar ketma-ketligiga variastion qator deyiladi.

Ta’rif. Ixtiyoriy (XVII.49.2) tanlanmaning statistik (empirik) taqsimoti deb, variastion qatorning x_i variantalari va ularning mos n_i chastotalar (barcha chastotalar yig‘indisi tanlanmaning hajmi N ga teng) yoki $W_i = \frac{n_i}{x_i}$ nisbiy chastotalaridan tuzilgan ro‘yxatiga aytiladi.

Tanlanmaning statistik taqsimoti intervallar ketma-ketligi va ularga mos chastotalar ko‘rinishida ham berilishi mumkin (intervalning chastotasi sifatida bu intervalga tushgan variantalarning chastotalari yig‘indisi olinadi).

Bu sxemada (XVII.49.2) -nchi tanlanma ushbu diskret

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_n
P	$\frac{1}{n}$	$\frac{1}{n}$	$\dots$	$\frac{1}{n}$

taqsimotga ega bo‘ladi.

Ta’rif. Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb, har bir x qiymat uchun $X < x$ hodisasining nisbiy chastotasini aniqlaydigan $\hat{F}(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$\hat{F}(x) = \frac{n_x}{n}$$

bu yerda n_x $-x$ dan kichik variantalar soni.

Yuqoridagi misolda empirik taqsimot funksiya

$$\hat{F}(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\Im_{\{x_k\le x\}} \qquad \text{(XVII.49.3)}$$

bo‘ladi, bu yerda $\Im_{\{x_k\le x\}}$ mos indikator.

Agar (XVII.49.2) ning tasodifiyligini hisobga olsak, u holda (XVII.49.3), har bir x da, tasodifiy miqdor bo‘ladi; natijada empirik taqsimotning matematik kutilmasi (o‘rtacha qiymati), dispersiyasi, momentlari tasodifiy miqdor bo‘ladi va mos ravishda, tanlanma o‘rtacha qiymat, tanlanma dispersiya deyiladi va

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k, \qquad S^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Mos ravishda, r momentlar va r-nchi markaziy momentlar

$$\bar{x}^r=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k^r, \quad S^r=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-\bar{x})^r$$

formulalar orqali hisoblanadi.

Taqsimot yoki taqsimot qonuni chastotalar yordamida ham berilishi mumkin:

ξ	x_1	x_2	$\dots$	x_k
n	n_1	n_2	$\dots$	n_k

bu yerda $n=\sum_{i=1}^{k}n_i$ tanlanma hajmi, bu holda

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i, \qquad S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\bar{x})^2,$$

$$\bar{x}^r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}n_i x_i^r, \quad S^r=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i-\bar{x})^r n_i \quad \text{bo‘ladi.}$$

8.2-mavzu.Gruhlangan va interval variatsion qatorlar .Tanlanmani dastlabki qayta ishlash

Reja

1. Poligon va gistogramma
2. MODA VA MEDIANA
3. Variatsion qatorlar

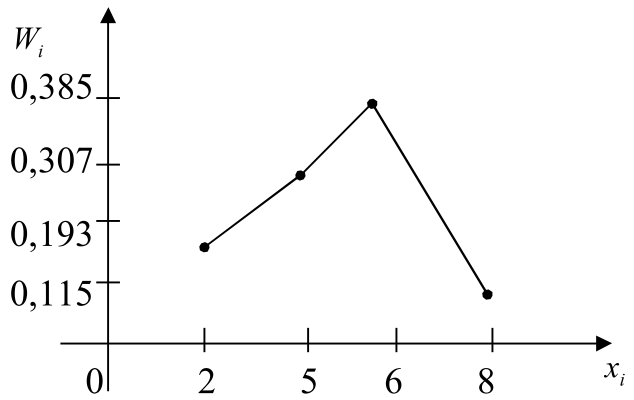
TAYANJ SO’ZLAR. POLIGON.GISNOGRAMMA. MODA MEDIANA. TANLANMA O‘RTA QIYMATNING ABSOLYUT OG‘ISHI, VARIASTIYA KOEFFISENTI.

x belgi diskret taqsimotining chastotalar poligoni deb, $(x_1, n_1), (x_2, n_2), ..., (x_k, n_k)$ nuqtalarni tutashtirgan siniq chiziqqa aytiladi. Nisbiy chastotalar poligoni deb, $(x_1, W_1), (x_2, W_2), ..., (x_k, W_k)$ nuqtalarni tutashtiradigan siniq chiziqqa aytiladi, bu yerda $W_i = \frac{n_i}{n}$ $\left(i = \overline{1, k}\right)$.

1-**misol**. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang:

ξ	2	5	6	8
n_i	5	8	10	3

Yechish. Avval W_i nisbiy chastotalarni topib olamiz. Abssissalar o‘qida x_i variantalarni, ordinatalar o‘qida esa ularga mos $\frac{n_i}{n}$ nisbiy chastotalarni $W_i: 0{,}193;\ 0{,}307;\ 0{,}385;\ 0{,}115$ qo‘yamiz. (x_i, W_i) nuqtalarni to‘g‘ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, izlanayotgan nisbiy chastotalar poligonini hosil qilamiz (1-shakl).



1-shakl.

x belgi uzluksiz taqsimlangan holda, belgining barcha kuzatilgan qiymatlari yotgan intervalni uzunligi h bo‘lgan qator qismiy intervallarga bo‘linadi va i-intervalga tushgan variantalarning chastotalari yig‘indisi n_i topiladi.

Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$ nisbatlarga (chastota zichligi)ga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figuraga aytiladi.

(i)-qismiy to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $h \cdot \frac{n_i}{h} = n_i$, i-intervalga tushgan variantalarning chastotalari yig‘indisiga teng. Gistogrammaning yuzi barcha chastotalar yig‘indisiga, ya’ni tanlanma hajmi n ga teng.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallar, balandliklari $\frac{W_i}{h}$ nisbatga teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchaklardan iborat pog‘onaviy figuraga aytiladi, i-qismiy to‘g‘ri to‘rtburchakning yuzi $h \cdot \frac{W_i}{h} = W_i$ ga, ya’ni i-intervalga tushgan variantalarning nisbiy chastotalari yig‘indisiga teng. Nisbiy chastotalar gistogrammasining yuzi barcha nisbiy chastotalar yig‘indisiga, ya’ni birga teng.

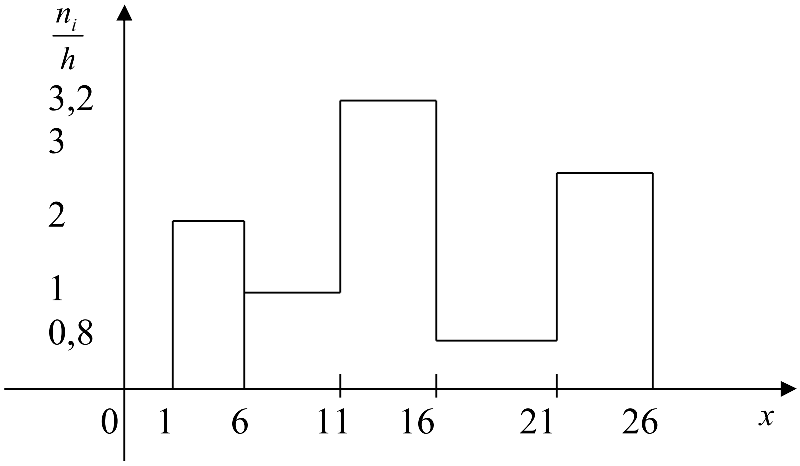
2-misol. $n = 50$ hajmli tanlanmaning quyida berilgan taqsimoti bo‘yicha gistogrammasini yasang.

Interval nomeri	Qismiy interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig‘indisi	Chastota zichligi
i	$x_i - x_{i+1}$	n_i	$n_i : h$
1	1-6	10	2
2	6-11	5	1
3	11-16	16	3,2
4	16-21	4	0,8
5	21-26	15	3

Yechish: $h = 5$ ligidan absissalar o‘qida $h = 5$ uzunlikdagi berilgan intervallarni yasaymiz.

Bu intervalning ustida absissalar o‘qiga parallel va undan tegishli chastota zichliklari $\frac{n_i}{h}$ ga teng masofada bo‘lgan kesmalar o‘tkazamiz.

Izlanayotgan chastotalar gistogrammasi 2-shaklda tasvirlangan.



2-shakl.

Misollar. 1. Variantalar va mos chastotalar berilgan

x_i:	2	4	6	8	10
n_i:	1	3	2	5	2

Tanlanmaning empirik taqsimoti, empirik taqsimot funksiyasi, tanlanma o‘rta qiymati, tanlanma dispersiyasi, nisbiy chastota poligoni topilsin.

2. Kuzatish [1,2] kesmadagi zarrachalar sonini aniqlashdan iborat. Natija jadvalda berilgan :

$x_i - x_{i+1}$	1-1,2	1,2-1,4	1,4-1,6	1,6-1,8	1,8-2
n_i	2	3	4	2	1

Bunda n_i $[x_i,\ x_{i+1}]$ oraliqqa mos kelgan zarrachalar soni. Nisbiy chastotalar gistogrammasi chizilsin.

3. $x_i - C = U_i$ almashtirish yordamida Namangan viloyati bo‘yicha 2002 yil 1 aprel holatida berilgan huquqiy shaxslarning mulk shakli sonini tanlanma o‘rta qiymati va dispersiyasi topilsin, bu yerda S tanlanma o‘rta:

x_i	787	850	1060	1200	1300
n_i	3	2	4	1	3

Faraz qilaylik, X belgining taqsimot qonuni

x_i	x_1	x_2	x_3	..	x_k
n_i	n_1	n_2	N_3	..	n_k

$n = \sum_{I=1}^{K} n_i$, berilgan bo‘lsin.

<u>Ta’rif.</u> Eng katta chastotaga ega bo‘lgan variantaga <u>moda</u>[242] deyiladi va μ_0 bilan belgilanadi.

1-**misol**. Quyidagi jadvalda O‘zbekistonda 1960-1999 yillar orasida, besh yil oralab, har yili ming kishi hisobiga tug‘ilishning x_i miqdorlari berilgan.

	1999	1995	1990, 1980, 1970	1965, 1975	1985	1960
x_i	22.3	29.8	33.8	34.5	37.2	39.8
n_i	1	1	3	2	1	1

Variantalar modasi topilsin.

Yechish: Ta’rifga ko‘ra 33.8 variantani chastotasi eng katta va demak, $\mu_0 = 33.8$.

Ta’rif. Variantalar qatorini variantarlar soni teng bo‘lgan ikki qismga ajratadigan varianta variastion qatorning medianasi[243] deyiladi va m_e bilan belgilanadi.

Agar variantalar soni juft, ya’ni $n = 2k$ bo‘lsa, u holda $m_e = (x_k + x_{k+1}) : 2$ bo‘ladi.

1-misolda $m_e = 33.8$.

Ta’rif. Eng katta varianta bilan eng kichik varianta orasidagi farqga variastiya uzunligi[244] deyiladi.

1-misolda ushbu miqdor 39, 8-22, 3 $=17$, 5 ga teng.

Ta’rif. Tanlanma o‘rta qiymatning absolyut og‘ishi [245] deb

$$\sum_{i=1}^{л} n_i \,|\, x_i - \bar{x} \,|: \ \sum_{i=1}^{л} n_i = Q$$

ifodaga aytiladi.

2-**misol**. 1-misol uchun absolyut og‘ish kattaligi Q ni hisoblang.

Yechish: Tanlanma o‘rta qiymat $\bar{x}$ ni hisoblaymiz. Buning uchun qulay usulni qo‘llaymiz:

$X_i - C = U_i$ bilan almashtirish bajaramiz, bu yerda C-soxta nol (eng katta chastotaga ega bo‘lgan varianta). Natijada $C = 33{,}8$ ligidan foydalanib, ushbu diskret taqsimotni hosil qilamiz:

U_i	-11.5	-4	0	0.7	3.4	6
n_i	1	1	3	2	1	1

Bundan, $\overline{U} = \frac{-15.5+10.8}{9} = -\frac{4.7}{9} = -0.522$.

Demak, $X = U + C = -0{,}522 + 33{,}8 = 33{,}278$.

$$+q\left(\frac{/\,22.3-33.278\,/+/\,29.8-33.278\,/+3\,/\,33.8-33.278\,/+2\,/\,34.5-33.278\,/+/\,37.2-33.278\,/=/\,39.8-33.278\,/}{9}\right):9=$$

=(10.978+3.478+1.566+2.444+3.922+6.522):9=3.212

Ta’rif. Variastion qatorning Variastiya koeffisienti[246] deb

$$v = \frac{\sigma_x}{\bar{x}} * 100$$

miqdorga aytiladi.

Bu miqdor ismsiz bo‘lib, turli ikki xil variastion qatorlarni solishtirish uchun ishlatiladi. Agar variantani variastiyasi katta bo‘lsa, u holda bu variantaning tarqoqligi kattadir.

3-**misol**. 1-misol uchun variastiya koeffisenti topilsin.

Yechish: U_i ning taqsimot qonunidan foydalanamiz (2-misol).

U_i^2	132, 25	16	0	0, 49	11, 56	36
n_i	1	1	3	2	1	1

Bundan

$$\overline{u}^2 = \frac{1}{9}(132{,}25 + 16 + 0{,}49 + 11{,}56 + 36) = 21{,}811,$$

$$\sigma_u^2 = \overline{u}^2 - (\overline{u})^2 = 21{,}811 - 0{,}272 = 21{,}539$$

Natijada $\sigma_x^2 = \sigma_u^2 = 21{,}539$ yoki $\sigma_x = 4,\ 641$ va demak,

$$v = \frac{4.641}{33.278} * 100 = 13{,}946\,.$$

8.3-mavzu. Empiiik taqsimot funksiy va uning uning xossalari

Empirik ko’rsatkichlar va ularni hisoblash.

Reja

1.Empirik taqsimot. Absolyut og‘ishi.

2 EMPIRIK TAQSIMOTNING ASSIMMETRIYASI.

3.EMPIRIK TAQSIMOTNING EKSSESSI

Tayanj so’zlar. Markaziy empirik momentlar. Absolyut og‘ishi .Moda.

Ta’rif. Empirik taqsimotning asimmetriyasi va ekssessi[247] mos ravishda ushbu tenglamalar bilan aniqlanadi:

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_x^3},\ e_k = \frac{m_4}{\sigma_x^4} - 3$$

Bu yerda m_3 va m_4 uchinchi va to‘rtinchi[248] tartibli markaziy empirik momentlar:

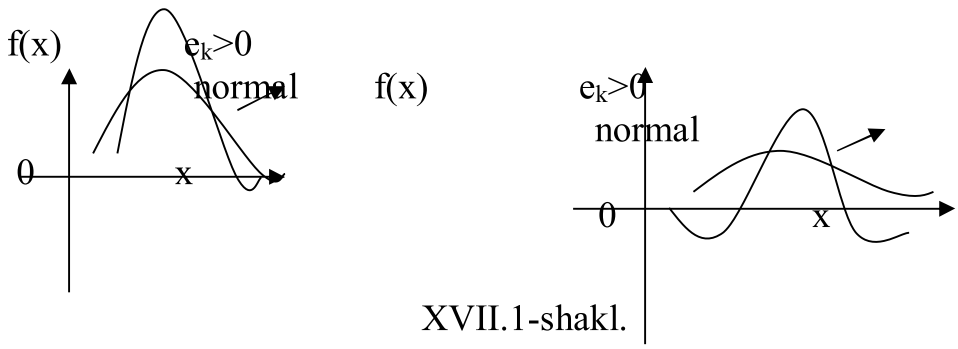
$$m_3 = \frac{\sum_{i=1}^{л} n_i (x_i - \overline{x})^3}{n},$$

$$m_4 = \frac{\sum_{i=1}^{л} n_i (x_i - \overline{x})^4}{n}.$$

Asimmetriya va ekssess koeffisenti taqsimotning normal qonundan chetlanishini bildiradi, xususan normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tanlanmaning asimmetriya va ekssess koeffisentlari nolga teng bo‘ladi. Agar e_x musbat (manfiy) bo‘lsa, u holda empirik taqsimot zichlik funksiyasining grafigining uzun qismi x dan o‘ng (chap) tomonda yotadi.

Ekssess koeffisenti tanlanma zichlik funksiyasining $\overline{X}$ atrofida normal qonunning zichlik funksiyasiga nisbatan balandlik darajasini bildiradi, xususan normal qonun uchun $e_k = 0$, ya’ni $m_4 / G = 3$.

Agar ye$_k$ >0 (e$_k$ <0) bo‘lsa, tanlanma zichlik funksiyasi normal taqsimlangan tanlanma zichlik funksiyasidan yuqorida (pastda) bo‘ladi (XVII.1-shakl).



XVII.1-shakl.

4-**misol**. 1-misolda keltirilgan taqsimot qonuni uchun asimmetriya va ekssessni toping.

Yechish: 1-misoldagi jadvaldan foydalanib ushbu jadvalni to‘ldiramiz:

$x_i - \overline{x}$	$(x_i - \overline{x})^2$	$(x_i - \overline{x})^3$	$(x_i - \overline{x})^4$	n_i
-10, 98	120, 56	-1323, 75	14534, 81	1
-3, 48	12, 11	-42, 14	146, 66	1
0, 52	0, 27	0, 14	0, 07	3
1, 22	1, 49	1, 82	2, 22	2
3, 92	15, 37	60, 25	236, 13	1
6, 52	42, 51	277, 17	1807, 13	1
		$\sum n_i(x_i - x)^3$ =-1023, 57	$\sum n_i(x_i - x)^4$ =16729, 38	

Natijada

$$m_3 = -\frac{1023{,}57}{9} = -113{,}73,$$

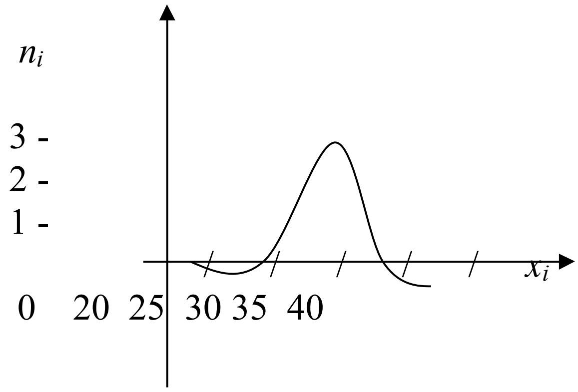
$$m_4 = \frac{16729{,}38}{9} = 1858{,}82,$$

$$a_s = \frac{m_3}{\sigma_x^3} = -\frac{113{,}73}{99{,}96} = -1{,}14,$$

$$\frac{m_4}{\sigma_x^4} = \frac{1858{,}82}{463{,}91} = 4,$$

$$e_k = \frac{m_4}{\sigma_x^4} - 3 = \frac{1858{,}82}{463{,}91} - 3 - 1 .$$

Demak, $a_s < 0$ ligidan zichlik funksiyasining uzun tomoni chapda, $e_k > 0$ bo‘lgani uchun mos grafik normal taqsimot zichligi grafigadan yuqorida joylashadi. Haqiqatan ham, bu xususiyat 2-shakldа tasvirlangan.



XVII. 2-shakl.

Empirik taqsimot qonuni.

$x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning taqsimot funksiyasi $F(x)$ noma’lum bo’lsin. Quyidagi funksiyani qaraymiz. $\mu_n(x) = \{x \text{ дан кичик бўлган } x_i \text{ лар сони}\}$

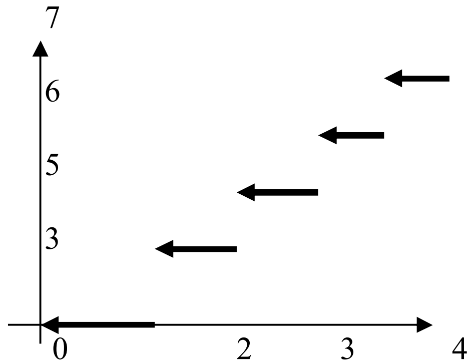
Misol

Misol. 2 2 2 3 3 4 5 tanlanmani qaraymiz.

$n = 7,\ x = 2,3,4,5,6$

$\mu_7(2) = 0,\ \mu_7(3) = 3,\ \mu_7(4) = 5,\ \mu_7(5) = 6,\ \mu_7(6) = 7$

$$\mu_7(X) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x \le 2 \\ 3, \text{ агар } 2 < x \le 3 \\ 5, \text{ агар } 3 < x \le 4 \\ 6, \text{ агар } 4 < x \le 5 \\ 7, \text{ агар } 5 > x \end{cases}$$

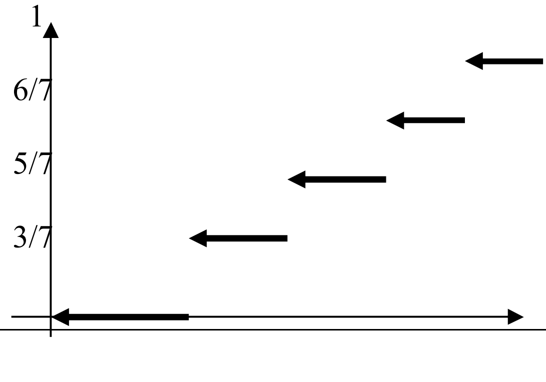


Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi

Teorema. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ deb, $\frac{1}{n} \cdot \mu_n(x)$ ga aytiladi.

Misol

Misol. 2 2 2 3 3 4 5 tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini yozamiz.



$$F_7(X)=\begin{cases}0, \text{ агар } x \le 2\\ \frac{3}{7}, \text{ агар } 2 < x \le 3\\ \frac{5}{7}, \text{ агар } 3 < x \le 4\\ \frac{6}{7}, \text{ агар } 4 < x \le 5\\ 1, \text{ агар } 5 > x\end{cases}$$	0/7 2 3 4 5

3.

1^0. $F_n(x)$ kamaymaydigan funksiya. 2^0. $\lim\limits_{x\to-\infty} F_n(x)=0$ 3^0. $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x)=1$ 4^0. $F_n(x)$ funksiya sanoqli sondagi uzilish nuqtasiga ega. 5^0. $F_n(x)$ funksiya 2-tur uzilishga ega. 6^0. $F_n(x)$ funksiya chapdan uzluksiz. $\left(\lim\limits_{x\to a-0} F(x)=F(a)\right)$.
Empirik ko'rsatkichlar va ularni hisoblash:O'rta tanlanma.

Misollar:

1.O'ZBEKISTON AHOLISINING 1990-2000 YILLAR ICHIDAGI SONI BERILGAN (YIL BOSHIDAGI HISOB MILLION KISHI):

20.3; 20.7; 21.2; 21.7; 22.2; 22.6; 23; 23.4; 23.9; 24.2; 24.5

TANLANMANING EMPIRIK TAQSIMOT FUNKSIYASINI, TANLANMA O'RTA QIYMATINI, TANLANMA DISPERSIYASINI O'RTA KOEFFISENTI, ASIMMETRIYASI, EKSSESSI TOPILSIN.

2. O'zbekiston Respublikasi viloyatlari bo'yicha 1999 yil uchun ming kishi hisobiga tug'ilganlar berilgan:
23.8; 21.9; 19.9; 24.7; 19.7; 23.1; 24.4; 22.3; 25; 2; 19; 21.1; 25.1; 27.5;

Mos variastion qator tuzilsin va tanlanma o'rta qiymat, tanlanma dispersiya, o'rta kvadratik xatolik, nisbiy chastota poligoni, variastiya koeffisenti, asimmetriyasi, ekssessi topilsin.

Empirik taqsimot qonuni.

$x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning taqsimot funksiyasi $F(x)$ noma'lum bo'lsin. Quyidagi funksiyani

qaraymiz. $\mu_n(x) = \{x \text{ дан кичик бўлган } x_i \text{ лар сони}\}$

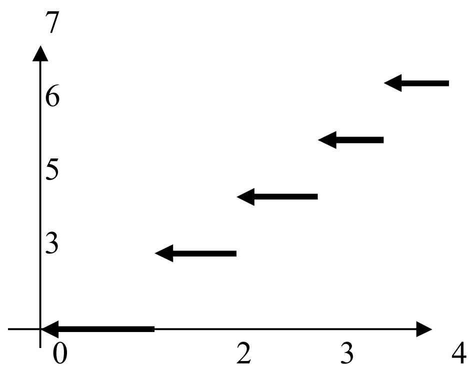
Misol

Misol. 2 2 2 3 3 4 5 tanlanmani qaraymiz.

$n = 7,\ x = 2,3,4,5,6$

$\mu_7(2) = 0,\ \mu_7(3) = 3,\ \mu_7(4) = 5,\ \mu_7(5) = 6,\ \mu_7(6) = 7$

$$\mu_7(X) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x \le 2 \\ 3, \text{ агар } 2 < x \le 3 \\ 5, \text{ агар } 3 < x \le 4 \\ 6, \text{ агар } 4 < x \le 5 \\ 7, \text{ агар } 5 > x \end{cases}$$



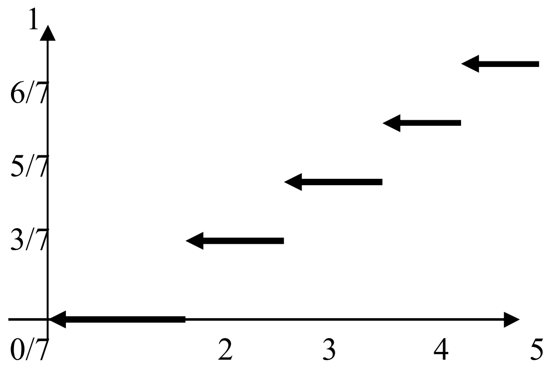
Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi

Teorema. $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi $F_n(x)$ deb, $\frac{1}{n} \cdot \mu_n(x)$ ga aytiladi.

Misol

Misol. 2 2 2 3 3 4 5 tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasini yozamiz.

$$F_7(X) = \begin{cases} 0, \text{ агар } x \le 2 \\ \frac{3}{7}, \text{ агар } 2 < x \le 3 \\ \frac{5}{7}, \text{ агар } 3 < x \le 4 \\ \frac{6}{7}, \text{ агар } 4 < x \le 5 \\ 1, \text{ агар } 5 > x \end{cases}$$



3.

1^0. $F_n(x)$ kamaymaydigan funksiya. 2^0. $\underset{x \to -\infty}{Lim} F_n(x) = 0$ 3^0. $\underset{x \to +\infty}{Lim} F_n(x) = 1$

4^0. $F_n(x)$ funksiya sanoqli sondagi uzilish nuqtasiga ega.

5^0. $F_n(x)$ funksiya 2-tur uzilishga ega.

6^0. $F_n(x)$ funksiya chapdan uzluksiz. $\left(\underset{x \to a-0}{Lim} F(x) = F(a)\right)$.

Empirik ko'rsatkichlar va ularni hisoblash:O'rta tanlanma.

(Glivenko-Kantelli) teoremasi

Har qanday tanlanmaning taqsimot funksiyasi $F(x)$ empirik funksiyani $F_n(x)$ deb belgilasak, u holda

$$\lim_{n \to \infty} P[F_n(x) \to F(x)] = 1$$

Demak, n yetarlicha katta bo'lganda noma'lum taqsimot funksiya o'rniga uning empirik taqsimot funksiyasini olish mumkin ekan.

O'rta qiymat va dispersiya

Variasion qator va uning turlari To'la ro'yxat usuli

O’sib borish tartibida joylashgan $x_1, x_2, ..., x_n$ sonlar ketma-ketligi **variasion qator** deyiladi $(x_1 \le x_2 \le ... \le x_n)$.

Agar variasion qatorning elementlari chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni qabul qilsa, bunday variasion qator **diskret variasion qator** deyiladi.	Variasion qator elementlarining qabul qiladigan qiymatlari biror oraliqni to’ldirsa, bu qator **interval (uzluksiz) variasion qator** deyiladi.

Yozilish formalari

1-usul. To’la ro’yxat usuli.

Bunda variasion qa-torning elementlari to’laligicha ketma-ket yoziladi.
Bunda variasion qatorning elementlari to’laligicha ketma-ket yoziladi. 2,2,2,3,3,4,4,4,4,5,5

2-usul. Jadval usuli.

Bunda jadvalning birinchi qatoriga variasion qator elementlarining turli qiymatlari yoziladi. Ikkinchi qatorga esa, shu qiymatlarni necha martadan takrorlanishi qayd etiladi.
Misol. Imtixon natijasiga ko’ra talabalarning olgan baholari quyidagicha bo’lsin.
2,2,4,3,2,5,3,3,3,4,5 bu ketma-ketlikni jadval ko’rinishda yozamiz.

x_i	2	3	4	5
n_i	3	4	2	2

Testlar

3	2	2	Berilgan statistik ma`lumotga ko`ra medianani toping: 3, 4, 6, 7, 8, 8	*6.5	8
3	2	2	Berilgan statistik ma`lumotga ko`ra modani aniqlang: 8, 8, 6, 7, 9, 8, 9, 7, 9, 7	*7, 8 va 9	7 va 8
3	1	1	Ushbu 5, 10, 15, 20 sonli ma`lumotlarning o`rtacha qiymatini toping.	*12.5	50
3	2	1	Har qanday statistik baho bu -?	*Statistika	Asosli
3	1	2	$\{1,5,4,4,2,2,3,3,2,3,3,4\}$ variasion qator uchun o`rtacha qiymatini toping.	*3	4
3	1	1	Quyidagilardan qaysi biri tanlanma qulochining yarmiga teng?	$*\, h = \frac{X_{\max} - X_{\min}}{2}$	$\overline{X} = \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{m} X_i n_i$
3	2	2	$\{10, 11, -12, 12, 10, 11, 10, -10\}$ variasion kator uchun modani toping.	*10	12

3	1	1	Quyidagilardan qaysi biri variasiya koeffisientining ikkilanganini ifodalaydi?	$*V=\frac{2S}{\overline{X}}\cdot 100\%$	$\overline{X}=\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{m}X_i n_i$
3	1	1	Quyidagilardan qaysi biri tanlanma dispersiyasi va o`rtacha kvadratik chetlanish uchun to`g`ri?	*O`rtacha kvadratik chetlanish bu - dispersiyaning musbat kvadrat ildizi	O`rtacha kvadratik chetlanish bu - dispersiyaning musbat kub ild
3	2	1	Variasiya bu - ?	*Prosentda ifodalanuvchi o`zgaruvchanlik	O`rta qiymat
3	2	2	Berilgan statistik taqsimot asosida medianani toping: {2,2,3,4,4,5,5}	*4	3
3	2	2	Agar o`rtacha kvadratik tarqoqlik 4 ga teng bo`lsa, dispersiya nimaga teng.	*16	4
3	2	2	Tanlanmaning hajmi 10 ga, o`rtacha qiymati 5 ga teng. Uning variantalari yig`indisini toping.	*50	40
3	2	1	Berilgan statistik taqsimot asosida modani toping:{1,1,2,3,5,5,7,9,7,7}	*7	3
3	2	2	Agar dispersiya 4 ga teng bo`lsa, o`rtacha kvadratik tarqoqlik nimaga teng.	*2	4
3	1	2	Agar tanlanmaning har bir elementi 3 marta orttirilsa, uning o`rtacha qiymati qanday o`zgaradi?	*3 marta ortadi	3 marta kamay
3	1	1	Tajriba natijasida 10 ta talaba sinovdan o`tkazildi va sinov natijalari yordamida $\{2,4,5,1,4,3,3,2,3,1\}$ tanlanma hosil qilindi. Tanlanma hajmini toping.	*10	5
3	1	3	Tanlangan dispersiya DX=6.25 ga teng. O`rtacha kvadratik chetlanishni toping.	*2.5	6.25

3	1	3	$\{1,5,4,4,2,2,3,3,2,3,3\}$ variasion qator uchun o`rta qiymat toping.	$*\frac{32}{11}$	$\frac{29}{11}$
3	2	1	Quyidagilardan qaysi biri tanlanma qulochi?	$*\ R{=}X_{max}-X_{\min}$	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}X_i n_i$
3	1	1	$\{0,1,-2,2,0,1,0,-1\}$ variasion qator uchun modani toping.	*0	2
3	1	1	$\{1,5,4,2,4,2,3,2,3,3,3\}$ variasion qator uchun o`rta garmonik qiymatni toping.	$*\frac{165}{68}$	$\frac{15}{6}$
3	1	1	Quyidagilardan qaysi biri o`zgaruvchanlik koeffisienti formulasi?	$*\ V=\frac{S}{\overline{X}}\cdot 100$	$\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}X_i n_i$
3	1	2	$\{-2,1,0,2,0,-1,0,1\}$ variasion qator uchun interval uzunligini toping.	*3	2
3	1	1	$\{-2,1,0,2,0,-1,0\}$ variasion qator uchun o`rta absalyut chiziqli farqni toping.	*0	$\frac{3}{8}$
3	1	1	Quyidagilardan qaysi biri tanlanma dispersiyasi?	* $S^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}n_i(x_i-\overline{X})^2$	$A_s=\frac{\mu_3}{S_3}$
3	1	1	Variasiya bu - ?	*O`zgaruvchanlik	O`rta kiymat
3	1	1	Statistika so`zining ma`nosi nima?	*davlat holati	tajriba;

3. Kuzatish olingan har yuz dona olma ichida chirigan olmalar x_i sonini aniqlashdan iborat.

x_i	3;	4;	6;	2;	5;
n_i	4;	3;	2;	6;	1;

x_i miqdorning modasi, medianasi, variatsiya, asimmetriya, ekssesiya koyeffitsientlari topilsin.

Yechish. Tanlanmaning o‘rta arifmetik qiymati va dispersiyasi

$$x=\frac{12+12+12+12+5}{16}=\frac{53}{16}$$

o‘rta kvadratik xatoligi esa

$$\delta = 1{,}3564$$

Tanlanmaning modasi va medianasi mos ravishda chunki eng katta chastota 6 ga teng bo‘lgan varianta 2, variantalar soni 5 ta, o‘rtadagi varianta 6 ta.

Variatsiya, assimetriya, ekssessiya koyeffitsientlari mos ravishda:

$$V = \frac{\delta}{\overline{x}} \cdot 100\% = 40{,}9479 \quad A_s = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\delta^3} = 0{,}14598$$

$$l_n = -0{,}8772$$

4. Tajriba har bir bosh sigirdan sogib olingan sut miqdorini kuzatishdan iborat bo‘lsin. Bu kursatkich yarim yillik Namangan nohiya bo‘yicha quyidagicha taqsimlangan (tonna hisobida):

x_i	1.12	1.26	1.34	1.37	1.57	1.64
n_i	1	2	3	3	2	1

bu erda – xo‘jaliklar soni.

Nohiya bo‘yicha yarim yil ichida har bir bosh sigirdan o‘rtacha soғib olingan sut miqdori, o‘rta kvadratik xatoligi, variatsiya koyeffitsienti aniqlansin va viloyat ko‘rsatkichi bilan solishtirilsin.

Yechish.

$$\overline{\alpha} = \frac{16{,}89}{12} = 1{,}49 \qquad \delta = \sqrt{\frac{0{,}3057}{12}} \approx 0{,}16$$

$$V = \frac{\delta}{\overline{x}} \cdot 100\% \approx 11{,}319\%$$

Namangan nohiya bo‘yicha o‘rtacha ko‘rsatkich viloyat o‘rtacha ko‘rsatkichidan yaxshi, o‘rtacha kvadratik xatoligi (oғishi) ko‘proq.

5. uzatish [0,7; 1,5] kesmadagi zarrachalar sonini aniqlashdan iborat.

$x_i - x_{i+1}$	0,7-0,8	0,8-0,9	0,1-1,0	1,0-1,1	1,1-1,2	1,2-1,3	1,3-1,4	1,4-1,5
n_i	2	5	3	4	3	5	3	2

n_i bunda $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos kelgan zarrachalar soni. Nisbiy chastotalar gistogrammasi chizilsin.

6. Tajriba ma’lum territoriyada 6 yil ichida ekilgan har bir 1000 dona chigitdan unib chiqqan nihollarni kuzatishdan iborat bo‘lsin: 900, 950, 940, 850, 860,
7. Tasodifiy miqdorning empirik taqsimot, empirik taqsimot funksiyasi, o‘rta arifmetik qiymati, tanlanma dispersiyasi, taqsimotning o‘rta kvadtarik hatolari topilsin va nisbiy chastotalar poligoni chizilsin.

7. Ma’lum territoriyadagi paxta maydonida 10 tup ғo‘za ajratilgan va har biridagi ko‘saklar soni (x_i) sanalgan:

x_i:	5;	6;	7;	8;	9;	10
n_i:	1;	1;	3;	2;	2;	1

x_i miqdorning modasi, medianasi, variatsiyasi, assimetriya, ekssessiya koeffitsientlari topilsin.

8. Tajriba har bir bosh sigirdan sog‘ib olngan sut miqdorini kuzatishdan iborat bo‘lsin. Bu ko‘rsatkich yarim yillikda (1983). Namangan viloyati tumanlar bo‘yicha quyidagi taqsimlangan (tonna hisobida).
(Bu erda $n = \sum n_i = 10$ - tumanlar soni). Viloyat bo‘yicha yarim yil ichida har bir bosh sigirdan sog‘ib olingan sut miqdori, sut miqdorining o‘rta kvadratik xatoligi, variatsiya koeffitsienti aniqlansin.

9.Respublikamiz ho‘jaliklararo korxonalarda qoramol soni 1979-1983 yillarda quyidagicha bo‘lgan (million bosh hisobida).

x_i:	92,3;	93,2;	94,2;	96,4
n_i:	1;	1;	1;	1.

Qoramol sonining 5 yil ichida o‘rta arifmetik qiymati, o‘rta kvadratik hatoligi, medianasi, variatsiyasi, assimetriya, ekssessiya koeffitsientlari aniqlansin.

Ta’rif. Taqsimotning empirik funksiyasi (tanlanmaning taqsimot funksiyasi) deb, har bir x qiymat uchun $X < x$ hodisasining nisbiy chastotasini aniqlaydigan $\hat{F}(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$\hat{F}(x) = \frac{n_x}{n}$$

bu yerda $n_x \quad - x$ dan kichik variantalar soni.

Yuqoridagi misolda empirik taqsimot funksiya

$$\hat{F}(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \Im_{\{x_k \le x\}} \qquad \text{(XVII.49.3)}$$

bo‘ladi, bu yerda $\Im_{\{x_k \le x\}}$ mos indikator.

Agar (XVII.49.2) ning tasodifiyligini hisobga olsak, u holda (XVII.49.3), har bir x da, tasodifiy miqdor bo‘ladi; natijada empirik taqsimotning matematik kutilmasi (o‘rtacha qiymati), dispersiyasi, momentlari tasodifiy miqdor bo‘ladi va mos ravishda, tanlanma o‘rtacha qiymat, tanlanma dispersiya deyiladi va

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (x_k - \bar{x})^2$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Mos ravishda, r momentlar va r-nchi markaziy momentlar

$$\overline{x}^r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^r, \quad S^r = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(x_k - \overline{x}\right)^r$$

formulalar orqali hisoblanadi.

Taqsimot yoki taqsimot qonuni chastotalar yordamida ham berilishi mumkin:

ξ	x_1	x_2	$\ldots$	x_k
n	n_1	n_2	$\ldots$	n_k

bu yerda $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$ tanlanma hajmi, bu holda

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i, \quad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i\left(x_i - \overline{x}\right)^2,$$

$$\overline{x}^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^r, \quad S^r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^r n_i \quad \text{bo‘ladi.}$$

1-**misol**. Tanlanmaning quyidagi berilgan taqsimoti bo‘yicha nisbiy chastotalar poligonini yasang:

ξ	2	5	6	8
n_i	5	8	10	3

Tanlanmaning o‘rta arifmetigi deb,

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

ifodaga, tanlanmaning dispersiyasi deb

$$\delta^2 = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

ifodaga, taqsimotning o‘rta kvadratik xatoligi (o‘rta kvadratik chetlanishi) deb,

$$\delta = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{k} n_i}}$$

ifodaga aytiladi.

Eng katta chastotaga ega bo‘lgan varianta moda deyiladi va μ_0 bilan belgilanadi.

Variantalarni soni teng bo‘lgan ikki qismga ajratadigan varianta variatsion qatorning medianasi deyiladi va m_e bilan belgilanadi.

Agar variantalar soni tok, ya’ni $n = 2k+1$ bo‘lsa, u holda

$$m_e = \frac{x_k + x_{k+1}}{2}$$

Variatsiya koyeffitsienti deb,

$$V = \frac{б}{\overline{x}} \cdot 100\%$$

ifodaga aytiladi.

Taqsimotning asimmetriya (qiyshayganlik) koyeffitsienti deb,

$$A_s = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^3}{\delta^3}$$

ifodaga aytiladi.

Ifoda esa, taqsimotning ekssesiya koyeffitsienti deb ataladi.

$$l_k = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^4}{\delta^4} - 3$$

1. Variantalar va mos chastotalar berilgan:

x_i	2	3	4	6	7
n_i	1	2	1	3	2

Tasodifiy miqdorning empirik taqsimoti, empirik taqsimot funksiyasi, o‘rta arifmetik qiymati, tanlanmaning dispersiyasi, taqsimotning o‘rta arifmetik kvadratik xatoligi topilsin va nisbiy chastotalar poligoni chizilsin.

Yechish. Empirik taqsimotni tuzamiz.

x_i	2	3	4	6	7
W_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

u holda empirik taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \\ \frac{1}{9} & x\le 2 \\ \frac{3}{9} & 2<x<3 \\ \frac{4}{9} & 3<x<4 \\ & 4<x<6 \\ \frac{7}{9} & 6<x<7 \\ & x>7 \\ 1 & \end{cases}$$

Tanlanmaning o‘rta arifmetik qiymati, tanlanma dispersiyasi va taqsimotning o‘rta kvadratik xatoligi mos ravishda:

$$\bar{x}=\frac{2+3\cdot 2+4+6\cdot 3+7\cdot 2}{9}=4,(8):$$

$$\delta^2=\frac{(-\frac{26}{9})^2+(\frac{17}{9})^2\cdot 2+(\frac{8}{5})^2\cdot 3+(\frac{19}{19})^2\cdot 2}{9}=3,2098765$$

$$\delta=1,7916127$$

3. Kuzatish olingan har yuz dona olma ichida chirigan olmalar x_i sonini aniqlashdan iborat.

x_i	3;	4;	6;	2;	5;
n_i	4;	3;	2;	6;	1;

x_i miqdorning modasi, medianasi, variatsiya, asimmetriya, ekssesiya koyeffitsientlari topilsin.

Yechish. Tanlanmaning o‘rta arifmetik qiymati va dispersiyasi

$$x=\frac{12+12+12+12+5}{16}=\frac{53}{16}$$

o‘rta kvadratik xatoligi esa

$$\delta=1,3564$$

Tanlanmaning modasi va medianasi mos ravishda chunki eng katta chastota 6 ga teng bo‘lgan varianta 2, variantalar soni 5 ta, o‘rtadagi varianta 6 ta.

Variatsiya, assimetriya, ekssessiya koyeffitsientlari mos ravishda:

$$V = \frac{\delta}{\overline{x}} \cdot 100\% = 40{,}9479 \quad A_s = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\delta^3} = 0{,}14598$$

$$l_n = -0{,}8772$$

4. Tajriba har bir bosh sigirdan sogib olingan sut miqdorini kuzatishdan iborat bo'lsin. Bu kursatkich yarim yillik Namangan nohiya bo'yicha quyidagicha taqsimlangan (tonna hisobida):

x_i	1.12	1.26	1.34	1.37	1.57	1.64
n_i	1	2	3	3	2	1

bu erda – xo'jaliklar soni.

Nohiya bo'yicha yarim yil ichida har bir bosh sigirdan o'rtacha soғib olingan sut miqdori, o'rta kvadratik xatoligi, variatsiya koyeffitsienti aniqlansin va viloyat ko'rsatkichi bilan solishtirilsin.

Yechish.

$$\overline{\alpha} = \frac{16{,}89}{12} = 1{,}49 \qquad \delta = \sqrt{\frac{0{,}3057}{12}} \approx 0{,}16$$

$$V = \frac{\delta}{\overline{x}} \cdot 100\% \approx 11{,}319\%$$

Namangan nohiya bo'yicha o'rtacha ko'rsatkich viloyat o'rtacha ko'rsatkichidan yaxshi, o'rtacha kvadratik xatoligi (oғishi) ko'proq.

9. uzatish [0,7; 1,5] kesmadagi zarrachalar sonini aniqlashdan iborat.

$x_i - x_{i+1}$	0,7-0,8	0,8-0,9	0,1-1,0	1,0-1,1	1,1-1,2	1,2-1,3	1,3-1,4	1,4-1,5
n_i	2	5	3	4	3	5	3	2

n_i bunda $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos kelgan zarrachalar soni. Nisbiy chastotalar gistogrammasi chizilsin.

10. Tajriba ma'lum territoriyada 6 yil ichida ekilgan har bir 1000 dona chigitdan unib chiqqan nihollarni kuzatishdan iborat bo'lsin: 900, 950, 940, 850, 860,
7. Tasodifiy miqdorning empirik taqsimot, empirik taqsimot funksiyasi, o'rta arifmetik qiymati, tanlanma dispersiyasi, taqsimotning o'rta kvadtarik hatolari topilsin va nisbiy chastotalar poligoni chizilsin.

11. Ma'lum territoriyadagi paxta maydonida 10 tup ғo'za ajratilgan va har biridagi ko'saklar soni (x_i) sanalgan:

x_i :	5;	6;	7;	8;	9;	10
n_i :	1;	1;	3;	2;	2;	1

x_i miqdorning modasi, medianasi, variatsiyasi, assimetriya, ekssessiya koeffitsientlari topilsin.

12. Tajriba har bir bosh sigirdan sog‘ib olngan sut miqdorini kuzatishdan iborat bo‘lsin. Bu ko‘rsatkich yarim yillikda (1983). Namangan viloyati tumanlar bo‘yicha quyidagi taqsimlangan (tonna hisobida).
(Bu erda $n = \sum n_i = 10$ - tumanlar soni). Viloyat bo‘yicha yarim yil ichida har bir bosh sigirdan sog‘ib olingan sut miqdori, sut miqdorining o‘rta kvadratik xatoligi, variatsiya koeffitsienti aniqlansin.

9.Respublikamiz ho‘jaliklararo korxonalarda qoramol soni 1979-1983 yillarda quyidagicha bo‘lgan (million bosh hisobida).

x_i :	92,3;	93,2;	94,2;	96,4
n_i :	1;	1;	1;	1.

Qoramol sonining 5 yil ichida o‘rta arifmetik qiymati, o‘rta kvadratik hatoligi, medianasi, variatsiyasi, assimetriya, ekssessiya koeffitsientlari aniqlansin.

9- mavzu Statistik baho tushunchasi -6 soat

9.1 mavzu. Statistik baho va uning xossalari. Nuqtaviy baholar va baholarning tuzish usullari:O'rniga qo'yish usuli, momentlar usuli ,haqiqatga maksimal o'xshashlik usuli.

REJA

1.STATISTIK BAHOLAR

2 . Statistik baho xossalari

Tayanj iboralar.Baho.Asosl baho.Siljimagan baho. Effektiv baho.Asimtotik asjsli baho. Asimtotik siljimagan baho.Asimtotik effektiv baho

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$$

bog'liksiz tanlanma to'plam $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo'lib, bu taqsimot funksiya F taqsimot funksiyalar sinfidan olingan bo'lsin. θ parametr F taqsimot orqali bir qiymatli aniqlansin.

Masalan $\theta = \theta(F)$, har bir F da aniqlangan funksiyalar kamida bitta θ parametrga bog'liq deb qabul qilamiz: $F(x,\theta)$ yoki $F(x,\theta_1,\theta_2,...\theta_r)$ bunday taqsimotlarga parametrik taqsimotlar[278] deyiladi. Masala θ parametrning bahosi sifatida (XIX.59.1) tanlanmaga bog'liq

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots., x_n)$$

funksiyani topishdan iborat bo'lib, bu qiymat θ ga yaqin va $\theta(F) = \theta$, shu bilan birga, θ ga va boshqa parametrlarga bog'liq emas deb faraz qilinadi.

Ta'rif. (XIX.59.2) ko'rinishdagi funksiyaga statistik baho[279] deyiladi.

Asosiy quyiladigan masala $\hat{\theta}$ bahoning θ ga yaqin keladigan shartlarini topishdan iborat.

Ta'rif. Bitta son bilan aniqlanadigan statistik bahoga nuqtaviy baho[280]deyiladi.

Ta'rif. Tanlanmaning hajmi istalgancha bo'lganda ham matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo'lgan nuqtaviy bahoga siljimagan baho [281] deyiladi, ya'ni

$$M\hat{\theta} = \theta. \qquad (59.3)$$

(59.3) ifodaning xossasini ochish uchun n ta bog‘liqsiz tanlanma to‘plamni olamiz. $\hat{\hat{\theta}}$ bilan (XIX.59.2) dagi i ta tanlanmaga mos statistikani belgilasak va baho siljimagan bo‘lsa, u holda $M\hat{\hat{\theta}}_i = \theta$ va $\hat{\hat{\theta}},_1 \hat{\hat{\theta}}_2,.....,\hat{\hat{\theta}}_n$ bog‘liqsiz, bir xil taqsimlangan bo‘ladi, natijada kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asosan, $\frac{\hat{\hat{\theta}}_1 + ... + \hat{\hat{\theta}}_n}{N} \to 0$ munosabat deyarli o‘rinli bo‘ladi.

Agar $D\hat{\hat{\theta}}_1 = \sigma^2 < \infty$ bo‘lsa, u holda markaziy limit teoremaga ko‘ra $\frac{\hat{\hat{\theta}}_1 + ... + \hat{\hat{\theta}}_n}{n} - \theta$ ifoda $(0, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi, ya’ni

$$\left| \frac{\hat{\theta}_1 + \hat{\theta}_n}{n} - \theta \right| \le \frac{u_{\frac{\alpha}{2}} \sigma}{\sqrt{n}}$$

tENGSIZLIK $1-\alpha$ EHTIMOLLIK BILAN BAJARILADI, BU YERDA α QIYMATDORLIK DARAJASI, $u_{\frac{\alpha}{2}}$ KVANTIL.

SILJIMAGAN BAHOGA MISOLLAR KELTIRAMIZ:

AGAR (XIX.59.1) TANLANMA $m_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF(x)$ MOMENTGA EGA BO‘LGAN TANLANMADAN OLINGAN BO‘LSA U HOLDA

$$\hat{m}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \qquad \text{(XIX.59.4)}$$

2 - O‘RTA TANLANMA m_2 UCHUN SILJIMAGAN BAHO BO‘LADI, CHUNKI

$$M\hat{m}_2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} Mx_i^{\ 2} = m_2 \ .$$

XUSUSAN, $\bar{x}$ BAHO $a = \int_{-\infty}^{+\infty} xdF(x)$ UCHUN SILJIMAGAN BAHO BO‘LADI.

Tanlanma dispersiya $S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \overline{(x_i - x)}^2$ $\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-a)^2 dF(x)$ dispersiya uchun siljimagan baho bo‘lolmaydi, haqiqatan ham

$$S^2 = \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - a)^2 - (\bar{x} - a)^2$$

ligini hisobga olsak

$$M(x_i - a)^2 = \sigma^2, \quad M(\overline{x} - a)^2 = \tfrac{\sigma^2}{n},$$

bundan

$$MS^2 = \sigma^2 - \tfrac{\sigma^2}{n} = \tfrac{n-1}{n} \cdot \sigma^2 \qquad \text{(XIX.59.5)}$$

hosil bo‘ladi.

Natijada σ^2 uchun siljimagan baho <u>tuzatilgan dispersiya</u>[282] deb ataluvchi

$$S_1^2 = \frac{n}{n-1}, \quad S^2 = \frac{1}{n-1}, \quad \sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2 \qquad \text{(XIX.59.6)}$$

miqdor bo‘ladi.

<u>Ta’rif.</u> Agar $n \to \infty$ da $\hat{\hat{\theta}}_n \to \theta$ bajarilsa, u holda, bunday bahoga <u>asosli baho</u> [283]deyiladi.

Kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga ko‘ra $n \to \infty$ da

$\hat{\hat{m}}_n \to m_2$ bo‘ladi va $\hat{\hat{m}}_n \xrightarrow{p} m_2$.

Demak $\hat{\hat{m}}_2, m_2$ asosli baho bo‘ladi $\hat{\hat{\theta}}_m$ bahoning asosliligini ko‘rsatish uchun quyidagi teoremani keltiramiz:

<u>1- teorema:</u> **Agar $n \to \infty$ da $M\theta_n \to \theta_n$ va $D\hat{\hat{\theta}} \to 0$ bo‘lsa, $\hat{\hat{\theta}}$ asosli baho bo‘ladi.**

<u>Isbot:</u> $\varepsilon > 0$ uchun Chebishev tengsizligiga ko‘ra

$$P\left\{\left|\hat{\hat{\theta}}_n - M\right| > \varepsilon\right\} \le \frac{D\hat{\hat{\theta}}_n}{\varepsilon^2} \to 0, \quad n \to \infty. \qquad \text{(XIX.59.7)}$$

Oxirgi ifoda va $\left|\hat{\hat{\theta}}_m - \theta\right| \le \left|\hat{\hat{\theta}}_m - M\hat{\hat{\theta}}_m\right| + \left|M\hat{\hat{\theta}}_m - \theta\right|$

tengsizlikdan $\left|\hat{\hat{\theta}}_n - \theta\right| > \varepsilon$ hodisaning ehtimolligi nolga intilishi kelib chiqadi.

<u>1-misol:</u> $n = 100$ hajmli tanlanma bo‘yicha bosh dispersiyaning $S^2 = 5$ siljimagan bahosi topilgan. Bosh to‘plam dispersiyasining siljimagan bahosini toping.

Yechish: Izlanayotgan siljimagan baho tuzatilgan dispersiyaga teng bo‘ladi.

$$S_1^2 = \frac{n}{n-1} \qquad S^2 = \frac{100}{99} * 5 = 5{,}05.$$

$\xi = (\xi_1, ...\xi_n)$ tasodifiy miqdor

$$P(\xi = x_j) = P_\xi(x) = P(x) = P(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0, \quad \sum_x P(x) = 1$$

diskret taqsimotga ega, bu yerda $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ ξ tasodifiy vektorning qiymatlaridan iborat bo‘lib, chekli yoki sanoqli qiymatlarni qabul qilsin. $t(x) = t(x_1, x_2, ...x_n)$ funksiya berilgan bo‘lsa, tayinlangan t uchun ξ ning $t(\xi) = t$ sharti ostidagi <u>shartli taqsimoti</u>[284]

$$P(x/t) = P(\xi = x / t(\xi) = t) = \frac{P(\xi = x, t(\xi) = t)}{P(t(\xi) = t)} = \frac{P(x)}{\sum\limits_{x^{'}: t(x^{'}) = t} P(x^{'})} \qquad \text{(XIX.60.1)}$$

bo‘ladi.

$t(\xi)$ funksiyani (XIX.60.1) ning maxraji noldan farqli bo‘ladigan qilib tanlanadi. Agar $q(x),\ x = (x_1, ..., x_n)$ bo‘lsa, u holda $\eta = q(\xi)$ tasodifiy funksiya bo‘lib, uning matematik kutilmasi

$$M\eta = Mq(\xi) = \sum_x q(x) P(x)$$

bo‘ladi.

(XIX.60.1) ifodadan

$$M(q(\xi)/t(\xi) = t) = \sum_{x: t(x) = t} q(x) P(x/t) = \frac{\sum\limits_{x: t(x) = t} q(x) P(x)}{\sum\limits_{x: t(x) = t} P(x)}. \qquad \text{(XIX.60.2)}$$

Bundan $M(q(\xi)/t(\xi) = t)$ shartli matematik kutilma t ning funksiyasidan iborat bo‘lib, bu funksiyani $q_t(t)$ bilan belgilaymiz $q_t(t)$ da t o‘rniga $\tau = t(\xi)$ ni qo‘yamiz va natijada shartli matematik kutilma $q_t(\tau)$ tasodifiy funksiyadan iborat bo‘ladi.

$q_t(\tau)$ ning matematik kutilmasini hisoblaymiz:

$$Mq_t(\tau) = \sum_t q_t(t) P(\tau = t) = \sum_t q_t(t) \sum_{t(x) = t} P(x) =$$

$$= \sum_t \sum_{x: t(x) = t} q(x) P(x) = \sum_x q(x) P(x)$$

natijada

$$Mq(\xi) = M(M(q(\xi)/t(\xi) = t)) \qquad (3)$$

ni hosil qilamiz.

(3) formula ξ uzluksiz

1. **Momentlar usuli.** $P(x;\theta_1, \dots, \theta_r)$ zichlik funksiyasi r va $\theta_1,...,\theta_r$ parametrlarga bog‘liq bo‘lgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ bog‘liqsiz tanlanma to‘plam berilgan va

$$m_k(\theta_1,...,\theta_r) = \int x^k P(x,\theta_1,...,\theta_r)dx, \quad k = \overline{1,r}$$

momentlar chekli, shu bilan birga $b_k = m_k(\theta_1,...,\theta_r), \quad k = \overline{1,n}$.

Tenglamalar sistemasi bir qiymatli yechilgan bo‘lib, bu yechim $\theta_k = m_k^{-1}(b_1, b_2,...,b_r), \quad k = \overline{1,r}$ ga teng bo‘lsin.

5-teorema. Yuqoridagi shartlar asosida

$$\hat{m}_k = m_k(\theta_1,...,\theta_r)$$

sistemaning yechimi $\hat{\theta}_k$ asosli baho bo‘ladi,

bu yerda,

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k .$$

Momentlar usuli. $P(x;\theta_1, \dots, \theta_r)$ zichlik funksiyasi r va $\theta_1,...,\theta_r$ parametrlarga bog‘liq bo‘lgan $x_1, x_2, \dots, x_n$ bog‘liqsiz tanlanma to‘plam berilgan va

$$m_k(\theta_1,...,\theta_r) = \int x^k P(x,\theta_1,...,\theta_r)dx, \quad k = \overline{1,r}$$

momentlar chekli, shu bilan birga $b_k = m_k(\theta_1,...,\theta_r), \quad k = \overline{1,n}$.

Tenglamalar sistemasi bir qiymatli yechilgan bo‘lib, bu yechim $\theta_k = m_k^{-1}(b_1, b_2,...,b_r), \quad k = \overline{1,r}$ ga teng bo‘lsin.

5-teorema. Yuqoridagi shartlar asosida

$$\hat{m}_k = m_k(\theta_1,...,\theta_r) \qquad \text{(XIX.63.1)}$$

sistemaning yechimi $\hat{\theta}_k$ asosli baho bo‘ladi,

bu yerda,

$$\hat{m}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k .$$

__**Isbot.**__ Teorema shartiga asosan (XIX.63.1) sistema yagona $\hat{\theta}_k = m_k^{-1}(\hat{m}_1,....,\hat{m}_r)$ yechimga ega va m_k^{-1} uzluksiz funksiya. U holda, kuchaytirilgan katta sonlar qonuniga asosan $\hat{m}_k$ miqdor m_k ga deyarli yaqinlashadi va m_k^{-1} ning uzluksizligidan $\hat{\theta}_k$ ifoda $n \to \infty$ da $\hat{\theta}_k$ ga deyarli yaqinlashadi.

Bu teorema yordamida topiladigan baholarga-momentlar usuli deyiladi.

$\hat{\theta}$ parametrli $P(x,\theta)$ zichlik funksiyaga ega bo‘lgan $x_1,...,x_n$ bog‘liqsiz tanlanma berilgan bo‘lsin y. Haqiqatga aqinlik funksiyasi[296] deb,

$$L(x;\theta)=P(x;\theta)...P(x_n,\theta)$$

ifodaga aytiladi

Eng katta haqiqatga yaqin baho[297] deb, $L(x,\hat{\theta})=\min_{\theta} L(x,\theta)$ funksiyani qabul qilamiz.

Agar $L(x;\theta)$ funksiyani θ bo‘yicha differansiallanuvchi bo‘lsa u holda eng katta haqiqatga yaqin θ baho

$$\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial\theta}=0 \qquad \text{(XIX.64.1)}$$

haqiqatga yaqin tenglikni[298] yechish natijasida topiladi.

Eng katta haqiqatga yaqin baho quyidagi xossalarga ega:

A) Parametr θ $\theta_1<\theta<\theta_2$ oraliqda yotib, θ_0 shu oralikda va

$$\frac{\partial P}{\partial\theta},\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2},\frac{\partial^3 P}{\partial\theta^3} \quad \text{mavjud bo‘lsin.}$$

B) $\int P(x,\theta)dx$ ikki marta differensiallanuvchi va $\int\frac{\partial P}{\partial\theta}dx\equiv 0$

$$\int\frac{\partial^2 P}{\partial\theta^2}dx\equiv 0 \quad \text{bajarilsin.}$$

V) $J_1(\theta_0)=\int(\frac{\partial\log P}{\partial\theta})^2 P(x;\theta)dx\Big|_{\theta=\theta_0}>0$;

$$\left|\frac{\partial^3 P}{\partial\theta^3}\right|\le H(x),\ M_0H(\xi)=\int H(x)P(x;\theta)dx\le M, \quad M \quad \theta$$

ga bog‘liq emas.

6- teorema. A), B), V) shartlar bajarilganda (XIX.64.1) haqiqatga yaqin tenglama θ yechimga ega va $n\to\infty$ da θ_0 ga ehtimollik bilan yaqinlashadi.

Bu eng katta haqiqatga yaqin baho asimptogtik effektiv bo‘ladi.

Isbot. (XIX.64.1) haqiqatga yaqin tenglama

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial\theta}=\frac{\partial\log L}{\partial\theta}=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial\log P(x_k,\theta)}{\partial\theta}=0 \qquad \text{(XIX.64.2)}$$

tenglamaga ekvivalentdir.

$$\frac{\partial \log P(x,\theta)}{\partial \theta}$$

ifodani Teylor formulasi bo‘yicha θ_0 nuqta atrofida yoyib, topamiz

$$\frac{\partial \log P}{\partial \theta} = \left.\frac{\partial \log P}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0} + (\theta-\theta_0)\left.\frac{\partial^2 \log P}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} + \frac{(\theta-\theta_0)^2}{2} * \delta \neq (x) \qquad |\delta| \le 1 \quad \text{(XIX.64.3)}$$

(XIX.64.2)ni n ga bo‘lib (XIX.64.3)dan

$$\frac{1}{n}\frac{\partial \log L}{\partial \theta} = B_0 + B_1(\theta-\theta_0) + \frac{1}{n}\beta\delta B_2(\theta-\theta_0)^2 \qquad \text{(XIX.64.4)}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda

$$B_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial \log P(x_k,\theta)}{\partial \theta}\right|_{\theta=\theta_0}; \; B_1 = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \log P(x_k,\theta)}{\partial \theta^2}\right|_{\theta=\theta_0};$$

$$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H(x_k).$$

Katta sonlar qonuniga asosan $B_0 \xrightarrow{P} MB_0 = 0,$

$$B_1 \xrightarrow{P} MB_1 = -J_1(\theta_0), \qquad B_2 \xrightarrow{P} MB_2, \qquad |MB_2 \le M|.$$

Faraz qilaylik, $h > 0$ va $\varepsilon > 0$ tayinlangan bo‘lsin. n_0 ni $(n > n_0)$ shunday tanlaymizki quyidagi tengsizliklar o‘rinli bo‘lsin:

$$P\{|B_0| \ge h^2\} < \frac{\varepsilon}{3}; P\left\{B_1 > -\frac{J_1(\theta_0)}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{3};$$
$$P\{|B_2| > 2M\} < \frac{\varepsilon}{3}; \qquad \text{(XIX.64.5)}$$

S bilan quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi hodisani belgilaymiz

$$|B_o| \le h^2, \quad B_1 \le -\frac{J_1(\theta_0)}{2}, \quad |B_2| \le 2M .$$

(XIX.64.5) ga asosan $P(\bar{s}) < \varepsilon$ va $P(s) > 1-\varepsilon$. $\theta = \theta_0 \pm h$ da (XIX.64.6) ifoda

$$B_0 \mp B_1 h + \frac{1}{2}\delta B_2 h^2 = 0 \qquad \text{(XIX.64.6)}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$S \text{ da } \left|B_0 + \frac{1}{2}\delta B_2 h^2\right| \le (M+1) * h^2$$

va $h < \frac{J_1(\theta_o)}{2(M+1)}$ bo‘lgan holda (XIX.64.6) ning ishorasi $\mp B_1 h$ ning ishorasi bilan aniqlanadi. Ushbu

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log L}{\partial \theta}$$

ifodaning uzluksiz va θ ga bog‘liqligidan, $(\theta_0 - h, \theta_0 + h)$ oraliqda, $n > n_0$ larda $1-\varepsilon$ ehtimollik bilan, (XIX.64.1) tenglama $\hat{\theta}$ yechimga ega.

Teoremaning 2- qismini isbotlash uchun

$$B_0 + B_1\left(\hat{\theta} - \theta_0\right) + \frac{B_2\delta}{2}\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)^2 = 0$$

ifodani

$$\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)\sqrt{J_1(\theta_0)n} = \frac{\frac{1}{\sqrt{J_1(\theta_0)n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial \log P(x_k;\theta)}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\theta_0}}{-\frac{B_1}{J_1(\theta_0)} - \frac{1}{2}\delta B_2\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{J_1(\theta_0)}}$$

ko‘rinishda yozamiz.

Ifodaning surati, markaziy limit teoremaga ko‘ra, (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan, maxraji $n \to \infty$ da ehtimollik bo‘yicha birga intiladi.

Natijada, $(\theta - \theta_0)\sqrt{J_1}(\theta_0)^n$ tasodifiy miqdor (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

MISOLLAR:

1-misol.

x_i	2	3	9	10
n_i	3	8	20	25

taqsimot berilgan bo‘lsa, bosh o‘rta qiymatning siljimagan bahosini toping.

2-misol. μ tasodifiy miqdor $P\{\mu = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsin, P-noma’lum bo‘lganda, $a = np,\ \delta^2 = npq$ matematik kutilma va dispersiya uchun $\hat{a}$ va $\hat{\delta}^2$ siljimagan baho topilsin.

3-misol. ξ tasodifiy miqdor geometrik taqsimlangan

$$P(\xi = k) = pq^k,\ q = 1 - p,\ k = 0,1,2...$$

$a = np, \delta^2 = npq$ matematik kutilma va dispersiya uchun ξ orqali ifodalanadigan $\hat{a}, \hat{\delta}^2$ siljimagan baho topilsin.

4-misol. ξ tasodifiy miqdor Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan

$$P(\xi = k) = \Pi(a;\ k) = \frac{a^k}{k}e^{-a},$$

$\Pi(ma;0)=e^{-ma}$, $m=2,3,...$ uchun $\varphi_m(\xi)$ siljimagan baho topilsin.

5-misol. F taqsimotdan olingan $x_1,x_2,...x_n$ bog'liqsiz tanlanma to'plam berilgan bo'lib, F quyidagicha bo'lganda

a) $P_n=\dfrac{a^n}{n!}e^{-a}$;

b) $\lambda e^{-\lambda x}, x\geq 0$;

v) $P(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{c}, & 0\leq x\leq C,\\ 0, & x\overline{\in}[0,C]\end{cases}$

lar uchun yetarli statistika topilsin.

6-misol. $x_1,x_2,...x_n$ bog'liqsiz, (0; 1) parametrli normal taqsimotga ega bo'lgan tanlanma uchun $\hat{a}=\bar{x}$ siljimagan baho tuzilgan. $\hat{a}=M(x_1\mid\bar{x})$ siljimagan baho tuzilsin, bu yerda

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i.$$

7-misol. $(0,\theta)$ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan bosh to'plamdan olingan $x_1,x_2,...x_n$ tanlanma to'plam berilgan. θ uchun $\hat{\theta}$ eng katta haqiqatga yaqin baho topilsin.

9.2-mavzu.Noma`lum parametrlarni baholashning ishonchli oraliq usuli.

REJA

1.ISHONCHLI INTERVALLAR

2. INTERVALLI BAHOLAR.

3. NORMAL TAQSIMLANGAN TANLANMA PARAMETRLARI UCHUN ISHONCHLILIK INTERVALI.

4. BERNULLI SXEMASIDA YUTUQ SONI EHTIMOLLIGI UCHUN ISHONCHLI INTERVAL

Tayanj iboralar.Tanlanma o'rta uchun baho.Tanlanma dispersiya uchun baho.

Zichlik funksiyasi $p(x,\theta)=p(x_1,...,x_n,\theta)$, $\theta_0<\theta<\theta_1$ dan iborat bog'liqsiz bosh to'plamdan olingan

$$x_1,x_2...x_n \qquad \text{(XX.65.1)}$$

tanlanma to'plam berilgan bo'lsin.

$Y(x_1, x_2 ... x_n) = \eta$ statistikaning taqsimot funksiyasi $F(x, \theta) = P(\eta \le x)$ θ bo‘yicha kamayuvchi deb faraz qilaylik. $x_v(\theta)$ bilan $F(x, \theta)$ ni kvantilini belgilaymiz: $F(x, \theta) = 1 - y$

Yuqoridagi shartlarda $x_v(\theta)$, θ ning funksiyasi sifatida o‘suvchi bo‘ladi. Agar α ga $\alpha = 0{,}05$ yoki $\alpha = 0{,}01$ qiymatdorlik darajasini bersak, u holda

$$x_{1-\alpha_2}(\theta) \le \eta \le x_{\alpha 1}(\theta), (\alpha = \alpha_1 + \alpha_2) \qquad \text{(XX.65.2)}$$

tengsizlikning bajarilish ehtimolligi 1-α ga teng bo‘ladi.

$Y = x_v(\theta)$ tenglamaning yechimini $\theta = x_v^{-1}(y)$ ($x_y(\theta)$ ga nisbatan teskari funksiya) kabi belgilasak, (XX.65.2) tengsizlik

$$x_{\alpha_1}^{-1}(\eta) \le \theta \le x_{1-\alpha_2}^{-1}(\eta) \qquad \text{(XX.65.3)}$$

ko‘rinishni oladi. Natijada (XX.65.3) tengsizlik ixtiyoriy θ da $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi. (XX.65.3) tengsizlikni

$$P_\theta(\theta(\eta) \le \theta \le \bar{\theta}(\eta) = \bar{\theta}(\eta)) = 1 - \alpha \qquad \text{(XX.65.4)}$$

ko‘rinishda yozamiz.

<u>Ta’rif.</u> Interval baho[299] deb, baholanayotgan parametrni qoplaydigan intervalning uchlari bo‘lgan ikkita son bilan aniqlanadigan θ bahoga aytiladi.

<u>Ta’rif.</u> Ishonchli interval[300] deb, baholanayotgan parametrni $1-\alpha$ ishonchlilik bilan qoplaydigan intervalga aytiladi: $\underline{\theta}(\eta) \le \theta \le \bar{\theta}(\eta)$;

$1-\alpha$ ga ishonchli ehtimollik[301] deyiladi.

(XX.65.2) va (XX.65.3) formulalar bir-birini ergashtirsada, ma’no jihatdan farq qiladi. (XX.65.2) tengsizlikda ixtiyoriy θ da η tasodifiy miqdor $1-\alpha$ ehtimollik bilan, ko‘rsatilgan oraliqda yotadi. (XX.65.3) da esa θ aniq son, lekin chegaralari tasodifiy miqdorlardir va demak, ixtiyoriy θ ni $1-\alpha$ ehtimollik bilan ma’lum interval yordamida qoplash mumkin, bu intervalning eng kichik uzunlikka ega bo‘lishi muhimdir, bu o‘z navbatida (XX.65.4) ifodadan $M[\bar{\theta}(\eta) - \theta(\eta)]$ o‘rtacha uzunlik[302] tushunchasini ajratishga imkon beradi va $1-\alpha$ ishonchli ehtimollik bilan bu miqdorni kichraytirish masalasini qo‘yadi.

Quyidagi ikkkita hol muximdir:

1-hol.[303] agar $F(x, \theta) = F(x - \theta)$ bo‘lsa, bu holda $F(x - \theta)$ funksiya θ tartibida kamayadi va

$$x_\nu(\theta)=\theta+x_\nu\,,x_\nu^{-1}(y)=y-x_\nu(\theta)$$

bo‘ladi, shuning uchun (XX.65.3) ishonchlilik intervali

$$\eta-x_{\alpha_1}(0)\le\theta\le\eta-x_{1-\alpha_{12}}(0) \qquad \text{(XX.65.5)}$$

ko‘rinishni oladi.

2-hol.[304] $\theta>0$ va $F(x,\theta)=F(\frac{x}{\theta})$, $F(0)=0$ bo‘lsin. Bu holda, x>0 bo‘lganda $F(\frac{x}{\theta})$ funksiya θ tartibida kamayuvchi bo‘ladi va

$$x_\nu(\theta)=\theta x_\nu(1), \quad x_\theta^{-1}(y)=\frac{y}{x_\nu(1)}.$$

Bu holda (XX.65.3) tengsizlik ushbu $\frac{\eta}{x_{\alpha_1}(1)}\le\theta\le\frac{\eta}{x_{1-\alpha_2}(1)}$ ko‘rinishni oladi.

10-mavzu Normal taqsimot bilan bog’liq taqsimotlar-6soat

10.1 –mavzu NORMAL TAQSIMLANGAN TANLANMA PARAMETRLARI UCHUN ISHONCHLILIK INTERVALI.

(XIX.59.1) tanlanma bog‘liqsiz va (a,σ) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan to‘plamdan olingan bo‘lsin.

a) σ ma’lum bo‘lganda a uchun ishonchli interval.

η statistika sifatida $\bar{x}$ ni olamiz. Ma’lumki, $\bar{x}$ miqdor a uchun asosli va siljimagan baho. Bu holda $\bar{x}$ miqdor $(a,\frac{6}{\sqrt{n}})$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

$\gamma=1-\Phi(u_\nu)$ belgilasak, $u_{1-\nu}=-u_\nu$ ligidan

$$a-u_{\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le\bar{x}\le a+u_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{(XX.66.1)}$$

tengsizlik $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi. Oxirgi tengsizlikni a ga nisbatan[305] yechib,

$$\bar{x}-u_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\underline{a}\le a\le\bar{a}=\bar{x}+u_{\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{(XX.66.2)}$$

ni hosil qilamiz. Bu tengsizlik uchun ishonchli ehtimollik $1-\alpha$ ga, interval uzunligi

$$(u_{\alpha_2}+u_{\alpha_1})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ga teng bo‘ladi.

Agar $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}$ deb olinsa, bu interval uzunligi eng kichik bo‘ladi.

Agar $\alpha_2>\alpha_1$ bo‘lsa, u holda $u_{\alpha_1}>u_{\alpha_2}$ kelib chiqadi.

FARAZ QILAYLIK $\Delta=0$ UCHUN $\alpha_2-\Delta\geq\alpha_1+\Delta$ BO‘LSIN, NATIJADA $u_{\alpha_2}>u_{\alpha_1+\Delta}>u_{\alpha_2-\Delta}>u_{\alpha_2}$ BO‘LADI. QUYIDAGI

$$\Delta=1-\Phi(u_{\alpha_2})-(1-\Phi(u_{\alpha_2-\Delta}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_{\alpha_2}}^{u_{\alpha_2-\Delta}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2_{\alpha_1-\Delta}}{2}}\left(u_{\alpha_2-\Delta}-u_{\alpha_2}\right),$$

$$\Delta=1-\Phi(u_{\alpha_i-\Delta})-(1-\Phi(u_{\alpha_1}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_{\alpha_i+\Delta}}^{u_{\alpha_1}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2_{\alpha_1+\Delta}}{2}}\left(u_{\alpha_1}-u_{\alpha_1+\Delta}\right)$$

TENGSIZLIKDAN

$$u_{\alpha_1-\Delta}-u_{\alpha_2}\leq\Delta\sqrt{2\pi}e^{\frac{u^2_{\alpha_2-\Delta}}{2}}<\Delta\sqrt{2\pi}e^{\frac{u^2_{\alpha+\Delta}}{2}}\leq u_{\alpha_1}-u_{\alpha_1+\Delta}$$

YOKI

$$u_{\alpha_2-\Delta}+u_{\alpha_1+\Delta}<u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}$$

KELIB CHIQADI.

BUNDAN, $\alpha_1\neq\alpha_2$ BO‘LSA, ISHONCHLI INTERVAL ENG KICHIK UZINLIKGA EGA BULOLMASLIGI KELIB CHIQADI.

1-misol. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish $\sigma=6$, tanlanma o‘rtacha qiymat $\overline{x_1}=15$ va tanlanma hajmi $h=36$ berilgan. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan x belgisining noma’lum a matematik kutilishini 0,90 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intervalini toping.

Yechish. $\Phi(u_\alpha)=0.45$ yoki $2\Phi(u)\geq0.90$ shartga ko‘ra, jadvaldan $u_\alpha=1.65$ ni topamiz. Topilganlarni (XX.66.2) ga qo‘yamiz.

$$15-1.65\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}\leq a\leq15+1.65\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}$$

yoki

$$13.35\leq a\leq16.65\,.$$

b) σ noma’lum bo‘lganda a uchun ishonchli interval. Birinchi navbatda $\overline{x}$ uchun muhim bo‘lgan quyidagi xossani keltiramiz:

1-teorema. (XIX.59.1) normal taqsimlangan $\bar{x}$ va s^2 statistika bog‘liqsiz (s^2 tuzatilgan dispersiya) bo‘lsa, $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ tasodifiy miqdor n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha χ^2 taqsimotga ega bo‘ladi.

Isbot. $x_i^1 = \frac{x_2 - a}{\sigma}$ bog‘liqsiz va (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\overline{x^1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^1 s^{i^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1 - \overline{x^1}\right)^2.$$

Bu holda $\bar{x} = a + \sigma \overline{x}^1$, $s^2 = \sigma^2 s^{1^2}$. $(x_1', x_2', ..., x_n')$ tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i']$$

dan iborat sferik normal taqsimlangan bo‘ladi.

$y = cx'$ orqali quyidagi tengliklar

$$y_1 = \sqrt{n}\,\overline{x}^1 = \frac{x_1'}{\sqrt{n}} + ... + \frac{x_n'}{\sqrt{n}},$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i', k = \overline{2,n} \qquad \text{(XX.66.4)}$$

bilan ifodalangan ortogonal almashtirishni belgilaymiz. c_{ki} larni tanlash hisobiga (XX.66.4) tengliklar doimo ortogonal almashtirishni beradi.

U holda $y_1, y_2, ... y_n$ lar ham zichlik funksiyasi (XX.66.3) dan iborat sferik normal taqsimlangan bo‘ladi. c ning ortogonal almashtirish bo‘lganligidan

$$y_1 = \sqrt{n^1} x^{-1} \text{ va } \sum_{i=1}^{n} x_i^{1^2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

va demak

$$(n-1)s^{1^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1 - x^{-1}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{1^2} - \overline{x^2} = \sum_{i=1}^{n} y_1^{\ 2} - y_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\ 2}$$

hosil bo‘ladi. Bundan $(n-1)s^{1^2}$ tasodifiy miqdor (n-1) ozodlik darajasi bo‘yicha χ^2 taqsimotga ega bo‘ladi.

2-teorema[306]. (XIX.59.1) normal taqsimotga ega bo‘lgan bosh tanlanmadan olingan bo‘lsin.

$$r = \frac{(\overline{x} - a)\sqrt{n}}{s} \qquad \text{(XX.66.5)}$$

tasodifiy miqdor n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha Styudent qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

Isboti. $\frac{\overline{x}-a}{G}\sqrt{n}$ tasodifiy miqdor (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan va s'/σ $\overline{x}$ ga bog‘liq bo‘lmagani holda $\sqrt{\chi^2_{n-1} : (n-1)}$ ga teng, χ^2_{n-1} n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha χ^2 qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi. Shuning uchun (XX.66.5) ifoda n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha Styudent qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi. Styudent (XX.66.5) qonunidan (nisbatidan) foydalanib, a uchun, σ noma’lum bo‘lgan holda, ishonchli interval tuzamiz. $s_n(t)$ bilan Styudent taqsimotini va $t_\gamma(n)$ bilan $s_n(t)$ ning kvantilini belgilaymiz:

$$S_n(t) = 1 - \gamma$$

Styudent taqsimotining simmetrikligidan $t_{1-v}(n) = -t_\gamma(n)$. U holda $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ bo‘lganda

$$\frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \overline{x} - a \le \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

tengsizlik $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi. Bundan[307]

$$\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le a \le \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

kelib chiqadi.

2-misol. Biror kattalikni bir xil aniqlikda 10 marta o‘lchash ma’lumotlari bo‘yicha olingan natijalarning tanlanma o‘rtacha qiymati $\overline{x} = 20$ va tuzatilgan o‘rta kvadratik og‘ish $s = 5$ topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli interval yordamida, $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan baholang.

Yechish: O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymati y ning a- matematik kutilishiga teng. Shuning uchun σ-noma’lum bo‘lganda

$$\overline{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$$

bo‘ladi t_γ ni topish uchun $\gamma = 0,90$ e’tiborga olib, $t_\gamma = (\gamma, n)$ uchun tuzilgan jadvaldan foydalanamiz: $t_\gamma(0,90;10) = 2,26$.

Topilganlarni oxirgi tenglikka qo‘yib

$$20-2.26\cdot\frac{s}{\sqrt{10}}<a<20+2.26\cdot\frac{s}{\sqrt{10}}.$$

Bundan $16,43<a<23,57$.

1) a ma’lum bo‘lganda σ uchun ishonchli interval

$$\frac{\eta}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{\sigma}\right)^2$$

statistika σ uchun yetarli statistika bo‘ladi va U^2 taqsimotga ega bo‘ladi.

$K_n(x)$ bilan η/σ^2 ning taqsimot funksiyasini, $R_\gamma(n)$ bilan $K_n(x)$ ning kvantilini belgilaymiz.

Bu holda, $R_{1-\alpha_1}(n)\le\frac{n}{\sigma^2}\le R_{\alpha_1}(n)$ tengsizlik $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi.

Bundan[308]

$$\sqrt{\frac{\eta}{R_{\alpha_2}(n)}}\le G\le\sqrt{\frac{\eta}{R_{1-\alpha_1}(n)}} \qquad \text{(XX.66.6)}$$

kelib chiqadi.

Agar, α_1 va α_2 ni $R_n(x)=K_n^{'}(x)$ zichlik funksiya $R_n(R_{1-\alpha_1}(n))=R_n(R_{\alpha_2}(n))$ tenglikni qanoatlantiradigan qilib tanlansa, interval uzunligi eng kichik bo‘ladi.

3-misol. Bosh to‘plamdan olingan $n=18$ hajmli tanlanma ma’lumotlari normal taqsimlangan miqdori belgining tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi $S=2$ topilgan. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,99 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli intervalni toping.

Yechish: Amaliyotda, ko‘pincha (XX.66.6) o‘rniga $S(1-q)<\sigma<S(1+q)$ $(q<1)$ $0<\sigma<S(1+q)$ $(q>1)$ ishlatiladi. Bunda q uchun

$$R(\chi,n)=\frac{\chi^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{(n-3)/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

zichlik funksiyaga asoslangan $q(\alpha,n)$ maxsus jadval tuzilgan.

$\alpha=0,99$ va $n=25$ bo‘yicha jadvaldan $q(0,99;18)=0,63$ topiladi.

Demak, $q<1$, bu holda $2(1-0,63)<\sigma<2(1+0,63)$ yoki $0,74<\sigma<3,26$ bo‘ladi.

2) a noma’lum bo‘lganda σ uchun ishonchli interval. Bu holda η statistika urniga empirik dispersiyani olamiz. 1-teoremaga asosan $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}$ tasodifiy miqdor ozodlik darajasi n-1 bo‘lgan χ^2 qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi. Bundan, σ uchun ishonchli interval[309], $1-(\alpha_1+\alpha_2)$ ehtimollik bilan

$$S\sqrt{\frac{n-1}{R_{\alpha_2}(n-1)}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{n-1}{R_{1-\alpha_1}^{(n-1)}}}$$

kabi bo‘ladi.

10.2 mavzu BERNULLI SXEMASIDA YUTUQ SONI EHTIMOLLIGI UCHUN ISHONCHLI INTERVAL

Bernulli sxemasida μ bilan n ta tajribadagi yutuqlar sonini belgilaymiz:

$$F(m,p) = p(\mu \le m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \ ,$$

bu funksiya p ning o‘sishi bo‘yicha kamayuvchi bo‘ladi, chunki

$$\frac{dF(m,p)}{dP} = \sum_{k=0}^{m} C_n^k k P^{k-1}(1-P)^{n-k} - \sum_{k=0}^{m} C_n^k (n-k) P^k (1-P)^{n-k-1} = -nC_{n-1}^m P^m (1-P)^{n-m-1} < 0.$$

$m_\gamma(p)$ bilan $1-F(m_v(p);\ p) \ge 1-v$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng kichik butun sonni belgilaymiz. U holda $m_v(p)-1$ son $F(m_v(p)-1;\ p) < v$ ni qanoatlantiruvchi eng katta son bo‘ladi.

Odatdagiday $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, natijada kamida $1-\alpha$ ehtimollik bilan $m_{1-\alpha_1}(p) \le \mu \le m_{\alpha_2}(p)$ bajariladi. $y = m_v(P)$ ni p ga nisbatan yechimini $m_v^{-1}(y)$ bilan ifodalaymiz.

U holda, kamida $1-\alpha$ ehtimollik bilan

$$p = m_{\alpha_2}^{-1}(\mu) < p < m_{1-\alpha_1}^{-1} \qquad (\mu) = \overline{p} \qquad \text{(XX.67.1)}$$

tengsizlik bajariladi.

Bunda, $1-\alpha$ ga ishonchlilik koeffisenti[310] deyiladi. (XX.67.1) ning chegaralarini topishda, ko‘pincha, Muavr-Laplasning asimptotik formulasini ishlatamiz: $\eta = \frac{\mu - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ tasodifiy miqdor $1-\alpha$ ehtimollik bilan $|\eta| \le U_{\frac{\alpha}{2}}$ bajariladi. Bu o'z navbatida

$$\frac{\mu}{n} - U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le \frac{\mu}{n} + U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad \text{(XX.67.2)}$$

bo'ladi.

$\frac{\mu}{n} \to p$ ligidan, (XX.67.2) ni quyidagicha yozish mumkin[311]

$$\frac{\mu}{n} - U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{n^2}(1-\frac{\mu}{n})} \le p \le \frac{\mu}{n} + U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{n^2}(1-\frac{\mu}{n})}$$

4-misol. Bernulli sxemasida $n=30$ bo'lganda, 13 ta yutuq bo'lgan holda, $\alpha = 0,05$ ishonchlilik ehtimolligi bilan p uchun ishonchli interval tuzing.

Yechish. Shartga ko'ra $\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}}) = \frac{0,95}{2} = 0,475$ jadvaldan $U_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$; demak,

$$\frac{13}{30} - 1,96\sqrt{\frac{13}{30^2}(1-\frac{13}{30})} \le p \le \frac{13}{30} + 1,96\sqrt{\frac{13}{30^2}(1-\frac{13}{30})}$$

yoki (12) ning chegaralarini topishda quyidagi teoremadan ham foydalanish mumkin.

3-teorema. ξ_n tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi (a, σ_n) parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan va

$$\mu_{\xi n} = a,\ D_{\xi n} = \sigma_n^2 \to 0$$

bo'lsin. Agar $q(x)$ funksiya uchun $|q(x)| \le k$ va $q'(x), q''(x)$ lar $x = a$ atrofida mavjud, $q'(a) \ne 0$ shartlar bajarilsa, $\eta_n = q(\xi_n)$ tasodifiy miqdor $(q(a)), |q'(a)|\sigma_n$ parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'ladi.

Isbot. $|x-a| < \varepsilon$ da, Teylor formulasiga asosan

$$q(x) = q(a) + q'(a)(x-a) + r(x)(x-a)^2 \qquad \text{(XX.67.3)}$$

bajariladi, bu yerda $|r(x)| \le k_1, k_1 < \infty.$

$A_n = \{\omega : |\xi_n(\omega) - a| < \sigma_n^{1/4}\ \}$ da $n \ge n_0$ bo'lganda $\sigma_n \le \varepsilon^4$ lar uchun, (XX.67.3) dan foydalangan holda

$$\eta_n = q(\xi_n)J_{A_n} + q(\xi_n)J_{\overline{A_n}} = J_{A_n}(q(a) + q'(a)(\xi_n - a) + r(\xi_n)(\xi_n - a)^2) + J_{\overline{A_n}}q(\xi_n)$$

ni hosil qilamiz. U holda $\eta_n = \eta_n' + \delta_n$ almashtirish bajarilsa,

$$\eta_n^{'} = q(a) + q^{'}(a)(\xi_n - a),$$

$$\delta_n = -q(a)J_{\overline{A_n}} - q^{'}(a)(\xi_n - a)J_{\overline{A_n}} + J_{A_n} r(\xi_n)(\xi_n - a)^2 + q(\xi_n)J_{\overline{A_n}} \qquad \text{(XX.67.4)}$$

ni topamiz.

Oxirgi tenglikning o‘ng tomoni (0,1) parametrli asimptotik normal qonun bo‘yicha taqsimlangan, u holda $\eta_n^{'}$ tasodifiy miqdor $(q(a), |q^{'}(a)|\sigma_n)$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

$$\delta_n : \sigma_n \xrightarrow{P} 0$$

ni ko‘rsatish uchun, (XX.67.4) ning har bir qo‘shiluvchisining ehtimollik bilan, nolga yaqinlashishini ko‘rsatamiz.

Chebishev tengsizligiga ko‘ra

$$P(\overline{A_n}) \le \frac{\sigma_n^2}{\sqrt{\sigma_n}} = \sigma_n^{\frac{3}{2}}, \quad P\{|q(a)|J_{\overline{A_n}} > \varepsilon\sigma_n\} \le \frac{kP(\overline{A_n})}{\varepsilon\sigma_n} \le \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\sigma_n} \to 0,$$

$$P\{|q(\xi_n)|J_{\overline{A_n}} > \varepsilon\sigma_n\} \to 0,$$

larni hosil qilamiz. Koshi-Bunyakovskiy t $P\{|q'(a)| \, |\varepsilon_n - a| \, J_{\overline{A_n}} > \varepsilon\sigma_n\} \le \frac{|q^{'}(a)| M|\xi_n - a| J_{\overline{A_m}}}{\varepsilon\sigma_n}$ engsizligidan

$$M|\xi_n - a|J_{\overline{A_n}} \le \sqrt{M(\xi_n - a)^2 MJ_{\overline{A_n}}} \le \sigma_n \cdot \sigma_n^{\frac{3}{4}}$$

demak,

$$P\{|q'(a)| \, |\varepsilon_n - a| \, J_{\overline{A_n}} > \varepsilon\sigma_n\} \le \frac{|q^{'}(a)|\sigma_n^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon} \to 0,$$

natijada

$$P\{ \, |J_{An} r(\xi_n)(\xi_n - a)^2| > \varepsilon\sigma_n \} \le \frac{k_1 M(\xi_n - a)^2}{\varepsilon\sigma_n} = \frac{k_1\sigma_n}{\varepsilon} \to 0.$$

Yuqoridagi tasdiqlardan (XX.67.4) ning ikkala tomonini σ_n ga bo‘lib, $\delta_n : \sigma_n \to 0$ ligiga ishonch hosil qilamiz.

$$\frac{\eta_n - q(a)}{|q^{'}(a)|\sigma_n} = \frac{\eta_n^{'} - q(a)}{|q^{'}(a)|\sigma_n} + \frac{\delta_n}{|q^{'}(a)|\sigma_n}$$

tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi qo‘shiluvchi (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi, ikkinchi qo‘shiluvchi esa ehtimollik bo‘yicha nolga intiladi. Demak, tasodifiy miqdor (0,1) parametrli qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

Bu teoremadan foydalanib, $\eta_n = 2\arcsin\sqrt{\frac{M}{n}}$ tasodifiy miqdorning ($2\arcsin\sqrt{\varphi}, \sqrt{\frac{1}{n}}$) parametrli normal qonunga bo‘ysunishini ko‘ramiz, chunki $\mu_n : n$ ifoda ($p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan.

$2\arcsin\sqrt{x}$ funksiya 3-teorema shartlarini qanoatlantiradi va $(2\arcsin\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Quyidagi $\left|\ 2\arcsin\sqrt{\frac{M}{n}} - 2\arcsin\sqrt{P}\ \right| \le \frac{U_{\alpha/l}}{\sqrt{n}}$ tengsizlik $n \to \infty$ da $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi, bu yerda $U_{\alpha/2}$ normal qonunning kvantili. Oxirgi tengsizlikdan

$$2\arcsin\sqrt{\frac{M}{n}} - \frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \le 2\arcsin\sqrt{p} \le 2\arcsin\sqrt{\frac{M}{n}} + \frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

va p uchun ishonchli interval

$$\sin^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{\mu}{n}} - \frac{U_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right) \le p \le \sin^2\arcsin\left(\sqrt{\frac{\mu}{n}} + \frac{U_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right)$$

hosil bo‘ladi.

MISOLLAR.

- Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish σ, tanlanma o‘rtacha qiymat $\bar{x}$ va tanlanma hajmi n berilgan. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan x belgisining noma’lum a matematik kutilishini 0,93 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intervalini toping.

  A) $\sigma = 3, \bar{x} = 9, n = 15,$ $б) \sigma = 6, \bar{x} = 20, n = 30$

- O‘zbekiston aholisining 1991-2000 yillar orasidagi yillik usishi foizlarda berilgan: 1,05; 1,50; 1,64; 1,78; 1,87; 1,88; 1,94; 2,21; 2,29; 2,36. Tanlanma normal qonunga buysunadi degan shart asosida a matematik kutilishini 0,95 ishonchlilik bilan interval baho tuzing.

- Bosh to‘plamdan olingan n hajmli tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha normal taqsimlangan belgini tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi s topilgan. Agar

$$a)\, n = 10,\ s = 6,\ b)\ n = 30,\ s = 14$$

bo‘lsa, σ o‘rtacha kvadratik chetlanishini 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchlilik intervalini toping.

- (a_1,σ_1) va (a_2,σ_2) parametrli normal bosh tanlanmalardan olingan $x_1,x_2,...x_n;\ y_1,y_2,...y_n$ tanlanma uchun $1-\alpha$ ehtimollik bilan a_1-a_2 ayirmani qoplaydigan ishonchli intervalini tuzing, bunda σ_1 va σ_2 ma’lum, deb faraz qilinadi.
- Yuqoridagi 4-misolda $\sigma_1=\sigma_2=\sigma,$ σ noma’lum, deb faraz qilinib, a_1-a_2 uchun ishonchlilik intervalni tuzing.
- Puasson taqsimoti bo‘yicha $x_1,x_2,...,x_n$ bog‘liqsiz tanlanmaning matematik kutilmasi a uchun $1-\alpha$ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli interval tuzing.
- $x_1,x_2,...,x_n$ tanlanma $(0,\theta)$ intervalda tekis taqsimlangan bo‘lgan holda, $1-\alpha$ ishonchlilik ehtimoli bilan θ parametr uchun ishonchli interval tuzing.

8-MAVZU

Ishonchlilik intervallarini qurish. Aniq ishonchli intervallar

Reja

1. Ishonchlilik intervallarni qurish
2. Aniq ishonchli intervallar

10.3-mavzu. Normal taqsimot bilan bog'liq taqsimotlar:Xi-kvadrat va Styudent ,Fisher taqsimotlari.

Reja

1. **Xi-kvadrat taqsimoti.**
2. **Styudfent taqsimoti.**
3. **Fisher taqsimoti**

Tayanj iboralar.Ozodlik darajasi. Markazlashgan va normalashtrilgan tanlanma.

1-teorema. (XIX.59.1) normal taqsimlangan $\overline{x}$ va s^2 statistika bog'liqsiz (s^2 tuzatilgan dispersiya) bo'lsa, $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ tasodifiy miqdor n-1 ozodlik darajasi bo'yicha χ^2 taqsimotga ega bo'ladi.

Isbot. $x_i^1 = \frac{x_2 - a}{\sigma}$ bog'liqsiz va (0,1) parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'ladi, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\overline{x^1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^1 s^{i^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1 - \overline{x^1}\right)^2.$$

Bu holda $\overline{x} = a + \sigma\overline{x}^1$, $s^2 = \sigma^2 s^{1^2}$. $(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'})$ tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}]$$

dan iborat sferik normal taqsimlangan bo'ladi.

$y = cx^{'}$ orqali quyidagi tengliklar

$$y_1 = \sqrt{n}\overline{x}^1 = \frac{x_1^{'}}{\sqrt{n}} + ... + \frac{x_n^{'}}{\sqrt{n}},$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i^{'}, k = \overline{2,n} \qquad \text{(XX.66.4)}$$

bilan ifodalangan ortogonal almashtirishni belgilaymiz. c_{ki} larni tanlash hisobiga (XX.66.4) tengliklar doimo ortogonal almashtirishni beradi.

U holda $y_1, y_2, ... y_n$ lar ham zichlik funksiyasi (XX.66.3) dan iborat sferik normal taqsimlangan bo‘ladi. c ning ortogonal almashtirish bo‘lganligidan

$$y_1 = \sqrt{n^1} x^{-1} \text{ va } \sum_{i=1}^{n} x_i^{1^2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

va demak

$$(n-1)s^{1^2} = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i^1 - x^{-1}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{1^2} - \overline{x^2} = \sum_{i=1}^{n} y_1^{\ 2} - y_i^{\ 2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^{\ 2}$$

hosil bo‘ladi. Bundan $(n-1)s^{1^2}$ tasodifiy miqdor (n-1) ozodlik darajasi bo‘yicha χ^2 taqsimotga ega bo‘ladi.

2-teorema[306]. (XIX.59.1) normal taqsimotga ega bo‘lgan bosh tanlanmadan olingan bo‘lsin.

$$r = \frac{(\overline{x} - a)\sqrt{n}}{s} \qquad \text{(XX.66.5)}$$

tasodifiy miqdor n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha Styudent qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

Isboti. $\frac{\overline{x} - a}{G}\sqrt{n}$ tasodifiy miqdor (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan va s'/σ $\overline{x}$ ga bog‘liq bo‘lmagani holda $\sqrt{\chi_{n-1}^2 : (n-1)}$ ga teng, χ_{n-1}^2 n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha χ^2 qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi. Shuning uchun (XX.66.5) ifoda n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha Styudent qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi. Styudent (XX.66.5) qonunidan (nisbatidan) foydalanib, a uchun, σ noma’lum bo‘lgan holda, ishonchli interval tuzamiz. $s_n(t)$ bilan Styudent taqsimotini va $t_\gamma(n)$ bilan $s_n(t)$ ning kvantilini belgilaymiz:

$$S_n(t) = 1 - \gamma$$

Styudent taqsimotining simmetrikligidan $t_{1-\nu}(n) = -t_\gamma(n)$. U holda $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ bo‘lganda

$$\frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \overline{x} - a \le \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

tengsizlik $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi. Bundan[307]

$$\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le a \le \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

kelib chiqadi.

2-misol. Biror kattalikni bir xil aniqlikda 10 marta o‘lchash ma’lumotlari bo‘yicha olingan natijalarning tanlanma o‘rtacha qiymati $\bar{x}=20$ va tuzatilgan o‘rta kvadratik og‘ish $s=5$ topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli interval yordamida, $\gamma=0,95$ ishonchlilik bilan baholang.

Yechish: O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymati y ning a- matematik kutilishiga teng. Shuning uchun σ-noma’lum bo‘lganda

$$\bar{x}-t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}<a<\bar{x}+t_\gamma\frac{s}{\sqrt{n}}$$

bo‘ladi t_γ ni topish uchun $\gamma=0,90$ e’tiborga olib, $t_\gamma=(\gamma,n)$ uchun tuzilgan jadvaldan foydalanamiz: $t_\gamma(0,90;10)=2,26$.

Topilganlarni oxirgi tenglikka qo‘yib

$$20-2.26\cdot\frac{s}{\sqrt{10}}<a<20+2.26\cdot\frac{s}{\sqrt{10}}.$$

Bundan $16,43<a<23,57$.

10.4-mavzu.Normal taqsimot parametrlarini ishonchli oraliq usuli bilan baholash

REJA

1. a ma’lum bo‘lganda σ uchun ishonchli interval
2. a noma’lum bo‘lganda σ uchun ishonchli interval.

Tayanj iboralar.Tanlanma o’rta. Tanlanma dispersiya. Ishonchli interval

1) a ma’lum bo‘lganda σ uchun ishonchli interval

$$\frac{\eta}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{\sigma}\right)^2$$

statistika σ uchun yetarli statistika bo‘ladi va U^2 taqsimotga ega bo‘ladi.

$K_n(x)$ bilan η/σ^2 ning taqsimot funksiyasini, $R_\gamma(n)$ bilan $K_n(x)$ ning kvantilini belgilaymiz.

Bu holda, $R_{1-\alpha_1}(n)\le\frac{n}{\sigma^2}\le R_{\alpha_1}(n)$ tengsizlik $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi.

Bundan[308]

$$\sqrt{\frac{\eta}{R_{\alpha_2}(n)}} \le G \le \sqrt{\frac{\eta}{R_{1-\alpha_1}(n)}} \qquad \text{(XX.66.6)}$$

kelib chiqadi.

Agar, α_1 va α_2 ni $R_n(x) = K_n^{'}(x)$ zichlik funksiya $R_n(R_{1-\alpha_1}(n)) = R_n(R_{\alpha_2}(n))$ tenglikni qanoatlantiradigan qilib tanlansa, interval uzunligi eng kichik bo‘ladi.

3-misol. Bosh to‘plamdan olingan $n = 18$ hajmli tanlanma ma’lumotlari normal taqsimlangan miqdori belgining tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi $S = 2$ topilgan. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,99 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli intervalni toping.

Yechish: Amaliyotda, ko‘pincha (XX.66.6) o‘rniga $S(1-q) < \sigma < S(1+q)$ $(q < 1)$ $0 < \sigma < S(1+q)$ $(q > 1)$ ishlatiladi. Bunda q uchun

$$R(\chi, n) = \frac{\chi^{n-2} e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{(n-3)/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

zichlik funksiyaga asoslangan $q(\alpha, n)$ maxsus jadval tuzilgan.

$\alpha = 0,99$ va $n = 25$ bo‘yicha jadvaldan $q(0,99;18) = 0,63$ topiladi.

Demak, $q < 1$, bu holda $2(1-0,63) < \sigma < 2(1+0,63)$ yoki $0,74 < \sigma < 3,26$ bo‘ladi.

2) a noma’lum bo‘lganda σ uchun ishonchli interval. Bu holda η statistika urniga empirik dispersiyani olamiz. 1-teoremaga asosan $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}$ tasodifiy miqdor ozodlik darajasi n-1 bo‘lgan χ^2 qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi. Bundan, σ uchun ishonchli interval[309], $1-(\alpha_1+\alpha_2)$ ehtimollik bilan

$$S\sqrt{\frac{n-1}{R_{\alpha_2}(n-1)}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{n-1}{R_{1-\alpha_1}^{(n-1)}}}\ \text{s}$$

kabi bo‘ladi.

a) σ ma’lum bo‘lganda a uchun ishonchli interval.

η statistika sifatida $\bar{x}$ ni olamiz. Ma’lumki, $\bar{x}$ miqdor a uchun asosli va siljimagan baho. Bu holda $\bar{x}$ miqdor $(a, \frac{6}{\sqrt{n}})$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

$\gamma = 1 - \Phi(u_V)$ belgilasak, $u_{1-\nu} = -u_\nu$ ligidan

$$a-u_{\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\le \overline{x}\le a+u_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (XX.66.1)$$

tengsizlik $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi. Oxirgi tengsizlikni a ga nisbatan[305] yechib,

$$\overline{x}-u_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\underline{a}\le a\le \overline{a}=\overline{x}+u_{\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad (XX.66.2)$$

ni hosil qilamiz. Bu tengsizlik uchun ishonchli ehtimollik $1-\alpha$ ga, interval uzunligi

$$(u_{\alpha_2}+u_{\alpha_1})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ga teng bo‘ladi.

Agar $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}$ deb olinsa, bu interval uzunligi eng kichik bo‘ladi.

Agar $\alpha_2>\alpha_1$ bo‘lsa, u holda $u_{\alpha_1}>u_{\alpha_2}$ kelib chiqadi.

faraz qilaylik $\Delta=0$ uchun $\alpha_2-\Delta\ge\alpha_1+\Delta$ bo‘lsin, natijada $u_{\alpha_2}>u_{\alpha_1+\Delta}>u_{\alpha_2-\Delta}>u_{\alpha_2}$ bo‘ladi. quyidagi

$$\Delta=1-\Phi(u_{\alpha_2})-(1-\Phi(u_{\alpha_2-\Delta}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_{\alpha_2}}^{u_{\alpha_2-\Delta}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ge\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u_{\alpha_1-\Delta}^2}{2}}\left(u_{\alpha_2-\Delta}-u_{\alpha_2}\right),$$

$$\Delta=1-\Phi(u_{\alpha_i-\Delta})-(1-\Phi(u_{\alpha_1}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_{\alpha_i+\Delta}}^{u_{\alpha_1}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\ge\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u_{\alpha_1+\Delta}^2}{2}}\left(u_{\alpha_1}-u_{\alpha_1+\Delta}\right)$$

tengsizlikdan

$$u_{\alpha_1-\Delta}-u_{\alpha_2}\le\Delta\sqrt{2\pi}e^{\frac{u_{\alpha_2-\Delta}^2}{2}}<\Delta\sqrt{2\pi}e^{\frac{u_{\alpha+\Delta}^2}{2}}\le u_{\alpha_1}-u_{\alpha_1+\Delta}$$

yoki

$$u_{\alpha_2-\Delta}+u_{\alpha_1+\Delta}<u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}$$

kelib chiqadi.

bundan, $\alpha_1\ne\alpha_2$ bo‘lsa, ishonchli interval eng kichik uzinlikga ega bulolmasligi kelib chiqadi.

1-misol. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish $\sigma=6$, tanlanma o‘rtacha qiymat $\overline{x_1}=15$ va tanlanma hajmi $h=36$ berilgan. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan x belgisining noma’lum a matematik kutilishini 0,90 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intervalini toping.

Yechish. $\Phi(u_\alpha)=0.45$ yoki $2\Phi(u)\geq 0.90$ shartga ko‘ra, jadvaldan $u_\alpha=1.65$ ni topamiz. Topilganlarni (XX.66.2) ga qo‘yamiz.

$$15-1.65\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}\leq a\leq 15+1.65\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}$$

yoki

$$13.35\leq a\leq 16.65\,.$$

b) σ <u>noma’lum bo‘lganda a uchun ishonchli interval.</u> Birinchi navbatda $\bar{x}$ uchun muhim bo‘lgan quyidagi xossani keltiramiz:

<u>1-teorema.</u> (XIX.59.1) normal taqsimlangan $\bar{x}$ va s^2 statistika bog‘liqsiz (s^2 tuzatilgan dispersiya) bo‘lsa, $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ tasodifiy miqdor n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha χ^2 taqsimotga ega bo‘ladi.

<u>Isbot.</u> $x_i^1=\frac{x_2-a}{\sigma}$ bog‘liqsiz va (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\overline{x^1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i^1 s^{i^2}=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1-\overline{x^1}\right)^2.$$

Bu holda $\bar{x}=a+\sigma\bar{x}^1$, $s^2=\sigma^2 s^{1^2}$. $(x_1',x_2',...,x_n')$ tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi

statistika sifatida $\bar{x}$ ni olamiz. Ma’lumki, $\bar{x}$ miqdor a uchun asosli va siljimagan baho. Bu holda $\bar{x}$ miqdor $(a,\frac{6}{\sqrt{n}})$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

$\gamma=1-\Phi(u_\nu)$ belgilasak, $u_{1-\nu}=-u_\nu$ ligidan

$$a-u_{\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\leq\bar{x}\leq a+u_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{(XX.66.1)}$$

tengsizlik $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi. Oxirgi tengsizlikni a ga nisbatan[305] yechib,

$$\bar{x}-u_{\alpha_1}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=\underline{a}\leq a\leq\bar{a}=\bar{x}+u_{\alpha_2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{(XX.66.2)}$$

ni hosil qilamiz. Bu tengsizlik uchun ishonchli ehtimollik $1-\alpha$ ga, interval uzunligi

$$(u_{\alpha_2}+u_{\alpha_1})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ga teng bo'ladi.

Agar $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}$ deb olinsa, bu interval uzunligi eng kichik bo'ladi.

Agar $\alpha_2>\alpha_1$ bo'lsa, u holda $u_{\alpha_1}>u_{\alpha_2}$ kelib chiqadi.

faraz qilaylik $\Delta=0$ uchun $\alpha_2-\Delta\geq\alpha_1+\Delta$ bo'lsin, natijada $u_{\alpha_2}>u_{\alpha_1+\Delta}>u_{\alpha_2-\Delta}>u_{\alpha_2}$ bo'ladi. quyidagi

$$\Delta=1-\Phi(u_{\alpha_2})-(1-\Phi(u_{\alpha_2-\Delta}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_{\alpha_2}}^{u_{\alpha_2-\Delta}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2_{\alpha_1-\Delta}}{2}}\left(u_{\alpha_2-\Delta}-u_{\alpha_2}\right),$$

$$\Delta=1-\Phi(u_{\alpha_i-\Delta})-(1-\Phi(u_{\alpha_1}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_{\alpha_i+\Delta}}^{u_{\alpha_1}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2_{\alpha_1+\Delta}}{2}}\left(u_{\alpha_1}-u_{\alpha_{1}+\Delta}\right)$$

tengsizlikdan

$$u_{\alpha_1-\Delta}-u_{\alpha_2}\leq\Delta\sqrt{2\pi}e^{\frac{u^2_{\alpha_2-\Delta}}{2}}<\Delta\sqrt{2\pi}e^{\frac{u^2_{\alpha+\Delta}}{2}}\leq u_{\alpha_1}-u_{\alpha_1+\Delta}$$

YOKI

$$u_{\alpha_2-\Delta}+u_{\alpha_1+\Delta}<u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}$$

kelib chiqadi.

bundan, $\alpha_1\neq\alpha_2$ bo'lsa, ishonchli interval eng kichik uzinlikga ega bulolmasligi kelib chiqadi.

1-misol. Bosh o'rtacha kvadratik chetlanish $\sigma=6$, tanlanma o'rtacha qiymat $\overline{x_1}=15$ va tanlanma hajmi $h=36$ berilgan. Bosh to'plamning normal taqsimlangan x belgisining noma'lum a matematik kutilishini 0,90 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intervalini toping.

Yechish. $\Phi(u_\alpha)=0.45$ yoki $2\Phi(u)\geq 0.90$ shartga ko'ra, jadvaldan $u_\alpha=1.65$ ni topamiz. Topilganlarni (XX.66.2) ga qo'yamiz.

$$15-1.65\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}\leq a\leq 15+1.65\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}$$

yoki

$$13.35\leq a\leq 16.65\,.$$

b) σ <u>noma'lum bo'lganda a uchun ishonchli interval.</u> Birinchi navbatda $\bar{x}$ uchun muhim bo'lgan quyidagi xossani keltiramiz:

1-teorema. (XIX.59.1) normal taqsimlangan $\overline{x}$ va s^2 statistika bog‘liqsiz (s^2 tuzatilgan dispersiya) bo‘lsa, $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ tasodifiy miqdor n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha χ^2 taqsimotga ega bo‘ladi.

Isbot. bog‘liqsiz va (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\overline{x^1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^1 s^{i^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1 - \overline{x^1}\right)^2.$$

Bu holda. $(x_1', x_2', ..., x_n')$ tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi

11-mavzu Statistik gipotezalar va ularning turlari-6 soat

11.1 mavzu.Statistik gipotezalarni tekshirish nazariyasining umumiy tushunchalari

Reja

1.**STATISTIK GIPOTEZALAR**

2. Kuzatilgan qiymat

3. Qiymatdorlik darajasi. Mezon kuchi

Tayanj iboralar. Mrzon.Kritik soha. O’ng kritik soha.Chap kritik soha

Faraz qilaylik, $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ tasodifiy vektor uchun θ parametrga bog‘liq $P(x\ ,\theta)$ zichlik funksiyasi berilgan bo‘lsin. Xususan, $P(x_k,\theta)$-bir o‘lchovli zichlik funksiya va

$$x_1, x_2, ..., x_n \qquad \text{(XVIII.53.1)}$$

tanlanma bog‘liqsiz bo‘lsa, u holda (XVIII.53.1) ga mos n- o‘lchovli $P(x_1, x_2, ..., x_n, \theta\ )$ zichlik funksiya

$$P(x_1, x_2, ..., x_n, \theta\ ) = \prod_{k=1}^{n} P(x_k, \theta)$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar ξ diskret taqsimlangan bo‘lsa, u holda

$$P(x,\theta) = P(\xi = x),$$

bu yerda x-chekli yoki sanoqli qiymatlarni qabul qiladi.

Ta’rif. θ ning qiymatlari $P(x,\theta)$ ni to‘la aniqlaydi va θ to‘g‘risida farazlarga statistik gipoteza deyiladi.

Agar θ gipoteza bitta farazdan iborat bo‘lsa, u holda bunday gipoteza oddiy gipoteza; ikkita va undan ortiq farazlardan iborat bo‘lgan gipotezaga murakab gipoteza, - deb ataladi.

1-misol: (α, σ) parametrli normal taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$P(x,\alpha,\sigma)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}$$

berilgan bo‘lsin. Bu holda $(\alpha,\sigma)=(0,1)$ oddiy, $a=a_0$ yoki $a=a_1$ bo‘lganda - murakkab gipoteza bo‘ladi, a_0, a_1-aniq sonlar.

2-misol: n-ta bog‘liqsiz tajribada A xodisani x marta ruy berish ehtimolligi

$$P(x,\theta)=C_n^x\theta^x(1-\theta)^{n-x}$$

ga teng bo‘lsin. Agar $\theta=\frac{1}{2}$ bo‘lsa, oddiy, $\theta>\frac{1}{2}$ bo‘lgan hol murakkab gipoteza deyiladi.

Ta’rif. θ parametrni tanlash yoki tekshirish uchun amalga oshiriladigan farazga N_0 gipoteza deyiladi (asosiy gipoteza)[252], konkurent (alternativ)[253] gipoteza deb, N_0 ga zid N_1 gipotezaga aytiladi. Demak,

$$H_0:P_0(x)=P(x,\theta_0),$$

unga zid

$$H_1:P_1(x)=P(x,\theta_1),$$

bunda θ_1,θ_0 - aniq sonlar.

(XVIII.53.1)- tanlanmadan, kritik soha deb ataluvchi, N_0 ni inkor etuvchi S to‘plam ni ajratamiz, ya’ni $x\in S$ bo‘lsa, N_0 inkor etiladi, boshqacha aytganda

$$P_0(s)=\int_S P(x,\theta_0)$$

ehtimollik kichik bo‘ladi.

S to‘plam ayrim holarda S-mezon[254] deb ham yuritiladi.

Ba’zi masalalarda N_0 va N_1 gipotezalar teng huquqli bo‘ladi, masalan, 1000 gacha bo‘lgan tasodifiy miqdorlar jadvalini tub va murakkab sonlar bo‘yicha ajratishda N_0 - tub va N_1-murakkab sonlarni ifodalasa, u holda bu ikkala gipoteza teng huquqli bo‘ladi.

Ko‘p hollarda N_0 asosiy gipoteza sifatida qaraladi. Masalan, ishlab chiqilgan lampochkalarning ishga yaroqlilik miqdori tasodifiy miqdor bo‘lib, u (a_0, σ_0) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan (N_0-gipoteza) ishlab chiqilgan lapochkalarning ishga yaroqsizliligi ham (a_1, σ_0), $a_1 \neq a_0$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangandir, u holda N_0 asosiy gipoteza bo‘ladi.

11-mavzu Statistik gipotezalar va ularning turlari

11.2 mavzu.Statistik gipotezalar va ularning turlari . 1-va 2-tur xatoliklar

Reja

1.Qiymatdorlik darajasi.

2. Mezon kuchi.

3.1va2 tur xatolik

Tayanj iboralar. **Statistik mezon· Kuzatilgan qiymat**

Gipotezani tekshirish natijasida ikki tur xatolikka yo‘l qo‘yilishi mumkin:

Birinchi tur xato[255] shundan iboratki, bunda to‘g‘ri gipoteza rad qilinadi. Bu xatoning ehtimolligi qiymatdorlik darajasi deyiladi va α bilan belgilanadi.

Bunda α ga S mezonning qiymatdorlik darajasi deyiladi.

Ikkinchi tur xato[257] shundan iboratki, bunda noto‘g‘ri gipoteza qabul qilinadi. Ikkinchi tur xatoni kupincha β orqali belgilanadi.

Agar

$$P_i(B) = \int_B P(x,\theta_i)dx, \quad i = 0,1 \qquad \text{(XVIII.54.1)}$$

belgilashni kiritsak, u holda S - mezonning birinchi tur xatosi

$$\alpha = P_0(S), \qquad \text{(XVIII.54.2)}$$

ikkinchi tur xatosi esa

$$\beta = P_i(\overline{S}), \quad \overline{S} = X \mid S \qquad \text{(XVIII.54.3)}$$

bo‘ladi.

Ta’rif. Statistik mezon[258] deb gipotezani tekshirish uchun xizmat qiladigan S tasodifiy miqdorga aytiladi.

Mezon kuchi funksiyasi deb θ ga nisbatan

$$W(S,\theta) = \int_S P(x,\theta)dx \qquad \text{(XVIII.54.4)}$$

ifoda olinadi.

Bu, o‘z navbatida tanlama parametri θ bo‘lgan holda, N_0 ni ni rad etish ehtimolligini bildiradi. (XVIII.54.1)- (XVIII.54.4) larga asosan mezon kuchi funksiyasi va birinchi, ikkinchi tur xatoliklari quyidagicha bog‘langan bo‘ladi:

$$\alpha = W(S,\theta), \; 1-\beta = W(S,\theta).$$

Demak, S -mezonning berilgan qiymatdorlik darajasi bo‘yicha barcha S_α kism to‘plamlari aniqlanib, bular ichida S* mezon tanlanadiki, $\theta = \theta_1$ bo‘lgan holda W(S, θ) eng katta qiymatni qabul qiladi:

$$W(S^*, \theta_0) = \alpha, \; W(S^*, \theta_1) = \max_{S \in S_\alpha} W(S, \theta_1) \qquad \text{(XVIII.54.5)}$$

(XVIII.54.5) ni qanoatlantiruvchi S^* mezonga optimal[259] mezon deyiladi. Ayrim hollarda (5) mavjud bo‘lmasligi ham mumkin.

Bu holda $\varphi(x)$ funksiyani kiritamiz:

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in S \\ 0, & x \notin S \end{cases} \qquad \text{(XVIII.54.6)}$$

Demak, N_0 ni inkor etish ehtimolligi $\varphi(x) = 1$ bo‘ladi va $\varphi(x)$ funksiyaga randomizastiya qilinmagan mezon deyiladi.

Endi randomizastiya qilingan mezonni kiritamiz[260]. Bu holda har bir x uchun ma’lum tajriba bog‘langan bo‘lib, hodisa ro‘y bersa bir, ro‘y bermasa nol bo‘lgan holda $\varphi(x)$ funksiya 1 yoki 0 qiymatni qabul qiladi, - deb faraz qilaylik. Demak, bizni randomizastiya qilingan mezonimiz bo‘yicha, agar bir tushsa, N_0 ni qabul qilinmaydi, nol tushsa N_0 ni qabul qilinadi. Bunday mezonga $\varphi(x)$-mezon[261] deyiladi va

$$W(S \;\; , \theta) = \int \varphi(x) P(x, \theta) dx = M_0 \varphi(\xi)$$

orqali belgilanadi.

$M_0 \varphi(\xi)$ zichlik funksiyasiga ega bo‘lgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilmasi, natijada

$$\alpha = W(\varphi, \theta) = M_0 \varphi(\xi),$$

$$\beta = 1 - W(\varphi, \theta_1) = 1 - M_1 \varphi(\xi)$$

bo‘ladi.

Agar, S_α-bilan, odatdagiday, berilgan α qiymatdorlik darajasi bacha $\varphi(x)$ -mezonlarning to‘plamini belgilansa, u holda

$$W(\varphi^*, \theta_0) = \alpha, \, W(\varphi^*, \theta_1) = \max_{\varphi \in S_\alpha} W(\varphi, \theta_1), \qquad \text{(XVIII.54.7)}$$

φ^*-ga optimal mezon[262] deyiladi.

Kuzatilgan qiymat[263] S_{kuz} - deb mezonning tanlanmalar bo‘yicha hisoblanAmaliyotda ko‘pincha S-mezonni aniqlash uchun quyidagicha yo‘l tutiladi:

gan qiymatiga aytiladi.

Kritik soha[264] deb, N_0 mezonning rad qilinadigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

Gipotezaning **qabul qilinishi sohasi**[265] deb, kriteriyaning nolinchi gipoteza qabul qilinadigan qiymatlar to‘plamiga aytiladi.

Kritik nuqtalar (chegaralar)[266] - S_{kr} deb kritik sohani gipotezaning qabul qilinish sohasidan ajratib turadigan nuqtalarga aytiladi.

O‘ng tomonlama kritik soha[267] deb, $S>S_{kr}$ tengsizlik bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda S_{kr} - musbat son.

Chap tomonlama kritik soha[268] deb, $S <= S_{кр}$ tengsizlik bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi,bu yerda S_{kr} -manfiy son.

Ikki tomonlama kritik soha[269] deb, $S<S_1$, $S>S_2$ tengsizliklar bilan aniqlanadigan kritik sohaga aytiladi, bu yerda $S_2>S_1$.

Demak, o‘ng tomonlama kritik soha uchun

$$P(S > S_{кр}) = \alpha ,$$

chap tomonlama kritik soha uchun

$$P(S < S_{кр}) = \beta ,$$

ikki tomonlama kritik soha uchun

$$P(S > S_{кр}) = \frac{\alpha}{2} \quad ; \quad P(S < -S_{кр}) = \frac{\alpha}{2}$$

bo‘ladi.

11.3-mavzu Statistik qipotezalarni tekshirish uchun kriteriya tanlash prinsiplari. Optimal kriteriya qurish

Reja

1.Optimal mezon

2. Normal va binormal qonun bo‘yicha taqsimlangan tanlanma to‘plamlar (a, σ) parametrli qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lib, σ ma’lum, a noma’lum va **uchun optimal mezon**

1) Tanlanma to‘plam $H_0:\ a=a_0,\ H_1:\ a=a_1>a_0$ bo‘lsin. Neyman-Pirsonning optimallik mezonini tuzamiz:

$$P_j(x)=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sigma^n}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-a_j)^2},\quad j=0,1,$$

$$\frac{P_1(x)}{P_0(x)}=\exp\left\{n\bar{x}(a_1-a_0)-\frac{n}{2\sigma^2}(a_1^{\ 2}-a_0^{\ 2})\right\}. \qquad \text{(XVIII.56.1)}$$

$\frac{P_1(x)}{P_0(x)}>c$ tengsizlik $\bar{x}>c_1$ ($c_1>0$) ni ta’minlaydi.

$\bar{x}$ $\left(a,\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ parametrli qonun bo‘yicha taqsimlanganligidan, birinchi va ikkinchi tur xatolik

$$\alpha=P\{\bar{x}>c_1/H_0\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\frac{c_1-a_0}{\sigma}\sqrt{n}}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du=1-\Phi\left(\frac{c_1-a_0}{\sigma}\sqrt{n}\right), \qquad \text{(XVIII.56.2)}$$

$$\beta=P\{\bar{x}\le c_1/H_1\}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{c_1-a_1}{\sigma}\sqrt{n}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\Phi\left(\frac{c_1-a_1}{\sigma}\sqrt{n}\right) \qquad \text{(XVIII.56.3)}$$

bo‘ladi.

$1-\Phi(u_j)=j$ ni qanoatlantiradigan u_j ga normal qonunning kvantili deyiladi.

Natijada (XVIII.56.2), (XVIII.56.3) va $u_j=-u_{1-j}$ ligidan

$$\frac{c_1-a_0}{\sigma}\sqrt{n}=u_\alpha,\ \frac{c_1-a_1}{\sigma}\sqrt{n}=u_\beta, \qquad \text{(XVIII.56.4)}$$

$$c_1=a_0+u_\alpha\frac{\sigma}{\sqrt{n}}=a_1+u_\beta\frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad n=\frac{\sigma^2(u_\alpha-u_\beta)^2}{(a_1-a_0)^2}. \qquad \text{(XVIII.56.5)}$$

Oxirgi ifodada n optimal mezonni α, β xatolik bilan ta’minlaydi. Xususan, n butun bo‘lmasa, u holda n ni butun qismi olinadi.

Endi

$$H_0: a=0,\ \sigma=\sigma_0,$$

$$H_1: a=0,\ \sigma=\sigma_1>\sigma_0$$

gipotezalarni qaraymiz. Bu holda

$$\frac{P_1(x)}{P_0(x)}=\frac{\sigma_0^n}{\sigma_1^n}\exp\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_0^2}-\frac{1}{\sigma_1^2}\right)\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right\}$$

ifoda ushbu

$$\sum_{i=1}^{n}x_i^2\geq c_1$$

tengsizlikka olib keladi.

Ma’lumki,

$$\frac{\chi_n^{\ 2}}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^{\ 2}}{\sigma^2}$$

tasodifiy miqdor (a, σ) sharti ostida, n-ozodlik darajasi bo‘yicha χ^2 qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi:

$$K_n(x)=\int_0^x R_n(u)du,\ x\geq 0.$$

Uning zichlik funksiyasi

$$R_n(x)=\frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}x^{\frac{n}{2}-1}e^{-\frac{x}{2}},\ x>0$$

bo‘ladi. Birinchi va ikkinchi tur xatolik

$$\alpha=P\left\{\frac{1}{\sigma_0^{\ 2}}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}\geq\frac{c_1}{\sigma_0^2}\right\}=1-K_n\left(\frac{c_1}{\sigma_0^2}\right),$$

$$\beta=P\left\{\frac{1}{\sigma_1^{\ 2}}\sum_{i=1}^{n}x_i^{\ 2}<\frac{c_1}{\sigma_1^2}\right\}=K_n\left(\frac{c_1}{\sigma_1^{\ 2}}\right)$$

Bernulli sxemasi uchun optimal mezon tuzamiz. $0<P_0<P_1<1$ shartlar ostida

$$H_0:P_0(x)=c_n^xP_0^x(1-P_0)^{n-x},\quad x=\overline{0,n},$$

$$H_1:P_1(x)=c_n^xP_1^x(1-P_1)^{n-x},\quad x=\overline{0,n}$$

gipotezalarni kiritamiz. N_0 ni tekshirish uchun optimal mezon sifatida

$$\frac{P_1(x)}{P_0(x)}=\left[\frac{P_1(1-P_0)}{P_0(1-P_1)}\right]^x\cdot\frac{(1-P_1)^n}{(1-P_0)^n}\geq c$$

ifodani karaymiz. Bu tengsizlik $x\leq c_1$ $(c_1>0)$ ga ekvivalent. Birinchi va ikkinchi tur xatoliklarni hisoblash uchun, Bernulli sxemasida kiritilgan hodisalarning ro‘y berishlari soni x $(nP, (\sqrt{nP(1-P)}$ parametrli assimptotik normal qonun bo‘yicha taqsimlanganidan foydalanamiz:

$$\alpha = P\{x \geq c_1 / H_0\} = P\left\{\frac{x - np_0}{\sqrt{n(P_0(1-P_0)}} \geq \frac{c_1 - np_0}{\sqrt{n(P_0(1-P_0)}} / H_0\right\},$$

$$\beta = P\{x < c_1 / H_1\} = P\left\{\frac{x - np_1}{\sqrt{n(P_1(1-P_1)}} \geq \frac{c_1 - np_1}{\sqrt{n(P_1(1-P_1)}} / H_1\right\}.$$

Bulardan, α va β ni bilgan holda c_1 ni topamiz:

$$c_1 \approx nP_0 + u_\alpha \sqrt{nP_0(1-P_0)} \approx nP_1 - u_\beta \sqrt{nP_1(1-P_1)},$$

bu yerda u_α, u_β 1

Quyidagicha belgilashlarni kiritamiz:

$$P_0(x) = P(x, \theta_0); \quad P_1(x) = P(x, \theta_1);$$
$$M_0\varphi = \int \varphi(x)P_0(x)dx; \quad M_1\varphi = \int \varphi(x)P_1(x)dx$$

(XVIII.54.7) da ko‘rsatilgan optimal mezonni topish uchun $P_1(x)/\ P_0(x)$ nisbatni o‘rganamiz.

1-teorema: (Neyman-Pirson)[270]. Ixtiyoriy $0 \leq \alpha \leq 1$ uchun shunday $0 \leq c$ va $0 \leq \varepsilon \leq 1$ larda

$$\varphi^*(x) = \begin{cases} 1, & агар \quad P_1(x) > cP_0(x) \\ \varepsilon, & агар \quad P_1(x) = cP_0(x) \\ 0, & агар \quad P_1(x) < cP_0(x) \end{cases} \qquad \text{(XVIII.55.1)}$$

bo‘lsin.

$\varphi*$ - mezon α -ishonchlilik ehtimolligi bilan, (XVIII.54.7) ni qanoatlantiruvchi optimal mezon bo‘ladi.

Isbot: Faraz qilaylik, 0<α<1. Quyidagi funksiyani qaraymiz.

$$q(c) = P(P_1(\xi) > cP_0(\xi) / H_0).$$

Bunda N_0 o‘rinli deb qabul qilinadi. U holda

11.4-mavzu Ba’zi nuhim statistis kriteriyalar. Myvofiqlik kriteriyalari

Reja

1. **Muvofiqlik kriteriyalar**
2. **Xi- kvadrat statistika**

Tayanj iboralar.Emperik taqsimotni xi-kvadrat usulida aniqlash.

11.5-mavzu Statistik kriteriy quvvatini hisoblash. Tanlanmalar ,bir jinsliligini tekshirish uchun parametric kriteriyalar

Reja

1. **Statistik kriteriy quvvatini hisoblash.**
2. **Tanlanmalar ,bir jinsliligini tekshirish uchun parametric kriteriyalar**

16-mavzu

Ko’p o’lchovik tanlanma tushunchasi.Korrelyatsiya koefisienti

Reja

1. **Ko’p o’lchovik tanlanma tushunchasi.**
2. **Korrelyatsiya koefisienti**

Mustaqil ishlar uchun materiallar

CHiziqli regression tahlil. CHiziqwli regressiya tenglamasi

Reja

1.CHiziqli regression tahlil

2.CHiziqli regressiya tenglamasi

STATISTIK VA KORRELYASION BOG‘LANISH

Ko‘pgina jarayonlarda tasodifiy tanlanma bir yoki bir necha tasodifiy miqdorlarga bog‘liq bo‘ladi. Xususan X va Y miqdorlarni qarasak, Y X ga bog‘liq bo‘lishi bilan birga, X va Y lar boshqa miqdorlarga, faktlarga ham bog‘liq bo‘lishi mumkin, bunday bog‘lanishlarni statistik bog‘lanish[312] deyiladi.

Misol: Agar Y miqdor Z_1, Z_2, V_1, V_2 tasodifiy faktorlarga, X-o‘z navbatida Z_1, Z_2, V_1, V_2 tasodifiy faktorlarga ta’sir qilsa, u holda X va Y statistik bog‘lanishda bo‘ladi. Xususan, Y ning uzgarishi X ning o‘rtacha o‘zgarishiga ta’sir kilsa, u holda bunday statistik bog‘lanishga korrelyasion bog‘lanish[313] deyiladi.

Misol: Y- paxta hosildorligi, x- o‘g‘itlar miqdori bo‘lsin. o‘zaro teng maydonlardan bir nechtasiga paxta ekilgan va bir xil miqdorda o‘g‘it solingan. ko‘pincha olingan hosildorlik har xil bo‘ladi, sababi – namlik, temperatura, havo ta’siri, tuproq holati kabilar turlicha bo‘ladi; natijada, x va y miqdorlar o‘zaro korrelyasion bog‘lanishda bo‘ladi.

Ma’lumki, $M(Y/X)=f(x)$ yoki $M(X/Y)=\varphi(y)$, ya’ni shartli matematik kutilma X yoki Y ning funksiyasi bo‘ladi va demak, y tanlanma o‘rtacha baho bo‘ladi:

$$\overline{y}_X = f^*(x), \quad \overline{x}_Y = \varphi^*(y).$$

Bu tenglamalarga tanlanmaning regressiya tenglamasi[314] deyiladi. Navbatdagi vazifa $f^*(x)$ va $\varphi^*(y)$ larning ko‘rinishi ma’lum bo‘lsa, noma’lum parametrlarni X va Y tanlanmalar yordamida topish va baholashdan iborat.

CHIZIQLI KORRELYASIYA

Agar Y ning X ga va X ning Y ga nisbatan boglanishi to‘g‘ri chiziqlar bo‘lsa, u holda bunday bog‘lanish chiziqli korrelyasiya[315] deyiladi.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ lar kuzatish orqali olingan natijalar bo‘lsin. Shular asosida

$$y_x = Kx + b \qquad \text{(XXI.69.1)}$$

o‘rta kvadratik regressiya[316], deb ataluvchi tenglamadagi K va b parametrlarni topamiz.

Buning uchun

$$y_x = \rho_{xy} x + b \qquad \text{(XXI.69.2)}$$

tenglikni qaraymiz. Bu yerda ρ_{yx} tanlanma regressiya koeffisenti[317].

Navbatda $Y_x - y_x$ ayirmaning eng kichik qiymatga ega bo‘lishi uchun zarur ρ_{yx} va b larni tanlash kerak bo‘ladi, demak

$$F(\rho,b) = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - y_i)^2$$

yoki

$$F(\rho,b) = \sum_{i=1}^{n} (\rho_{xy} x_i + b - y_i)^2$$

funksiyaning minimum qiymatini topamiz. Buning uchun $F(\rho, b)$ funksiyaning ρ va b lar bo‘yicha xususiy hosilalarini topib, mos ravishda, nolga tenglaymiz:

$$\frac{\partial F}{\partial \rho} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho_{xy} x_i + b - y_i) x_i = 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial b} = 2\sum_{i=1}^{n} (\rho_{xy} x_i + b - y_i) = 0.$$

Oddiy hisoblashlar yordamida quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^2)\rho_{xy} + (\sum_{i=1}^{n} x_i) b = \sum_{i=1}^{n} xy,$$

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i)\rho_{xy} + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot$$

Bu sistemani yechib, ρ va b larni topamiz:

$$\rho_{yx} = (n\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} y_i) : (n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2),$$

$$b = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sum_{i=1}^{n} y_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{i=1}^{n} x_i y_i) : (n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - (\sum_{i=1}^{n} x_i)^2)$$

Shu usulda

$$x_y = \rho_x y + c$$

tenglamadagi ρ_{xy} va c larni hisoblash mumkin.

1-misol: Quyidagi tanlanmalar berilgan:

x	1	2	3	4	5
u	1, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2

Regressiya tenglamasini tuzing.

Yechish:

Hisoblash jadvalini tuzamiz:

x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1 2 3 4 5	1, 2 2, 2 3, 2 4, 2 5, 2	1 4 9 16 25	1, 2 4, 4 9, 6 16, 8 26, 0
$\sum_{i=1}^{5} x_i = 15$	$\sum_{i=1}^{5} y_i = 16$	$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 55$	$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 58$

Bundan, yuqorida hosil qilingan formulalar asosida quyidagilarni topamiz:

$$\rho_{xy} = (5\cdot 58 - 15\cdot 16) : (5\cdot 55 - 15\cdot 15) = (290 - 240) : (275 - 225) = 50 : 50 = 1,$$

$$b = (55\cdot 16 - 15\cdot 58) : (275 - 225) = (880 - 870) : 50 = 10 : 50 = 0,2.$$

Demak,

$$y + x + 0,2,$$

bu natija berilgan tanlanmadan ham koʻrinib turibdi.

(XXI.69.2) tenglamaga ekvivalent

$$y_x - \overline{y} = R_{xy}\frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x}) \qquad \text{(XXI.69.3)}$$

tenglamani keltiramiz, bu yerda tanlanma korrelyasiya koeffisenti

$$R_{xy} = \frac{\sum_{ij=1}^{k} n_{ij} x_i y_j - nxy}{n\sigma_x \sigma_y},$$

σ_x, σ_y lar esa tanlanma oʻrtacha kvadratik chetlanishlar.

(XXI.69.3) formulaga regressiya toʻgʻri chiziqning tanlanma tenglamasi[318] deyiladi.

2-misol: Jadvalda X O'zbekiston aholisi haqidagi 11 yillik (1990-2000 yillar ichida), ma'lumot va shu jumladan Y - shahar aholisi to'g'risidagi ma'lumotlar berilgan:

X / Y	20,3	20,7	21,2	21,7	22,2	22,6	23	23,4	23,8	24,22	24,5
8, 3	1	1	-	-	-	-	-	-	-	-	-
8, 5	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-	-
8, 6	-	-	-	1	-	-	-	-	-	-	-
8, 7	-	-	-	-	1	1	-	-	-	-	-
8, 8	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-	-
8, 9	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-	-
9, 1	-	-	-	-	-	-	-	-	1	-	-
9, 2	-	-	-	-	-	-	-	-	-	1	1

Y ning X ga nisbatan regressiya to'g'ri chizig'ining tanlanma tenglamasini tuzing.

Yechish: $\overline{x}$ va $\overline{y}$, σ_x, σ_y larni topamiz.

$$\overline{x}=\frac{20,3+20,7+21,2+21,7+22,2+22,6+23+23,4+23,8+24,2+24,5}{11}=\frac{247,6}{11}=22,5,$$

$$\overline{y}=\frac{2\cdot 8,3+8,5+8,6+2\cdot 8,7+8,8+8,9+9,1+2\cdot 9,2}{11}=\frac{96,3}{11}=8,75,$$

$$\overline{x^2}=\frac{412,09+428,49+445,21+470,89+492,84+510,76+529+547,56}{11}+$$

$$+\frac{566,44+585,64+600,25}{11}=\frac{5589,17}{11}=508,$$

$$\overline{y^2}=\frac{137,78+72,25+73,96+151,38+77,44+79,21+82,81+169,28}{11}=76,74$$

,

$$\sigma_x^2=\overline{x^2}-(\overline{x})^2=508-506,25=1,75,$$

$$\sigma_y^2=\overline{y^2}-(\overline{y})^2=76,74-76,56=0,18,$$

$$\sigma_x=1,32, \quad \sigma_y=0,42.$$

Korrelyasiya koeffisientini topish uchun quyidagi yig'indini hisoblaymiz:

$$\sum_{i,j=1}^{11} n_{ij}x_i y_j=8,3\cdot 20,3+8,3\cdot 20,7+8,5\cdot 21,2+8,6\cdot 21,7+$$

$$+8,7\cdot 22,2+8,7\cdot 22,6+8,8\cdot 23+8,9\cdot 23,4+9,1\cdot 23,8+9,2\cdot 24,2+$$
$$+9,2\cdot 24,5=168,49+171,81+180,2+186,62+193,14+196,62+202+$$
$$+208,26+216,58+222,64+225,4=2172,16$$

Natijada

$$R_{xy}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} n_{ij}x_i y_j - n\overline{xy}}{n\sigma_x\sigma_y}=\frac{2171,7-11\cdot 22,5\cdot 8,75}{11\cdot 1,32\cdot 0,42}=1.$$

U holda (XXI.69.3) ga asosan

$$y=0,318x+1,59.$$

Egri chiziqli regressiya.

Agar regressiyaning grafigi egri chiziq bilan ifodalansa, u holda korrelyasiyani egri chiziqli korrelyasiya[319] deyiladi.

Xususan, ikkinchi tartibli parabolik korrelyasiya bo‘lgan holda, Y ning X ga regressiyaning tanlanma tenglamasi

$$y_x = Ax^2 + Bx + C$$

KO‘RINISHDA BO‘LADI.

NOMA’LUM A, B, C PARAMETRLARNI QUYIDAGI TENGLAMALAR SISTEMASIDAN TOPILADI:

$$(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^4)A+(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^3)B+(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^3)C=\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2\overline{y_x},$$

$$(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^3)A+(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2)B+\sum n_i x_i)C=\sum_{i=1}^{k} n_i x_i\overline{y}_x,$$

$$(\sum n_i x_i^2)A+(\sum_{i=1}^{k} n_i x_i)B+nC=\sum_{i=1}^{k} n_i\overline{y_x},$$

$$n=\sum_{i=1}^{k} n_i.$$

Y ning X ga korrelyasiyasining kuchini (zichligini) baholash uchun, ushbu tanlanma korrelyasion nisbat (gruppalararo o‘rtacha kvadratik chetlanishning X belgining umumiy o‘rtacha kvadratik chetlanishiga nisbati) xizmat qiladi:

$$\eta_{yx} = \frac{\sigma_{гр.аро}}{\sigma_{ум}},$$

yoki

$$\eta_{x,y} = \frac{\sigma_{\overline{yx}}}{\sigma_{y}},$$

bu yerda

$$\sigma_{y_x} = \sqrt{\sigma_{гр.аро}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(\bar{y}_x - \bar{y})^2}{n}}$$

$$\sigma_{y} = \sqrt{\sigma_{ум}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k} n_i(y_x - \bar{y})^2}{n}}$$

MISOLLAR:

1. O‘zbekiston aholisining 1990-2000 yillar ichidagi X, shu jumladan qishloq aholisi to‘g‘risidagi Y ma’lumot berilgan:

x: 20, 3; 20, 7; 21, 2; 21, 7; 22, 2; 22, 6; 23;
23, 4; 23, 8; 24, 2; 24, 5

y: 12; 12, 4; 12, 7; 13, 1; 13, 6; 13, 8; 14, 18;
14, 5; 14, 8; 15; 15, 3

Y ning X ga nisbatan regressiya to‘g‘ri chizig‘ining tanl

Kichik kvadrar usuli

Reja

1.Eng katta haqiqatga yaqinlashish

2.Minimal q1iymaqtga yaqinlashish

$\hat{\theta}$ parametrli $P(x,\theta)$ zichlik funksiyaga ega bo‘lgan $x_1,...,x_n$ bog‘liqsiz tanlanma berilgan bo‘lsin. Haqiqatga yaqinlik funksiyasi[296] deb,

$$L(x;\theta) = P(x;\theta)...P(x_n,\theta)$$

ifodaga aytiladi

Eng katta haqiqatga yaqin baho[297] deb, $L(x,\hat{\theta}) = \min_{\theta} L(x,\theta)$ funksiyani qabul qilamiz.

Agar $L(x;\theta)$ funksiyani θ bo‘yicha differansiallanuvchi bo‘lsa u holda eng katta haqiqatga yaqin θ baho

$$\frac{\partial L(x,\theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{(XIX.64.1)}$$

haqiqatga yaqin tenglikni[298] yechish natijasida topiladi.

Eng katta haqiqatga yaqin baho quyidagi xossalarga ega:

A) Parametr θ $\theta_1 < \theta < \theta_2$ oraliqda yotib, θ_0 shu oralikda va

$$\frac{\partial P}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2}, \frac{\partial^3 P}{\partial \theta^3} \quad \text{mavjud bo‘lsin.}$$

B) $\int P(x,\theta)dx$ ikki marta differensiallanuvchi va $\int \frac{\partial P}{\partial \theta} dx \equiv 0$

$$\int \frac{\partial^2 P}{\partial \theta^2} dx \equiv 0 \quad \text{bajarilsin.}$$

V) $J_1(\theta_0) = \int (\frac{\partial \log P}{\partial \theta})^2 P(x;\theta)dx\Big|_{\theta=\theta_0} > 0$;

$$\left|\frac{\partial^3 P}{\partial \theta^3}\right| \le H(x),\ M_0 H(\xi) = \int H(x)P(x;\theta)dx \le M, \quad M \ \ \theta$$

ga bog‘liq emas.

6- teorema. A), B), V) shartlar bajarilganda (XIX.64.1) haqiqatga yaqin tenglama θ yechimga ega va $n \to \infty$ da θ_0 ga ehtimollik bilan yaqinlashadi.

Bu eng katta haqiqatga yaqin baho asimptogtik effektiv bo‘ladi.

Isbot. (XIX.64.1) haqiqatga yaqin tenglama

$$\frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\partial \log L}{\partial \theta} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial \log P(x_k,\theta)}{\partial \theta} = 0 \qquad \text{(XIX.64.2)}$$

tenglamaga ekvivalentdir.

$$\frac{\partial \log P(x,\theta)}{\partial \theta}$$

ifodani Teylor formulasi bo‘yicha θ_0 nuqta atrofida yoyib, topamiz

$$\frac{\partial \log P}{\partial\theta} = \left.\frac{\partial \log P}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0} + (\theta-\theta_0)\left.\frac{\partial^2 \log P}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0} + \frac{(\theta-\theta_0)^2}{2} * \delta \neq (x) \qquad |\delta| \le 1 \quad \text{(XIX.64.3)}$$

(XIX.64.2)ni n ga bo‘lib (XIX.64.3)dan

$$\frac{1}{n}\frac{\partial \log L}{\partial\theta} = B_0 + B_1(\theta-\theta_0) + \frac{1}{n}\beta\delta B_2(\theta-\theta_0)^2 \qquad \text{(XIX.64.4)}$$

ni hosil qilamiz. Bu yerda

$$B_0 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial \log P(x_k,\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0;}\ B_1 = \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 \log P(x_k,\theta)}{\partial\theta^2}\right|_{\theta=\theta_0};$$

$$B_2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} H(x_k).$$

Katta sonlar qonuniga asosan $B_0 \xrightarrow{P} MB_0 = 0,$

$$B_1 \xrightarrow{P} MB_1 = -J_1(\theta_0), \quad B_2 \xrightarrow{P} MB_2, \quad |MB_2 \le M|.$$

Faraz qilaylik, $h>0$ va $\varepsilon>0$ tayinlangan bo‘lsin. n_0 ni $(n>n_0)$ shunday tanlaymizki quyidagi tengsizliklar o‘rinli bo‘lsin:

$$\begin{aligned} &P\{|B_0| \ge h^2\} < \frac{\varepsilon}{3}; P\left\{B_1 > -\frac{J_1(\theta_0)}{2}\right\} < \frac{\varepsilon}{3}; \\ &P\{|B_2| > 2M\} < \frac{\varepsilon}{3}; \end{aligned} \qquad \text{(XIX.64.5)}$$

S bilan quyidagi tengsizlikni qanoatlantiruvchi hodisani belgilaymiz

$$|B_o| \le h^2, \quad B_1 \le -\frac{J_1(\theta_0)}{2}, \quad |B_2| \le 2M .$$

(XIX.64.5) ga asosan $P(\bar{s}) < \varepsilon$ va $P(s) > 1-\varepsilon$. $\theta = \theta_0 \pm h$ da (XIX.64.6) ifoda

$$B_0 \mp B_1 h + \frac{1}{2}\delta B_2 h^2 = 0 \qquad \text{(XIX.64.6)}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi.

$$S \text{ da } \left|B_0 + \frac{1}{2}\delta B_2 h^2\right| \le (M+1) * h^2$$

va $h < \frac{J_1(\theta_o)}{2(M+1)}$ bo‘lgan holda (XIX.64.6) ning ishorasi $\mp B_1 h$ ning ishorasi bilan aniqlanadi. Ushbu

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \log L}{\partial\theta}$$

ifodaning uzluksiz va θ ga bog‘liqligidan, $(\theta_0 - h, \theta_0 + h)$ oraliqda, $n > n_0$ larda $1-\varepsilon$ ehtimollik bilan, (XIX.64.1) tenglama $\hat{\theta}$ yechimga ega.

Teoremaning 2- qismini isbotlash uchun

$$B_0 + B_1\left(\hat{\theta} - \theta_0\right) + \frac{B_2\delta}{2}\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)^2 = 0$$

ifodani

$$\left(\hat{\theta} - \theta_0\right)\sqrt{J_1(\theta_0)n} = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{J_1(\theta_0)n}}\sum_{k=1}^{n}\left.\dfrac{\partial \log P(x_k;\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\theta_0}}{-\dfrac{B_1}{J_1(\theta_0)} - \dfrac{1}{2}\delta B_2 \dfrac{\hat{\theta} - \theta_0}{J_1(\theta_0)}}$$

ko‘rinishda yozamiz.

Ifodaning surati, markaziy limit teoremaga ko‘ra, (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan, maxraji $n \to \infty$ da ehtimollik bo‘yicha birga intiladi.

Natijada, $(\theta - \theta_0)\sqrt{J_1}(\theta_0)^n$ tasodifiy miqdor (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

MISOLLAR:

1-misol.

x_i	2	3	9	10
n_i	3	8	20	25

taqsimot berilgan bo‘lsa, bosh o‘rta qiymatning siljimagan bahosini toping.

2-misol. μ tasodifiy miqdor $P\{\mu = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$ qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsin, P-noma’lum bo‘lganda, $a = np,\ \delta^2 = npq$ matematik kutilma va dispersiya uchun $\hat{a}$ va $\hat{\delta}^2$ siljimagan baho topilsin.

3-misol. ξ tasodifiy miqdor geometrik taqsimlangan

$$P(\xi = k) = pq^k,\ q = 1 - p,\ k = 0,1,2...$$

$a = np, \delta^2 = npq$ matematik kutilma va dispersiya uchun ξ orqali ifodalanadigan $\hat{a}, \hat{\delta}^2$ siljimagan baho topilsin.

4-misol. ξ tasodifiy miqdor Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan

$$P(\xi = k) = \Pi(a;\, k) = \frac{a^k}{k} e^{-a},$$

$\Pi(ma;0) = e^{-ma},\ m = 2,3,...$ uchun $\varphi_m(\xi)$ siljimagan baho topilsin.

5-misol. F taqsimotdan olingan $x_1, x_2, \dots x_n$ bog‘liqsiz tanlanma to‘plam berilgan bo‘lib, F quyidagicha bo‘lganda

a) $P_n = \frac{a^n}{n!} e^{-a}$;

b) $\lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$;

v) $P(x) = \begin{cases} \frac{1}{c}, & 0 \leq x \leq C, \\ 0, & x \overline{\in} [0, C] \end{cases}$

lar uchun yetarli statistika topilsin.

6-misol. $x_1, x_2, \dots x_n$ bog‘liqsiz, (0; 1) parametrli normal taqsimotga ega bo‘lgan tanlanma uchun $\hat{a} = \bar{x}$ siljimagan baho tuzilgan. $\hat{a} = M(x_1 \mid \bar{x})$ siljimagan baho tuzilsin, bu yerda

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i .$$

7-misol. $(0, \theta)$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bosh to‘plamdan olingan $x_1, x_2, \dots x_n$ tanlanma to‘plam berilgan. θ uchun $\hat{\theta}$ eng katta haqiqatga yaqin baho topilsin.

NORMAL TAQSIMLANGAN TANLANMA PARAMETRLARI UCHUN ISHONCHLILIK INTERVALI.

(XIX.59.1) tanlanma bog‘liqsiz va (a, σ) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan to‘plamdan olingan bo‘lsin.

a) σ ma’lum bo‘lganda a uchun ishonchli interval.

η statistika sifatida $\bar{x}$ ni olamiz. Ma’lumki, $\bar{x}$ miqdor a uchun asosli va siljimagan baho. Bu holda $\bar{x}$ miqdor $(a, \frac{6}{\sqrt{n}})$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

$\gamma = 1 - \Phi(u_V)$ belgilasak, $u_{1-\nu} = -u_\nu$ ligidan

$$a - u_{\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq a + u_{\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{(XX.66.1)}$$

tengsizlik $1 - \alpha$ ehtimollik bilan bajariladi. Oxirgi tengsizlikni a ga nisbatan[305] yechib,

$$\bar{x} - u_{\alpha_1} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \underline{a} \leq a \leq \bar{a} = \bar{x} + u_{\alpha_2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \qquad \text{(XX.66.2)}$$

ni hosil qilamiz. Bu tengsizlik uchun ishonchli ehtimollik $1-\alpha$ ga, interval uzunligi

$$(u_{\alpha_2}+u_{\alpha_1})\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ga teng bo‘ladi.

Agar $\alpha_1=\alpha_2=\frac{\alpha}{2}$ deb olinsa, bu interval uzunligi eng kichik bo‘ladi.

Agar $\alpha_2>\alpha_1$ bo‘lsa, u holda $u_{\alpha_1}>u_{\alpha_2}$ kelib chiqadi.

faraz qilaylik $\Delta=0$ uchun $\alpha_2-\Delta\geq\alpha_1+\Delta$ bo‘lsin, natijada $u_{\alpha_2}>u_{\alpha_1+\Delta}>u_{\alpha_2-\Delta}>u_{\alpha_2}$ bo‘ladi. quyidagi

$$\Delta=1-\Phi(u_{\alpha_2})-(1-\Phi(u_{\alpha_2-\Delta}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_{\alpha_2}}^{u_{\alpha_2-\Delta}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u_{\alpha_1-\Delta}^2}{2}}\left(u_{\alpha_2-\Delta}-u_{\alpha_2}\right),$$

$$\Delta=1-\Phi(u_{\alpha_i-\Delta})-(1-\Phi(u_{\alpha_1}))=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{u_{\alpha_i+\Delta}}^{u_{\alpha_1}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\geq\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u_{\alpha_1+\Delta}^2}{2}}\left(u_{\alpha_1}-u_{\alpha_1+\Delta}\right)$$

tengsizlikdan

$$u_{\alpha_1-\Delta}-u_{\alpha_2}\leq\Delta\sqrt{2\pi}e^{\frac{u_{\alpha_2-\Delta}^2}{2}}<\Delta\sqrt{2\pi}e^{\frac{u_{\alpha+\Delta}^2}{2}}\leq u_{\alpha_1}-u_{\alpha_1+\Delta}$$

yoki

$$u_{\alpha_2-\Delta}+u_{\alpha_1+\Delta}<u_{\alpha_1}+u_{\alpha_2}$$

kelib chiqadi.

bundan, $\alpha_1\neq\alpha_2$ bo‘lsa, ishonchli interval eng kichik uzinlikga ega bulolmasligi kelib chiqadi.

1-misol. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish $\sigma=6$, tanlanma o‘rtacha qiymat $\overline{x_1}=15$ va tanlanma hajmi $h=36$ berilgan. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan x belgisining noma’lum a matematik kutilishini 0,90 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intervalini toping.

Yechish. $\Phi(u_\alpha)=0.45$ yoki $2\Phi(u)\geq0.90$ shartga ko‘ra, jadvaldan $u_\alpha=1.65$ ni topamiz. Topilganlarni (XX.66.2) ga qo‘yamiz.

$$15-1.65\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}\leq a\leq15+1.65\cdot\frac{6}{\sqrt{36}}$$

yoki

$$13.35\leq a\leq16.65\,.$$

b) σ noma'lum bo'lganda a uchun ishonchli interval. Birinchi navbatda $\overline{x}$ uchun muhim bo'lgan quyidagi xossani keltiramiz:

1-teorema. (XIX.59.1) normal taqsimlangan $\overline{x}$ va s^2 statistika bog'liqsiz (s^2 tuzatilgan dispersiya) bo'lsa, $\frac{s^2(n-1)}{\sigma^2}$ tasodifiy miqdor n-1 ozodlik darajasi bo'yicha χ^2 taqsimotga ega bo'ladi.

Isbot. $x_i^1 = \frac{x_2 - a}{\sigma}$ bog'liqsiz va (0,1) parametrli normal qonun bo'yicha taqsimlangan bo'ladi, quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\overline{x^1} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^1 s^{i^2} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1 - \overline{x^1}\right)^2.$$

Bu holda $\overline{x} = a + \sigma \overline{x}^1$, $s^2 = \sigma^2 s^{1^2}$. $(x_1^{'}, x_2^{'}, ..., x_n^{'})$ tasodifiy vektorning zichlik funksiyasi

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\exp[-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{'}]$$

dan iborat sferik normal taqsimlangan bo'ladi.

$y = cx^{'}$ orqali quyidagi tengliklar

$$y_1 = \sqrt{n}\overline{x}^1 = \frac{x_1^{'}}{\sqrt{n}} + ... + \frac{x_n^{'}}{\sqrt{n}},$$

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} c_{ki} x_i^{'}, k = \overline{2,n} \qquad \text{(XX.66.4)}$$

bilan ifodalangan ortogonal almashtirishni belgilaymiz. c_{ki} larni tanlash hisobiga (XX.66.4) tengliklar doimo ortogonal almashtirishni beradi.

U holda $y_1, y_2, ... y_n$ lar ham zichlik funksiyasi (XX.66.3) dan iborat sferik normal taqsimlangan bo'ladi. c ning ortogonal almashtirish bo'lganligidan

$$y_1 = \sqrt{n^1} x^{-1} \text{ va } \sum_{i=1}^{n} x_i^{1^2} = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

va demak

$$(n-1)s^{1^2} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i^1 - x^{-1}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} x^{1^2} - \overline{x^2} = \sum_{i=1}^{n} y_1{}^2 - y_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i{}^2$$

hosil bo'ladi. Bundan $(n-1)s^{1^2}$ tasodifiy miqdor (n-1) ozodlik darajasi bo'yicha χ^2 taqsimotga ega bo'ladi.

2-teorema[306]. (XIX.59.1) normal taqsimotga ega bo‘lgan bosh tanlanmadan olingan bo‘lsin.

$$r = \frac{(\overline{x} - a)\sqrt{n}}{s} \qquad \text{(XX.66.5)}$$

tasodifiy miqdor n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha Styudent qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

Isboti. $\frac{\overline{x} - a}{G}\sqrt{n}$ tasodifiy miqdor (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan va s'/σ $\overline{x}$ ga bog‘liq bo‘lmagani holda $\sqrt{\chi^2_{n-1} : (n-1)}$ ga teng, χ^2_{n-1} n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha χ^2 qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi. Shuning uchun (XX.66.5) ifoda n-1 ozodlik darajasi bo‘yicha Styudent qonuni bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi. Styudent (XX.66.5) qonunidan (nisbatidan) foydalanib, a uchun, σ noma’lum bo‘lgan holda, ishonchli interval tuzamiz. $s_n(t)$ bilan Styudent taqsimotini va $t_\gamma(n)$ bilan $s_n(t)$ ning kvantilini belgilaymiz:

$$S_n(t) = 1 - \gamma$$

Styudent taqsimotining simmetrikligidan $t_{1-\nu}(n) = -t_\gamma(n)$. U holda $\alpha_1 = \alpha_2 = \frac{\alpha}{2}$ bo‘lganda

$$\frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le \overline{x} - a \le \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

tengsizlik $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi. Bundan[307]

$$\overline{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1) \le a \le \overline{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$$

kelib chiqadi.

2-misol. Biror kattalikni bir xil aniqlikda 10 marta o‘lchash ma’lumotlari bo‘yicha olingan natijalarning tanlanma o‘rtacha qiymati $\overline{x} = 20$ va tuzatilgan o‘rta kvadratik og‘ish $s = 5$ topilgan. O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymatini ishonchli interval yordamida, $\gamma = 0,95$ ishonchlilik bilan baholang.

Yechish: O‘lchanayotgan kattalikning haqiqiy qiymati y ning a- matematik kutilishiga teng. Shuning uchun σ-noma’lum bo‘lganda

$$\overline{x} - t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x} + t_\gamma \frac{s}{\sqrt{n}}$$

bo‘ladi t_γ ni topish uchun $\gamma=0{,}90$ e’tiborga olib, $t_\gamma=(\gamma,n)$ uchun tuzilgan jadvaldan foydalanamiz: $t_\gamma(0{,}90;10)=2{,}26$.

Topilganlarni oxirgi tenglikka qo‘yib

$$20-2.26\cdot\frac{s}{\sqrt{10}}<a<20+2.26\cdot\frac{s}{\sqrt{10}}.$$

Bundan $16{,}43<a<23{,}57$.

1) a <u>ma’lum bo‘lganda</u> σ <u>uchun ishonchli interval</u>

$$\frac{\eta}{\sigma^2}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{x_i-a}{\sigma}\right)^2$$

statistika σ uchun yetarli statistika bo‘ladi va U^2 taqsimotga ega bo‘ladi.

$K_n(x)$ bilan η/σ^2 ning taqsimot funksiyasini, $R_\gamma(n)$ bilan $K_n(x)$ ning kvantilini belgilaymiz.

Bu holda, $R_{1-\alpha_1}(n)\le\dfrac{n}{\sigma^2}\le R_{\alpha_1}(n)$ tengsizlik $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi.

Bundan[308]

$$\sqrt{\frac{\eta}{R_{\alpha_2}(n)}}\le G\le\sqrt{\frac{\eta}{R_{1-\alpha_1}(n)}}\qquad\text{(XX.66.6)}$$

kelib chiqadi.

Agar, α_1 va α_2 ni $R_n(x)=K_n^{'}(x)$ zichlik funksiya $R_n(R_{1-\alpha_1}(n))=R_n(R_{\alpha_2}(n))$ tenglikni qanoatlantiradigan qilib tanlansa, interval uzunligi eng kichik bo‘ladi.

3-misol. Bosh to‘plamdan olingan $n=18$ hajmli tanlanma ma’lumotlari normal taqsimlangan miqdori belgining tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi $S=2$ topilgan. Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanishi 0,99 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchli intervalni toping.

Yechish: Amaliyotda, ko‘pincha (XX.66.6) o‘rniga $S(1-q)<\sigma<S(1+q)$ $(q<1)$ $0<\sigma<S(1+q)$ $(q>1)$ ishlatiladi. Bunda q uchun

$$R(\chi,n)=\frac{\chi^{n-2}e^{-\frac{x^2}{2}}}{2^{(n-3)/2}\Gamma(\frac{n-1}{2})}$$

zichlik funksiyaga asoslangan $q(\alpha,n)$ maxsus jadval tuzilgan.

$\alpha=0{,}99$ va $n=25$ bo‘yicha jadvaldan $q(0{,}99;18)=0{,}63$ topiladi.

Demak, $q<1$, bu holda $2(1-0{,}63)<\sigma<2(1+0{,}63)$ yoki $0{,}74<\sigma<3{,}26$ bo‘ladi.

2) a noma'lum bo'lganda σ uchun ishonchli interval. Bu holda η statistika urniga empirik dispersiyani olamiz. 1-teoremaga asosan $\frac{S^2(n-1)}{\sigma^2}$ tasodifiy miqdor ozodlik darajasi n-1 bo'lgan χ^2 qonun bo'yicha taqsimlangan bo'ladi. Bundan, σ uchun ishonchli interval[309], $1-(\alpha_1+\alpha_2)$ ehtimollik bilan

$$S\sqrt{\frac{n-1}{R_{\alpha_2}(n-1)}} \le \sigma \le \sqrt{\frac{n-1}{R_{1-\alpha_1}^{(n-1)}}}$$

kabi bo'ladi.

BERNULLI SXEMASIDA YUTUQ SONI EHTIMOLLIGI UCHUN ISHONCHLI INTERVAL

Bernulli sxemasida μ bilan n ta tajribadagi yutuqlar sonini belgilaymiz:

$$F(m,p) = p(\mu \le m) = \sum_{k=0}^{m} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} ,$$

bu funksiya p ning o'sishi bo'yicha kamayuvchi bo'ladi, chunki

$$\frac{dF(m,p)}{dP} = \sum_{k=0}^{m} C_n^k kP^{k-1}(1-P)^{n-k} - \sum_{k=0}^{m} C_n^k (n-k)P^k(1-P)^{n-k-1} = -nC_{n-1}^m P^m (1-P)^{n-m-1} < 0.$$

$m_\gamma(p)$ bilan $1-F(m_v(p); p) \ge 1-v$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi eng kichik butun sonni belgilaymiz. U holda $m_v(p)-1$ son $F(m_v(p)-1; p) < v$ ni qanoatlantiruvchi eng katta son bo'ladi.

Odatdagiday $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, natijada kamida $1-\alpha$ ehtimollik bilan $m_{1-\alpha_1}(p) \le \mu \le m_{\alpha_2}(p)$ bajariladi. $y = m_v(P)$ ni p ga nisbatan yechimini $m_v^{-1}(y)$ bilan ifodalaymiz.

U holda, kamida $1-\alpha$ ehtimollik bilan

$$p = m_{\alpha_2}^{-1}(\mu) < p < m_{1-\alpha_1}^{-1} \qquad (\mu) = \overline{p} \qquad \text{(XX.67.1)}$$

tengsizlik bajariladi.

Bunda, $1-\alpha$ ga ishonchlilik koeffisenti[310] deyiladi. (XX.67.1) ning chegaralarini topishda, ko'pincha, Muavr-Laplasning asimptotik formulasini ishlatamiz: $\eta = \dfrac{\mu - np}{\sqrt{np(1-p)}}$ tasodifiy miqdor $1-\alpha$ ehtimollik bilan $|\eta| \le U_{\frac{\alpha}{2}}$ bajariladi. Bu o‘z navbatida

$$\frac{\mu}{n} - U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \le p \le \frac{\mu}{n} + U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \qquad \text{(XX.67.2)}$$

bo‘ladi.

$\frac{\mu}{n} \to p$ ligidan, (XX.67.2) ni quyidagicha yozish mumkin[311]

$$\frac{\mu}{n} - U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{n^2}(1-\frac{\mu}{n})} \le p \le \frac{\mu}{n} + U_{\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\mu}{n^2}(1-\frac{\mu}{n})}$$

4-misol. Bernulli sxemasida $n=30$ bo‘lganda, 13 ta yutuq bo‘lgan holda, $\alpha = 0,05$ ishonchlilik ehtimolligi bilan p uchun ishonchli interval tuzing.

Yechish. Shartga ko‘ra $\Phi(U_{\frac{\alpha}{2}}) = \dfrac{0,95}{2} = 0,475$ jadvaldan $U_{\frac{\alpha}{2}} = 1,96$; demak,

$$\frac{13}{30} - 1,96\sqrt{\frac{13}{30^2}(1-\frac{13}{30})} \le p \le \frac{13}{30} + 1,96\sqrt{\frac{13}{30^2}(1-\frac{13}{30})}$$

yoki (12) ning chegaralarini topishda quyidagi teoremadan ham foydalanish mumkin.

3-teorema. ξ_n tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi (a, σ_n) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan va

$$\mu_{\xi n} = a,\ D_{\xi n} = \sigma_n^2 \to 0$$

bo‘lsin. Agar $q(x)$ funksiya uchun $|q(x)| \le k$ va $q'(x), q''(x)$ lar $x = a$ atrofida mavjud, $q'(a) \ne 0$ shartlar bajarilsa, $\eta_n = q(\xi_n)$ tasodifiy miqdor $(q(a)), |q'(a)|\sigma_n$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

Isbot. $|x-a| < \varepsilon$ da, Teylor formulasiga asosan

$$q(x) = q(a) + q'(a)(x-a) + r(x)(x-a)^2 \qquad \text{(XX.67.3)}$$

bajariladi, bu yerda $|r(x)| \le k_1, k_1 < \infty.$

$A_n = \{\omega : |\xi_n(\omega) - a| < \sigma_n^{1/4}\}$ da $n \ge n_0$ bo‘lganda $\sigma_n \le \varepsilon^4$ lar uchun, (XX.67.3) dan foydalangan holda

$$\eta_n = q(\xi_n)J_{A_n} + q(\xi_n)J_{\bar{A}_n} = J_{A_n}(q(a) + q'(a)(\xi_n - a) + r(\xi_n)(\xi_n - a)^2) + J_{\bar{A}_n}q(\xi_n)$$

ni hosil qilamiz. U holda $\eta_n = \eta_n' + \delta_n$ almashtirish bajarilsa,

$$\eta_n' = q(a) + q'(a)(\xi_n - a),$$

$$\delta_n = -q(a)J_{\overline{A_n}} - q'(a)(\xi_n - a)J_{\overline{A_n}} + J_{A_n} r(\xi_n)(\xi_n - a)^2 + q(\xi_n)J_{\overline{A_n}} \qquad \text{(XX.67.4)}$$

ni topamiz.

Oxirgi tenglikning o‘ng tomoni (0,1) parametrli asimptotik normal qonun bo‘yicha taqsimlangan, u holda η_n' tasodifiy miqdor $(q(a), |q'(a)|\sigma_n)$ parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

$$\delta_n : \sigma_n \xrightarrow{P} 0$$

ni ko‘rsatish uchun, (XX.67.4) ning har bir qo‘shiluvchisining ehtimollik bilan, nolga yaqinlashishini ko‘rsatamiz.

Chebishev tengsizligiga ko‘ra

$$P(\overline{A_n}) \le \frac{\sigma_n^2}{\sqrt{\sigma_n}} = \sigma_n^{\frac{3}{2}}, \quad P\{|q(a)|J_{\overline{A_n}} > \varepsilon\sigma_n\} \le \frac{kP(\overline{A_n})}{\varepsilon\sigma_n} \le \frac{k}{\varepsilon}\sqrt{\sigma_n} \to 0,$$

$$P\{|q(\xi_n)|J_{\overline{A_n}} > \varepsilon\sigma_n\} \to 0,$$

larni hosil qilamiz. Koshi-Bunyakovskiy t$P\{|q'(a)|\,|\varepsilon_n - a|\,J_{\overline{A_n}} > \varepsilon\sigma_n\} \le \dfrac{|q'(a)|M|\xi_n - a|J_{\overline{A_m}}}{\varepsilon\sigma_n}$ engsizligidan

$$M|\xi_n - a|J_{\overline{A_n}} \le \sqrt{M(\xi_n - a)^2 MJ_{\overline{A_n}}} \le \sigma_n \cdot \sigma_n^{\frac{3}{4}}$$

demak,

$$P\{|q'(a)|\,|\varepsilon_n - a|\,J_{\overline{A_n}} > \varepsilon\sigma_n\} \le \frac{|q'(a)|\sigma_n^{\frac{3}{4}}}{\varepsilon} \to 0,$$

natijada

$$P\{|J_{An} r(\xi_n)(\xi_n - a)^2| > \varepsilon\sigma_n\} \le \frac{k_1 M(\xi_n - a)^2}{\varepsilon\sigma_n} = \frac{k_1\sigma_n}{\varepsilon} \to 0.$$

Yuqoridagi tasdiqlardan (XX.67.4) ning ikkala tomonini σ_n ga bo‘lib, $\delta_n : \sigma_n \to 0$ ligiga ishonch hosil qilamiz.

$$\frac{\eta_n - q(a)}{|q'(a)|\sigma_n} = \frac{\eta_n' - q(a)}{|q'(a)|\sigma_n} + \frac{\delta_n}{|q'(a)|\sigma_n}$$

tenglikning o‘ng tomonidagi birinchi qo‘shiluvchi (0,1) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi, ikkinchi qo‘shiluvchi esa ehtimollik bo‘yicha nolga intiladi. Demak, tasodifiy miqdor (0,1) parametrli qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘ladi.

Bu teoremadan foydalanib, $\eta_n = 2\arcsin\sqrt{\frac{M}{n}}$ tasodifiy miqdorning ($2\arcsin\sqrt{\varphi}, \sqrt{\frac{1}{n}}$) parametrli normal qonunga bo‘ysunishini ko‘ramiz, chunki $\mu_n : n$ ifoda ($p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}$) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan.

$2\arcsin\sqrt{x}$ funksiya 3-teorema shartlarini qanoatlantiradi va $(2\arcsin\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}$. Quyidagi $\left| \; 2\arcsin\sqrt{\frac{M}{n}} - 2\arcsin\sqrt{P} \; \right| \le \frac{U_{\alpha/l}}{\sqrt{n}}$ tengsizlik $n \to \infty$ da $1-\alpha$ ehtimollik bilan bajariladi, bu yerda $U_{\alpha/2}$ normal qonunning kvantili. Oxirgi tengsizlikdan

$$2\arcsin\sqrt{\frac{M}{n}} - \frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}} \le 2\arcsin\sqrt{p} \le 2\arcsin\sqrt{\frac{M}{n}} + \frac{U_{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$$

va p uchun ishonchli interval

$$\sin^2\left(\arcsin\sqrt{\frac{\mu}{n}} - \frac{U_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right) \le p \le \sin^2 \arcsin\left(\sqrt{\frac{\mu}{n}} + \frac{U_{\alpha/2}}{2\sqrt{n}}\right)$$

hosil bo‘ladi.

MISOLLAR.

- Bosh o‘rtacha kvadratik chetlanish σ, tanlanma o‘rtacha qiymat $\overline{x}$ va tanlanma hajmi n berilgan. Bosh to‘plamning normal taqsimlangan x belgisining noma’lum a matematik kutilishini 0,93 ishonchlilik bilan baholash uchun ishonchlilik intervalini toping.

  A) $\sigma = 3, \overline{x} = 9, n = 15,$ б) $\sigma = 6, \overline{x} = 20, n = 30$

- O‘zbekiston aholisining 1991-2000 yillar orasidagi yillik usishi foizlarda berilgan: 1,05; 1,50; 1,64; 1,78; 1,87; 1,88; 1,94; 2,21; 2,29; 2,36. Tanlanma normal qonunga buysunadi degan shart asosida a matematik kutilishini 0,95 ishonchlilik bilan interval baho tuzing.

- Bosh to‘plamdan olingan n hajmli tanlanma ma’lumotlari bo‘yicha normal taqsimlangan belgini tuzatilgan o‘rtacha kvadratik chetlanishi s topilgan. Agar

$$a)\, n = 10,\; s = 6,\; b)\; n = 30,\; s = 14$$

bo‘lsa, σ o‘rtacha kvadratik chetlanishini 0,95 ishonchlilik bilan qoplaydigan ishonchlilik intervalini toping.

- (a_1, σ_1) va (a_2, σ_2) parametrli normal bosh tanlanmalardan olingan $x_1, x_2, ... x_n;\ y_1, y_2, ... y_n$ tanlanma uchun $1-\alpha$ ehtimollik bilan $a_1 - a_2$ ayirmani qoplaydigan ishonchli intervalini tuzing, bunda σ_1 va σ_2 ma’lum, deb faraz qilinadi.
- Yuqoridagi 4-misolda $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma$, σ noma’lum, deb faraz qilinib, $a_1 - a_2$ uchun ishonchlilik intervalni tuzing.
- Puasson taqsimoti bo‘yicha $x_1, x_2, ..., x_n$ bog‘liqsiz tanlanmaning matematik kutilmasi a uchun $1-\alpha$ ishonchlilik ehtimoli bilan ishonchli interval tuzing.
- $x_1, x_2, ..., x_n$ tanlanma $(0, \theta)$ intervalda tekis taqsimlangan bo‘lgan holda, $1-\alpha$ ishonchlilik ehtimoli bilan θ parametr uchun ishonchli interval tuzing.

bog‘liksiz tanlanma to‘plam $F(x)$ taqsimot funksiyasiga ega bo‘lib, bu taqsimot funksiya F taqsimot funksiyalar sinfidan olingan bo‘lsin. θ parametr F taqsimot orqali bir qiymatli aniqlansin.

PIRSON EGRILIGI

Egri chiziqli taqsimot mezoni

Ko‘pgina uzluksiz taqsimotlarning $y = f(x)$ zichlik funksiyasi

$$y' = \frac{x+a}{b_0 + b_1 x + b_2 x^2} y \qquad (23.74.1)$$

differensial tenglamaning yechimidan iborat bo‘ladi, $a, b_i, i = 1,2$ lar o‘zgarmas sonlar. Bu differensial tenglama, $K.$ Pirson kiritgan kriteriy yordamida turli taqsimotlarning zichlik funksiyalarini ifodalaydi. Buning uchun to‘rtinchi moment mavjud, - deb faraz qilamiz.

$x_1, x_2, \ldots x_n$ tanlanma to‘plamning taqsimot funksiyasi yoki zichlik funksiyasi noma’lum bo‘lsin. Quyidagi belgilashlarni kiritamiz:

$$\mu_e = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \bar{x})^e, \quad e = 2,3,4. \quad \beta_1 = \frac{\mu_3^2}{\mu_2^3},$$

$$\beta_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2}, \qquad r = \frac{6(\beta_2 - \beta_1 - 1)}{3\beta_1 - 2\beta_2 + 6}.$$

Pirson mezoni[328] (koeffisienti) ni kiritamiz:

$$\chi = \frac{\beta_1(\beta_2 + 3)^2}{4(2\beta_2 - 3\beta_1 - 6)(4\beta_2 - 3\beta_1)} = -\frac{\beta_1(r+2)^2}{16(r+1)}.$$

χ ning qiymatiga qarab $y = f(x)$ zichlik funksiyasining ko‘rinishi turlicha bo‘ladi. Bular ichida I, IV, VI xillar muhimdir, qolganlari esa shularning xususiy hollari bo‘ladi. Har qanday $s(x_i, n_i, n)$ taqsimotga Pirsonning biror zichlik funksiyasi mos keladi, bu yerda x_i varianta, n_i chastata, $n-$tanlanma hajmi. Albatta, har qanday

$s(x_i, n_i, n)$ taqsimot uchun x_i, n_i, n lar chekli va demak $\mu_i^1, i=\overline{1,4}$ mavjud, bundan x ni hisoblash mumkin.

2. Pirson egriligi jadvali[329]

xil	Egrilik tenglamasi (zichlik tenglama)	qiymati	mezon	Egri chiziq chegarasi	Parametr qiymatlari
1	2	3	4	5	6
I	$y=y_0(1+\frac{x}{d_1})^{m_1}(1-\frac{x}{d_2})^{m_2}$	$y_0=\frac{d_1^{m_1}\cdot d_2^{m_2}}{(d_1+d_2)^{r-1}}\cdot\frac{\Gamma(r)}{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}$	$\chi<0$	$-d_1<x<d_2$	$d=2\sqrt{(r+1)(1-x)\mu_2}, d_2=\frac{d}{2}(1-\sqrt{\frac{-x}{1-x}}), d_1=d-d_2$ $m_1=\frac{rd_1}{d}-1, \quad m_2=\frac{rd_2}{d}-1$
II	$y=y_0(1-\frac{x^2}{e^2})^m$	$y_0=\frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{l\sqrt{\pi}\Gamma(m+1)}$	$\chi=0$ $\beta_1=0,$ $\beta_2<3$	$\|x\|<l$	$l=\sqrt{\frac{2\beta_2\mu_2}{3-\beta_2}}>0,\ m=\frac{5\beta_2-9}{2(3-\beta_2)}>-1$
III	$y=y_0e^{jx}(1+\frac{x}{e})^m$	$\frac{y_0=\gamma^{m+1}e^m e^{-ej}}{\Gamma(m+1)}$	$\chi=\infty$ $2\beta_2=3\beta_1+6$	$-l<x<+\infty$	$\gamma=\frac{2\mu_2}{\mu_3},\ m=\frac{4}{\beta_1}-1>0,\ l=\frac{2\mu_2^2}{\mu_3}>0$
IV	$y=y_0\frac{\exp(-\gamma arctg\frac{x-l}{g})}{\left[1+(\frac{x-l}{g})^2\right]^m}$	$y_0=\frac{c^{\gamma\frac{\pi}{2}}}{\sigma\int_0^{\pi}e^{\gamma u}\sin^{-2}udu}$	$0<\chi<1$	$-\infty<x<+\infty$	$m=1-\frac{r}{2}>0,\ l=\frac{(r+2)\mu_3}{4\mu_2},\ \gamma=-\frac{r(r+2)\mu_3}{4\mu_2\sigma}$ $\sigma=\frac{1}{4}\sqrt{-(16(r+1)+(r+2)^2\beta_1)\mu_2}$
V	$y=y_0e^{-\frac{\gamma}{x-e}}(x-l)^{-m}$	$y_0=\frac{\gamma^{m-1}}{\Gamma(m-1)}$	$\chi=1$	$l<x<+\infty$	$m=2-r,\ l=\frac{(r+2)\beta_3}{4\mu_2},\ \gamma=\frac{r(r+2)\mu_3}{4\mu_2}$
VI	$y=y_0(\frac{x}{d_1}+1)^{m_1}(\frac{x}{d_2}-1)^{m_2}$	$y_0=\frac{d^{1-r}d_2^{q_2}}{}*\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(1-r)\Gamma(q_2+1)}$	$1<\chi<+\infty$	$d_1<x<d_2$	$d=2\sqrt{(2+1)(1-x)\mu_2}$ $m_1=\frac{r}{2}(1+\sqrt{\frac{-x}{1-x}})-1<-1,\ d_1=\frac{(m_1+1)d}{2}, m_2=\frac{r}{2}(1-\sqrt{\frac{-x}{1-x}})->-1,$ $d_2=\frac{(m_2+1)d}{2}, q_1=-m, q_2=m_2, m_2>m_1=1$
VII	$y=\frac{y_0}{(1+\frac{x^2}{l^2})^2}$	$y_0=\frac{1}{l\sqrt{\pi}}*\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-}$	$\chi=0$ $\beta_1=0$ $\beta_2>3$	$-\infty<x<+\infty$	$m=\frac{5\beta_2-9}{2(\beta_2-3)}>0,\ l=\sqrt{\frac{2\beta_2\mu_2}{\beta_2-3}}$
VIII	$y=y_0(1+\frac{x}{l})^{-m}$	$y_0=\frac{1-m}{a}$	$\chi<0,\ \lambda=0$ $5\beta_2-6\beta_1-9<0$	$-a<x<0$	$0<m<1,\ m$ =уйидаги тенглама ечимида иборат: $(4-\beta_1)m^3+(9\beta_1-12)m^2-24\beta_1 m+15\beta_1=0,$ $a=-\sqrt{\mu_2}\ (2-m)\sqrt{\frac{3-m}{1-m}}siqn\ \mu_3$

IX	$y = y_0(1+\frac{x}{a})^m$	$y_0 = \frac{1+m}{a}$,	$\chi<0,\ \lambda=0$ $5\beta_2-6\beta_1-9<0$	$-a<x<0$	$m>-1$, m =уйидаги тенгламани ечимидан иборат: $(\beta_1-4)m^3+(9\beta_1-12)m^2+24\beta_1 m+16\beta_1=0$, $a=-\sqrt{\mu_2}\ (m+2)\sqrt{\frac{m+3}{m+1}} sign\ \mu_3$
1	2	3	4	5	6
I	$y=y_0(1+\frac{x}{d_1})^{m_1}(1-\frac{x}{d_2})^{m_2}$	$y_0=\frac{d_1^{m_1}\cdot d_2^{m_2}}{(d_1+d_2)^{r-1}}\cdot \frac{\Gamma(r)}{\Gamma(m_1+1)\Gamma(m_2+1)}$	$\chi<0$	$-d_1<x<d_2$	$d=2\sqrt{(r+1)(1-x)\mu_2}, d_2=\frac{d}{2}(1-\sqrt{\frac{-x}{1-x}}), d_1=d-d_2$ $m_1=\frac{rd_1}{d}-1,\qquad m_2=\frac{rd_2}{d}-1$
II	$y=y_0(1-\frac{x^2}{e^2})^m$	$y_0=\frac{\Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)}{l\sqrt{\pi}\,\Gamma(m+1)}$	$\chi=0$ $\beta_1=0,$ $\beta_2<3$	$\lvert x\rvert<l$	$l=\sqrt{\frac{2\beta_2\mu_2}{3-\beta_2}}>0,\ m=\frac{5\beta_2-9}{2(3-\beta_2)}>-1$
III	$y=y_0e^{jx}(1+\frac{x}{e})^m$	$\frac{y_0=\gamma^{m+1}e^m e^{-ej}}{\Gamma(m+1)}$	$\chi=\infty$ $2\beta_2=3\beta_1+6$	$-l<x<+\infty$	$\gamma=\frac{2\mu_2}{\mu_3},\ m=\frac{4}{\beta_1}-1>0,\ l=\frac{2\mu_2^2}{\mu_3}>0$
IV	$y=y_0\frac{\exp(-\gamma arctg\frac{x-l}{g})}{\left[1+(\frac{x-l}{g})^2\right]^m}$	$y_0=\frac{c^{\gamma\frac{\pi}{2}}}{\sigma\int_0^{\pi} e^{\gamma u}\sin^{-2}u du}$	$0<\chi<1$	$-\infty<x<+\infty$	$m=1-\frac{r}{2}>0,\ l=\frac{(r+2)\mu_3}{4\mu_2}, \gamma=-\frac{r(r+2)\mu_3}{4\mu_2\sigma}$ $\sigma=\frac{1}{4}\sqrt{-(16(r+1)+(r+2)^2\beta_1)\mu_2}$
V	$y=y_0e^{-\frac{\gamma}{x-e}}(x-l)^{-m}$	$y_0=\frac{\gamma^{m-1}}{\Gamma(m-1)}$	$\chi=1$	$l<x<+\infty$	$m=2-r,\ l=\frac{(r+2)\beta_3}{4\mu_2},\ \gamma=\frac{r(r+2)\mu_3}{4\mu_2}$
VI	$y=y_0(\frac{x}{d_1}+1)^{m_1}(\frac{x}{d_2}-1)^{m_2}$	$y_0=\frac{d^{1-r}d_2^{q_2}}{}*$ $\frac{\Gamma(q_1)}{\Gamma(1-r)\Gamma(q_2+1)}$	$1<\chi<+\infty$	$d_1<x<d_2$	$d=2\sqrt{(2+1)(1-x)\mu_2}$ $m_1=\frac{r}{2}(1+\sqrt{\frac{-x}{1-x}})-1<-1,\ d_1=\frac{(m_1+1)d}{2}, m_2=\frac{r}{2}(1-\sqrt{\frac{-x}{1-x}})->-1,$ $d_2=\frac{(m_2+1)d}{2},\ q_1=-m,\ q_2=m_2,\ m_2>m_1=1$
VII	$y=\frac{y_0}{(1+\frac{x^2}{l^2})^2}$	$y_0=\frac{1}{l\sqrt{\pi}}*\frac{\Gamma(m)}{\Gamma(m-}$	$\chi=0$ $\beta_1=0$ $\beta_2>3$	$-\infty<x<+\infty$	$m=\frac{5\beta_2-9}{2(\beta_2-3)}>0,\ l=\sqrt{\frac{2\beta_2\mu_2}{\beta_2-3}}$
VIII	$y=y_0(1+\frac{x}{l})^{-m}$	$y_0=\frac{1-m}{a}$	$\chi<0,\ \lambda=0$ $5\beta_2-6\beta_1-9<0$	$-a<x<0$	$0<m<1$, m =уйидаги тенглама ечимидан иборат: $(4-\beta_1)m^3+(9\beta_1-12)m^2-24\beta_1 m+15\beta_1=0$, $a=-\sqrt{\mu_2}\ (2-m)\sqrt{\frac{3-m}{1-m}} siqn\ \mu_3$

IX	$y = y_0(1+\frac{x}{a})^m$	$y_0 = \frac{1+m}{a},$	$\chi < 0,\ \lambda = 0$ $5\beta_2 - 6\beta_1 - 9 < 0$	$-a < x < 0$	$m > -1$, m =уйидаги тенгламани ечимид иборат: $(\beta_1 - 4)m^3 + (9\beta_1 - 12)m^2 + 24\beta_1 m + 16\beta_1 = 0,$ $a = -\sqrt{\mu_2}\ \ (m+2)\sqrt{\frac{m+3}{m+1}} sign\ \mu_3$
X	$y = \frac{1}{\sqrt{\mu_2}}\ \ e^{-\frac{x}{\sqrt{\mu_2}}}$	-	$\chi = \infty$ $\beta_1 = 4$ $\beta_2 = 9$	$0 < x < +\infty$	
XI	$y = y_0 x^{-m}$	$y_0 = \frac{b^{m-1}}{m-1}$	$k\chi < +\infty$ $\lambda = 0$	$b < x < +\infty$	*m куйидаги тенгламани ечимидан* *иборат*: $(4-\beta_1)m^3 + (9\beta_1 - 12)m^2 - 24\beta_1 m + 16\beta_1 = 0,$ $b = \sqrt{\mu_2}\ \ (m+2)\sqrt{\frac{m+3}{m+1}} sign\ \mu_3$
XII	$y = y_0(\frac{\frac{1}{2}b(1+m)+x}{\frac{1}{2}b(1-m)-x})^m$	$y_0 = \frac{1}{b\Gamma(m+1)\Gamma(1-m)}$	$\chi < 0$ $5\beta_2 - 6\beta_1 - 9 < 0$	$-\frac{1}{2}b(1+m) <$ $< x < \frac{1}{2}b*$ $*(1-m)$	$m = \sqrt{\frac{\beta_1}{3+\beta_1}},\ \ b = 2\sqrt{\mu_2(3+\beta_1)}$
N Nor mal	$y = y_0 e^{-h^2x^2}$	$y_0 = \frac{h}{\sqrt{\pi}}$	$\chi = 0$ $\beta_1 = 0$ $\beta_2 = 3$	$-\infty < x < +\infty$	$h = \frac{1}{\sqrt{2\mu_2}}$

Bu erda

$$\lambda = 4\frac{(4\beta_2 - 3\beta_2)(10\beta_2 - 12\beta_1 - 18)^2 - \beta_1(\beta_2 + 3)^2(8\beta_2 - 9\beta_1 - 12)}{(3\beta_1 - 2\beta_2 + 6)(4(4\beta_2 - 3\beta_1)(3\beta_1 - 2\beta_2 + 6) + \beta_1(\beta_2 + 3)^2)}.$$

AMALIY MASHQULOTLAR

Tasodifiy hodisalar

Asosiy matn

Tasodifiy hodisalar ustida amallar

Tasodifiy hodisalarni latin alfavitining bosh harflari A,B,C,… bilan belgilanadi. U,V esa mos ravishda muqarrar hodisani va mumkin bo‘lmagan hodisani bildiradi.

Agar A hodisaning ro‘y berishi B hodisaning ro‘y berishiga olib kelsa $(A \subset B)$ va aksincha B hodisaning ro‘y berishi $(B \subset A)$ A hodisaning ro‘y berishiga olib kelsa, u holda $A = B$.

$A \bigcup B$ esa A yoki B hodisalardan hech bo‘lmaganda biri ro‘y berishini, $A \bigcap B$ esa bir vaqtda ham A hodisa, ham B hodisa ro‘y berishini, $A \setminus B$ esa A hodisaning ro‘y berishi, lekin B hodisaning ro‘y bermasligini bildiradi. $\overline{A}$ esa A hodisaga teskari hodisani bildiradi.

Agar $A \bigcap B = V$ bo‘lsa, u holda A va B hodisalar birgalikda bo‘lmagan hodisalar deyiladi.

Agar $\bigcup_{i=1}^{n} \mathrm{A}i = \cup$ bo‘lsa, u holda $A_1,\ A_2,\ A_3, ..., A_n$ hodisalar hodisalarning to‘la gruppasini tashkil etadi deyiladi. Xususan, $A_i \cap A_j = V,\ i \neq j$ va $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = U$ bo‘lsa, $A_1,\ A_2,\ ..., A_n$ hodisalar o‘zaro birgalikda bo‘lmagan A hodisalarning to‘la gruppasini tashkil etadi deyiladi.

Masalalr

1.Tasodifiy olingan bir dona pillaning birinchi, ikkinchi yoki uchinchi sort chiqish hodisalari mos ravishda A,B,C bo‘lsin.

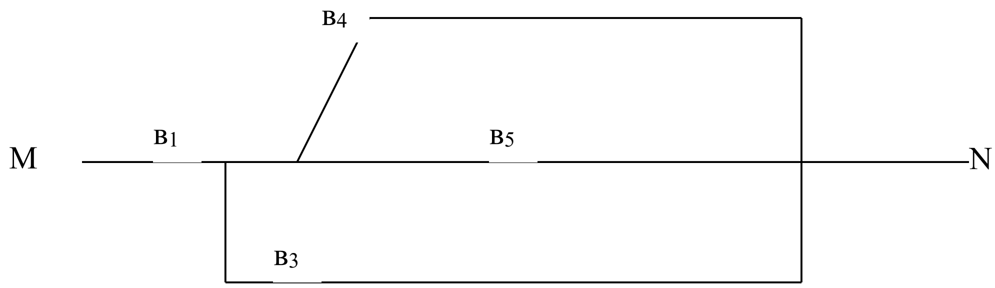
$A \bigcap B,\ A \bigcup C,\ \overline{A \bigcup C} \bigcup A$ lar qanday hodisalarni bildiradi?

Yechish. $A \bigcap B$ ro‘y berishi mumkin bo‘lmagan hodisalar, chunki tasodifiy olingan pilla bir vaqtda ham 1-sort ham ikkinchi sort bo‘lishi mumkin emas, demak, $A \bigcap B = V$.

$A \bigcup C$ hodisa tasodifiy olingan pillaning yo birinchi sort yoki uchinchi sort bo‘lishini bildiradi.

$\overline{A \bigcup C} \bigcup A = B \bigcup A$, ya’ni tasodifiy olingan pilla yo birinchi yoki ikkinchi sortga tegishlidir.

2. M va N nuqtalarni tutashtiruvchi elektr zanjiri berilgan.



(1-расм).

$Bi, i=1,2,3,4,5$ elementning ishdan chiqish hodisasi B bo‘lsin. M nuqtadan N nuqtaga tok o‘tmaslik hodisasi yozilsin.

Yechish. Bu hodisa $B_1, B_2 \cap B_3, B_3 \cap B_4 \cap B_5$ hodisalarning yig‘indisidan iborat, ya’ni $B_1 \bigcup (B_2 \cap B_3) \bigcup (B_3 \cap B_4 \cap B_5)$.

3. Tasodifiy sonlar jadvalidan uchta son olingan. A olingan sonlardan birinchisining juftson bo‘lish, B esa ikkinchisining tub son bo‘lish, C esa uchinchisining murakkab son bo‘lish hodisalaridan iborat bo‘lsin. Quyidagi ifodalar qanday hodisalarni bildiradi:

$а)\ \overline{A \bigcup B};\quad в)\ A \bigcup (B \cap C);\quad д) A \bigcup B \bigcup \overline{C};\quad ж)(A \setminus B \bigcup C);$

$б) A \cap B;\quad г)\ \overline{A} \bigcup B;\quad е)\overline{A \bigcup B \bigcup C};\quad и)\ \overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}\,?$

4. 2-misolda M nuqtadan N nuqtaga tok o‘tish hodisasi yozilsin.

5. $\overline{\bigcap_{k=1}^{n} Ak} = \bigcup_{k=1}^{n} \overline{A_k}$ tenglik isbotlansin.

6. Qanday hollarda $A \bigcup B = \overline{A},\quad A \cap B = \overline{A},\quad A \bigcup B = A \cap B$ tengliklar o‘rinli bo‘ladi?

7. Ayniyatlarni isbotlang:

8. Quyidagi hodisalardan qaysi biri muqarrar hodisa:

«Uch studentdan ikkitasining imtixon topshira olishi» hodisasi – A .

«Tasodifiy olingan xonali sonning 100 dan kichik bo‘lishi» hodisasi – B, «uchta tanga tashlanganda kamida 2 tasida gerbli tomon tushishi» - C, «uchta shashqoltosh tashlanganda tushgan ochkolar yig‘indisi 18 dan ortmaslik hodisasi» – D .

9. Quyidagi hodisalardan qaysi biri mumkin bo‘lmagan hodisa:

«$x^2+1=0$ tenglamaning yechimi ± 1» ga teng bo‘lish hodisasi – A. «Ikkita tangani birdaniga tashlanganda ikkalasida gerbli tomonining tushishi» hodisasi – B.

«Ikkita shashqoltoshni tashlanganda tushgan ochkolar yig‘indisi 13 ga teng bo‘lish» hodisasi – C.

«4, 6, 8, 9, 10 raqamlaridan bittasini tasodifiy olinganda tub son chiqishi» hodisasi – D.

10. Agar: A – «shashqoltoshni tashlanganda 2 raqami»,
B – «shashqoltoshni tashlanganda 3 raqami»,
C – «shashqoltoshni tashlanganda 4 raqami»,
hodisalari bo‘lsa, $A \bigcup B \bigcup C$ qanday hodisa bo‘ladi?

11.Tanga tashlanganda G-gerbli tomonining, R-raqamli tomonining tushish hodisalari bo‘lsa, G R, G R hodisalar nimani bildiradi?

12. Agar A orqali studentning imtixonni albatta topshira olish hodisasini, B orqali uning «besh» baho olish hodisasini belgilasak, u holda $A \bigcup B,\ A \cap B,\ A \setminus B,\ \overline{B} \setminus \overline{A}$ hodisalarni izohlang.

13. $A_i\left(i=\overline{1,6}\right)$ orqali shashqoltoshni tashlanganda i raqam tushish hodisasini belgilasak, u holda quyidagi yig‘indilarning qaysi biri hodisalarning to‘la gruppasini tashkil qiladi:

$a)$ $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4 \cup A_5$;

$b)$ $A_1 \cup A_3 \cup A_5$;

$v)$ $A_2 \cup A_4 \cup A_6$?

Asosiy matn

Kombinatorika elementlari.

Turli gruppalardan bittadan tanlab olishlar kombinatsiyasi

r ta turli gruppa mavjud bo‘lsin. Birinchi gruppa n_1 ta, ikkinchi gruppa n_2 ta va hakozo, r=gruppa n_r ta elementdan tuzilgan bo‘lsin. Har bir gruppadan bittadan tasodifiy element olib, tuzish mumkin bo‘lgan gruppalar soni

$$N = n_1.n_2....n_r$$

ga teng.

Qaytariladigan tanlashlar soni

n ta turli gruppa mavjud bo‘lsin. Bu gruppadan bittalab element olib, uni belgilab, o‘rniga qaytarib qo‘yamiz va bu jarayonni yana takrorlaymiz. Bu usuldan r marta foydalanib, r elementli gruppa hosil qilamiz. Bu usulda tuzish mumkin bo‘lgan tanlashlar soni $N = n^r$ ga teng.

O‘rinlashtirishlar soni (qaytarilmaydigan tanlashlar)

Agar n ta elementli gruppa berilgan bo‘lsa, r ta elementli gruppa hosil qilishlar usuli

$$N = A_n^r = n(n-1)(n-2)...\ (n-r+1), r = \overline{1n}$$

ga teng.

Gruppalashlar soni (kombinatsiyalar)

n ta elementli gruppadan tuzish mumkin bo‘lgan r ta elementli gruppalar soni

$$N = C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!},\ \ r = \overline{l,n}$$

ga teng.

Masalalar

14. 10-sinfda 30 nafar , 9-sinfda 25 nafar , 8-sinfda 28 nafar o‘quvchi bor. Uchala sinfda bittadan o‘quvchini olib, navbatchilikka 3 tadan o‘quvchini necha usul bilan qo‘yish mumkin?

Yechish: $N=30\cdot 28\cdot 25=21000$

15. O‘zbek alfavitidagi 36 ta harf kartochkalarga yozilgan. Bu harflardan nechta usulda to‘rtta harfdan iborat «so‘zlar» yozish mumkin?

Yechish: $N = A_{36}^{4} = 36.35.34.33. = 1413720$

16.Gruppada 15 o‘g‘il bola 10 qiz bola bor. Olimpiadaga qatnashish uchun 3 o‘g‘il va 2 qiz boladan iborat komandani necha usul bilan tuzish mumkin?

Yechish: O‘g‘il bolalarni C_{15}^{3} ta usul bilan, qiz bolalarni C_{10}^{2} ta usul bilan gruppalash mumkin, demak,

$$N = C_{15}^{3}\cdot C_{10}^{2} = 20475$$

17. 20 ta o‘quvchidan iborat ro‘yxatni necha usul bilan tuzish mumkin?

18. 10 ta paxta terish mashinasiga 10 mexanizatorni necha usul bilan bittadan o‘tkazish mumkin?

19. 2, 3, 5, 8, 9 raqamlaridan necha usul bilan turli besh xonali sonlar tuzish mumkin?

20. Aylanada 9 ta turli nuqta olingan:

a) bu nuqtalarni tutashtiruvchi nechta vatar o‘tkazish mumkin?

b) uchlari shu nuqtalarda bo‘lgan nechta uchburchak tuzish mumkin?

v) uchlari shu nuqtalarda bo‘lgan nechta to‘rtburchak tuzish mumkin?

g) uchlari shu nuqtalarda bo‘lgan nechta beshburchak tuzish mumkin?

21. Gruppada 25 student bor. Har bir student faqat bir kundan navbatchilikda turish sharti bilan 25 kunga navbvatchilik ro‘yxatini necha usul bilan tuzish mumkin?

22. Kartochkalarga A, B, V, G harflari yozilgan. SHu harflardan nechta usulda to‘rtta harfdan iborat «so‘zlar» yozish mukin?

23. Gruppada 23 student bor. Sinfkom, sinfkom yordamchisi, sport ishlari bo‘yicha mas’ul o‘quvchini nechta usul bilan saylash mumkin?

24. Gruppada 25 student bor. 25 ta imtixon bileti tuzilgan. Har bir student bittadan bilet olish sharti bilan biletlarni necha usulda tarqatish mumkin?

25. Futbol birinchiligida ishtirok etayotgan 17 komanda oltin, kumush, bronza medallarini necha usulda o‘zaro bo‘lib oladilar?

26. SHaxmat taxtasida to‘rtta ruxni o‘zaro ololmaydigan qilib necha usulda joylashtirish mumkin?

27. Birinchi, ikkinchi, uchinchi guruxlarda mos ravishda 20, 10, 5 student bor. Studentlar qurilish otryadiga birinchi gruppadan komandir, ikkinchi gruppadan komissar, uchinchi gruppadan vrachni necha usulda belgilash mumkin?

28. n ta nol $k(k \le n+1)$ ta birni ikkita bir raqami yonma-yon turmaydigan qilib necha usulda joylashtirish mumkin?

Asosiy matn

Ehtimolning klassik va statistik ta’riflari

Aytaylik, n ta teng imkoniyatli $A_1, A_2, ..., A_n$ hodisalar berilgan bo‘lib, bulardan m tasi A hodisaning yuz berishiga imkoniyat beradigan hodisalar bo‘lsin.

A hodisani ro‘y berishiga imkoniyat beradigan hodisalar sonining umumiy hodisalar soniga nisbati A hodisaning ehtimoli deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Bu ta’rif ehtimolning klassik ta’rifi deyiladi. A hodisaning nisbiy chastotasi $W(A)=\frac{m}{n}$ tenglik bilan aniqlanadi, bu erda m-qaralayotgan A hodisa ro‘y bergan sinovlar soni, n – o‘tkazilgan barcha sinovlar soni.

Hodisa statistik ehtimolning qiymati sifatida taqriban hodisaning chastotasini olish mumkin.

Masalalar

29. Imtixon topshirish uchun 1,2,3,4 nomerli 4 ta bilet tuzilgan. SHu biletlarni bittalab olganda tartib bilan chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish: Ω hodisasi 4 ta elementli to‘plamlardan iborat. Bu elementlardan bittadan, qaytadan qo‘ymaslik sharti bilan, to‘rtta element $n=4!$ usul bilan olinadi. Bulardan faqat bittasi o‘sish tartibida joylashgan to‘plam va demak, klassik ta’rifga ko‘ra:

$$P=\frac{1}{24}\approx 0,0417$$

30. Uchta shashqoltosh tashlanganda tushgan ochkolar yig‘indisi 17 ga teng bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish: $A=\left(e_i^{(1)},e_j^{(2)},\ e_l^{(3)}\right),\ \ (i,\ j,\ l=\overline{1,6})$ orqali mos ravishda birinchi, ikkinchi, uchinchi shashqoltoshlarda I, j, l ochkolar tushish hodisalarini belgilaymiz. Agar k-shashqoltosh uchun

$$A=\left(e_1^{(k)},e_2^{(k)},\ e_3^{(k)},\ e_4^k,\ e_5^k,\ \ e_6^k\right),k=1,2,3$$

belgilashni kiritsak, u holda A ko‘rinishdagi hodisalar soni $n=6^3$ ga teng (turli gruppadan bittadan tasodifiy olishlar usuli). Lekin bular ichida

$$B=\left(e_i^{(1)},e_j^{(2)},\ e_l^{(3)}\right),\ \ (i+\ j+l=17)$$

Ko‘rinishdagi hodisalar 3 ta (ya’ni 2 tasida 6 ochko, 1 tasida 5 ochko). Demak, $P(B)=\frac{3}{6^3}=0.01388$

31. Dominodan 7 tasi tasodifiy olingan kamida bitta dubl (qo‘sh raqam) chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish: Izlanayotgan hodisa $A=e_i,i,j=0.6$ elementar hodisadan iborat. Domino toshlarini 7 tadan gruppalashlar soni C_{281}^7 u holda tasodifiy olingan 7 ta domino toshi ichida birorta ham dubl chiqmaslik hodisalari soni $m=C_7^0.C_{21}^7$. 7 ta tasodifiy olingan toshlar ichida bitta dubl chiqish hodisasining ehtimoli:

$$P=1-\frac{C_7^0.C_{21}^7}{C_{28}^7}\approx 0.9018$$

32. 2000 yilgi Mingbuloq tumanidagi Gulbog‘ f-x da ekilgan chigitning unuvchanligi kuzatildi. Tajriba ko‘rsatkichi, “Uychi” navli chigitning 1000 donasidan o‘rtacha 890 donasi unib chiqdi. Ekilgan chigitning unuvchanlik nisbiy chastotasi topilsin.

33. YAngi yil kechasida studentlarga 100 so‘mlik lotoreya biletlari tarqatildi. 1 ta lotoreya biletining bahosi 500 so‘m. 100 ta lotoreya biletiga yutuq chiqishi ma’lum. Tasodifiy olingan 1 ta biletga yutuq chiqish hodisasining nisbiy chastotasi topilsin.

34. Fransuz tabiatshunosi Byuffon tangani 4040 marta tashlaganda 2048 marta gerb tushdi. Gerb tushish hodisasining nisbiy chastotasi topilsin.

35. Tekshirish uchun tasodifiy olingan 300 dona pillaning 8 donasi brak chiqdi. Olingan pillalarning brak chiqish nisbiy chastotasi topilsin.

36. Natural sonlar qatorida 4000 gacha bo‘lgan sonlar ichida 551 tasi tub. 4000 gacha bo‘lgan ixtiyoriy butun musbat sonning tub son chiqish nisbiy chastotasi topilsin.

37. YAngi tug‘ilgan 1000 chaqaloq ichida 517 nafari o‘g‘il bola. O‘g‘il bola tug‘ilish nisbiy chastotasi topilsin.

38. Ikkita shashqoltosh tashlanganda tushgan raqamlar yig‘indisi 9 ga teng bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

39. Uchta shashqoltosh tashlanganda tushgan raqamlar yig‘indisi 4 dan oshmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

40. Uchta tanga bir martadan tashlanganda hech bo‘lmaganda bittasida gerbli tomon tushish hodisasining ehtimoli topilsin.

41. Oltita turli raqamlar alohida–alohida kartochkalarga yozilgan. SHu kartochkalarni tavakkaliga bittadan olishda raqamlarning o‘sish tartibi bilan chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

42. Yig‘ilishga 28 student keldi. CHiqib ketishda uy qorong‘i bo‘lgani uchun studentlar bosh kiyimlarini ajrata olmadilar va qo‘llariga ilingan bosh kiyimni kiyib ketdilar. Har bir studentning o‘z bosh kiyimini olish hodisasining ehtimoli topilsin.

43. 1 dan 33 gacha bo‘lgan sonlar sharlarga yozilgan. Tasodifan bittadan shar olinganda yozilgan raqamlar o‘sish tartibida joylanish hodisasining ehtimoli topilsin.

44. Sumkadagi uch dona kitob 1000 so‘mdan, to‘rtta kitob esa 500 so‘mdanligi ma’lum. Tasodifiy ravishda, qaytadan qo‘ymaslik sharti bilan olingan ikki dona kitobning biri 500 so‘mlik va ikkinchisi 1000 so‘mdanligi ma’lum bo‘lsa, tasodifiy olingan uchinchi kitobning 1000 so‘mlik bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

45. Birinchi xaltada 3 ta qizil, 5 ta sariq, ikkinchi xaltada 4 ta oq, 3 ta ko‘k shar bor, birinchi xaltadan ikkinchi xaltaga bitta shar solindi. Ikkinchi xaltadan tasodifiy olingan sharning ko‘k chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

46. Kub qizil rangga bo‘yalgan bo‘lib, 1000 ta teng kubchalarga ajratilgan. Tasodifiy olingan kubchaning ikki tomoni bo‘yalgan bo‘lib chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

47. (De mere masalasi). Uchta shashqoltosh tashlanganda tushgan raqamlar yiғindisi 11 ga teng bo‘lish hodisasining ehtimoli kattami yoki 12 ga teng bo‘lish ehtimoli kattami?

48. (Dalamber masalasi) Tanga ketma-ket ikki marta tashlandi. Kamida bir marta “gerb” tushish hodisasining ehtimoli topilsin.

49. Student 75 savoldan 50 tasini tayyorladi. Student 3 ta savolga javob bergandagina imtixondan o‘tadi. Uning imtixondan o‘tish hodisasining ehtimoli topilsin.

50. Oltita raqamli telefon nomerini tasodifiy olinganda oltita raqamning har xil bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

51. O‘nta kartochkaga noldan 9 gacha raqamlar yozilgan. Tasodifiy olingan 2 ta kartochka yordamida tuzilgan ikki xonali sonning 16 ga bo‘linish hodisasining ehtimoli topilsin.

52. 3,4,5,6,7 raqamlarning har biri alohida-alohida kartochkaga yozilgan. Ketma-ket 2 ta kartochka tasodifiy olindi. Olingan kartochkadagi raqamlarning yonma-yon o‘sish tartida kelish hodisasining ehtimoli topilsin.

53. 36 donali kartani 2 kishiga teng bo‘lib beriladi. Birinchi o‘yinchida ikkita tuz chikish hodisasining ehtimoli topilsin.

54. Uzunligi 3,4,5,7,8 birlikka teng bo‘lgan kesmalar berilgan. Tasodifiy olingan uchta kesmadan to‘g‘ri burchakli

uchburchak hosil qilish mumkinligi hodisasining ehtimoli topilsin.

55. To‘rtta shashqoltoshni tashlanganda kamida birida 1 ochko chiqish hodisasining ehtimoli ko‘pmi yoki 3 ta shashqoltosh tashlanganda kamida bittasida bir ochko chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

56. Beshta raqamli telefon spravochnigidan (0 raqami kirmaydi) tasodifiy olingan nomerning 5 ga qoldiqsiz bo‘linish hodisasining ehtimoli topilsin.

57. 36 donali kartaning 4 kishi tasodifiy ravishda teng bo‘lib oldi. Birinchi kishiga kamida bir dona tuz chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

58. 36 ta sharni 36 ta qutiga tasodifiy joylashtirilganda bitta qutichaning bo‘sh qolish hodisasining ehtimoli topilsin.

59. 100 dona lampochka ichida 5 tasi yaroqsiz, tasodifiy olingan 15 ta lampochkadan 1 tasining yaroqsiz chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

60. Paxta dalasida 25 student paxta terish uchun egatlarga tasodifiy tarqalishdi. Gruppa jurnalidagi birinchi va ikkinchi nomerli studentning yonma-yon tushish hodisasining ehtimoli topilsin.

61. Gruppada o‘g‘il va qiz bolalar soni teng, gruppani ikkita teng gruppaga bo‘linganda ikkala gruppadagi o‘g‘il bolalar va qiz bolalar soni teng bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

62. Brigadada 5 ayol va 3 erkak ishlaydi. Respublika yig‘ilishiga ikki ayol va bir erkakdan iborat delegatsiya tuzish hodisasining ehtimoli topilsin.

63. Gruppada 15 qiz bola, 10 o‘g‘il bola bor. 2 studentning navbatchilik qilish uchun tasodifiy ravishda ajratildi. A) shulardan bittasi qiz bola, b) kamida bittasi qiz bola, v) birorta ham qiz bola ishtirok etmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

64. Kartochkalarda 1 dan 20 gacha bo‘lgan sonlar yozilgan. Tasodifiy ravishda 3 ta kartochka olinganda kamida bitta tub son chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

65. Fakultetdagi 14 gruppani 7 tadan qilib, ikki qismga bo‘lingan. Fakultetda 2 gruppa respublika musobaqa g‘olibi bo‘lsa, ikkala g‘olib gruppa bitta qismga tushib qolish hodisasining ehtimoli topilsin.

66. Gruppada 30 ta student bo‘lib, to‘garak stol atrofida o‘tirganda jurnaldagi birinchi va ikkinchi nomerli studentlarning yonma-yon o‘tirib qolish hodisasining ehtimoli topilsin.

67. Etti qavatli o‘quv korpusiga 3 kishi kirdi. Birinchi qavatga kirilmaydi. Har bir kishining turli qavatga ko‘tarilish hodisasi ehtimoli bir xil. a) uchala kirgan kishining bitta qavatga chiqish hodisasining ehtimoli topilsin; b) har birining turli qavatga ko‘tarilish hodisasining ehtimoli topilsin.

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslikar va o‘quv qo‘llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

2.A.A.Abdushukurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misol va masalalar to‘plami» Toshkent, «Universitet», 2003 y.

3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to’plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

Asosiy matn

Geometrik ehtimollar

Aytaylik, l kesma L kesmaning bo‘lagini tashkil etsin. L kesmaga tavakkaliga nuqta qo‘yilgan. Agar nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli bu kesmaning uzunligiga proporsional bo‘lib, uning L kesmaga nisbatan joylashishiga bog‘liq emas deb faraz qilinsa, u holda nuqtaning l kesmaga tushish ehtimoli

$$P = \frac{l \text{ нинг узунлиги}}{L \text{ нинг узунлиги}}$$

tenglik bilan aniklanadi.

Aytaylik, g yassi figura G yassi figuraning bo‘lagi bo‘lsin. G figuraga nuqta tavakkaliga tashlangan. Agar tashlangan nuqtaning g figuraga tushish ehtimoli bu figuraning yuziga proporsional bo‘lib, uning G figuraga nisbatan joylashishiga ham, g ning formasiga ham bog‘liq bo‘lmasa, u holda nuqtaning g figuraga tushish ehtimoli

$$P = \frac{Q \text{ нинг юзи}}{G \text{ нинг юзи}}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Nuqtaning V fazoviy figuraning bo‘lgan v fazoviy figuraga tushish ehtimoli

$$P = \frac{\vartheta \ \text{нинг хажми}}{v \ \text{нинг хажми}}$$

tenglik bilan aniqlanadi.

Masalalar

68. Tashlangan nuqtaning $y = 3x - 1,\ x - 7y = 7,\ x + y = 7 = o$ to‘g‘ri chiziqlar bilan chegaralangan teng yonli uchburchak ichiga ichki chizilgan doiraga tushish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. Ma’lumki, uchburchakning uchlari (0,1), (2,5), (7,0). Uchburchak perimetrining yarmi esa $P_o = \sqrt{50} + \sqrt{10}$. Uchburchak yuzi $S = 20$ kv. birlik. U holda ichki chizilgan doira radiusi

$$r = \frac{S}{P} = \frac{20}{\sqrt{50} + \sqrt{10}} .$$

Demak, $P = \dfrac{\pi}{3 + \sqrt{5}}$.

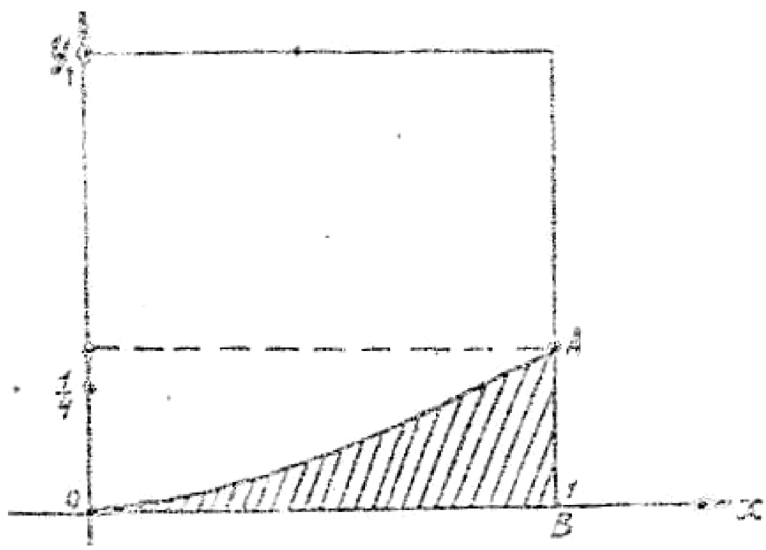
69. Uchlari (0,0),(0,1),(1,0),(1,1) nuqtalarda bo‘lgan kvadratga nuqta tashlangan. Agar shu nuqtaning koordinatalari (t_1, t_2) bo‘lsa, $x^2 + tx + t = 0$ tenglamaning yechimlarini xaqiqiy bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish: Ma’lumki, (2-rasm) $x^2 + tx + t = 0$ tenglama $t_1^2 \geq 4t_2$ shart bajarilganda haqiqiy yechimga ega. U holda kvadratdagi $t_1^2 \geq 4t^2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi soha yuzi

$$S = \int_0^1 \frac{1}{4} t_1^2 dt_1 = \frac{1}{12}$$

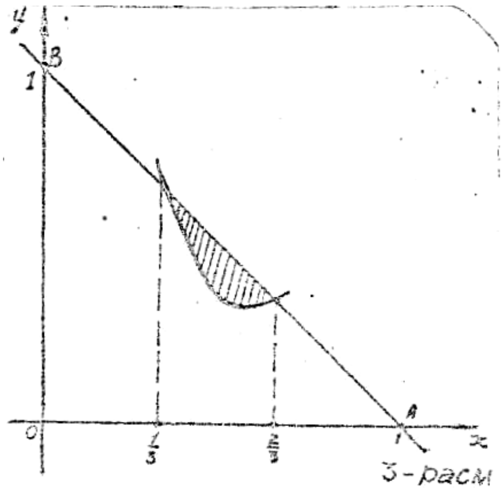
Natijada nuqtaning ko‘rsatilgan sohaga tushish hodisasining ehtimolligi

$$P = S_{OAB} = \frac{1}{2}\int_0^1 t_1^2 dt_1 = \frac{1}{12}$$



70. Uchlari (0.0), (1.0), (0.1) nuqtalarda bo‘lgan uchburchak ichiga tashlangan nuqtaning $xy \geq 2/9$ sohaga tushish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. Uchburchak va G soha yuzi (3- rasm) mos ravishda:



$$S_{\Delta AOB} = 1 \backslash 2;$$

$$S_G = \int_{1/3}^{2/3} (1 - x - \frac{2}{9x})dx = \frac{1}{6} + \frac{2}{9}\ln\frac{1}{2}$$

71. Tavakkaliga olingan ikki musbat sonning birinchisi 3 dan, ikkinchisi 2 dan katta emas. Ikkala sonning yig‘indisi 4 dan, ayirmasi 0.5 dan katta bo‘lmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. x-birinchi, u-ikkinchi son bo‘lsin, u holda

$$0 \leq x \leq 3, \quad 0 = \leq y \leq 2$$

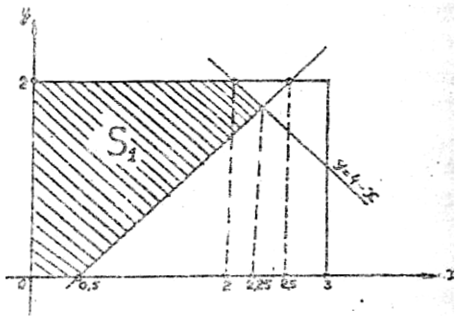
qulaylik tug‘diruvchi qiymatlar esa

$x + y \leq 4,$

$x - y \leq 0,5$

$y \leq 4 - x$

$y \geq x - 0,5$



4-rasmdan $P = \frac{S_1}{6} \approx 0,48958$

72. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} + Z^2 = 1$ ellipsoidning ichida harakatlanayotgan zarrachaning radiusi birga teng bo‘lgan va markazi koordinata boshida joylashgan shar ichida bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

73. A va B shaharlar orasidagi masofa 35 km ga teng bo‘lib, bu shaharlar orasidagi s punktda ko‘prik buzilgan. C punktning B shahardan $l(l \leq 35)$ masofadan yaqin bo‘lmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

74. Tekislik bir-biridan 16 dm masofada joylashgan parallel to‘g‘ri chiziqlar bilan bo‘lingan. Tekislikka radiusi 6 dm ga teng tanga tashlanganda to‘g‘ri chiziqlarning birortasini ham kesmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

75. Tomoni 1 uzunlikka ega bo‘lgan kvadratning diagonallari kesishgan nuqtani markaz qilib, radiusi dioganal uzunligining $\frac{1}{4}$ qismiga teng bo‘lgan doira chizilgan. Tanlangan nuqtaning doira ichiga tushish hodisasining ehtimoli topilsin.

76. Uzunligi 4 ga teng OA kesmaga V(x), S(u) nuqtalar qo‘yilgan, shu bilan birga $y \geq x$. BC kesmaning uzunligi OB kesmaning uzunligidan kichik bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

77. Tavakkaliga olingan uzunligi 4 dan ortiq bo‘lmagan uchta kesmadan uchburchak yasash mumkin bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

78. Uchta musbat sonning birinchisi 2 dan, ikinchisi 3 dan, uchinchisi 1 dan oshmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

79. Uchlarining koordinatalari A(2;-1), B(4;5), C(-3;2) nuqtalarda bo‘lgan uchburchakning A nuqtasidan AB va AD chiziqlar orasida nur tarqaladi, D nuqtaning koordinatalari $(3;\frac{32}{7})$. Tashlangan nuqtaning nur tushadigan zonaga tushishi hodisasining ehtimoli topilsin.

80. Uchta musbat sonning birinchisi va ikkinchisi 4 dan, uchinchisi 2 dan oshmaydi. Uchala sonning kvadratlari yig‘indisi 1 dan kichik bo‘lmaslik va 4 dan oshmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

81. $y = x,\ (0 \leq x \leq 10)$ sm kesmaning OX o‘q atrofida aylanishidan kesmaning $0 \leq x \leq 3$ bo‘lganda OX o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan konusning ichida bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

82. Er sun’iy yo‘ldoshi shimoliy kenglikning 60^0 orasida harakat qiladi. Yo‘ldosh ko‘rsatilgan kenglikdagi ixtiyoriy nuqtada teng imkoniyat bilan turishi mumkin. Yo‘ldoshning shimoliy kenglikning 30^0 dan yuqori qismida bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

83. Ikki dyumli tik qo‘yilgan truba ichiga radiusi 0.5 sm halqa gorizontal holda mahkamlangan. Truba ichida bitta zarracha yuqoridan pastga qarab harakat qilmoqda. Bu zarrachaning halqa ichidan o‘tish hodisasining ehtimoli topilsin.

84. Tavakkaliga olingan ikkita musbat sonning biri 2 dan, ikkinchisi 3 dan katta emas. Birinchi son kvadrati bilan ikkinchi son ko‘paytmasining 4 dan oshmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

Asosiy matn

SHartli ehtimollar

Ikkita hodisa yig‘indisining ehtimoli $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ ga teng.

$\{\Omega,\ F, P\}$ ehtimollik fazosida $A,\ B \in F$ va $P(B) > 0$ bo‘lsin, u holda A hodisaning B sharti ostidagi ehtimoli deb

$$P(A / B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

ifodaga aytiladi.

Agar $P(A \mid B) = P(A)$ bajarilsa, A va B hodisalar erkli deyiladi.

Erkli hodisalar uchun $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ bajariladi. B hodisa n ta juft-jufti bilan birgalikda bo‘lmagan $A_1,\ A_{2,} \ldots A_n$ hodisalarning bittasi va faqat bittasi bilangina ro‘y berishi mumkin bo‘lsin , u holda

$$P(B)=\sum_{i-1}^{n} P(A_i)P(B/A_i)$$

ifoda to‘la ehtimollik formulasi deyiladi.

Bundan

$$P(A_i/B)=\frac{P(A_i).P(B/A_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(A_k).P(B/A_k)}$$

Bu formula Beyes formulasi deyiladi.

Masalalar

85. Qurilmaning ishdan chiqishi uchun uchta erkli detaldan kamida bittasining ishdan chiqishi etarli. Birinchi detalning ishdan chiqish hodisasi A, ehtimoli 0,3, ikkinchi detalning ishdan chiqish hodisasi B, ehtimoli 0,2, uchinchi detalning ishdan chiqish hodisasi C, ehtimoli 0,1 ga teng. Qurilmaning ishdan chiqmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish: Qurilmaning ishdan chiqmaslik hodisasi uchchala detalning ishdan chiqmaslik hodisasi bilan teng kuchlidir. Demak $\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.

Agar bu hodisalarning erkliligini e’tiborga olsak,

$$P(\overline{A}\cap\overline{B}\cap\overline{C})=P(\overline{A})P(\overline{B})P(\overline{C})=0.504$$

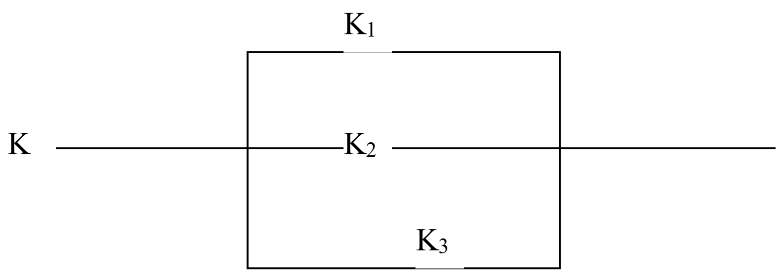
86. Mavjud qurilmani sozlash uchun kelgan to‘rt ustaning qurilmani sozlay olish hodisalari ehtimoli mos ravishda 0,9; 0,8; 0; 0,7; 0,6 ga teng. Qurilmani kamida bitta usta sozlay olish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. A_i orqali $i=$ustaning $i=1,2,3,4$ qurilmani sozlay olish hodisasini belgilasak, u holda izlanayotgan hodisaning ehtimoli

$$P=1-(1-P(A_1)).(1-P(A_2)).(1-P(A_3)).(1-P(A_4))=0.9976$$

87. Agar k qarshilik yoki bir vaqtda k_1, k_2, k_3 qarshiliklar ishdan chiqsa, zanjirda tok bo‘lmaydi. k_1, k_2, k_3 qarshiliklarning ishdan chiqish hodisalari erkli. Agar K qarshilikning ishdan chiqish hodisasi ehtimoli 0,2 ga, k_1, k_2, k_3 qarshiliklarning ishdan chiqish hodisalarining ehtimoli esa mos ravishda 0,3; 0,4; 0,5; ga teng bo‘lsa, u holda zanjirda tok bo‘lmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. 5-rasmga asosan zanjirda tok bo‘lmaslik hodisasining ehtimoli



5-расм

$P=0,2 \qquad 0,26$

88. Qabul punktiga topshirish uchun olib kelingan xaltachadagi 50 dona pillaning 45 donasi oliy sort, 5 donasi quyi sort. Tekshirish uchun tavakkaliga olingan 25 dona pilla ichida ko‘pi bilan 2 donasi quyi sort bo‘lsa, 50 dona pilla oliy sortga, aks holda, birinchi sortga qabul qilinadi. 50 dona pillaning oliy sortga qabul qilinganlik ehtimoli topilsin.

Yechish.

A-olingan 25 dona pillaning hammasi oliy sort;

B-olingan 25 dona pilla ichida 1 tasi quyi sort;

C- olingan 25 dona pilla ichida 2 tasi quyi sort.

A,B,C hodisalar birgalikda emas, u holda

$$A(A\bigcup B\bigcup C)=\frac{C_{45}^{24}}{C_{50}^{25}}+\frac{C_{45}^{24}}{C_{50}^{25}}+\frac{C_{45}^{23}\cdot C_{5}^{2}}{C_{50}^{25}}=0,5$$

89. Gruppadagi 10 studentga yana bir qiz bola kelib qo‘shildi. Tasodifiy olingan studentning qiz bola bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. Quyidagi hollar bo‘lishi mumkin: gruppada bitta qiz bola bor -A_1, ikkita qiz bola bor- A_2, uchta qiz bola bor – A_3 va xokazo 10 ta qiz bola bor –A_{10} yoki – A_{11} birorta ham qiz bola yo‘q. A_1, A_2, …, A_{11} hodisalar to‘la gruppani tashkil qilgani va teng imkoniyatli bo‘lgani uchun

$$P(A_i)=\frac{1}{11};\quad i=\overline{1,\,11}$$

Agar V orqali tasodifiy olingan studentning qiz bola bo‘lish hodisasini belgilasak, u holda

$$P(B/A_i)=\frac{i+1}{11},\ i=\overline{1,\ 10};\quad P(B/A_{11})=\frac{1}{11}$$

Natijada to‘lik ehtimollik formulasiga ko‘ra

$$P(B)=\sum_{i=1}^{11}P(A_i)P(B/F_i)=0,5454$$

90. Gruppada 15 ta qiz bola, 10 ta o‘g‘il bola bor. Tasodifiy ajratib olingan 5 ta studentning hammasining o‘g‘il bola bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. A_i bilan ajratib olingan i- studentning $(i\le 5)$ o‘g‘il bola bo‘lish hodisasini belgilaymiz. Ma’lumki,

$$P(A_1)=\frac{2}{5}=\frac{10}{25}$$

u holda

$$P(A_2/A_1)=\frac{9}{24}; \qquad P(A_3/(A_1\cap A_2))=\frac{8}{23;}$$

$$P(A_4/(A_1\cap A_2\cap A_3))=\frac{7}{22}; \qquad P(A_5/(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4))=\frac{6}{21}$$

Topilgan formulaga qo‘yamiz:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5)=P(A_1)\cdot(A_2/A_1)\ P(A_3/(A_1\cap A_2))x$$
$$x\,P(A_4/(A_1\cap A_2\cap A_3))\ P(A_5/(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4))=0.00477$$

91. Pilla qabul qilish punktida ikkita laborant ishlaydi. Saralash uchun keltirilgan pillalarni birinchi laborant tekshirish hodisasining ehtimoli 0.53 ga, ikkinchi lobarant tekshirish hodisasining ehtimoli 0.47 ga teng. Birinchi va ikkinchi laborantlarning pillani oliy sortga qabul qilish hodisalari ehtimoli mos ravishda 0.85 va 0.8 ga teng. Punktga keltirilgan pilla partiyasi oliy sort bilan qabul qilinganligi ma’lum bo‘lsa, bu pilla partiyasini birinchi laborant tekshirganlik hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. A qabul qilingan pilla partiyasining oliy sort ekanligi hodisasi, V_1 va V_2 pillani mos ravishda birinchi va ikkinchi laborantlar tekshirganlik hodisalari bo‘lsin. U holda

$$P(B_1)=0,53 \quad P(B_2)=0,47$$

Agar pillani birinchi laborant tekshirgan bo‘lsa, u holda pillaning oliy sort bilan qabul qilinish shartli ehtimoli $P(A/B_2)=0,80$.

Topilganlarni e’tiborga olsak, qabul qilingan pilla partiyasi oliy sortli chiqish hodisasi ehtimolligi to‘la ehtimollik formulasiga ko‘ra

$$P(A)=P(B_1)\cdot P(A/B_1)+P(B_2)\cdot P(A/B_2)=0,8265$$

92. Pilla punktiga topshirish uchun ikki qop pilla olib kelindi. Birinchi qopdagi pillaning hammasi oliy sortligi, ikkinchi qopdagi pillaning 2/3 qismi oliy sortligi ma’lum. Tasodifiy qopdan 1 dona pilla olindi va u oliy sortga tegishli ekanligi ma’lum bo‘ldi. Olingan pillani qopga qaytarib qo‘yilgandan so‘ng, yana bitta olingan pillaning oliy sort bo‘lmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. N_1 gipoteza – olingan pilla birinchi qopga tegishli, N_2 gipoteza – olingan pilla ikkinchi qopga tegishli, A- birinchi olingan pillaning oliy sortligi, V- ikkinchi olingan pillaning oliy sort bo‘lmaslik hodisalari bo‘lsin. Masala shartiga ko‘ra

$$P(H_1)=P(H_2)=\frac{1}{2}, \quad P(A/H_2)=\frac{2}{3}, \quad P(A/H_1)=1$$

U holda to‘la ehtimollik formulasiga ko‘ra

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{5}{6}$$

Ikkinchi tomondan, birinchi pillani olingandan so‘ng qopdagi pillalarning oliy sort chiqmaslik hodisasining ehtimoli

$$P(H_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=0,4$$

Oliy sortga chiqish hodisasi ehtimoli

$$P(H_1/A)=1-P(H_2A)=0,6$$

N3 orqali ikkinchi pillani olingandan so‘ng qopdagi pillaning oliy sort chiqmaslik hodisasini, N4 orqali oliy sort chiqish hodisasini belgilasak, u holda xuddi oldingi holdagidek, quyidagini hosil qilamiz:

$$P(H_3)=0,4 \qquad P(H_4)=0,6$$

SHu bilan birga

$$P(B/H_3)=\frac{1}{3}; \qquad P(B/H_4)=0$$

Demak,

$$P(B)=P(H_3)\cdot P(B/H_3)+P(H_4)\cdot P(B/H_4)=0,1(3)$$

93. Uchta mergan o‘q otib, nishonga tekkiza olish hodisasining ehtimoli mos ravishda 0.8; 0.9; 0.7 ga teng. Agar har bir mergan bittadan o‘q uzsa, u holda otilgan o‘qdan kamida bittasining nishonga tegish hodisasining ehtimoli topilsin.

94. Imtixonda har bir studentning ijobiy baho olish hodisasining ehtimoli 0.96 ga teng. Imtixon topshirish uchun ketma-ket kelgan uch studentdan kamida bittasining ijobiy baho olish hodisasining ehtimoli topilsin.

95. 1000 so‘mlik 165 ta loteriya bileti chiqarilgan bo‘lib, 5 ta 50 so‘mdan, 10 ta 40 so‘mdan, 100 ta 3 so‘mdan, 50 ta 1 so‘mdan yutuq chiqarilgan. Tasodifiy sotib olingan bitta biletga kamida 3 so‘m yutuq chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

96. A hodisaning ro‘y berish ehtimoli birinchi tajribada 0.2 ga; ikkinchi tajribada 0.5 ga; beshinchi tajribada esa 0.6 ga teng. Tajriba A hodisa ro‘y berguncha davom ettiriladi. Beshinchi tajriba o‘tkazilish hodisasining ehtimoli topilsin.

97. 10000 lotoreya chiqarilgan bo‘lib, 6 ta 7000 so‘mlik, 10 ta 5000 so‘mlik, 10 ta 1000 so‘mlik, 100 ta 2000 so‘mlik yutuq o‘ynalgan. Tasodifiy olingan bitta biletga kamida 1000 so‘m yutuq chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

98. (CHebo‘shev masalasi) Tasodifiy yozilgan kasrning qisqarmas kasr bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

99. SHahardagi marshrut avtobusi markaziy bozordan vokzalgacha 6 ta bekatda to‘xtashi mumkin. Har bir bekatda to‘xtash hodisalari bog‘liqsiz bo‘lib, ularning ehtimolligi 0.9 ga teng. Vokzaldan ikkinchi mikrarayongacha bekatlarda ba’zi sabablarga ko‘ra to‘xtamay ketish hodisasini ehtimolligi 0.08 ga teng.

Avtobusni markaziy bozordan 2-mikrarayon bekatigacha to‘xtatmasdan borish hodisasining ehtimoli topilsin.

100. Qurilma ishdan chiqishi uchun undagi elementning ishdan chiqishi etarli. Elementlarning ishdan chiqish hodisalari erkli bo‘lib, ehtimolliklari mos ravishda 0.3; 0.4; 0.2 ga teng. Qurilmaning ishdan chiqishi hodisasining ehtimoli topilsin.

101. Uch studentning kundalik berilgan vazifasini bajarib kelish hodisasi ehtimollari mos ravishda 0,9; 0,8; 0,85 ga teng. Kamida bitta studentning vazifani bajarib kelish hodisasining ehtimoli topilsin.

102. Qopda n dona oliy sort, m dona birinchi sort, l dona ikkinchi sort pilla bor. Ketma-ket bittadan pilla tasodifiy olinadi va qaytadan qo‘yilmaydi. Ketma-ket olingan pilla ichida birinchi sortdan oldin oliy sort pilla chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

103. 2 kishi navbat bilan 2 ta tasodifiy sonlar jadvalidan bittadan sonni ketma-ket tasodifiy ravishda tub son chiqqunga qadar olyapti. Birinchi va ikkinchi kishining tasodifiy olgan soni tub son ekanlik ehtimoli 0,1 va 0,15 ga teng. Birinchi tub son ikkinchi kishiga chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

104. Paxta terish mashinalari parkida 8 ta to‘rt qatorli, 3 ta 6 qatorli mashina bor. To‘rt qatorli paxta terish mashinasining bir sutka ishlash davomida ishdan chiqish hodisasining ehtimoli 0,09 ga, 6 qatorli mashinaniki esa 0, 15 ga teng. Mexanizator tasodifiy tanlagan bitta mashinaning bir sutkada ishdan chiqmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

105. Studentning bir xil qiyinlikdagi 5 ta misoldan kamida bittasini yechish ehtimoli 0,98 ga teng. Uning 5 ta misoldan ixtiyoriy olingan bittasini yechish hodisasining ehtimoli topilsin.

106. YAshikka 100 ta nok 50 ta olma aralashtirib terilgan. Tasodifiy ravishda ketma–ket ikkita meva olinib ularning ikkalasi ham olma bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

107. 36 donali kartadan tasodifiy ikkita karta ketma-ket olinadi. Birinchi karta valet, ikkinchisi dama chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

108. Birinchi yashikda 8 ta olma, 3 ta nok, ikkinchi yashikda 6 ta olma va 3 ta nok bor. Ikkala yashikning birini tasodifiy olamiz va undan tasodifan bitta olgan mevamiz olma bo‘lsa, uning ikkinchi yashikdan chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

109. Har birida 15 tadan brigadasi bo‘lgan 3 ta ferma xo‘jaligi bor. Birinchi f-x.da hamma brigadalar, ikkinchi f-x.da 10 ta, uchinchi sh-x.da 5 ta brigada paxta planini bajarganligi ma’lum. 45 brigadadan bittasi tasodifiy tanlandi, yana qaytarilgandan so‘ng o‘sha f-x.da yana bir brigada tanlandi. Agar ikkala brigada paxta etishtirish planini bajarganligi ma’lum bo‘lsa, u holda bu brigadalarning uchinchi f-xdan bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

110. To‘rt abiturient matematikadan yozma imtixon topshirmokda, har bir abiturientga birinchi variantning to‘g‘ri kelish hodisasi ehtimoli 0.25 ga teng bo‘lib, bu variantni faqat bittasi oladi, u holda qolgan abiturientga boshqa variantlar tegadi. Bu abiturientlarning birinchi variantni to‘la yecha olish ehtimollari mos ravishda 0.7; 0.8; 0.9; 0.6 ga teng. SHu to‘rt abiturientning

shifrlangan ishlarini tekshirish natijasida bitta birinchi variantli yozma ishi to‘la bajarilganligi ma’lum bo‘ldi. Bu yozma ishni uchinchi abiturient yozganligi hodisasining ehtimoli topilsin.

111. Agar A hodisa B hodisani ergashtirsa, u holda $P(B) \geq P(A)$ bo‘lishi isbotlansin.

112. $A \cap B$ hodisaning ro‘y berishi albatta C hodisaning ro‘y berishiga olib keladi. $P(A)+P(B)-P(C) \leq 1$ bo‘lishi isbotlansin.

113. Agar $P(A) > 0$ bajarilsa, u holda $P(B/A) \geq 1 - \dfrac{P(B)}{P(A)}$ tengsizlik isbotlansin.

114. $A_1,\ A_2,\ A_3 \subset A$ hodisalar uchun $P(A) \geq P(A_1)+P(A_2)+(A_3)-2$ bo‘lishi isbotlansin.

115. $P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_1\right) = 1 - P\left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}\right)$ tenglik isbotlansin.

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslікlar va o‘quv qo‘llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

2.A.A.Abdushuкurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan misol va masalalar to‘plami» Toshкent, «Universitet», 2003 y.

3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan masalalar to’plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

Asosiy matn

Erkli tajribalar (sinovlar) ketma-ketligi

Bernulli sxemasi

Agar tajribalar o‘tkazilayotgan bo‘lib, ularning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli qolgan sinovlarning natijalariga bog‘liq bo‘lmasa, u holda bunday sinovlar A hodisaga nisbatan erkli deyiladi.

Har birida hodisaning ro‘y berish ehtimolligi $P(0 < p < 1)$ ga teng bo‘lgan n ta erkli tajribada A hodisaning rosa m marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_n(m) = C_n^m \cdot P^m \cdot q^{n-m}$$

ga teng, bu erda $p+q=1$.

n ta erkli tajribada A hodisaning kamida m marta ro‘y berish ehtimoli

$$P_{n,m} = \sum_{k=m}^{n} P_n(k)$$

ga teng.

A hodisaning n ta erkli tajribada k_0 marta ro‘y berish ehtimoli sinovlarining boshqa mumkin bo‘lgan natijalari ehtimolidan kichik bo‘lmasa, u holda k_0 son A hodisaning eng katta ehtimoli n son deyiladi. k_0 son ushbu tengsizlikdan aniqlanadi $np - q \le k_0 \le np + p$.

Xususan, np-q kasr son bo‘lsa, $k_0 = [np + p]$ aks holda ikkita eng katta ehtimolli son $k_0^1,\ k_0^{11}$ mavjud bo‘lib,

$k_0^1 = np - q, \quad k_0^{11} = np - q + 1$

Xususan, np butun son bo‘lsa, u holda $k_0 = np$.

Masalalar

116. Teng kuchli 2 raqib shaxmat o‘ynamokda. Birinchi o‘yinchini 6 partiyadan to‘rttasini yutish ehtimoli ko‘pmi yoki 12 partiyadan 8 tasimi?

Yechish. Bernulli sxemasiga ko‘ra olti partiyadan to‘rttasini yutish ehtimoli:

$$P_6(4) = C_6^4 \cdot \frac{1}{2^6} = \frac{6!}{4!2!} \cdot \frac{1}{2^6} = 0.2343$$

O‘n ikki partiyadan sakkiztasini yutish ehtimoli esa

$$P_6(4) = > P_{12}(8)$$

Demak,

$$P_6(4) > P_{12}(8)$$

117. Oilada 8 farzand bor. Qiz bola tug‘ilish ehtimoli 0.48 bo‘lsa, 8 farzanddan kamida 3 tasi o‘g‘il bola bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. Bernulli formulasiga ko‘ra:

$$P_{1,3} = \sum_{k=3}^{8} C_8^k (0.52)^k \cdot (0.48)^{8-k} = 0.7809$$

118. Traktor parki 8 ta xo‘jalik uchun xizmat qiladi. Har bir xo‘jalikdan keladigan talablar erkli va bu talablarning ehtimoli 0,6 ga teng. Eng katta ehtimolga ega bo‘lgan kuniga talab soni topilsin.

Yechish. $n = 8, \quad p = 0.6 \quad np - q \ = 4.4$

Demak, eng katta ehtimolga ega bo‘lgan talablar soni $k_0 = 5$.

119. Paxta punkitiga 34 ta mashinada olib kelingan paxtaning sortini aniqlash lozim. Olib kelingan har bir mashinadagi paxtani oliy sort deb tan olinish ehtimoli 0.4 ga teng. Keltirilgan paxta oliy ort deb topilishi mumkin bo‘lgan mashinalarning eng katta ehtimolli soni topilsin.

Yechish. SHartga ko‘ra $n = 34, \quad p = 0.4, \quad q = 0.6$.

Demak, $np - q = 13, \quad np + p = 14$. SHuning uchun $k_0^1 = 13, \quad k_0^{11} = 14$

120. Erkli sinovda kuzatilayotgan hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0,8 ga teng. Bu kuzatilayotgan hodisaning eng katta ehtimolli soni 12 ga teng bo‘lishi uchun nechta sinov o‘tkazilishi lozim?

Yechish. SHartga ko‘ra: $k_0 = 12;\ \ p = 0.8;\ \ q = 0.2$ U holda $0.8n - 0.2 \le 12 \le 0.8n + 0.8$. Demak, $n = 15$.

121. Navini aniqlash uchun 100 ta pilla tasodifiy ajratib olindi. Agar eng katta ehtimollik oliy navli pillalar soni 90 ga teng bo‘lsa oliy navli pillalar soni ehtimoli qanday bo‘ladi?

Yechish: $n = 100,\ \ k_0 = 90$, u holda $np - q \le k_0 \le np + p$ ga asosan

$$100p - 1 + p \le 90 \le 100p + p,\ \ 0.8911 \le p \le 0.9010$$

122. Gruppada 15 student bor. Har bir studentning doskaga chiqarish hodisasining ehtimoli 0,1 ga teng. Ulardan uch studentning doskaga chiqarilish hodisasining ehtimoli topilsin.

123. Gruppada 10 student bo‘lib, tasodifiy ajratilgan studentning tug‘ilgan kuni 365 kunning ixtiyoriy kuni bo‘lish hodisasining ehtimoli 1/365 ga teng bo‘lsin. Tasodifiy ajratilgan 2 ta studentning tug‘ilgan kuni birinchi sentyabrga to‘g‘ri kelish hodisasining ehtimoli topilsin.

124. Paxta terish mashinasining kamida 3 ta agregati ishdan chiqsa, mexanik xaydovchi ishni to‘xtatadi. Har bir agregatning ishdan chiqish hodisasini ehtimoli 0,3 ga teng. Olti agregatli mashinaning ishdan chiqish hodisasi ehtimoli topilsin.

125 Bir vaqtda ishlatila boshlagan ikkita yozuv mashinkasidan har birining bir yilgacha buzilmaslik hodisasining ehtimoli 0,8 ga teng. Bir yil ichida kamida bitta yozuv mashinkasining buzilmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

126. Studentlarning yangi yil kechasida lotoreya o‘yini tashkil qilingan bo‘lib, har bir lotoreya biletiga yutuq chiqish hodisasining ehtimoli 0,90 ga teng. Sotib olingan 8 ta biletdan: a) kamida bittasiga, b) ko‘pi bilan 6 tasiga yutuq chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

127. Mergan nishonga o‘q uzmoqda. Har bir uzilgan o‘qning nishonga tegish ehtimoli 0,72 ga teng bo‘lsin. 4 ta o‘qdan kamida bittasining nishonga tegish hodisasining ehtimoli topilsin.

128. Lampa zavodida ishlab chiqarilayotgan har bir lampochkalarning ishga yaroqsizlik ehtimoli - ga teng bo‘lsin. Kuzatishda, agar ishga yaroqsiz lampochka borligi ma’lum bo‘lsa, tekshirilayotgan lampochkaning ishga yaroqsiz bo‘lish ehtimoli - ga teng. Tekshirish uchun zavodda ishlab chiqarilgan lampochkalardan tasodifan n ta ajratib olinadi.

a) barcha lampochkalarni ishga yaroqlilik,

b) fakat 3 tasi ishga yaroqsiz,

v) kamida 2 tasi ishga yaroqsiz bo‘lish hodisasi ehtimoli topilsin.

129. Xalatda 6 dona qizil, oq, sariq va ko‘k shar mavjud bo‘lib, tasodifiy olingan sharning qizil, oq, sariq, ko‘k chiqish hodisasining ehtimoli mos ravishda 0,2; 0,3; 0,4; 0,1 ga teng.

A) xaltada kamida 4 ta qizil shar;

B) ko‘pi bilan 5 ta oq shar;

V) rosa ikkita ko‘k shar bo‘lishi hodisalari ehtimoli topilsin;

130. AV kesmani S nuqta orqali 3:2 kabi nisbatda bo‘lingan. Bu kesmaga tavakkaliga 3 ta nuqta tashlangan. Bu nuqtalardan ikkatisining S dan chapga, uchinchisining S dan o‘ngga tutish hodisasining ehtimoli topilsin. Nuqtaning kesmaga tutish ehtimoli kesmaning uzunligiga proporsional bo‘lib, uning joylashishiga esa bog‘liq emas.

131. Basketbol halqasiga 4 ta sportchi o‘zaro bog‘liqsiz to‘p tashlamoqda. Bu sportchilar tashlagan to‘plarning halqaga tushish ehtimoli mos ravishda 0,6; 0,3; 0,3; 0,3 ga teng. n ta otilgan to‘pdan m tasi halqaga tushdi. quyidagi hollar uchun tashlangan to‘pning birinchi sportchi tashlaganlik ehtimoli topilsin.

1) nq4, mq1, 2) nq3, mq2. 3) nq1, mq1. 4) nq1, mq0.

132. Ikki mergan o‘q uzmoqda. Birinchi va ikkinchi merganlarning nishonga tekkiza olish ehtimoli mos ravishda x va β ga teng. Mergan n ta o‘q uzib, m marta nishonga tekkiza oldi. Uzilgan o‘qlarning birinchi merganga tegishli bo‘lish ehtimoli ikkinchi merganga qaraganda katta ehtimolga ega bo‘lishi uchun m nisbat qanday bo‘lishi kerak?

133. Gruppadagi 25 studentdan har birining imtihon topshira olish hodisasining ehtimoli 0,95 ga teng. Imtihon topshira olishi mumkin bo‘lgan studentlarning eng katta ehtimolli soni topilsin.

134. Punktdagi paxta terish mashinalarning ishga yaroqli chiqish hodisasining ehtimoli 0,93 ga teng. Mexanik 15 ta paxta paxta terish mashinasini ko‘zdan kechirmoqda. Ishga yaroqsiz mashinalarning eng katta ehtimolli soni topilsin.

135. Ishlab chiqarilayotgan lampochkalarning 95 %i ishga yaroqlidir. Tasodifiy olingan 100 ta lampochka ichida ishga yaroqsiz lampochkalarning eng katta ehtimolli soni topilsin.

136. Bir maktabdan viloyat matematika olimpiadasiga matimatika fanidan ikki o‘quvchi qatnashdi. Bu o‘quvchilarning har birining olimpiada masalalarining har birini yecha olmaslik hodisasining ehtimoli mos ravishda 0,2 va 0,5 ga teng. Ikkala o‘quvchining 10 ta masaladan birortasini ham yecha olmaslik hodisasining eng katta ehtimolli soni topilsin.

137. Agar 35 ta erkli sinovda hodisa ro‘y berishining eng katta ehtimolli soni 18 ga teng bo‘lsa, sinovlarni har birida hodisaning ro‘y berish ehtimoli topilsin.

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslікlar va o‘quv qo‘llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

2.A.A.Abdushuкurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan misol va masalalar to‘plami» Toshкent, «Universitet», 2003 y.

3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan masalalar to’plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

Asosiy matn

. **Mauvr-Laplas va Puasson teoremalari.**

Agar n ta erkli tajribaning har birida A hodisaning ro‘y berish ehtimoli $P(0<p<1)$ o‘zgarmas bo‘lsa, u holda m ning ushbu

$$\frac{|m-np|}{\sqrt{npq}}<C$$

(s-o‘zgarmas son) shartni qanoatlantiruvchi barcha qiymatlari uchun A hodisaning m marta ro‘y berish ehtimoli $P_n(m)$ uchun $n\to\infty$ da

$$P_n(m)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi npq}}\cdot\ell^{-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{m-np}{\sqrt{npq}}\right)^2}$$

asimptotik formula o‘rinlidir.

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ell^{-\frac{x^2}{2}},x=\frac{m-np}{\sqrt{npq}}$$

funksiya uchun $0\le x\le 4$ larda jadval (1-ilova) keltirilgan, $\varphi(-x)=\varphi(x)$ bo‘lgani uchun bu jadval $|x|<4$ da o‘rinlidir.

$|x|>4$ da esa $\varphi(x)$ nol deb qabul qilinadi. Bu sxemada n ta erkli tajribada A hodisaning m_1 dan kam bo‘lmagan va m_2 dan ko‘p bo‘lmagan sonlar orasida ro‘y berish ehtimoli uchun

$$P_n(m_1,m_2)\approx\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{x_1}^{x_2}\ell^{-\frac{x^2}{2}}dx=\phi(x_2)-\phi(x_1) \qquad (2)$$

formula o‘rinlidir, bu erda

$$x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\ x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}},\ \varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x\ell^{\frac{x^e}{2}}dx$$

$\varphi(x)$ ifoda uchun $0\le x\le 5$ qiymatlarda maxsus jadval tuzilgan (2-ilova). $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ ligini e’tiborga olinsa, bu jadval $|x|\le 5$ uchun o‘rinlidir. $|x|>5$ uchun $\phi(x)\approx 0.5$ deb qabul qilinadi.

(1) va (2) formulalar mos ravishda Muavr-Laplasning lokal va integral teoremasi deyiladi.

Quyidagi hodisalar seriyasini qaraymiz.

E_{11}

E_{12},E_{22}

……………

$E_{1n},E_{2n},\dots,E_{nn}.$

Qaralayotgan har bir seriyadagi hodisalar o‘zaro erkli, har birining ro‘y berish ehtimoli P_n ro‘y bermaslik ehtimoli $q_n=1-P_n$ bo‘lsin, bunda n- seriya nomeri, n- seriyadagi n ta hodisa m tasining ro‘y berish ehtimolini $P_n(m)$ bilan belgilaymiz.

Agar $n\to\infty$ da $P_n\to 0$ bajarilsa, u holda

$$P_n(m)-\frac{(np_n)^m}{m}\ell^{-np_n}\to 0 \qquad (3)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

(3) Puasson fomulasi deyiladi va bu funksiya uchun maxsus jadval keltirilgan (3-ilova).

Masalalar

138. Omborga keltirilgan olmalarning har biriga qurt tushmaslik ehtimolligi 0,85 ga teng. Tasodifan olingan 50 000 olmadan 7500 tasiga qurt tushishning ehtimoli topilsin.

Yechish. SHartga asosan nq50 000, mq7500, pq0.15, qq0,85, u holda

$$x=\frac{7500-50000\cdot 0{,}15}{\sqrt{50000\cdot 0{,}85\cdot 0{,}15}}$$

formulaga asosan:

$$P_{50000}^{(7500)}\approx\frac{1}{79{,}84}\cdot\varphi(0)$$

1-ilovadagi jadvalga ko‘ra $\varphi(0)=0{,}3989$. natijada

$$P_{50000}^{(7500)}\approx 0{,}005$$

139. Agar qiz bola tug‘ilish ehtimoli 0,48 ga teng bo‘lsa, u holda 105 ta yangi tug‘ilgan chaqaloqdan rosa 50 tasining qiz bola bo‘lish hodisasi ehtimoli topilsin.

Yechish. SHartga ko‘ra $n=105$; pq0,48; mq50. U holda

$$x=\frac{50-105\cdot 0{,}48}{\sqrt{105\cdot 0{,}48\cdot 0{,}52}}=-0{,}07814$$

1-ilovadagi jadvalga asosan va $\varphi(x)$ ning juftligidan

$$\varphi(-0{,}07814)\approx 0{,}3979$$

Natijada $$P_{105}(50)\approx\frac{\varphi(0{,}0781)}{5{,}119}=0{,}0777$$

140. SHoshqoltoshni 100 marta 0,065 ehtimoli bilan juft raqamli yoqlar necha marta tushishi mumkin?

Yechish. SHartga ko‘ra nq100, P_{100} (m)q0,065. SHoshqoltoshning juft raqamli yoqlari (2, 4, 6) tushish hodisasi bilan, toq raqamli yoqlarning (1, 3, 5) tushish hodisasi teng imkoniyatli bo‘lgani uchun bu ehtimol pq0,5 ga tengdir. U holda

$$\frac{\varphi(x)}{\sqrt{100\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5}}=0{,}065$$

tenglikdan $\varphi(x)=0{,}325$ 1-ilovadagi jadvalga ko‘ra xq0,64.

Natijada

$$\frac{m-100\cdot 0{,}5}{5}=0{,}64 \text{ yoki } \quad 47\le m\le 53$$

141. Student ko‘chada o‘z o‘qituvchilarini uchratish hodisasining ehtimoli 0,001 ga teng. Ko‘chada tasodifiy uchragan 1000 odamdan ko‘pi bilan 2 tasi studentning o‘qituvchisi chiqishi hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. SHartga ko‘ra Pq0,001; nq1000; mq0,1,2.

$$P_{1000}(0)=\frac{1}{\sqrt{1000\cdot 0{,}001\cdot 0{,}999}}\cdot\varphi\left(\frac{-1000\cdot 0{,}001}{\sqrt{1000\cdot 0{,}001\cdot 0{,}999}}\right)=0{,}2422$$

$$P_{1000}(1)\approx\frac{4(0)}{0{,}999}=0{,}3992,\quad P_{1000}(2)\approx\frac{\varphi(1{,}001)}{0{,}999}=0{,}2422.$$

$$P_{1000}(0)+P_{1000}(1)+P_{1000}(2)\approx 0{,}8837$$

142. Pilla qabul qilish punktida har bir pillaning oliy nav chiqish hodisasi ehtimoli 0,83 ga teng. Ajratib olingan 1000 ta pilla orasida oliy nav pillalar soni 800 dan 900 gacha oraliqda bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. SHartga ko‘ra $n=1000; m_1=800; m_2=900; p=0{,}83; q=0{,}17;$ u holda

$$x_1=\frac{800-1000\cdot 0{,}83}{\sqrt{1000\cdot 0{,}83\cdot 0{,}17}}=-2{,}526,\quad x_2=\frac{900-1000\cdot 0{,}83}{\sqrt{1000\cdot 0{,}83\cdot 0{,}17}}=5{,}893.$$

x_1, x_2 ning qiymatlarini (2) ga qo‘ysak

$$P_{1000}(800{,}900)\approx\varphi(5{,}893)-\varphi(-2{,}526.)$$

2- ilovadagi jadvalga ko‘ra:

$$P_{1000}(800{,}900)\approx 0{,}994$$

143. Pilla qabul qilish punktida har bir pillani oliy navga qabul qilishning ehtimoli 0,78 ga teng. Tekshirish uchun olib kelingan pilladan oliy nav pillalar soni 500 tadan kam bo‘lmasilik ehtimoli 0,95 ga teng bo‘lishi uchun nechta pilla olish kerak?

Yechish. SHartga ko‘ra $p=0{,}78; q=0{,}22; m_1=500; m_2=n$

$$P_n(75,n)=0{,}95.$$

u holda

$$P_n(75,n)\approx\varphi\left(\frac{n-0{,}78n}{\sqrt{n\cdot 0{,}78\cdot 0{,}22}}\right)-\varphi\left(\frac{500-0{,}78n}{\sqrt{n\cdot 0{,}78\cdot 0{,}22}}\right)=0{,}95.$$

$$\varphi\left(0{,}531\cdot\sqrt{n}\right)-\varphi\left(\frac{500-0{,}78n}{0{,}414\sqrt{n}}\right)=0{,}95.$$

Ma’lumki, n>500, demak

$$0{,}53\sqrt{n}>0{,}531\cdot 22{,}36=11{,}87$$

$\varphi(\cdot)$ funksiyaning o‘suvchanligini e’tiborga olsak,

$$\varphi\left(0{,}531\cdot\sqrt{n}\right)\approx\varphi(11{,}87)\approx 0{,}500.$$

Natijada

$$0{,}95=0{,}500-\varphi\left(\frac{500-0{,}78n}{0{,}414\sqrt{n}}\right)$$

yoki

$$\varphi\left(\frac{500-0{,}78n}{0{,}414\sqrt{n}}\right)\approx -0{,}45.$$

2-ilovadagi jadvalga asosan $\varphi(1{,}645)=0{,}45$. Demak,

$$\frac{500-0,78n}{0,414\sqrt{n}}=-1,645$$

YOki $0,78n-0,68\sqrt{n}-500=0;$

$$\left(\sqrt{n}\right)_{1,2}=\frac{0,681\pm 39,50}{1,56};\ \sqrt{n}=25,757;\ n_1=663.$$

144. Merganning nishonga tekkiza olmaslik ehtimoli 0,01 ga teng. Otilgan 50 ta o‘qdan 3 tasining nishonga tegmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

Yechish. SHartga ko‘ra $P_n=0,01$ bo‘lgani uchun Puasson teoremasini qo‘llaymiz: $n=50, m=3$ bo‘lgani uchun $\lambda=np_n=0,5$.

Natijada

$$P_{50}(3)=\frac{(0,5)^3\cdot}{3!}\ell^{-0,5}$$

3-ilovadagi jadvalga ko‘ra

$$P^{50}(3)\approx 0,01263$$

145. Ekiladigan chigitning unib chiqmaslik ehtimoli 0,002 ga teng. Ekilgan 500 ta chigitdan 0,368 ehtimoliik bilan nechta chigit unib chiqmasligi mumkin?

Yechish. SHartga ko‘ra

$$n=500;\ p=0,002;\ \ P_{500}(m)\approx 0,368$$

Natijada $\lambda=500\cdot 0,002=1$.

3-ilovadagi jadvalga ko‘ra $P_{500}(m)=0,368,\ \lambda=1$ bo‘lgan holda $m=0$ yoki $m=1$.

146. Byuffon tangani 4000 marta tashlagandan gerbli tomon 2048 marta tushgani ma’qul. Bu natija qanday ehtimol bilan ro‘y berishi mumkin edi?

147.Pirson tangani 12 000 marta tashlab, gerb tomon tushishi nisbiy chastotasining 0,5016 ga tengligini ko‘rsatadi. Ketma-ket tajriba o‘tkazish natijasida shu chastotaga ega bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

148. Ikki kishi 3 ta shoshqoltoshni navbat bilan tashlamoqda.Birinchi kishi 15 marta tashlaganda ikki marta 11 ochko tushish hodisasining ehtimoli ko‘pmi, yoki ikkinchi kishi 10 marta tashlaganda 3 marta 10 ochko tushish hodisasining ehtimolimi?

149. Abiturientlardan har birining imtihon topshira olish hodisasining ehtimoli 0,95 ga teng. 450 abiturientdan nechtasi 0,049 ehtimol bilan imtihon topshira oladi?

150. Viloyatdagi har bir jamoa ho‘jaligining paxta rejasi 110 % dan oshirib bajarish hodisasining ehtimoli 0,90 ga teng. 110 jamoa ho‘jaligi paxta plani 110 % dan oshirib bajargan fermerlar soni 100 bilan 106 orasida bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

151. Paxta punktiga 4 jamoa xo‘jaligi paxta topshiradi, punktdagi paxtaning 23%i birinchi jamoaga, 26 %i ikkinchi fermerga, 28%i uchinchi jamoa xo‘jaligiga, 23%i to‘rtinchi jamoa xo‘jaligiga tegishlidir. Agar bu fermerlar topshirgan paxtalarning mos ravishda 60, 70, 65, 80t oliy navli bo‘lsa, u holda punktdagi tasodifiy

ajratilgan 300t paxta ichida oliy navli paxta 200t bilan 260t orasida bo‘lish hodisasi ehtimoli topilsin.

152. Fakultetdagi studentlarning 60%i qiz bolalar bo‘lib, ulardan har birining imtixon topshira olish ehtimoli 0,32 ga, o‘g‘il bolalarning har birining imtihon topshira olish ehtimoli esa 0,97 ga teng bo‘lsin. U holda 200 studentdan imtixon topshira oladigan studentlar soni 180 bilan 195 orasida bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

153. SHoshqoltoshni 1000 marta tashlaganda 5 ochko tushish soni 160 bilan 170 orasida bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin.

154. A hodisaning bog‘liqsiz tajribalar ketma-ketligida ro‘y berish ehtimoli 0,80 ga teng. A hodisasi 0,35 ehtimol bilan kamida 100 marta ro‘y berishi uchun nechta tajriba o‘tkazish kerak?

155. Studentning imtihon topshira olmaslik ehtimoli 0,005 ga teng. 100 student ko‘pi bilan 3 studentning imtihon topshira olmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

156. Tasodifiy tanlangan 200 kishidan 3 kishining 8 martda tug‘ilgan bo‘lish hodisasining ehtimoli topilsin. Ixtiyoriy olingan kishi teng ehtimol bilan 365 kunning ixtiyoriy bittasida tug‘ilgan deb faraz qilinadi.

157. 1000 dona pilla ichida 10 donasi past nav bo‘lsa, tasodifiy olingan 100 dona pilla ichida 2 dona past nav chiqish hodisasining ehtimoli topilsin.

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslикlar va o‘quv qo‘llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

2.A.A.Abdushuкurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan misol va masalalar to‘plami» Toshкent, «Universitet», 2003 y.

3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan masalalar to’plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

Asosiy matn

Erkli sinovlarda nisbiy chastotaning o‘zgarmas ehtimoldan chetlanishi.

Har bir bog‘liqsiz tajribada A hodisasining nisbiy chastotasi $\frac{m}{n}$ ning o‘zgarmas p ehtimoldan chetlanishining absolyut qiymat bo‘yicha α sondan oshmaslik ehtimoli ushbu formulaga ko‘ra topiladi:

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\alpha\right\}=2\phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

Agar

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-p\right|<\alpha\right\}\geq\beta$$

Tengsizlik berilgan bo‘lib, n yoki α noma’lum bo‘lsa, u holda

$$2\phi\left(\alpha\sqrt{\frac{n}{pq}}\right)\geq\beta$$

Formula go’llaniladi.

Masalalar

158. Ekilgan 1000 dona chigitdan har birining unib chiqish ehtimoli 0,85 ge teng. CHigit unib chiqishi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut kattaligining 0,02 dan ortiq bo‘lmaslik ehtimoli topilsin.

Yechish. SHartga ko‘ra $n=1000; p=0,85;\ q=0,02$ u holda

$$P\left\{\left|\frac{m-0,85}{1000}\right|<0,02\right\}=2\phi\left(0,02\cdot\sqrt{\frac{1000}{0,85\cdot 0,15}}\right)=2\phi(1,7712)$$

2-ilovadagi jadvalga ko‘ra

$$2\phi(1,7712)=2\cdot 0,4616=0,9232$$

159. Har bir pillaning oliy nav chiqish hodisasining ehtimoli 0,89 ga teng bo‘lsin. Navni aniqlash uchun ajratilgan har bir pillaning oliy navli bo‘lish hodisasi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut kattaligi bo‘yicha 0,01 dan ortiq bo‘lmasligini 0,9566 ehtimoli bilan kutish mumkin bo‘lishi uchun nechta pilla olinishi lozim?

Yechish. SHartga ko‘ra $p=0,83;\alpha=0,01,$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-0,83\right|<0,83\right\}=9566$$

U holda

$$2\phi\left(0,01\sqrt{\frac{n}{0,83\cdot 0,17}}\right)=0,5566$$

YOki

$$\phi\left(0,2662\sqrt{n}\right)=0,4783$$

Natijada, 2-ilovadagi jadvalga ko‘ra

$$0,2662\sqrt{n}=2,02\quad ёки\quad n=5763.$$

160. Ekilgan 500 dona ko‘chatdan har birining ko‘karish ehtimoli 0,90 ga teng. Ekilgan ko‘chatlarning ko‘karish hodisasi nisbiy chastotasi bilan uning ehtimoli orasidagi ayirma absolyut qiymatining α dan oshib ketmaslik hodisasi ehtimoli 0,9954 ga teng bo‘lgan holda α topilsin.

Yechish. SHartga ko‘ra $n=500;\ p=0,90;$

$$P\left\{\left|\frac{m}{500}-0,900\right|<\alpha\right\}=0,9954.$$

U holda

$$2\cdot\phi\left(\alpha\sqrt{\frac{500}{0,90\cdot 0,10}}\right)=0,9954.$$

YOki

$$2\ \phi(74,536\cdot\alpha)=0,4977.$$

2-ilovadagi jadvalga ko‘ra

$$74,536\alpha=2,84;\quad \alpha=0,0381.$$

161. Kursdagi 105 studentning imtihon topshira olish hodisasining nisbiy chastotasi bilan uning ehtimoli orasidagi ayirmaning absolyut qiymati 0,01 dan oshmaslik hodisasining ehtimoli 0,8882 ga teng bo‘lishi uchun har bir studentning imtihon topshira olish ehtimoli qanday bo‘lishi kerak?

Yechish. SHartga ko‘ra $n=105;\ \alpha=0,01$.

$$P\left\{\left|\frac{m}{105}-p\right|<0,01\right\}=0,8882.$$

U holda

$$2\phi\left(0,01\cdot\sqrt{\frac{105}{pq}}\right)=0,8882.$$

YOki
$$\phi\left(0,01\cdot\sqrt{\frac{105}{pq}}\right)=0,4441$$

2-ilovadagi jadvalga ko‘ra

$$0,01\cdot\sqrt{\frac{105}{pq}}=1,59.$$

Demak,

$$p^2+p+0,00415=0;$$

Bundan

$$p=0,9958.$$

162. Bir vaqtda remont qilingan paxta terish mashinalaridan har birining terish mavsumida buzilmaslik hodisasining nisbiy chastotasi bilan uning buzilmaslik hodisasining nisbiy chastotasi bilan uning buzilmaslik hodisasi ehtimoli 0,90 orasidagi ayirma absolyut qiymatining 0,02 dan oshmaslik hodisasining ehtimoli bu ayirmaning 0,02 dan katta bo‘lish hodisasi ehtimolidan kichik bo‘lmasligi uchun nechta paxta terish mashinasini ishga tayyorlash lozim?

Yechish. SHartga ko‘ra $\alpha=0,02,\ p=0,90;$

$$P\left\{\left|\frac{m}{n}-0,90\right|\le 0,02\right\}\ge P\left\{\left|\frac{m}{n}-0,90\right|>0,02\right\}$$

Lekin

$$2\cdot\phi\left(0,02\cdot\sqrt{\frac{n}{0,90\cdot 0,10}}\ge 1-\phi\left(0,02\cdot\sqrt{\frac{n}{0,90\cdot 0,10}}\right)\right)$$

Demak,

$$\phi\left(0{,}02\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}90\cdot 0{,}10}}\right)\geq 0{,}25.$$

U holda 2-ilovadagi jadvalga ko‘ra va $\phi(x)$ ning o‘suvchiligini e’tiborga olib,

$$0{,}02\cdot\sqrt{\frac{n}{0{,}90\cdot 0{,}10}}\geq 0{,}6745$$

ni hosil qilamiz. Bundan $n\geq 103$.

163. (Byuffon tajribasi). Tangani 4040 marta tashlaganda «gerbli» tomon tushish nisbiy chastotasi bilan uning ehtimoli orasidagi ayirmaning absolyut qiymati 0,0085 dan ortiq bo‘lmaslik hodisasining ehtimoli topilsin.

164. (Pirson tajribasi). Tangani 12000 marta tashlaganda gerbli tomon tushish hodisasi nisbiy chastotasining uning ehtimolidan chetlanishi absolyut kattaligi bo‘yicha 0,00685 dan ortiq bo‘lmaslik ehtimoli topilsin.

165. Tajriba shoshqoltoshni tashlashdan iborat bo‘lsin. SHoshqoltoshni ketma-ket tashlanganda juft ochkoli yoqlarning tushish hodisasining nisbiy chastotasi uning ro‘y berish ehtimoli orasidagi ayirmaning absolyut qiymati 0,15 dan kichik bo‘lish hodisasining ehtimoli 0,5 dan kichik bo‘lmasligi uchun shoshqoltoshni necha marta tashlash lozim?

Ekiladigan chigitning unuvchanlik nisbiy chastotasi bilan unib chiqish hodisasi ehtimoli 0,91 orasidagi farqning absolyut qiymati 0,03 dan oshmaslik ehtimoli 0,9216 dan kichik bo‘lmasligi

166. uchun necha dona chigit ekish lozim?

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslікlar va o‘quv qo‘llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

2.A.A.Abdushuкurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan misol va masalalar to‘plami» Toshкent, «Universitet», 2003 y.

3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan masalalar to’plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

Asosiy matn

TASODIFIY MIQDORLAR.

Tasodifiy miqdorlar va taqsimot funksiyalari.

Agar ξ tasodifiy miqdor chekli yoki sanoqli sondagi qiymatlarni $P_i = P(\xi = x_i), \sum_{i=1}^{\infty} P_i = 1$ ehtimol bilan qabul qilsa, u holda uni diskret taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Ushbu

$$\xi: \; x_1, x_2 ..., x_n, ...$$
$$P: \; P_1, P_2, ..., P_n, ...$$

Ifoda esa ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deyiladi.

ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi deb, har bir x qiymat uchun ξ tasodifiy miqdorning x dan kichik qiymat qabul qilish ehtimolini aniqlaydigan

$$F_\xi(x) = P(\xi < x)$$

funksiyaga aytiladi.

ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi deb, taqsimot funksiyadan olingan birinchi tartibli hosilaga aytiladi (agar tiqsimot funksiya hosilasi mavjud bo‘lsa):

$$f^1(x) = F_\xi^1(x).$$

Taqsimot funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $0 \le F_\xi(x) \le 1.$
2. $P(a \le \xi \le b) = F_\xi(b) - F_\xi(a)$
3. $\lim\limits_{x \to -\infty} F_\xi(x) = 0, \quad \lim\limits_{x \to +\infty} F_\xi(x) = 1.$
4. $F_\xi(x) - камаювчи\,эмас, чапдан\,узлуксиз.$

Zichlik funksiya quyidagi xossalarga ega:

1. $P(a < \xi < b) = \int_a^\xi f(x)dx.$
2. $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$
3. $f(x) \ge 0.$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$

Masalalar

167. Tajriba tanga tashlashdan iborat bo‘lsin. Ketma-ket uch marta tashlangan tanganing gerbli tomon tushish sonining taqsimot qonuni tuzilsin.

Yechish. ξ orqali gerbli tomon tushish sonini belgilaymiz, demak, ξ, 0, 1, 2, 3, qiymatlarni qabul qiladi. U holda Bernulli formulasiga ko‘ra

$$P(\xi=0)=C_3^0\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8;} \qquad P(\xi=2)=C_3^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8;}$$

$$P(\xi=1)=C_3^1\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{3}{8}; \qquad P(\xi=3)=C_3^3\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

Demak, ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyilagicha bo‘ladi:

$$\xi:\ 0;1;2;3$$

$$P:\ \frac{1}{8};\frac{3}{8};\frac{3}{8};\frac{1}{8}$$

168. Imtihon oluvchi studentga qo‘shimcha savollar bermoqda. Studentning berilgan har qanday savolga javob bera olish ehtimolligi 0,9 ga teng. Student savolga javob bera olmagan zaxoti o‘qituvchi imtihonni tugatadi. O‘qituvchi studentga beradigan qo‘shimcha savollar soning taqsimot qonunini tuzing.

Yechish. Berilgan qo‘shimcha savollar sonini ξ orqali belgilaymiz. ξ quyidagi qiymatlarni qabul qilish mumkin:

1, 2, 3, ...,k,...

Tasodifiy miqdor k qiymatni ushbu holda qabul qiladi: talaba $k-1$ ta savolga javob berib, navbatdagi k - savolga javob bera olmaydi, bu hodisaning ehtimoli $0{,}9^{k-1}\cdot 0{,}1.\ k\geq 1.$

Demak,

$$\begin{array}{lllllll} \xi: & 1 & 2 & 3 & \ldots & k & \ldots \\ P: & 0{,}1 & 0{,}9\cdot 0{,}1 & 0{,}9^2\cdot 0{,}1 & \ldots & 0{,}9^{k-1}\cdot 0{,}1 & \ldots \end{array}$$

169. Ko‘prikni buzish uchun bitta snaryad etarli. Ikkita tupdan navbatma-navbat snaryad otilmokda. Birinchi va ikkinchi to‘plardan otilgan snaryadlarning ko‘prikka tegish hodisalarining ehtimoli mos ravishda 0.6 va 0.3 ga teng. Ikkinchi to‘p otishni boshlagan holda ikkala to‘pdan otilgan snaryadlar sonining taqsimot qonuni tuzilsin.

Yechish. ξ orqali ikkala to‘pdan otilgan snaryadlar sonini belgilaymiz, u holda ξ barcha natural qiymatliklarni qabul qilish mumkin.

$$\begin{array}{llllll} \xi: 1 & 2 & 3\ldots & \ldots & 2k & 2k+1\ldots \\ R: 0{,}3 & 0{,}7*0{,}6 & 0{,}7*0{,}4*0{,}5; & \ldots; & 0{,}7^k*0{,}4^{k-1}*0{,}6; & \ldots \end{array}$$

170. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi ushbu ko‘rinishga ega.

$$F_\xi(x)=\left\{\begin{array}{ll} 0, & x<-3 \\ \frac{4}{13}x+\frac{12}{13}, & -3\leq x<\frac{1}{4} \\ 1, & x\geq 1/4 \end{array}\right.$$

Sinov natijasida ξ miqdorining $]-1;\frac{1}{6}[$ intervalda yotuvchi qiymatlarni qabul qilish ehtimolini toping.

Yechish. SHartga ko‘ra,

$$P(-1 \le \xi < \frac{1}{5}) = F_\xi\left(\frac{1}{5}\right) - F_\xi(-1) = \frac{24}{65}$$

171. ξ tasodifiy miqdor uchun A va V ning qanday qiymatlarida

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & x < -a \\ A + Barctg\dfrac{x}{a}, & -a \le x < a \\ 1, & x > a \end{cases}$$

Funksiya uzluksiz taqsimot funksiya bo'ladi?

Yechish Taqsimot funksining xossasiga ko'ra

$F_\xi(-a) = 0$ va F(a)=1

Demak,

$$\left.\begin{array}{r} A + Barctg\left(\dfrac{-a}{a}\right) = 0 \\ A + Barctg\dfrac{a}{a} = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} A - \dfrac{\pi}{4}B = 0 \\ A + \dfrac{\pi}{4}B = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow A = \frac{1}{2}, B = \frac{2}{\pi}$$

Zichlik funksining xossasiga ko'ra]-a, a[da

$$f(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}arctg\frac{x}{a}\right) = \frac{2a}{\pi(x^2 + a^2)}$$

Bunday tasodifiy miqdor Koshi qonuni bo'yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deb ataladi .

172. ξ tasodifiy miqdor ushbu taqsimot funksiya bilan berilgan:

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < -4 \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin\dfrac{x}{4}, & -4 \le x < 4, \\ 1, & x \ge 4 \end{cases}$$

Sinov natijasida ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini va]-2,2[intervalda yotuvchi qiymatlarni qabul qilish ehtimolligi topilsin.

Yechish. Taqsimot funksiyaning xossasiga ko'ra

$$P(2 \le \xi < 2) = P(\xi < 2) - P(\xi < -2) = F_\xi(2) - F_\xi(-2) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\arcsin(-\frac{1}{2}) = \frac{1}{3}$$

Zichlik funksiyaning ta'rifiga ko'ra

$$f(x) = \frac{dF_\xi(x)}{dx} = \begin{cases} 0, & x < -4 \\ \dfrac{1}{\pi} \bullet \dfrac{1}{\sqrt{16 - x^2}}, & -4 \le x < 4 \\ 0, & x \ge 4 \end{cases}$$

173. Maxsus qurilmaning to'xtovsiz ishlash vaqti 0,5 parametrli eksponensial qonun bo'yicha taqsimlangan bo'lsa, bu qurilmaning $[0,5^{-4}, \infty[$ vaqt ichida buzilmasdan ishlash ehtimoli topilsin.

Yechish. ξ orqali maxsus qurilmaning to‘xtovsiz ishlash vaqtini belgilaymiz. SHartga ko‘ra

$$F_{\xi}(x)=\begin{cases}1-e^{-0,5x,} & x\geq 0,\\ 0 & x>0\end{cases}$$

U holda

$$P(\xi\geq 0,5^{-1})=1-P(\xi<0,5^{-1})=\frac{1}{a}$$

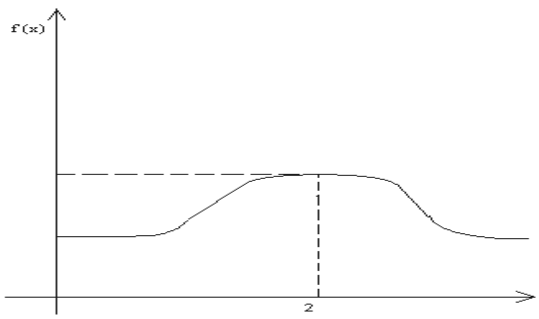
173. (2,16) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

174. $$F_{\xi}(4)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x}e^{-\frac{(t-2)^2}{32}}dt$$

Bu tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi topilsin va grafigi chizilsin.

Yechish. Ta’rifga ko‘r

175. ξ Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x)=\frac{c}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}$, $\alpha>0$



berilgan . S- o‘zgarmas topilsin.

Yechish. Zichlik funksiyaning xossasiga ko‘ra $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}dx=1.$ Demak,

$$\text{S}=\frac{1}{\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}}.$$

Agar $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{e^{\alpha x}+e^{-\alpha x}}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\alpha x}}{1+e^{\alpha x}}dx=\frac{\pi}{2\alpha}$

ligini e’tiborga olsak, $\text{S}=\frac{2\alpha}{\pi}.$

176. Tajriba shoshqoltoshni tashlashdan iborat bo‘lsin. ξ tasodifiy miqdorni qiymati shoshqoltoshning tushgan yoqlaridagi raqamlardan iborat bo‘lsa, uning taqsimot funksiyasi topilsin va grafigi chizilsin.

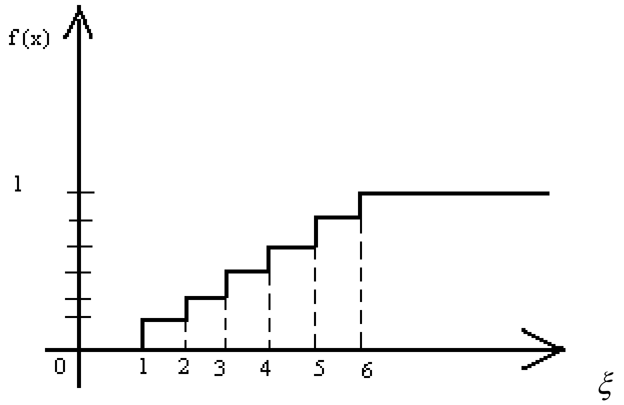
Yechish. SHartga ko‘ra ξ: 1 2 3 4 5 6

$P:\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{6}$

u holda $\text{x}>1$ bo‘lganda $F_{\xi}(x)=0, i\leq x\leq i+1$ da $F_{\xi}(x)=\frac{i}{6}$;

agar $x\geq 6$ bo‘lsa, u holda $F_{\xi}(x)=1$

Demak, $$F_\xi(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ \frac{1}{6}, & 1\le x<2\\ \frac{i}{6}, & i\le x<i+1, i=1,5\\ 1, & x\ge 6\end{cases}$$



Taqsimot funksiyaning grafigi poғonasimon chiziqdan iborat (7-rasm).

177. 1 dan 25 gacha bo‘lgan tub sonlarning taqsimot qonuni tuzilsin .

178. Tanga 4 marta ketma-ket tashlandi. Gerb tomonlar tushish hodisasi taqsimot qonuni tuzilsin.

179. Paketdagi 8 ta olma orasida 3 ta qurtlagan olma bor. Tavakkaliga 4 ta olma ichida qutrlaganlarining taqsimot qonuni topilsin.

180. Mergan nishonga 3 ta o‘qni birinchi marta tekkuncha ketma ket otadi. Har bir o‘qning nishonga tegish ehtimolligi 0,7 ga teng. Otilgan o‘qning nishonga tegishining taqsimot qonuni topilsin.

181. Kitobni o‘qish jarayonida har bir so‘zda xatolik uchrash ehtimoli 0,01 ga teng bo‘lsin.Birnchi hatolik uchraganda kitob o‘qish to‘xtatiladi. O‘qilgan so‘zlarning taqsimot qonuni tuzilsin.

182. Ikki futbolchi darvozabon qo‘riqlayotgan darvozaga to‘p tepmoqda. Tepilgan to‘p darvozaga kiritilganda o‘yin to‘xtatiladi. Birinchi va ikkinchi o‘yinchining darvozaga to‘p kiritish ehtimoli mos ravishda 0,4 va 0,7 ga teng bo‘lsin. O‘yinni birinchi futbol chi boshlagan bo‘lsa, darvozaga tomon tepilgan to‘plar sonining taqsimot qonuni tuzilsin.

183. Traktor parkida remont qilingan 4 ta paxta terish mashinasining har birining mavsum davomida buzilish hodisasining ehtimoli 0,20 ga teng. To‘rttala mashinaning mavsum davomida buzilishlari sonining taqsimot qonuni topilsin.

184. Pilla punktiga keltirilgan pillaning 5% i past sifatlidir. Tavakkaliga olingan 5 dona pilla ichida past sifatli pillalar sonining taqsimot qonuni topilsin.

185. Traktor parkida 9 ta paxta terish mashinasidan 4 tasi chala remont qilingan. Tasodifiy ajratilgan 4 ta paxta terish mashinasidan chala remont qilinganlari sonining taqsimot qonuni tuzilsin.

186. ξ,η o‘zaro erkli bo‘lsin. ξ tasodifiy miqdor 0,1,2 qiymatlarni 0,2; 0,3; 0,5 ehtimol bilan qabul qiladi, η tasodifiy miqdor esa 3; 5; 8 qiymatlarni 0,1; 0,2; 0,7 ehtimollar bilan qabul qiladi. $\xi+\eta$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni tuzilsin.

187. ξ tasodifiy miqdor uchun $F_{\xi}(x)=\begin{cases} 0, & x<3 \\ 4x-12 & 3\le x<\dfrac{13}{4} \\ 1, & x\ge \dfrac{13}{4}. \end{cases}$ berilgan. ξ tasodifiy miqdorning a)3,1 dan kichik qiymatlari b) 3.1 va 3.2 orasidagi qiymatlari v) 3,2 dan katta qiymatlarni qabul qilish ehtimoli topilsin.

188. Agar ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi $F_{\xi}(x)$ bo‘lsa, u holda

a) $\eta=3\xi+4$; b) $\eta=\dfrac{2}{\xi}(P(\xi=0)=0)$; g) $\eta=\cos\xi$

tasdifiy miqdorlarning taqsimot funksiyasi va zichlik funksiyasi topilsin.

189. Maxsus adioapparatning to‘xtovsiz ishlash vaqti λ parametrli eksponensial qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsa, uning zichlik funksiyasi topilsin.

190. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 2\sin 2x, & 0<x\le\dfrac{\pi}{4} \\ 0, & x>\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

bo‘lsa, u holda uning $]0;\frac{\pi}{6}[$ intervalga tegishli qiymatlar qabul qilish ehtimoli topilsin.

191. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $]0;+\infty[$ iintervalda $f(x)=d\cdot e^{-\alpha x}, d>0$

ko‘shrinishga ega. Bu miqdorning $]\frac{1}{2},\frac{3}{2}[$ intervalga tegishli qiymatlar qabul qilish ehtimoli topilsin.

192. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 0, & x<0 \\ 2\cos 2x, & 0\le x<\dfrac{\pi}{4} \\ 0, & x\ge\dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

Bu miqdorning taqsimot funksiyasi topilsin.

193. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{c}{1+a^2x^2}, a>0 \qquad (0,\infty)$$

tenglik bilan berilgan,S o‘zgarmas parametrni topilsin.

194. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

ξ: 3; 5; 7

P: 0,4 ; 0,5; 0,1.

Uning taqsimot funksiyasi topilsin.

195. Tasodifiy uzilgan bitta olmaning qurt tushmaganlik hodisasining ehtimoli 0,9 ga teng bo‘lsa, u holda uzilgan 5 ta olmaning qurt tushmaganliklar sonining taqsimot qonuni topilsin.

196. Ikkita shoshqoltoshni birdaniga tashlaganda 6 ochkolar chiqishining taqsimot funksiyasi topilsin.

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslikar va o‘quv qo‘llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

2.A.A.Abdushukurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misol va masalalar to‘plami» Toshkent, «Universitet», 2003 y.

3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to’plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

Asosiy matn

Tasodifiy miqdorning matematik kutilishi va dispersiyasi.

Diskret tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb,uning mumkin bo‘lgan barcha x_i qiymatlarini bu qiymatlarni mos ehtimollari p_i ga ko‘paytmalarining yiғndisiga aytiladi: $M\xi=\sum_{i=1}^{\infty}p_ix_i$,

Bunda qator absolyut yaqinlashuvchi deb faraz qilinadi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning matematik kutilishi deb, ushbu integralga aytiladi:

$$M\xi=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}xdF_\xi(x),$$

agar bu integral absolyut yaqinlashuvchi bo‘lsa, bu erda $f(x)$ va $F(x)$ tasodifiy miqdorning mos ravishda zichlik va taqsimot funksiyasi.

Umuman, $\eta=\varphi(\xi)$ bo‘lsa, u holda η tasodifiy miqdorning matematik kutilishi:

$$M\eta=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)f_\xi(x)dx.$$

Matematik kutilish quyidagi hossalarga ega:

1.O‘zgarmas miqdorning matematik kutilishi o‘ziga teng:

$$MC=C.$$

2.Tasodifiy miqdorlar yiғindisining matematik kutilishi qo‘shiluvchilarning maematik kutilishlari yiғindisiga teng:

$$M(\xi_{1+}\xi_2+...+\xi_n)=M\xi_1+M\xi_2+...+M\xi_n.$$

Agar $F_{\xi,\eta}(x,y)=F_\xi(x)F_\eta(y)$tenglik bajarilsa, u holda ξ va η tasodifiy miqdorlar o‘zaro boғliqmas deb ataladi.

O‘zaro boғliqmas tasodifiy miqdorlar ko‘paytmasining matematik kutilishi ko‘paytuvchilarning matematik kutilishlari ko‘paytmasiga teng:

$$M(\xi_1\cdot\xi_2\cdot...\cdot\xi_n)=M\xi_1\cdot M\xi_2\cdot...\cdot M\xi_n$$

ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi $D\xi$ deb, $\eta=(\xi-M\xi)^2$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishiga aytiladi:

$$D\xi=M\eta=M(\xi-M\xi)^2.$$

Bevosita tekshirish mumkinki,

$$D\xi=M\xi^2-(M\xi)^2.$$

Demak, tasodifiy miqdor diskret bo‘lsa,u holda

$$D\xi=\sum_{i-1}^{\infty}x_i^2p_i-\left(\sum_{i-1}^{\infty}x_ip_i\right)^2,$$

uzluksiz bo‘lganda esa, $D\xi=\int\limits_{-\infty}^{\infty}x^2f(x)dx-\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}xf(x)dx\right)^2$ bo‘ladi.

Dispersiya ushbu xossalarga ega.

O‘zgarmas miqdorning dispersiyasi nolga teng:

$DC=0$

O‘zgarmas ko‘paytuvchini kvadratga oshirib, dispersiya belgisidan tashqarisiga chiqish mumkin:

$DC\xi=C^2D\xi$.

O‘zaro boғliqmas tasodifiy miqdorlar yiғindisining dispersiyasi bu tasodifiy Miqdorlar dispersiyalarining yiғindisiga teng: $D(\xi+\eta)=D\xi+D\eta.$

Tasodifiy o‘rtacha kvadratik chetlanishi (oғishi) deb, $\sigma=\sqrt{D\xi}$ songa aytiladi.

Masalalar

197. Ishlab chiqarilayotgan oyoq kiyiminining 30% i 2-navlidir. Tasodifiy olingan 3 ta oyoq kiyimidan 2-navlari sonining matematik kutilishi topilsin.

Yechish. ξ orqali 2-navli oyoq kiyimlar sonini belgilasak, u holda taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

$\xi:$	0	1	2	3
$P:$	$C_3^0\cdot0{,}7^3;$	$S_3^1\cdot0{,}3\cdot0.7^2;$	$C_3^2\cdot0{,}3^2\cdot0{,}7;$	$C_3^3\cdot0{,}3^3$

demak, $M\xi=0{,}9.$

198. Mo‘ljalga birinchi o‘q tekkunga qadar o‘q uzilmoqda. Agar otilgan har bir o‘qning nishoniga tegish hodisasining ehtimoli 0,8 ga teng bo‘lsa, otilgan o‘qlarning matematik kutilishi topilsin.

Yechish: ξ orqali otilgan o‘qlar sonini belgilaymiz. U holda ξning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

ξ:	1	2	3	4	...	n	...
P:	0,8;	$0.8\cdot 0.2$;	$0.8\cdot 0.2^2$;	$0.8\cdot 0.2^3$;	... ;	$0.8\cdot 0.2^{n-1}$;	...

Natijada

$$M\xi=\sum_{m=0}^{\infty}(n+1)\cdot 0{,}8\cdot 0{,}2^n$$

yiғinda hosil qilamiz. Bundan: $M\xi=\frac{5}{4}$.

199. λ parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

Yechish. Masala shartiga ko‘ra $P(\xi=\kappa)=\frac{\lambda^{\kappa}e^{-\lambda}}{\kappa!}$, $\kappa=0,1,2,...,\lambda>0$.

Demak, $M\ \xi=\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\kappa\lambda^{\kappa}e^{-\lambda}}{\kappa!}=\lambda.$

200. ξ va η tasodifiy miqdorlab berilgan. ξ-η va η-ξ ayirmalarning matematik kutilishlari topilsin:

ξ :	1	2	3	η :	5	3	2
P :	0.5	0.4	0.1	P :	0.1	0.2	0.7

Yechish: matematik kutilishning xossasiga ko‘ra

$M(\xi-\eta)=M\xi-M\eta$;

$M(\eta-\xi)=M\eta-M\xi$.

Tarifga ko‘ra

$M\xi$=1,6;

$M\eta$=2,5.

Demak,

$M(\xi-\eta)$=1,6-2,5=-0,9;

$M(\eta-\xi)$=2,5-1,6=0,9.

201. ξ tasodifiy miqdorning qiymatlari 1,2,3 va matematik kutilishi $M\xi$=2,5,shu bilan birga ikkinchi momenti $M\xi^2$=6,7 bo‘lsa, u holda ξ tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlariga mos p_1,p_2,p_3 ehtimollari topilsin.

Yechish: Matematik kutilishning tarifiga ko‘ra

$p_1+2p_2+3p_3=2{,}5$,

$p_1+4p_2+9p_3=6{,}7$.

Agar $p_1+p_2+p_3=1$ ligini e’tiborga olsak, u holda

$p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}3$ $p_3=0{,}6$.

202. Ishchi 5 ta stanokni boshqaradi. Har bir stanokning bir soat vaqt ichida ishnining xizmatini talab qilmaslik ehtimoli mos ravishda 0.9, 0.95, 0.85, 0.8,

0.88 ga teng bo‘lsa, u holda ishchi xizmatini talab qilmaydigan stanoklar sonining matematik kutilishi topilsin.

Yechish: agar ξ_i bilan i - stanokning (iq$\overline{1,5}$) ishchi xizmatini talab qilmasligini belgilasak, u holda taqsimot qonunlar mos ravishda bunday bo‘ladi.

ξ_1 0;1 ξ_2: 0;1 ξ_3 : 0;1

P: 0,1; 0,9 P: 0,05; 0,95 P: 0,15;0,85

ξ_4:0;1 ξ_5:0;1

P:0,2; 0,8 P:0,12;0,88

Natijada

$M(\xi_1+\xi_2+\xi_3+\xi_4+\xi_5)$q4,38.

203. Zichlik funksiyasi. F(x)q$\frac{1}{2}e^{-|x|}$ga teng bo‘lgan Laplas Qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

Yechish: Ta’rifga ko‘ra, $M\xi$q$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-}|x|dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} xe^{x}dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} xe^{-x}dx = 0$.

204. (a,σ^2) parametrli logarifmik normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6x\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}}, x > 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

dan iborat. Uning matematik kutilishi topilsin.

Yechish: Ma’lum formulaga ko‘ra

$$M\xi = \int_{0}^{+\infty 1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Agar $t = \frac{\ln x - a}{\sigma}$ almashtirish bajarsak u holda

$$M\xi = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{t}{2}} \sigma e^{a+\sigma t} dt = e^{a+\frac{\sigma^2}{2}}$$

Bu erda $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty+} e^{-\frac{(t-\sigma)^2}{2}} dt = 1$ (Puasson integrali) dan foydalandik.

205. Tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x^2}{1+x^2}, & x \geq 0. \end{cases}$$

dan iborat. Uning matematik kutilishi topilsin.

Yechish: Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasini topamiz:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{2x}{(1+x^2)^2}, & x \geq 0, \end{cases}$$

u holda

$$M\xi = 2\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)} dx = \frac{\pi}{2}.$$

206. Agar uzluksiz tasodifiy miqdor 1 ehtimol bilan $a < \xi \le b$ tengsizliklarni qanoatlakntirsa, u holda $a \le M\xi \le b$ bo‘lishini ko‘rsating.

Yechish: ξ tasodifiy miqdor shartga ko‘ra $[a,b]$ kesmada o‘zgaradi.Demak $f(x) \ge 0$ ligini
e’tiborga olsak,

$$af(x) \le xf(x) \le bf(x),$$

bundan

$$a\int_a^b f(x)dx \le b\int_a^b f(x)dx.$$

lekin

$$\int_a^b f(x)dx = 1. \qquad \text{demak,} \quad a \le M\xi \le b.$$

207. Agar $\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n$ tasdifiy miqdorlar o‘zaro boғliqmas va bir xil taqsimlangan bo‘lsa,u holda

$$M\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}\right) = \frac{1}{n}$$

Yechish: Agar ξ_i tasdifiy miqdorlarning o‘zaro boғilqmasligini va bir xil taqsimlanganligini e’tiborga olsak, u holda

$$1 = M\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}{\xi_1 + \xi \quad + ... + \xi_n}\right) = M\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}\right) + ... + M\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}\right),$$

Bundan

$$M\left(\frac{\xi_1}{\xi_1 + \xi_2 + ... + \xi_n}\right) = \frac{1}{n}.$$

208. (Byuffon masalasi). Tekislikda bir-biridan 2-a masofada parallel to‘ғri chiziqlar o‘tkazilgan va bu tekislikka uzunligi 2 l (l>a) bo‘lgan igna tasdifiy tashlangan. Ignaning birorta to‘ғri chiziqlarni kesishlar sonining matematik kutilishi topilsin.

Yechish: X orqali ignaning o‘rtasidan unga yaqinroq yotgan parallelgacha bo‘lgan masofani va φ orqali igna bilan to‘ғri chiziq orasidagi burchakni belgilaymiz (8-a rasm.). x va φ kattaliklar ignaning holatini to‘liq aniqlaydi. Ignaning barcha holatlari tomonlari a va π bo‘lgan to‘ғri to‘rtburchak nuqtalari bilan aniqlandi. Igraning parllel to‘ғri chiziqlar bilan kesilishi uchun $x \le l\sin\varphi$ tengsizlikning bajarilishi zarur va etarlidir.

Qilingan farazlarga ko‘ra izlanayotgan ehtimol shtrixlangan yuzning to‘ғri to‘rtburchak yuziga nisbatan teng bo‘ladi (9-rasm):

$$P = \frac{1}{a\pi}\int_0^{\pi} l \sin \varphi d\varphi = \frac{2l}{a\pi}.$$

Agar ξ orqali kesib o‘tgan to‘ғri chiziqlar sonini belgilasak,u holda ning taqsimt qonuni:

$$\xi: \quad 0: \quad 1$$
$$P: \quad 1-\frac{2l}{a\pi}: \quad \frac{2l}{a\pi}.$$

bo‘ladi, bundan:

$$M\xi = \frac{2l}{a\pi}.$$

209. Har bir erkli tajribada A hodisaning ro‘y berish ehtimoli berilgan bo‘lsin. Agar 2 ta erkli tajriba A hodisa ro‘y barishining matematik kutilishi 1,6 ga teng bo‘lsa, u holda u tajribada A hodisa ro‘y berish sonining dispersiyasi topilsin.

Yechish: Agar ξ orqali 2 ta erkli tajribada A hodisaning ro‘y berish sonini belgilasak va $P(A)=P$ bo‘lsa, u holda uning taqsimot qonuni bunday bo‘ladi:

ξ: 0 1 2

R: C_2^0q^2; C_2^1q p; $C_2^2 p^2$.

Agar C_2^1q pQ2C$_2^2 p^2 = 1{,}6$; qq1-p ligini e’tiborga, rq0,1, qq0,2.

Natijada $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 0{,}32.$

210. Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar mos ravishda birinchi va ikkinchi tangani tashlaganda gerbli tomoni tushish sonini ifodalasa,u holda $\xi+\eta$ tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Yechish: ξ va η tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari:

$$\xi: \quad 0, \quad 1; \qquad\qquad \eta = 0; \quad 1;$$
$$P: \quad \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}. \qquad\qquad P = \frac{1}{2}, \quad \frac{1}{2}$$

Demak, $M\xi = \frac{1}{2}, \quad M\eta = \frac{1}{2}, \quad M\xi^2 = \frac{1}{2}, \quad M\eta^2 = \frac{1}{2}.$

Bundan

$$D(\xi+\eta) = D\xi + D\eta.$$

211. Boғliqmas tajribalarda A hodisaning ro‘y berish ehtimoli 0.2 ga teng. Agar tajriba A hodisa birinchi marta ro‘y bergunga qadar davom ettirilsa, u holda A hodisa ro‘y berish sonini dispersiyasini topilsin.

Yechish: ξ orqali A birinchi marta ro‘y bergunga qadar o‘tkazilgan tajribalar sonini belgilaymiz. U holda bu tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo‘ladi:

$$\xi: \quad 1, \quad 2, \quad \ldots \quad n, \ldots$$
$$P: \quad 0{,}2; \quad 0{,}8\cdot 0{,}2; \ldots; \quad 0{,}8^{n-1}\cdot 0{,}2; \ldots$$

ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi

$$M\xi = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa P(\xi=\kappa) = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa \cdot 0{,}8^{\kappa-1}\cdot 0{,}2 = 0{,}2\cdot 25 = 5.$$

ξ^2 tasodifiy miqdorning matematik kutilishi

$$M\xi^2 = \sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa^2 \cdot 0{,}8^{\kappa-1} \cdot 0{,}2 = 45.$$

Demak,

$$D\xi = M^2 - (M\xi)^2 = 20.$$

212. O‘zaro boғliqmas ξ va η tasodifiy miqdorlar ushbu taqsimot qonunlari bilan berilgan

$$\begin{matrix} \xi: & 1 & 2 & 3 \\ P: & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}3; \end{matrix} \qquad \begin{matrix} \eta: & 5 & 2 & 1 \\ P: & 0{,}7 & 0{,}2 & 0{,}1 \end{matrix}$$

$\xi - \eta$ tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Yechish: Dispersiya formulasiga ko‘ra:

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = 0{,}6;$$

$$D\eta = M\eta^2 - (M\eta)^2 = 2{,}4.$$

ξ va η ning o‘zaro erkligi va dispersiya xossasiga ko‘ra:

$$D(\xi - \eta) = D\xi + D\eta = 3$$

213. Zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} & x \in [-e, c] \\ 0, & x \overline{\in} [-e, c] \end{cases}$$

dan iborat tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

Yechish:

$$M\xi = \int_{-c}^{a} \frac{x}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} dx = 0, \; M\xi^2 = D\xi = \int_{-e}^{c} \frac{x^2 dx}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} = \frac{c^2}{2}.$$

214. (a, σ^2) parametrli logarifmik normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorningdispersiyasi topilsin.

Yechish: Ma’lumki,

$$M\xi = e^{a + \frac{\sigma^2}{2}}$$

$M\xi^2$ ni hisoblaymiz:

$$M\xi^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x\xi\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - a)^2}{2\sigma^2}} dx = \frac{e^{2a}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2} + 2\sigma t} dt = e^{2a + 2\sigma^2}$$

demak,

$$D\xi = e^{2a + \sigma^2} (e^{\sigma^2} - 1).$$

215. Gamma (α, β) parametrli qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning ushbu zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)} x^{\alpha} e^{\frac{1}{\beta}} & (\alpha > 1, \beta > 0), x \in [0, +\infty[, \\ 0, & x \overline{\in} [0, +\infty[. \end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.
Yechish: Gamma funkyiya ta'rifidan

$$\int_0^\infty y^{a-1}e^{by}dy = \frac{F(a)}{b^a}, \qquad a>0, \quad b>0,$$

u holda $\Gamma(a+1)=a\Gamma(a)$ xossasidan foydalansak

$$M\xi = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty x^{\alpha+1}e^{-\frac{\alpha}{\beta}}dx = (\alpha+1)\beta,$$

$$M\xi^2 = \frac{1}{\beta^{\alpha+1}\Gamma(\alpha+1)}\int_0^\infty x^{\alpha+1}e^{-\frac{\alpha}{\beta}}dx = (\alpha+1)(\alpha+2)\beta^2.$$

demak,

$$D\xi = (\alpha+1)\beta^2.$$

Yechish: ξ va η tasodifiy miqdorlar o'zaro erkli bo'lsa,

$$M(\xi^\kappa\cdot\eta^\kappa) = M\xi^\kappa\cdot\eta^\kappa, \qquad \kappa=1,2,$$

u holda

$$D(\xi\cdot\eta) = M(\xi\cdot\eta)^2 - (M\xi\eta)^2 = D\xi\cdot D\eta + M(\xi\cdot M\eta - \eta\cdot M\xi)^2$$

yoki

$$D(\xi\cdot\eta)\ge D\xi\cdot D\eta.$$

217. ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin:

a)

ξ:	3	5	7
p:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$

b)

ξ:	-2	0	2
p:	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$.

218. ξ va η tasodifiy miqdorlar birnchi va ikkinchi tangani tashlaganda mos ravishda gerbli tomonlar tushish sonini ifodalasa, ikkala tanga bir marta tashlananda gerbli tomonlar tushish sonining matematik kutilishi topilsin.

219. ξ tasodifiy miqdorning qabul qiladigan qiymatlari 1,2,3,4,5,6 va $M\xi=3{,}5$, $M\xi^2=\frac{91}{6}$. SHu bilan birga tegishli qiymatlarning ehtimollari P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6 ehtimollarini toping.

220. ξ tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_n$ qiymtlarni $P(\xi=x_1)=\frac{1}{N}$, $\kappa=\overline{1,N}$ extimol bilan qabul qiladi (tekis taqsimlangan tasodifiy miqdor).Uning. matematik kutilishi topilsin.

221. 9 dona olmadan 4 donasi 2-navligi ma'lum bo'lgan holda shu 9 dona olmadan tasodifiy olingan 2 ta olma ichda 2-nav olmalar sonining matematik kutilishi topilsin.

222. SHoshqoltoshni ketma-ket 10 marta tashlanganda 6 raqami chiqish hollarining matematik kutilishi topilsin.

223. ξ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi ma'lum bo'lsa,

a) $\eta=b\xi-c$; b) $\eta=\xi-M\xi$

tasodifiy miqdorlarning matematik kutilishlari topilsin.

224. Binomial qonun bo‘yicha taqsimlngan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

225. Tanganing gerbli tomoni birnchi marta tushgunga qadar tashlanadi. Tanga tashlashlarning matematik kutilishi topilsin.

226. $[a,b]$ segmentda tekis taqsimlagan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

227. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{3(1+x^2)}, & x\in\ ]0,\ \sqrt[3]{e-1}\,[\\ 0, & x\overline{\in}\ ]0,\ \sqrt[3]{e-1}\,[\ .\end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

228. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x,0,\\ x^3 & 0\le x<\sqrt{2},\\ 0, & x\ge\sqrt{2}.\end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

229. Zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{a^2}, & x\in\ ]0,a[,\\ 0, & x\overline{\in}\ ]0,a[\ \text{bo‘lgan}\end{cases}$$

230. λ parametrli eksponensial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

231. tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $f(x)=3\sin 3x$,

$x\in\ ]0;\frac{\pi}{3}[$ bo‘lsa, $\eta=\xi^2$ tasodifiy miqdorning matematik kutilishi topilsin.

232. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|>1\\ 0, & |x|\ge 1\end{cases}$$

bo‘lsa, uning matematik kutilishi topilsin.

233. Koshi qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning matematik kutilishi mavjudmi?

234. ξ tasodifiy miqdorning

$$f(x)=4\sqrt{\frac{a^3}{\pi}x^2e^{-ax^2}}\qquad a\ge 0,\qquad x\in[0;+\infty[$$

zichlik funksiyasi molekulaning harakat qonunini ifodalaydi. ξ ning matematik kutilishi topilsin.

235. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

ξ:	3;	5;	8
P:	0,5;	0,2;	0,3.

Bu miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi topilsin.

236. Binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorningdispersiyasi topilsin.

237. λ parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

238. 8 ta shoshqoltosh bir yo‘la tashlanganda tushgan raqamlar yiғindisining dispersiyasi topilsin.

239. YAshikdagi 10 ta shar ichida 8 tasi oq. YAshikdan 6 ta shar olinadi. CHiqqan oq sharlar sonining dispersiyasi topilsin.

240. Uchta paxta terish mashinasini remontdan so‘ng sinalmoqda. Agar har bir mashinaning ishlash ehtimoli 0,9; 0,8; 0,7 ga teng bo‘lsa, ishlaydigan mashinalar soning dispersiyasi topilsin.

241. tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\in\left[0,\sqrt{2}\right] \\ 0, & x\overline{\in}\left[0,\sqrt{2}\right] \end{cases}$$

o‘rtacha kvadratik chetlanish topilsin.

242. Laplas qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin. Laplas qonunining zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x\in\ \left]-\infty,+\infty\right[$$

243. Zichlik funksiyasi

$$f(x)\begin{cases} \dfrac{2x}{a^2} & x\in\left[0,a\right[\\ 0, & x\overline{\in}\left[0,a\right[\end{cases}$$

dan iborat bo‘lgan tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

244. α parmetrli eksponensial qonun bo‘yicha taqsidangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

245. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan.

$$f(x)=\begin{cases} \sin 2x, & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \\ 0, & x\overline{\in}\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

uning dispersiyasi topilsin.

246. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases} 2\cos 2a & x\in\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right] \\ 0, & x\overline{\in}\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]. \end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

247. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi berilgan:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^n e^{-x}}{n!} & x\in\ ]0,+\infty[\\ 0, & x\overline{\in}\ ]0,+\infty[\end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

248. Zichlik funksiyasi

$$f(x)=|x|\cdot e^{-x^2},\quad x\in\ ]-\infty,+\infty[$$

dan iborat tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

249. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi berilgan:

$$F_\xi(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{1+x^2} & x\in\ ]0,+\infty[\\ 0, & x\overline{\in}\ ]0,+\infty[\end{cases}$$

Bu tasodifiy miqdorning dispersiyasi mavjudmi?

250. (α,δ^2) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

251. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\sqrt{1-x^2} & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

dan iborat bo‘lsa, uning dispersiyasi topilsin

252. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi. Ushbu ko‘rinishga ega:

$$f(x)=\frac{1}{2\sqrt{2Dt}}\quad e^{-}\frac{(x-x_0)^2}{4Dt}+e^{-}\frac{(x+x_0)^2}{4Dt}$$

bu tasodifiy miqdorining dispersiyasi topilsin

253. Zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}, & x\in[0,1], \alpha>0, \beta>0\\ 0, & x\overline{\in[0,1]}\end{cases}$$

dan iborat bo‘lgan (beta-taqsimot) tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.

254. ξ va η tasodifiy miqdorning dispersiyasi topilsin.]2,3[da, η esa]4,5[da tekis taqsimlangan bo‘lsa, $\xi\,\eta$ miqdorning dispersiyasi topilsin.

Asosiy matn

Tasodifiy miqdorning boshqa sonli harakteristikalari

ξ tasodifiy miqdorning $k-$tartibli boshlanғich momenti deb, ξ^t miqdorning matematik kutilishiga aytiladi.

ξ tasodifiy miqdorning $k-$tartibli markaziy momenti deb, $[\xi-\mathrm{M}\xi]^\kappa$ miqdorning matematik kutilishiga aytiladi.

ξ tasodifiy miqdor zichlik funksiyasining maksimumga erishadigan qiymati uning moddasi deb aytiladi.

Agar ξ tasodifiy miqdor uchun $\mathrm{P}(\xi < M\xi) = \mathrm{P}(\xi > \mathrm{M}_e\xi)$ bajarilsa, u holda $\mathrm{M}_e\xi$ son ξ tasodifiy miqdorning medianasi deb ataladi.
$F_\xi(x) = P$ tenglamaning yechimi tasodifiy miqdorning Z- tartibli kvantili

$$\alpha_1 = \frac{M\left((\xi - M\xi)^3\right)}{\sqrt{(D\xi)^3}}, \quad \alpha_2 = \frac{\left[(\xi - M\xi)^4\right]}{(D\xi)^2} - 3, \quad Y = \frac{\sqrt{D\xi}}{M\xi}$$

sonlar mos ravishda tasodifiy miqdorning asimmetriya, ekssessiya va variatsiya koeffitsientlari deb ataladi.
Ushbu

$$\operatorname{cov}(\xi - \eta) = M((\xi - M\xi)(\eta - M\eta))$$

kattalik esa ξ va η tasodifiy miqdorlarning kovariatsiyasi yoki korrelyasion momenti, $\eta_{\xi,\eta} \le \frac{\operatorname{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{D\xi \cdot D\eta}}$ son ξ va η tasodifiy miqdorlarning korrelyasiya koeffitsienti deb ataladi.
Korrelyasiya koeffitsienti $|\eta_{\xi,\eta}| \le 1$ bo‘lib, u ξ va η orasidagi boglanishni baholash uchun xizmat qiladi.
255. λ parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning uchunchi va to‘rtinchi tartibli boshlanғich va markaziy momantlari, asimmetriya,ekssessiya va variatsiya koeffitsentlari topilsin.
Yechish. Uchinchi boshlanғich moment ta’rifiga kura

$$M\xi^3 = \sum_{t=0}^{\infty} t^3 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

SHakl almashtirish bajarib hisoblaymiz:

$$M\xi^3 = e^{-2}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\lambda^k\left(k^2-1+1\right)}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{t=2}^{\infty}\frac{\lambda^k(t+1)}{(k-2)!} + e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!} = e^{-\lambda}\sum_{t=2}^{\infty}\frac{\lambda^k(k-2+3)}{(k-2)!} + \lambda = e^{-\lambda}\sum_{t=3}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-3)!} + 3e^{-\lambda}\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-2)!} + \lambda =$$

$$= \kappa^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

shunday usulda

$$M\xi^4 = \lambda + 7\lambda^e + 6\lambda^3 + \lambda^4$$

natijada

$$M(\xi - M\xi)^3, M(\xi - M\xi)^4 = \lambda(\lambda + 32)$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}, \lambda_2 = \frac{1}{\lambda}, \nu = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}.$$

256. [a,b] segmentda tekis taqsimlangan ξ tasodifiy miqdorning 4- tartibli markaziy momenti, asfimmetriya, ekssessiya, variatsiya koeffitsentlari, modasi, medianasi va kvantili topilsin.
Yechish. Ma’lumki, [a,b] da tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning taqsimot funksiyasi

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{x-a}{b-a} & x\in[a,b]\\ 0, & x<a,\\ 1 & x>b,\end{cases}$$

u holda uning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,b],\\ 0, & x\overline{\in[a,b]},\end{cases}$$

demak,

$$M\xi=\frac{b+a}{2}, M\xi^2=\frac{b^2+ab+a^2}{3}, M\xi^3=\frac{(b+a)(b^2+a^2)}{4},$$

$$M\xi^4=\frac{b^5-a^5}{5(b-a)}, M(\xi-M\xi)=0, M[(\xi-M\xi)^2]\frac{(b-a)^2}{12},$$

$$M[(\xi-M\xi)^3]=0, M[(\xi-M\xi)^4]=\frac{(b+a)^4}{8a},$$

Natijada quyidagini hosil qilamiz:

$$\alpha_1=0,\quad \alpha_2=\frac{M[(\xi-M\xi)^4]}{(D\xi)^4}-3=-1{,}2$$

$$v=\frac{\sqrt{D\xi}}{M\xi}=\frac{b-a}{\sqrt{3}(b-a)}$$

ξ tasodifiy miqdorning medianasi F(x)q1 tenglamaning yechimidan iborat:

$\dfrac{x-a}{b-a}=\dfrac{1}{2}$ yoki $x=\dfrac{b+2}{2},\quad \xi=\dfrac{b+2}{2}$

xqR(b-a)Qa nuqta esa r- tartibli kvantil bo‘ladi.

Tasodifiy miqdorning modasi [a,b] kesmaning nuqtalaridan iborat bo‘ladi, chunki [a,b] ni ixtiyoriy nuqtasida f(x) maksimumga erishadi.

257. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1\\ 0, & |x|>1\end{cases}$$

dan iborat bo‘lsa, uning 4- tartibli markaziy momenti, asimmetriya, ekssessiya, variatsiya koeffitsientlari, modasi va medianasi topilsin.

Yechish. Boshlanғich momentlarni hisoblaymiz.

$$M\xi=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\qquad M\xi^2=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=0{,}5,$$

$$M\xi^3=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^2dx}{\sqrt{1-x^2}}=0,\qquad M\xi^4=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{3}{8}$$

Markaziy momentlar boshlanғich momentlar bilan ustma-ust tushadi.

$$M(\xi-M\xi)=0,\qquad M[(\xi-M\xi)^2]=0{,}5,$$

$$M[(\xi-M\xi)^3]=0,\qquad M[(\xi-M\xi)^4]=\frac{3}{8}$$

Demak, asimmetriya, ekssessiya koeffitsentlari mos ravishda $\alpha = 0, \alpha_2 = -3 \setminus 2$

ξ tasodifiy miqdorning variatsiya koeffitsenti va modasi mavjud emas.

Medianani $p(\xi < M_e\xi) = \frac{1}{2}$ ga asosan topamiz:

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{M_e\xi}\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{\pi}\arcsin M_e\xi + \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{1}{2}$$

bundan $M_\xi\xi = 0$

258. Veybull qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} \frac{n}{a}\cdot x^{n-1}e^{-\frac{x^n}{a}} & x \in [0,+\infty[\\ 0, & x \overline{\in} [0,+\infty[\end{cases}$$

dan iborat bo‘lib, bunda a-ixtiyoriy musbat son. Bu tasodifiy miqdorining 3,4-tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, modasi hisoblansin.

Yechish. Boshlanғich momentlarni hisoblaymiz:

$$M\xi = a^{\frac{1}{n}}\Gamma(1+\frac{1}{n}), \qquad M\xi^2 = a^{\frac{1}{n}}\Gamma(1+\frac{2}{n}),$$

$$M\xi^3 = a^{\frac{3}{n}}\Gamma(1+\frac{3}{n}), \qquad M\xi^4 = a^{\frac{4}{n}}\Gamma(1+\frac{4}{n}),$$

markaziy momentlarni hisoblaymiz:

$$M(\xi - M\xi) = 0, M[(\xi - M\xi)^2] = a^{\frac{1}{n}}\left[\Gamma(1+\frac{2}{n}) - \left\{\Gamma(1+\frac{1}{n})\right\}^2\right],$$

$$M\left[(\xi - M\xi)^3\right] = a^{\frac{3}{n}}\left[\Gamma(1+\frac{3}{n}) - 3\Gamma(1+\frac{2}{n})\cdot\Gamma(1+\frac{1}{n}) + \_2\left\{\Gamma(1+\frac{1}{n})\right\}^3\right],$$

$$M\left[(\xi - M\xi)^4\right] = a^{\frac{4}{n}}\left[\Gamma(1+\frac{4}{n}) - 4\Gamma(1-\frac{3}{n})\cdot\Gamma(1+\frac{1}{n}) +\right.$$

$$\left. + 6\Gamma(1+\frac{2}{n})\left\{\Gamma(1+\frac{1}{n})\right\}^2 - 3\left\{\Gamma(1+\frac{1}{\beta})\right\}^4\right.$$

ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi $x = \left[(\frac{n-1}{m})\alpha\right]^{\frac{n}{m}}$

nuqtada maksimumga erishadi, demak, uning moduli $(\frac{n-1}{m} - \alpha)^{\frac{n}{m}}$ ga teng

259. Agar $\xi = 3\eta + 5$ bo‘lsa, u holda ξ va η tasodifiy miqdorning normallash koeffitsientini topilsin.

Yechish: Ma’lumki $M\xi = 3\eta + 5$ u holda

$$Cov(\xi,\eta) = M[(\xi - M\eta)(\eta - M\mu)] = M[(3\eta+5) - 3^{m\eta} - 5][\eta - M\eta] =$$

$$= 3M([\eta - M\eta]^2) = 3Dv$$

$$D\xi = M[(\xi - M\xi)^2] = M[(3\eta + 5 - 3M\eta - 5)^2] = 9D\eta$$

Demak, ξ va η tasodifiy miqdorlarining koeffitsenti:

ξ: -1 1

R: 1g‘2 1g‘2

bu tasodifiy miqdorning 4 tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, koeffitsentlarini topilsin

261. ixtiyoriy S da ξ tasodifiy miqdori uchun $D\xi \le M(\xi - C)^2$ bo‘lishi isbotlansin

262. Tajriba natija tenglik bir marta topilishdan iborat, u holda gerbli tomonlar tushish sonining 4- tartibli markaziy momenti, ekssessiya va koeffitsentlarini topilsin.

263. Geometrik qonun, ya’ni $P(\xi < m) = F(4-p)^m, m = 1,2,3....$ bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning 3 va 4 – tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, ekssessiyava koeffitsentlari topilsin.

264. (α, δ^2) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning 3 va 4 – tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, assimetriya, ekssessiya va variatsiya koyeffitsientlari topilsin.

265. Zichlik funksiyasi.

$$f(x) = \frac{\Gamma(\frac{U+1}{2})}{\sqrt{VD\Gamma(\frac{U}{2})}}(1+\frac{x^2}{V})^{-\frac{A+1}{2}} \qquad V > 0, \ x \in R$$

dan iborat tasodifiy miqdorning (St’yudent qonuni) uchinchi va to‘rtinchi tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, assimetriya, ekssessiya va variatsiya koyeffitsientlari topilsin. Zichlik fnksiyasining grafigi topilsin.

$$f(x) = \frac{\alpha^m \cdot x^{m-4} \cdot e^{-2x}}{(m-1)!} \qquad x > 0$$

(α, m) –parametrli Erlang qonunidan iborat bo‘lgan tasodifiy miqdorning uchinchi va to‘rtinchi tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, assimetriya, ekssessiya va variatsiya koyeffitsientlari topilsin hamda zichlik funksiyasining grafigi tuzilsin.

$$F(x) = \{1 - e^{-\frac{ч^2}{2ч^2}} \qquad x \ge 0 \qquad x < 0$$

dan iborat tasodifiy miqdorning (Radey qonuni) uchinchi va to‘rtinchi tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, assimetriya, ekssessiya va variatsiya koyeffitsientlari topilsin hamda zichlik funksiyasining grafigi chizilsin.

268. Zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 1-(\frac{\beta}{x})^{\alpha} & x > \beta, \alpha > 0 \\ 0, & x \le \beta \end{cases}$$

dan iborat (Pereto qonuni) tasodifiy miqdorning uchinchi va to‘rtinchi tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, assimetriya, ekssessiya va variatsiya koyeffitsientlari topilsin hamda zichlik funksiyasining grafigi chizilsin.

269. Taqsimot qonuni.

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\beta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)\int\limits_{x} t^{\alpha-1} l^{-\beta 4} dt} & x>0 \\ & x\le 0\end{cases}$$

dan iborat bo‘lgan (Gamma qonun). tasodifiy miqdorning uchinchi va to‘rtinchi tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, assimetriya, ekssessiya va variatsiya koyeffitsientlari topilsin hamda zichlik funksiyasining grafigi chizilsin.

270. Zichlik funksiyasi.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x\delta\sqrt{2\pi}}\exp(-\dfrac{(\ln x-M)^2}{\alpha^{6^2}}) & x>0 \\ 0, & x\le 0\end{cases}$$

dan iborat (logarifmik normal qonun) tasodifiy miqdorning o‘rtacha kvadratik chetlanishi, assimetriya, variatsiya koyeffitsientlari topilsin va zichlik funksiyasining grafigi chizilsin.

271. Taqsimot funksiyasi.

$$\begin{cases}0, \\ \dfrac{2(x-a)^2}{(b-a)^2} \\ 1-\dfrac{2(b-x)^2}{(b-a)^2} \\ 1,\end{cases} \qquad \begin{cases}x\le a \\ a\le x\le \dfrac{a+b}{2} \\ \dfrac{a+b}{2}<x<b \\ x\ge b\end{cases}$$

dan iborat (Uchburchak qonuni) tasodifiy miqdorning uchinchi va to‘rtinchi tartibli boshlanғich va markaziy momentlari, assimetriya, ekssessiya va variatsiya koyeffitsientlari topilsin va zichlik funksiyasining grafigi chizilsin.

272. Zichlik funksiyasi.

$$F(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} & x\in]0,1[\\ 0 & x\in]0,1[\end{cases}$$

dan iborat (Beta qonuni) tasodifiy miqdorning variatsiya koyeffitsienti topilsin va zichlik funksiyasining grafigi chizilsin.

273. ξ va τ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan.

$\xi:$	-1,	1		τ	3,	4,	5
$\rho:$	0,3	0,7		$\rho:$	$\frac{1}{3}$;	$\frac{1}{3}$;	$\frac{1}{3}$

Bu miqdorning korelyasiya koyeffitsientlari topilsin.

274. ξ va τ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan:

$\xi:$	2,	4		τ	3;	5;
$\rho:$	0,4	0,6		$\rho:$	0,7;	0,3

Bu miqdorlarning korelyasiya koyeffitsientlari topilsin.

275. ξ va η tasodifiy miqdorlarning zichlik funksiyasi topilsin.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{4}\sin x\cdot\sin y & x\in[0,\pi],y\in[0,\pi]\\ 0, & x\in[0,\pi],y\in[0,\pi]\end{cases}$$

Bu miqdorlarningn korelyasiya koyeffitsientlari topilsin.

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslікlar va o‘quv qo‘llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

2.A.A.Abdushuкurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan misol va masalalar to‘plami» Toshкent, «Universitet», 2003 y.

3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan masalalar to’plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

6-semestr

Asosiy matn

KATTA SONLAR QONUNI.HARAKTERISTIK FUNKSIYA.

. CHebishev tengsizligi.

Dispersiyasi mavjud bo‘lgan ξ tasodifiy miqdorning matematik kutulishidan ayirmasining absolyut qiymat bo‘yicha musbat ξ sondan kichik bo‘lmaslik hodisasining ehtimoli $\frac{D\xi}{\xi^2}$ dan katta emas.

$$\rho\{|\xi-M\xi|\geq\xi\}\leq 1-\frac{D\xi}{\xi^2}$$

Asosiy masalalar

276. CHebishev tengsizligi ushbu

$$\rho\{|\xi-M\xi|<\xi\}\geq 1-\frac{D\xi}{\xi^2}$$

tengsizlikka ekvivalent ekanligi isbotlansin.

277. ξ tasodifiy miqdor bilan uning m matematik kutulishi orasidagi ayirma absolyut qiymatining $3\sqrt{o\xi}$ dan ortiq bo‘lmaslik hodisasining ehtimoli baholansin.

Yechish.

$$\rho(|\xi - m| < 3\sqrt{D\xi})1 - \frac{D\xi}{9D\xi} = \frac{8}{9}$$

demak, ξ tasodifiy miqdor uchun $m - 5\sqrt{D\xi} < \xi < m + 3\sqrt{D\xi}$ tengsizlik $8/9$ ehtimol bilan bajariladi.

ξ uchun olingan bunday intervalli baho «uch sigma metodi» deb ataladi.

278. Tajriba tanga tashlashdan iborat bo‘lsin. 70 tanga bir yuli tashlaganda tushgan gerbli tomonlar soni 30 bilan 40 orasida bo‘lish hodisasini ehtimolini CHebishev tengsizligidan foydalanib baholansin.

Yechish. ξ orqali 70 ta tangani bir yuli tashlaganda gerbli tomonlar tushish sonini belgilaymiz, u holda

$$M\xi = np = 70 \cdot \frac{1}{2} = 35$$

$$D\xi = npq = 70 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 17{,}5$$

shu bilan birga

$$30 \le \xi \le 40 \text{ yoki } 30 - M\xi \le \xi - M\xi \le 40 - M\xi$$

yoki

$$-5 \le \xi - M\xi \le 5 \text{ yoki } |\xi - M\xi| \le 5$$

Demak, CHebishev tengsizligiga kura

$$\rho\{|\xi - M\xi| \le 5|\} \ge 1 - \frac{17.6}{25} = 0{,}3$$

279. Zichlik funksiyasi.

$$f(x) = e^{-2|x|}$$

dan iborat tasodifiy miqdor uchun $\rho(|x| < n)$ baholansin.

280. Agar $f(x)$ manfiymas, juft, $x \ge a$ da kamayuvchi va shu bilan birga bir ehtimol bilan $\xi \ge a$ bo‘lsa, u holda

$$\rho\{\xi \ge a\} \le \frac{Mf(\xi)}{f(x)}$$

ni isbotlang.

281. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan:

ξ:	1	2	3	4	5;
ρ:	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutulishi orasidagi ayirmaning absolyut qiymati 1,5 ortmaslik hodisasining ehtimoli baholansin.

282. Agar ξ tasodifiy miqdorning dispersiyasi 0,09 ga teng bo‘lsa, u holda bu tasodifiy miqdor bilan uning matematik kutulishi orasidagi ayirmaning qiymati bo‘yicha 0,4 dan kichik bo‘lmaslik ehtimoli baholansin.

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslıкlar va o‘quv qo‘llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
2.A.A.Abdushuкurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan misol va masalalar to‘plami» Toshкent, «Universitet», 2003 y.
3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan masalalar to’plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

Asosiy matn

Katta sonlar qonuni.

$\xi_1, \xi_2 ......, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi va $f_n(\xi_1, \xi_2 ......, \xi_n)$ funksiya berilgan bo‘lsin.

Agar shunday o‘zgarmas sonlar ketma-ketligi $\{a_n\}, n = 1,2.....$ mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $\xi > 0$ son uchun

$$\lim_n \rho\left\{\left|f_n(\xi_1, \xi_2 ......, \xi_n) - a_n\right| < \xi\right\} = 1$$

munosobat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\xi_1, \xi_2 ......, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi, deyiladi.

CHebishev teoremasi. Agar $\xi_1, \xi_2 ......, \xi_n$ o‘zaro erkli tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ularning dispersiyalari biror son bilan tekis chegaralangan bo‘lsa, u holda ixtiyoriy son uchun quyidagi tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$$\lim \rho\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\xi_j - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}M\xi_j\right| \geq \xi\right\} = 0$$

YA’ni $\xi_1, \xi_2 ......, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi.

Xinchin teoremasi. Agar $\xi_1, \xi_2 ......, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi o‘zaro erkli bir xil taqsimlangan va mavjud bo‘lsa, u holda bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘ladi: ya’ni

$$\lim \rho\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \right| < \xi\right\} = 1$$

Masalalar

283. $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots, \xi_n$ o‘zaro boғliq bo‘lmagan tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ularning taqsimot qonunlari

$\xi_n;$	$-2\sqrt{n+1}$	0	$2\sqrt{n+1}$
$\rho;$	$\frac{1}{2(n+1)}$	$1-\frac{1}{n+1}$	$\frac{1}{2(n+1)}$

dan iborat. Bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o‘rinlimi?

Yechish. CHebishev teoremasidan foydalanamiz. $M\xi_n = 0$, $D\xi_n = 4$

Demak, $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots, \xi_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunadi.

284. Dispersiyalari 2 ga teng bo‘lgan bir xil taqsimlangan, o‘zaro boғliq emas, tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining o‘rta arifmetigi bilan matematik kutulishi orasidagi ayirmaning absolyut qiymati 0,8 dan kichik bo‘lish hodisasining ehtimoli 0,09 dan kichik bo‘lmasligi uchun kamida nechta tasodifiy miqdor olish lozim?

Yechish. Masala shartiga ko‘ra

$$\rho\left\{\left|\frac{\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots, \xi_n}{m} - M\xi_1\right| < 0{,}8\right\} \geq 0{,}90$$

lekin, CHebishev tengsizligiga ko‘ra

$$\rho\left\{\left|\frac{\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots, \xi_n}{n} - 3\right| < 0{,}8\right\} \geq 1 - \frac{2}{0{,}64n}$$

Demak, $1 - \frac{2}{0{,}64n} \geq 90$ yoki $n \geq 32$

285. Bir xil taqsimlangan o‘zaro boғliqmas tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi α parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan. Bu tasodifiy miqdorlar katta sonlar qonuniga bo‘ysunadimi?

Yechish. $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots, \xi_n$ bir xil taqsimlanganligi uchun ularning taqsimot qonunlari:

$$\rho(\xi_i = k)\frac{\alpha^k}{k!}e^{-k} \qquad i = 1,2,3,\ldots.$$

bo‘ladi. Ma’lumki $M\xi_i = \alpha$ Demak, Xinchin teoremasiga kura bu $\xi_1, \xi_2 \ldots\ldots \xi_n$ tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining katta sonlar qonuniga bo‘ysunishi kelib chikadi.

286. $\xi_1, \xi_2 \cdots\cdots \xi_n$ o‘zaro boғliqmas tasodifiy miqdorlar bo‘lib, ularning taqsimot qonunlari quyidagicha:

$$\xi_n = \frac{2^{2n+1}}{2^{2n} - 2^n - 1}; \quad 2^n; \quad 2^{2n}$$

$$\rho : \frac{2^{2n} - 2^n - 1}{2^{2n}}; \qquad \frac{1}{2^n}; \quad \frac{1}{2^{2n}}$$

bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi uchun dispersiyalar tekis chegaralanganmi?

287. O‘zaro boғliqmas $\xi_1, \xi_2 \cdots\cdots \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari berilgan.

$$\xi_n = \quad -n \quad\quad 0 \quad\quad n$$

$$\rho_n : \quad \frac{1}{n^2} \quad\quad 1 - \frac{1}{n^2}$$

Bu tasodifiy miqdorlar uchun katta sonlar qonuni o‘rinlimi?

288. Agar $\xi_1, \xi_2 \cdots\cdots \xi_n$ tasodifiy miqdorlar uchun $n \to \infty$ da.

$$\frac{1}{n^2} D\left(\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right) \to 0$$

munosobat bajarilsa, u holda bu ketma-ketlik uchun katta sonlar qonuni o‘rinli bo‘lishi isbotlansin. (Markov teoremasi)

289. O‘zaro boғliqmas $\xi_1, \xi_2 \cdots\cdots \xi_n$ tasodfiy miqdorlar berilgan bo‘lib, $D\xi_i\, 0{,}3$. bu tasodifiy miqdorlarning o‘rta arifmetigi bilan ularning matematik kutulishlarining o‘rta arifmetigi orasidagi farqning absolyut qiymati 0,05 dan kichik bo‘lmaslik ehtimoli 0,09 dan oshmasligi uchun nechta tasodifiy miqdor olinishi kerak?

290. Bir xil taqsimlangan o‘zaro boғliqmas $\xi_1, \xi_2 \cdots\cdots \xi_n$ tasodifiy miqdorlarning taqsimot qonunlari

$$\rho(\xi = k) = \frac{1}{1{,}20256 \cdot k^3} \qquad\qquad k = 1,2,3,....$$

dan iborat. Bu tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi katta sonlar qonuniga bo‘ysunadimi?

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslikar va o‘quv qo‘llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

2.A.A.Abdushuкurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan misol va masalalar to‘plami» Toshкent, «Universitet», 2003 y.

3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematiк statistiкadan masalalar to’plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

Asosiy matn

Harakteristik funksiya.

$e^{it\xi}$ tasodifiy miqdorning matematik kutulishi ξ tasodifiy miqdorning harakteristik funksiyasi deb ataladi.

$$\varphi_\xi(t) = Me^{it\xi} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} = dF_\xi(x)$$

bu erda t-haqiqiy son, $-\infty < t < +\infty$. Agar ξ tasodifiy miqdorning $f(x)$ zichlik funksiyasi mavjud bo‘lsa, u holda

$$\varphi_\xi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} = f(x)d(x)$$

Agar $M\xi^k$ mavjud bo‘lsa, ξ tasodifiy miqdorning boshlanғich momentlari uchun

$$M\xi^k = \frac{1}{i^k} \cdot \frac{d^k \varphi_\xi(t)}{dt^k} \qquad t = 0$$

munosabat o‘rinli.

Butun qiymatlar qabul qiladigan tasodifiy miqdorlar uchun harakteristik funksiya urniga ushbu yaratuvchi (hosil qiluvchi) funksiyasini ishlatish qulaydir.

$$Ms^k = \sum_{k=0}^{\infty} s^k p_k = \varphi(s) \text{ bu erda } P_k = p(\xi = k)$$

Agar tasodifiy miqdorning k tartibli momenti mavjud bo‘lsa, u holda

$$\varphi^{л}(1) = M(\xi(\xi-1)(\xi-2)..(\xi-k+1))$$

Xususan,

$$\varphi(1) = M\xi_1,\ \varphi(1) \pm \varphi(1) = M\xi^2$$

Natijada $D\xi = \varphi(1) + \varphi(1) - \varphi(1)^2$

Agar $S = e^{lt}$ bo‘lsa, $\psi(e^{it})$ u holda harakteristik funksiya hosil bo‘ladi.

Madsalalar

291. α parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning harakteristik funksiyasi va matematik kutulishi topilsin.

Yechish. Ma’lumki,

$$\rho(\xi = k) = \frac{\alpha^k e^{-2}}{k!}, \quad k = 0,1,2,..........$$

u holda

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{itk} \frac{\alpha^k e^{-2}}{k!} = e^{-\alpha+\alpha e^{it}} \quad , \quad \frac{1}{t}\varphi_\xi(0) = \alpha$$

292. Bir parametrli eksponensial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning harakteristik funksiyasi va matematik kutulishi topilsin.

Yechish. Tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

u holda

$$\varphi_\xi(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x} e^{(it-1)x} dx = \frac{1}{1-it}$$

$$M\xi = \frac{1}{i}\varphi_\xi(0) = 1$$

293. Taqsimot qonuni.

$$D(\xi = m) = \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}}, \quad a > 0, \quad m = 0,1,2,3.........$$

dan iborat tasodifiy miqdor Paskal qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdor deyiladi. Bu tasodifiy miqdorning harakteristik funksiyasi hamda 1-3 tartibli boshlanғich momentlari topilsin.

Yechish.

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^m}{(1+a)^{m+1}} e^{itm} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ae^{it})^m}{(1+a)^{m+1}} = \frac{1}{1+a(1-e^{it})}$$

$$\varphi^k{}_e(t) = \frac{k!(ia)^k}{(1+a(1-e^{it}))^{k+1}}, \quad k = 1,2,3,.........$$

Demak, $M\xi = a$, $M\xi^2 = 2a^3$, $M\xi^3 = 6a^{3}{}_3$

294. Merganning bitta o‘q uzishida nishonga urishida nishonga urish ehtimolligi 0,9 ga teng. Mergan nishonga tegmaguncha qadar o‘q uzadi. Mergan otgan o‘qlar sonining yaratuvchi funksiyasi va matematik kutulishi topilsin.

Yechish. ξ orqali otilgan o‘qlar sonini belgilaymiz, u holda

ξ :	1	2	3	4	5…….	.k.......
ρ :	0,1	0,1-0,9	0,1-0,9^2	0,1-0,9^3	0,1-0,9^4	,1-0,9^{k-1}

Demak,

$$\varphi(s) = 0{,}1 \cdot s + 0{,}1 \cdot 0{,}9s^2 + 0{,}1 \cdot 0{,}9^s + \ldots + 0{,}1 \cdot 0{,}9^{k-1} s^k + \ldots = 0{,}1 \sum_{k=1}^{\infty} 0{,}9^{k-1} s^t$$

Bundan

$$\psi(s) = 0{,}1 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0{,}9^{k-1} s^{k-1}$$

Demak,

$$\varphi(1) = M\xi = 10$$

295. Tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni berilgan.

$$\begin{array}{lllll} \xi: & a_1 & a_2 & a_3 \ldots\ldots\ldots a_n & \\ \rho: & \rho_1 & \rho_2 & \rho_3, & \sum_{i=1}^{n} P_n = 1 \end{array}$$

Uning harakteristik funksiyasi topilsin.

296. ξ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni.

$$\begin{array}{llll} \xi: & 0 & 1 & 2 \\ \rho: & q & p & , \end{array}$$

Uning harakteristik funksiyasi va matematik kutulishi topilsin.

297. Binomial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning harakteristik funksiyasi va dispersiyasi topilsin.

298. [-2; 2] sigmentda tekis taqsimlangan tasodifiy miqdorning harakteristik funksiyasi topilsin.

299. ξ tasodifiy miqdor mavhum qismi nol bo‘lgan harakteristik funksiyaga ega bo‘lsa, u holda

$$1 - \varphi_\xi(2t) \le 4(1 - 4(t))$$

tengsizlikning o‘rinli bo‘lishi isbotlansin:

300. (α, δ^2) parametrli normal qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning harakteristik funksiyasi topilsin.

301. ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x) = \begin{cases} 2hxe^{-2x} & x \ge 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

ko‘rinishga ega. Uning harakteristik funksiyasi topilsin.

302. Agar ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{|-x|}$$

(yoki ikki yoqlama eksponensial qonun bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdornig zichlik funksiyasi) bo‘lsa, u holda uning harakteristik funkitsyasi va matematik kutulishi topilsin.

303. Zichlik fnksiyasi.

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\alpha^2}{\Gamma(\alpha)}, \quad x^{\alpha-1}e^{-\alpha x} & x\geq 0, \alpha>0\\ 0 & x<0\end{cases}$$

dan iborat tasodifiy miqdorning harakteristik funksiyasi va 3-tartibli boshlanғich momenti topilsin.

304. Tangani ikki marta tashlanganda raqamli tomonlar tushish sonini yaratuvchi funksiyasi va matematik kutulishi topilsin.

305. α parametrli Puasson qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning yaratuvchi funksiyasi va dispersiyasi topilsin.

306. Binomial qonuni bo‘yicha taqsimlangan tasodifiy miqdorning yaratuvchi funksiyasi va $k-$ tartibli boshlanғich momenti topilsin.

307. Agar ξ tasodifiy miqdorning zichlik funksiyasi.

$$f(x0=\frac{a}{\pi(a^2+x^2)}, \qquad a>0$$

bo‘lsa uning harakteristik funksiyasi topilsin.

MATEMATIK STATISTIK ELEMENTLARIGA MISOLLAR

1-§. Tanlanmaning harakteristikalari va empirik taqsimot funksiyasi.

ξ tasodifiy miqdor ustida η ta o‘zaro boғliq bo‘lmagan tajriba o‘tkazish natijasida hosil qilingan $x_1, x_2 x_3 \ldots\ldots x_{n.}$ to‘plam tanlanma, x_i qiymatlar, variantlar, η esa tanlanmaning hajmi deyiladi.

Agar x_i varianta η_i (x_i -qiymatning chastotasi) marta takrorlangan bo‘lsa, u holda

$$W_i=\frac{n_i}{n}$$

ifoda x_i variantaning nisbiy chastotasi deyiladi.

ξ	x_1	x_2	x_3	x_k
W	w_1	w_2	w_3	w_k

ifoda ξ tasodifiy miqdorning empirik taqsimoti deb ataladi.

Agar $m(x)$ orkali x dan kichik variantalar sonini belgilasak, u holda $F(x)=\frac{m(x)}{n}$ ifoda tasodifiy miqdorning empirik taqsimot funksiyasi deb ataladi.

Nisbiy chastotalar poligoni deb, $(x_1,w_1),\ (x_2,w_2),\ (x_n,w_n),$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

Asoslari h uzunlikdagi intervallar; balandliklari $\frac{W_i}{n}$ nisbatga teng bo‘lgan to‘ғri to‘rtburchaklardan iborat pogonaviy figura nisbiy chastotalar gistogrammasi deb ataladi.

$$(n\cdot h=\max x_i-\min x_i)$$

Tanlanmaning o‘rta arifmetigi deb,

$$\overline{x}=\frac{\sum_{i=1}^{k}x_i n_i}{\sum_{i=1}^{k}n_i}$$

ifodaga, tanlanmaning dispersiyasi deb

$$\delta^2\ \frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{k}n_i}$$

ifodaga, taqsimotning o‘rta kvadratik xatoligi (o‘rta kvadratik chetlanishi) deb,

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{k}n_i(x_i-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^{k}n_i}}$$

ifodaga aytiladi.

Eng katta chastotaga ega bo‘lgan varianta moda deyiladi va μ_0 bilan belgilanadi.

Variantalarni soni teng bo‘lgan ikki qismga ajratadigan varianta variatsion qatorning medianasi deyiladi va m_e bilan belgilanadi.

Agar variantalar soni tok, ya’ni $n=2k+1$ bo‘lsa, u holda

$$m_e=\frac{x_k+x_{k+1}}{2}$$

Variatsiya koyeffitsienti deb,

$$V = \frac{б}{\overline{x}} \cdot 100\%$$

ifodaga aytiladi.

Taqsimotning asimmetriya (qiyshayganlik) koyeffitsienti deb,

$$A_s = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\delta^3}$$

ifodaga aytiladi.

Ifoda esa, taqsimotning ekssesiya koyeffitsienti deb ataladi.

$$l_k = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^4}{\delta^4} - 3$$

308. Variantalar va mos chastotalar berilgan:

x_i	2	3	4	6	7
n_i	1	2	1	3	2

Tasodifiy miqdorning empirik taqsimoti, empirik taqsimot funksiyasi, o'rta arifmetik qiymati, tanlanmaning dispersiyasi, taqsimotning o'rta arifmetik kvadratik xatoligi topilsin va nisbiy chastotalar poligoni chizilsin.

Yechish. Empirik taqsimotni tuzamiz.

x_i	2	3	4	6	7
W_i	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{3}{9}$	$\frac{2}{9}$

u holda empirik taqsimot funksiyasi

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2 \\ \frac{1}{9} & 2 < x < 3 \\ \frac{3}{9} & 3 < x < 4 \\ \frac{4}{9} & 4 < x < 6 \\ \frac{7}{9} & 6 < x < 7 \\ 1 & x > 7 \end{cases}$$

Tanlanmaning o'rta arifmetik qiymati, tanlanma dispersiyasi va taqsimotning o'rta kvadratik xatoligi mos ravishda:

$$\overline{x} = \frac{2 + 3 \cdot 2 + 4 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 2}{9} = 4,(8):$$

$$\delta^2 = \frac{(-\frac{26}{9})^2 + (\frac{17}{9})^2 \cdot 2 + (\frac{8}{5})^2 \cdot 3 + (\frac{19}{19})^2 \cdot 2}{9} = 3{,}2098765$$

$$\delta = 1{,}7916127$$

309. Kuzatish olingan har yuz dona olma ichida chirigan olmalar x_i sonini aniqlashdan iborat.

x_i	3;	4;	6;	2;	5;
n_i	4;	3;	2;	6;	1;

x_i miqdorning modasi, medianasi, variatsiya, asimmetriya, ekssesiya koyeffitsientlari topilsin.

Yechish. Tanlanmaning o‘rta arifmetik qiymati va dispersiyasi

$$x = \frac{12+12+12+12+5}{16} = \frac{53}{16}$$

o‘rta kvadratik xatoligi esa

$$\delta = 1{,}3564$$

Tanlanmaning modasi va medianasi mos ravishda chunki eng katta chastota 6 ga teng bo‘lgan varianta 2, variantalar soni 5 ta, o‘rtadagi varianta 6 ta.

Variatsiya, assimetriya, ekssessiya koyeffitsientlari mos ravishda:

$$V = \frac{\delta}{x} \cdot 100\% = 40{,}9479 \quad A_s = \frac{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i (x_i - \overline{x})^2}{\delta^3} = 0{,}14598$$

$$l_n = -0{,}8772$$

310. Tajriba har bir bosh sigirdan sogib olingan sut miqdorini kuzatishdan iborat bo‘lsin. Bu kursatkich yarim yillik Namangan nohiya bo‘yicha quyidagicha taqsimlangan (tonna hisobida):

x_i	1.12	1.26	1.34	1.37	1.57	1.64
n_i	1	2	3	3	2	1

bu erda – xo‘jaliklar soni.

Nohiya bo‘yicha yarim yil ichida har bir bosh sigirdan o‘rtacha soғib olingan sut miqdori, o‘rta kvadratik xatoligi, variatsiya koyeffitsienti aniqlansin va viloyat ko‘rsatkichi bilan solishtirilsin.

Yechish.

$$\overline{\alpha} = \frac{16,89}{12} = 1,49 \qquad \delta = \sqrt{\frac{0,3057}{12}} \approx 0,16$$

$$V = \frac{\delta}{\overline{x}} \cdot 100\% \approx 11,319\%$$

Namangan nohiya bo'yicha o'rtacha ko'rsatkich viloyat o'rtacha ko'rsatkichidan yaxshi, o'rtacha kvadratik xatoligi (oғishi) ko'proq.

311. Kuzatish [0,7; 1,5] kesmadagi zarrachalar sonini aniqlashdan iborat.

$x_i - x_{i+1}$	0,7-0,8	0,8-0,9	0,1-1,0	1,0-1,1	1,1-1,2	1,2-1,3	1,3-1,4	1,4-1,5
n_i	2	5	3	4	3	5	3	2

n_i bunda $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos kelgan zarrachalar soni. Nisbiy chastotalar gistogrammasi chizilsin.

312. Tajriba ma'lum territoriyada 6 yil ichida ekilgan har bir 1000 dona chigitdan unib chiqqan nihollarni kuzatishdan iborat bo'lsin: 900, 950, 940, 850, 860, 870. Tasodifiy miqdorning empirik taqsimot, empirik taqsimot funksiyasi, o'rta arifmetik qiymati, tanlanma dispersiyasi, taqsimotning o'rta kvadtarik hatolari topilsin va nisbiy chastotalar poligoni chizilsin.

313. Ma'lum territoriyadagi paxta maydonida 10 tup ғo'za ajratilgan va har biridagi ko'saklar soni (x_i) sanalgan:

x_i: 5; 6; 7; 8; 9; 10

n_i: 1; 1; 3; 2; 2; 1

x_i miqdorning modasi, medianasi, variatsiyasi, assimetriya, ekssessiya koeffitsientlari topilsin.

314. Tajriba har bir bosh sigirdan sog'ib olngan sut miqdorini kuzatishdan iborat bo'lsin. Bu ko'rsatkich yarim yillikda (1983). Namangan viloyati tumanlar bo'yicha quyidagi taqsimlangan (tonna hisobida).

(Bu erda $n = \sum n_i = 10$ - tumanlar soni). Viloyat bo'yicha yarim yil ichida har bir bosh sigirdan sog'ib olingan sut miqdori, sut miqdorining o'rta kvadratik xatoligi, variatsiya koeffitsienti aniqlansin.

317. Respublikamiz ho'jaliklararo korxonalarda qoramol soni 1979-1983 yillarda quyidagicha bo'lgan (million bosh hisobida).

x_i: 92,3; 93,2; 94,2; 96,4

n_i: 1; 1; 1; 1.

Qoramol sonining 5 yil ichida o'rta arifmetik qiymati, o'rta kvadratik hatoligi, medianasi, variatsiyasi, assimetriya, ekssessiya koeffitsientlari aniqlansin.

2-§. Parametrlarni baholash.

Nazariy taqsimot θ noma'lum parametrining $x_1, x_2, ..., x_n$ kuzatish asosida statistik bahosi $\theta^*(x_1, x_2, ..., x_n)$ bo'lsin. Agar $M\theta^* = \theta$ bo'lsa, θ^* bosh to'plam uchun siljimagan baho bo'ladi. Bosh to'plamning matematik qutilishi uchun siljimagan baho sifatida tanlanma o'rta arifmetik qiymat olinadi.

Agar $\lim\limits_{n\to\infty} M\theta^* = \theta$ bo'lsa, u holda θ^* asimpotik siljimagan hato deyiladi.

Berilgan n hajmli tanlanma to'plamdagi eng kichik dispersiyaga ega bo'lgan statistik baho effektiv baho deyiladi, ya'ni θ parametr hamda φ_1 va φ_2 bahoga qaraganda effektivroq bo'ladi.

Agar har qanday $\varepsilon > 0$ uchun ushbu

$$n \to \infty \partial a \quad P\left\{\left|\theta^* - \theta > \varepsilon\right|\right\} \to 0$$

munosabat o'rinli bo'lsa, uholda θ^* baho θ^* parametrning asosli bahosi deyiladi.

θ parametrni qoplaydigan intervalning uchlari bo'lgan ikkita son bilan aniqlanadigan baho interval baho deyiladi.

Baholanayotgan parametrni berilgan γ ishonchlilik $P\left(\left|\theta - \theta^*\right| < \delta\right) = \gamma$ bilan qoplaydigan interval ishonchlilik intervali deyiladi.

n hajmli tanlanma normal taqsimlangan bo'lib, o'rta kvadratik hatoligi σ ma'lum bo'lsa, $M\xi$ ning $\bar{x}$ o'rta arifmetik qiymati bo'yicha intervalli bahosi

$$\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < M\xi < \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

bo'ladi, bu erda t Laplas funksiyasi argumentining $\phi(t) = \frac{1}{2}$ tenglikni qanoatlantiradigan qiymati.

Agar tanlanmaning o'rta kvadratik xatoligi σ no'malum bo'lsa, u holda $M\xi$ uchun $\bar{x}$ bo'lgan intervalli baho

$$\bar{x} - t_j\frac{S}{\sqrt{n}} < M\xi < \bar{x} + t_j\frac{S}{\sqrt{n}}$$

Bo'ladi, bu erda $S = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\sigma$ tuzatilgan o'rta kvadratik hatolik, t_j esa jadvaldagi (3-ilova) n va j lar bo'yicha topiladigan funksiya.

Tuzatilgan dispersiya bosh dispersiyaning siljimagan bahosi bo'ladi.

318. Paxta ekilgan territoriyada (5 sentyabr, 2003 yil) paxta hosilini oldindan taxminiy aniqlash uchun tasodifiy ravishda 10 tup g'o'za ajratib olindi va g'o'za tuplaridagi ko'saklar sanaldi:

x_i:	7	8	9	10	11	12
n_i:	1	2	3	2	1	1

SHu territoriyadagi ko'saklar uchun bosh to'plam matematik qutilishini va bosh to'plam dispersiyasi uchun siljimagan baholarni toping.

Yechish. Bosh to‘plamning matematik qutilishi uchun siljimagan baho sifatida tanlanmaning o‘rta arifmetik qiymatini olish mumkin:

$$\bar{x} = \frac{93}{10} = 9,3$$

Bosh to‘plam dispersiyasi uchun siljimagan baho sifatida tuzatilgan tanlanma dispersiyani olish mumkin:

$$S^2 = \frac{n}{n-1}\sigma^2 = 2,2\,(3).$$

319. Tajriba, o‘lchash vaqtida yo‘l qo‘yiladigan amaliy hatoligi nolga teng bo‘lgan, massani o‘lchaydigan asbobning aniqlik darajasini aniqlashdan iborat bo‘lsin. SHu asbob yordamida bir dona ko‘sakdi etilgan paxta og‘irligini ketma-ket 4 marta o‘lchash natijasi (gramm hisobida) quyidagicha: 4,50, 4,49, 4,51, 4,50. o‘lchash natijasida yo‘l qo‘yiladigan hatolikni aniqlash uchun olingan quyidagi

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i-1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2}, \qquad \sigma_1 = \sqrt{\frac{\pi}{2n(n-1)}}\sum_{i=1}^{n}\left|x_i - \bar{x}\right|$$

O‘rta kvadratik chetlanishlarning qaysi biri dispersiya uchun effektivroq baho bo‘ladi?

Yechish. σ_1 va σ_2 ni hisoblaymiz:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{4}\cdot 5} \approx 1,118, \quad \sigma_2 = 3\sqrt{\frac{\pi}{8\cdot 3}} \approx 1,085$$

Agar $\mathrm{M}\sigma_1 = \sigma, \mathrm{M}\sigma_2 = \sigma$ ligini e’tiborga olsak,

$$\mathrm{M}(\sigma_2 - \sigma)^2 < \mathrm{M}(\sigma_1 - \sigma)^2$$

bajariladi, demak, σ_2 baho σ_1 bahoga qaraganda effektivroq bo‘ladi.

320. 16 xajmli tanlanmaning o‘rta arifmetik qiymati 12, o‘rta kvadratik hatoligi $\sigma = 0,3$ bo‘lib, bosh to‘plam ξ normal taqsimlangan bo‘lgan holda matematik qutulish uchun 0,90 ishonchlilik bilan ishonchlilik intervali tuzilsin.

Yechish. SHartga ko‘ra

$$\phi(t) = \frac{0,5}{2} \text{ yoki } \phi(t) = 0,45$$

u holda jadvalning (2-ilova) $t \approx 1,65$, demak,

$$\bar{x} - t\frac{\sigma}{\sqrt{n}} < \mathrm{M}\xi < \bar{x} + t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

ga asosan

$$11,87625 < \mathrm{M}\xi < 12,12375$$

321. Bosh to‘plam normal taqsimlangan bo‘lib, o‘ning o‘rta kvadratik chetlanishi $\sigma = 0,90$. Bosh to‘plam matematik qutilishning tanlanma o‘rta kvadratik qiymat bo‘yicha bahosining aniqligi 0,81 ishonchlilik bilan 0,1 ga teng bo‘lishi uchun tanlanma xajmi qanchaga teng bo‘lishi kerak?

Yechish. Baho aniqligi $S = t \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ formula yordamida topiladi. Bundan tanlanma hajmi $n = \frac{t^2 5^2}{S^2}$.

Agar $\phi(t) = \frac{0,81}{2}$ ligini e'tiborga olsak, 2-ilovadagi jadvalga ko'ra $t = 1,31$.
Demak, nq139.

322. Tajriba oilalardagi bolalar sonini aniqlashdan iborat bo'lsin. Namangan shahrida tasodifiy ajratilgan 10 ta oilada bolalar soni quyidagicha taqsimlangan:

x_i:	1;	2;	3;	4;	5;	6;	7;	9
n_i:	1;	2;	3;	1;	1;	1;	1;	1.

Namangan shahrida har bir oiladagi bolalar sonining matematik qutilish va dispersiyasi uchun siljimagan baho topilsin.

323. Tajriba g'o'zaning asosiy poyasidagi bo'g'inlar sonini aniqlashdan iborat bo'lsin. (Namingan viloyati, Mingbuloq tumani, 2003 yil, 5 sentyabr) Tasoidifiy olingan 27 tup g'o'zadagi bo'g'inlar soni quyidagicha:

x_i:	9;	10;	11;	12;	13;	14
p_i:	2;	3;	8;	9;	4;	1

/o'zalarning asosiy poyasidagi bo'g'inlar sonining matematik qutilishi va dispersiyasi uchun siljimagan baho topilsin.

324. Tajriba sizot suvlar chuqurligini o'lchashdan iborat bo'lsin (mert hisobida). O'lchashlar 1994-2003 yillar davomida Norin-Qoradaryo oralig'ida mart oyida ma'lum bir zonada olib borilgan:

x_i:	1,55	1,61	1,68	1,71	2,13	2,36	2,46	2,38
p_i:	1	1	1	1	1	2	1	2

Sizot suvlar chuqurligi matematik qurilish va dispersiya uchun siljimagan baho topilsin.

325. Tajriba pillalarning qobiqlari og'irliklarini aniqlashdan iborat bo'lsin (mg hisobida):

x_i:	318	330	350	370	400	410
n_i:	1	1	5	3	3	1

Pillalarning qobiqlari og'irliklarining matematik qutilishi va dispersiyasi uchun siljimagan baho topilsin.

326. Tajriba yashikdagi olmalar sortini aniqlashdan iborat bo'lsin. 3 yashiqdagi olmalarning har birida to'rtinchi sortli olmalar quyidagicha taqsimlangan: 5, 4, 3. umuman, partiyadagi olmalarning to'rtinchi sortlilarini aniqlash maqsadida o'rta kvadratik sortlanishni hisoblash uchun

$$\sigma_1 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \xi)^{\ell}}{n}}, \qquad \sigma_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \frac{\left(x_i - \bar{x}\right)^2}{n-1}}$$

formulalar olingan. σ_1 va σ_2 ning qaysi biri o‘rta kvadratik chetlanish uchun effektivroq baho bo‘ladi?

327. Bosh to‘plam ξ normal taqsimlangan. Uning matematik qutilishi uchun 0,89 ehtimollik bilan ishonchlilik intervali tuzilsin. O‘rta kvadratik chetlanish 0,4, o‘rta arifmetik qiymat 14 va tanlanma hajmi 81.

328. Tajriba ma’lum territoriyadagi gipsning er sirtidan qancha pastda (x_i sm hisobida) joylashganligini aniqlashdan iborat bo‘lsin:

x_i:	21;	24;	26;	28
n_i:	2;	3;	3;	2

Agar qaralayotgan territoriyada gips normal taqsimlangan deb faraz qilinsa, u holda ξ ning matematik qutilishi uchun 0,99 ishonchlilik bilan intervalli baho tuzing.

329. 40 tabir hil lampa uchun ishlash vaqtining o‘rta arifmetik qiymati xq2800 soat va o‘rta kvadratik hatoligi $\sigma = 30$ soatni tashkil qilsin. Agar har bir lampaning ishlash vaqti normal qonun bo‘yicha taqsimlangan bo‘lsa, u holda matematik qutilish uchun 0,98 ishonchlilik bilan intervalli baho tuzilsin.

3-§. Korrelyasiya koeffitsienti. Regressiya tenglamasi.

x va u miqdorlar ustida kuzatish olib borish natijasida

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \qquad y_1, y_2, \dots, y_n$$

qiymatlar hosil qilingan bo‘lsa, u holda

$$\tau_{x,y} = \frac{\sum_{i-1}^{n} x_i y_i - n\bar{x}\bar{y}}{n\sigma_x \sigma_y}$$

ifodani tanlama korrelyasiya koeffitsienti deyiladi: $\left|\tau_{x,y}\right| \le 1$

Xususan, $-1 \le \tau_{\bar{x,y}} < 0$ bo‘lsa, u holda bu miqdorlardan birining ortishi mos ravishda ikkinchisining kamayishiga olib keladi.

Agar $\left|\tau_{x,y}\right| = 1$ bo‘lsa, u holda x va y orasida chiziqil korellatsiya mavjud bo‘ladi. Ushbu

$$y_x = kx + b, \; k = \tau_{x,y} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \; b = \bar{y} - k\bar{x}$$

ifoda x ga chiziqli regressiya tenglamasi,

$$x_y = k_1 y = b_1 \left(k_1 - \tau_{x,y} \frac{\sigma_x}{\sigma_y}, \; b_1 = \bar{x} - k_1 \bar{y} \right)$$

ifoda esa x ning y ga regressiya tenglamasi deb ataladi.

Regressiya tenglamasi $y_x = ax^2 + bx + c$ egri chiziq bilan ifodalansa, a,b,c lar

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

sistemaning yechimidan aniqlanadi.

Agar bir necha belgi (x, y, z) orasidagi boғlanish o‘rganilayotgan bo‘lsa, ular orasidagi bog‘lanishni ko‘plik (birgalikda)korrelyasiya deyiladi va uning regressiya tenglamasi

$$z - \bar{z} = A\left(x - \bar{x}\right) + B\left(y - \bar{y}\right)$$

bo‘lib, bu erda

$$A = \frac{\tau_{xz} - \tau_{xy}\tau_{yx}}{1 - \tau_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}, \qquad B = \frac{\tau_{yz} - \tau_{xz}\tau_{xy}}{1 - \tau_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_z}{\sigma_y}$$

330. Buzoqchalarning tug‘ilishdagi x(kg) tirik vazni va sutkalik semirishi y (kg) berilgan bo‘lsin:

x: 20; 22; 22,5; 23; 24; 25; 30; 33

y: 0,62; 0,91; 0,82; 0,74; 0,91; 0,98; 0,72; 1,10

Korrelyasiya koeffitsienti topilsin.

Yechish. Korrelyasiya koeffitsientini topish uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	y	x^2	y^2	xy
20	0,62	400	0,3844	12,40
22	0,91	484	0,8281	20,02
22,5	0,82	506,25	0,6724	18,45
23	0,74	529	0,5476	17,02
24	0,91	576	0,8281	21,84
25	0,98	625	0,9604	24,50
30	0,72	900	0,5184	21,6
33	1,10	1039	1,2100	36,3

$\sum$ 199,52 6,80 5109,25 5,9494 172,13

Natija $\bar{x} = 24,94$; $\bar{y} = 0,85$; $\sigma_x = 4,084$; $\sigma_y = 0,1456$; $\tau_{xy} = 0,534$.

331. Norin-Qoradaryo oralig‘ining bitta nuqtasida 1988-1998 yillarning mart-aprel oylarida sizot suvlari chuqurligi o‘lchangan:

	1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
x,mart	1,65	1,61	1,71	2,58	2,91	2,69	2,36	1,68	2,46	2,13
u, aprel	1,49	1,55	1,08	2,69	2,97	2,71	2,45	1,82	1,36	2,13

Mart-aprel oylaridagi sizot suvlar chuqurligining regressiya tenglamalari tuzilsin.
Yechish. Korrelyasion jadval tuzamiz:

x	y	x^2	y^2	xy
1,55	1,49	2,402	22,20	2,309
1,61	1,55	2,592	2,402	2,435
1,71	1,08	2,924	1,166	1,847
2,58	2,69	6,656	7,236	6,940
2,91	2,97	8,468	8,821	8,643
2,69	2,71	7,236	7,344	7,290
2,36	2,45	5,570	6,002	5.782
1,68	1,82	2,822	3,312	3.058
2,46	2,36	6,052	5,569	5.806
2,13	2,13	4,537	4,537	4.537

Σq21,68 21,25 49,257 48,609 48,707

Demak, $\bar{x} = 2,168$; $\bar{y} = 2,125$; $\sigma_x = 0,475$; $\sigma_x = 0,588$; $\tau_{xy} = 0,944$

Natijada

$$y_x = \tau_{xy} \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \bar{x}\right) + \bar{y}$$

formulaga ko‘ra

$$y_x = 1,169(x - 2,168) + 2,125, \quad x_y = 0,763(y - 2,125) + 2,168$$

yoki

$$y_x = 1,169x - 0,409, \quad x_y = 0,763y + 0,547.$$

332. 25 studentdan iborat gruppaning davomati 12 kun kuzatilgan:

x	1	2	3	1	2	0	3	1	2	1	0	2
y	24	23	22	24	23	25	22	24	23	24	25	23

Turli sabablarga ko‘ra darsga kelmagan studentlar soni X ning darsga kelagnalar soni U ga nisbatan regressiya tenglamasi tuzilsin.
Yechish.

x	y	x^2	y^2	xy
1	24	576	1	24
2	23	529	4	46
3	22	484	9	46
1	24	576	1	24
2	23	529	4	46
0	25	625	0	0

3	22	484	9	66
1	24	576	1	24
2	23	529	4	46
1	24	576	1	24
0	25	625	0	0
2	23	529	4	46

Σ 18 282 6638 38 412

Demak, $\bar{x}=1,5,\quad \bar{y}=23,5;\quad \sigma_x=0,96;\quad \sigma_y=0,96;\quad \tau_{xy}=1$

u holda $x_y=-y+25$ ma'lum tenglik kelib chiqadi.

333. Umumiy ta'lim maktablarida o'quv yili boshida o'quvchilar soni u (million hisobida) berilgan:

x	1993	1994	1995	1996	1997
y	41,78	60,75	60,35	59,59	58,83

x ning u bo'yicha ikkinchi tartibli egri chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.
Yechish. Hisoblash jadvalini tuzamiz: Natijada quyidagini tuzamiz:

$$\begin{cases} 54513397a+932143b+16038c=31759407 \\ 932143a+16098b+281,3c=554814 \\ 16098a+281,3,b+5c=9858 \end{cases}$$

Demak, $x_y=0,046y^2-3,37y+2013.$

334. 331-masaladan keltirilgan ma'lumotlar bo'yicha mart oyidagi sizot suvlar chuqurligini aprel oyidagi sizot suvlar chuqurligiga (u) nisbatan 2-tartibli egri chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.
Yechish: Hisoblash jadvalini tuzamiz:

x	y	y	y	y	Xy	Xy
1,55	1,49	2,22	3,31	4,93	2,31	3,44
1,61	1,55	2,40	3,72	5,77	2,49	3,86
1,71	1,08	1,17	1,26	1,36	1,85	2,00
2,58	2,62	7,24	19,46	52,36	6,94	18,68
2,91	2,97	8,82	26,20	77,80	8,64	25,67
2,69	2,71	7,34	19,90	53,94	7,29	19,74
2,36	2,45	6,00	14,71	36,03	5,78	14,16
1,68	1,82	3,31	6,03	10,97	3,06	5,56
2,46	2,36	5,57	13,14	31,02	5,81	8,13
2,13	2,13	4,54	9,66	20,58	4,54	9,67

$\Sigma=21,68$ 21,25 48,61 117,39 294,76 48,71 110,91

Demak,

$$\begin{cases} 294,76a + 117,39b + 48,61c = 110,91 \\ 117,39a + 48,61b + 21,25c = 48,71 \\ 48,61a + 21,25b + 10c = -8,30 \end{cases}$$

Bundan aq-2,25; bq10,05; cq-8,30.

SHunday qilib, tenglama ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\tau_y = -2,25y^2 + 10,05y - 8,30.$$

335. 10 tup g‘o‘zaning bo‘yi x (sm), asosiy poyadagi bo‘g‘inlar soni u, g‘unchalar soni z berilgan:

x	43	48	38	42	41	37	40	44	39	47
y	10	11	9	10	10	8	9	11	9	11
z	15	16	12	15	14	13	14	17	13	16

x ning u va z ga nisbatan regressiya tenglamasi tuzilsin.

Yechish: regressiya koeffitsientlarni topish uchun quyidagi jadvalni tuzamiz:

x	y	z	x^2	y^2	z^2	xy	Xz	Yz
43	10	15	1849	100	225	420	695	150
45	11	16	2025	121	256	495	720	176
37	9	12	1444	81	144	342	456	108
42	10	15	1764	100	225	420	630	150
41	10	1	1681	100	196	410	574	140
37	8	13	1369	64	169	296	481	104
40	9	14	1600	81	196	360	560	126
44	11	17	1936	121	289	484	748	187
39	9	13	1521	81	169	351	507	117
47	11	16	2209	121	256	517	752	167
$\Sigma = 416$	98	145	17398	970	2125	4105	6073	1434

Demak,

$$\bar{x} = 41,6; \qquad \bar{y} = 9,8; \qquad \bar{z} = 14,5,$$

$$\sigma_x = 3,03, \qquad \sigma_y = 1, \qquad \sigma 1 = 1,52,$$

$$\tau_{xy} = 0,924, \quad \tau_{xz} = 0,891 \quad \tau_{yz} = 0,867.$$

Natijada

$$A = \frac{\tau_{xy} - \tau_{xy}\tau_{zy}}{1 - \tau_{xy}^2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 0,723,$$

$$B = \frac{\tau_{xy} - \tau_{xz}\tau_{zy}}{1 - \tau_{zy}^2} \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y} = 1,92,$$

u holda

$$x = 0,726z + 1,92y + 12,31.$$

336. Sigirlarning vazni x (kg) va sog'in davridagi sut miqdori u (kg) orasidagi korrelyasiya koeffitsienti topilsin:

x	420	450	380	425	460	390	430	380	400
y	2000	2050	2020	2030	2010	2040	2070	2060	2010

337. Gruppadagi 10 sutdentning og'irligi x (kg) va bo'yi y (sm) orasidagi korrelyasiya koeffitsienti topilsin.

x	60	65	70	80	75	55	63	71	56	50
y	155	160	170	180	170	160	165	170	160	155

338. Tumandagi ho'jaliklar paxta maydoni x (ming ga) va yillik paxtadan olingan hosil u (ming tonna) berilgan:

x	2,5	3,4	2	1,5	1	1,7	2,3	1,9	1,6	1,3
y	8,2	11,2	6,6	4,9	3	5,6	8,2	6,3	5,2	4,2

Paxta maydoni va hosildorlik orasidagi korrelyasiya koeffitsienti topilsin.
339. 10 dona pillaning eni x (sm) va bo'yi u (sm) berilgan:

x	1,45	1,50	1,60	1,70	1,80	1,85	1,90	1,55	1,65	1,75
u	3,20	3,25	3,30	3,35	3,40	3,45	3,65	3,26	3,33	3,37

Pillaning bo'yi va eni orasidagi korrelyasiya koeffitsienti topilsin.
340. Kunlik havo temperaturasi t (gradus) va T vaqt (soat) berilgan:

T	0	6	9	11	13	15	16	18	20	22
t	10	9	11	14	16	18	20	18	14	12

Temperatura va vaqt orasidagi korrelyasiya koeffitsienti topilsin.

341. O'zbekistondagi yirik suv omborlarida to'plangan suv miqdori x (mlrd. m^3) va foydalanilgan suv miqdori y (mlrd. m^3) berilgan:

Suv ombori nomi	**x**	**u**
Kattaqo'rg'on	1	0,88
CHorvoq	2	1,50
Jizzax	0,09	0,08
Andijon	1,75	1,60
Janubiy Surxon	0,80	0,61
Uchqizil	0,16	0,08
CHimqo'rg'on	0,50	0,45
Pachkamar	0,26	0,25
Quyimozor	0,35	0,30

Kosonsoy	0,16	0,15
Karkidon	0,22	0,21
Toshkent	0,25	0,22

To‘planadigan suv miqdorining foydalaniladigan suv miqdoriga chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.

342. To‘qqizta xo‘jalikda olingan don hosilining har bir sentneriga sarflangan ish kuni x va har bir sentner donning tannarxi u (so‘m) berilgan:

x	0,40	0,72	1,04	1,36	1,68	2,00	2,32	2,64	2,70
u	7,64	3,56	1,36	13,03	14,27	14,74	16,29	16,66	11,99

x miqdorning u miqdorga chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.

343. Tajriba uchastkasidagi 1 ga maydonga 1994-2003 yillar mobaynida har yili x (tonna) miqdorda turli mineral o‘g‘itlar natijasida olingan paxta u (sentner) berilgan:

x	0,2	0,21	0,22	0,23	0,24	0,25	0,26	0,27	0,28	0,29
u	30	31	31,5	33,2	34	34,5	35	35,6	39	40

u ni x ga nisbatan chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.

344. Nohiyalarning 1991 y. va 1997 y (ming kishi) quyidagi ikki miqdorni regressiya tenglamasi tuzilsin:

345. Aholi uchun quyidagi jadval keltirilgan. x, yillar 1994,1995, 1996, 1997, 1998, 1999 u (milliard)

0,240 0,242 0,244 0,246 0,256 0,258 0,260

u ning x ga ikkinchi tartibli chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.

346. Namangan viloyat Mingbuloq tuman «Gulboq» jamoa xo‘jaligining ma’lum qismida yillar davomida hosildorlik u (sentner) berilgan.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
u	1,80	1,90	1,85	1,82	1,80	1,77	1,76	1,73	1,75	1,85	1,86	1,90

u ning x ga ikkinchi tartibli egri chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.

348. Buzoqchalarning tug‘ilishdagi tirik vazni x (kg) ning sutkalik semirish u (kg) ga nisbatan ikkinchi tartibli egri chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.

x	19	21	21,5	22	23	24	24,5	25	30	31
u	0,60	0,7	0,8	0,81	0,81	0,85	0,86	0,88	0,89	0,90

349. 338-masalada keltirilgan ma’lumotlar bo‘yicha yillik paxta hosili u ning paxta maydoni x ga nisbatan ikkinchi tartibli egri chiziqli regressiya tenglamasi tuzilsin.

350. Ma'lum uchastkada 10 yil davomida bug'doy ekilgan. Har yili har bir gektarga bir hil miqdorda u (tonna hisobida) mineral o'g'it solingan va gullash davridagi yog'ingarchilik miqdori z (mm hisobida) ni hisobga olingan holda hosildorlik x (sentner) kuzatilgan:

x	20	21	23	20,5	22	24	23,2	254,1	22,5	21,5
y	0,8	0,81	0,9	0,82	0,89	1,1	1	1,2	0,91	0,92
z	100	120	110	100	115	200	150	120	140	250

x ning u va z ga regressiya tenglamasi tuzilsin.

351. Namngan viloyati Mingbuloq tuman «Gulbog'» jamoa xo'jaligi ma'lum qismida yillar davomida mart-sentyabr oylaridagi o'rtacha sizot suvlar chuqurligi x (sm), yillik mineral o'g'it u (tonna) va hosildorlik z (ga, sentner) berilgan:

x	1,3	1,2	1,5	1,1	0,9	0,95	0,85	0,80	0,91	0,98
y	1	0,9	0,91	1,1	0,8	0,89	0,83	0,81	0,82	0,85
z	36	32	37	30	27	28	23	22	27	28

z ning x va u ga regressiya tenglamalari tuzilsin.

Amaliy mashqulotlarda foydalaniladigan asosiy darslicklar va o'quv qo'llanmalar

1.Б.А.Севастянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.

2.A.A.Abdushukurov, T.A.Azlarov, A.A.Djamirzaev «Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan misol va masalalar to'plami» Toshkent, «Universitet», 2003 y.

3 . R.Ibragimov, A.Mashrabboev .A.Polvanov , Ehtimollar nazariyasi va matematik statistikadan masalalar to'plami, Namangan,NamDU 2018y.

4.L.Doob,Probability and statistics,-Trans.Amer. Math.Soc. Nev York ,(1934) ,1976 .

4.
Mystaqil ta'lim mashg'ulotlari

Mustaqil ta`lim tashkil etishning shakli va mazmuni.

"Ehtimollar nazariyasi" bo'yicha talabaning mustaqil ta`limi shu fanni o'rganish jarayonining tarkibiy qismi bo'lib, uslubiy va axborot resurslari bilan to'la ta`minlangan.

Talabalar auditoriya mashg'ulotlarida professor-o'qituvchilarning ma`ruzasini tinglaydilar, misol va masalalar yechadilar. Auditoriyadan tashqarida talaba darslarga tayyorlanadi, adabiyotlarni konspekt qiladi, uy vazifa sifatida berilgan misol va masalalarni yechadi. Bundan tashqari ayrim mavzularni kengroq o'rganish maqsadida qo'shimcha adabiyotlarni o'qib referatlar tayyorlaydi hamda mavzu bo'yicha testlar yechadi. Mustaqil ta`lim natijalari reyting tizimi asosida baholanadi.

Uyga vazifalarni bajarish, qo'shimcha darslik va adabiyotlardan yangi bilimlarni mustaqil o'rganish, kerakli ma`lumotlarni izlash va ularni topish yo'llarini aniqlash, internet tarmoqlaridan foydalanib ma`lumotlar to'plash va ilmiy izlanishlar olib borish, ilmiy to'garak doirasida yoki mustaqil ravishda ilmiy manbalardan foydalanib ilmiy maqola va ma`ruzalar tayyorlash kabilar talabalarning darsda olgan bilimlarini chuqurlashtiradi, ularning mustaqil fikrlash va ijodiy qobiliyatini rivojlantiradi. Shuning uchun ham mustaqil ta`limsiz o'quv faoliyati samarali bo'lishi mumkin emas.

Uy vazifalarini tekshirish va baholash amaliy mashg'ulot olib boruvchi o'qituvchi tomonidan, konspektlarni va mavzuni o'zlashtirish darajasini tekshirish va baholash esa ma`ruza darslarini olib boruvchi o'qituvchi tomonidan har darsda amalga oshiriladi.

"Pirson egriligi yordamida emperik taqsimotining zichlik funksiyasini toppish.

"Ehtimollar nazariyasi " fanidan mustaqil ish majmuasi fanning barcha mavzularini qamrab olgan va quyidagi 13 ta katta mavzu ko'rinishida shakllantirilgan.

Izoh: Mustaqil ta`lim soatlari hajmlaridan кelib chiqqan holda ishchi dasturda mazкur mavzular ichidan mustagil ta`lim mavzulari shaкllantiriladi.

Talabalar mustaqil ta`limining mazmuni va hajmi
5 semestr

№	Mustaqil ta`lim mavzulari	Berilgan topshiriqlar	Bajar. muddat.	Barcha soatlar
	5 semestr			
1	Kombinatorika asosiy printsipi va kombinatorikaning ba`zi formulalari.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	1,2 - haftalar	4
2	Ehtimolni hisoblashning klassik, geometrik va statistik usullarining chegaralanganligi. Uzluкsiz va sanoqli additivliк aкsiomalari orasidagi munosabat.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	3,4- haftalar	8
3	A.N.Kolmogorov aкsiomalaridan кelib chiqadigan ehtimolning	Adabiyotlardan konspekt qilish.	5,6	8

	xossalari. Shartli ehtimollик. Hodisalar bog‘liqsizligi va bog‘liqsiz hodisalar yig‘indisi ehtimoli. To‘la ehtimollик va Bayes formulalari.	Masalalar yechish. Mustaqil topshiriqlarni bajarish.		
4	Hodisalarning o‘z to‘plamida bog‘liqsizligi va juft-jufti bilan bog‘liqsizligi orasidagi munosabat. Bernshteyn misoli	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	7,8 haftalar	6
5	Bog‘liqsiz tajribalar кetma-кetlining Puasson sxemasi. Bog‘liqsiz tajribalar кetma-кetligi	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	9,10 haftalar	6
6	Hosil qiluvchi funкtsiyalar. Ehtimollarning polinomial taqsimoti	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	11-12 haftalar	4
7	Amaliyotda uchraydigan ba`zi muhim taqsimotlarni o‘rganish. Kompozitsiya formulasi isboti va misollar	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	13,14- haftalar	6
8	Matematiк кutilma yoкi dispersiyasi mavjud bo‘lmagan tasodifiy miqdorlarga misollar tuzish.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	15,16 haftalar	**6**
9	Korrelyatsiya кoeffitsientini amalda qo‘llanishi.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	16 hafta	2

№	**Mustaqil ta`lim mavzulari**	**Berilgan topshiriqlar**	**Bajar. muddat.**	**Barcha soatlar**
		6 semestr		
1	. Katta sonlar qonuniga oid Marкov, Xinchin va Kolmogorov teoremalari taxlili.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	1-2 - haftalari	9
2	Lindeberg sharti ostida marкaziy limit teoremani isbotlash	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	3-5 hafta	5
3	Xaraкteristiк funкtsiya va xossalari	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	6-8 - haftalari	5
4	Markov zanjiri.	Adabiyotlardan konspekt qilish. Individual topshiriqlarni bajarish	9-11 haftalari	5
				Jami 74

Глоссарий

“EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA”

GLOSSARIY

O’zbek tilida

I –tur xatolik- qaror qabul qilish jarayonida to’g’ri gipotezaning inkor etilishi.

II-tur xatolik- qaror qabul qilish jarayonida noto’g’ri gipotezening qabul qilinishi.

Alternativ gipoteza- qaralayotgan asosiy gipotezadan boshqa gipotezalar

Asosiy gipoteza- to’g’ri yoki noto’g’riligi tekshirilayotgan gipoteza.

Asosli baho-tanlanma taqsimotining noma’lum parametrining bahosining noma’lum parametrga baho qiymatlarining yaqin bo’lishi.

Baho- tanlanmaning har qanday sonli funksiyasi.

Bernulli sxemasi-ikki natijaga ega bo’ladigan bog’liqmas sinovlar ketma-ketligi.

Birgalikda bo’lmagan hodisa-bir vaqtda ro’y berishi mumkin bo’lmagan hodisalar.

Bog’liq hodisalar-birining ro’y berishi, ikkinchisining ro’y bergan yoki ro’y bermaganligiga bog’liq bo’lgan hodisalar.

Bog’liqmas sinovlar- qaror qabul qilish jarayonida.

Bog’liqmas hodisalar-natijalari bog’liqmas bo’lgan sinovlar.

Vaqtga bog’liq qator- sonli ketma- ketlik bo’lib, uning elementlari vaqtga bog’liq jarayonning qiymatlaridan iborat.

Variasion qator-o’sish tartibida joylashgan sonlar ketma-ketligi.

Gistogramma- interval variasion qator berilishining grafik usuli.

Diskret tasodifiy miqdor-chekli yoki sanoqli sondagi turli qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo’lgan tasodifiy miqdor.

Dispersion tahlil-sifat omillarining o’zgarishiga bog’liq natijalarning statistik tahlil qilinishi.

Dispersiya-tsaodifiy miqdor qabul qiladigan qiymatlarning, shu tasodifiy miqdor matematik kutilishidan o’tacha chetlanishini ko’rsatuvchi kattalik.

Zichlik funksiya-uzluksiz tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasining hosilasi.

Intervalli baho-baholanayotgan parametrni qoplaydigan intervalning uchlari bo’lgan ikkita son bilan aniqlanadigan baho.

Ishonchlilik oralig’i-baholanayotgan noma’lum parametr qiymatlari ma’lum bir ehtimollik bilan joylashishi mumkin bo’lgan oraliq.

Katta sonlar qonuni-tasodifiy miqdorlar ketma-ketligining ma’lum shartlarda o’zgarmas songa yaqinlashishi.

Kovariasion tahlil- $(a_1,a_2,...,a_L,\gamma,\sigma^2)$ modelning parametrlarini nuqtaviy va intervalli baholarini topish, ular haqidagi har xil gipotezalarni tekshirish imkoniyati.

Korrelyasion bog’lanish-bir tasodifiy miqdorning qiymatlari o’zgarganda ikkinchi tasodifiy miqdor shartli o’rta qiymatining o’zgarishi.

Korrelyasion tahlil-sifat belgilariga va miqdoriy belgilarga ega bo’lgan nazariy-ehtimoliy modellarni o’rganish bilan shug’ullanadi, ya’ni regression va dispersion usullarni birlashtiradi.

Kriteriyning quvvatini oshirish-II –tur hatolikni kamaytirish.

Lyapunov sharti-bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma –ketligi uchun markaziy limit teroremasining o’rinli bo’lish sharti.

Markaziy limit teorema-normal taqsimot funksiyasiga yaqinlashishni ifodalovchi har qanday limit teorema.

Matematik kutilish-tasodifiy miqdor qabul qilishi mumkin bo’lgan o’rtacha qiymat.

Momentlar usuli-tanlanma noma’lum parametrini baholashda nazariy momentlarni empirik momentlarga tenglash natijasida hosil bo’ladigan tenglamalar sistemasini yechish natijasida hosil bo’lgan bahoni tanlash.

Muqarrar hodisa-ma'lum shartlar kompleksi bajarilganda, har doim ro'y beradigan hodisa.

Murakkab gipoteza-tarkibida ikki va undan ortiq taqsimot qonuniga ega bo'lgan gipoteza.

Poligon-diskret variasion qator berilishining grafik usuli.

Reprezentativ tanlanma- asosiy to'plamning xususiyatlarini to'la aks holda ettirish.

Ro'y bermaydigan hodisa-ma'lum shartlar kompleksi bajarilganda ro'y berishi mumkin bo'lmagan hodisa.

Siljimagan baho-bahoning matematik kutilishi baholanayotgan parametrga teng bo'lishi.

Sodda gipoteza-tarkibida bitta taqsimot qonuni bo'lgan gipoteza.

Statistik bog'lanish- bir tasodifiy miqdorning qiymatlari o'zgarganda ikkinchi tasodifiy miqdor taqsimot qonunining o'zgarishi.

Statistik gipoteza-tanlanma noma'lum taqsimot qonunining ko'rinishi haqidagi har qanday gipoteza.

Statistika- tanlanma elementlaridan tashkil topgan har qanday sonli funksiya.

Takrorlanuvchi tanlanma- har bir tanlangan element asosiy to'plamga tanlanma qaytarilishi.

Taqsimot qonuni-diskret tasodifiy miqdorlar qabul qiladigan qiymatlar va shu qiymatlarni qabul qilish ehtimollari.

Taqsimot funksiya-X tasodifiy miqdorning x qiymatdan kichik bo'lish ehtimoli.

Taqsimotning empirik funksiyasi- har bir x_i qiymat uchun $X<x$ hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydigan funksiya.

Tanlanma-bog'liqmas va bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma-ketligi.

Tasodifiy miqdor-elementar hodisalar fazosida aniqlangan har qanday sonli funksiya.

Tasodifiy hodisa-ma'lum shartlar kompleksi bajarilganda ro'y berishi ham, bo'y bermasligi ham mumkin bo'lgan hodisa.

Teng imkoniyatli hodisalar-ro'y berish imkoniyatlari bir xil bo'lgan hodisalar.

Trend- doimo ta'sir etuvchi faktorlarni silliq o'zgarishini ifodalovchi komponenta trend deb ataladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdor-qabul qiladigan qiymatlari sonlar o'qining birorta oralig'ini to'ldirishi mumkin bo'lgan tasodifiy miqdor.

O'rtacha kvadratik chetlanish-tasodifiy miqdor dispersiyasining kvadrat ildizdan chiqarilgan kattalik.

Funksional bog'lanish-ikki nuqta orasida bir qiymatli moslik o'rnatilishi.

Haqiqatga eng yaqin baholash usuli-tanlanmaning noma'lum parametrini baholashda, noma'lum parametrini tanlanmaning ro'y berishi eng katta ehtimolga ega bo'lishi shartida topish usuli.

Hodisalarning to'la guruhi - juft–jufti bilan birgalikda bo'lmagan va yig'indisi muqarrar hodisaga teng bo'lgan hodisalar guruhi.

Hodisa-elementar hodisalar fazosining har qanday qismi.

Shartli ehtimol- bir hodisaning ikkinchi ro'y berganligi shartidagi ehtimollik.

Elementar hodisalar fazosi-har qanday bo'sh bo'lmagan to'plam. Odatda elementar hodisalar fazosi sifatida tajribaning mumkin bo'lgan barcha natijalaridan iborat bo'lgan to'plam qaraladi.

Elementar hodisa-elementar hodisalar fazosining elementi.

Eng katta ehtimolli son-bog'liqmas tajribalar ketma-ketligida biror hodisaning eng katta ehtimollikka ega bo'lgan ro'y berishlari soni.

Effektiv baho-noma'lum parametr uchun baholarning eng kichik dispersiyaga ega bo'lishi.

Ehtimol-hodisaning ro'y berish imkoniyatini ko'rsatuvchi kattalik.

Ruc tilida

Случайное событие – заранее неизвестное событие которые могут произойти или не произойти в результате случайного испытания;
Элементарные событие – любой результат испытания;
Невозможное событие – событие которое никогда не произойдет;
Достоверное событие – событие которое объязательно произойдет в результате испытания;
Несовместимые события – события которые одновременно не произойдет;
Пространство элементарных событии – множество всех элементарных событии, которые могут произойти в результате испытании;
Случайная величина – величина, которая может принимать числовые значение зависящие от случайности;
Дискретная случайная величина – случайная величина, которая принимает конечное или счётное значение;
Непрерывная случайная величина – значение которое принимает некоторый промежуток;
Функция распределение – функция $F(x) = F_\xi(x) = P(\{\xi \le x\})$ которая определена для $x \in R$.
Плотность распределение – производная от функции распредеделения;
Генеральная совокупность – множество всех элементов, которые имеют одинаковый тип;
Выборка – элементы, кторые взяты из генеральной совокупности;
Статистика – любая (измеримая) функция от выборок;
Оценка - статистика, которые принаимают значения от неизвестных параметров;
Несмещенная оценка – статистическая оценка, которая математическое ожидание равно неизвестному параметру;
Состоятельная оценка – статистическая оценка, которая стремится по вероятности к неизвестному параметру;
Эффективная оценка – статистическая оценка минимальной дисперсии;
Статистическая гипотеза – любое предложение о случайных величинах;
Основная гипотеза – гипотеза, которая должна проверятся;
Алтернативная гипотеза – любая гипотеза, противо положная к основному гипотезу;
Ошибка первого рода – при выполнении основной гипотезы, если оно отвергается;
Ошибка второго род – при выполнении алтернативной гипотезы, если оно отвергается;
Коэффициент корреляции – количественный показатель зависимости между двумя случайными величинами;
Нормированная случайная величина – случайная величина, которая математическое ожидание равно 0 (нулю) и дисперсия 1 (единице);
Мода – часто встречающая варианта;

Медиана – варианта, которая вариационный ряд ровно делится по ровну;
Размах вариации – разность между наибольшим и наименьшими вариантами;
Уравнение регрессии – функциональное соотнощение между двумя и более двух случайных величин;

Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika fanidan NVXTXQTVMOI ikkinchi mutax					
Fan bobi	Fan bo'limi	Qiyinlikdarajasi	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob
1	1	2	Uchta kub tashlashda kublarni ustida tushgan sonlar yig\`indisini 16 dan ortiq bo\`lmaslik ehtimolini toping	$\frac{53}{54}$	$\frac{7}{216}$
1	1	2	Idishda 10ta bir xil sharlar bo\`lib ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Tavakkaliga ikkita shar olinganda ularni oq rangli bo\`lish ehtimoli topilsin.	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{45}$
1	1	2	Agar P(A+B)=0,8 va P(A)=0,5 bo\`lsa $P(\bar{A}B)$ ehtimolini toping.	**0,3**	0,6
1	1	2	Idishdagi 25 ta mahsulotdan 5 tasi sifatsiz bo\`lsa, ulardan ketma-ket uchtasi olinganda (takrorsiz), uchchalasini sifatli bo\`lish ehtimolini toping.	$\frac{57}{115}$	$\frac{1}{2}$
1	1	2	Birinchi merganning nishonga tegish ehtimoli 0,8 va ikkinchisiniki 0,7 ga teng. Merganlar nishonga bir vaqtda o\`q otganlarida bitta o\`qni nishonga tegish ehtimolini toping.	**0,38**	0,62
1	1	2	Agar A_1, A_2, A_3 hodisalar	**0,86**	0,14

			bog`liqsiz bo`lib, ularning ehtimollari mos ravishda 0,3, 0,5 va 0,6 bo`lsa. Ulardan kamida bittasini bajarish ehtimolini toping.		
1	1	1	Idishda 10 ta shar bo`lib, ulardan 6 tasi oq, qolganlari qora rangda. Ketma-ket ikkita shar olinganda ikkinchisini oq rangli bo`lish ehtimolini toping.	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$
1	1	2	Idishda 8 ta shar bo`lib, ulardan 5 ta oq qolganlari qora rangda. Ketma-ket ikkita shar olinganda ikkalasini oq bo`lish ehtimolini toping.	$\frac{5}{14}$	$\frac{25}{64}$
1	1	1	Uchta tanga tashlash tajribasida hammasida bir tomoni bilan tushish ehtimolini toping.	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$
1	1	1	Mahsulotni sifatli bo`lish ehtimoli 0,7 bo`lsa, ishlab chiqarilgan ikkita mahsulotdan bittasini sifatli bo`lish ehtimolini toping.	**0,42**	0,21
1	1	1	Agar A va B hodisalar bog`liqsiz bo`lib, P(A)=0,6, P(B)=0,5 bo`lsa, ular yig`indisi ehtimolini toping.	0,8	0,3
1	1	2	A va B birgalikda bo`lmagan hodisalar bo`lib, P(A+B)=0,9, P(B)=0,5 bo`lsa, P(A) ni toping.	0,4	0,45
1	1	1	Ikki hodisa orasidagi quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?	$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$	$\overline{A} + \overline{B} = \overline{A+B}$
1	1	1	Ikki hodisa orasidagi quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?	$\overline{\mathrm{A} \cdot \hat{A}} = \overline{\mathrm{A}} + \vec{A};$	A+V A B;
1	1	1	A va B birgalikda	$\mathrm{A} \cdot \mathrm{B} = \varnothing$	$A+B=\boldsymbol{\Omega};$

			bo`lmagan hodisalar bo`lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?		
1	1	1	A va B birgalikda bo`lmagan hodisalar bo`lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?	P(A+B)=P(A)+P(B)	P(A+B)<P(A)+ B)
1	1	1	A va $\bar{A}$ qarama-qarshi bo`lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?	$A+\overline{A}=\Omega;$	$A\cdot B\supset B$
1	1	1	A va $\bar{A}$ qarama-qarshi hodisalar bo`lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?	$P(A)+P(\overline{A})=1$	$P(A)\cdot P(\overline{A})=$ P
1	1	1	Ihtiyoriy ikki hodisa ehtimollari uchun quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?	$P(A+B)\leq P(A)+P(B)$	$P(A/B)=P(A)$
1	1	1	Agar P(A+B)=0,9 va P(AB)=0,4 bo`lsa, P$(\bar{A}B)+P(A\bar{B})$ ni hisoblang.	0,5	0,36
1	1	1	Agar $P(A)=a, P(A+B)=E$ bo`lsa, $P(\bar{A}\cdot B)=$?	b-a	a+b
1	1	1	Ehtimollning klassik ta`rifi bo`yicha qanday tajribalardagi hodislaar Ehtimoli topiladi?	Elementar hodisalar soni cheklita va ular teng imkoniyatlidir.	Elementar hodisalar fazos Elementar cheklita
1	1	1	5 ta tanga tashlashda bitta ham gerb tushmasligi ehtimoli topilsin.	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$
1	1	2	Idishda 8 ta shar bo`lib, ulardan 5 tasi oq qolganlari qora. 4 ta shar linganda 2 tasi oq bo`lish ehtimoli topilsin.	$\frac{3}{7}$	$(\frac{5}{8})^4$
1	2	2	3 ta kub tashlash tajribasida kublar ustida tushgan sonlarni turlicha bo`lish ehtimoli topilsin.	$\frac{5}{9}$	$(\frac{1}{6})^3$
1	2	1	Qanday tasodifiy miqdorlar	Bog`liqsiz	Diskret tasodif

			uchun $M(\xi \cdot \eta) = M\xi \cdot M\eta$ tenglik o`rinli?	ta`sodifiy miqdorlar	miqdorlar
1	2	1	Taqsimot funksiya uchun quydagi hossalardan qaysi biri o`rinli?	chegaralangan	o`suvchi
1	2	2	Agar diskret tasodifiy miqdor uchun $P\{\xi = k\} = \frac{c}{n+2}, \quad k = 1, 2.., n-1$ bo`lsa, o`zgarmas c ni qiymatini toping.	$\frac{n+2}{n-1}$,	$\frac{2}{n}$
1	2	2	Tasodifiy miqdor zichlik funksiyasi. $p(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad x \le 0 \\ Ce^{-\lambda x}, & \text{agar} \quad x > 0 \end{cases}$ bo`lib, $\lambda > 0$ - parametr. O`zgarmas son C ning qiymatini toping.	λ	$\frac{1}{\lambda}$,
1	2	2	$\{\xi_n\}$ bog`liqsiz, bir hil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi bo`lib, $P\{\xi_n = k\} = \frac{c}{k^{\lambda}}, \quad \lambda > 1,$ λ $k = 1, 2, \ldots, \quad n = 1, 2, \ldots$ ning qanday qiymatlarida $\{\xi_n\}$ kema-ketlik uchun katta sonlar qonuni o`rinli bo`ladi.	$\lambda > 2$;	$\lambda = 3$
1	1	2	Idishda nomerlangan 5 ta bir hil sharlar bo`lib, ulardan ketma – ket 3 tasini olish (takrorsiz tanlanma) tajribasiga mos kelgan Ω ning elementlari sonini toping.	60	40
1	1	2	Idishda nomerlangan 5 ta bir hil sharlar bo`lib ulardan ketma – ket 3 tasini olish (takroriy tanlash) tajribasiga mos kelgan Ω ning elementlari sonini toping.	125	60

1	1	1	Nishonga ketma – ket o`q otishda o`q tegishlar sonini nisbiy chastotasi 0,6 ga teng bo`lib 12 marta o`q nishonga tegmagan bo`lsa necha marta o`q otilgan.	30	20
1	1	1	Mahsulotdan 200 tasi tekshirilganda 25 tasi sifatsiz ekan. Sifatli mahsulot nisbiy chastotasini toping.	0,875	0,125
1	1	2	Idishda 10 ta bir xil sharlar bo`lib, ulardan 3 tasi oq qolganlari qora rangda. Tavakkaliga olingan sharni qora bo`lish ehtimolini toping.	0,7	0,3
1	2	2	$\{\xi_n\}$ bog`liqsiz bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar ketma – ketligi bo`lib $\mathrm{P}\{\xi_n = k\} = \frac{c}{k^{\alpha+1}}, \quad \alpha > 0,$ $k = 1, 2, 3, ..., 100$ α ning qanday qiymatlarida bu ketma – ketlik uchun katta sonlar qonuni o`rinli bo`ladi?	$\alpha > 0$	$\alpha = 1$
1	2	3	Agar $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_4$ bog`liqsiz, bir xil taqsimlangan tasodifiy miqdorlar bo`lib, $\mathrm{P}\{\xi_i = k\} = \frac{1}{n}$ $i = 1, 2, 3, 4; \quad k = 1, 2, ..., n$ bo`lsa, $\mathrm{P}\{\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4\} = ?$		
1	2	2	Kubni 50 marta tashlashda tushgan sonlar yig`indisi matematik kutilmasini toping.	175	350
1	2	2	Hodisa ehtimoli 0,8 bo`lsa, 5 ta tajribada hodisa bajarilgan tajribalar soni matematik kutilmasi topilsin.	4	1

1	2	2	Agar ξ_1 va ξ_2 bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar bo`lib, $D\xi_1 = 3,\ D\xi_2 = 4$ bo`lsa, $D(2\xi_1 - 3\xi_2)$ ni toping.	48	-2,84
1	2	2	ξ tasodifiy miqdor taqsimot funksiyasi $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{agar} \quad \tilde{o} \le 0 \\ \frac{x}{2}, & \text{agar} \quad 0 < x \le 2 \\ 1, & \text{agar} \quad \tilde{o} > 2 \end{cases}$ bo`lsa, $D\xi = ?$	$\frac{1}{3}$	2
1	2	2	Idishda 5ta shar bo`lib 3 tasi oq, qolganlari qora bo`lsa, 2 ta shar olinganda oq sharlar soni matematik kutilmasi topilsin.	$\frac{6}{5}$	$\frac{3}{2}$
1	2	3	)-parametrlar bilan• (a, normal taqsimlangan ξ -tasodifiy miqdor uchun $M(\xi - a)^3$ ni toping.	0	a
1	2	1	(a;b)-kesmada tekis taqsimlangan $\xi -$tasodifiy miqdor uchun $\mathrm{M}\xi$ ni toping.	$\frac{a+в}{2}$	$\frac{a^2+в^2}{2}$
1	2	2	Agar ξ_1 va ξ_2 bog`liqsiz va har biri mos ravshda (2;1) hamda (1;2) parmetrlar bilan normal taqsimlangan bo`lsa, $D(\xi_1 - \xi_2)$ ni toping.	5	-1
1	1	1	A va B birgalikda bo`lmagan hodisalar bo`lib, P(A+B)=0,9, P(B)=0,5 bo`lsa, P(A) ni toping.	0,4	0,45
1	2	1	ξ tasodifiy miqdor dispersiyasi uchun qaysi munosabat noto`g`ri?	$D(-\xi) = -D\xi$	$D\xi > 0$
1	2	1	Agar ξ va η tasodifiy miqdorlar bog`liqsiz bo`lsa, qaysi munosabat to`g`ri?	$D(\xi + \eta) = D\xi + D\eta$	$D(\xi - \eta) = D\xi - D\eta$
1	2	1	Qanday shartda $\mathrm{M}(\xi + \eta) = \mathrm{M}\xi + \mathrm{M}\eta$ tenglik o`rinli? (Barcha matematik	Har doim	ξ va η bog`liq

			kutilmalar mavjud)		
1	2	2	Agar ξ va η bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar bo`lsa, qaysi munosabat to`g`ri?	$M(\xi\cdot\eta)=M\xi\cdot M\eta$	$M(\xi-\eta)=M\xi+M\eta$
1	2	3	Agar ξ va η bog`liqsiz va har biri standart normal qonun bo`yicha taqsimlangan bo`lsa, $\frac{1}{\sqrt{2}}(\xi+\eta)$ taqsimotni toping.	Standart normal qonun	Binomial qonu
2	1	2	Markaziy limit teoremaga ko`ra tasodifiy miqdorlarning markazlashtirilgan va normallashtirilgan yig`indisi taqsimot funksiyasi qanday funksiyaga yaqinlashadi?	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}}du$	$1-e^{-\lambda X},\quad x>0$
1	1	2	Agar $P(A)>0$ bo`lsa, B hodisaning A hodisasi ro`y bergandagi shartli ehtimoli qanday topiladi?	$P_A(B)=P(AB)/P(A$	$P_A(B)=P(A)/($
1	1	2	A va B hodisalar bir-biriga bog`liq bo`lmagan hodisalar bo`lsa, ulardan hech bo`lmaganda birining ro`y berish ehtimoli topilsin.	$P(A+B)=P(A)+$ $+P(B)-P(A)P(B)$	$P(A-B)=P(A$
1	1	2	$B_1,\ B_2,\ B_3$ hodisalarning to`la guruhini tashkil qilsin. U holda $P_A(B_1)$ ehtimollik Bayes formulasiga ko`ra quydagicha hisoblanadi:	$P_A(B_1)=P(B_1)P_{B_1}(A)$	$P_A(B_1)=P(AB$
1	1	3	n marotaba o`tkazilgan bog`liq bo`lmagan tajribalar ketma-ketligida A hodisasini roppa-rosa k marotaba ro`y berish Ehtimoli $P_n(k)$ Bernulli formulasiga ko`ra hisoblanadi:	$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, bu erda $p=P(A),\ q=1-p$.	$P_n(k)=C_n^k p^{n-k}$ bu erda $p=P(A),\ q=1-$
2	1	3	$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $0<p<1,\ q=1-p$ bo`lsin.	$P_n(k)\approx \lambda^k e^{-\lambda}/k!$	$P_n(k)\approx \lambda^k e^{-\lambda}/k$

			Agar $np \to \lambda > 0$ bo`lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri o`rinli?		
2	1	2	$P_n(k)=C_n^k p^k q^{n-k}$, $0<p<1,\ q=1-p$ bo`lsin. Agar $n\to\infty$, $k\to\infty$ bo`lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri o`rinli?	, bu erda $\varphi(x_k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, $x_k=(k-np)/\sqrt{npq}$.	, bu erda .
1	2	1	X tasodifiy miqdorning dispersiyasi qanday formula bilan aniqlanadi?	$DX=MX^2-(MX)^2$	$DX=MX^2-MX$
1	2	1	O`zgarmas sonning dispersiyasi nimaga teng?	DC=0	$DC=C^2$
1	2	1	$\tilde{N}\cdot X$ tasodifiy miqdorning dispersiyasi nimaga teng?	$D(CX)=C^2DX$	$D(CX)=CDX$
1	2	1	Tasodifiy miqdorning o`rtacha kvadratik chetlanishi $\sigma(X)$ nimaga teng?	$\sigma(X)=(DX)^{1/2}$	$\sigma(X)=MX^2-($
1	2	1	MX=8 va MY=12 bo`lsa, Z=2X+4Y tasodifiy miqdorning matematik kutilmasini toping?	64	43
1	2	2	X va Y miqdorlar bog`liqsiz. Agar DX=7, DY=4 bo`lsa Z=5X+3Y tasodifiy miqdorning dispersiyasini toping.	211	47
1	2	2	X diskret tasodifiy miqdor quyidagi taqsimot qonuni bilan berilgan: $\begin{array}{l\|llll} X: & -5 & -2 & 4 & 6 \\ P: & 0{,}3 & 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{array}$, MX toping.	-0,7	-5
1	2	1	Quyidagilardan qaysi biri Chebishev tengsizligi?	$P(\|X-MX\|<\varepsilon)\geq 1-\frac{D(X)}{\varepsilon^2}$	$P(\|X-MX\|>\varepsilon)\geq -$
1	2	1	Taqsimot funksiyaning qiymatlari qaysi oraliqda o`zgaradi?	*[0,1]	[a,b]
1	2	1	X uzluksiz tasodifiy miqdor bo`lsa, quyidagi tengliklarning qaysinisi to`g`ri?	$P(a<x<b)=F(b)-F(a)$	$P(a<x<b)=F(b)+$
1	1	1	A va $\bar{A}$ qarama-qarshi	$A+\bar{A}=\Omega$,	$A\cdot B\supset B$

			hodisalar bo`lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?		
1	1	2	Mahsulotni sifatli bo`lish Ehtimoli 0,7 bo`lsa, ishlab chiqarilgan ikkita mahsulotdan bittasini sifatli bo`lish ehtimolini toping.	0,42	0,21
1	1	1	Agar A va B hodisalar bog`liqsiz bo`lib, P(A)=0,6, P(B)=0,5 bo`lsa, ularning yig`indisini ehtimoli topilsin.	0,8	0,3
1	1	1	Ikki hodisa orasidagi quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?	$\overline{A+B} = \bar{A}\cdot\bar{B}$	$\bar{A}+\bar{B} = \overline{A+B}$
1	1	1	Ikki hodisa orasidagi quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?	$\overline{\mathrm{A}\cdot\hat{A}} = \bar{\mathrm{A}} + \bar{\hat{A}};$	A+B $^{\mathrm{AB}};$
1	1	1	A va B birgalikda bo`lmagan hodisalar bo`lsa, quyidagi munosabatlardan qaysi biri to`g`ri?	$A\bullet B = \varnothing$	$A+B=\Omega;$

1-jadval

$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ **funksiya qiymatlari jadvali**

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920

0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0548	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0161	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

2-jadval

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{z^2}{2}}dz$$ **funksiyaning qiymatlari jadvali**

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,32	0,1255	0,64	0,2389	0,96	0,3315
001	0,0040	0,33	0,1293	0,65	0,2422	0,97	0,3340
0,02	0,0080	0,34	0,1331	0,66	0,2454	0,98	0,3365
0,03	0,0120	0,35	0,1368	0,67	0,2486	0,99	0,3389
0,04	0,0160	0,36	0,1406	0,68	0,2517	1,00	0,3413
0,05	0,0199	0,37	0,1443	0,69	0,2549	1,01	0,3438
0,06	0,0239	0,38	0,1480	0,70	0,2580	1,02	0,3461
0,07	0,0279	0,39	0,1517	0,71	0,2611	1,03	0,3485
0,08	0,0319	0,40	0,1554	0,72	0,2642	1,04	0,3508
0,09	0,0359	0,41	0,1591	0,73	0,2673	1,05	0,3531
0,10	0,0398	0,42	0,1628	0,74	0,2703	1,06	0,3554
0,11	0,0438	0,43	0,1664	0,75	0,2734	1,07	0,3577
0,12	0,0478	0,44	0,1700	0,76	0,2764	1,08	0,3599
0,13	0,0517	0,45	0,1736	0,77	0,2794	1,09	0,3621
0,14	0,0557	0,46	0,1772	0,78	0,2823	1,10	0,3643
0,15	0,0596	0,47	0,1808	0,79	0,2852	1,11	0,3665
0,16	0,0636	0,48	0,1844	0,80	0,2881	1,12	0,3686
0,17	0,0675	0,49	0,1879	0,81	0,2910	1,13	0,3708
0,18	0,0714	0,50	0,1915	0,82	0,2939	1,14	0,3729
0,19	0,0753	0,51	0,1950	0,83	0,2967	1,15	0,3749
0,20	0,0793	0,52	0,1985	0,84	0,2995	1,16	0,3770
0,21	0,0832	0,53	0,2019	0,85	0,3023	1,17	0,3790
0,22	0,0871	0,54	0,2054	0,86	0,3051	1,18	0,3810
0,23	0,0910	0,55	0,2088	0,87	0,3078	1,19	0,3830
0,24	0,0948	0,56	0,2123	0,88	0,3106	1,20	0,3849
0,25	0,0987	0,57	0,2157	0,89	0,3133	1,21	0,3869
0,26	0,1026	0,58	0,2190	0,90	0,3159	1,22	0,3883
0,27	0,1064	0,59	0,2224	0,91	0,3186	1,23	0,3907
0,28	0,1103	0,60	0,2257	0,92	0,3212	1,24	0,3925
0,29	0,1141	0,61	0,2291	0,93	0,3238	1,25	0,3944
0,30	0,1179	0,62	0,2324	0,94	0,3264		
0,31	0,1217	0,63	0,2357	0,95	0,3289		

Davomi

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,26	0,3962	1,59	0,4441	1,92	0,4726	2,50	04938
1,27	0,3980	1,60	0,4452	1,93	0,4732	2,52	0,4941
1,28	0,3997	1,61	0,4463	1,94	0,4738	2,54	0,4945
1,29	0,4015	1,62	0,4474	1,95	0,4744	2,56	0,4948
1,30	0,4032	1,63	0,4484	1,96	0,4750	2,58	0,4951
1,31	0,4049	1,64	0,4495	1,97	0,4756	2,60	0,4953
1,32	0,4066	1,65	0,4505	1,98	0,4761	2,62	0,4956
1,33	0,4082	1,66	0,4515	1,99	0,4767	2,64	0,4959
1,34	0,4099	1,67	0,4525	2,00	0,4772	2,66	0,4961
1,35	0,4115	1,68	0,4535	2,02	0,4783	2,68	0,4963
1,36	0,4131	1,69	0,4545	2,04	0,4793	2,70	0,4965
1,37	0,4147	1,70	0,4554	2,06	0,4803	2,72	0,4967
1,38	0,4162	1,71	0,4564	2,08	0,4812	2,74	0,4969
1,39	0,4177	1,72	0,4573	2,10	0,4821	2,76	0,4971
1,40	0,4192	1,73	0,4582	2,12	0,4830	2,78	0,4973
1,41	0,4207	1,74	0,4591	2,14	0,4838	2,80	0,4974
1,42	0,4222	1,75	0,4599	2,16	0,4846	2,82	0,4976
1,43	0,4236	1,76	0,4608	2,18	0,4854	2,84	0,4977
1,44	0,4251	1,77	0,4616	2,20	0,4861	2,86	0,4979
1,45	0,4265	1,78	0,4625	2,22	0,4868	2,88	0,4980
1,46	0,4279	1,79	0,4633	2,24	0,4875	2,90	0,4981
1,47	0,4292	1,80	0,4641	2,26	0,4881	2,92	0,4982
1,48	0,4306	1,81	0,4649	2,28	0,4887	2,94	0,4984
1,49	0,4319	1,82	0,4656	2,30	0,4893	2,96	0,4985
1,50	0,4332	1,83	0,4664	2,32	0,4898	2,98	0,4986
1,51	0,4345	1,84	0,4671	2,34	0,4904	3,00	0,49865
1,52	0,4357	1,85	0,4678	2,36	0,4909	3,20	0,49931
1,53	0,4370	1,86	0,4686	2,38	0,4913	3,40	0,49966
1,54	0,4382	1,87	0,4693	2,40	0,4918	3,60	0,499841
1,55	0,4394	1,88	0,4699	2,42	0,4922	3,80	0,499928
1,56	0,4406	1,89	0,4706	2,44	0,4927	4,00	0,499968
1,57	0,4418	1,90	0,4713	2,46	0,4931	4,50	0,499997
1,58	0,4429	1,91	0,4719	2,48	0,4934	5,00	0,499997

3-jadval

$P_k(\lambda)=\dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$ **funksiya qiymatlari jadvali**

k \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	090484	163746	222245	268128	303265	329287
2	004524	016375	033337	053626	075816	098786
3	000151	001092	003334	007150	012636	019757
4	000004	000055	000250	000715	001580	002964
5		000002	000015	000057	000158	000356
6			000001	000004	000013	000036
7					000001	000003
k \ λ	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	347610	359463	365913	367879	270671	149361
2	121663	143785	164661	183940	270671	224042
3	028388	038343	049398	061313	180447	224042
4	004968	007669	011115	015328	090224	168531
5	000696	001227	002001	003066	036089	100819
6	000081	000164	000300	000511	012030	050409
7	000008	000019	000039	000073	003437	021604
8	000001	000002	000004	000009	000859	008102
9				000001	000191	002701
10					0,000038	0,000810
11					0,000007	0,000221
12					0,000001	0,000055
13						0,000013
14						0,000003
15						0,000001

4-jadval

$$\sum_{m=0}^{k}\frac{a^m e^{-a}}{m!}$$ **funksiya qiymatlari jadvali**

m \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6
0	0,904837	0,818731	0,740818	0,670320	0,606531	0,548812
1	0,995321	0,982477	0,963063	0,938448	0,909796	0,878099
2	0,999845	0,998852	0,996400	0,992074	0,985612	0,976885
3	0,999996	0,999943	0,999734	0,999224	0,998248	0,996642
4	1,000000	0,999998	0,999984	0,999939	0,999828	0,999606
5	1,000000	1,000000	0,999999	0,999996	0,999986	0,999962
6	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999997
7	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000
m \ a	0,7	0,8	0,9	1,0	2,0	3,0
0	0,496585	0,449329	0,406570	0,367879	0,135335	0,049787
1	0,844195	0,808792	0,772483	0,735759	0,406006	0,199148
2	0,965858	0,952577	0,937144	0,919699	0,676677	0,423190
3	0,994246	0,990920	0,986542	0,981012	0,857124	0,647232
4	0,999214	0,998589	0,997657	0,996340	0,947348	0,815263
5	0,999909	0,999816	0,999658	0,999406	0,983437	0,916082
6	0,999990	0,999980	0,999958	0,999917	0,995467	0,966491
7	0,999998	0,999999	0,999997	0,999990	0,998904	0,988095
8	1,000000	1,000000	1,000000	0,999999	0,999763	0,996196
9				1,000000	0,999954	0,998897
10					0,999992	0,999707
11					0,999999	0,999928
12					1,000000	0,999983
13						0,999996
14						0,999999
15						1,000000

5-jadval

$\overline{\Pi}(x)=\sum_{k=x}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ **funksiya qiymatlari jadvali**

x \ λ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
1	0,0952	0,1813	0,2592	0,3297	0,3935
2	,0047	,0175	,0369	,0616	,0902
3	,0002	,0011	,0036	,0079	,0144
4	,0000	,0001	,0003	,0008	,0018
5		,0000	,0000	,0001	,0002
6				,0000	,0000
x \ λ	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
1	0,4512	0,5034	0,5507	0,5934	0,6321
2	,1219	,1558	,1912	,2275	,2642
3	,0232	,0341	,0474	,0629	,0803
4	,0034	,0058	,0091	,0135	,0190
5	,0004	,0008	,0014	,0023	,0037
6	,0000	,0001	,0002	,0003	,0006
x \ λ	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
1	0,6988	0,7534	0,7981	0,8347	0,8647
2	,3374	,4082	,4751	,5372	,5940
3	,1205	,1665	,2166	,2694	,3233
4	,0338	,0537	,0788	,1087	,1429
5	,0077	,0143	,0237	,0364	,0527
6	,0015	,0032	,0060	,0104	,0166
7	,0003	,0006	,0013	,0026	,0045
8	,0000	,0001	,0003	,0006	,0011
9		,0000	,0000	,0001	,0002
10				,0000	,0000

Davomi

x \ λ	2,2	2,4	2,6	2,8	3,0
1	0,8892	0,9003	0,9257	0,9392	0,9502
2	,6454	,6916	,7326	,7689	,8009
3	,3773	,4303	,1816	,5305	,5768
4	,1806	,2212	,2640	,3081	,3528
5	,0725	,0859	,1226	,1523	,1847
6	,0249	,0357	,0490	,6051	,0839
7	,0075	,0116	,0172	,0244	,0335
8	,0020	,0033	,0053	,0081	,0119
9	,0005	,0009	,0015	,0024	,0038
10	,0001	,0002	,0004	,0007	,0011
11	,0000	,0000	,0001	,0001	,0003
12			,0000	,0000	,0001

x \ λ	4,0	5,0	6,0	7,0	8,0
1	0,9817	0,9933	0,9975	0,9991	0,9997
2	,9084	,9596	,9826	,9227	,9970
3	,7619	,8753	,9380	,9704	,9862
4	,5665	,7350	,8488	,9182	,9576
5	,3712	,5595	,7149	,8270	,9004
6	,2149	,3840	,5543	,2993	,8088
7	,1107	,2378	,3937	,5503	,6866
8	,0511	,1334	,2560	,4013	,5470
9	,0214	,681	,1528	,2709	,4075
10	,0081	,0318	,0839	,1695	,2834
11	,0028	,0137	,0426	,0985	,1841
12	,0009	,0055	,0201	,0534	,1119
13	,0002	,0020	,0088	,0270	,0638
14	,0001	,0007	,0036	,0128	,0342
15	,0000	,0002	,0014	,0057	,0173
16		,0001	,0005	,0024	,0082
17		,0000	,0002	,0010	,0037
18			,0001	,0004	,0016
19			,0000	,0001	,0007
20				,0000	,0003
21					,0001
22					,0000

x \ λ	9	10	11	12	13
1	0,9999	1,0000	1,0000	1,0000	1,0000
2	,9988	0,9995	0,9998	0,9999	1,0000
3	,9938	,9972	,9988	,9995	0,9998
4	,9718	,9897	,9950	,9977	,9990
5	,9450	,9707	,9849	,9924	,9963
6	,8843	,9329	,9625	,9797	,9893
7	,7932	,8999	,9212	,9542	,9714
8	,6761	,7798	,8568	,9105	,9460
9	,5443	,6672	,7680	,8450	,9002
10	,4126	,5421	,6594	,7576	,8342
11	,2940	,4170	,5401	,6528	,7483
12	,1987	,3032	,4207	,5384	,6468
13	,1242	,2084	,3113	,4240	,5369
14	,0739	,1355	,2187	,3185	,4270
15	,0415	,0835	,1460	,2280	,3249
16	,0220	,0487	,0926	,1556	,2364
17	,0111	,0270	,0559	,1013	,1645
18	,0053	,0143	,0322	,0630	,1096
19	,0024	,0072	,0177	,0374	,0698
20	,0011	,0035	,0093	,0213	,0427
21	,0002	,0016	,0047	,0116	,0250
22	,0001	,0007	,0023	,0061	,0141
23	,0000	,0003	,0010	,0030	,0076
24		,0001	,0005	,0015	,0040
25		,0000	,0002	,0007	,0020
26			,0001	,0003	,0010
27			,0000	,0001	,0005
28				,0001	,0002
29				,0000	,0001

I z o h. $\lambda > 13$ bo‘lganda

$$\Pi(x) \approx \Phi_0\left(\frac{x-0,5-\lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

formuladan foydalanish mumkin.

6 - jadval

$$P\{T > t_{v,\alpha}\} = \alpha$$

Ozodlik darajasi	α **ehtimollik**							
	0,20	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
1	1,38	3,08	6,31	12,71	31,82	63,66	318.31	636,62
2	1,06	1,89	2,92	4,30	6,97	9,93	22.33	31,60
3	0,98	1,64	2,35	3,18	4,54	5,84	10.21	12,94
4	0,94	1,53	2,13	2,78	3,75	4,60	7.17	8,61
5	0,92	1,48	2,02	2,57	3,37	4,03	5.89	6,86
6	0,91	1,44	1,94	2,45	3,14	3,71	5.21	5,96
7	0,90	1,42	1,90	2,37	3,00	3,50	4.78	5,41
8	0,89	1,40	1,86	2,31	2,90	3,36	4.50	5,04
9	0,88	1,38	1,83	2,26	2,82	3,25	4.30	4,78
10	0,88	1,37	1,81	2,23	2,76	3,17	4.14	4,59
11	0,88	1,36	1,80	2,20	2,72	3,11	4.02	4,44
12	0,87	1,36	1,78	2,18	2,68	3,06	3.92	4,32
13	0,87	1,35	1,77	2,16	2,65	3,01	3.85	4,22
14	0,87	1,34	1,76	2,15	2,62	2,98	3,79	4,14
15	0,87	1,34	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	0,86	1,34	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,02
17	0,86	1,33	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,97
18	0,86	1,33	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	0,86	1,33	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	0,86	1,33	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	0,86	1,32	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	0,86	1,32	1,72	2,07	2,51	2,82	3,50	3,79
23	0,86	1,32	1,71	2,07	2,50	2,81	3,48	3,77
24	0,86	1,32	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,75
25	0,86	1,32	1,71	2,06	2,48	2,79	3,45	3,73
30	0,85	1,31	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	0,85	1,30	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	0,85	1,30	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	0,84	1,29	1,66	1,98	2,36	2,62	3,16	3,37
∞	0,84	1,28	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29

7 - jadval

$$\alpha = 0{,}05 : P\{F > F_{v1,v2,\alpha}\} = \alpha$$

v_2 \ v_1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30
25	4,24	3,38	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,17	2,09	2,02	1,96
∞	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88

v_2 \ v_1	**10**	**12**	**15**	**20**	**24**	**30**	**40**	**60**	**120**	∞
1	242	244	246	248	249	2,50	251	252	253	254
2	19,4	19,4	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
3	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,53
4	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,63
5	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,40	4,36
6	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,70	3,67
7	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	2,27	3,23
8	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,93
9	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,75	2,71
10	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,58	2,54
11	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,45	2,40
12	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,34	2,30
13	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,25	2,21
14	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,18	2,13
15	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,11	2,07
16	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,06	2,01
17	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,01	1,96
18	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,97	1,92
19	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,93	1,88
20	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,90	1,84
21	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,87	1,81
22	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,78
23	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,81	1,76
24	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,79	1,73
25	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,77	1,71
26	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,75	1,69
27	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,73	1,67
28	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,71	1,65
29	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,70	1,64
30	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,68	1,62
40	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,58	1,51
60	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,47	1,39
120	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,35	1,25
∞	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,22	1,00

8-*jadval*

χ^2 taqsimotning kritik nuqtalari jadvali

Ozodlik darajalari soni, k	α muhimlilik darajasi					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	18,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,3	15,3	13,6
29	49,3	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

9-jadval

Muqarrarlik kriteriysini aniqlash uchun
Styudent – Fisher jadvali

ν ozodlik darajalari soni	p ehtimolda t ko‘rsatkichlari			
	$p=0,95$	$p=0,98$	$p=0,99$	$p=0,999$
1	12,71	31,821	63,630	636,20
2	4,30	6,965	9,925	31,60
3	3,18	4,541	5,484	12,94
4	2,78	3,747	4,604	8,61
5	2,57	3,365	4,032	6,86
6	2,45	3,143	3,707	5,96
7	2,36	2,998	3,499	5,40
8	2,31	2,896	3,335	5,04
9	2,26	2,821	3,256	4,78
10	2,23	2,764	3,169	4,59
11	2,20	2,718	3,106	4,49
12	2,18	2,681	3,055	4,32
13	2,16	2,650	3,012	4,12
14	2,14	2,624	2,977	4,14
15	2,13	2,602	2,947	4,07
16	2,12	2,583	2,921	4,02
17	2,11	2,567	2,898	3,96
18	2,10	2,552	2,878	3,92
19	2,09	2,539	2,865	3,88
20	2,09	2,528	2,845	3,85
21	2,08	2,518	2,831	3,82
22	2,07	2,508	2,819	3,79
23	2,07	2,500	2,807	3,77
24	2,06	2,492	2,797	3,75
25	2,06	2,485	2,787	3,72
26	2,06	2,479	2,779	3,71
27	2,05	2,473	2,771	3,69
28	2,05	2,467	2,763	3,67
29	2,05	2,462	2,750	3,66
30	2,04	2,457	2,750	3,64

Foydalaniladigan asosiy darsliklar va o'quv qo'llanmalar ro'yhati

Asosiy adabiyotlar

154. Sh. Mirziyoyev Buyuk kelajagimizni mard va olijanob xalqimiz bilan birga quramiz. Toshkent "O'zbekiston" 2017. 488 b.
155. Sh. Mirziyoyev Qonun ustuvorligi va inson manfaatlarini ta'minlash – yurt taraqqiyoti va xalq farovonligining garovi. O'zbekiston Respublikasi Konstitutsiyasi qabul qilinganligining 24 yilligiga bag'ishlangan tantanali marosimdagi ma'ruza. 2016-yil 7-dekabr. Toshkent - "O'zbekiston" - 2017. 32 b.
156. Ш.Мирзиёев Танқидий тахлил, қатъий тартиб – интизом ва шахсий жавобгарлик – ҳар бир раҳбар фаолиятининг кундалик қоидаси бўлиши керак. Тошкент – "Ўзбекистон" 2017.
157. Ш.Мирзиёев Эркин ва фаровон, демократик Ўзбекистон давлатини биргаликда барпо этамиз. Ўзбекистон Республикаси Президенти лавозимига киришиш тантанали маросимига баg'ишланган Олий Мажлис палаталарининг қўшма мажлисидаги нутқ. Тошкент – "Ўзбекистон". 2016. 56 б.

12 Ш.Қ.Форманов "Эҳтимолликлар назарияси", Тошкент "Университет" 2014 й.

6.Ross, Sheldon M. A first course in probability. Pearson Education, Inc. 2010.

7.Robert B. Ash Basic probability theory. Dover Publications, Inc. 2008.

Qo'shimcha adabiyotlar

158. А.А.Абдушукуров, Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика, ЎзМУ, 2010 й.
159. А.А.Абдушукуров, Т.М.Зупаров, "Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика", Тафаккур Бўстони, 2015 й.
160. А.А.Абдушукуров, Т.А.Азларов, А.А.Джамирзаев «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистикадан мисол ва масалалар тўплами» Тошкент, «Университет», 2003 й.
161. Б.В.Гнеденко «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука» 1987 г.
162. А.А.Боровков «Теория вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.
163. Б.А.Севастьянов, В.И.Чистяков, А.М.Зубков «Сборник задач по теории вероятностей», Москва, «Наука», 1989 г.
164. С.Ҳ.Сирожиддинов, М.Маматов «Эҳтимоллар назарияси ва математик статистика», Тошкент, «Ўқитувчи», 1980 й.
165. Севастянов Б.А. «Курс теории вероятностей и математической статистики», Москва, «Наука», 1982 г.
166. Ширяев А.Н. «Вероятность», 2-е изд., Москва, «Наука»,1989 г.
167. Чистяков Р.П. «Курс теории вероятностей», Москва, «Наука», 1987 г.

11. Mamatov M., Ibragimov R., Mashrabboev A., Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistika.T., 2008 y

12. Ibragimov R..,Mashrabboev A. Polvanov R. Ehtimollar nazariyasi va matrmatik statistikadan masalalar to'plamiми, Namangon 2018y.

Internet saytlari

168. www.gov.uz – Ўзбекистон Республикаси хукумат портали.

169. www.lex.uz -Ўзбекистон Республикаси Қонун ҳужжатлари маълумотлари миллий базаси.
170. http://www.rsl.ru
171. https://www.khanacademy.org/math/probability
172. http://www.msu.ru
173. http://sunzi.lib.hku.hk/ER/subject/hkul/510/ej/1
174. http://www.nlr.ru
175. http://home.ubalt.edu/ntsbarsh/business-stat/R.htm