

**O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI  
OLIV TA'LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR  
VAZIRLIGI**

**NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI**

**Matematik analiz kafedresi**

**“MATEMATIK ANALIZ”**

fanidan

**O'QUV–USLUBIY  
MAJMUA**



**Bilim sohasi: 500000 –Tabiiy fanlar, matematika  
va statistika**  
**Ta'lim sohasi: 540000 – Matematika va statistika**  
**Ta'lim yo'nalishi: 60540100– Matematika**

**I,II-SEMESTR**

**Namangan-2023**



O'quv uslubiy majmua \_\_\_\_\_ yil O'zR OTFVIV tomonidan № \_\_\_\_\_  
raqami bilan \_\_\_\_\_ yil \_\_\_\_\_dagi \_\_\_\_\_-sonli buyrug'i bilan  
tasdiqlangan fan dasturi asosida ishlab chiqilgan.

**Tuzuvchilar:** **A.Mashrabboyev**, kafedra dotsenti  
**F.Sharipov** – o'qituvchi

**Taqrizchilar:** **M.Holmurodov**, NamDU, f.-m. f. d.  
**M.Rahmatulayev**, NamDU, f.-m. f. d.,  
kafedra professori

O'quv uslubiy majmua Namangan davlat universiteti Kengashininig  
\_\_\_\_\_ yil "..." \_\_\_\_\_dagi "..." - son yig'ilishida ko'rib chiqilgan va  
foydalanishga tavsiya etilgan.

# Mundarija

Mundarija .....	1
Soʻz boshi .....	8
“Matematik analiz” fanining sillabusi.....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
1-mavzu. Toʻplamlar. Toʻplamlar ustida amallar .....	9
1-maʼruza.....	9
Glossariy.....	13
Keys banki.....	14
1-amaliy mashgʻulot.....	14
Test .....	16
2-mavzu. Akslantirishlar va ularning turlari .....	17
2-Maʼruza.....	17
Glossariy.....	23
Keys banki.....	23
2-amaliy mashgʻulot.....	24
Test .....	25
3-mavzu. Haqiqiy sonlar .....	26
3-Maʼruza .....	26
Glossariy.....	31
Keys banki.....	31
3-amaliy mashgʻulot.....	32
Test .....	36
4-mavzu. Haqiqiy sonlar toʻplamining chegaralari.....	37
4-Maʼruza .....	37
Glossariy.....	44
Keys banki.....	44
4-amaliy mashgʻulot.....	45
Test .....	48
5-mavzu. Haqiqiy sonlar ustida amallar.....	49
5-maʼruza.....	49
Glossariy.....	57
Keys banki.....	57
5-amaliy mashgʻulot.....	58
Test .....	61
6-mavzu. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti .....	62

6-ma'ruza.....	62
Glossariy.....	69
Keys banki.....	70
6-amaliy mashg'ulot.....	71
Test .....	75
7-mavzu. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari.....	77
7-ma'ruza.....	77
Glossariy.....	85
Keys banki.....	85
7-amaliy mashg'ulot.....	86
Test .....	88
8-mavzu. Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti.....	89
8-ma'ruza.....	89
Glossariy.....	95
Keys banki.....	96
8-amaliy mashg'ulot.....	97
Test .....	99
9-mavzu. Qisman va fundamental ketma-ketliklar. Ketma-ketliklarning quyi hamda yuqori limitlari.....	99
9-ma'ruza.....	100
Glossariy.....	107
Keys banki.....	108
9-amaliy mashg'ulot.....	109
Test .....	111
10-mavzu. Funksiya tushunchasi .....	113
10-ma'ruza.....	113
Glossariy.....	122
Keys banki.....	123
10-amaliy mashg'ulot.....	125
Test .....	129
11-mavzu. Funksiya limiti.....	130
11-ma'ruza.....	130
Glossariy.....	140
Keys banki.....	142
11-amaliy mashg'ulot.....	143



Test .....	146
12-mavzu. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari.....	147
12-ma'ruza.....	147
Glossariy.....	153
Keys banki.....	154
12-amaliy mashg'ulot.....	155
Test .....	158
13-mavzu. Funksiyalarni taqqoslash.....	159
13-ma'ruza.....	159
Glossariy.....	165
Keys banki.....	167
13-amaliy mashg'ulot.....	168
Test .....	171
14-mavzu. Funksiyaning uzluksizligi .....	172
14-ma'ruza.....	172
Glossariy.....	178
Keys banki.....	180
14-amaliy mashg'ulot.....	181
Test .....	184
15-mavzu. Uzluksiz funksiyalarning lokal xossalari .....	186
15-ma'ruza.....	186
Glossariy.....	190
Keys banki.....	192
15-amaliy mashg'ulot.....	193
Test .....	196
16-mavzu. Uzluksiz funksiyalarning global xossalari .....	200
16-ma'ruza.....	200
Glossariy.....	205
Keys banki.....	206
16-amaliy mashg'ulot.....	208
Test .....	211
17-mavzu. Tekis uzluksizlik .....	215
17-ma'ruza.....	215
Glossariy.....	221
Keys banki.....	222

17-amaliy mashg'ulot.....	223
Test .....	225
18-mavzu. Funksiyaning hosilasi.....	227
18-ma'ruza.....	227
Glossariy.....	233
Keys banki.....	234
18-amaliy mashg'ulot.....	236
Test .....	240
19-mavzu. Hosilani hisoblash qoidalari.....	241
19-ma'ruza.....	241
Glossariy.....	248
Keys banki.....	248
19-amaliy mashg'ulot.....	249
Test .....	254
20-mavzu. Funksiyaning differensial.....	256
20-ma'ruza.....	256
Glossariy.....	262
Keys banki.....	262
20-amaliy mashg'ulot.....	263
Test .....	266
21-mavzu. Funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari.....	268
21-ma'ruza.....	268
Glossariy.....	274
Keys banki.....	275
21-amaliy mashg'ulot.....	276
Test .....	282
22-mavzu. Asosiy teoremlar.....	283
22-ma'ruza.....	284
Glossariy.....	289
Keys banki.....	290
22-amaliy mashg'ulot.....	291
Test .....	294
23-mavzu. Asosiy teoremlar natijalari. Koshi teoremasi.....	296
23-ma'ruza.....	296
Glossariy.....	302

Keys banki.....	303
23-amaliy mashg`ulot.....	304
Test .....	307
24-mavzu. Teylor formulasi.....	308
24-ma`ruza.....	309
Glossariy.....	315
Keys banki.....	316
24-amaliy mashg`ulot.....	317
Test .....	321
25-mavzu. Funksiyaning monotonligi. Funksiyaning ekstremumlari .....	324
25-ma`ruza.....	324
Glossariy.....	331
Keys banki.....	331
25-amaliy mashg`ulot.....	333
Test .....	343
26-mavzu. Funksiyaning qavariqligi, egilish nuqtalari va asimptotalari.....	344
26-ma`ruza.....	344
Glossariy.....	350
Keys banki.....	351
26-amaliy mashg`ulot.....	352
Test .....	357
27-mavzu. Lopital qoidalari .....	358
27-ma`ruza.....	358
Glossariy.....	364
Keys banki.....	364
27-amaliy mashg`ulot.....	365
Test .....	370



# So‘z boshi

So‘nggi yillarda mamlakatimizda oliy ta‘lim sifatini oshirishga qaratilgan bir qancha chora-tadbirlar amalga oshirilmoqda. Chunki, jahon talablari darajasidagi raqobatbardosh kadrlar tayyorlash maqsadida talabalarga dunyo standartlariga javob beradigan bilim va ko‘nikmalar berish bugungi kunning eng dolzarb masalalaridan biri bo‘lib qolmoqda.

Mazkur o‘quv-uslubiy majmua “Matematik analiz” fani bo‘yicha tayyorlangan bo‘lib, u “5130100-Matematika” yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan va O‘zbekiston Milliy universiteti “Matematik analiz” kafedrasida o‘qituvchilari tomonidan tayyorlangan. Ushbu majmua mamlakatimizda “Matematik analiz” fanini o‘qitish bo‘yicha uzoq yillardan beri to‘plangan boy tajriba hamda rivojlangan horijiy davlatlarning yetakchi Oliy ta‘lim muassasalarining tajribalaridan foydalangan holda, shuningdek, ularning o‘quv dasturlaridagi asosiy adabiyotlardan foydalangan holda yaratildi.

Matematik analiz fani oliy matematikaning fundamental bo‘limlaridan biri bo‘lib, u matematikaning poydevori hisoblanadi. Matematik analiz kursi davomida ko‘pgina tushuncha va tasdiqlar, shuningdek, ularning tatbiqlari keltiriladi.

Matematik analiz fanining asosiy vazifasi shu fanning tushuncha, tasdiqlar va boshqa matematik ma‘lumotlar majmuasi bilan tanishtirishgina bo‘lmasdan, balki talabalarda mantiqiy fikrlash, matematik usullarni amaliy masalalarni yechishga qo‘llash ko‘nikmalarini shakllantirishdan iborat.

Ushbu o‘quv-uslubiy majmuada dastlab sillabus hamda o‘qitishda foydalaniladigan interfaol ta‘lim metodlari berilgan bo‘lib, so‘ngra har bir mavzu bo‘yicha materiallar batartib berilgan. Bunda har bir mavzu bo‘yicha ma‘ruza matnlari, nazorat savollari, mashqlar, glossariy, amaliy mashg‘ulot materiallari, test savollari va keyslar banki keltirilgan.

# 1-mavzu. To'plamlar. To'plamlar ustida amallar

## 1-ma'ruza

### Reja

- 1<sup>o</sup>. To'plam tushunchasi.
- 2<sup>o</sup>. To'plamlar ustida amallar.
- 3<sup>o</sup>. Matematik belgilar.

#### 1<sup>o</sup>. To'plam tushunchasi.

To'plam matematikaning boshlang'ich, ayni paytda muhim tushunchalaridan biri. Uni ixtiyoriy tabiatli narsalarning (predmetlarning) ma'lum belgilar bo'yicha birlashmasi (majmuasi) sifatida tushuniladi. Masalan, javondagi kitoblar to'plami, bir nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziqlar to'plami,  $x^2 - 5x + 6 = 0$  tenglamaning ildizlari to'plami deyilishi mumkin.

To'plamni tashkil etgan narsalar **uning elementlari** deyiladi.

Matematikada to'plamlar bosh harflar bilan, ularning elementlari esa kichik xarflar bilan belgilanadi. Masalan,  $A, B, C$  – to'plamlar,  $a, b, c$  – to'plamning elementlari.

Ba'zan to'plamlar ularning elementlarini ko'rsatish bilan yoziladi:

$$A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \},$$

$$N = \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \},$$

$$Z = \{ \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots \}.$$

Agar  $a$  biror  $A$  to'plamning elementi bo'lsa,  $a \in A$  kabi yoziladi va « $a$  element  $A$  to'plamga tegishli» deb o'qiladi. Agar  $a$  shu to'plamga tegishli bo'lmasa, uni  $a \notin A$  kabi yoziladi va « $a$  element  $A$  to'plamga tegishli emas» deb o'qiladi. Masalan, yuqoridagi  $A$  to'plamda  $10 \in A$ ,  $15 \notin A$ .

Agar  $A$  chekli sondagi elementlardan tashkil topgan bo'lsa, u **chekli to'plam**, aks holda **cheksiz to'plam** deyiladi. Masalan,  $A = \{ 2, 4, 6, 8, 10, 12 \}$  chekli to'plam, bir nuqtadan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar to'plami esa cheksiz to'plam bo'ladi.

**1-ta'rif.[3, Defenition 3.1.15, 39-bet]**  $A$  va  $B$  to'plamlari berilgan bo'lib,  $A$  to'plamning barcha elementlari  $B$  to'plamga tegishli bo'lsa,  $A$  **to'plam  $B$  ning qismi (qisman to'plam)** deyiladi va

$$A \subset B \text{ (yoki } B \supset A)$$

kabi yoziladi.

$A$  to'plamning elementlari orasida biror xususiyatga (bu xususiyatni  $P$  bilan belgilaymiz) ega bo'ladiganlari bo'lishi mumkin. Bunday xususiyatli elementlardan tuzilgan to'plam quyidagicha

$$\{x \in A \mid P\}$$

belgilanadi. Ravshanki,

$$\{x \in A \mid P\} \subset A$$

bo'ladi.

Agar  $A$  to'plam elementlari orasida  $P$  xususiyatli elementlar bo'lmasa, u holda

$$\{x \in A \mid P\}$$

bitta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'lib, uni **bo'sh to'plam** deyiladi.

Bo'sh to'plam  $\emptyset$  kabi belgilanadi. Masalan,  $x^2 + x + 1 = 0$  tenglamaning haqiqiy ildizlaridan iborat  $A$  bo'sh to'plam bo'ladi:

$$\emptyset = \{x \in A \mid x^2 + x + 1 = 0\}.$$

Har qanday  $A$  to'plam uchun

$$A \subset A, \emptyset \subset A$$

deb qaraladi.

Odatda,  $A$  to'plamning barcha qisman to'plamlaridan iborat to'plam  $F(A)$  kabi belgilanadi. Masalan,  $A = \{a, b, c\}$  to'plam uchun

$$F(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}, \emptyset\}$$

bo'ladi.

**2-ta'rif. [3, Defenition 3.1.15, 39-bet]**  $A$  va  $B$  to'plamlari berilgan bo'lib,

$$A \subset B, B \subset A$$

bo'lsa,  $A$  va  $B$  bir biriga **teng to'plamlar** deyiladi va

$$A = B$$

kabi yoziladi.

Demak,  $A = B$  tenglik  $A$  va  $B$  to'plamlarning bir xil elementlardan tashkil topganligini bildiradi.

## 2<sup>0</sup>. To'plamlar ustida amallar.

Ikki  $A$  va  $B$  to'plamlar berilgan bo'lsin.

**3-ta'rif. [3, Axiom 3.4, 37-bet]**  $A$  va  $B$  to'plamlarning barcha elementlaridan tashkil topgan  $E$  to'plam  $A$  va  $B$  **to'plamlar yig'indisi (birlashmasi)** deyiladi va  $A \cup B$  kabi belgilanadi:

$$E = A \cup B.$$

Demak, bu holda  $a \in A \cup B$  dan  $a \in A$ , yoki  $a \in B$ , yoki bir vaqtda  $a \in A, a \in B$  bo'lishi kelib chiqadi.

**4-ta'rif. [3, Definition 3.1.23, 41-bet]**  $A$  va  $B$  to'plamlarning barcha umumiy elementlaridan tashkil topgan  $F$  to'plam  $A$  va  $B$  **to'plamlar ko'paytmasi (kesishmasi)** deyiladi va  $A \cap B$  kabi belgilanadi:



$$F = A \cap B.$$

Demak, bu holda  $a \in A \cap B$  dan bir vaqtda  $a \in A$ ,  $a \in B$  bo'lishi kelib chiqadi.

**5-ta'rif.** [3, Definition 3.1.27, 42-bet]  $A$  to'plamning  $B$  to'plamga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tashkil topgan  $G$  to'plam  $A$  to'plamdan  $B$  to'plamning ayirmasi deyiladi va  $A \setminus B$  kabi belgilanadi:

$$G = A \setminus B.$$

Demak,  $a \in A \setminus B$  dan  $a \in A$ ,  $a \notin B$  bo'lishi kelib chiqadi.

**6-ta'rif.**  $A$  to'plamning  $B$  ga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan va  $B$  to'plamning  $A$  ga tegishli bo'lmagan barcha elementlaridan tuzilgan to'plam  $A$  va  $B$  to'plamlar-ning simmetrik ayirmasi deyiladi va  $A \Delta B$  kabi belgilanadi:

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Demak,  $a \in A \Delta B$  bo'lishidan  $a \in A$ ,  $a \notin B$  yoki  $a \in B$ ,  $a \notin A$  bo'lishi kelib chiqadi.

**7-ta'rif.** Aytaylik,  $a \in A$ ,  $a \in B$  bo'lsin. Barcha tartiblangan  $(a, b)$  ko'rinishidagi juftliklardan tuzilgan to'plam  $A$  va  $B$  to'plamlarning dekart ko'paytmasi deyiladi va  $A \times B$  kabi belgilanadi. Demak,

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

Xususan,  $A = B$  bo'lganda  $A \times A = A^2$  deb qaraladi.

**8-ta'rif.** Aytaylik,  $S$  va  $A$  to'plamlar berilgan bo'lib,  $A \subset S$  bo'lsin. Ushbu

$$S \setminus A$$

to'plam  $A$  to'plamni  $S$  ga to'ldiruvchi to'plam deyiladi va  $CA$  yoki  $C_S A$  kabi belgilanadi:

$$CA = S \setminus A.$$

To'plamlar ustida bajariladigan amallarning ba'zi xossalari keltiramiz.

$A, B$  va  $D$  to'plamlari berilgan bo'lsin.

- 1)  $A \subset B$ ,  $B \subset D$  bo'lsa,  $A \subset D$  bo'ladi;
- 2)  $A \cup A = A$ ,  $A \cap A = A$  bo'ladi;
- 3)  $A \subset B$  bo'lsa,  $A \cup B = B$ ,  $A \cap B = A$  bo'ladi;
- 4)  $A \cup B = B \cup A$ ,  $A \cap B = B \cap A$  bo'ladi;
- 5)  $(A \cup B) \cup D = A \cup (B \cup D)$ ,  $(A \cap B) \cap D = A \cap (B \cap D)$  bo'ladi;
- 6)  $A \subset S$  bo'lsa,  $A \cap CA = \emptyset$ ;
- 7)  $C(A \cup B) = CA \cap CB$ , bunda  $A \subset S$ ,  $B \subset S$ ;
- 8)  $C(A \cap B) = CA \cup CB$ , bunda  $A \subset S$ ,  $B \subset S$ .

Bu xossalarning isboti yuqorida keltirilgan ta'rif-lardan kelib chiqadi.

**1-misol.** Ushbu

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (1)$$

tenglik isbotlansin.

◀  $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  bo'lsin. U holda

$$a \in (A \setminus B): a \in A, a \notin B$$

yoki

$$a \in (B \setminus A): a \in B, a \notin A$$

bo'ladi. Bundan esa

$$a \in (A \cup B), a \notin (A \cap B)$$

bo'lib,

$$a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B). \quad (2)$$

Aytaylik,  $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  bo'lsin.

U holda

$$a \in (A \cup B): a \in A \text{ ёки } a \in B,$$

$$a \notin (A \cap B): a \notin A, a \notin B \text{ ёки } a \in A, a \notin B \text{ ёки } a \notin A, a \in B$$

bo'ladi.

Bundan esa

$$a \in A \setminus B \text{ ёки } a \in B \setminus A$$

bo'lib,

$$a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A). \quad (3)$$

(2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikning o'rinli bo'lishi topiladi. ►

To'plamlar ustida bajariladigan amallarni bayon etishda to'plamlarning qanday tabiatli elementlardan tuzilganligiga e'tibor qilinmadi.

Aslida, keltirilgan amallar biror universal to'plam deb ataluvchi to'plamning qisman to'plamlari ustida bajariladi deb qaraladi. Masalan, natural sonlar to'plamlari ustida amallar bajariladigan bo'lsa, universal to'plam sifatida barcha natural sonlardan iborat  $N$  to'plamni olish mumkin.

### 3<sup>0</sup>. Matematik belgilar.

Matematikada tez-tez uchraydigan so'z va so'z birikmalari o'rnida maxsus belgilar ishlatiladi. Ulardan muximlarini keltiramiz:

- 1) «agar ... bo'lsa, u holda ... bo'ladi» iborasi « $\Rightarrow$ » belgi orqali yoziladi;
- 2) ikki iboraning ekvivalentligi ushbu « $\Leftrightarrow$ » belgi orqali yoziladi;
- 3) «har qanday», «ixtiyoriy», «barchasi uchun» so'zlari o'rniga « $\forall$ » belgi ishlatiladi;
- 4) «mavjudki», «topiladiki» so'zlari o'rniga « $\exists$ » mavjudlik belgisi ishlatiladi.

## Mashqlar

1. Ushbu

$$(A \cup B) \setminus D = (A \setminus D) \cup (B \setminus D)$$

tenglik isbotlansin.

2. Agar  $A$  va  $B$  chekli to'plamlar bo'lib, ularning elementlari soni mos ravishda  $n(A)$ ,  $n(B)$  bo'lsa,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

bo'lishi isbotlansin.

3. Agar  $A$  chekli to'plam bo'lib, uning elementlarining soni  $n$  ga teng bo'lsa, bu to'plamning barcha qisman to'plamlari to'plami  $F(A)$  ning elementlari soni  $2^n$  ga teng ekani isbotlansin.

## Adabiyotlar

1. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, I q.* T. "Voris-nashriyot", 2010.
2. **Fixtengols G. M.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I m.* M. «FIZMATLIT», 2001.
3. **Tao T.** *Analysis 1.* Hindustan Book Agency, India, 2014. [33-44 betlar]

## Nazorat savollari

1. To'plam deganda nimani tushunasiz?
2. Qism to'plam nima? Misollarda tushuntiring.
3. Ikki to'plamning yig'indisi va ko'paytmasi nima?
4. Ikki to'plamning ayirmasi va simmetrik ayirmasi nima?
5. To'plamlar ustida bajariladigan amallarning asosiy xossalarini keltiring.

## Glossariy

**To'plam** – ixtiyoriy tabiatli narsalarning ma'lum belgilari bo'yicha birlashmasi.

**Cheksiz to'plam** – elementlari soni cheksiz bo'lgan to'plam cheksiz to'plam deyiladi.

**Bo'sh to'plam** – birorta ham elementga ega bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi.

**Simmetrik ayirma** – ikki to'plamning bir-biriga tegishli bo'lmagan elementlari to'plami.

**Qarama qarshi sonlar** – faqat ishorasi bilan farq qiladigan sonlar.

**Natural sonlar to'plami** – sanoqda ishlatiladigan sonlar.

**Butun sonlar to'plami** – natural sonlar va ularga qarama-qarshi sonlar hamda 0 sonidan tashkil topgan to'plam.



# Keys banki

**1-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: agar  $A$  va  $B$  chekli toplamlar bo`lib, ularning elementlari soni mos ravishda  $n(A)$ ,  $n(B)$  bo`lsa,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

bo`lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

## 1-amaliy mashg`ulot

**Na'muna uchun misollar yechimi**

**3 – м и с о л . Ушбу**

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

*тенглик исботлансин.*

◀  $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  бўлсин. У ҳолда

$$a \in A \setminus B \Rightarrow a \in A, a \notin B$$

ёки

$$a \in B \setminus A \Rightarrow a \in B, a \notin A$$

бўлиб, булардан  $a \in A \cup B$ ,  $a \notin A \cap B$  бўлиши келиб чиқади.

Демак,  $a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  ва

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) \subset (A \cup B) \setminus (A \cap B) \quad (3)$$

бўлади.

$a \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$  бўлсин. У ҳолда

$$a \in (A \cup B) \Rightarrow a \in A, \text{ ёки } a \in B,$$

$$a \notin A \cap B \Rightarrow a \notin A, a \notin B, \text{ ёки } a \in A, a \notin B \text{ ёки } a \notin A, a \in B$$

бўлиб, булардан  $a \in A \setminus B$  ёки  $a \in B \setminus A$  бўлиши келиб чиқади.

Демак,  $a \in (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$  ва

$$(A \cup B) \setminus (A \cap B) \subset (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \quad (4)$$

бўлади. (3) ва (4) муносабатлардан топамиз:

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B). \blacktriangleright$$

### Misollar

Ихтиёрый  $A, B, C, D$  тўпламлар учун қуйидаги муносабатлар исботлансин.

35.  $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ .

36.  $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ .

37.  $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ .

38.  $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$ .

39.  $(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$ .

40.  $(A \setminus B) \cup (B \setminus C) \cup (C \setminus A) \cup (A \cap B \cap C) = A \cup B \cup C$ .

41.  $(A \cap C) \cup (B \cap D) \subset (A \cup B) \cap (C \cup D)$ .

42.  $(B \setminus C) \setminus (B \setminus A) \subset A \setminus C$ .

43.  $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \setminus C$ .

44.  $(A \cup B) \setminus C \subset A \cup (B \setminus C)$ .

45.  $(A \cup C) \setminus B \subset (A \setminus B) \cup C$ .

46.  $A \cap B \subset A \subset A \cup B$ .

47.  $A \cap (A \cup B) = A$ .

48. Агар  $A \setminus B = C$  бўлса,  $A = B \cup C$  нинг ўринли бўлиши келиб чиқадими?

49. Агар  $A = B \cup C$  бўлса,  $A \setminus B = C$  нинг ўринли бўлиши келиб чиқадими?

50.  $(A \cup B) \setminus (A \cup C) \subset A \cup (B \setminus C)$ .

51.  $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$ .

52.  $A \setminus (B \cup C) \subset (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$ .

53. Агар  $A$  ва  $B$  чекли тўпламлар бўлиб, уларнинг элементлари сони мос равишда  $n(A)$ ,  $n(B)$  бўлса,

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

бўлиши исботлансин.

54. Агар  $A$  чекли тўплам бўлиб, унинг элементлари сони  $m$  га тенг бўлса, бу тўпламнинг барча қисмий тўпламлари тўпламининг элементлари сони  $2^m$  та бўлиши исботлансин.

# Test

№	Savol	to`g`ri javob	muqobil javob	muqobil javob
1.	Quyidagi to`plamlardan qaysilari bo`sh to`plam?	$\{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 = 0\};$	$\{x \in \mathbb{R} :  x  = 3\};$	$\{x \in \mathbb{R} : x^3 = 1\};$
2.	Faqat butun sonlarni aniqlaydigan to`plamni ko`rsating	$\{x \in \mathbb{N} : x^2 - 3x = 0\};$	$\left\{x \in \mathbb{N} : \left x + \frac{2}{x^3}\right  = 0\right\};$	$\{x \in \mathbb{N} : x^2 + 3\sqrt{x-7} = 0\};$
3.	Qanday to`plamga bo`sh to`plam deyiladi?	Birorta ham elementga ega bo`lmagan to`plamga;	Elementlari soni cheksiz bo`lgan to`plamga;	Elementlari soni chekli bo`lgan to`plamga;
4.	Qanday to`plamlarga teng to`plamlar deyiladi?	Ayni bir xil elementlardan tashkil topgan to`plamlarga;	Elementlari soni aynan teng bo`lgan to`plamlarga;	Chekli to`plamlarga;
5.	$A = \{a, b, c, d, e, f\}$ va $B = \{b, d, e, g, h\}$ to`plamlarning kesishmasi $A \cap B$ ni toping.	$A \cap B = \{b, d, e\}$	$A \cap B = \{b, d, e, f\}$	$A \cap B = \{b, d, e, g\}$
6.	$A = \{x : -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$ va $B = \{x : -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\}$ to`plamlarning kesishmasini toping.	$A \cap B = \{x : -\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$	$A \cap B = \{x : -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\}$	$A \cap B = \{x : -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$
7.	$A = \{x : -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\}$ va $B = \{x : -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\}$ to`plamlarning birlashmasini toping.	$A \cup B = \{x : -\frac{2}{3} \leq x \leq 2\}$	$A \cup B = \{x : -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{4}\}$	$A \cup B = \{x : -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\}$
8.	$A = \left\{x : -\frac{2}{3} \leq x \leq \frac{7}{4}\right\}$ va $B = \left\{x : -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\right\}$ to`plamlar berilgan. $A \setminus B$ ni toping.	$A \setminus B = \left\{x : -\frac{2}{3} \leq x \leq -\frac{1}{4}\right\}$	$A \setminus B = \left\{x : -\frac{2}{3} \leq x \leq 2\right\}$	$A \setminus B = \left\{x : -\frac{1}{4} \leq x \leq 2\right\}$

# 2-mavzu. Akslantirishlar va ularning turlari

## 2-Ma'ruza.

### Reja

- 1<sup>o</sup>. Akslantirish tushunchasi.
- 2<sup>o</sup>. Akslantirishning turlari.
- 3<sup>o</sup>. Ekvivalent to'plamlar. Sanoqli to'plamlar.

### 1<sup>o</sup>. Akslantirish tushunchasi.

$E$  va  $F$  to'plamlar berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** [3, Definition 3.3.1, 49-bet] Agar  $E$  to'plamdan olingan har bir  $x$  elementga biror  $f$  qoida yoki qonunga ko'ra  $F$  to'plamning bitta  $y$  elementi ( $y \in F$ ) mos qo'yilgan bo'lsa,  $E$  to'plamni  $F$  to'plamga akslantirish berilgan deyiladi va

$$f: E \rightarrow F \text{ yoki } x \xrightarrow{f} y, \quad (x \in E, y \in F)$$

kabi belgilanadi. Bunda  $E$  to'plam  $f$  akslantirishning **aniqlanish to'plami** deyiladi.

**1-misol.** Ushbu  $N = \{1, 2, 3, \dots\}$  va  $N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$  to'plamlar berilgan bo'lsin.

1) har bir natural  $n$  ( $n \in N$ ) songa  $\frac{1}{n}$  ( $\frac{1}{n} \in N'$ ) sonni mos qo'ysak, unda

$$f: N \rightarrow N', \quad n \xrightarrow{f} \frac{1}{n}$$

akslantirish hosil bo'ladi. Uni  $f(n) = \frac{1}{n}$  kabi ham yoziladi.

2) har bir natural son  $n$  ( $n \in N$ ) songa  $\frac{1}{n^2}$  ( $\frac{1}{n^2} \in N'$ ) sonni mos qo'ysak, unda

$$\varphi: N \rightarrow N', \quad n \xrightarrow{\varphi} \frac{1}{n^2}$$

akslantirishga ega bo'lamiz:  $\varphi(n) = \frac{1}{n^2}$ .

3) har bir natural  $n$  ( $n \in N$ ) songa  $1$  ( $1 \in N'$ ) sonini mos qo'yish natijasida

$$g : N \rightarrow N', \quad n \xrightarrow{g} 1$$

akslantirish hosil bo'ladi:  $g(n) = 1$ .

Aytaylik,

$$f : E \rightarrow F$$

akslantirish berilgan bo'lsin.  $x \in E$  elementga mos qo'yilgan  $y \in F$  element  $x$  ning aksi (obrazi) deyiladi va  $y = f(x)$  kabi belgilanadi.

Endi  $y \in F$  elementni olaylik.  $E$  to'plamning shunday  $x$  elementlarini qaraymizki,  $f(x) = y$  bo'lsin. Bunday  $x \in E$  elementlar  $y \in F$  ning asli (proobrazi) deyiladi va  $f^{-1}(y)$  kabi belgilanadi:

$$f^{-1}(y) = \{x \in E / f(x) = y\}.$$

[Definition 3.4.1, 56-bet] Agar  $A \subset E$  bo'lsa, ushbu

$$\{f(x) / x \in A\}$$

to'plam  $A$  to'plamning  $F$  dagi aksi deyiladi va  $f(A)$  kabi belgilanadi:

$$f(A) = \{f(x) | x \in A\}.$$

[Definition 3.4.4, 57-bet] Agar  $B \subset F$  bo'lsa, ushbu

$$\{x \in E / f(x) \in B\}$$

to'plam  $B$  to'plamning  $E$  dagi asli deyiladi va  $f^{-1}(B)$  kabi belgilanadi:

$$f^{-1}(B) = \{x \in E / f(x) \in B\}.$$

**2-misol.** Faraz qilaylik,  $N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$  va  $M = \{-1, +1\}$  to'plamlar berilgan bo'lib, ushbu

$$f : N \rightarrow M$$

akslantirish quyidagi

$$f(n) = (-1)^n$$

ko'rinishda bo'lsin.

Ravshanki,  $5 \in N$  ning aksi  $f(5) = -1$ ;  $1 \in M$  ning asli esa  $f^{-1}(1) = \{2, 4, 6, \dots\}$  bo'ladi. Shuningdek,  $A = \{3, 4\} \subset N$  to'plamning aksi  $f(A) = \{-1, 1\} = M$ ,  $B = \{-1\} \subset M$  to'plamning asli esa

$$f^{-1}(B) = \{1, 3, 5, \dots\}$$

bo'ladi.

Faraz qilaylik,  $A$  va  $B$  to'plamlari  $F$  to'plamning qisman to'plamlari bo'lsin:  $A \subset F$ ,  $B \subset F$ . Unda

$$f^{-1}(A \cap B) = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B). \quad (1)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $x \in f^{-1}(A \cap B)$  bo'lsin. Unda  $f(x) \in A \cap B$  bo'lib,  $f(x) \in A$  va  $f(x) \in B$  bo'ladi. Keyingi munosabatlardan  $x \in f^{-1}(A)$ ,  $x \in f^{-1}(B)$  bo'lishi



kelib chiqadi. Demak,  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$ . Bundan esa

$$f^{-1}(A \cap B) \subset f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \quad (2)$$

bo'lishini topamiz.

Aytaylik,  $x \in f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B)$  bo'lsin. Unda  $x \in f^{-1}(A)$  va  $x \in f^{-1}(B)$  bo'lib,  $f(x) \in A$ ,  $f(x) \in B$  bo'ladi. Natijasi  $f(x) \in A \cap B$  bo'lib, undan  $x \in f^{-1}(A \cap B)$  bo'lishini topamiz. Bu esa

$$f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \subset f^{-1}(A \cap B) \quad (3)$$

bo'lishini bildiradi.

(2) va (3) munosabatlardan (1) tenglikning o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.



Yuqoridagidek,

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B),$$

$$f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

tengliklarning o'rinli bo'lishi isbotlanadi.

## 2<sup>0</sup>. Akslantirishning turlari.

Aytaylik,

$$f : E \rightarrow F \quad (4)$$

akslantirish berilgan bo'lib,  $f(E)$  esa  $E$  to'plamning aksi bo'lsin:

$$f(E) = \{f(x) | x \in E\}.$$

**2-ta'rif.** Agar (4) akslantirishda

$$f(E) \subset F$$

bo'lsa, (4) akslantirish  $E$  to'plamni  $F$  to'plamning **ichiga akslantirish** deyiladi.

Masalan,

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}, N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$$

to'plamlari uchun ushbu

$$f : N \rightarrow N', n \rightarrow \frac{1}{3n}$$

akslantirish  $N$  to'plamni  $N'$  to'plamning ichiga akslantirish bo'ladi.

**3-ta'rif. [Definition 3.3.17, 53-bet]** Agar (4) akslantirishda

$$f(E) = F$$

bo'lsa, (4) akslantirish  $E$  to'plamni  $F$  to'plamning **ustiga akslantirish (syur'ektiv akslantirish)** deyiladi.

Masalan,

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}, M = \{-1, 1\}$$

to'plamlari uchun

$$n \xrightarrow{f} (-1)^n$$

akslantirish  $N$  to'plamni  $M$  to'plamning ustiga akslantirish bo'ladi.

**4-ta'rif.** Agar (4) ustiga akslantirish bo'lib, bu akslantirish  $E$  to'plamning turli elementlarini  $F$  to'plamning turli elementlariga akslantirsa, (4) **in'ektiv akslantirish** deyiladi.

**5-ta'rif. [Definition 3.3.14, 54-bet]** Agar (4) ustiga akslantirish bo'lib, u in'ektiv akslantirish ham bo'lsa, (4) **o'zaro bir qiymatli akslantirish (moslik)** deyiladi.

Masalan,

$$N = \{1, 2, 3, \dots\}, N' = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}.$$

to'plamlar uchun ushbu

$$f : N \rightarrow N', n \xrightarrow{f} \frac{1}{n}.$$

akslantirish o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'ladi.

**6-ta'rif.**  $f : E \rightarrow F$  akslantirish o'zaro bir qiymatli akslantirish bo'lsin.  $F$  to'plamning har bir  $y$ , ( $y \in F$ ) elementiga  $E$  to'plamning bitta  $x$  elementini ( $x \in E$ ) mos qo'yadigan va

$$g(y) = g(f(x)) = x.$$

munosabat bilan aniqlanadigan

$$g : F \rightarrow E$$

akslantirish  $f : E \rightarrow F$  ga nisbatan **teskari akslantirish** deyiladi va  $f^{-1}$  kabi belgilanadi:

$$f^{-1} : F \rightarrow E.$$

Demak,  $f : E \rightarrow F$  ga teskari akslantirish mavjud bo'lishi uchun:

- a)  $f$  ustiga akslantirish,
- b)  $F$  to'plamdan olingan har bir  $y$  elementning  $E$  to'plamdagi asli

$$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) = x$$

yagona bo'lishi kerak.

### 3<sup>0</sup>. Ekvivalent to'plamlar. Sanoqli to'plamlar.

Ko'p holda to'plamlarni ularning tashkil etgan elementlari soni bo'yicha o'zaro solishtirishga to'g'ri keladi. Chekli to'plamlar solishtirilganda bir to'plamning elementlari soni ikkinchisidan ko'p, yoki kam, yoki ularning elementlarining soni bir-biriga teng degan hulosaga kelinadi. Bu holda elementlari soni ko'p bo'lgan to'plamni «quvvati» ko'proq deyish mumkin.

Cheksiz to'plamlarni solishtirishda vaziyat boshqacharoq bo'ladi. Cheksiz to'plamlar ekvivalentlik tushunchasi yordamida solishtiriladi.

**7-ta'rif.** Agar  $f : E \rightarrow F$  o'zaro bir qiymatli akslantirish (moslik) bo'lsa,

$E$  va  $F$  **ekvivalent to‘plamlar** deyiladi va  $E \sim F$  kabi belgilanadi.

Demak,  $E$  va  $F$  to‘plamlarning ekvivalentligi  $E \sim F$  ularning elementlari o‘zaro bir qiymatli moslikda ekanligini bildiradi.

Masalan,

$$N = \{1, 2, 3, 4, \dots\}, \quad N_1 = \{2, 4, 6, 8, \dots\}$$

to‘plamlar uchun

$$n \xrightarrow{f} 2n, \quad (n \in N, 2n \in N_1)$$

akslantirish o‘zaro bir qiymatli. Binobarin,

$$N \sim N_1$$

bo‘ladi. (Bu holda  $n \leftrightarrow 2n$  kabi yoziladi).

Aytaylik  $A, B, D$  to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Unda

- 1)  $A \sim A$ ,
- 2)  $A \sim B \Rightarrow B \sim A$ ,
- 3)  $A \sim B, B \sim D \Rightarrow A \sim D$

bo‘ladi. Bu xossalarning isboti yuqorida keltirilgan ta’rifdan kelib chiqadi.

Ikki  $A$  va  $B$  to‘plamlari o‘zaro ekvivalent bo‘lsa, ularni bir xil quvvatli to‘plamlar deb qaraladi.

Demak, quvvatni ekvivalent to‘plamlarning miqdoriy xarakteristikasi sifatida tushunish mumkin.

Chekli to‘plamlarning o‘zaro ekvivalentligi ularning tashkil etgan elementlarining sonini bir-biriga tengligini bildiradi.

Umuman,  $A$  va  $B$  chekli to‘plamlarning o‘zaro ekvivalent bo‘lishi uchun ularning elementlari soni bir xil bo‘lishi zarur va etarli:

$$A \sim B \Leftrightarrow n(A) = n(B),$$

bunda  $n(G)$  –  $G$  to‘plamning elementlari soni.

**8-ta’rif.** Natural sonlar to‘plami  $N$  ga ekvivalent bo‘lgan har qanday to‘plam **sanoqli to‘plam** deyiladi.

Masalan, ushbu

$$N_1 = \{2, 4, 6, 8, \dots, 2n, \dots\},$$

$$N_2 = \{1, 8, 27, 64, \dots, n^3, \dots\},$$

$$N_3 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots\}$$

to‘plamlar sanoqli to‘plamlar bo‘ladi, chunki

$$n \leftrightarrow 2n, \quad N \sim N_1;$$

$$n \leftrightarrow n^3, \quad N \sim N_2;$$

$$n \leftrightarrow \frac{1}{n}, \quad N \sim N_3.$$

Natural sonlar to‘plami  $N$  ga ekvivalent bo‘lgan barcha to‘plamlar sanoqli to‘plamlar sinfini tashkil etadi. Bu sinf to‘plamlarining quvvati bir xil bo‘ladi.

Ravshanki,

$$N_1 \subset N, N_2 \subset N, N_3 \subset N$$

bo'lad. Ayni paytda, yuqorida ko'rdikki,

$$N \sim N_1, N \sim N_2, N \sim N_3.$$

Bunday vaziyat (to'plamning qismi o'ziga ekvivalent bo'lishi) faqat cheksiz to'plamlardagina sodir bo'lad.

**Matematik analiz kursida tayin  $E$  va  $F$  to'plamlar uchun  $f:E \rightarrow F$  akslantirishlar va ularning xossalari o'rganiladi.**

Dastavval yuqoridagi to'plamlar sifatida haqiqiy sonlar to'plamini olamiz va uning xossalarini o'rganamiz.

### Mashqlar

1. Agar  $A = \{a, b\}$ ,  $B = \{\alpha, \beta, \gamma\}$ . bo'lsa,  $A$  to'plamning  $B$  to'plamga akslantirishlari soni 9 ga teng bo'lishi isbotlansin.

2. Aytaylik,  $A$  sanoqli to'plam bo'lib,  $x \notin A$  bo'lsin. U holda  $A \cup \{x\} \sim A$  bo'lishi isbotlansin.

### Adabiyotlar

1. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.

2. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

3. **Tao T.** *Analysis 1.* Hindustan Book Agency, India, 2014. [49-61 betlar]

### Nazorat savollari.

1. Akslantirish nima?
2. To'plam elementining hamda to'plamning aksi va asli deganda nimani tushunasiz?
3. Akslantirishlarning qanday turlari mavjud?
4. O'zaro bir qiymatli akslantirish nima?
5. Qanaday to'plamlar ekvivalent to'plamlar deyiladi?
6. Sanoqli to'plam nima?

# Glossariy

**Akslantirish** – Agar  $E$  to‘plamdan olingan har bir  $x$  elementga biror  $f$  qoida yoki qonunga ko‘ra  $F$  to‘plamning bitta  $y$  elementi ( $y \in F$ ) mos qo‘yilgan bo‘lsa,  $E$  to‘plamni  $F$  to‘plamga akslantirish berilgan deyiladi.

**To‘plamning aksi** – Agar  $A \subset E$  bo‘lsa, ushbu

$$\{f(x)/x \in A\}$$

to‘plam  $A$  to‘plamning  $F$  dagi aksi deyiladi.

**To‘plamning asli** – Agar  $B \subset F$  bo‘lsa, ushbu

$$\{x \in E / f(x) \in B\}$$

to‘plam  $B$  to‘plamning  $E$  dagi asli deyiladi.

**Ichiga akslantirish** – Agar  $f : E \rightarrow F$  akslantirishda

$$f(E) \subset F$$

bo‘lsa, bu akslantirish  $E$  to‘plamni  $F$  to‘plamning **ichiga akslantirish** deyiladi.

**Ustiga akslantirish (syur’ektiv akslantirish)** – Agar  $f : E \rightarrow F$  akslantirishda

$$f(E) = F$$

bo‘lsa, bu akslantirish  $E$  to‘plamni  $F$  to‘plamning **ustiga akslantirish (syur’ektiv akslantirish)** deyiladi.

**In’ektiv akslantirish** – Agar  $f : E \rightarrow F$  ustiga akslantirish bo‘lib, bu akslantirish  $E$  to‘plamning turli elementlarini  $F$  to‘plamning turli elementlariga akslantirsa, u **in’ektiv akslantirish** deyiladi.

**O‘zaro bir qiymatli akslantirish (moslik)** – Agar  $f : E \rightarrow F$  ustiga akslantirish bo‘lib, u in’ektiv akslantirish ham bo‘lsa, u **o‘zaro bir qiymatli akslantirish (moslik)** deyiladi.

**Ekvivalent to‘plamlar** – Agar  $f : E \rightarrow F$  o‘zaro bir qiymatli akslantirish (moslik) bo‘lsa,  $E$  va  $F$  **ekvivalent to‘plamlar** deyiladi.

**Sanoqli to‘plam** – Natural sonlar to‘plami  $N$  ga ekvivalent bo‘lgan har qanday to‘plam **sanoqli to‘plam** deyiladi

## Keys banki

**2-keys.** Masala o‘rtaga tashlanadi: Aytaylik,  $A$  sanoqli to‘plam bo‘lib,  $x \notin A$  bo‘lsin. U holda  $A \cup \{x\} \sim A$  bo‘lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo‘lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to‘plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo‘yilgan masalani yeching (individual).



## 2-amaliy mashg'ulot

- $\mathbb{N}$  natural sonlar to'plamida  $f(n) = 3n$  akslantirish berilgan bo'lsin.  
 $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  akslantirish qanday akslantirish bo'ladi.  
**Yechish:** Ikkita  $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$  sonlarni qaraylik.  $n_1 \neq n_2$  ekanligidan  $f(n_1) \neq f(n_2)$  ekanligi kelib chiqadi. Haqiqatdan ham,  $n_1 \neq n_2$  bo'lsa,  $3n_1 \neq 3n_2$ . Demak,  $f(n)$  akslantirish bir qiymatli akslantirish ekan ya'ni,  $f(n)$  akslantirish ineksiya. Hisoblashlardan ko'rinadiki,  $\{f(\mathbb{N})\} \subset \mathbb{N}$ , ammo  $\mathbb{N} \not\subset \{f(\mathbb{N})\}$  shuning uchun bu akslantirish sureksiya emas.
- $\mathbb{N}$  natural sonlar to'plamida  $f(n) = n^2$  akslantirish berilgan bo'lsin.  
 $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  akslantirish qanday akslantirish bo'ladi.
- $\mathbb{N}$  natural sonlar to'plamida  $f(n) = n^2 + 2n$  akslantirish berilgan bo'lsin.  
 $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  akslantirish qanday akslantirish bo'ladi.
- $\mathbb{N}$  natural sonlar to'plamida  $f(n) = 2n$  akslantirish berilgan bo'lsin.  
 $f(n): \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  akslantirish qanday akslantirish bo'ladi.
- $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$  va  $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x \leq 1\}$  to'plamlar berilgan bo'lsin.  
 $f(x) = x^2$  ya'ni  $f(x): A \rightarrow B$  akslantirish qanaqa akslantirish bo'ladi.
- $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$  to'plam berilgan bo'lsin.  $f(x) = x^3$  ya'ni  
 $f(x): A \rightarrow A$  akslantirish qanaqa akslantirish bo'ladi.
- $\mathbb{R}$  haqiqiy sonlar to'plamida  $f(x) = \frac{2\arctg x}{\pi}$  akslantirish berilgan bo'lsin.  
 $f(x): \mathbb{R} \rightarrow B$  bo'lsa,  $B$  to'plamni toping.
- $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 1\}$  to'plamda  $f(x) = \tg \frac{\pi x}{2}$  akslantirish berilgan bo'lsin.  
 $f(x): A \rightarrow B$  bo'lsa,  $B$  to'plamni toping.
- $f(x) = \arcsin x$  akslantirish  $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq 1\}$  to'plamni qaysi to'plamga akslantirishini toping.
- $f(x) = \sin x$  akslantirish  $\mathbb{R}$  haqiqiy sonlar to'plamini qaysi to'plamga akslantirishini toping.
- $f(x) = x^3$  akslantirish  $B = \{x \in \mathbb{R} : 3 \leq x^2 \leq 9\}$  to'plamni qaysi to'plamga akslantirishini toping.
- $f(x) = \sin x$  akslantirish  $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 10\}$  to'plamni qaysi to'plamga akslantirishini toping.

# Test

No	Savol	to'g'ri javob	muqobil javob	muqobil javob
1.	$x=5$ nuqtaning $f(x) = \frac{x^2+5}{30} + 29$ akslantirish orqali aksini toping.	30	25	35
2.	$x=\pi$ nuqtaning $f(x) = \sin x$ akslantirish orqali aksini toping	0	1	-1
3.	$\frac{1}{2}$ sonning $f(x) = \cos x$ akslantirishdagi asli(proobrazi)ni toping	$\frac{\pi}{3}$	$\pi$	$\frac{\pi}{6}$
4.	1 sonning $f(x) = e^{\frac{x}{1-800x^3}}$ akslantirishdagi asli(proobrazi)ni toping	0	1	2
5.	$\frac{1}{2}$ sonning $f(x) = 2^x$ akslantirish orqali proobrazini toping	-1	1	2
6.	Inektiv akslantirishni ko'rsating	$f(x) = 4^x$	$f(x) = x^2$	$f(x) = \sin x$
7.	$x=0$ nuqtaning $f(x) = \sin \frac{x}{1+88\sqrt{x}}$ akslantirish orqali aksini toping	0	1	-1
8.	$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ va $M = \{-1, 1\}$ to'plamlar berilgan. $N$ ni $M$ ga syur'ektiv akslantiruvchi akslantirishni ko'rsating.	$n \rightarrow (-1)^n$	$n \rightarrow (-1)^{2n}$	$n \rightarrow (-1)^{2n+1}$
9.	$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ va $M = \{-1, 1\}$ to'plamlar berilgan. $N$ ni $M$ ning ichiga akslantiruvchi akslantirishni ko'rsating.	$n \rightarrow (-1)^{2n}$	$n \rightarrow (-1)^n$	$n \rightarrow \frac{1}{n}$
10.	$N = \{1, 2, 3, \dots\}$ va $M = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$ to'plamlar berilgan. $N$ ni $M$ ga o'zaro bir qiymatli akslantiruvchi akslantirishni ko'rsating.	$n \rightarrow \frac{1}{n}$	$n \rightarrow \frac{1}{n^2}$	$n \rightarrow \frac{1}{2n}$

# 3-mavzu. Haqiqiy sonlar

## 3-Ma'ruza

### Reja

1. Ratsional sonlar va cheksiz davriy o'nli kasrlar.
3. Haqiqiy son tushunchasi.

Son tushunchasi uzoq o'tmishdan ma'lum. Odamlar sanash taqozosi bilan dastlab 1, 2, 3, ... – natural sonlarni qo'llaganlar. So'ngra manfiy son, ratsional son va nihoyat, haqiqiy son tushunchasi kiritilgan va o'rganilgan.

Biz o'quvchiga o'rta maktab, kollej va litseylarda matematika kursidan natural, butun, ratsional sonlarni, ular ustida bajariladigan amallarni, amallarning xossala'rini, shuningdek to'g'ri chiziqda (sonlar o'qida) geometrik ifodalanishini ma'lum deb hisoblaymiz.

Haqiqiy sonlarning matematik analiz kursida muhimligini e'tiborga olib, ular haqidagi ma'lumotlarni talab darajasida bayon etamiz.

### 1. Ratsional sonlar va cheksiz davriy o'nli kasrlar.

**Ta'rif.** [3, Definition 4.2.1, 82-bet]  $\frac{a}{b}$  qisqarmas kasr ko'rinishda tasvirlash mumkin bo'lgan sonlar ratsional sonlar deyiladi. Bunda  $a, b$  – butun sonlar va  $b \neq 0$ .

Faraz qilaylik,  $\frac{p}{q}$  biror musbat ratsional son bo'lsin. Bo'lish qoidasidan foydalanib  $p$  butun sonni  $q$  ga bo'lamiz. Agar  $p$  ni  $q$  ga bo'lish jarayonida biror qadamdan keyin qoldiq nolga teng bo'lsa, u holda bo'lish jarayon to'xtab,  $\frac{p}{q}$  kasr o'nli kasrga aylanadi. Odatda, bunday o'nli kasr chekli o'nli kasr

deyiladi. Masalan,  $\frac{59}{40}$  kasrda 59 ni 40 ga bo'lib, uni 1,475 bo'lishini topamiz:

$$\frac{59}{40} = 1,475.$$

Agar  $p$  ni  $q$  ga bo'lish jarayoni cheksiz davom etsa, ma'lum qadamdan keyin yuqorida aytilgan qoldiqlardan biri yana bir marta uchraydi, so'ng undan oldingi raqamlar mos tartibda takrorlanadi.

Odatda bunday kasr cheksiz davriy o'nli kasr deyiladi. Takrorlanadigan raqamlar (raqamlar birlashmasi) o'nli kasrning davri bo'ladi.

Masalan,  $\frac{1}{3}$  kasrda 1 ni 3 ga bo‘lib, 0,333... bo‘lishini topamiz;

$$\frac{1}{3} = 0,333\dots$$

Ushbu

$$0,333\dots, 1,4777\dots, 2,131313\dots$$

kasrlar cheksiz davriy o‘nli kasrlardir. Ularning davri mos ravishda 3, 7, 13 bo‘ladi va bu cheksiz davriy o‘nli kasrlar quyidagicha

$$0,(3), 1,4(7), 2,(13)$$

yoziladi;

$$0,(3) = 0,333\dots \quad 1,4(7) = 1,4777\dots \quad 2,(13) = 2,131313\dots$$

Shuni ta’kidlaymizki, davri 9 ga teng bo‘lgan cheksiz davriy o‘nli kasrni chekli o‘nli kasr qilib yoziladi.

Masalan,

$$0,4999\dots = 0,4(9) = 0,5, \quad 2,71999\dots = 2,71(9) = 2,72.$$

Har qanday chekli o‘nli kasrni nollar bilan davom ettirib cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin.

Masalan,

$$1,4 = 1,4000\dots = 1,4(0)$$

$$0,75 = 0,75000\dots = 0,75(0).$$

Demak, har qanday  $\frac{p}{q}$  ratsional son cheksiz davriy o‘nli kasr ko‘rinishida

ifodalanadi. Aksincha, har qanday cheksiz davriy o‘nli kasrni  $\frac{p}{q}$  ko‘rinishida

yozish mumkin.

Masalan, ushbu

$$0,(3) = 0,333\dots, \quad 7,31(06) = 7,31060606\dots$$

cheksiz davriy o‘nli kasrlarni qaraylik. Avvalo ularni

$$0,(3) = 0 + \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \dots,$$

$$7,31(06) = 7 + \frac{3}{10} + \frac{1}{10^2} + \frac{6}{10^4} + \frac{6}{10^6} + \dots$$

ko‘rinishda yozib, so‘ng cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig‘indisi formulasidan foydalanib topamiz:

$$0,(3) = 0,333\dots = \frac{\frac{3}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3},$$

$$7,31(06) = 7,31060606\dots = \frac{731}{100} + \frac{\frac{1}{10^4}}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{731}{100} + \frac{1}{100} \cdot \frac{6}{99} =$$

$$= \frac{1}{100} \left( 731 + \frac{2}{33} \right) = \frac{965}{132}.$$

Demak, ixtiyoriy ratsional son cheksiz davriy oʻnli kasr orqali va aksincha, ixtiyoriy cheksiz davriy oʻnli kasr ratsional son orqali ifodalanadi.

## 2. Haqiqiy son tushunchasi.

Cheksiz davriy boʻlmagan oʻnli kasrlar ham boʻladi. Bu kesmalarni oʻlchash jarayonida yuzaga kelishini koʻrsatamiz.

Faraz qilaylik, biror  $J$  kesma hamda oʻlchov birligi, masalan metr berilgan boʻlsin.  $J$  kesmaning uzunligini hisoblash talab etilsin.

Aytaylik, 1 metr  $J$  kesmada 5 marta butun joylashib, kesmaning  $J_1$  qismi ortib qolsin. Ravshanki  $J_1$  ning uzunligi 1 metrdan kam boʻladi. Bu holda  $J$  kesmaning uzunligini taxminan 5 m. ga teng deb olish mumkin:

$$J \text{ uzunligi} \approx 5 \text{ m.}$$

Agar bu aniqlik etarli boʻlmasa, oʻlchov birligining  $\frac{1}{10}$  qismini, yaʼni 1 dm. ni olib, uni  $J_1$  kesmaga joylash-tiramiz. Aytaylik, 1 dm.  $J_1$  kesmada 7 marta butunlay joylashib,  $J_1$  kesmaning  $J_2$  qismi ortib qolsin. Bunda  $J_2$  ning uzunligi 1 dm. dan kichik boʻladi. Bu holda  $J$  kesmaning uzunligi taxminan 5,7 m ga teng deb olinishi mumkin:

$$J \text{ uzunligi} \approx 5,7 \text{ m.}$$

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida ikki holga duch kelamiz:

1) biror qadamdan keyin, masalan  $n+1$  qadamdan keyin oʻlchov birligining  $\frac{1}{10^n}$  qismi  $J_n$  kesmaga  $\alpha_n$  marta butunlay joylashadi. Bu holda oʻlchov jarayoni toʻxtatilib,

$$J \text{ uzunligi} = 5,7 \dots \underbrace{\alpha_n}_{n \text{ ta raqam}}.$$

boʻlishi topiladi.

2) oʻlcham jarayoni toʻxtovsiz davom (cheksiz davom) etadi. Bu holda  $J$  kesmaning uzunligining aniq qiymati deb ushbu

$$5,7 \dots \alpha_n \dots$$

cheksiz oʻnli kasr olinadi:

$$J \text{ uzunligi} = 5,7 \dots \alpha_n \dots$$

Aytaylik, toʻgʻri chiziqda biror  $O$  nuqta (koordinata boshi) hamda oʻlchov birligi tayinlangan boʻlsin. U holda  $O$  nuqtadan oʻngda joylashgan har bir  $P$  nuqtaga,  $OP$  kesmani oʻlchash natijasida hosil boʻlgan ushbu



$\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$  cheksiz oʻnli kasrni mos qoʻyish mumkin. Bunda

$$\alpha_0 \in N \cup \{0\}, \alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, n \geq 1.$$

Bu moslik oʻzaro bir qiymatli moslik boʻladi. Ravshanki, yuqoridagi cheksiz oʻnli kasrlar orasida cheksiz davriy oʻnli kasrlar boʻlib, ular manfiy boʻlmagan ratsional sonlar boʻladi. Qolgan kasrlar esa ratsional sonlar boʻlmaydi.

**1-taʼrif.** Ushbu  $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ , koʻrinishidagi cheksiz oʻnli kasr **manfiy boʻlmagan haqiqiy son** deyiladi, bunda  $\alpha_0 \in N \cup \{0\}$ ,  $\alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, n \geq 1$ .

Agar  $\exists n \geq 0; \alpha_n > 0$  boʻlsa, u **musbat haqiqiy son** deyiladi.

Manfiy haqiqiy sonning « $\leftrightarrow$ » ishora bilan olingani musbat haqiqiy son sifatida taʼriflanadi.

Barcha haqiqiy sonlardan iborat toʻplam  $\mathbb{R}$  harfi bilan belgilanadi.

Barcha natural sonlar toʻplami  $N$ , ratsional sonlar toʻplami  $Q$ , haqiqiy sonlar toʻplami  $R$  uchun  $N \subset Q \subset R$  boʻladi.

**2-taʼrif.** Ushbu  $R \setminus Q$  toʻplam elementi (son) **irratsional son** deyiladi.

Biz yuqorida, davri «9» ga teng boʻlgan cheksiz davriy oʻnli kasrni chekli oʻnli kasr qilib olinishini aytgan edik. Buning oqibatida bitta son ikki koʻrinishga, masalan,  $\frac{1}{2}$  soni

$$\frac{1}{2} = 0,5000\dots \quad \frac{1}{2} = 0,4999\dots$$

koʻrinishlarga ega boʻlib qoladi.

Umuman,  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  ( $\alpha_n \neq 0$ ) ratsional son ushbu,

1)  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{n-1} (\alpha_n - 1)999\dots$ ,

2)  $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n 000\dots$ , ikki koʻrinishda yozilishi mumkin. Haqiqiy sonlarni solishtirishda ratsional sonning 1)- koʻrinishidan foydalanamiz.

Ikkita manfiy boʻlmagan

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots, \quad b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$$

haqiqiy sonlar berilgan boʻlsin.

**3-taʼrif.** Agar  $\forall n \geq 0$  da  $\alpha_n = \beta_n$ , yaʼni

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n, \dots$$

boʻlsa,  **$a$  va  $b$  sonlar teng** deyiladi va  $a = b$  kabi yoziladi.

**4-taʼrif.** Agar

$$\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \alpha_2 = \beta_2, \dots, \alpha_n = \beta_n, \dots$$

tengliklarning hech boʻlmaganda bittasi bajarilmasa va birinchi bajarilmagan tenglik  $n = k$  da sodir boʻlsa, u holda:

$\alpha_k > \beta_k$  boʻlganda  **$a$  soni  $b$  sonidan katta** deyiladi va  $a > b$  kabi belgilanadi.

$\alpha_k < \beta_k$  boʻlganda  **$a$  soni  $b$  sonidan kichik** deyiladi va  $a < b$  kabi

belgilanadi.

Aytaylik, to'g'ri chiziq, unda tayin olingan  $O$  nuqta (koordinata boshi) va o'lchov birligi berilgan bo'lsin.

Haqiqiy sonlar to'plami  $R$  bilan to'g'ri chiziq nuqtalari orasidagi bir qiymatli moslik o'rnatish mumkin:

$O$  nuqtadan o'ngda joylashgan  $P$  nuqtaga  $OP$  kesmaning uzunligiga teng  $x$  soni mos qo'yiladi ( $x$  son  $P$  nuqtaning koordinatasi deyiladi);

$O$  nuqtadan chapda joylashgan  $Q$  nuqtaga  $QO$  kesmaning uzunligiga teng  $x$  sonining minus ishorasi bilan olingan  $-x$  soni mos qo'yiladi;

$O$  nuqtaga nol soni mos qo'yiladi.

**Arximed aksiomasi.** Ixtiyoriy chekli haqiqiy  $a$  soni uchun shunday natural  $m$  soni topiladiki,  $m > a$  bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots > 0$ , bo'lsin.  $m = \alpha_0 + 1$ ,  $m \in N$  deb olinsa, unda 3-ta'rifga binoan  $a < m$  bo'ladi ▶

Kurs davomida tez-tez uchrab turadigan haqiqiy sonlar to'plamlarini keltiramiz.

Aytaylik,  $a \in R, b \in R, a < b$  bo'lsin:

$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$  – segment deyiladi,

$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$  – interval deyiladi,

$[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$  – yarim interval deyiladi,

$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$  – yarim interval. deyiladi.

Bunda  $a$  va  $b$  sonlar  $[a, b], (a, b), [a, b), (a, b]$  larning chegaralari deyiladi.

SHuningdek,

$[a, +\infty) = \{x \in R \mid x \geq a\}$ ,  $(-\infty, a) = \{x \in R \mid x < a\}$ ,  $(-\infty, \infty) = R$

deb qaraymiz.

Faraz qilaylik,  $a$  va  $b$  ixtiyoriy haqiqiy sonlar bo'lib,  $a < b$  bo'lsin. U holda  $(a, b) \neq \emptyset$  bo'ladi.

◀ Haqiqatdan ham,

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots \geq 0$$

$$b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$$

bo'lib,  $m \geq 0$  uchun  $\alpha_0 = \beta_0, \alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_{m-1} = \beta_{m-1}$  va  $\alpha_m < \beta_m$  bo'lsin. Agar  $k$  natural son  $m$  dan katta sonlar ichida eng kichigi bo'lsa, ( $\alpha_k < 9$ ) unda  $r = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_m \alpha_{m+1} \dots (\alpha_k + 1)$  ratsional son uchun  $a < r < b$  bo'ladi. Demak,  $(a, b) \neq \emptyset$  ▶

### Mashqlar

1. Ushbu  $x^2 = 3$  tenglikni qanoatlantiruvchi ratsional sonning mavjud emasligi isbotlansin.

2. Agar  $r \in Q, \alpha \in R \setminus Q$  bo'lsa,  $\alpha + r \in R \setminus Q$  bo'lishi ko'rsatilsin.

3.  $\forall a \in R, \forall b \in R, \forall c \in R$  sonlari uchun  $a > b, b > c \Rightarrow a > c$  bo'lishi isbotlansin.

## Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014. [3, 81–90, 96–110]
2. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Voriz-nashriyot”, 2010.
3. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

## Nazorat savollari

1. Ratsional son nima?
2. Cheksiz davriy va cheksiz davriy boʻlmagan davriy oʻnli kasrlar nima?
3. Haqiqiy son deganda nimani tushunasiz?
4. Arximed aksiomasini ayting.
5. Tez-tez uchrab turadigan haqiqiy sonlar toʻplamlarini keltiring.

## Glossariy

**Ratsional son** –  $\frac{a}{b}$  qisqarmas kasr koʻrinishda tasvirlash mumkin boʻlgan sonlar

ratsional sonlar deyiladi. Bunda  $a, b$  – butun sonlar va  $b \neq 0$ .

**Manfiy boʻlmagan haqiqiy son** – ushbu  $a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$ , koʻrinishidagi cheksiz oʻnli kasr **manfiy boʻlmagan haqiqiy son** deyiladi, bunda  $\alpha_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,  $\alpha_n \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ,  $n \geq 1$ .

**Irratsional son** – Ushbu  $\square \setminus \mathbb{Q}$  toʻplam elementi (son) **irratsional son** deyiladi.

**Arximed aksiomasi** – Ixtiyoriy chekli haqiqiy  $a$  soni uchun shunday natural  $m$  soni topiladiki,  $m > a$  boʻladi.

## Keys banki

**3-keys.** Masala oʻrtaga tashlanadi: Ushbu  $x^2 = 3$  tenglikni qanoatlantiruvchi ratsional sonning mavjud emasligi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin boʻlgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- toʻplangan maʼlumotlardan foydalanib, qoʻyilgan masalani yeching (individual).

## 3-amaliy mashg'ulot

Ma'lumki,  $N$  - barcha natural sonlar to'plamini,  $Z$  - barcha butun sonlar to'plamini,  $Q$  - barcha ratsional sonlar to'plamini ifodalaydi:

$$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\},$$

$$Z = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\},$$

$$Q = \left\{ r : r = \frac{p}{q}, p \in Z, q \in N \right\}.$$

Cheksiz davriy bo'lmagan o'nli kasr bilan ifodalanadigan son irratsional son deyiladi. Uni  $\frac{p}{q}$  ( $p \in Z, q \in N$ ) ko'rinishida yozib bo'lmaydi.

Ratsional va irratsional sonlar umumiy nom bilan haqiqiy son deyiladi. Barcha haqiqiy sonlar to'plami  $R$  harfi bilan belgilanadi.

**1 – m i s o l .** Agar  $\alpha$  va  $\beta$  irratsional son bo'lsa,  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$  sonlar irratsional bo'ladimi?

**Yechim.** Faraz qilaylik  $\alpha = \sqrt{2}$  va  $\beta = 1 - \sqrt{2}$  bo'lsin, u holda  $\alpha + \beta = 1$  bo'ladi. Xuddi shunday,  $\alpha = \sqrt{2}$  va  $\beta = -1 + \sqrt{2}$  bo'lsin, u holda  $\alpha - \beta = 1$  bo'ladi. Demak, agar  $\alpha$  va  $\beta$  irratsional son bo'lsa,  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$  sonlar irratsional bo'lishi shart emas.

1. Kvadrati 3 ga teng bo'lgan ratsional sonning mavjud emasligi isbotlansin.
2. Agar  $r$  - ratsional son,  $\alpha$  - irratsional son bo'lsa,  $\alpha + r$  ning irratsional son bo'lishi isbotlansin.
3. Agar  $\alpha$  va  $\beta$  irratsional son bo'lsa,  $\alpha + \beta$ ,  $\alpha - \beta$  sonlar irratsional bo'ladimi?
4. Agar  $\alpha$  va  $\beta$  irratsional son bo'lib,  $\alpha + \beta$  esa ratsional son bo'lsa,  $\alpha - \beta$  va  $\alpha + 2\beta$  sonlarning irratsional bo'lishi isbotlansin.
5. Ushbu

$$\alpha = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \dots + \sqrt{n}}} \quad (n \in N, n \geq 2)$$

sonning irratsional bo'lishi isbotlansin.

6. Ushbu

$$\log 2, \log_2 3$$

sonlarning irratsional son bo'lishi isbotlansin.

**Quyidagi to'plamlar chegaralanganlikka tekshirilsin:**

7.  $E = \{x = 1 - n^2 - 6n : n \in N\}$ .

8.  $E = \left\{x = \frac{n}{1+n^2} : n \in N\right\}$ .

9.  $E = \left\{x = \frac{(-1)^n \cdot n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}} : n \in N\right\}$ .

10.  $E = \left\{x = \frac{n}{a^n} : n \in N, a > 1\right\}$ .

11.  $E = \left\{x = \left[1 + (-1)^n\right] \cdot n + \frac{1 - (-1)^n}{n} : n \in N\right\}$ .

12.  $x \in R$  sonning absolyut qiymati  $|x|$  quyidagicha ta'riflanadi:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \\ -x, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

Ixtiyoriy  $x$  haqiqiy son uchun

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad -|x| \leq x \leq |x|$$

bo'lishi isbotlansin.

13. Ixtiyoriy  $x$  va  $y$  haqiqiy sonlari uchun

1)  $|x + y| \leq |x| + |y|$ ,

2)  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ ,



$$3) |x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

bo'lishi isbotlansin.

**14.** Ixtiyoriy  $x$  va  $y$  haqiqiy sonlari ushbu

$$|x \cdot y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

tengsizlikni qanoatlantirishi isbotlansin.

**15.** Ushbu

$$E = \{x: |x| < a, a > 0\},$$

$$F = \{x: -a < x < a, a > 0\}$$

to'plamlarning o'zaro tengligi isbotlansin.

**16.** Ushbu

$$E = \{x: |x| > a\},$$

$$F = \{x: x > a, x < -a\}$$

to'plamlarning tengligi isbotlansin.

**Quyidagi tengsizliklarning echimlar to'plami topilsin:**

1.  $|3x - 1| \leq |2x - 1| + |x|$

2.  $|x - 2| < 3$

3.  $|x + 3| > 2$

4.  $|x| < x + 1$

5.  $\left| \frac{x}{1+x} \right| > \frac{x}{x+1}$

6.  $|x^2 - 5| > 2$

7.  $|x^2 - 2x - 3| > x^2 - 2x - 3$

8.  $|x + 3| - |x + 1| < 2$

9.  $|x^2 - 2x| > x^2 - |2x|$

10.  $|x + 2| + |x - 2| \geq 12$

11.  $|x - 4| + |x + 4| \leq 10$

**Quyidagi tenglamalarning echimlar to'plami topilsin:**

1.  $|2x + 3| = x^2$ .

2.  $|\sin x| = \sin x + 2$ .

3.  $\left| \frac{x-1}{x+1} \right| = \frac{x-1}{x+1}$ .

4.  $|x^2 - 5x + 6| = -(x^2 - 5x + 6)$ .

5.  $|x| = x^2 - 6$ .

6.  $|(x^2 + 2x + 5) + (x - 5)| = |x^2 + 2x + 5| + |x - 5|$ .

7.  $|(x^4 - 4) - (x^2 + 2)| = |x^4 - 4| - |x^2 + 2|$ .

# Test

№	Savol	to`g`ri javob	muqobil javob	muqobil javob	muqobil javob
1.	$\frac{a}{b}$ qisqarmas kasr ko`rinishda tasvirlash mumkin bo`lgan sonlar ... sonlar deyiladi.	ratsional	irratsional	butun	natural
2.	Irratsional sonni ko`rsating	$\sqrt{2}$	2,2(3322)	$297\frac{1}{2}$	2,5
3.	Ratsional sonni ko`rsating	$\frac{1}{2}$	$\pi$	$e$	$\sqrt{2}$
4.	Butun sonni ko`rsating	2	$\frac{100}{3}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$
5.	Ratsional sonni ko`rsating	2,88(3)	$\pi$	$e$	$\sqrt{\frac{5}{2}}$
6.	Butun sonni ko`rsating	$\frac{234}{3}$	$\frac{4}{5}$	$\sqrt{7}$	$\sqrt{11}$
7.	Irratsional sonni ko`rsating	$\sqrt{3}$	4,(27)	$22\frac{5}{6}$	2,9
8.	$x^2 - 33 = 0$ tenglamaning yechimlari ... sonlardan iborat!	irratsional	butun	natural	ratsional
9.	$ 50 =?$	50	-50	25	-25
10.	$  -(-75)  =?$	75	-75	7,5	-7,5

# 4-mavzu. Haqiqiy sonlar to'plamining chegaralari

## 4-Ma'ruza

### Reja

1. Sonlar to'plamining aniq chegaralari.
2. Aniq chegaraning mavjudligi.

Haqiqiy sonlar to'plamining chegaralanganligi, to'plamning aniq chegaralari tushunchalari matematik analiz kursida muhim rol o'ynaydi.

### 1. Sonlar to'plamining aniq chegaralari.

Biror  $E \subset R$  to'plam berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** Agar  $E$  to'plamning shunday  $x_0$  elementi ( $x_0 \in E$ ) topilsaki,  $E$  to'plamning ixtiyoriy  $x$  elementlari uchun

$$x \leq x_0$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists x_0 \in E, \forall x \in E: x \leq x_0$$

bo'lsa,  $x_0$  soni  $E$  to'plamning **eng katta elementi** deyiladi va

$$x_0 = \max E$$

kabi belgilanadi.

**2-ta'rif.** Agar  $E$  to'plamning shunday  $x_0$  elementi ( $x_0 \in E$ ) topilsaki,  $E$  to'plamning ixtiyoriy  $x$  elementlari uchun

$$x \geq x_0$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists x_0 \in E, \forall x \in E: x \geq x_0$$

bo'lsa,  $x_0$  soni  $E$  to'plamning **eng kichik elementi** deyiladi va

$$x_0 = \min E$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$\max \left\{ 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots \right\} = 1$$

$$\min \{ 1, 2, 3, \dots, n, \dots \} = 1$$

bo'ladi.

**3-ta'rif.** [1, **definiyion 5.5.1, 116-bet**] Agar shunday  $M$  soni ( $M \in R$ )

topilsaki,  $E$  to‘plamning ixtiyoriy  $x$  elementlari uchun

$$x \leq M$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\exists M \in R, \forall x \in E: x \leq M$$

bo‘lsa,  $E$  to‘plam **yuqoridan chegaralangan** deyiladi,  $M$  soni to‘plamning **yuqori chegarasi** deyiladi.

**4-ta’rif.** Agar shunday  $m$  soni ( $m \in R$ ) topilsaki,  $E$  to‘plamning ixtiyoriy  $x$  elementlari uchun

$$x \geq m$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\exists m \in R, \forall x \in E: x \geq m$$

bo‘lsa,  $E$  to‘plam **quyidan chegaralangan deyiladi**,  $m$  soni to‘plamning **quyi chegarasi** deyiladi.

Ravshanki, to‘plam yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, uning yuqori chegaralari cheksiz ko‘p, shuningdek quyidan chegaralangan bo‘lsa, uning quyi chegaralari cheksiz ko‘p bo‘ladi.

**5-ta’rif.** Agar  $E \subset R$  to‘plam ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa,  $E$  **chegaralangan to‘plam** deyiladi.

**6-ta’rif.** Agar ixtiyoriy  $M$  soni ( $M \in R$ ) olinganda ham shunday  $x_0$  elementi ( $x_0 \in E$ ) topilsaki,

$$x_0 > M$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\forall M \in R, \exists x_0 \in E: x_0 > M$$

bo‘lsa,  $E$  to‘plam **yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

**7-ta’rif.** Agar ixtiyoriy  $m$  soni ( $m \in R$ ) olinganda ham shunday  $x_0$  elementi ( $x_0 \in E$ ) topilsaki,

$$x_0 < m$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\forall m \in R, \exists x_0 \in E: x_0 < m$$

bo‘lsa,  $E$  to‘plam **quyidan chegaralanmagan** deyiladi.

Masalan,

1)  $E_1 = \{\dots, -2, -1, 0\}$  to‘plam yuqoridan chegaralangan;

2)  $E_2 = \{1, 2, 3, \dots\}$  to‘plam quyidan chegaralangan;

3)  $E_3 = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\right\}$  to‘plam chegaralangan;

4)  $E_4 = \{x \in R \mid x > 0\}$  to‘plam yuqoridan chegaralanmagan;

5)  $E_5 = \{x \in R \mid x < 0\}$  to‘plam quyidan chegaralanmagan bo‘ladi.

Endi sonlar to‘plamining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralari tushunchalarini keltiramiz.

Aytaylik,  $E \subset R$  to‘plam va  $a \in R$  soni berilgan bo‘lsin.

**8-ta'rif. [1, definition 5.5.5, 117-bet]** Agar

- 1)  $a$  soni  $E$  to'plamning yuqori chegarasi bo'lsa,
- 2)  $E$  to'plamning ixtiyoriy yuqori chegarasi  $M$  uchun  $a \leq M$  tengsizlik bajarilsa,  $a$  soni  $E$  to'plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi va  $\sup E$  kabi belgilanadi:

$$a = \sup E.$$

Demak,  $E$  to'plamning aniq yuqori chegarasi, uning yuqori chegaralari orasida eng kichigi bo'ladi.

**9-ta'rif.** Faraz qilaylik,  $E \subset R$  to'plam va  $b \in R$  soni berilgan bo'lsin. Agar

- 1)  $b$  son  $E$  to'plamning quyi chegarasi bo'lsa,
- 2)  $E$  to'plamning ixtiyoriy quyi chegarasi  $m$  uchun  $b \geq m$  tengsizlik bajarilsa,  $b$  soni  $E$  to'plamning **aniq quyi chegarasi** deyiladi va  $\inf E$  kabi belgilanadi:

$$b = \inf E.$$

Demak,  $E$  to'plamning aniq quyi chegarasi, uning quyi chegaralari orasida eng kattasi bo'ladi.

“sup” va “inf” lar lotincha “supremum” va “infimum” so'zlaridan olingan bo'lib, ular mos ravishda eng yuqori, eng quyi degan ma'nolarni anglatadi.

**1-teorema.** Faraz qilaylik,  $E \subset R$  to'plam va  $a \in R$  soni berilgan bo'lsin.  $a$  soni  $E$  to'plamning aniq yuqori chegarasi bo'lishi uchun

- 1)  $a$  soni  $E$  to'plamning yuqori chegarasi,
- 2)  $a$  sonidan kichik bo'lgan ixtiyoriy  $\alpha$  ( $\alpha < a$ ) uchun  $E$  to'plamda  $x > \alpha$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi  $x$  sonining topilishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.** Aytaylik,

$$a = \sup E$$

bo'lsin. 8-ta'rifga binoan:

- 1)  $\forall x \in E$  uchun  $x \leq a$ , ya'ni  $a$  soni  $E$  to'plamning yuqori chegarasi;
- 2)  $a$  soni yuqori chegaralar orasida eng kichigi. Binobarin,  $a$  dan kichik  $\alpha$  soni uchun  $x > \alpha$  bo'lgan  $x \in E$  soni topiladi.

**Yetarliligi.** Teoremaning ikkala sharti bajarilsin. Bu holda, ravshanki,  $\alpha < a$  shartni qanoatlantiruvchi har qanday  $\alpha$  soni  $E$  to'plamning yuqori chegarasi bo'lolmaydi. Demak,  $a$  - to'plamning yuqori chegaralari orasida eng kichigi. Unda ta'rifga ko'ra

$$a = \sup E$$

bo'ladi. ▶

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

**2-teorema.** Faraz qilaylik,  $E \subset R$  to'plam va  $b \in R$  soni berilgan bo'lsin.  $b$  soni  $E$  to'plamning aniq quyi chegarasi bo'lishi uchun

- 1)  $b$  soni  $E$  to'plamning quyi chegarasi,
- 2)  $b$  sonidan katta bo'lgan ixtiyoriy  $\beta$  ( $\beta > b$ ) uchun  $E$  to'plamda  $x < \beta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi  $x$  sonining topilishi zarur va etarli.

**Eslatma.** Agar  $E \subset R$  to'plam yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa, u

holda

$$\sup E = +\infty ,$$

quyidan chegaralanmagan bo'lsa, u holda

$$\inf E = -\infty$$

deb olinadi.

## 2<sup>o</sup>. Aniq chegaralarning mavjudligi.

Aytaylik,

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

musbat haqiqiy son bo'lsin, bunda

$$\alpha_0 \in N \cup \{0\}, \quad \alpha_n \in N_0 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \quad n \geq 1.$$

Ushbu

$$a_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n}{10^n},$$

$$b_n = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots (\alpha_n + 1) = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{10} + \frac{\alpha_2}{10^2} + \dots + \frac{\alpha_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$a_n \leq \alpha < b_n$$

bo'ladi.

Demak, ixtiyoriy haqiqiy son olinganda shunday ikkita ratsional son topiladiki, ulardan biri shu haqiqiy sondan kichik yoki teng, ikkinchisi esa katta bo'ladi.

Endi sonlar to'plamining aniq chegaralarining mavjudligi haqidagi teoremlarni keltiramiz.

**3-teorema. [1, theorem 5.5.9, 117-bet]** Agar bo'sh bo'lmagan to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsa, uning aniq yuqori chegarasi mavjud bo'ladi.

Bu teoremani

$$E \subset [0, +\infty), \quad E \neq \emptyset$$

to'plam uchun isbotlaymiz.

◀  $E$  to'plam yuqoridan chegaralangan bo'lsin:

$$\exists M \in R, \quad \forall x \in E: \quad x \leq M.$$

Arximed aksiomasini e'tiborga olib,  $M \in N$  deyish mumkin.

Endi  $E$  to'plam

$$\alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \quad (\alpha \in E)$$

elementlarining butun qismlaridan, ya'ni  $\alpha_0$  laridan iborat to'plamni  $F_0$  deylik:

$$F_0 = \{ \alpha_0 \in N \cup \{0\} \mid \alpha = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \in E \}.$$

Bu to'plam ham yuqoridan  $M$  soni bilan chegaralangan va  $F_0 \neq \emptyset$ . Ravshanki,  $F_0 \subset N \cup \{0\}$ . Bundan  $F_0$  to'plamning chekli ekanligini topamiz. Demak,  $F_0$  to'plamning eng katta elementi mavjud. Uni  $c_0$  deylik:

$$\max F_0 = c_0 \tag{1}$$



$E$  to'planning

$$c_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$$

ko'rinishdagi barcha elementlaridan iborat to'plamni  $E_0$  deb olamiz:

$$E_0 = \{c_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \in E\}.$$

Ravshanki,  $E_0 \subset E$ ,  $E_0 \neq \emptyset$ .

Endi  $E_0$  to'plam

$$c_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots$$

elementlarining  $\alpha_1$  laridan iborat to'plamni olib, uni  $F_1$  deylik:

$$F_1 = \{\alpha_1 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \mid c_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \in E_0\}.$$

Bu chekli to'plam bo'lib,  $F_1 \neq \emptyset$  bo'ladi. SHuning uchun uning eng katta elementi mavjud. Uni  $c_1$  deb olamiz:

$$\max F_1 = c_1 \quad (2)$$

$E_0$  to'planning

$$c_0, c_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

ko'rinishdagi barcha elementlaridan iborat to'plamni  $E_1$  deb olamiz:

$$E_1 = \{c_0, c_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \in E_0\}.$$

Ravshanki,  $E_1 \subset E_0$ ,  $E_1 \neq \emptyset$ .

Endi  $E_1$  to'plam

$$c_0, c_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots$$

elementlarining  $\alpha_2$  laridan iborat to'plamni olib, uni  $F_2$  deylik:

$$F_2 = \{\alpha_2 \in \{0, 1, 2, \dots, 9\} \mid c_0, c_1, \alpha_2 \dots \in E_1\}.$$

Bu to'plam ham chekli va  $F_2 \neq \emptyset$  bo'lib, uning eng katta elementi mavjud:

$$\max F_2 = c_2 \quad (3)$$

$E_1$  to'planning

$$c_0, c_1 c_2 \alpha_3 \dots$$

ko'rinishdagi barcha elementlaridan iborat to'plamni  $E_2$  deb olamiz:

$$E_2 = \{c_0, c_1 c_2 \alpha_3 \dots \in E_1\}$$

Bu jarayonni davom ettira borish natijasida

$$a = c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$$

haqiqiy son hosil bo'ladi.

Endi  $E$  to'plam va bu  $a$  son uchun 1-teoremaning ikkala shartlarini bajarilishini ko'rsatamiz:

1) Yuqoridagi (1) munosabatga ko'ra  $\forall \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots \in E$  uchun  $\alpha_0 \leq c_0$  bo'ladi.

Agar  $\alpha_0 < c_0$  bo'lsa, u holda  $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots < a$  bo'ladi.

Agar  $\alpha_0 = c_0$  bo'lsa, u holda  $c_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \in E_0$  bo'lib, (2) munosabatga ko'ra  $\alpha_1 \leq c_1$  bo'ladi.

Agar  $\alpha_1 < c_1$  bo'lsa u holda  $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots < a$  bo'ladi.

Agar  $\alpha_1 = c_1$  bo'lsa, u holda  $c_0, c_1 \alpha_2 \dots \in E_1$  bo'lib, (3) munosa-batga ko'ra  $\alpha_2 \leq c_2$  bo'ladi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ikki holga duch kelamiz:

a) shunday  $n \geq 0$  topiladiki,

$$\alpha_0 = c_0, \quad \alpha_1 = c_1, \quad \dots \quad \alpha_{n-1} = c_{n-1}, \quad \alpha_n < c_n$$

bo'lib,  $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots < a$  bo'ladi.

b) ixtiyoriy  $n \geq 0$  da  $\alpha_n = c_n$  bo'lib,  $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots = a$  bo'ladi.

Demak, har doim  $\alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \leq a$  munosabat o'rinli bo'ladi;

2)  $a$  sondan kichik bo'lgan ixtiyoriy

$$\beta = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$$

haqiqiy sonni olaylik:

$$\beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots < c_0, c_1 c_2 \dots c_n \dots$$

Unda shunday  $n \geq 0$  topiladiki,

$$\beta_0 = c_0, \quad \beta_1 = c_1, \quad \dots \quad \beta_{n-1} = c_{n-1}, \quad \beta_n < c_n$$

bo'ladi. SHuni e'tiborga olib,  $\forall x \in E_n \subset E$  uchun

$$x > \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$$

bo'lishini topamiz.

Shunday qilib teoremda keltirilgan  $E$  to'plam va  $a$  soni uchun 1-teoremaning ikkala shartining bajarilishi ko'rsatildi. Unda 1-teoremaga muvofiq  $E$  to'plamning aniq yuqori chegarasi mavjud va

$$a = \sup E$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

Xuddi shunga o'xshash quyidagi teorema isbotlanadi.

**4-teorema.** Agar bo'sh bo'lmagan to'plam quyidan chegaralangan bo'lsa, uning aniq quyi chegarasi mavjud bo'ladi.

**Eslatma.** To'plamning aniq quyi hamda aniq yuqori chegaralari shu to'plamga tegishli bo'lishi ham mumkin, tegishli bo'lmasligi ham mumkin.

## Mashqlar

1. Agar  $A$  va  $B$  to'plamlari ( $A \subset R$ ,  $B \subset R$ ) chegaralangan bo'lib,  $A \subset B$  bo'lsa,

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf A \geq \inf B$$

bo'lishi isbotlansin.

2. Agar  $\forall x \in A$  ( $A \subset R$ ) uchun  $x \leq \alpha$  ( $\alpha \in R$ ) bo'lsa,  $\sup A \leq \alpha$  bo'lishi isbotlansin.

## Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.

2. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.**

*Matematik analizdan ma'rizalar, I q. T. "Voriz-nashriyot", 2010.*

3. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t. M. «FIZMATLIT», 2001.*

### **Nazorat savollari**

1. To`planning eng kata va eng kichik elementlari nima?
2. To`planning yuqori va quyi chegaralari ta'riflarini bering.
3. To`planning aniq yuqori va aniq quyi chegaralari ta'riflarini bering.
4. Aniq yuqori chegaraning mavjudligi haqidagi teoremani ayting.
5. Aniq quyi chegaraning mavjudligi haqidagi teoremani ayting.

## Glossariy

**To‘planning eng katta elementi** - agar  $E$  to‘planning shunday  $x_0$  elementi ( $x_0 \in E$ ) topilsaki,  $E$  to‘planning ixtiyoriy  $x$  elementlari uchun  $x \leq x_0$

tengsizlik bajarilsa  $x_0$  soni  $E$  to‘planning **eng katta elementi** deyiladi.

**To‘planning eng kichik elementi** - agar  $E$  to‘planning shunday  $x_0$  elementi ( $x_0 \in E$ ) topilsaki,  $E$  to‘planning ixtiyoriy  $x$  elementlari uchun  $x \geq x_0$  tengsizlik bajarilsa  $x_0$  soni  $E$  to‘planning **eng kichik elementi** deyiladi.

**Chegaralangan to‘plam** – agar  $E \subset R$  to‘plam ham quyidan, ham yuqoridan chegaralangan bo‘lsa, u **chegaralangan to‘plam** deyiladi.

**To‘planning aniq yuqori chegarasi** – agar 1)  $a$  soni  $E$  to‘planning yuqori chegarasi bo‘lsa, 2)  $E$  to‘planning ixtiyoriy yuqori chegarasi  $M$  uchun  $a \leq M$  tengsizlik bajarilsa,  $a$  soni  $E$  to‘planning aniq yuqori chegarasi deyiladi va  $\sup E$  kabi belgilanadi.

**To‘planning aniq quyi chegarasi** – agar 1)  $b$  son  $E$  to‘planning quyi chegarasi bo‘lsa, 2)  $E$  to‘planning ixtiyoriy quyi chegarasi  $m$  uchun  $b \geq m$  tengsizlik bajarilsa,  $b$  soni  $E$  to‘planning **aniq quyi chegarasi** deyiladi va  $\inf E$  kabi belgilanadi.

## Keys banki

**4-keys.** Masala o‘rtaga tashlanadi: Agar  $A$  va  $B$  to‘plamlar ( $A \subset \mathbb{R}, B \subset \mathbb{R}$ ) chegaralangan bo‘lib,  $A \subset B$  bo‘lsa,

$$\sup A \leq \sup B, \quad \inf A \geq \inf B$$

bo‘lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo‘lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to‘plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo‘yilgan masalani yeching (individual).

## 4-amaliy mashg'ulot

### Na'muna uchun misollar yechimi

1-мисол. Ушбу

$$E = \left\{ x = \frac{n^2}{n^2 + 4} : n \in N \right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегараси топилсин.

◀ Равшанки,  $\forall n \in N$  учун

$$0 < \frac{n^2}{n^2 + 4} < 1 \quad (1)$$

бўлади. Демак, берилган тўплам чегараланган.

(1) муносабатдан  $\forall x \in E$  учун

$$x = \frac{n^2}{n^2 + 4} \leq 1$$

бўлиши келиб чиқади.

$\forall \varepsilon > 0$  сонни ( $0 < \varepsilon < 1$ ) олиб,  $E$  тўпламда, унинг

$$x_0 = \frac{n^2}{n^2 + 4}, \quad n > \sqrt{\frac{4(1-\varepsilon)}{\varepsilon}}$$

элементи қаралса, унинг учун

$$\frac{n^2}{n^2 + 4} > 1 - \varepsilon \quad (2)$$

тенгсизлик бажарилади (чунки

$$\begin{aligned} \frac{n^2}{n^2 + 4} > 1 - \varepsilon &\Rightarrow n^2 > n^2 + 4 - n^2\varepsilon - 4\varepsilon \Rightarrow n^2\varepsilon > 4(1 - \varepsilon) \Rightarrow \\ &\Rightarrow n^2 > \frac{4(1 - \varepsilon)}{\varepsilon} \Rightarrow n > \sqrt{\frac{4(1 - \varepsilon)}{\varepsilon}} \end{aligned}$$

(1) ва (2) муносабатлардан топамиз:

$$\text{Sup} E = \text{Sup} \left\{ x = \frac{n^2}{n^2 + 4} : n \in N \right\} = 1.$$

Худди шунга ўхшаш

$$\text{inf} E = \text{inf} \left\{ x = \frac{n^2}{n^2 + 4} : n \in N \right\} = 0$$

бўлиши кўрсатилади. ▶

**Қуйидаги тўпламлар чегараланганликка текширилсин (1–6):**

$$1. E = \left\{ x = \frac{n}{1+n^2} : n \in N \right\}.$$

$$2. E = \{ x = 1 - n^2 - 6n : n \in N \}$$

$$3. E = \left\{ x = \frac{(-1)^n \cdot n + 10}{\sqrt{n^2 + 1}} : n \in N \right\}.$$

$$4. E = \left\{ x = \frac{n}{a^n} : n \in N, a > 1 \right\}.$$

$$5. E = \left\{ x = \left[ 1 + (-1)^n \right] \cdot n + \frac{1 - (-1)^n}{n} : n \in N \right\}.$$

6. Ушбу

$$E \left\{ x = \frac{1}{n} : n \in N \right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори ҳамда аниқ қуйи чегаралари топилсин.

7. Ушбу

$$E = \left\{ x = 1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in N \right\}$$

тўпламнинг аниқ юқори ва аниқ қуйи чегаралари топилсин.

8.  $E \subset R$  тўплам учун  $SupE$  ва  $\inf E$  лар мавжуд бўлиб,

$$SupE = \inf E$$

бўлса,  $E$  тўплам тўғрисида нима дейиш мумкин.

9. Агар  $E \subset R$ ,  $F \subset E$  тўпламлар учун:

$$1) \forall x \in E, \forall y \in F : x \leq y,$$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in E, \exists y_0 \in F : y_0 - x_0 < \varepsilon$$

бўлса, у ҳолда

$$SupE = \inf F$$

бўлиши исботлансин.

10. Агар  $E \subset R$  тўплам чегараланган бўлиб,  $E_1 \subset E$  бўлса, у ҳолда

$$SupE_1 \leq SupE, \inf E_1 \geq \inf E$$

бўлиши исботлансин.

11. Агар  $E \subset R$  тўплам чегараланган бўлиб,  $a \in R$  бўлса, у ҳолда

$$Sup\{a + E\} = a + SupE$$

бўлиши исботлансин.

12. Агар  $E \subset R$  тўплам чегараланган бўлиб,  $a > 0$  бўлса, у ҳолда

$$Sup\{a \cdot E\} = a \cdot SupE$$

бўлиши исботлансин.

13. Айтайлик, чегараланган  $E = \{x\} \subset R$  тўплам ҳар бир  $x$  элементининг

қарама-қаршиси  $-x$  лардан тузилган тўпلام  $F$  бўлсин:  $F = \{-x : x \in E\}$ . У ҳолда

$$\text{Sup}F = -\inf E, \quad \inf F = -\text{Sup}E$$

бўлиши исботлансин.

14. Айтайлик,  $E = \{x\} \subset R$ ,  $F = \{y\} \subset R$  чегараланган тўпلامлар бўлиб,  $E + F = \{x + y : x \in E, y \in F\}$  бўлсин. У ҳолда

$$\begin{aligned}\text{Sup}(E + F) &= \text{Sup}E + \text{Sup}F, \\ \inf(E + F) &= \inf E + \inf F\end{aligned}$$

бўлиши исботлансин.

15. Айтайлик,  $E = \{x\} \subset R$ ,  $F = \{y\} \subset R$  чегараланган тўпلامлар бўлиб,  $E - F = \{x - y : x \in E, y \in F\}$  бўлсин. У ҳолда

$$\text{Sup}(E - F) = \text{Sup}E - \inf F$$

бўлиши исботлансин

16. Ушбу  $E_+ = \{x : x > 0\}$ ,  $F_+ = \{y : y > 0\}$  тўпلامлар ёрдамида тузилган  $E_+ \cdot F_+ = \{x \cdot y : x \in E_+, y \in F_+\}$  тўпلام учун

$$\begin{aligned}\inf(E_+ \cdot F_+) &= \inf E_+ \cdot \inf F_+, \\ \text{Sup}(E_+ \cdot F_+) &= \text{Sup}E_+ \cdot \text{Sup}F_+\end{aligned}$$

бўлиши исботлансин.

17. Айтайлик,  $E \subset R$ ,  $F \subset R$  тўпلامлар юқоридан чегараланган бўлсин. Унда

$$\text{Sup}(E \cup F) = \max(\text{Sup}E, \text{Sup}F)$$

бўлиши исботлансин.

( $\max(a, b)$  –  $a$  ва  $b$  ларнинг каттаси)



# Test

No	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$M \in R$ soni $E \subset R$ to'plamning yuqori chegarasi deyiladi, agar ...	$\forall x \in E: x \leq M$	$\exists x \in E: x \geq M$	$\exists x \in E: x \leq M$
2.	$m \in R$ soni $E \subset R$ to'plamning quyi chegarasi deyiladi, agar...	$\forall x \in E: x \geq m$	$\forall x \in E: x \leq m$	$\exists x \in E: x \leq m$
3.	$M \in R$ soni $E \subset R$ to'plamning aniq yuqori chegarasi deyiladi, agar...	$M$ soni $E$ to'plamning yuqori chegaralari orasidagi eng kichigi	$M$ soni $E$ to'plamning quyi chegarasi	$M$ soni $E$ to'plamning yuqori chegarasi
4.	$m \in R$ soni $E \subset R$ to'plamning aniq quyi chegarasi deyiladi, agar...	$m$ soni $E$ to'plamning quyi chegaralari orasidagi eng kattasi	$m$ soni $E$ to'plamning quyi chegarasi	$m$ soni $E$ to'plamning yuqori chegaralari orasidagi eng kichigi
5.	$E$ to'plam chegaralangan deyiladi, agar ...	$\forall x \in E: m \leq x \leq M$	$\forall x \in E: x \leq M$	$E = \{-\infty; +\infty\}$
6.	$E$ to'plam yuqoridan chegaralangan deyiladi, agar ...	$\forall x \in E, \exists M, x \leq M$	$E = \{-\infty; +\infty\}$	$\forall x \in E: m \leq x \leq M$
7.	$E$ to'plam quyidan chegaralangan deyiladi, agar ...	$\forall x \in E, \exists m, x \geq m$	$\forall x \in E: x \leq M$	$\forall x \in E: m \leq x \leq M$
8.	Chegaralanmagan $E$ to'plamni ko'rsating:	$E = \{-\infty; +\infty\}$	$\forall x \in E: x \leq M$	$\forall x \in E: m \leq x \leq M$
9.	$(0, 1)$ intervalning aniq yuqori chegarasini ko'rsating:	1	2	3
10.	Chegaralangan $E$ to'plamni ko'rsating:	$E = [a, b]$	$E = (-\infty, +\infty)$	$E = (-\infty, a]$

# 5-mavzu. Haqiqiy sonlar ustida amallar

## 5-ma'ruza

### Reja

1. Haqiqiy sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati.
2. Haqiqiy sonning darajasi.
3. Haqiqiy sonning absolyut qiymati.
4. Bernulli tengsizligi. Nyuton binomi formulasi.
5. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi.

#### 1. Haqiqiy sonlar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati.

Avval aytganimizdek, ratsional sonlar ustida, xususan chekli o'nli kasrlar ustida bajariladigan amallar va ularning xossalari ma'lum deb hisoblaymiz.

Aytaylik, ikkita musbat

$$a = \alpha_0, \alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_n \dots$$

$$b = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n \dots$$

haqiqiy sonlar berilgan bo'lsin. Unda  $n \geq 0$  bo'lganda ushbu

$$a'_n = a_0, a_1 a_2 \dots a_n = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n},$$

$$a''_n = a_0, a_1 a_2 \dots (a_n + 1) = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$a'_n \leq a \leq a''_n, \quad (1)$$

shuningdek,

$$b'_n = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots \beta_n = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \dots + \frac{\beta_n}{10^n},$$

$$b''_n = \beta_0, \beta_1 \beta_2 \dots (\beta_n + 1) = \beta_0 + \frac{\beta_1}{10} + \frac{\beta_2}{10^2} + \dots + \frac{\beta_n + 1}{10^n}$$

ratsional sonlar uchun

$$b'_n \leq b \leq b''_n \quad (2)$$

bo'ladi.

Endi (1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning

yig'indisi  $a'_n + b'_n$  lardan iborat  $\{a'_n + b'_n\}$  to'plamni qaraymiz. Ravshanki, bu to'plam yuqoridan chegaralangan. Unda 4-ma'ruzadagi 3-teoremaga ko'ra  $\{a'_n + b'_n\}$  to'plamning aniq yuqori chegarasi mavjud bo'ladi.

**1-ta'rif.** [1, p.104, def.5.3.4]  $\{a'_n + b'_n\}$  to'plamning aniq yuqori chegarasi  $a$  va  $b$  haqiqiy sonlar yigindisi deyiladi va  $a + b$  kabi belgilanadi:

$$a + b = \sup_{n \geq 0} \{a'_n + b'_n\}.$$

(1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning ko'paytmasi  $a'_n \cdot b'_n$  lardan iborat  $\{a'_n \cdot b'_n\}$  to'plamni qaraymiz. Bu to'plam yuqoridan chegaralangan bo'ladi. SHuning uchun uning aniq yuqori chegarasi mavjud bo'ladi.

**2-ta'rif.** [1, p.105, def.5.3.9]  $\{a'_n \cdot b'_n\}$  to'plamning aniq yuqori chegarasi  $a$  va  $b$  haqiqiy sonlar ko'paytmasi deyiladi va  $a \cdot b$  kabi belgilanadi.

$$a \cdot b = \sup_{n \geq 0} \{a'_n \cdot b'_n\}.$$

(1) va (2) tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ratsional sonlarning nisbati  $\frac{a'_n}{b''_n}$

lardan iborat  $\left\{ \frac{a'_n}{b''_n} \right\}$  to'plam yuqoridan chegaralangan bo'ladi.

**3-ta'rif.**  $\left\{ \frac{a'_n}{b''_n} \right\}$  to'plamning aniq yuqori chegarasi  $a$  sonining  $b$  soniga

nisbati deyiladi va  $\frac{a}{b}$  kabi belgilanadi.

$$\frac{a}{b} = \sup_{n \geq 0} \left\{ \frac{a'_n}{b''_n} \right\}.$$

Aytaylik  $a$  va  $b$  musbat haqiqiy sonlar bo'lib,  $a > b$  bo'lsin.

**4-ta'rif.** [1, p.106]  $\{a'_n - b''_n\}$  to'plamning aniq yuqori chegarasi  $a$  sonidan  $b$  sonining ayirmasi deyiladi va  $a - b$  kabi belgilanadi.

$$a - b = \sup_{n \geq 0} \{a'_n - b''_n\}.$$

**Eslatma.** 1) Haqiqiy sonlar ustida bajariladigan qo'shish, ko'paytirish, ayirish va bo'lish amallarini to'plamning aniq quyi chegarasi orqali ham ta'riflash mumkin.

Masalan,  $a$  va  $b$  haqiqiy sonlar yig'indisi quyidagicha ta'riflanadi:

$$a + b = \inf_{n \geq 0} \{a''_n + b''_n\}.$$

Haqiqiy sonlarda, yuqorida kiritilgan amallar o'rta maktab matematika kursida o'rganilgan amallarning barcha xossalarga ega.

## 2. Haqiqiy sonning darajasi.

Avval haqiqiy sonning 0-hamda  $n$  - darajalari ( $n \in N$ ) quyidagicha

$$a^0 = 1,$$

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ ta}}, \quad (n \in N)$$

aniqlanishini ta'kidlaymiz.

**Teorema [2, p.18, property 1.8] (isbotsiz).** Faraz qilaylik,  $a > 0$  va  $n \in N$  bo'lsin. U holda shunday yagona musbat  $x$  soni topiladiki,

$$x^n = a$$

bo'ladi.

**5-ta'rif.** Musbat haqiqiy  $a$  sonining  $n$  darajali ildizi deb ushbu

$$x^n = a$$

tenglikni qanoatlantiruvchi yagona  $x$  soniga aytiladi va

$$x = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

kabi belgilanadi.

Aytaylik,  $a$  musbat haqiqiy son,  $r$  esa musbat ratsional son bo'lsin:

$$a > 0, \quad r = \frac{m}{n}, \quad m, n \in N.$$

Bu holda  $a$  sonining  $r$  - darajasi quyidagicha

$$a^r = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$$

aniqlanadi.

**6-ta'rif.** Faraz qilaylik,  $a > 1$ ,  $b > 0$  haqiqiy sonlari berilgan bo'lsin,  $a$  sonining  $b$ -darajasi deb ushbu  $\{a^{b_n}\}$  to'planning aniq yuqori chegarasiga aytiladi:

$$a^b = \sup_{n \geq 0} \{a^{b_n}\}. \text{ bunda } b_n = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \quad b = \beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, \dots$$

## 3. Haqiqiy sonning absolyut qiymati.

[2, p.13] Aytaylik  $x \in R$  son berilgan bo'lsin. Ushbu

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

miqdor  $x$  sonining absolyut qiymati deyiladi.

Haqiqiy sonning absolyut qiymati quyidagi xossalarga ega:

1)  $x \in R$  son uchun

$$|x| \geq 0, \quad |x| = |-x|, \quad x \leq |x|, \quad -x \leq |x|$$

munosabatlar o'rinli,

$$2) |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a,$$

$$|x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a, \quad (a > 0)$$

3)  $x \in R, y \in R$  sonlar uchun

$$|x + y| \leq |x| + |y|,$$

$$|x - y| \geq |x| - |y|,$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|,$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}, \quad (y \neq 0)$$

bo'ladi.

Bu xossalarning isboti bevosita sonning absolyut qiymati ta'rifidan kelib chiqadi. Ulardan birini, masalan  $|x + y| \leq |x| + |y|$  bo'lishini isbotlaymiz.

◀ Aytaylik,  $x + y > 0$  bo'lsin. Unda  $|x + y| = x + y$  bo'ladi.  $x \leq |x|, y \leq |y|$  bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$|x + y| = x + y \leq |x| + |y|.$$

Endi  $x + y < 0$  bo'lsin.

Unda  $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y)$  bo'ladi.  $-x \leq |x|, -y \leq |y|$  bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

$$|x + y| = (-x) + (-y) \leq |x| + |y|. \quad \blacktriangleright$$

**1-misol.** Ushbu

$$|3x - 1| \leq |2x - 1| + |x| \quad (3)$$

tengsizlik  $x$  ning qanday qiymatlarida o'rinli bo'ladi?

◀ Sonning absolyut qiymati xossasidan foydalanib topamiz:

$$|3x - 1| = |(2x - 1) + x| \leq |2x - 1| + |x|.$$

Demak, (3) tengsizlik ixtiyoriy  $x \in R$  uchun o'rinli bo'ladi. ▶

Barcha manfiy bo'lmagan haqiqiy sonlar to'plamini  $R_+$  bilan belgilaylik. Ravshanki,  $R_+ \subset R$ .

Har bir  $x \in R$  haqiqiy songa uning absolyut qiymati  $|x|$  ni mos qo'yish bilan ushbu

$$f : x \rightarrow |x| \quad (f : R \rightarrow R_+)$$

akslantirishga ega bo'lamiz.

Demak haqiqiy sonning absolyut qiymati  $R$  to'plamni  $R_+$  to'plamga akslantirish deb qaralishi mumkin.

Ixtiyoriy  $x \in R, y \in R$  sonlarni olaylik. Ushbu

$$|x - y|$$

miqdor  $x$  va  $y$  **nuqtalar orasidagi masofa** deyiladi va  $d(x, y)$  kabi belgilanadi:

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Masofa quyidagi xossalarga ega:

1)  $d(x, y) \geq 0$  ba  $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ ,

- 2)  $d(x, y) = d(y, x)$ ,  
 3)  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ , ( $z \in R$ ).

#### 4. Bernulli tengsizligi. Nyuton binomi formulasi.

Ixtiyoriy  $x \geq -1$  ( $x \in R$ ) hamda ixtiyoriy  $n \in N$  uchun ushbu

$$(1+x)^n \geq 1+nx \quad (4)$$

tengsizlik o‘rinli.

◀ Bu tengsizlikni matematik induksiya usuli yordamida isbotlaymiz.

Ravshanki,  $n = 1$  da (4) tengsizlik (tasdiq) o‘rinli bo‘ladi

$$1+x = 1+x.$$

Endi  $n \in N$  da (4) munosabat o‘rinli deb, uni  $n+1$  uchun ham o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz. (4) tengsizlikning har ikki tomonini  $1+x$  ga ko‘paytirib topamiz:

$$(1+x)^{n+1} \geq (1+nx) \cdot (1+x) = 1+(n+1)x+nx^2 \geq 1+(n+1)x.$$

Matematik induksiya usuliga binoan (4) munosabat ixtiyoriy  $n \in N$  uchun o‘rinli bo‘ladi. ▶

(4) tengsizlik **Bernulli tengsizligi** deyiladi.

[2, p.19-20] Endi Nyuton binomi formulasini keltiramiz.

Ma‘lumki,  $a \in R$ ,  $b \in R$  da

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

bo‘ladi. Umuman, ixtiyoriy  $n \in N$  da

$$(a+b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k \quad (5)$$

bo‘ladi, bunda

$$C_n^0 = 1$$

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-1))}{k!}, \quad k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots k, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

(5) tenglik ham matematik induksiya usuli yordamida isbotlanadi.

◀ Ravshanki,  $n = 1$  da  $C_1^0 \cdot a + C_1^1 \cdot b = a + b$ . Demak, bu holda (5) tenglik o‘rinli. Endi (5) tenglik  $n$  uchun o‘rinli bo‘lsin deb, uni  $n+1$  uchun ham o‘rinli bo‘lishini ko‘rsatamiz. (5) tenglikning har ikki tomonini  $a+b$  ga ko‘paytirib topamiz:

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n (C_n^k + C_n^{k-1}) \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1}.$$

Ravshanki,

$$C_n^k + C_n^{k-1} = \frac{n(n-1)\dots(n-(k-2))}{k!} (n - (k-1) + k) =$$

$$= \frac{n(n+1)((n+1)-1)\dots((n+1)-(k-1))}{k!} = C_{n+1}^k$$

Demak,

$$(a+b)^{n+1} = a^{n+1} + \sum_{k=1}^n C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k + b^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k \cdot a^{n+1-k} \cdot b^k$$

bo'ladi. Bu esa (5) tenglik  $n+1$  bo'lganda ham bajarilishini ko'rsatadi. ►  
Odatda (5) tenglik **Nyuton binomi formulasi** deyiladi.

### 5. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi.

Ma'lumki, ushbu

$$\{x \in R: a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

to'plam segment deb ataladi.

Aytaylik,  $[a_1, b_1]$  va  $[a_2, b_2]$  segmentlar berilgan bo'lsin. Agar

$$[a_1, b_1] \subset [a_2, b_2]$$

bo'lsa,  $[a_1, b_1]$  **segment**  $[a_2, b_2]$  **segmentning ichiga joylashgan** deyiladi. Bu holda  $a_1 \leq a_2 < b_2 \leq b_1$  bo'ladi.

**7-ta'rif.** Agar

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots \quad (6)$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_n, b_n] \supset \dots$$

munosabatda, ya'ni  $\forall n \in N$  da

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

bo'lsa, (6) **ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi** deyiladi.

**Teorema.** Aytaylik,

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi shartlarni bajarsin:

$$1) \forall n \in N: [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}],$$

$$2) \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, n > n_0: b_n - a_n < \varepsilon \text{ bo'lsin.}$$

U holda shunday  $c \in R$  mavjud bo'ladiki,  $c \in [a_n, b_n]$ , ( $n=1,2,3,\dots$ ) bo'lib, bunday  $c$  yagona bo'ladi.

◀ Teoremada qaralayotgan segmentlar ketma-ketligi ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi bo'ladi. Ravshanki, bu holda ushbu

$$a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n < b_n \leq b_{n-1} \leq \dots \leq b_2 \leq b_1$$

munosabat bajariladi.

Endi  $a_1, a_2, \dots, a_n$  sonlaridan tashkil topgan

$$E = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$$

to'plamni qaraymiz. Bu to'plamning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz.

Ixtiyoriy natural  $m$  sonini olib, uni tayinlaymiz.



Agar  $n \leq m$  bo'lsa,  $[a_m, b_m] \subset [a_n, b_n]$  bo'lib,  $a_n \leq a_m < b_m \leq b_n$ , ya'ni  $a_n < b_m$  bo'ladi.

Agar  $n > m$  bo'lsa,  $[a_n, b_n] \subset [a_m, b_m]$  bo'lib,  $a_m \leq a_n < b_n \leq b_m$ , ya'ni  $a_n < b_m$  bo'ladi.

Aniq yuqori chegara haqidagi teoremaga ko'ra  
$$\sup E = c \quad (c \in R)$$

mavjud bo'ladi.

To'planning aniq yuqori chegarasi ta'rifiga binoan  
 $\forall n \in N$  da  $a_n \leq c$  va  $\forall m \in N$  da  $c \leq b_m$  bo'ladi.

Demak,

$$\forall n \in N \text{ da } c \in [a_n, b_n].$$

Agar shu nuqtadan farqli va barcha segmentlarga tegishli  $c'$  ( $c' \in [a_n, b_n]$ ,  $\forall n \in N$ ) mavjud deb qaraladigan bo'lsa, unda

$$b_n - a_n \geq |c - c'| > 0$$

bo'lib, bu teoremaning 2-shartiga zid bo'ladi.

Demak,  $c = c'$  ►.

Odatda bu teorema ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi deyilib, u haqiqiy sonlar to'plamining uzluksizlik (to'liqlik) xossasini ifodalaydi.

## Mashqlar

1. Ixtiyoriy  $x_1, x_2, \dots, x_n$  haqiqiy sonlar uchun

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

bo'lishi isbotlansin.

2. Ikki haqiqiy son yig'indisi ta'rifidan foydalanib ushbu

$$a + b = b + a, \quad a + a = 2a$$

tengliklar isbotlansin.

## Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Voriz-nashriyot", 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

## Nazorat savollari

1. Ikki haqiqiy sonning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbati ta'riflarini bering.
2. Haqiqiy sonning darajasi ta'rifini bering. Misollarda tushuntiring.
3. Haqiqiy sonning absolyut qiymati nima?
4. Bernulli tengsizligini keltiring.
5. Nyuton binomi formulasini yozing.
6. Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipini tushuntiring.

# Glossariy

**Haqiqiy sonning absolyut qiymati** – aytaylik  $x \in R$  son berilgan bo'lsin.

Ushbu  $|x| = \begin{cases} x, & \text{agar } x \geq 0 \text{ bo'lsa,} \\ -x, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$  miqdor  $x$  **sonining absolyut qiymati** deyiladi.

**Nuqtalar orasidagi masofa** – ixtiyoriy  $x \in R, y \in R$  sonlar uchun  $|x - y|$  miqdor  $x$  va  $y$  **nuqtalar orasidagi masofa** deyiladi.

**Bernulli tengsizligi** – ixtiyoriy  $x \geq -1$  ( $x \in R$ ) hamda ixtiyoriy  $n \in N$  uchun ushbu  $(1 + x)^n \geq 1 + nx$  tengsizlik **Bernulli tengsizligi** deyiladi.

**Nyuton binomi formulasi** –

$$(a + b)^n = C_n^0 \cdot a^n + C_n^1 a^{n-1} \cdot b + \dots + C_n^k \cdot a^{n-k} b^k + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n \cdot b^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$

**Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipi** – aytaylik,

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_n, b_n], \dots$$

segmentlar ketma-ketligi quyidagi shartlarni bajarsin:

1)  $\forall n \in N: [a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$ ,

2)  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, n > n_0: b_n - a_n < \varepsilon$  bo'lsin.

U holda shunday  $c \in R$  mavjud bo'ladiki,  $c \in [a_n, b_n]$ , ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) bo'lib, bunday  $c$  yagona bo'ladi.

## Keys banki

**5-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Ixtiyoriy  $x_1, x_2, \dots, x_n$  haqiqiy sonlar uchun

$$|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$$

bo'lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).

## 5-amaliy mashg'ulot

### Na'muna uchun misollar yechimi

1-мисол.  $S_n = 1^2 + 2^2 + \dots + n^2$  yig'indini hisoblang.

Yechish: Ushbu  $(x+1)^3 - x^3 = 3x^2 + 3x + 1$  tenglikni qaraymiz. Bu tenglikda  $x=1, 2, \dots, n$  deb olib va hosil bo'lgan tenglikni hadma-had qo'shib, topamiz:

$$\sum_{k=1}^n \left( (k+1)^3 - k^3 \right) = 3 \sum_{k=1}^n k^2 + \sum_{k=1}^n k + n.$$

Bundan

$$(n+1)^3 - n^3 = 3S_n + \frac{3}{2}n(n+1) + n$$

bo'lishini hosil qilamiz. Endi yuqoridagi tenglikdan  $S_n$  ni topsak,

$$S_n = \frac{1}{6}(2n^3 + 3n^2 + n) = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).$$

Demak,

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

### Quyidagi tengsizliklarni isbotlang:

1.  $|x - y| \geq ||x| - |y||$ .
2.  $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$

### Ixtiyoriy $a$ va $b$ sonlar uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'lishini isbotlang:

1.  $a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b) \sum_{k=0}^n b^k a^{n-k}$  ;
2.  $a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b) \sum_{k=0}^{2n} (-1)^k b^k a^{2n-k}$  ;

### Quyidagi tengliklarni isbotlang:

$$1) \sum_{k=1}^n (2k-1)^2 = C_{2n+1}^3; \quad 2) \sum_{k=1}^n k \cdot k! = (n+1)! - 1;$$

$$3) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} k^2 = (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)}{2};$$

$$4) \sum_{k=1}^n k(k+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3};$$

$$5) \sum_{k=1}^n k(k+1)(k+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4};$$

$$6) \sum_{k=1}^n k^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30};$$

$$7) \sum_{k=1}^n k^5 = \frac{n^2(n+1)^2(2n^2+2n-1)}{12}.$$

**Quyidagi tengliklarni isbotlang:**

$$1) \sum_{k=0}^n \cos(x + ka) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \cos\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z};$$

$$2) \sum_{k=0}^n \sin(x + k\alpha) = \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\alpha\right) \sin\left(x + \frac{n}{2}\alpha\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}, \quad \alpha \neq 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

**Quyidagi yig'indilarni hisoblang:**

$$1) \sum_{k=1}^n \sin(2k-1)x; \quad 2) \sum_{k=1}^n \cos(2k-1)x; \quad 3) \sum_{k=1}^n \sin^2 kx;$$

$$4) \sum_{k=1}^n \cos^2 kx; \quad 5) \sum_{k=1}^n \sin^3 kx; \quad 6) \sum_{k=1}^n \cos^3 kx.$$

**Quyidagi yig'indilarni hisoblang:**

$$\begin{aligned}
& 1) \sum_{k=1}^n (k+1)C_n^k; \quad 2) \sum_{k=1}^n (k-1)C_n^k; \quad 3) \sum_{k=1}^n C_{2n}^{2k}; \quad 4) \sum_{k=1}^n C_{2n}^{2k-1}; \\
& 5) \sum_{k=0}^m (-1)^k C_n^k, \quad m < n; \quad 6) \sum_{k=0}^n (-1)^k (C_n^k)^2.
\end{aligned}$$

**Quyidagi tengliklarni isbotlang:**

$$\begin{aligned}
& 1) \sum_{k=1}^n kC_n^k = n2^{n-1}; \quad 2) \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} kC_n^k = 0; \\
& 3) \sum_{k=0}^s C_n^k C_m^{s-k} = C_{m+n}^s; \quad 4) \sum_{k=0}^m C_{n+k}^n = C_{n+m+1}^{n+1};
\end{aligned}$$

## Test

№	Test topshirig`i	To`g`ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Musbat haqiqiy $a$ sonining $n$ darajali ildizi deb ushbu ... tenglikni qanoatlantiruvchi yagona $x$ soniga aytiladi.	$x^n = a$	$\frac{1}{x^n} = a$	$x^n = a^n$
2.	Noto`g`ri munosabatni ko`rsating.	$ x  >  -x $	$ x  =  -x $	$x \leq  x $
3.	Noto`g`ri munosabatni ko`rsating.	$ x - y  \leq  x  -  y $	$ x + y  \leq  x  +  y $	$ x - y  \geq  x  -  y $
4.	Ushbu $ 3x - 1  \leq  2x - 1  +  x $ tengsizlik $x$ ning qanday qiymatlarida o`rinli bo`ladi?	$\forall x \in R$	$\forall x \in R^+$	$\forall x \in R^-$
5.	Ushbu ... miqdor $x$ va $y$ nuqtalar orasidagi masofa deyiladi.	$ x - y $	$ x + y $	$ x - (-y) $
6.	Bernulli tengsizligini ko`rsating	$(1 + x)^n \geq 1 + nx$	$(1 - x)^n \geq 1 + nx$	$(1 + x)^n \leq 1 + nx$
7.	Ushbu $ 8x - 3y + 5  \geq  8x + 3  -  3y - 2 $ tengsizlik $x$ va $y$ ning qanday qiymatlarida o`rinli bo`ladi?	$\forall x, y \in R$	$\forall x, y \in R^+$	$\forall x, y \in R^-$
8.	Ushbu $ 17x + 11y - 7  \leq  17x - 3  +  11y - 4 $ tengsizlik $x$ va $y$ ning qanday qiymatlarida o`rinli bo`ladi?	$\forall x, y \in R$	$\forall x, y \in R^-$	$\forall x, y \in R^+$
9.	Noto`g`ri munosabatni ko`rsating.	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{n}{m}}$	$\sqrt[m]{ab} = \sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b}$	$\sqrt[k]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[km]{a}$
10.	Ushbu $ x^2 - 2x - 3  > x^2 - 2x - 3$ tengsizlikni yeching.	$x \in (-1; 3)$	$x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$	$x \in (-3; 1)$



# 6-mavzu. Sonlar ketma-ketligi va uning limiti

## 6-ma'ruza

### Reja

1. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi.
2. Sonlar ketma-ketligining limiti.

#### 1. Sonlar ketma-ketligi tushunchasi.

Biz birinchi bobda ixtiyoriy  $E$  to'plamni  $F$  to'plamga akslantirish:

$$f : E \rightarrow F$$

tushunchasi bilan tanishgan edik.

Endi  $E = N$ ,  $F = R$  deb, har bir natural  $n$  songa biror haqiqiy  $x_n$  sonini mos qo'yuvchi

$$f : n \rightarrow x_n, \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

akslantirishni qaraymiz.

**1-ta'rif.** 1- akslantirishning akslaridan iborat ushbu

$$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (2)$$

to'plam **sonlar ketma-ketligi** deyiladi. Uni  $\{x_n\}$  yoki  $x_n$  kabi belgilanadi.

$x_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) sonlar (2) **ketma-ketlikning hadlari** deyiladi. Masalan,

$$1) x_n = \frac{1}{n} : 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots,$$

$$2) x_n = (-1)^n : -1, 1, -1, \dots, (-1)^n, \dots$$

$$3) x_n = \sqrt[n]{n} : 1, \sqrt{2}, \sqrt[3]{3}, \dots, \sqrt[n]{n}, \dots$$

$$4) x_n = 1 : 1, 1, 1, \dots, 1, \dots$$

$$5) 0, 3; 0, 33; 0, 333; \dots; 0, 333\dots 3; \dots$$

$n$  ta

lar sonlar ketma-ketliklaridir.

Biror  $\{x_n\}$  ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

**2-ta'rif.** [1, p.130, def. 6.1.16] Agar shunday o'zgarmas  $M$  soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) uchun  $x_n \leq M$  tengsizlik bajarilsa (ya'ni  $\exists M, \forall n \in N : x_n \leq M$  bo'lsa),  $\{x_n\}$  ketma-ketlik **yuqoridan chegaralangan** deyiladi.

**3-ta'rif.** Agar shunday o'zgarmas  $m$  soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy  $x_n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) uchun  $x_n \geq m$  tengsizlik bajarilsa (ya'ni,  $\exists m, \forall n \in N : x_n \geq m$  bo'lsa),  $\{x_n\}$  ketma-ketlik **quyidan chegaralangan** deyiladi.

**4-ta'rif.** Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa (ya'ni  $\exists m, M, \forall n \in N: m \leq x_n \leq M$  bo'lsa),  $\{x_n\}$  ketma-ketlik **chegaralangan** deyiladi.

**1-misol.** Ushbu

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} \quad (n=1,2,3,\dots)$$

ketma-ketlikning chegaralanganligi isbotlansin.

◀ Ravshanki,  $\forall n \in N$  uchun

$$x_n = \frac{n}{4+n^2} > 0$$

bo'ladi. Demak, qaralayotgan ketma-ketlik quyidan chegaralangan.

Ma'lumki,

$$0 \leq (n-2)^2 = n^2 - 4n + 4$$

bo'lib, undan  $4n \leq 4+n^2$  ya'ni,

$$\frac{n}{4+n^2} \leq \frac{1}{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa berilgan ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi. Demak, ketma-ketlik chegaralangan ▶

**5-ta'rif.** Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun

$$\forall M \in R, \exists n_0 \in N: x_{n_0} > M$$

bo'lsa, **ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

## 2. Sonlar ketma-ketligining limiti.

Aytaylik,  $a \in R$  son hamda ixtiyoriy musbat  $\varepsilon$  son berilgan bo'lsin.

**6-ta'rif.** Ushbu

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

to'plam  $a$  **nuqtaning  $\varepsilon$  - atrofi** deyiladi.

Faraz qilaylik  $\{x_n\}$  ketma-ketlik va  $a \in R$  soni berilgan bo'lsin.

**7-ta'rif.** [2, p.68, def. 3.5] Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $n_0$  natural soni mavjud bo'lsaki,  $n > n_0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad (3)$$

tengsizlik bajarilsa, (ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0: |x_n - a| < \varepsilon$$

bo'lsa),  $a$  son  $\{x_n\}$  **ketma-ketlikning limiti** deyiladi va

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ yoki } n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow a$$

kabi belgilanadi.

Ravshanki, yuqoridagi (3) tengsizlik uchun

$$|x_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

ya'ni,  $x_n \in U_\varepsilon(a)$ , ( $n > n_0$ ) bo'ladi. SHuni e'tiborga olib, ketma-ketlikning limitini quyidagicha ta'riflash bo'ladi.

**8-ta'rif.** [1, p.128, def.6.1.5] Agar  $a$  nuqtaning ixtiyoriy  $U_\varepsilon(a)$  atrofi olinganda ham  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari shu atrofga tegishli bo'lsa,  $a$  son  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning limiti deyiladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan ko'rinadiki  $\varepsilon$  ixtiyoriy musbat son bo'lib, natural  $n_0$  soni esa  $\varepsilon$  ga va qaralayotgan ketma-ketlikka bog'liq ravishda topiladi.

**2-misol.** Ushbu

$$x_n = c \quad (c \in R, n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikning limiti  $c$  ga teng bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham, bu holda  $\forall \varepsilon > 0$  ga ko'ra  $n_0 = 1$  deyilsa, unda  $\forall n > n_0$  uchun  $|x_n - c| = 0 < \varepsilon$  bo'ladi. Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c = c$  ▶

**3-misol.** Ushbu

$$x_n = \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikning limiti  $0$  ga teng bo'lishi isbotlansin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0.$$

◀ Ravshanki,

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| = \frac{1}{n}$$

bo'lib,  $\frac{1}{n} < \varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) tengsizlik barcha  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  bo'lganda o'rin-li. Bu holda

$$n_0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} \right] + 1$$

deyilsa, ( $[a] - a$  sonidan katta bo'lmagan uning butun qismi), unda  $\forall n > n_0$  uchun

$$\left| \frac{1}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Ta'rifga binoan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0. \quad \blacktriangleright$$

**4-misol.** Aytaylik,  $a \in R, |a| > 1$  bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0$$

bo'lishi isbotlansin.

◀  $|a| = 1 + \delta$  deylik. Unda  $\delta = |a| - 1 > 0$  va Bernulli tengsiz-ligiga ko'ra

$$(1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta$$

bo'lib,  $\forall n \in N$  da

$$\frac{1}{|a|^n} < \frac{1}{n\delta}$$

bo'ladi. Demak,

$$\left| \frac{1}{a^n} - 0 \right| = \frac{1}{|a|^n} < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)$$

tengsizlik barcha

$$n > \frac{1}{\varepsilon\delta}$$

bo'lganda o'rinli. Agar

$$n_0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon\delta} \right] + 1$$

deyilsa, ravshanki,  $\forall n > n_0$  uchun

$$\left| \frac{1}{a^n} - 0 \right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{a^n} = 0 \blacktriangleright$$

**5-misol.** Ushbu  $x_n = \frac{n}{n+1}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

ketma-ketlikning limiti 1 ga teng bo'lishi isbotlansin.

◀ Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son olamiz. So'ng ushbu

$$|x_n - 1| < \varepsilon$$

tengsizlikni qaraymiz. Ravshanki,

$$|x_n - 1| = \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{n}{n+1}$$

Unda yuqoridagi tengsizlik

$$\frac{n}{n+1} < \varepsilon$$

ko'rinishga keladi. Keyingi tengsizlikdan

$$n > \frac{1}{\varepsilon} - 1$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak, limit ta'rifidagi  $n_0 \in N$  sifatida  $n_0 = \left[ \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right] + 1$  olinsa ( $\varepsilon > 0$  ga ko'ra  $n_0 \in N$  topilib),  $\forall n > n_0$  uchun  $|x_n - 1| < \varepsilon$  bo'ladi. Bu esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

bo'lishini bildiradi. ►

**6-misol.** Faraz qilaylik,  $a \in R$ ,  $|a| > 1$  va  $\alpha \in R$  bo'lsin. U holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$$

bo'lishi isbotlansin.

◀ SHunday natural  $k$  sonni olamizki  $k \geq \alpha + 1$  bo'lsin. Endi  $|a|^{\frac{1}{k}} > 1$  bo'lishini e'tiborga olib,  $|a|^{\frac{1}{k}} = 1 + \delta$ , ya'ni  $\delta = |a|^{\frac{1}{k}} - 1 > 0$  deymiz. Unda Bernulli tengsizligiga ko'ra

$$|a|^{\frac{n}{k}} = (1 + \delta)^n \geq 1 + n\delta > n\delta$$

bo'lib,  $\forall n \in N$  da

$$\frac{n^{k-1}}{a^n} < \frac{1}{n\delta^k}$$

bo'ladi. Bu holda

$$n_0 = \left[ \frac{1}{\delta^k \cdot \varepsilon} \right] + 1 \quad (\varepsilon > 0)$$

deyilsa,  $\forall n > n_0$  uchun

$$\left| \frac{n^\alpha}{a^n} - 0 \right| = \frac{n^\alpha}{|a|^n} \leq \frac{n^{k-1}}{|n|^n} < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^\alpha}{a^n} = 0$ . ►

**7-misol.** Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0$$

tenglik isbotlansin.

◀ Ravshanki,  $\forall \varepsilon > 0$  va  $\forall n \in N$  uchun

$$0 \leq \frac{\lg n}{n} < \varepsilon \Leftrightarrow \lg n < n\varepsilon \Leftrightarrow n < 10^{n\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{n}{(10^\varepsilon)^n} < 1$$

bo'ladi. Agar  $10^\varepsilon > 1$  bo'lishini e'tiborga olsak, 6-misolga ko'ra

$$n \rightarrow \infty \text{ da } \frac{n}{(10^\varepsilon)^n} \rightarrow 0$$

ekanini topamiz. Unda ta'rifga ko'ra 1 soni uchun

$$\exists n_0 \in N, \forall n > n_0: \frac{n}{(10^\varepsilon)^n} < 1$$

bo'ladi. SHunday qilib,  $\forall n > n_0$  uchun  $\frac{\lg n}{n} < \varepsilon$  bo'ladi. Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lg n}{n} = 0$ .



**8-misol.** Ushbu

$$x_n = (-1)^n \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikning limiti mavjud emasligi isbotlansin.

◀ Teskarisini faraz qilaylik. Bu ketma-ketlik  $a$  limitga ega bo'lsin. Unda ta'rifga binoan,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |(-1)^n - a| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Ravshanki,  $n$  juft bo'lganda  $|1 - a| < \varepsilon$ ,  $n$  toq bo'lganda  $|(-1) - a| < \varepsilon$ , ya'ni  $|1 + a| < \varepsilon$  bo'ladi. Bu tengsizliklardan foydalanib topamiz:

$$2 = |(1 - a) + (1 + a)| \leq |1 - a| + |1 + a| < 2\varepsilon.$$

Bu tengsizlik  $\varepsilon > 1$  bo'lgandagina o'rinli. Bunday vaziyat  $\varepsilon > 0$  sonining ixtiyoriy bo'lishiga zid. Demak, ketma-ketlik limitga ega emas. ►

**Teorema.** [1, p.128, prop. 6.1.7] Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik limitga ega bo'lsa, u yagona bo'ladi.

◀ Teskarisini faraz qilaylik.  $\{x_n\}$  ketma-ketlik ikkita  $a$  va  $b$  ( $a \neq b$ ) limitlarga ega bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = b \quad (a \neq b)$$

Limitning ta'rifiga ko'ra

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n'_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n'_0: |x_n - b| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Agar  $n_0$  va  $n'_0$  sonlarining kattasini  $\bar{n}$  desak, unda  $\forall n > \bar{n}$  da

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |x_n - b| < \varepsilon$$

bo'lib

$$|x_n - a| + |x_n - b| < 2\varepsilon$$

bo'ladi.

Ravshanki,  $|a - b| = |a - x_n + x_n - b| \leq |x_n - a| + |x_n - b|$ .

Demak,  $\forall \varepsilon > 0$  da  $|a - b| < 2\varepsilon$  bo'lib, undan  $a = b$  bo'lishi kelib chiqadi. ►

## Mashqlar

1. Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib ushbu

$$x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}$$

ketma-ketlikning limiti topilsin.

2. Agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  bo'lsa, u holda ushbu

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$$

ketma-ketlikning limiti ham  $a$  ga teng bo'lishi isbotlansin.

3. Agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  bo'lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = a$$

bo'lishi isbotlansin.

### Adabiyotlar

1. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.
4. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.

### Nazorat savollari

1. Sonlar ketma-ketligi nima?
2. Qachon ketma-ketlik yuqoridan (quyidan) chegaralangan (chegaralanmagan) deyiladi?
3. Sonlar ketma-ketligi limiti ta'rifini bering. Misollarda tushuntiring.

# Glossariy

**Sonlar ketma-ketligi** –  $f : n \rightarrow x_n, (n = 1, 2, 3, \dots)$  akslantirishning akslaridan iborat ushbu  $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  to‘plam **sonlar ketma-ketligi** deyiladi.

**Yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik** – agar shunday o‘zgarmas  $M$  soni mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy  $x_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  uchun  $x_n \leq M$  tengsizlik bajarilsa (ya’ni  $\exists M, \forall n \in N : x_n \leq M$  bo‘lsa),  $\{x_n\}$  ketma-ketlik **yuqoridan chegaralangan** deyiladi.

**Quyidan chegaralangan ketma-ketlik** – agar shunday o‘zgarmas  $m$  soni mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy  $x_n (n = 1, 2, 3, \dots)$  uchun  $x_n \geq m$  tengsizlik bajarilsa (ya’ni,  $\exists m, \forall n \in N : x_n \geq m$  bo‘lsa),  $\{x_n\}$  ketma-ketlik **quyidan chegaralangan** deyiladi.

**Chegaralangan ketma-ketlik** – agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo‘lsa (ya’ni  $\exists m, M, \forall n \in N : m \leq x_n \leq M$  bo‘lsa),  $\{x_n\}$  ketma-ketlik **chegaralangan** deyiladi.

**Yuqoridan chegaralanmagan ketma-ketlik** – agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun  $\forall M \in R, \exists n_0 \in N : x_{n_0} > M$  bo‘lsa, **ketma-ketlik yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

**Nuqtaning  $\varepsilon$ -atrofi** – ushbu

$$U_\varepsilon(a) = \{x \in R \mid a - \varepsilon < x < a + \varepsilon\} = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$$

to‘plam  $a$  **nuqtaning  $\varepsilon$ -atrofi** deyiladi.

**Ketma-ketlikning limiti** – agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $n_0$  natural soni mavjud bo‘lsaki,  $n > n_0$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha natural sonlar uchun  $|x_n - a| < \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa, (ya’ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N, \forall n > n_0 : |x_n - a| < \varepsilon$$

bo‘lsa),  $a$  son  $\{x_n\}$  **ketma-ketlikning limiti** deyiladi va

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \text{ yoki } n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow a$$

kabi belgilanadi.



# Keys banki

**6-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  bo`lsa, u holda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = a$$

bo`lishi isbotlansin.

## **Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma`lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

## 6-amaliy mashg'ulot

### Na'muna uchun misollar yechimi

1-мисол.  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  ekanligi ta'rif yordamida ko'rsatilsin ( $n_0(\varepsilon)$  -?)

$$x_n = \frac{2n^3}{n^3 - 2}, \quad a = 2$$

$$\triangleleft (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a) \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}: \forall n > n_0 |x_n - a| < \varepsilon).$$

$$\begin{aligned} |x_n - a| &= \left| \frac{2n^3}{n^3 - 2} - 2 \right| = \left| \frac{2n^3 - 2n^3 + 4}{n^3 - 2} \right| = \frac{4}{|n^3 - 2|} = \\ &= \frac{4}{(n - \sqrt[3]{2})(n^2 + \sqrt[3]{2}n + \sqrt[3]{4})} < \frac{4}{n^2 + \sqrt[3]{2}n + \sqrt[3]{4}} < \frac{4}{\sqrt[3]{2}n} < \\ &< \frac{4}{n} < \varepsilon \Rightarrow n > \frac{4}{\varepsilon} \Rightarrow n_0 = \left[ \frac{4}{\varepsilon} \right] \end{aligned}$$

Demak,  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham  $n_0 = \max \left\{ 2, \left[ \frac{4}{\varepsilon} \right] \right\}$  deb olsak,

$\forall n > n_0$  uchun  $|x_n - a| < \varepsilon$  bo'ladi.  $\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$   $\triangleright$

**Quyidagi ketma-ketliklarning umumiy hadiga ko'ra dastlabki 5 ta hadi topilsin:**

388.  $x_n = (-1)^n$

389.  $x_n = \frac{n+3}{n+1}$

390.  $x_n = \frac{(-1)^n + 1}{n^2}$

391.  $x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$

**Ketma-ketlikning dastlabki hadlariga ko'ra umumiy hadi topilsin:**

395.  $\sqrt{1 \cdot 2}, \sqrt{2 \cdot 3}, \sqrt{3 \cdot 4}, \dots$

396.  $-1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{5}, \dots$

397.  $5, \frac{25}{2}, \frac{125}{6}, \frac{625}{24}, \dots$

398.  $\frac{1}{11}, \frac{2}{7}, \frac{9}{19}, \frac{8}{13}, \dots$

**Ketma-ketlik hadlari orasida eng kattasi topilsin:**

$$400. x_n = \sin \frac{n\pi}{2}$$

$$401. x_n = \frac{n^2}{2^n}$$

$$402. x_n = \frac{\pi^2}{(2n+1)!}$$

$$403. x_n = \frac{10^n}{n!}$$

**Ketma-ketlik hadlari orasida eng kichigi topilsin:**

$$405. x_n = n + \frac{5}{n}$$

$$406. x_n = \frac{n^2}{n^2 + 1}$$

$$407. x_n = \cos \frac{n\pi}{2}$$

$$408. x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

**Quyidagi ketma-ketliklarning chegaralanganligi isbotlansin:**

$$409. x_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + 4}$$

$$410. x_n = \frac{n}{4 + n^2}$$

$$411. x_n = \frac{2^n}{n!}$$

$$412. x_n = \frac{2n^2 - 1}{n^2 + 2}$$

**Quyidagi ketma-ketliklarning chegaralanmaganligi isbotlansin:**

$$419. x_n = (-1)^n \cdot n$$

$$420. x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$$

$$421. x_n = n + (-1)^n \cdot n$$

$$422. x_n = \frac{n+1}{\log_2(n+1)}$$

**424.** Ketma-ketlikning yuqoridan hamda quyidan chegaralanganligi ta'riflari keltirilsin.

**425.** Quyidagi ketma-ketliklarning yuqoridan chegaralanmaganligi isbotlansin:

1)  $x_n = \sqrt{n}$ , 2)  $x_n = \frac{n^3}{n^2 + 1}$ , 3)  $x_n = n^{\cos \pi x}$ .

**426.** Agar  $\{x_n\}$  va  $\{y_n\}$  ketma-ketliklar chegaralangan bo'lsa,  $\{x_n + y_n\}$ ,  $\{x_n - y_n\}$ ,  $\{x_n \cdot y_n\}$  ketma-ketliklar ham chegaralangan bo'lishi isbotlansin.

**427.** Agar  $\{x_n\}$  chegaralangan,  $\{y_n\}$  chegaralanmagan bo`lsa,  $\{x_n + y_n\}$  chegaralanmagan ketma-ketlik bo`lishi isbotlansin.

**428.** Agar  $\{x_n\}$  va  $\{y_n\}$  ketma-ketliklar chegaralanmagan bo`lsa,  $\{x_n + y_n\}$ ,  $\{x_n \cdot y_n\}$  ketma-ketlikla haqida nima deyish mumkin? Misollar keltirilsin.

**Quyidagi ketma-ketliklarning o`svuchi yoki kamayuvchi bo`lishi aniqlansin:**

**429.**  $x_n = \frac{n+1}{n}$

**430.**  $x_n = n^2$

**431.**  $x_n = \frac{n+1}{2n-1}$

**432.**  $x_n = 3^n - 2^n$

**433.**  $x_n = \frac{1-n}{\sqrt{n}}$

**434.**  $x_n = \frac{3^n}{n!}$

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  ekanligi ta`rif yordamida ko`rsatilsin ( $n_0(\varepsilon) - ?$ ).

**1.**  $x_n = \frac{13 - n^2}{1 + 2n^2}$ ,  $a = -\frac{1}{2}$ .

**5.**  $x_n = \frac{2n - 1}{2 - 3n}$ ,  $a = -\frac{2}{3}$ .

**2.**  $x_n = \frac{3n - 1}{5n + 1}$ ,  $a = \frac{3}{5}$ .

**6.**  $x_n = \frac{5n + 1}{10n - 3}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ .

**3.**  $x_n = \frac{1 + 3n}{6 - n}$ ,  $a = -3$ .

**7.**  $x_n = \frac{2n + 3}{n + 5}$ ,  $a = 2$ .

**4.**  $x_n = \frac{3n^2 + 2}{4n^2 - 1}$ ,  $a = \frac{3}{4}$ .

**8.**  $x_n = \frac{2 - 3n^2}{4 + 5n^2}$ ,  $a = -\frac{3}{5}$ .

**$a$  soni  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning limiti emasligi ta`rif yordamida ko`rsatilsin.**

**1.**  $x_n = \frac{1}{2n+1}$ ,  $a = \frac{1}{2}$ .

**5.**  $x_n = \sin \frac{\pi n}{2}$ ,  $a = 1$ .

**2.**  $x_n = \frac{(-1)^2}{n}$ ,  $a = -1$ .

**6.**  $x_n = \sin \frac{\pi n}{3}$ ,  $a = 0$ .

3.  $x_n = \frac{n+1}{3-2n^2}, a = -\frac{1}{2}$ .

4.  $x_n = n^{(-1)^n}, a = 0$ .

7.  $x_n = (-1)^n n, a = -1$ .

8.  $x_n = \frac{n^2 - 2n}{n+1}, a = 1$ .

# Test

No	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Agar shunday o'zgarma $M$ soni mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $x_n$ ( $n=1,2,3,\dots$ ) uchun $x_n \leq M$ tengsizlik bajarilsa, $\{x_n\}$ ketma-ketlik ...deyladi	yuqoridan chegaralangan	quyidan chegaralangan	chegaralangan
2.	Chegaralangan ketma-ketlikni ko'rsating.	$x_n = \frac{n^3 + 1}{n^3 + 2017^{2017}}$	$x_n = \frac{n^4 - 1}{n^3 - 10^{2017}}$	$x_n = \frac{3^n + 11}{n^3 + 2017}$
3.	Chegaralanmagan ketma-ketlikni ko'rsating.	$x_n = (-1)^n n$	$x_n = \frac{2^n}{n!}$	$x_n = \frac{\log_2 n}{n}$
4.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \frac{1}{n} \sin \frac{\pi n}{2}$	0	1	-1
5.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \frac{1 - 3n^2}{n^2 + 2}$	-3	3	$\frac{1}{2}$
6.	Agar $\{x_n\}$ ketma-ketlik uchun $\forall M \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : x_{n_0} > M$ bo'lsa, ketma-ketlik ... deyiladi	yuqoridan chegaralanmagan	yuqoridan chegaralangan	quyidan chegaralangan
7.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$	0	1	-1
8.	Agar $\{x_n\}$ va $\{y_n\}$ ketma-ketliklar chegaralangan bo'lsa, quyidagilardan qaysi biri chegaralangan bo'ladi? 1) $\{x_n + y_n\}$ ; 2) $\{x_n - y_n\}$ ; 3) $\left\{ \begin{matrix} x_n \\ y_n \end{matrix} \right\}$ ; 4) $\{x_n \cdot y_n\}$ ; 5) $\left\{ \frac{1}{x_n \cdot y_n} \right\}$	1, 2, 4	1, 2, 3	1, 3, 5
9.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \frac{12 + 3n^5}{5n^5 + 2n^2 + 9}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{3}$	6

10.	Ketma-ketlik limitni hisoblang: $x_n = \frac{\sqrt{n} - \sqrt{n+1}}{\sqrt{n} + \sqrt{n+1}}$	0	1	-1
-----	--	---	---	----

# 7-mavzu. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklarning xossalari

## 7-ma'ruza

### Reja

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi. Tengsizliklarda limitga o'tish.
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida amallar.
3. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar.

$\{x_n\}$  sonlar ketma-ketligi berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u **yaqinlashuvchi ketma-ketlik** deyiladi.

### 1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning chegaralanganligi. Tengsizliklarda limitga o'tish.

**1-teorema.** [1, p.131, Corollary 6.1.17]  $\{x_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lsa, u chegaralangan bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad (a \in \mathbb{R})$$

bo'lsin. Limit ta'rifiga ko'ra

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0; |x_n - a| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,  $n > n_0$  uchun

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$$

bo'ladi. Agar

$$\max \{|a - \varepsilon|, |a + \varepsilon|, |x_1|, |x_2|, \dots, |x_{n_0}|\} = M$$

deyilsa, u holda,  $\forall n \in \mathbb{N}$  uchun

$$|x_n| \leq M$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning chegaralanganligini bildiradi. ▶

**2-teorema.** Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

bo'lib,  $a > p$  ( $a < q$ ) bo'lsa, u holda shunday  $n_0 \in \mathbb{N}$  topiladiki,  $\forall n > n_0$  bo'lganda

$$x_n > p \quad (x_n < q)$$



bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad a > p \quad (p \in R)$$

bo'lsin.  $\varepsilon > 0$  sonining ixtiyoriyligidan foydalanib,  $\varepsilon < a - p$  deb qaraymiz.

Ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan,  $\forall \varepsilon > 0$  uchun, jumladan,  $0 < \varepsilon < a - p$  uchun, shunday  $n_0 \in N$  topiladiki,  $\forall n > n_0$  bo'lganda

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon < a - p &\Rightarrow p < a - \varepsilon, \\ -\varepsilon < x_n - a < \varepsilon &\Rightarrow a - \varepsilon < x_n. \end{aligned}$$

Bu tengsizliklardan  $\forall n > n_0$  bo'lganda

$$x_n > p$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

( $a < q$  hol uchun ham teorema yuqoridagidek isbot etiladi).

**3-teorema.** Agar  $\{x_n\}$  va  $\{y_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,

- 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b;$
- 2)  $\forall n \in N$  учун  $x_n \leq y_n$  ( $x_n \geq y_n$ )

bo'lsa, u holda  $a \leq b$  ( $a \geq b$ ) bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

Ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan:

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon > 0, \exists n_0' \in N, \forall n > n_0': |x_n - a| < \varepsilon, \\ \forall \varepsilon > 0, \exists n_0'' \in N, \forall n > n_0'' |y_n - b| < \varepsilon \end{aligned}$$

bo'ladi.

Agar  $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$  deyilsa, unda  $\forall n > n_0$  uchun bir yo'la

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi.

Ravshanki,

$$\begin{aligned} |x_n - a| < \varepsilon &\Leftrightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \\ |y_n - b| < \varepsilon &\Leftrightarrow b - \varepsilon < y_n < b + \varepsilon. \end{aligned}$$

Bu tengsizliklardan hamda teoremaning 2-shartidan foydalanib topamiz:

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n < b + \varepsilon.$$

Keyingi tengsizliklardan

$$a - \varepsilon < b + \varepsilon, \quad a - b < 2\varepsilon$$

va  $\forall \varepsilon > 0$  bo'lgani uchun  $a - b \leq 0$ , ya'ni  $a \leq b$  bo'lishi kelib chiqadi.

Xuddi shunga o'xshash,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$  hamda  $\forall n \in N$  uchun

$x_n \geq y_n$  bo'lishidan  $a \geq b$  tengsizlik kelib chiqishi ko'rsatiladi. ►

**4-teorema.** Agar  $\{x_n\}$  va  $\{z_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$$

$$2) \forall n \in N \text{ uchun } x_n \leq y_n \leq z_n$$

bo'lsa, u holda  $\{y_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashuvchi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$$

bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a.$$

Limit ta'rifiga binoan:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0' \in N, \forall n > n_0': |x_n - a| < \varepsilon,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0'' \in N, \forall n > n_0'' \quad |z_n - a| < \varepsilon$$

bo'ladi. Agar  $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$  deyilsa, unda  $\forall n > n_0$  uchun

$$a - \varepsilon < x_n, \quad z_n < a + \varepsilon$$

tengsizliklar bajariladi. Teoremaning 1-shartidan foydalanib topamiz:

$$a - \varepsilon < x_n \leq y_n \leq z_n < a + \varepsilon.$$

Keyingi tengsizliklardan

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon, \quad \text{ya'ni } |y_n - a| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a.$$

Shuni isbotlash talab qilingan edi. ►

**1-misol.** Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$$

limit topilsin.

◀ Ravshanki, barcha  $n \geq 2$  bo'lganda

$$\sqrt[2n]{n} > 1$$

bo'ladi. Aytaylik,

$$\sqrt[2n]{n} = 1 + \alpha_n$$

bo'lsin. Unda

$$\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^2 \tag{1}$$

va  $\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^2$  bo'ladi.

Bernulli tengsizligidan foydalanib topamiz:

$$\sqrt{n} = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n \cdot \alpha_n > n \cdot \alpha_n. \tag{2}$$

(1) va (2) munosabatlardan

$$a_n < \frac{1}{\sqrt{n}},$$

va

$$1 < \sqrt[n]{n} < \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2$$

tengsizliklar kelib chiqadi. Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 = 1$$

ekanini e'tiborga olsak, unda 4-teoremaga ko'ra

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

bo'lishini topamiz. ►

**2-misol.** Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}}$$

limit topilsin.

◀Ravshanki,

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \dots + \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1,$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} < 1 + 1 + 1 + \dots + 1 = n.$$

Demak,

$$1 < \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} < \sqrt[n]{n}.$$

4-teoremadan foydalanib topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}} = 1. \quad \blacktriangleright$$

## 2<sup>0</sup>. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida amallar.

Faraz qilaylik,  $\{x_n\}$  hamda  $\{y_n\}$  ketma-ketliklar berilgan bo'lsin:

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$$

$$\{y_n\}: y_1, y_2, y_3, \dots, y_n, \dots$$

Quyidagi

$$x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \dots, x_n + y_n, \dots$$

$$x_1 - y_1, x_2 - y_2, x_3 - y_3, \dots, x_n - y_n, \dots$$

$$x_1 \cdot y_1, x_2 \cdot y_2, x_3 \cdot y_3, \dots, x_n \cdot y_n, \dots$$

$$\frac{x_1}{y_1}, \frac{x_2}{y_2}, \frac{x_3}{y_3}, \dots, \frac{x_n}{y_n}, \dots \quad (y_n \neq 0, n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketliklar mos ravishda  $\{x_n\}$  va  $\{y_n\}$  **ketma-ketlik-larning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi hamda nisbati** deyiladi va ular

$$\{x_n + y_n\}, \{x_n - y_n\}, \{x_n \cdot y_n\}, \left\{ \frac{x_n}{y_n} \right\}$$

kabi belgilanadi.

**5-teorema.** [1, p.131, theorem 6.1.19] Aytaylik  $\{x_n\}$  va  $\{y_n\}$  ketma-ketliklari berilgan bo'lib,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b, \quad (a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$$

bo'lsin. U holda  $n \rightarrow \infty$  da  $(c \cdot x_n) \rightarrow c \cdot a$ ;

$$x_n + y_n \rightarrow a + b; \quad x_n \cdot y_n \rightarrow ab; \quad \frac{x_n}{y_n} \rightarrow \frac{a}{b} \quad (b \neq 0), \text{ ya'ni}$$

$$a) \quad \forall c \in \mathbb{R} \text{ da } \lim_{n \rightarrow \infty} (c \cdot x_n) = c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} x_n;$$

$$b) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$c) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} y_n;$$

$$d) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} y_n}, \quad (b \neq 0)$$

bo'ladi.

Teoremaning tasdiqlaridan birini, masalan c)-ning isbotini keltiramiz.

◀ Teoremaning shartiga ko'ra,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b.$$

Ravshanki,

$$\begin{aligned} |x_n \cdot y_n - ab| &= |x_n \cdot y_n - a \cdot y_n + a \cdot y_n - b| \leq \\ &\leq |x_n - a| \cdot |y_n| + |a| \cdot |y_n - b|. \end{aligned} \quad (3)$$

$\{y_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lganligi sababli u 1-teoremaga ko'ra chegaralangan bo'ladi:

$$\exists M > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}: |y_n| \leq M.$$

Ketma-ketlik limiti ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ berilgan hamda } \frac{\varepsilon}{2M} \text{ ga ko'ra shunday } n'_0 \in \mathbb{N} \text{ topiladiki,}$$

$\forall n > n'_0$  uchun

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}$$

bo'ladi.

SHuningdek,  $\frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$  ga ko'ra shunday  $n_0'' \in N$  topiladiki,  $\forall n > n_0''$  uchun

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)}$$

bo'ladi.

Agar  $n_0 = \max\{n_0', n_0''\}$  deyilsa, unda  $\forall n > n_0$  uchun bir yo'la

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} \quad (4)$$

bo'ladi.

(3) va (4) munosabatlardan

$$|x_n \cdot y_n - ab| < \frac{\varepsilon}{2M} \cdot M + |a| \cdot \frac{\varepsilon}{2(1+|a|)} < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot y_n = ab$$

bo'lishini bildiradi. ►

### 3<sup>0</sup>. Cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar.

Faraz qilaylik,  $\{\alpha_n\}$  ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

**2-ta'rif.** [2. p.130] Agar  $\{\alpha_n\}$  ketma-ketlikning limiti nolga teng, ya'ni

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$$

bo'lsa,  $\{\alpha_n\}$  - **cheksiz kichik miqdor** deyiladi.

Masalan,

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{ba} \quad \alpha_n = q^n, \quad (|q| < 1)$$

ketma-ketliklar cheksiz kichik miqdorlar bo'ladi.

Aytaylik,  $\{x_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib, uning limiti  $a$  ga teng bo'lsin:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a.$$

U holda  $\alpha_n = x_n - a$  cheksiz kichik miqdor bo'ladi. Keyingi tenglikdan topamiz:  $x_n = a + \alpha_n$ . Bundan esa quyidagi muhim xulosa kelib chiqadi:

$\{x_n\}$  ketma-ketlikning  $a$  ( $a \in R$ ) limitga ega bo'lishi uchun  $\alpha_n = x_n - a$  ning cheksiz kichik miqdor bo'lishi zarur va etarli.

Ketma-ketlikning limiti ta'rifidan foydalanib quyidagi ikkita lemmani isbotlash qiyin emas.

**1-lemma.** Chekli sondagi cheksiz kichik miqdorlar yigindisi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

**2-lemma.** Chegaralangan miqdor bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi cheksiz kichik miqdor bo'ladi.

**3-ta'rif.** [2, p.70, def. 3.7] Agar har qanday  $M$  soni olinganda ham shunday natural  $n_0$  soni topilsaki, barcha  $n > n_0$  uchun

$$|x_n| > M$$

tengsizlik bajarilsa,  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning **limiti cheksiz** deyiladi va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \infty$$

kabi belgilanadi.

Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning limiti cheksiz bo'lsa,  $\{x_n\}$  cheksiz katta miqdor deyiladi.

Masalan,

$$x_n = (-1)^n \cdot n$$

ketma-ketlik cheksiz katta miqdor bo'ladi.

Endi cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar orasidagi bog'lanishni ifodalovchi tasdiqlarni keltiramiz:

1) Agar  $\{x_n\}$  cheksiz kichik miqdor ( $x_n \neq 0$ ) bo'lsa, u holda  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$

cheksiz katta miqdor bo'ladi.

2) Agar  $\{x_n\}$  cheksiz katta miqdor bo'lsa, u holda  $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$  cheksiz kichik

miqdor bo'ladi.

### Mashqlar

1. Agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $a > 0$  bo'lsa, u holda  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ,  $\forall n > n_0 : x_n > 0$  bo'lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{2n^2 - 1} \cos \frac{n+1}{2n-1}$$

limit hisoblansin.

3. Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n!} = 0, \quad (n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)$$

limit munosabat isbotlansin.

### Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q. T.* "Vorish-nashriyot", 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

## Nazorat savollari

1. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik ta'rifini ayting.
2. Agar  $\{x_n\}$  va  $\{y_n\}$  ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib,
  - 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b;$
  - 2)  $\forall n \in N$  uchun  $x_n < y_n$bo'lsa, u holda  $a < b$  bo'ladimi? Misollar keltirilsin.
3. Yaqinlashuvchi ketma-ketliklar ustida bajariladigan amallar haqidagi teoremani ayting.
4. Cheksiz kichik va cheksiz kata ketma-ketliklar ta'riflarini keltiring.
5. Ikkita cheksiz katta miqdor yig'indisi, ayimasi, ko'paytmasi va nisbati yana cheksiz katta miqdor bo'ladimi?

# Glossariy

**Yaqinlashuvchi ketma-ketlik** – agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lsa, u yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

**Ikki mirshab haqidagi teorema** – agar  $\{x_n\}$  va  $\{z_n\}$  ketma-ketliklar yaqinlashuvchi bo'lib, 1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ ; 2)  $\forall n \in N$  uchun  $x_n \leq y_n \leq z_n$  bo'lsa, u holda  $\{y_n\}$  ketma-ketlik ham yaqinlashuvchi va  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$  bo'ladi.

**Cheksiz kichik miqdor** – agar  $\{\alpha_n\}$  ketma-ketlikning limiti nolga teng, ya'ni  $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$  bo'lsa,  $\{\alpha_n\}$  – cheksiz kichik miqdor deyiladi.

**Cheksiz katta miqdor** – agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning limiti cheksiz bo'lsa, u cheksiz katta miqdor deyiladi.

## Keys banki

**7-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Agar  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ,  $a > 0$  bo'lsa, u holda  $\exists n_0 \in N$ ,  $\forall n > n_0$ :  $x_n > 0$  bo'lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).



# 7-amaliy mashg'ulot

## Na'muna uchun misollar yechimi

1-misol. «Ikki mirshab haqidagi teorema»dan foydalanib  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligi ko'rsatilsin.

$$x_n = \left( \frac{2n+3}{n^2} \right)^n$$

$$\triangleleft \frac{2n+3}{n^2} \leq \frac{2n+3n}{n^2} = \frac{5n}{n^2} = \frac{5}{n} \leq \frac{1}{2}, \text{ agar } n \geq 10 \text{ bo'lsa,}$$

$$\frac{2n+3}{n^2} \geq \frac{2+3}{n^2} = \frac{5}{n^2} \geq \frac{1}{20} \text{ agar } n \geq 10 \text{ bo'lsa.}$$

Agar  $y_n = \frac{1}{20^n}$  va  $z_n = \frac{1}{2^n}$  deb belgilasak, unda  $\forall n \geq 10$  uchun  $y_n \leq x_n \leq z_n$  qo'sh tengsizlik bajariladi.  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$  va «ikki mirshab haqidagi teorema» ga ko'ra  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$  bo'ladi.  $\triangleright$

## Misollar

Cheksiz kichik ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlikka ko'paytmasi haqidagi teoremadan foydalanib  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

1.  $x_n = \frac{\operatorname{sgn}(\operatorname{tgn})}{n}$ .

2.  $x_n = \frac{1}{n(8 + \sin n)}$ .

3.  $x_n = \frac{1}{n^2 \cdot [2 + (-1)^n]}$ .

4.  $x_n = \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}}$ .

5.  $x_n = \frac{\sin \frac{\pi n}{4}}{n^2}$ .

6.  $x_n = \frac{\frac{n}{2} - \left[ \frac{n}{2} \right]}{\ln(n+1)}$ .

Qisman ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremadan foydalanib  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning uzoqlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

$$7. x_n = (0,5)^{(-1)^n n}.$$

$$8. x_n = 2^{(-1)^n n}.$$

$$9. x_n = \left[2 + (-1)^n\right]^n.$$

$$10. x_n = \sin \frac{\pi n}{2002}.$$

«Ikki mirshab haqidagi teorema» dan foydalanib  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning yaqinlashuvchiligi ko`rsatilsin.

$$11. x_n = \left(\frac{5}{n}\right)^n.$$

$$12. x_n = \left(\frac{n+10}{2n-1}\right)^n.$$

$$13. x_n = \frac{2^n}{(2n)!}.$$

$$14. x_n = \frac{-1 + \sqrt{n} + \sin n}{n}.$$

$$15. x_n = \left(\frac{2n+3}{n^2}\right)^n.$$

# Test

№	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Yaqinlashuchi ketma -ketlikni ko'rsating.	$x_n = \frac{2 + (-1)^n}{n}$	$x_n = \cos \frac{\pi n}{3}$	$x_n = n^{(-1)^n}$
2.	Yaqinlashuchi bo'lmagan ketma -ketlikni ko'rsating.	$x_n = n^{(-1)^n + 2}$	$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$x_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$
3.	Agar $\{\alpha_n\}$ ketma-ketlikning limiti nolga teng bo'lsa, $\{\alpha_n\}$ ... deyiladi.	cheksiz kichik miqdor	cheksiz katta miqdor	kichik miqdor
4.	Chegaralangan miqdor bilan cheksiz kichik miqdor ko'paytmasi ... bo'ladi	cheksiz kichik miqdor	cheksiz katta miqdor	kichik miqdor
5.	Cheksiz kichik miqdorni ko'rsating.	$x_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n$	$x_n = \sqrt{n^2 + 1} - n$	$x_n = \frac{(-1)^n}{n}$
6.	Cheksiz katta miqdorni ko'rsating.	$x_n = \lg(\lg n), (n \geq 2)$	$x_n = \frac{2n-3}{n^2}$	$x_n = \frac{n^2-1}{n^3}$
7.	Uzoqlashuvchi ketma -ketlikni ko'rsating	$x_n = n^2 \cos \frac{\pi n}{4}$	$x_n = \frac{2n-3}{n^2}$	$x_n = \frac{n^2-1}{n^3}$
8.	Ketma-ketlik limitini toping: $x_n = \sqrt{\frac{9n+1}{n}}$	3	1	0
9.	Ketma-ketlik limitini toping: $x_n = \sqrt[n]{2^n + 5^n}$	5	2	$\frac{1}{2}$
10.	Ketma-ketlik limitini toping: $x_n = \frac{2n^3 + 3 \cdot 2^n + \cos n}{2^n + \sin n}$	3	2	0

# 8-mavzu. Monoton ketma-ketliklar va ularning limiti

## 8-ma'ruza

### Reja

1. Monoton ketma-ketlik tushunchasi.
2. Monoton ketma-ketlikning limiti.
3. e soni.

#### 1. Monoton ketma-ketlik tushunchasi. [2, p.71]

Aytaylik,  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** Agar (1) ketma-ketlikda  $\forall n \in \mathbb{N}$  uchun  $x_n \leq x_{n+1}$  tengsizlik bajarilsa,  $\{x_n\}$  **o'suvchi ketma-ketlik** deyiladi. Agar (1) ketma-ketlikda  $\forall n \in \mathbb{N}$  uchun  $x_n < x_{n+1}$  tengsizlik bajarilsa,  $\{x_n\}$  **qat'iy o'suvchi ketma-ketlik** deyiladi.

**2-ta'rif.** Agar (1) ketma-ketlikda  $\forall n \in \mathbb{N}$  uchun  $x_n \geq x_{n+1}$  tengsizlik bajarilsa,  $\{x_n\}$  **kamayuvchi ketma-ketlik** deyiladi. Agar (1) ketma-ketlikda  $\forall n \in \mathbb{N}$  uchun  $x_n > x_{n+1}$  tengsizlik bajarilsa,  $\{x_n\}$  **qat'iy kamayuvchi ketma-ketlik** deyiladi.

**1-misol.** Ushbu

$$x_n = \frac{n+1}{n}: \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{4}{3}, \dots$$

ketma-ketlik qat'iy kamayuvchi ketma-ketlik bo'ladi.

◀ Haqiqatdan ham, berilgan ketma-ketlik uchun

$$x_n = \frac{n+1}{n}, \quad x_{n+1} = \frac{n+2}{n+1}$$

bo'lib,  $\forall n \in \mathbb{N}$  uchun

$$x_{n+1} - x_n = \frac{n+2}{n+1} - \frac{n+1}{n} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$$

bo'ladi. Unda  $x_{n+1} < x_n$  bo'lishi kelib chiqadi. ▶

Yuqoridagi ta'riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

1) agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik o'suvchi bo'lsa, u quyidan chegaralangan bo'ladi:

2) agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik kamayuvchi bo'lsa, u yuqoridan chegaralangan

bo'ladi.

O'suvchi hamda kamayuvchi ketma-ketliklar umumiy nom bilan monoton ketma-ketliklar deyiladi.

**2-misol.** Ushbu

$$x_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

ketma-ketlikning qat'iy o'suvchi ekanligi isbotlansin.

◀ Bu ketma-ketlikning  $n$  – hamda  $(n + 1)$  – hadlari uchun

$$x_n = \frac{n^2}{n^2 + 1} = 1 - \frac{1}{n^2 + 1},$$
$$x_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2 + 1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2 + 1}$$

bo'ladi. Ravshanki,

$$\frac{1}{(n+1)^2} < \frac{1}{n^2}.$$

SHu tengsizlikni e'tiborga olib, topamiz:

$$x_{n+1} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2 + 1} > 1 - \frac{1}{n^2 + 1} = x_n.$$

Demak,  $\forall n \in N$  uchun  $x_n < x_{n+1}$ . Bu esa qaralayotgan ketma-ketlikning qat'iy o'suvchi bo'lishini bildiradi. ▶

## 2. Monoton ketma-ketlikning limiti.

Quyida monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi teoremlarni keltiramiz.

**1-teorema.** [2, p.71, th.3.9] Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik

1) o'suvchi,

2) yuqoridan chegaralangan bo'lsa, u chekli limitga ega bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $\{x_n\}$  ketma-ketlik teoremaning ikkala shartlarini bajarsin.

Bu ketma-ketlikning barcha hadlari-dan iborat to'plamni  $E$  bilan belgilaymiz:

$$E = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}.$$

Ravshanki,  $E$  yuqoridan chegaralangan to'plam bo'lib,  $E \neq \emptyset$ . Unda to'plamning aniq chegarasining mavjudligi haqidagi teorema muvofiq,  $\sup E$  mavjud bo'ladi. Uni  $a$  bilan belgilaylik:

$$\sup E = a.$$

Ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  sonini olaylik. To'plamning aniq yuqori chegarasi ta'rifiga binoan:

1)  $\forall n \in N$  uchun  $x_n \leq a$

2)  $\exists x_{n_0} \in E, \quad x_{n_0} > a - \varepsilon$

bo'ladi. Ayni paytda  $\forall n > n_0$  uchun  $x_n \geq x_{n_0}$  tengsizlik bajari-lib,  $x_n > a - \varepsilon$

bo‘ladi.

Natijada  $\forall n > n_0$  uchun  $a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon$  ya'ni  $|a - x_n| < \varepsilon$  bo‘li-shini topamiz.

Demak  $\{x_n\}$  ketma-ketlik chekli limitga ega va

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \sup E. \blacktriangleright$$

**2-teorema.** Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik

1) kamayuvchi,

2) quyidan chegaralangan bo‘lsa, u chekli limitga ega bo‘ladi.

Bu teorema yuqorida keltirilgan teoremaning isboti kabi isbotlanadi.

**3-misol.** Ushbu

$$x_n = \frac{n!}{n^n}$$

ketma-ketlikning limiti topilsin.

◀ Ravshanki,  $\forall n \geq 1$  uchun  $x_n > 0$  bo‘ladi. Bu ketma-ketlikning  $x_{n+1}$  va  $x_n$  hadlarining nisbatini qaraymiz:

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{n+1}{(n+1)^{n+1}} \cdot n^n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n < 1.$$

Demak,  $x_{n+1} < x_n$ . Bundan esa berilgan ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi.

Ayni paytda  $\forall n \geq 1$  da

$$0 < x_n \leq x_1$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi. Demak berilgan ketma-ketlik chegaralangan. 1-teoremaga ko‘ra  $\{x_n\}$  ketma-ketlik chekli limitga ega. Uni  $a$  bilan belgilaymiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = a. \quad (a \geq 0)$$

Endi ushbu  $x_n - x_{n+1}$  ayirmani qaraymiz. Bu ayirma uchun

$$\begin{aligned} x_n - x_{n+1} &= x_n - x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_n \frac{(n+1)^n - n^n}{(n+1)^n} \geq \\ &\geq x_n \cdot \frac{2n^n - n^n}{(n+1)^n} = x_n \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n} = x_{n+1} \end{aligned}$$

bo‘lib, undan

$$x_n \geq 2x_{n+1}$$

bo‘lishi kelib chiqadi. Keyingi munosabatlardan topamiz:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n \geq 2 \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1}, \quad a \geq 2a. \text{ Ravshanki, bu holda } a = 0 \text{ bo‘ladi.}$$

Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0. \blacktriangleright$$

### 3. e soni. [2, p.72]

Ushbu

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

ketma-ketlikni qaraymiz.

**Tasdiq.** (1) ketma-ketlik o'suvchi bo'ladi.

◀ Berilgan ketma-ketlikning  $x_{n+1}$  hamda  $x_n$  hadlarining nisbatini topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{x_{n+1}}{x_n} &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} : \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \frac{(n+2)^{n+1} \cdot n^n}{(n+1)^{n+1} \cdot (n+1)^n} = \\ &= \left[\frac{n^2 + 2n}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n}. \end{aligned}$$

Bernulli tengsizligiga ko'ra:

$$\left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^{n+1} > 1 - \frac{n+1}{(n+1)^2} = \frac{n}{n+1} \text{ bo'ladi.}$$

Natijada  $\forall n \in N$  uchun

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} > \frac{n}{n+1} \cdot \frac{n+1}{n} = 1$$

ya'ni,  $x_{n+1} > x_n$  bo'lishi kelib chiqadi. ▶

**Tasdiq.** (1) ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi.

◀ Ravshanki,  $k \geq 1$  uchun

$$k! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (k-1) \cdot k \geq 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots \cdot 2 = 2^{k-1}$$

bo'ladi.

Endi Nyuton binomi formulasidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned}
x_n &= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + C_n^1 \cdot \frac{1}{n} + C_n^2 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots + C_n^k \cdot \frac{1}{n^k} + \dots + C_n^n \cdot \frac{1}{n^n} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{n^k} C_n^k = \\
&= 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k!} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(\frac{n-1}{n}\right) \leq \\
&\leq 2 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 3 - \frac{1}{2^{n-1}} < 3
\end{aligned}$$

Demak,  $\forall n \in \mathbb{N}$  uchun  $0 < x_n < 3$  bo'ladi.

Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teorema ko'ra

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

ketma-ketlik chekli limitga ega. ►

**3-ta'rif.** (1) ketma-ketlikning limiti  $e$  soni deyiladi:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$$

Bu  $e$  soni irratsional son bo'lib,

$$e = 2,7182818284 59045 \dots$$

bo'ladi.

### Mashqlar

1. Ushbu  $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$  ketma-ketlikning kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

2. Ushbu  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{2^n}$  limit hisoblansin.

3. Ushbu  $\sqrt{2}$ ,  $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ,  $\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}$ , ... ketma-ketlikning yaqinlashuvchanligi isbotlansin va limiti topilsin.

### Adabiyotlar

1. Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A. *Matematik analizdan ma'rizalar*, I q. T. "Voris-nashriyot", 2010.
2. Canuto C., Tabacco A. *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. Fixtengols G. M. *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya*, 1 t. M. «FIZMATLIT», 2001.
4. Tao T. *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.

### Nazorat savollari



4. (Qat'iy) o'suvchi (kamayuvchi) ketma-ketliklar ta'riflarini bering?
5. Monoton ketma-ketliklarning limiti haqidagi teoremlarni keltiring.
6.  $e$  soni qanday son?

# Glossariy

**Monoton ketma-ketlik** – O‘svuchi hamda kamayuvchi ketma-ketliklar

**O‘svuchi ketma-ketlik** – Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlikda  $\forall n \in N$  uchun  $x_n \leq x_{n+1}$  tengsizlik bajarilsa.

**Qat’iy o‘svuchi ketma-ketlik** – Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlikda  $\forall n \in N$  uchun  $x_n < x_{n+1}$  tengsizlik bajarilsa.

**Kamayuvchi ketma-ketlik** – Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlikda  $\forall n \in N$  uchun  $x_n \geq x_{n+1}$  tengsizlik bajarilsa.

**Qat’iy kamayuvchi ketma-ketlik** – Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlikda  $\forall n \in N$  uchun  $x_n > x_{n+1}$  tengsizlik bajarilsa.

**Quyidan chegaralangan ketma-ketlik** – Agar shunday  $n$  soni mavjud bo‘lib,  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan katta bo‘lsa.

**Yuqoridan chegaralangan ketma-ketlik** – Agar shunday  $n$  soni mavjud bo‘lib,  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning har bir hadi shu sondan kichik bo‘lsa.

$$e \text{ soni} - \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

# Keys banki

**8-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, \dots$$

ketma-ketlikning yaqinlashuvchanligi isbotlansin va limiti topilsin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

# 8-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

**21-masala. Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teorema yoki limitlar ustidagi amallar haqidagi teoremlardan foydalanib  $\{x_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashishga tekshirilsin.**

◁ Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teoremdan foydalanib, berilgan  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning yaqinlashuvchi ekanligini ko'rsatamiz.

$$x_{n+1} = x_n + \frac{1}{(n+1)!} > x_n \Rightarrow \{x_n\} \uparrow.$$

Endi bu ketma-ketlikning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz:

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots + \frac{1}{n!} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < \\ &< 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} \dots + \frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \end{aligned}$$

Shunday qilib,  $\{x_n\} \uparrow$  va  $\forall n \in \mathbb{N}$  uchun  $x_n \leq 2 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n - \exists \Rightarrow \{x_n\}$  - yaqinlashuvchi ▷

## Misollar

**Monoton ketma-ketlikning limiti haqidagi teorema yoki limitlar ustidagi amallar haqidagi teoremlardan foydalanib  $\{x_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashishga tekshirilsin.**

1.  $x_n = n^{(-1)^n} + \frac{\text{sgn}(\text{tgn})}{n}$ .

2.  $x_n = \frac{1}{n} - \frac{\frac{n}{2} - \left[ \frac{n}{2} \right]}{\ln(n+1)}$ .

3.  $x_n = \frac{n^2 + n}{n - n^2}$ .

4.  $x_n = (-1)^n \cdot \left( 1 + \frac{\cos \pi n}{\sqrt{n}} \right)$ .

5.  $x_n = \frac{n + \sin\left(\frac{\pi n}{4}\right)}{n^2}$ .

6.  $x_n = \frac{n+1}{n^2 \cdot (8 + \sin n)}$ .

7.

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

.

9.

$$x_n = \frac{\sin \alpha}{2} + \frac{\sin 2\alpha}{2^2} + \dots + \frac{\sin n\alpha}{2^n}.$$

$$11. x_n = \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} + \dots + \frac{n}{(n+1)^2}.$$

$$13. x_n = \frac{n!}{n^n}.$$

$$15. x_n = \cos 1 + \frac{\cos 2}{2^2} + \dots + \frac{\cos n}{n^2}.$$

$$17. x_n = \frac{\lg n}{n}.$$

$$19. x_n = 0,77\dots7_{n \text{ TT}}.$$

$$21. x_n = 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}.$$

8.

$$x_n = \left(1 - \frac{1}{\lg 11}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{\lg 12}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 - \frac{1}{\lg(10+n)}\right)$$

.

$$10. x_n = \frac{|\sin 1|}{2} + \frac{|\sin 2|}{2^2} + \dots + \frac{|\sin n|}{2^n}.$$

$$12. x_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

$$14. x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$16. x_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

$$18. x_n = \frac{2^n}{n!}.$$

$$20. x_n = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n(n+1)}.$$

## Test

1. Ushbu  $x_n = \frac{n!}{n^n}$  ketma-ketlikning limiti topilsin.  
A) 0      B) 1      C)  $\infty$       D) aniqlab bo'lmaydi
2.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2n^2 - 1}{3n^2 + 5n + 2}$  limitni hisoblang.  
A)  $\frac{2}{3}$       B) 1      C) 0      D)  $\infty$
3.  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 - 3n}{3n^2 + 4n + 7}$  limitni hisoblang.  
A)  $\frac{1}{3}$       B) 2      C) 0      D) 1
4.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{2n^2 + 1}}{5n - 1}$  limitni hisoblang.  
A)  $\frac{\sqrt{2}}{5}$       B)  $\frac{2}{5}$       C) 0      D)  $\infty$
5.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4n^2 + 25}}{7n + 61}$  limitni hisoblang.  
A)  $\frac{2}{7}$       B)  $\frac{2}{5}$       C) 0      D) 1
6.  $\lim_{n \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{8n^3 - 1}{6n^2 - 5n + 1}$  limitni hisoblang.  
A) -4      B) 0      C) 1      D)  $\infty$
7.  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tgn}}{n}$  limitni hisoblang.  
A) 1      B) 0      C) 2      D)  $\infty$
8.  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sin n}{n}$  limitni hisoblang.  
A) 1      B) 2      C) 0      D)  $\infty$
9.  $\lim_{n \rightarrow 0} \frac{2^n - 1}{n}$  limitni hisoblang.  
A)  $\ln 2$       B) 0      C) 1      D)  $\infty$
10.  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left( e^{\frac{1}{n}} - 1 \right)$  limitni hisoblang.  
A) 1      B) 0      C) 2      D)  $\infty$

## 9-mavzu. Qismaniy va fundamental

# ketma-ketliklar. Ketma-ketliklarning quyi hamda yuqori limitlari

## 9-ma'ruza

### Reja

1. Qisman ketma-ketliklar. Boltsano–Veyershtrass teoremasi.
2. Fundamental ketma-ketliklar. Koshi teoremasi.
3. Ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari.

#### 1. Qisman ketma-ketliklar. Boltsano–Veyershtrass teoremasi.

[1, p.149] Aytaylik,

$$\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots \quad (1)$$

ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu (1) ketma-ketlikning biror  $n_1$  nomerli  $x_{n_1}$  hadini olamiz. So'ngra nomeri  $n_1$  dan katta bo'lgan  $n_2$  nomerli  $x_{n_2}$  hadini olamiz. SHu usul bilan  $x_{n_3}, x_{n_4}$  va h.k. hadlarni tanlab olamiz. Natijada nomerlari

$$n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$$

tengsizliklarni qanoatlantiruvchi (1) ketma-ketlikning hadlari ushbu

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots \quad (2)$$

ketma-ketlikni hosil qiladi.

(2) ketma-ketlik (1) ketma-ketlikning qisman ketma-ketligi deyiladi va  $\{x_{n_k}\}$  kabi belgilanadi.

Masalan,

$$2, 4, 6, 8, \dots,$$

$$1, 3, 5, 7, \dots,$$

$$1, 4, 9, 16, \dots$$

ketma-ketliklar  $1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots$  ketma-ketlikning qisman ketma-ketliklari,

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots,$$

$$-1, -1, \dots, -1, \dots$$

ketma-ketliklar  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$  ketma-ketlikning qisman ketma-ketliklari bo'ladi.

Keltirilgan tushuncha va misollardan bitta ketma-ketlikning turli qisman ketma-ketliklari bo'lishi mumkinligi ko'rinadi.

**1-teorema.** [1, p.150, prop.6.6.5] Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik limitga ega

bo'lsa, uning har qanday qisman ketma-ketligi ham shu limitga ega bo'ladi.

◀ Bu teoremaning isboti ketma-ketlik limiti ta'rifidan kelib chiqadi. ▶

**Eslatma.** Ketma-ketlik qisman ketma-ketliklarining limiti mavjud bo'lishidan berilgan ketma-ketlikning limiti mavjud bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi.

Masalan,  $1, -1, 1, -1, \dots, (-1)^{n+1}, \dots$  ketma-ketlikning qisman ketma-ketliklari

$$1, 1, 1, \dots, 1, \dots,$$

$$-1, -1, \dots, -1, \dots$$

larning limiti bo'lgan holda ketma-ketlikning o'zining limiti mavjud emas.

**2-teorema (Boltsano–Veyershtross teoremasi).** [1, p.151, theorem 6.6.8] Har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan chekli songa intiluvchi qisman ketma-ketlik ajratish mumkin.

◀  $\{x_n\}$  ketma-ketlik berilgan bo'lib, u chegaralangan bo'lsin: Bu holda  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning barcha hadlari  $[a, b]$  da joylashgan deb qarash mumkin:  $x_n \in [a, b], n = 1, 2, 3, \dots$

$[a, b]$  segmentni

$$\left[ a, \frac{a+b}{2} \right], \left[ \frac{a+b}{2}, b \right]$$

segmentlarga ajratamiz.  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning cheksiz ko'p hadlari joylashganini  $[a_1, b_1]$  deymiz. Ravshanki,  $[a_1, b_1]$  ning uzunligi  $\frac{b-a}{2}$  ga teng bo'ladi. Yuqoridagiga o'xshash  $[a_1, b_1]$  segmentni

$$\left[ a_1, \frac{a_1+b_1}{2} \right], \left[ \frac{a_1+b_1}{2}, b_1 \right]$$

segmentlarga ajratamiz. Berilgan ketma-ketlikning cheksiz ko'p sondagi hadlari bo'lganini  $[a_2, b_2]$  deymiz. Bunda  $[a_2, b_2]$  ning uzunligi  $\frac{b-a}{2^2}$  ga teng bo'ladi.

Bu jarayonni davom ettirish natijasida ushbu

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \dots, [a_k, b_k], \dots$$

segmentlar ketma-ketligi hosil bo'ladi. Bu segmentlar ketma-ketligi uchun

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \dots \supset [a_k, b_k] \supset \dots \text{ bo'lib, } k \rightarrow \infty \text{ da}$$

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k} \rightarrow 0$$

bo'ladi.

Ichma-ich joylashgan segmentlar prinsipiga ko'ra

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_k = \lim_{k \rightarrow \infty} b_k = C \quad (C \in \mathbb{R})$$

bo'ladi.

Endi  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning  $[a_1, b_1]$  dagi birorta  $x_{n_1}$  hadini,  $[a_2, b_2]$



dagi birorta  $x_{n_2}$  hadini va h.k.  $[a_k, b_k]$  dagi birorta  $x_{n_k}$  hadini va h.k. hadlarini olamiz. Natijada  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning hadlaridan tashkil topgan ushbu

$$x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots)$$

qisman ketma-ketlik hosil bo'ladi. Bu ketma-ketlik uchun

$$a_k \leq x_{n_k} \leq b_k \quad (k=1, 2, \dots)$$

bo'lib, undan  $k \rightarrow \infty$  da  $x_{n_k} \rightarrow C$  ya'ni  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = C$  bo'lishi kelib chiqadi.



## 2. Fundamental ketma-ketliklar. Koshi teoremasi.

$\{x_n\}$  ketma-ketlik berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** [1, p.127, definition 6.1.3] Agar har qanday  $\varepsilon > 0$  olinganda ham shunday natural  $n_0$  soni topilsaki, barcha  $n > n_0$  va  $m > n_0$  uchun

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa (ya'ni  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall m > n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon$  bo'lsa),  $\{x_n\}$  fundamental ketma-ketlik deyiladi.

Masalan,

$$x_n = \frac{n}{n+1} \quad (n=1, 2, \dots)$$

fundamental ketma-ketlik bo'ladi.

◀ Haqiqatdan ham, berilgan ketma-ketlik uchun

$$|x_n - x_m| = \left| \frac{n}{n+1} - \frac{m}{m+1} \right| < \frac{n+m}{nm} = \frac{1}{n} + \frac{1}{m}$$

bo'lib,  $\forall \varepsilon > 0$  ga ko'ra  $n_0 = \left[ \frac{2}{\varepsilon} \right] + 1$  deyilsa,  $\forall n > n_0, \forall m > n_0$  bo'lganda

$$|x_n - x_m| < \frac{1}{n_0} + \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

bo'ladi. ►

**3-teorema. (Koshi teoremasi).** [1, p.130, proposition 6.1.12, theorem 6.4.18] Ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.**  $\{x_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashuvchi bo'lib,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  bo'lsin.

Limit ta'rifiga binoan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : |x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Shuningdek,  $\forall m > n_0 : |x_m - a| < \frac{\varepsilon}{2}$  bo'ladi. Natijada

$\forall n > n_0, \forall m > n_0$  uchun

$$|x_n - x_m| = |x_n - a + a - x_m| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,  $\{x_n\}$  fundamental ketma-ketlik.

**Yetarliligi.**  $\{x_n\}$  fundamental ketma-ketlik bo'lsin:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall m > n_0: |x_n - x_m| < \varepsilon.$$

Agar  $m > n_0$  shartni qanoatlantiruvchi  $m$  tayinlansa, unda

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \Leftrightarrow x_m - \varepsilon < x_n < x_m + \varepsilon$$

bo'lib,  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning chegaralanganligi kelib chiqadi.

Bolsano-Veyershrass teoremasiga binoan bu ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismaniy  $\{x_{n_k}\}$  ketma-ketlikni ajratish mumkin:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$ .

Demak,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N}, \forall k > k_0: |x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Agar  $m = n_k$  deyilsa, unda

$$|x_n - x_{n_k}| < \varepsilon$$

bo'ladi. Keyingi ikki tengsizliklardan

$$|x_n - a| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - a| \leq |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - a| < 2\varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ . ►

### 3. Ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari.

$\{x_n\}$  ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning qismaniy ketma-ketligining limiti  $\{x_n\}$  ning qismaniy limiti deyiladi.

**2-ta'rif.** [1, p.6.4.6, *definition 6.4.6*]  $\{x_n\}$  ketma-ketlik qismaniy limitlarining eng kattasi berilgan **ketma-ketlikning yuqori limiti** deyiladi va

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

kabi belgilanadi.

$\{x_n\}$  ketma-ketlik qismaniy limitlarining eng kichigi berilgan **ketma-ketlikning quyi limiti** deyiladi va

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

kabi belgilanadi.

Masalan, ushbu  $\{x_n\}: 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots$  ketma-ketlikning yuqori limiti

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 3,$$

quyi limiti esa

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$$

bo'ladi. Umuman,  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari quyidagicha ham kiritilishi mumkin.

Aytaylik,  $\{x_n\}$  ketma-ketlik berilgan bo'lib,  $A$  bu ketma-ketlikning qismaniy limitlaridan iborat to'plam bo'lsin. Unda bu ketma-ketlikning quyi limitini

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} x_n &= \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \\ &= \begin{cases} -\infty; & \{x_n\} \text{ quyidan chegaralanmagan bo'lsa,} \\ \inf A; & \{x_n\} \text{ quyidan chegaralangan va } A \neq \{+\infty\}, \\ +\infty; & A = \{+\infty\} \text{ bo'lsa} \end{cases} \end{aligned}$$

deb olish mumkin.

$\{x_n\}$  ketma-ketlikning yuqori limitini esa

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n &= \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \\ &= \begin{cases} +\infty; & \{x_n\} \text{ yuqoridan chegaralanmagan bo'lsa,} \\ \sup A; & \{x_n\} \text{ yuqoridan chegaralangan va } A \neq \{-\infty\} \text{ bo'lsa,} \\ -\infty; & A = \{-\infty\} \text{ bo'lsa} \end{cases} \end{aligned}$$

deb qarash mumkin.

Endi quyi hamda yuqori limitlarning xossalarini keltiramiz.

Biror  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  bo'lsin. U holda  $\forall \varepsilon > 0$

olinganda ham:

- 1) shunday  $n_0 \in \mathbb{N}$  topiladiki,  $\forall n > n_0$  da  $x_n < a + \varepsilon$
- 2)  $\forall n_1 \in \mathbb{N}$  uchun  $\varepsilon$  va  $n_1$  larga bo'g'liq shunday  $n' > n_1$  topiladiki,  $x_{n'} > a - \varepsilon$  bo'ladi.

Bu xossalar quyidagilarni anglatadi:  $\forall \varepsilon > 0$  tayin olganda, birinchi xossa  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning faqatgina chekli sondagi hadlarigina

$$x_n < a + \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantirishini, ikkinchi xossa esa bu ketma-ketlikning

$$x_n > a - \varepsilon$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi hadlarining soni cheksiz ko'p bo'lishini ifodalaydi.

◀ Agar  $\{x_n\}$  ning cheksiz ko'p sondagi hadlari  $a + \varepsilon$  dan katta bo'lsa, u holda  $a + \varepsilon$  sonidan kichik bo'lmagan  $b$  ( $b \geq a + \varepsilon$ ) ga intiluvchi  $\{x_n\}$  ketma-

ketlikning qismaniy ketma-ketligi mavjud va bu  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$  ga zid.

Demak,  $a + \varepsilon$  dan o'ngda ketma-ketlikning ko'pi bilan chekli sondagi hadlari yotadi.

Modomiki,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

ekan, unda  $\{x_n\}$  ning qismaniy limitlaridan biri  $a$  ga teng:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} x_{n_k} = a$$

Limit ta'rifiga ko'ra bu  $\{x_{n_k}\}$  ketma-ketlikning, demak,  $\{x_n\}$  ning ham cheksiz ko'p sondagi hadlari  $a - \varepsilon$  dan katta bo'ladi. ►

**Eslatma.** Biror  $a$  soni yuqoridagi ikki shartni qanoatlantirsa, u  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning yuqori limiti bo'ladi.

Faraz qilaylik, biror  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = b$$

bo'lsin. U holda  $\forall \varepsilon > 0$  olinganda ham:

1') shunday  $n_0 \in \mathbb{N}$  topiladiki,  $\forall n > n_0$  da  $x_n > b - \varepsilon$

2')  $\forall n_1 \in \mathbb{N}$  uchun  $\varepsilon$  va  $n_1$  larga bo'liq shunday  $n' > n_1$  topiladiki,  $x_{n'} < b + \varepsilon$  bo'ladi.

Quyidagi limitning bu xossasi yuqoridagidek isbotlanadi.

Ketma-ketlikning quyi hamda yuqori limitlari xossalariidan foydalanib, quyidagi teoremani isbotlash qiyin emas:

**4-teorema.** [1, p.142, proposition 6.4.12]  $\{x_n\}$  ketma-ketlik  $C$  limitga ega bo'lishi uchun

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = C$$

bo'lishi zarur va etarlidir.

## Mashqlar

1. Har qanday monoton ketma-ketlik faqat bitta qismaniy limitga ega bo'lishi isbotlansin.

2. Koshi teoremasidan foydalanib, ushbu

$$x_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

ketma-ketlikning ( $a_k \in \mathbb{R}$ ,  $|a_k| \leq q^k$ ;  $0 < q < 1$ ;  $k = 1, 2, \dots$ ) limitga ega bo'lishi isbotlansin.

3. Ushbu

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

tengsizlik isbotlansin.

### **Adabiyotlar**

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*, Springer-Verlag Italia, Milan, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

### **Nazorat savollari**

1. Qisman ketma-ketlik nima? Misollar keltiring.
2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning ikkita qisman ketma-ketligi turli limitlarga ega bo'lishi mumkinmi?
3. Boltsano–Veyershtrass teoremasini keltiring.
4. Fundamental ketma-ketlik nima?
5. Koshi teoremasini ayting.
6. Ketma-ketlikning yuqori hamda quyi limitlari nima? Xossalari ayting.

# Glossariy

**Qismaniy ketma-ketlik** – Aytaylik,  $\{x_n\}: x_1, x_2, x_3, \dots, x_n, \dots$  ketma-ketlik berilgan bo'lsin. Bu ketma-ketlikning biror  $n_1$  nomerli  $x_{n_1}$  hadini olamiz. So'ngra nomeri  $n_1$  dan katta bo'lgan  $n_2$  nomerli  $x_{n_2}$  hadini olamiz. Shu usul bilan  $x_{n_3}, x_{n_4}$  va h.k. hadlarni tanlab olamiz. Natijada nomerlari  $n_1 < n_2 < n_3 < \dots < n_k < \dots$  tengsizliklarni qanoatlantiruvchi berilgan ketma-ketlikning hadlari ushbu  $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$  ketma-ketlikni hosil qiladi. Hosil bo'lgan ketma-ketlik berilgan ketma-ketlikning qismaniy ketma-ketligi deyiladi.

**Boltsano–Veyershtross teoremasi** – har qanday chegaralangan ketma-ketlikdan chekli songa intiluvchi qismaniy ketma-ketlik ajratish mumkin.

**Fundamental ketma-ketlik** – agar har qanday  $\varepsilon > 0$  olinganda ham shunday natural  $n_0$  soni topilsaki, barcha  $n > n_0$  va  $m > n_0$  uchun  $|x_n - x_m| < \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa (ya'ni  $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0, \forall m > n_0: |x_n - x_m| < \varepsilon$  bo'lsa),  $\{x_n\}$  fundamental ketma-ketlik deyiladi.

**Koshi teoremasi** – ketma-ketlikning yaqinlashuvchi bo'lishi uchun uning fundamental bo'lishi zarur va etarli.

**Ketma-ketlikning yuqori limiti** –  $\{x_n\}$  ketma-ketlik qismaniy limitlarining eng kattasi berilgan ketma-ketlikning yuqori limiti deyiladi.

**Ketma-ketlikning quyi limiti** –  $\{x_n\}$  ketma-ketlik qismaniy limitlarining eng kichigi berilgan ketma-ketlikning quyi limiti.

# Keys banki

**9-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Har qanday monoton ketma-ketlik faqat bitta qismaniy limitga ega bo`lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

# 9-amaliy mashg'ulot

## Na'muna uchun misollar yechimi

1-misol.  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning yuqori va quyi limitlari topilsin  
 $\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - ?, \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - ?\right)$ .

$$x_n = \sin n^0$$

◁ Berilgan ketma-ketlikning qiymatlari to'plamida

$$0, \pm \sin 1^0, \pm \sin 2^0, \dots, \pm \sin 89^0, \pm 1$$

sonlari cheksiz ko'p uchraydi, chunki  $\forall n \in \mathbb{N}$  va  $\forall p \in \mathbb{N}$  uchun keltirish formulasiga ko'ra  $\sin n^0 = \sin(360^0 p + n^0)$  va  $\sin(180^0 \pm n^0) = \mp \sin n^0$ .

Demak, yuqoridagi sonlarning har biri berilgan ketma-ketlikning qismaniy limiti bo'ladi. Shu bilan birgalikda  $\{x_n\}$  ketma-ketlikning yuqorida ko'rsatilgan 181 ta sondan boshqa qismaniy limiti yo'q.  $\Rightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$  va

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = -1 \triangleright$$

### Misollar

Quyidagi ketma-ketliklarning yuqori hamda quyi limitlari topilsin

$$\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - ?; \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n - ?\right)$$

$$539. x_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$540. x_n = n^{(-1)^n}$$

$$541. x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

$$542. x_n = 1 + \frac{n}{n+1} \cdot \cos^2 \frac{n\pi}{2}$$

$$543. x_n = 1 + 2 \cdot (-1)^{n+1} + 3 \cdot (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$544. x_n = \frac{n-1}{n+1} \cdot \cos \frac{2n\pi}{3}$$

$$545. x_n = -n \cdot \left[2 + (-1)^n\right]$$

$$546. x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (-1)^n + \sin \frac{n\pi}{4}$$

$$547. x_n = \sqrt[n]{1 + 2^{n(-1)^n}}$$

$$548. x_n = \cos^n \frac{2n\pi}{3}$$

Quyidagi ketma-ketliklarning qismaniy limitlari topilsin.

$$549. \{x_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{7}{8}, \dots, \frac{1}{2^n}, \frac{2^n - 1}{2^n}, \dots$$

$$550. \{x_n\}: 1, \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{4}, \frac{1}{2} + \frac{1}{4}, \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots, \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, \frac{1}{2} +$$



$$+\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \dots$$

$$551. \{x_n\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \dots$$

$$552. x_n = \frac{1}{2} \left[ (a+b) + (-1)^n \cdot (a-b) \right]$$

553. Qismaniy limitlari ushbu

$$a_1, a_2, \dots, a_p$$

sonlarga teng bo'lgan sonli ketma-ketlikka misol keltirilsin.

554. Qismaniy limitlari ushbu

$$a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

ketma-ketlikning barcha hadlariga teng bo'lgan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

555. Chekli qismaniy limitga ega bo'lmagan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

556. Yaqinlashuvchi bo'lmagan, lekin yagona qismaniy limitga ega bo'lgan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

557. Cheksiz ko'p qismaniy limitga ega bo'lgan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

558.  $[1; 2]$  kesmadagi ixtiyoriy haqiqiy son qismaniy limiti bo'lgan ketma-ketlikka misol keltirilsin.

559. Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik yaqinlashuvchi va  $\{y_n\}$  ketma-ketlik uzoqlashuvchi bo'lsa, unda

$$\text{a) } \{x_n + y_n\} \quad \text{b) } \{x_n \cdot y_n\}$$

ketma-ketlikning yaqinlashishi haqida nima deyish mumkin?

560. Agar  $\{x_n\}$  va  $\{y_n\}$  ketma-ketliklar uzoqlashuvchi bo'lsa, unda

$$\text{a) } \{x_n + y_n\} \quad \text{b) } \{x_n \cdot y_n\}$$

ketma-ketliklar uzoqlashuvchi bo'ladimi?

561. Agar  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$$

bo'lib,  $\{y_n\}$  – ixtiyoriy ketma-ketlik bo'lsa,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$$

tenglik o'rinli bo'ladimi?

562. Agar

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) = 0$$

bo'lsa, unda

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0 \text{ ёки } \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = 0$$

tengliklardan biri o'rinli bo'ladimi?

**Quyidagi munosabatlar isbotlansin.**

$$563. \lim x_n = a \Leftrightarrow \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n = a$$

$$564. \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (-x_n) = -\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n$$

$$565. \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

$$566. \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

567. Agar  $x_n \geq 0$  va  $y_n \geq 0$  ( $n \geq 1, 2, \dots$ ) bo'lsa,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (x_n \cdot y_n) \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} x_n \cdot \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} y_n$$

bo'ladi.

## Test

No	Test topshirig'i	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$x_n$ ketma-ketlik uchun yuqori limit hisoblansin: $x_n = \cos \frac{\pi n}{3}$	1	2	0	-1
2.	$x_n$ ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = (-1)^n \frac{2n+1}{n}$	-2	0	2	1
3.	$x_n$ ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = (1,5 \cos \frac{2\pi n}{3})^n$	0	1	$\infty$	-1
4.	$x_n$ ketma-ketlik uchun yuqori limit hisoblansin: $x_n = (-1)^n \frac{3n-1}{n+2}$	3	0	-1	$\infty$
5.	$x_n$ ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1+(-1)^n}{2}$	0	1	-1	2
6.	$x_n$ ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = (\cos(\pi n / 2))^{n+1}$	-1	0	2	1
7.	$x_n$ ketma-ketlik uchun yuqori limit hisoblansin: $x_n = \frac{1+(-1)^n n}{n}$	1	-1	0	2
8.	$x_n$ ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = (-n)^{\sin(\pi n/2)}$	$-\infty$	1	0	-1

9.	$x_n$ ketma-ketlik uchun yuqori limit hisoblansin: $x_n = \frac{1}{n} + \sin \frac{\pi n}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	0	1	-1
10.	$x_n$ ketma-ketlik uchun quyi limit hisoblansin: $x_n = \frac{(1 - (-1)^n)2^n + 1}{2^n + 3}$	0	1	-1	$\infty$

# 10-mavzu. Funksiya tushunchasi

## 10-ma'ruza

### Reja

1. Funksiya ta'rifi, berilish usullari.
2. Funksiyaning chegaralanganligi. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar.
3. Monton funksiyalar. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar.

### 1. Funksiya ta'rifi, berilish usullari.

Biz 2-ma'ruzada  $E$  to'plamni  $F$  to'plamga akslantirish

$$f: E \rightarrow F$$

ni o'rgangan edik.

Endi  $E = F$ ,  $F = R$  deb olamiz. Unda har bir haqiqiy  $x$  songa biror haqiqiy  $y$  sonni mos qo'yuvchi

$$f: F \rightarrow R \quad (x \rightarrow y)$$

akslantirishga kelamiz. Bu esa funksiya tushunchasiga olib keladi.

Funksiya tushunchasi o'quvchiga o'rta maktab matematika kursidan ma'lum. Shuni e'tiborga olib funksiya haqidagi dastlabki ma'lumotlarni qisqaroq bayon etishni lozim topdik.

Aytaylik,  $X \subset R$ ,  $Y \subset R$  to'plamlar berilgan bo'lib,  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar mos ravishda shu to'plamlarda o'zgarsin:  $x \in X$ ,  $y \in Y$ .

**1-ta'rif.** [1, p. 49, Def. 3.3.1] Agar  $X$  to'plamdagi har bir  $x$  songa biror  $f$  qoidaga ko'ra  $Y$  to'plamdan bitta  $y$  son mos qo'yilgan bo'lsa,  $X$  to'plamda **funksiya berilgan (aniqlangan)** deyiladi va

$$f: x \rightarrow y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi. Bunda  $X$  – **funksiyaning aniqlanish to'plami (cohasi)**,  $Y$  – **funksiyaning o'zgarish to'plami (cohasi)** deyiladi.  $x$  – **erkli o'zgaruvchi** yoki **funksiya argumenti**,  $y$  esa **erksiz o'zgaruvchi** yoki **funksiya** deyiladi.

**Misollar. 1.**  $X = (-\infty, +\infty)$ ,  $Y = (0, +\infty)$  bo'lib,  $f$  qoida

$$f: x \rightarrow y = x^2 + 1$$

bo'lsin. Bu holda har bir  $x \in X$  ga bitta  $x^2 + 1 \in Y$  mos qo'yilib,

$$y = x^2 + 1$$

funksiyaga ega bo'lamiz.

**2.** Har bir ratsional songa 1 ni, har bir irratsional songa 0 ni mos qo'yish

natijasida funksiya hosil bo‘ladi. Odatda, bu **Dirixle funksiyasi** deyilib, u  $D(x)$  kabi belgilanadi:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } y \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

Shunday qilib,  $y = f(x)$  funksiya uchta:  $X$  to‘plam,  $Y$  to‘plam va har bir  $x \in X$  ga bitta  $y \in Y$  ni mos qo‘yuvchi  $f$  qoidaning berilishi bilan aniqlanar ekan.

Faraz qilaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to‘plamda berilgan bo‘lsin.  $x_0 \in X$  nuqtaga mos keluvchi  $y_0$  miqdor  $y = f(x)$  **funksiyaning**  $x = x_0$  **nuqtadagi xususiy qiymati** deyiladi va  $f(x_0) = y_0$  kabi belgilanadi. [1, p. 49, 3.3]

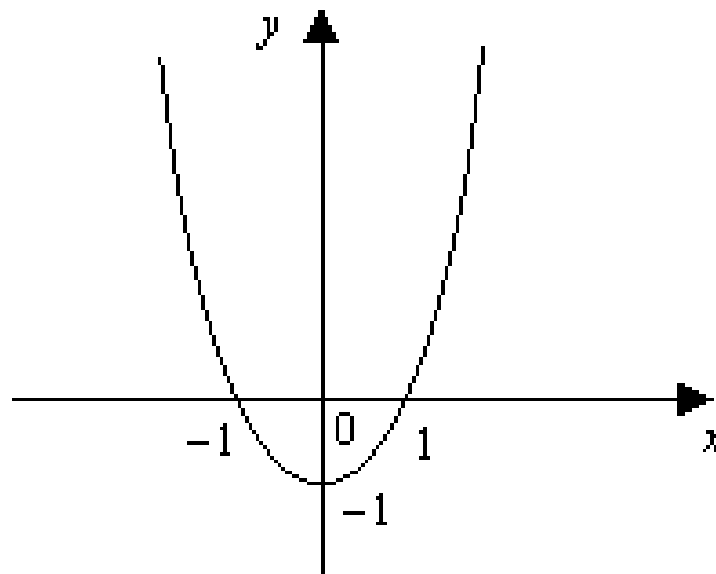
Tekislikda Dekart koordinatalar sistemasini olamiz. Tekislikdagi  $(x, f(x))$  nuqtalardan iborat ushbu

$$\{(x, f(x))\} = \{(x, f(x)) \mid x \in X, f(x) \in Y\}$$

to‘plam  $y = f(x)$  funksiyaning grafigi deyiladi [2, p. 31]. Masalan,

$$y = x^2 - 1 \quad (x \in X = [-2, 2])$$

funksiyaning grafigi 1-chizmada tasvirlangan. [2, p. 32, Example 2.1]



1-chizma.

Funksiya ta’rifidagi  $f$  qoida turlicha bo‘lishi mumkin.

a) Ko‘pincha  $x$  va  $y$  o‘zgaruvchilar orasidagi bog‘lanish formulalar yordamida ifodalanadi. Bu **funksiyaning analitik usulda berilishi** deyiladi. Masalan,

$$y = \sqrt{1 - x^2}$$

funksiya analitik usulda berilgan bo‘lib, uning aniqlanish to‘plami

$$X = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 1\} = [-1, 1]$$

bo'ladi.

$x$  va  $y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish quyidagi formulalar yordamida berilgan bo'lsin:

$$y = f(x) = \begin{cases} -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

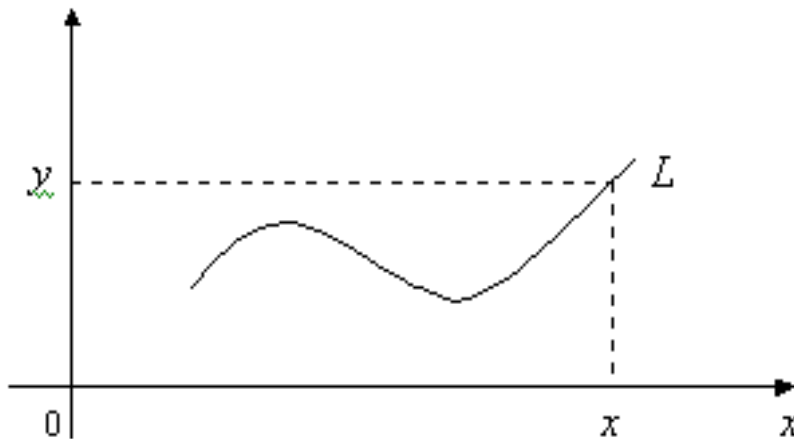
Bu funksiyaning aniqlanish to'plami  $X = \mathbb{R}$  bo'lib, qiymatlar to'plami esa  $Y = \{-1, 0, 1\}$  bo'ladi. Odatda bu funksiya  $y = \operatorname{sgn} x$  kabi belgilanadi. [2, p. 32, vi)]

b) Ba'zi hollarda  $x \in X$ ,  $y \in Y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali bo'lishi mumkin. Masalan, kun davomida havo haroratini kuzatganimizda,  $t_1$  vaqtda havo harorati  $T_1$ ,  $t_2$  vaqtda havo harorati  $T_2$  va h.k. bo'lsin. Natijada quyidagi jadval hosil bo'ladi.

$t$ – vaqt	$t_1$	$t_2$	$t_3$	...	$t_n$
$T$ – harorat	$T_1$	$T_2$	$T_3$	...	$T_n$

Bu jadval  $t$  vaqt bilan havo harorati  $T$  orasidagi bog'lanish-ni ifodalaydi, bunda  $t$  – argument,  $T$  esa  $t$  ning funksiyasi bo'ladi.

v)  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ham ifodalanishi mumkin (2-chizma).



2-chizma.

Masalan, 2-chizmada tasvirlangan  $L$  egri chiziq berilgan bo'lsin. Aytaylik,  $[a, b]$  segmentdagi har bir nuqtadan o'tkazilgan perpendikulyar  $L$  chiziqni faqat bitta nuqtada kessin.  $\forall x \in [a, b]$  nuqtadan perpendikulyar chiqarib, uning  $L$  chiziq bilan kesishish nuqtasini topamiz. Olingan  $x$  nuqtaga

kesishish nuqtasining ordinatasi  $y$  ni mos qo'yamiz. Natijada har bir  $x \in [a, b]$  ga bitta  $y$  mos qo'yilib, funksiya hosil bo'ladi. Bunda  $x$  bilan  $y$  orasidagi bog'lanishni berilgan  $L$  egri chiziq bajaradi.

Aytaylik,  $f_1(x)$  funksiya  $X_1 \subset R$  to'plamda,  $f_2(x)$  funksiya esa  $X_2 \subset R$  to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar

$$1) X_1 = X_2,$$

$$2) \forall x \in X_1 \text{ da } f_1(x) = f_2(x),$$

bo'lsa,  $f_1(x)$  hamda  $f_2(x)$  funksiyalar o'zaro teng deyiladi va  $f_1(x) = f_2(x)$  kabi belgilanadi. [1, p. 51, Def. 3.3.7]

## 2. Funksiyaning chegaralanganligi. Davriy funksiyalar. Juft va toq funksiyalar.

$f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lsin.

**2-ta'rif.** [2, p. 37, Def. 2.3] Agar shunday o'zgarmas  $M$  soni topilsaki,  $\forall x \in X$  uchun  $f(x) \leq M$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda **yuqoridan chegaralangan** deyiladi. Agar shunday o'zgarmas  $m$  soni topilsaki,  $\forall x \in X$  uchun  $f(x) \geq m$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda **quyidan chegaralangan** deyiladi.

**3-ta'rif.** [2, p. 37, Def. 2.3] Agar  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda **chegaralangan** deyiladi.

**1-misol.** Ushbu  $f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4}$  funksiyaning qaraylik. Bu funksiya  $R$  da chegaralangan bo'ladi.

$$\blacktriangleleft \text{ Ravshanki, } \forall x \in R \text{ da } f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} > 0.$$

Demak, berilgan funksiya  $R$  da quyidan chegaralangan.

Ayni paytda,  $f(x)$  funksiya uchun

$$f(x) = \frac{1}{1+x^4} + \frac{x^2}{1+x^4} \leq 1 + \frac{x^2}{1+x^4}$$

bo'ladi. Endi

$$0 \leq (x^2 - 1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1 \Rightarrow 2x^2 \leq x^4 + 1 \Rightarrow \frac{x^2}{x^4 + 1} \leq \frac{1}{2}$$

bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:  $f(x) \leq 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

Bu esa  $f(x)$  funksiyaning yuqoridan chegaralanganligini bildiradi.

Demak, berilgan funksiya  $R$  da chegaralangan.  $\blacktriangleright$

**4-ta'rif.** Agar har qanday  $M > 0$  son olinganda ham shunday  $x_0 \in X$

nuqta topilsaki,

$$f(x_0) > M$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  **funksiya**  $X$  **to'plamda** **yuqoridan chegaralanmagan** deyiladi.

$f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lsin.

**5-ta'rif.** Agar shunday o'zgarmas  $T (T \neq 0)$  son mavjud bo'lsaki,  $\forall x \in X$  uchun

1)  $x - T \in X, x + T \in X,$

2)  $f(x + T) = f(x),$

bo'lsa,  $f(x)$  **davriy funksiya** deyiladi,  $T$  son esa  $f(x)$  **funksiyaning davri** deyiladi.

Masalan,  $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x$  funksiyalar davriy funksiyalar bo'lib, ularning davri  $2\pi$  ga,  $f(x) = \operatorname{tg} x, f(x) = \operatorname{ctg} x$  funksiyalarning davri esa  $\pi$  ga teng.

Davriy funksiyalar quyidagi xossalarga ega:

a) Agar  $f(x)$  davriy funksiya bo'lib, uning davri  $T (T \neq 0)$  bo'lsa, u holda

$$T_n = nT, (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

sonlar ham shu funksiyaning davri bo'ladi.

b) Agar  $T_1$  va  $T_2$  sonlar  $f(x)$  funksiyaning davri bo'lsa, u holda  $T_1 + T_2 \neq 0$  hamda  $T_1 - T_2 (T_1 \neq T_2)$  sonlar ham  $f(x)$  funksiyaning davri bo'ladi.

v) Agar  $f(x)$  hamda  $g(x)$  lar davriy funksiyalar bo'lib, ularning har birining davri  $T (T \neq 0)$  bo'lsa, u holda

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar ham davriy funksiyalar bo'lib,  $T$  son ularning ham davri bo'ladi.

**2-misol.** Ixtiyoriy  $T (T \neq 0)$  ratsional son Dirixle funksiyasi

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } y \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

ning davri bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Aytaylik,  $T (T \neq 0)$  ratsional son bo'lsin. Ravshanki,  $\forall x \in R$  irratsional son uchun  $x + T$  – irratsional son,  $\forall x \in R$  ratsional son uchun  $x + T$  ratsional son bo'ladi. Demak,

$$D(x + T) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } y \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

Shunday qilib,  $\forall x \in R, T$  – ratsional son bo'lganda

$$D(x + T) = D(x)$$

bo'ladi. ▶



Ma'lumki,  $\forall x \in X$  ( $X \subset R$ ) uchun  $-x \in X$  bo'lsa,  $X$  to'plam  $O$  nuqtaga nisbatan **simmetrik to'plam** deyiladi.

Aytaylik,  $O$  nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan  $X$  to'plamda  $f(x)$  funksiya berilgan bo'lsin.

**6-ta'rif.** Agar  $\forall x \in X$  uchun  $f(-x) = f(x)$  tenglik bajarilsa,  $f(x)$  **juft funksiya** deyiladi. Agar  $\forall x \in X$  uchun  $f(-x) = -f(x)$  tenglik bajarilsa,  $f(x)$  **toq funksiya** deyiladi.

Masalan,  $f(x) = x^2 + 1$  juft funksiya,  $f(x) = x^3 + x$  esa toq funksiya bo'ladi. Ushbu  $f(x) = x^2 - x$  funksiya juft ham emas, toq ham emas.

Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  juft funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x), f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar ham juft bo'ladi.

Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  toq funksiyalar bo'lsa, u holda

$$f(x) + g(x), f(x) - g(x)$$

funksiyalar toq bo'ladi,

$$f(x) \cdot g(x), \frac{f(x)}{g(x)} \quad (g(x) \neq 0)$$

funksiyalar esa juft bo'ladi.

Juft funksiyaning grafigi ordinatalar o'qiga nisbatan, toq funksiyaning grafigi esa kordinatalar boshiga nisbatan simmetrik joylashgan bo'ladi.

### **3. Monoton funksiyalar. Teskari funksiya. Murakkab funksiyalar.**

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lsin.

**7-ta'rif.** [2, p. 41, Def. 2.6] Agar  $\forall x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lganda  $f(x_1) \leq f(x_2)$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  **funksiya  $X$  to'plamda o'suvchi** deyiladi. Agar  $\forall x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lganda  $f(x_1) < f(x_2)$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  **funksiya  $X$  to'plamda qat'iy o'suvchi** deyiladi.

**8-ta'rif.** [2, p. 41-42, Def. 2.6] Agar  $\forall x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lganda  $f(x_1) \geq f(x_2)$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  **funksiya  $X$  to'plamda kamayuvchi** deyiladi. Agar  $\forall x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lganda  $f(x_1) > f(x_2)$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  **funksiya  $X$  to'plamda qat'iy kamayuvchi** deyiladi.

*O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan **monoton funksiyalar** deyiladi.* [2, p. 42]

**3-misol.** Ushbu  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$  funksiyaning  $X = [1, +\infty)$  to'plamda kamayuvchi ekanligi isbotlansin.

◀  $[1, +\infty)$  da ixtiyoriy  $x_1$  va  $x_2$  nuqtalarni olib,  $x_1 < x_2$  bo'lsin deylik.

Unda

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1 + x_1x_2^2 - x_2 - x_2x_1^2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \\ &= \frac{x_1 - x_2 + x_1 \cdot x_2(x_2 - x_1)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1 - x_2)(1 - x_1 \cdot x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} \end{aligned}$$

bo'ladi. Keyingi tenglikda

$$x_1 - x_2 < 0, 1 - x_1 \cdot x_2 < 0$$

bo'lishini e'tiborga olib,

$$f(x_1) - f(x_2) > 0$$

ya'ni,  $f(x_1) > f(x_2)$  ekanini topamiz. Demak,

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2). \blacktriangleright$$

Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $X \subset R$  to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib,  $C = const$  bo'lsin. U holda

a)  $f(x) + C$  funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

b)  $C > 0$  bo'lganda  $C \cdot f(x)$  o'suvchi,  $C < 0$  bo'lganda  $C \cdot f(x)$  kamayuvchi bo'ladi.

v)  $f(x) + g(x)$  funksiya o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

$y = f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib, bu funksiyaning qiymatlaridan iborat to'plam

$$Y_f = \{ f(x) \mid x \in X \}$$

bo'lsin.

Faraz qilaylik, biror qoidaga ko'ra  $Y_f$ , to'plamdan olingan har bir  $y$  ga  $X$  to'plamdagi bitta  $x$  mos qo'yilgan bo'lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu funksiya  $y = f(x)$  ga nisbatan **teskari funksiya** deyiladi va  $x = f^{-1}(y)$  kabi belgilanadi.

Masalan,  $y = \frac{1}{2}x + 1$  funksiyaga nisbatan teskari funksiya  $x = 2y - 1$  bo'ladi.

Yuqorida aytilganlardan  $y = f(x)$  da  $x$  argument,  $y$  esa  $x$  ning funksiyasi, teskari  $x = f^{-1}(y)$  funksiyada  $y$  argument,  $x$  esa  $y$  ning funksiyasi bo'lishi ko'rinadi.

Qulaylik uchun teskari funksiya argumenti ham  $x$ , uning funksiyasi  $y$  bilan belgilanadi:  $y = g(x)$ .

$y = f(x)$  ga nisbatan teskari  $g(x)$  funksiya grafigi  $f(x)$  funksiya grafigini I va III choraklar bissektrisasi atrofiida  $180^\circ$  ga aylantirish natijasida hosil bo'ladi.

Aytaylik,  $Y_f$  to'plamda  $u = F(y)$  funksiya berilgan bo'lsin. Natijada  $X$  to'plamdan olingan har bir  $x$  ga  $Y_f$  to'plamda bitta  $y$ :

$$f : x \mapsto y \quad (y = f(x)),$$

va  $Y_f$  to'plamdagi bunday  $y$  songa bitta  $u$  :

$$F : y \rightarrow u \quad (u = F(y))$$

son mos qo'yiladi. Demak,  $X$  to'plamdan olingan har bir  $x$  songa bitta  $u$  son mos qo'yilib, yangi funksiya hosil bo'ladi:  $u = F(f(x))$ . Odatda bunday funksiyalar **murakkab funksiya** deyiladi. [2, p. 43]

### Mashqlar

1.  $f(x)$  funksiyaning  $X \subset R$  to'plamda quyidan chegaralanmaganligi ta'rifi keltirilsin.

2.  $O$  nuqtaga nisbatan simmetrik bo'lgan  $X \subset R$  to'plamda berilgan har qanday  $f(x)$  funksiya juft va toq funksiyalar yig'indisi ko'rinishida ifodalanishi isbotlansin.

3. Ushbu  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$  funksiyaning  $X = [0, +\infty)$  to'plamda kamayuvchi ekani isbotlansin.

4. Agar  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  bo'lsa,  $f(f(f(x)))$  topilsin.

### Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*. Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, I q.* T. "Vorishashriyot", 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

### Nazorat savollari

1. Funksiyaning ta'rifi.
2. Funksiya qanday usullarda beriladi?
3. Qanday funksiya chegaralangan funksiya deyiladi?
4. Qanday funksiya davriy funksiya deyiladi?
5. Qanday funksiya juft funksiya deyiladi?
6. Qanday funksiya toq funksiya deyiladi?
7. Qanday funksiya monoton funksiya deyiladi?
8. Qanday funksiya murakkab funksiya deyiladi?



# Glossariy

**Chegaralangan funksiya.** Agar  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda ham yuqoridan, ham quyidan chegaralangan bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda chegaralangan deyiladi.

**Davriy funksiya.** Agar shunday o'zgarmas  $T (T \neq 0)$  son mavjud bo'lsaki,  $\forall x \in X$  uchun

$$1) x - T \in X, x + T \in X,$$

$$2) f(x + T) = f(x),$$

bo'lsa,  $f(x)$  davriy funksiya deyiladi,  $T$  son esa  $f(x)$  funksiyaning davri deyiladi.

$$\text{Dirixle funksiyasi. } D(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ irratsional son bo'lsa.} \end{cases}$$

**Funksiya.** Agar  $X$  to'plamdagi har bir  $x$  songa biror  $f$  qoidaga ko'ra  $Y$  to'plamdan bitta  $y$  son mos qo'yilgan bo'lsa,  $X$  to'plamda funksiya berilgan (aniqlangan) deyiladi va

$$f: x \rightarrow y \text{ yoki } y = f(x)$$

kabi belgilanadi.

**Funksiyaning analitik usulda berilishi.**  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish formulalar yordamida ifodalanadi.

**Funksiyaning grafik ko'rinishida berilishi.**  $x$  va  $y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish tekislikda biror egri chiziq orqali ifodalanadi.

**Funksiyaning jadval ko'rinishida berilishi.**  $x \in X, y \in Y$  o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali ifodalanadi.

**Juft funksiya.** Agar  $\forall x \in X$  uchun  $f(-x) = f(x)$  tenglik bajarilsa,  $f(x)$  juft funksiya deyiladi.

**Kamayuvchi funksiya.** Agar  $\forall x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lganda  $f(x_1) \geq f(x_2)$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda kamayuvchi deyiladi.

**Monoton funksiya.** O'suvchi hamda kamayuvchi funksiyalar umumiy nom bilan monoton funksiyalar deyiladi.

**Murakkab funksiya.** Aytaylik,  $Y_f$  to'plamda  $u = F(y)$  funksiya berilgan bo'lsin. Natijada  $X$  to'plamdan olingan har bir  $x$  ga  $Y_f$  to'plamda bitta  $y$ :

$$f: x \mapsto y \quad (y = f(x)),$$

va  $Y_f$  to'plamdagi bunday  $y$  songa bitta  $u$ :

$$F: y \rightarrow u \quad (u = F(y))$$

son mos qo'yiladi. Demak,  $X$  to'plamdan olingan har bir  $x$  songa bitta  $u$  son mos qo'yilib, yangi funksiya hosil bo'ladi:  $u = F(f(x))$ . Odatda bunday funksiyalar murakkab funksiya deyiladi.

**O'suvchi funksiya.** Agar  $\forall x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lganda  $f(x_1) \leq f(x_2)$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda o'suvchi deyiladi.

**Qat'iy kamayuvchi funksiya.** Agar  $\forall x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lganda  $f(x_1) > f(x_2)$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda qat'iy kamayuvchi deyiladi.

**Qat'iy o'suvchi funksiya.** Agar  $\forall x_1, x_2 \in X$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lganda  $f(x_1) < f(x_2)$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda qat'iy o'suvchi deyiladi.

**Quyidan chegaralangan funksiya.** Agar shunday o'zgarmas  $m$  soni topilsaki,  $\forall x \in X$  uchun  $f(x) \geq m$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda quyidan chegaralangan deyiladi.

**Teskari funksiya.** Faraz qilaylik, biror qoidaga ko'ra  $Y_f$ , to'plamdan olingan har bir  $y$  ga  $X$  to'plamdagi bitta  $x$  mos qo'yilgan bo'lsin. Bunday moslik natijasida funksiya hosil bo'ladi. Odatda, bu funksiya  $y = f(x)$  ga nisbatan teskari funksiya deyiladi va  $x = f^{-1}(y)$  kabi belgilanadi.

**Toq funksiya.** Agar  $\forall x \in X$  uchun  $f(-x) = -f(x)$  tenglik bajarilsa,  $f(x)$  toq funksiya deyiladi.

**Yuqoridan chegaralangan funksiya.** Agar shunday o'zgarmas  $M$  soni topilsaki,  $\forall x \in X$  uchun  $f(x) \leq M$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda yuqoridan chegaralangan deyiladi.

## Keys banki

**10-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi:  $O$  nuqtaga nisbatan simmetrik bo`lgan  $X \subset R$  to`plamda berilgan har qanday  $f(x)$  funksiya juft va toq funksiyalar yig`indisi ko`rinishida ifodalanishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma`lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

# 10-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l . *Ushbu*

$$y = \sqrt{-x^2 + x + 2} \quad (2)$$

funksiyaning aniqlanish sohasi va qiymatlari to'plami topilsin.

◀(2) munosabat ma'noga ega bo'lishi uchun  $-x^2 + x + 2 \geq 0$  bo'lishi lozim. Keyingi tengsizlikni echib topamiz.

$$-x^2 + x + 2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - x - 2 \leq 0 \Rightarrow (x+1)(x-2) \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 2.$$

Demak, berilgan funksiyaning aniqlanish sohasi  $X = [-1, 2]$  bo'ladi.

Ravshanki,  $y \geq 0$ . Ayni paytda

$$y = \sqrt{-x^2 + x + 2} = \sqrt{-(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{9}{4}} \leq \frac{3}{2}$$

bo'lgani uchun  $0 \leq y \leq \frac{3}{2}$  bo'ladi. Demak, funksiyaning qiymatlari to'plami

$$Y_f = \left[0, \frac{3}{2}\right] \text{ bo'ladi. } \blacktriangleright$$

2 – m i s o l . *Agar*

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1, & \text{agar } x < 0, \\ 0, & \text{agar } x = 0, \\ 1, & \text{agar } x > 0 \end{cases} \quad \text{va} \quad g(x) = x \cdot (1 - x^2)$$

bo'lsa,  $f(g(x))$ ,  $g(f(x))$  lar topilsin.

◀

$$f(g(x)) = \operatorname{sgn}[x(1-x^2)] = \begin{cases} 1, & \text{agar } x(1-x^2) > 0 \\ 0, & \text{agar } x(1-x^2) = 0 \\ -1, & \text{agar } x(1-x^2) < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{agar } 0 < x < 1 \text{ va } x < -1 \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ va } x = \pm 1 \\ -1, & \text{agar } x > 1 \text{ va } -1 < x < 0. \end{cases}$$

$$g(f(x)) = \operatorname{sign} x (1 - \operatorname{sign}^2 x) = 0. \blacktriangleright$$



### Misollar

*Quyidagi funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin.*

101.  $y = x + \frac{1}{x}$

102.  $y = \frac{x}{x^2 - 5x + 6}$

103.  $y = \frac{2}{\sqrt{25 - x^2}}$

104.  $y = \sqrt{2x+1} - \sqrt{x+1}$

105.  $y = \frac{1}{\sqrt{|x|+x}}$

106.  $y = \lg(1 - x^2)$

107.  $y = \lg(4 - x^2)$

108.  $y = \log_2 \log_3 \log_4 x$

109.  $y = \sqrt{9 - x^2} + \log \frac{x+1}{x-2}$

110.  $y = \frac{\sqrt{x}}{\sin \pi x}$

111.  $y = \sqrt{\sin \sqrt{x}}$

112.  $y = \ln \cos x.$

113.  $y = \arccos \frac{2x}{1+x^2}$

114.  $y = \sqrt{\arcsin(\log_2 x)}.$

115.  $y = \sqrt{\arcsin\left(\lg \frac{x}{10}\right)}$

116.  $y = \sqrt{\lg \cos x} + 4.$

117.  $y = \lg(1 - \operatorname{tg} x)$

118.  $y = \lg[\cos(\lg x)].$

119.  $y = \frac{x}{1+x^2}$

120.  $y = \frac{x^2 - 5}{2x - 5}$

121.  $y = x + \operatorname{sign} x$

122.  $y = x + \frac{1}{x} \quad \{x > 0\}$

123.  $y = \sqrt{\frac{9x^2 + 1}{x}}$

124.  $y = \sin x + \cos x$

125.  $y = \lg(1 - 2\cos x)$

126.  $y = \||x| - 1| - x$

127.  $y = \frac{x^2 + x + 2}{x^2 - x + 2}$

128.  $y = x^2 - 4 \cdot |x - 1| + 1$

129. Agar  $f(x) = |x| - x$  bo'lsa,  $f(-1), f(0), f(1), f(-2), f(2)$  lar topilsin.

130. Agar

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{arap } 0 \leq x \leq 1 \\ x, & \text{arap } 1 < x < 2 \end{cases}$$

bo'lsa,  $f(0), f\left(\frac{1}{2}\right), f\left(\frac{3}{2}\right), f(2)$  lar topilsin.

**131.** Agar  $f(x) = \frac{1-x}{1+x}$  bo'lsa,  $f(0), f(-x), f(x+1), f(x)+1, f\left(\frac{1}{x}\right), \frac{1}{f(x)}$  lar topilsin.

**132.** Agar  $f(x) = [x] + \operatorname{sign} x$  bo'lsa,  $f(0), f\left(\frac{3}{2}\right), f\left(-\frac{5}{2}\right), f\left(\frac{1}{10}\right)$  lar topilsin.

**133.** Agar  $f(x) = x^3 + 3x - 1$  bo'lsa,  $f(a) + f(-a)$  topilsin.

**134.** Agar  $f(x) = ax^2 + bx + c$  bo'lsa,  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  topilsin.

**135.**  $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$  bo'lsin. Agar  $f(-1) = 0, f(0) = 2, f(1) = -3, f(2) = 5$  bo'lsa,  $f(x)$  topilsin.

**136.** Agar  $f(x) = 3^x(a + bx)$  bo'lsa,

$$f(x+2) - 6f(x+1) + 9f(x) = 0$$

bo'lishi isbotlansin.

**137.** Agar  $f(u)$  funksiya  $(0,1)$  da aniqlangan bo'lsa,

$$f(\sin x), f(\ln x), f\left(\frac{[x]}{x}\right)$$

funksiyalarning aniqlanish sohalari topilsin.

**138.** Agar  $\phi(x) = x^2, \psi(x) = \sqrt{x}$  bo'lsa,

$\phi(\phi(x)), \phi(\psi(x)), \psi(\psi(x)), \psi(\phi(x))$  lar topilsin.

**139.** Agar  $\phi(x) = \operatorname{sign} x, \psi(x) = \frac{1}{x}$  bo'lsa,

$\phi(\phi(x)), \psi(\psi(x)), \phi(\psi(x)), \psi(\phi(x))$  lar topilsin.

**140.** Agar  $\phi(x) = \operatorname{sign} x, \psi(x) = 1 + x^2$  bo'lsa,  $\phi(\psi(x)), \psi(\phi(x))$  lar topilsin.

**141.** Agar  $f(x) = \sqrt{1-x^2}, x = 1 + \sin^2 \pi t = \phi(t)$  bo'lsa,  $f(\phi(t))$  funksiyaning aniqlanish sohasi topilsin.

**142.** Agar  $\phi(x) = \ln x^2, \psi(x) = \sin x$  bo'lsa,  $\phi(\psi(x)), \psi(\phi(x))$  funksiyalar va ularning aniqlanish sohalari topilsin.

**143.** Agar  $f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 + 1$  bo'lsa,  $f(x)$  topilsin.

**144.** Agar  $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x$  bo'lsa,  $f(x)$  topilsin.

145. Agar  $f\left(\frac{x}{x+1}\right) = x^2$  bo'lsa,  $f(x)$  topilsin.

146. Agar  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$  bo'lsa,  $f_n(x) = \underbrace{f(f(\dots f(x)))}_{n \text{ ta}}$  funksiya topilsin.

147. Agar  $f(x) = \frac{1}{1-x}$  bo'lsa,  $f(f(f(x))) = x$  tenglik  $x$  ning qanday qiymatlarida o'rinli bo'ladi?

## Test

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$y = \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}}$ funksiyani $x=0$ nuqtadagi qiymatini toping.	1	$\sqrt{2}$	2
2.	$y = \left(\frac{3\pi}{2} - x\right) \cos x + \sin x + 2$ funksiyani $x = \frac{\pi}{2}$ nuqtada funksiyani hisoblang.	3	1	0
3.	$y = x^{\ln x} + e$ funksiyani $x=e$ nuqtadagi qiymatini toping.	$2e$	$3e$	2
4.	$y = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ Funksiyani $x = \sqrt[3]{4} + 1$ nuqtadagi qiymatini toping.	4	$\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{4} + 2$
5.	$y = \sin 2x$ funksiyani asosiy davrini toping.	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$
6.	$y = \sin 3x + \cos 2x + \operatorname{tg} x$ funksiyani asosiy davrini toping.	$2\pi$	$\pi$	$\frac{\pi}{2}$
7.	Davriy bo'lmagan funksiyani toping.	$y = \sin \sqrt{x-1}$	$y = \sin x - \cos 3x$	$y = \cos \frac{x}{3} + 3$
8.	$y = \sin \frac{x}{2} + x^3 + 3x$ qanday funksiya.	Toq funksiya	Juft funksiya	Juft ham emas toq ham emas
9.	$y = \frac{x-1}{x+1} + 1$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiyani toping.	$y = \frac{x}{2-x}$	$y = \frac{x}{x+1} + 1$	$y = \frac{x-1}{x}$
10.	$y = \frac{x}{2-x} + 2$ funksiyaga teskari bo'lgan funksiyani toping.	$y = \frac{2x-4}{x-1}$	$y = \frac{x+1}{x-1}$	$y = \frac{2x-1}{x-1}$

# 11-mavzu. Funksiya limiti

## 11-ma'ruza

### Reja

1. To'plamning limit nuqtasi.
2. Funksiya limiti ta'riflari va ekvivalentligi.
3. Funksiyaning o'ng va chap limitlari.

#### 1. To'plamning limit nuqtasi.

Aytaylik, biror  $X \subset R$  to'plam va  $x_0 \in R$  nuqta berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** ([1], p. 215, Def. 9.1.18) Agar  $x_0$  nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), (\forall \varepsilon > 0)$$

atrofida  $X$  to'plamning  $x_0$  nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo'lsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x \neq x_0 : |x - x_0| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $x_0$  nuqta  $X$  to'plamning **limit nuqtasi** deyiladi.

**Misollar. 1.**  $X = [0, 1]$  to'plamning har bir nuqtasi shu to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

2.  $X = (0, 1)$  to'plamning har bir nuqtasi va  $x = 0$ ,  $x = 1$  nuqtalar shu to'plamning limit nuqtalari bo'ladi. ([1], p. 215, Lemma 9.1.21)

3.  $X = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$  to'plamning limit nuqtasi  $x_0 = 0$  bo'ladi.

4.  $X = N = \{1, 2, 3, \dots\}$  to'plam limit nuqtaga ega emas.

**2-ta'rif.** ([2], p. 82. Item 3.3.3) Agar  $x_0$  nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon^+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad (U_\varepsilon^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

o'ng atrofida (chap atrofida)  $X$  to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa,  $x_0$  nuqta  $X$  to'plamning **o'ng (chap) limit nuqtasi** deyiladi.

**3-ta'rif.** Agar ixtiyoriy  $c \in R$  uchun

$$U_c(+\infty) = \{x \in R \mid x > c\}$$

to'plamda  $X$  to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, " $+\infty$ "  $X$  to'plamning limit "nuqta"si deyiladi.

Agar ixtiyoriy  $c \in R$  uchun

$$U_c(-\infty) = \{x \in R \mid x < c\}$$

to'plamda  $X$  to'plamning kamida bitta nuqtasi bo'lsa, " $-\infty$ "  $X$  to'plamning limit «nuqta»si deyiladi.

Keltirilgan ta'rif va misollardan ko'rinadiki, to'plamning limit nuqtasi shu to'plamga tegishli bo'lishi ham, bo'lmasligi ham mumkin ekan.

**1-teorema.** Agar  $x_0 \in R$  nuqta  $X \subset R$  to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsa, u holda  $x_0$  nuqtaning har qanday

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

atrofida  $X$  to‘plamning cheksiz ko‘p nuqtalari bo‘ladi.

◀ Aytaylik,  $x_0$  nuqta  $X$  to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin. Teorema tasdig‘ining teskarisini faraz qilaylik:  $x_0$  nuqtaning biror  $U_{\delta_0}(x_0)$  atrofida  $X$  to‘plamning chekli sondagi  $x_1, x_2, \dots, x_n$  nuqtalarigina bo‘lsin. U holda

$$\min \{ |x_0 - x_1|, |x_0 - x_2|, \dots, |x_0 - x_n|, \delta_0 \} = \delta$$

deb olinsa,  $x_0$  nuqtaning  $U_\delta(x_0)$  atrofida  $X$  to‘plamning  $x_0$  dan farqli bitta ham nuqtasi bo‘lmaydi. Bu esa  $x_0$  nuqta  $X$  to‘plamning limit nuqtasi bo‘lishiga ziddir. ▶

**2-teorema.** ([1], p. 216, Th. 9.1.24) Agar  $x_0$  nuqta  $X \subset R$  to‘plamning limit nuqta-si bo‘lsa, u holda shunday sonlar ketma-ketligi  $\{x_n\}$  topiladiki,

$$1) \forall n \in N \text{ da } x_n \in X, x_n \neq x_0;$$

$$2) n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow x_0;$$

bo‘ladi.

◀ Aytaylik,  $x_0 \in R$  nuqta  $X \subset R$  to‘plamning limit nuqtasi bo‘lsin. Unda 1-ta‘rifga binoan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x_n \in X, x_n \neq x_0 : |x_n - x_0| < \varepsilon$$

bo‘ladi. Jumladan,

$$\varepsilon = 1 \text{ uchun } \exists x_1 \in X, x_1 \neq x_0 : |x_1 - x_0| < 1,$$

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \text{ uchun } \exists x_2 \in X, x_2 \neq x_0 : |x_2 - x_0| < \frac{1}{2},$$

$$\varepsilon = \frac{1}{3} \text{ uchun } \exists x_3 \in X, x_3 \neq x_0 : |x_3 - x_0| < \frac{1}{3},$$

.....

$$\varepsilon = \frac{1}{n} \text{ uchun } \exists x_n \in X, x_n \neq x_0 : |x_n - x_0| < \frac{1}{n},$$

.....

bo‘ladi.

Natijada qaralayotgan teoremaning 1) shartini qanoatlantiruvchi  $\{x_n\}$  ketma-ketlik hosil bo‘lib, uning uchun  $\forall n \in N$  da  $|x_n - x_0| < 1/n$  tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Keyingi munosabatdan esa  $n \rightarrow \infty$  da  $x_n \rightarrow x_0$  kelib chiqadi. ▶

Shuni ta‘kidlash lozimki, 2-teoremaning shartlarini qanoatlantiruvchi ketma-ketliklar ko‘plab topiladi.

## 2. Funksiya limiti ta‘riflari va ekvivalentligi.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to‘plamda berilgan bo‘lib,  $x_0$  nuqta  $X$  to‘plam-ning limit nuqtasi bo‘lsin.  $x_0$  nuqtaga intiluvchi ixtiyoriy  $\{x_n\}$ :

$$x_1, x_2, \dots, x_n, \dots \quad (x_n \in X, x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlikni olib, funksiya qiymatlaridan iborat  $\{f(x_n)\}$ :

$$f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n), \dots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz.

**3-ta'rif.** (Geyne). Agar  $n \rightarrow \infty$  da  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in X, x_n \neq x_0$ ) bo'ladigan ixtiyoriy  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun  $n \rightarrow \infty$  da  $f(x_n) \rightarrow b$  bo'lsa,  $b$  ga  $f(x)$  **funksiyaning**  $x_0$  **nuqtadagi limiti** deyiladi va  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow b$  yoki

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

**Eslatma.** Agar  $n \rightarrow \infty$  da

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \in X, x_n \neq x_0) \quad \text{va} \quad y_n \rightarrow x_0 \quad (y_n \in X, y_n \neq x_0)$$

bo'ladigan turli  $\{x_n\}, \{y_n\}$  ketma-ketliklar uchun  $n \rightarrow \infty$  da  $f(x_n) \rightarrow b_1, f(y_n) \rightarrow b_2$  bo'lib,  $b_1 \neq b_2$  bo'lsa  $f(x)$  funksiya  $x \rightarrow x_0$  da limitga ega emas deyiladi.

**1-misol.** Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x}$$

funksiyaning  $x_0 = 4$  nuqtadagi limiti topilsin.

◀ Quyidagi  $\{x_n\}$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 4 \quad (x_n \neq 4, n = 1, 2, \dots)$$

ketma-ketlikni olaylik. Unda

$$f(x_n) = \frac{x_n^2 - 16}{x_n^2 - 4x_n} = \frac{x_n + 4}{x_n}$$

bo'lib,  $n \rightarrow \infty$  da  $f(x_n) \rightarrow 2$  bo'ladi. Demak,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2. \quad \blacktriangleright$$

**2-misol.** Ushbu

$$f(x) = \sin \frac{1}{x}$$

funksiyaning  $x \rightarrow 0$  dagi limiti mavjud bo'lmasligi ko'rsatilsin.

◀ Ravshanki,  $n \rightarrow \infty$  da

$$x'_n = \frac{2}{(4n-1)\pi} \rightarrow 0, \quad x''_n = \frac{2}{(4n+1)\pi} \rightarrow 0$$

bo'ladi.

Bu ketma-ketliklar uchun

$$f(x'_n) = \frac{4n-1}{2} \pi = -1, \quad f(x''_n) = \frac{4n+1}{2} \pi = 1$$

bo'lib,  $n \rightarrow \infty$  da

$$f(x'_n) \rightarrow -1, f(x''_n) \rightarrow 1$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya  $x_0 = 0$  nuqtada limitga ega emas. ►

**4-ta'rif.** (Koshi). ([1], p. 221, Def. 9.3.6) Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  topilsaki,  $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$  uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $b$  soni  $f(x)$  **funksiyaning**  $x_0$  **nuqtadagi limiti** deyiladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ .

**3-misol.**  $f(x) = C = \text{const}$  bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = C$$

bo'ladi.

**4-misol.** Ushbu  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$  funksiyaning  $x_0 = 1$  nuqtadagi limiti 2 ga teng ekani ko'rsatilsin.

◀  $\forall \varepsilon > 0$  soniga ko'ra  $\delta = \varepsilon$  deb olsak, u holda  $|x - 1| < \delta$  ( $x \neq 1$ ) tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $x$  da

$$\left| \frac{x^2 - 1}{x - 1} - 2 \right| = |x + 1 - 2| = |x - 1| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = 2$ . ►

**5-misol.** Faraz qilaylik,  $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  da  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

bo'ladi.

◀ Ma'lumki,  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$  uchun

$$\frac{1}{2} \sin x < \frac{1}{2} x < \frac{1}{2} \text{tg} x$$

bo'ladi. Bu tengsizliklardan, funksiylarning juftligini hisobga olib,  $0 < |x| < \frac{\pi}{2}$  da

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$



bo'lishini topamiz. Keyingi tengsizliklardan esa

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2} < 2 \cdot \frac{x^2}{4} = \frac{x^2}{2}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Endi  $\forall \varepsilon > 0$  ni olib,  $\delta = \min\{\varepsilon; 1\}$  deyilsa, unda  $\forall x, |x| < \delta, x \neq 0$  uchun

$$0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1. \blacktriangleright$$

**6-misol.** Ushbu

$$f(x) = a^x, a > 0, x \in R, x_0 = 0$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$$

bo'lishi isbotlansin.

◀  $a > 1$  bo'lgan holni qaraylik. Bu holda  $f(x)$  funksiya qat'iy o'suvchi bo'ladi:

$$\forall x_1, x_2 \in R, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2): a^{x_1} < a^{x_2}.$$

$\forall \varepsilon > 0$  sonni olaylik. Ma'lumki,  $n \rightarrow \infty$  da

$$a^{\frac{1}{n}} \rightarrow 1, a^{-\frac{1}{n}} \rightarrow 1$$

bo'lib, ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan

$$\exists n_1 \in N, \forall n > n_1: a^{\frac{1}{n}} < 1 + \varepsilon,$$

$$\exists n_2 \in N, \forall n > n_2: a^{-\frac{1}{n}} > 1 - \varepsilon$$

bo'ladi. Endi  $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ ,  $\delta = \frac{1}{n_0}$  deyilsa, unda

$$\forall x, |x - 0| < \delta \Leftrightarrow -\frac{1}{n} < x < \frac{1}{n_0}$$

bo'lganda

$$a^{\frac{1}{n_0}} < a^x < a^{\frac{1}{n}} \Rightarrow 1 - \varepsilon < a^x < 1 + \varepsilon \Leftrightarrow |a^x - 1| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$ .

$0 < a < 1$  bo'lganda  $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$  bo'lishini isbotlash o'quvchiga havola etiladi. ▶

**5-ta'rif.** ([2], p. 81, Def. 3.21) Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday

$\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$  uchun  $f(x) > \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti  $+\infty$  deb ataladi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, (x \neq 0)$$

funksiya uchun

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$$

bo'ladi.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 = +\infty$  nuqta  $x$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**6-ta'rif.** ([2], p. 72, Def. 3.11) Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta > 0$  topilsaki,  $\forall x \in X, x > \delta$  uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $b$  soni  $f(x)$  **funksiyaning**  $x_0 = +\infty$  **dagi limiti** deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

**7-misol.** Aytaylik,  $X = (0, +\infty)$ ,  $x_0 = +\infty$ ,  $f(x) = \frac{1}{x}$  bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham,  $\forall \varepsilon > 0$  sonni olaylik. Ravshanki,  $\forall x > 0$  uchun

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}.$$

Demak,  $\delta = \frac{1}{\varepsilon}$  deyilsa, unda  $\forall x > \delta$  uchun

$$\left| \frac{1}{x} - 0 \right| = \frac{1}{x} < \frac{1}{\delta} = \varepsilon$$

bo'ladi. ▶

**8-misol.** Faraz qilaylik,

$$f(x) = \frac{x^m}{a^x}, \quad a > 1, \quad m \in N, \quad X = R$$

bo'lsin. Unda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$$

bo'lishini isbotlaymiz.

◀  $\varepsilon > 0$  sonni olaylik. Ma'lumki,  $n \rightarrow \infty$  da

$$\frac{(n+1)^m}{a^n} \rightarrow 0$$

bo'ladi. Unda

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n > n_0: \frac{(n+1)^m}{a^n} < \varepsilon$$

bo'ladi.

Agar  $C = n_0$  deyilsa, unda  $\forall x > C$  uchun

$$\left| \frac{x^m}{a^x} - 0 \right| = \frac{x^m}{a^x} < \frac{([x]+1)^m}{a^{[x]}} < \varepsilon$$

bo'ladi ( $[x] \geq n_0 = C$ ). Demak,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^m}{a^x} = 0$ . ▶

**9-misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e$$

munosabat isbotlansin.

◀  $\forall \varepsilon > 0$  sonni olamiz. Ma'lumki,  $n \rightarrow \infty$  da

$$\left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \rightarrow e,$$

$$\left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n = \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+2} \rightarrow e.$$

Limit ta'rifiga binoan,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0:$$

$$e - \varepsilon < \left( 1 + \frac{1}{n+1} \right)^n, \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^{n+1} < e + \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi  $C = n_0$  desak, unda  $\forall x > C$  uchun

$$e - \varepsilon < \left( 1 + \frac{1}{[x]+1} \right)^{[x]} < \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x < \left( 1 + \frac{1}{[x]} \right)^{[x]+1} < e + \varepsilon$$

bo'lib,

$$\left| \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x = e. \blacktriangleright$$

**3-teorema.** ([1], p. 222, Prop. 9.3.9) *Funksiya limitining Koshi hamda Geyne ta'riflari ekvivalent ta'riflardir.*

◀ *Koshi ta'rifiga ko'ra  $b$  soni  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti bo'lsin:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

Unda

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$$

Bo'lganda

$$|f(x) - b| < \varepsilon \quad (1)$$

bo'ladi.  $x_0$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi. Unda 2-teoremaga ko'ra  $\{x_n\}$  ketma-ketlik topiladiki,  $n \rightarrow \infty$  da  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \neq x_0, n=1,2,\dots$ ) bo'ladi. Ketma-ketlik limiti ta'rifiga binoan

$$\delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0 : |x_n - x_0| < \delta, \quad (2)$$

bo'ladi. (1) va (2) munosabatlardan  $\forall n > n_0$  uchun

$$|f(x_n) - b| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa  $b$  sonini Geyne ta'rifi bo'yicha  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti ekanini bildiradi.

Endi  $b$  soni Geyne ta'rifi bo'yicha  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti bo'lsin.

Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti Geyne ta'rifi bo'yicha  $b$  ga teng bo'lsa ham, Koshi ta'rifi bo'yicha limiti bo'lmasin. Unda biror  $\varepsilon_0 > 0$  uchun ixtiyoriy  $\delta > 0$  son olinganda ham  $0 < |x - x_0| < \delta$  ni qanoatlantiruvchi biror  $x'$  da

$$|f(x') - b| \geq \varepsilon_0$$

bo'ladi.

Nolga intiluvchi musbat sonlar ketma-ketligi  $\{\delta_n\}$  ni olaylik:

$$n \rightarrow \infty \text{ da } \delta_n \rightarrow 0 \text{ (} \delta_n > 0, n=1,2,\dots \text{)}.$$

U holda

$$0 < |x_n - x_0| < \delta_n \Rightarrow |f(x_n) - b| \geq \varepsilon_0 \quad (3)$$

bo'ladi. Ammo  $\delta_n \rightarrow 0$ , da  $x_n \rightarrow x_0$ , demak, Geyne ta'rifiga asosan

$$f(x_n) \rightarrow b$$

bo'ladi. Bu (3) ga ziddir. Demak,  $b$  soni Koshi ta'rifi bo'yicha ham,  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti bo'ladi. ►

### 3. Funksiyaning o'ng va chap limitlari.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan,  $x_0$  nuqta  $x$  ning chap limit nuqtasi bo'lib,

$$(x_0 - \gamma, x_0) \subset X \quad (\gamma > 0)$$

bo'lsin.

**7-ta'rif.** ([2], p. 82, Def. 3.22) Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $b$  son  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi chap limiti deyiladi va

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan,  $x_0$  nuqta  $X$  ning o'ng limit nuqtasi bo'lib,

$$(x_0, x_0 + \gamma) \subset X \quad (\gamma > 0)$$

bo'lsin.

**8-ta'rif.** ([2], p. 82, Def. 3.22) Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $b$  son  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi o'ng limiti deyiladi va

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kabi belgilanadi.

Masalan,

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning 0 nuqtadagi o'ng limiti 1, chap limiti  $-1$  bo'ladi.

## Mashqlar

1. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

limitlarning ta'riflari keltirilsin.

2. Ushbu  $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$  funksiya  $x_0 = 0$  nuqtada limitga ega emasligi isbotlansin.

3. Limit ta'rifidan foydalanib,  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x-1} = \infty$  bo'lishi isbotlansin.

4.  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada  $b$  limitga ega bo'lishi uchun uning shu nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud bo'lib,

$$f(a+0) = f(a-0) = b$$

tengliklar o'rinli bo'lishi zarur va etarli bo'lishi isbotlansin.

## Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*. Springer-Verlag,

Italia, 2008.

3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, I q.* T. "Vorishashriyot", 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

### **Nazorat savollari**

9. To'planning limit nuqtasi.
10. Geyne bo'yicha funksiyaning limiti ta'rifi.
11. Koshi bo'yicha funksiyaning limiti ta'rifi.
12. Funksiyaning o'ng va chap limitlari.

# Glossariy

**Funksiyaning cheksizlikdagi limiti.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta > 0$  topilsaki,  $\forall x \in X$ ,  $x > \delta$  uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $b$  soni  $f(x)$  funksiyaning  $x_0 = +\infty$  dagi limiti deyiladi va

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

**Funksiyaning limiti cheksizlik bo'lishi.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$  uchun  $f(x) > \varepsilon$  tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti  $+\infty$  deb ataladi va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

kabi belgilanadi.

**Funksiyaning nuqtadagi chap limiti.** Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0 - \delta, x_0): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $b$  son  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi chap limiti deyiladi va

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$$

kabi belgilanadi.

**Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo'yicha).** Agar  $n \rightarrow \infty$  da  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in X$ ,  $x_n \neq x_0$ ) bo'ladigan ixtiyoriy  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun  $n \rightarrow \infty$  da  $f(x_n) \rightarrow b$  bo'lsa,  $b$  ga  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti deyiladi va  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow b$  yoki

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

**Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha).** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  topilsaki,  $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$  uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $b$  soni  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti deyiladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ .

**Funksiyaning nuqtadagi o‘ng limiti.** Agar

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (x_0, x_0 + \delta): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo‘lsa,  $b$  son  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi o‘ng limiti deyiladi va

$$b = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0 + 0)$$

kabi belgilanadi.

**Limit nuqta.** Agar  $x_0$  nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon), (\forall \varepsilon > 0)$$

atrofida  $X$  to‘plamning  $x_0$  nuqtadan farqli kamida bitta nuqtasi bo‘lsa, ya’ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X, x \neq x_0: |x - x_0| < \varepsilon$$

bo‘lsa,  $x_0$  nuqta  $X$  to‘plamning limit nuqtasi deyiladi.

**O‘ng (chap) limit nuqtasi.** Agar  $x_0$  nuqtaning ixtiyoriy

$$U_\varepsilon^+(x_0) = (x_0, x_0 + \varepsilon) \quad (U_\varepsilon^-(x_0) = (x_0 - \varepsilon, x_0)) \quad (\forall \varepsilon > 0)$$

o‘ng atrofida (chap atrofida)  $X$  to‘plamning kamida bitta nuqtasi bo‘lsa,  $x_0$  nuqta  $X$  to‘plamning o‘ng (chap) limit nuqtasi deyiladi.



# Keys banki

**11-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi:  $f(x)$  funksiya  $a$  nuqtada  $b$  limitga ega bo`lishi uchun uning shu nuqtadagi o`ng va chap limitlari mavjud bo`lib,

$$f(a + 0) = f(a - 0) = b$$

tengliklar o`rinli bo`lishi zarur va etarli bo`lishi isbotlansin.

## **Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

# 11-amaliy mashg'ulot

Na'muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l . *Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib*

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1.$$

*bo'lishi isbotlansin.*

◀  $\forall \varepsilon > 0$  sonni olib, unga ko'ra  $\delta$  ni  $\delta = \varepsilon$  deylik.

Unda  $\left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha  $x$  larda

$$\begin{aligned} |\sin x - 1| &= \left| \sin x - \sin \frac{\pi}{2} \right| = 2 \left| \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \cos \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x - \frac{\pi}{2}}{2} \right| \leq \left| x - \frac{\pi}{2} \right| < \delta = \varepsilon \end{aligned}$$

bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \sin x = 1. \blacktriangleright$$

## Misollar

**Funksiya limiti ta'rifidan foydalanib quyidagi tengliklar isbotlansin.**

569.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x - 4} = 8$

570.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 16}{x^2 - 4x} = 2$

571.  $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x + 3} = -7$

572.  $\lim_{x \rightarrow -1/3} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x + 1/3} = -4$

573.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - 5x - 2}{x - 2} = 7$

574.  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{7x^2 + 8x + 1}{x + 1} = -6$

575.  $\lim_{x \rightarrow a} \cos x = \cos a$

576.  $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0$

577.  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{x - 3} = \infty$

578.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = 0$

579.  $\lim_{x \rightarrow 3} x^4 = 81$

$$580. f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+x^2}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$$

$$581. \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

$$582. \lim_{x \rightarrow -2} \frac{1}{x^2 + 3x + 2} = 0.$$

**Quyidagi funksiyalar  $a$  nuqtada limitga ega emasligi isbotlansin.**

$$583. f(x) = \frac{|x|}{x}, \quad a = 0$$

$$584. f(x) = \cos \frac{1}{x}, \quad a = 0$$

$$585. f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad a = 0$$

$$586. f(x) = \begin{cases} x^3 + x^2 + x + 1, & \text{агар } x \geq 1 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x < 1 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad a = 1$$

$$587. f(x) = x - [x], \quad a = 2$$

$$588. f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ 2 + x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad a = 0$$

$$589. D(x) = \begin{cases} 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса.} \end{cases}$$

$a \in R$  - ixtiyoriy nuqta.

$$590. f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{агар } x \text{ иррационал сон бўлса,} \\ 1, & \text{агар } x \text{ рационал сон бўлса.} \end{cases} \quad \text{funksiya qanday}$$

nuqtalarda limitga ega?

$$591. f(x) = [x] \cdot \frac{1}{x}, \text{ funksiyaning } x \rightarrow 0 \text{ dagi limiti mavjudmi?}$$

**Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan nuqtadagi o'ng va chap limitlari topilsin.**

$$592. f(x) = \frac{x - |x|}{2x}, \quad a = 0$$

$$593. f(x) = \arccos(x-1), \quad a = 0$$

$$594. f(x) = 2^{\operatorname{tg} x}, \quad a = \frac{\pi}{2}$$

$$595. f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{агар } x > 0 \text{ бўлса,} \\ \cos x, & \text{агар } x \leq 0 \text{ бўлса.} \end{cases} \quad a = 0$$

$$596. f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad a = 0$$

$$597. f(x) = \operatorname{sgn}(\cos x), \quad a = \frac{\pi}{2}$$

$$598. f(x) = \frac{1}{x + 3^{\frac{1}{3-x}}}, \quad a = 3$$

$$599. f(x) = \frac{1}{x - [x]}, \quad a = -1$$

$$600. f(x) = x + [x^2], \quad a = 10$$

$$601. f(x) = \frac{\sin x}{|x|}, \quad a = 0$$

$$602. f(x) = \frac{\sqrt{1 - \cos 2x}}{x}, \quad a = 0$$

$$603. f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}, \quad a = 1$$

604.

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2x^n - 3}{x^n - 1}, \quad a = 1$$

## Test

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$\delta$ qanday qiymatlarida $ x-1  < \delta$ tengsizligidan $ \lg x  < 2$ tengsizlik kelib chiqadi?	$\delta \leq 0,99$	$\delta > 10$	$\delta > 2$	$\delta \leq 5$
2.	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 4x - 5}{x^2 - 1} = ?$	$\frac{7}{3}$	$\frac{3}{7}$	$-7$	$-\frac{7}{3}$
3.	$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6} = ?$	$-\frac{2}{5}$	$-1$	$-2$	$-3$
4.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^7 + 5x^6 + 4x^3}{x^7 + 2x^3} = ?$	$2$	$0$	$-2$	$1$
5.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+1)^2(3-7x)^2}{(2x-1)^4} = ?$	$\frac{49}{16}$	$16$	$0$	$\infty$
6.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^3 + 3x^2}{x^2 + 1} - x \right) = ?$	$3$	$4$	$5$	$6$
7.	$\lim_{x \rightarrow 1+0} [x] = ?$	$1$	$0$	$-2$	$1$
8.	$\lim_{x \rightarrow 1-0} [x] = ?$	$0$	$16$	$0$	$\infty$
9.	$\lim_{x \rightarrow 3+0} \operatorname{sgn} x = ?$	$1$	$4$	$5$	$6$
10.	$\lim_{x \rightarrow 2-0} \{x\} = ?$	$1$	$\frac{3}{7}$	$-7$	$-\frac{7}{3}$

# 12-mavzu. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari

## 12-ma'ruza

### Reja

1. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari.
2. Monoton funksiya limiti.
3. Koshi kriteriysi.

#### 1. Limitga ega bo'lgan funksiyalarning xossalari.

Chekli limitga ega bo'lgan funksiyalar ham yaqinlashuvchi ketma-ketlik singari qator xossalarga ega.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in R$  nuqta  $X$  ning limit nuqtasi bo'lsin.

**1-xossa.** ([2], p. 89, Th. 4.1) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiya limitga ega bo'lsa, u yagona bo'ladi.

◀ Bu xossaning isboti limit ta'riflarining ekvivalentligi hamda ketma-ketlik limitining yagonaligidan kelib chiqadi. ▶

**2-xossa.** Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b, \quad (b - \text{chekli son})$$

bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqtaning shunday  $U_\delta(x_0)$  ( $\delta > 0$ ) atrofi topiladiki, bu atrofda  $f(x)$  funksiya chegaralangan bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

bo'lsin. Funksiya limiti ta'rifga binoan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) \text{ da } |f(x) - b| < \varepsilon$$

ya'ni  $b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon$  bo'ladi. Keyingi tengsizliklardan  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtaning  $U_\delta(x_0)$  atrofida chegaralanganligi kelib chiqadi. ▶

**3-xossa.** ([2], p. 90, Th. 4.2) Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

bo'lib,  $b < p$  bo'lsa, u holda  $x_0$  nuqtaning shunday  $U_\delta(x_0)$  atrofi topiladiki, bu atrofda

$$f(x) < p$$

bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Funksiyaning limiti ta'rifiga ko'ra  $\varepsilon = p - b > 0$  uchun shunday  $\delta > 0$  son topiladiki,  $\forall x \in X, |x - x_0| < \delta, x \neq x_0$  uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < b + \varepsilon = p$$

bo'ladi. Bu esa  $\forall x \in U_\delta(x_0)$  da  $f(x) < p$  bo'lishini bildiradi. ►

Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in R$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**4-xossa.** ([2], p. 92, Corollary 4.4) Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2$$

bo'lib,  $\forall x \in X$  da  $f(x) \leq g(x)$  tengsizlik bajarilsa, u holda  $b_1 \leq b_2$ , ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2$$

bo'lsin.

Funksiya limitining Geyne ta'rifiga ko'ra  $x_0$  ga intiluvchi ixtiyoriy

$$x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \in X, x_n \neq x_0)$$

ketma-ketlik uchun

$$n \rightarrow \infty \text{ da } f(x_n) \rightarrow b_1, g(x_n) \rightarrow b_2 \quad (1)$$

bo'ladi.

Ravshanki,  $\forall n \in N$  da

$$f(x_n) \leq g(x_n) \quad (2)$$

Yaqinlashuvchi ketma-ketlikning xossalariidan foydalanib, (1) va (2) munosabatlardan  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x_n) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x_n)$ , ya'ni  $b_1 \leq b_2$  bo'lishini topamiz. ►

**5-xossa.** ([1], p. 223, Prop. 9.3.14) Faraz qilaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2 \quad (b_1, b_2 \in R)$$

limitlar mavjud bo'lsin. U holda

$$a) \forall c \in R \text{ da } \lim_{x \rightarrow x_0} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x);$$

$$b) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$v) \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x);$$

$$g) \text{ Agar } b_2 \neq 0 \text{ bo'lsa, } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)};$$

bo'ladi.

Bu tasdiqlarning isboti sonlar ketma-ketliklari ustida arifmetik amallar

bajarilishi haqidagi ma'lumotlardan kelib chiqadi.

**1-misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1}$$

limit hisoblansin.

◀ Bu limitni yuqoridagi xossalardan foydalanib hisoblaymiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + x^3 + \dots + x^n - n}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1) + (x^2-1) + (x^3-1) + \dots + (x^n-1)}{x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)[1 + (x+1) + (x^2+x+1) + \dots + (x^{n-1} + x^{n-2} + x + 1)]}{x-1} = \\ &= 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**2-misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

limit hisoblansin.

◀ Ma'lumki,  $1 - \cos x = 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ . Shuni hisobga olib topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \cdot \left[ \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right]^2 = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right] = \frac{1}{2}. \blacktriangleright \end{aligned}$$

## 2. Monoton funksiya limiti. ([2], p. 85, Item 3.3.4)

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan bo'lib,  $(x_0 - \gamma, x_0) \subset X$  bo'lsin ( $\gamma > 0$ ). Ravshanki,  $x_0 \in \mathbb{R}$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

**1-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda o'suvchi bo'lib, u yuqoridan chegaralangan bo'lsa, funksiya  $x_0$  nuqtada

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

limitga ega bo'ladi.

◀  $f(x)$  funksiya qiymatlaridan iborat bo'lgan ushbu

$$F = \{f(x) \mid x \in X \cap \{x < x_0\}\}$$

to'plamni qaraymiz. Teoremaning shartiga ko'ra bu to'plam yuqoridan



chegaralangan bo'ladi. U holda to'plamning aniq chegarasining mavjudligi haqidagi teorema ko'ra  $F$  tuplam aniq yuqori chegaraga ega. Uni  $b$  bilan belgilaymiz:

$$\sup F = b.$$

Endi,  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = b$  bo'lishini isbotlaymiz. Aniq yuqori chegara ta'rifi ko'ra:

1)  $\forall x \in X \cap \{x < x_0\}$  uchun  $f(x) \leq b$ ;

2)  $\exists x^* \in X \cap \{x < x_0\}$ ,  $x^* < x_0$ :  $f(x^*) > b - \varepsilon$ , ( $\forall \varepsilon > 0$ ) bo'ladi.

Agar  $\delta = x_0 - x^* > 0$  deyilsa, unda  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap (x_0 - \gamma, x_0)$  uchun

$$b - \varepsilon < f(x^*) \leq f(x) \leq b < b + \varepsilon$$

bo'lib,

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Bu esa

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = b$$

ekanini bildiradi. ►

Xuddi shunga o'xshash quyida keltiriladigan teorema isbotlanadi.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $(x_0, x_0 + \gamma) \subset X$  bo'lsin ( $\gamma > 0$ ). Ravshanki,  $x_0 \in R$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'ladi.

**2-teorema.** Agar  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda kamayuvchi bo'lib, u quyidan chegaralangan bo'lsa, funksiya  $x_0$  nuqtada

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x)$$

limitga ega bo'ladi.

### 3. Koshi kriteriyasi.

Endi funksiya limitining mavjudligi haqidagi umumiy teoremani keltiramiz.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in R$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**1-ta'rif.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  olinganda ham shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}), \quad \forall y \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

lar uchun

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{3}$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  uchun  $x_0$  nuqtada **Koshi sharti bajariladi** deyiladi.

**3-misol.** Ushbu  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  funksiya uchun  $x_0 = 0$  nuqtada Koshi sharti bajariladi.

◀ Haqiqatan ham,  $\forall \varepsilon > 0$  songa ko'ra  $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$  deyilsa, u holda

$$\forall x \in X \cap (U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \setminus \{0\}), \quad \forall y \in X \cap (U_{\frac{\varepsilon}{2}}(0) \setminus \{0\})$$

lar uchun (ya'ni  $|x| < \delta$ ,  $|y| < \delta$  uchun)

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &= \left| x \sin \frac{1}{x} - y \sin \frac{1}{y} \right| \leq \left| x \sin \frac{1}{x} \right| + \left| y \sin \frac{1}{y} \right| \leq \\ &\leq |x| + |y| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

bo'ladi.

**3-teorema (Koshi).**  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada chekli limitga ega bo'lishi uchun bu funksiya  $x_0$  nuqtada Koshi shartining bajarishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.**  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada chekli limitga ega bo'lsin:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Limit ta'rifiga binoan:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (U_{\delta}(x_0) \setminus \{x_0\}) \text{ uchun}$$

$$|f(x) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (4)$$

bo'ladi. Shuningdek,  $\forall y \in X \cap (U_{\delta}(x_0) \setminus \{x_0\})$  uchun ham

$$|f(y) - b| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (5)$$

bo'ladi. (4) va (5) munosabatlardan

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - b| + |b - f(y)| < \varepsilon$$

bo'lishi kelib chiqadi.

**Yetarliligi.** Aytaylik  $f(x)$  funksiya uchun (3) shart bajarilsin.  $x_0$  nuqtaga intiluvchi ikkita

$$\begin{aligned} x_n &\rightarrow x_0 \quad (x_n \neq x_0, n = 1, 2, \dots), \quad x_n \in X, \\ y_n &\rightarrow x_0 \quad (y_n \neq x_0, n = 1, 2, \dots), \quad y_n \in X, \end{aligned}$$

ketma-ketliklarni olamiz. Bu ketma-ketliklardan foydalanib, ushbu

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$$

ketma-ketlikni hosil qilamiz. Uni  $z_n$  bilan belgilaymiz. Ravshanki,  $z_n$  ketma-ketlik uchun

$$z_n \rightarrow x_0 \quad (z_n \neq x_0, n = 1, 2, \dots), \quad z_n \in X$$

bo'ladi. Teorema shartiga binoan  $\forall \varepsilon > 0$  soniga ko'ra  $\delta > 0$  sonni olamiz. Modomiki,  $n \rightarrow \infty$  da  $z_n \rightarrow x_0$  ekan, unda limit ta'rifiga ko'ra:

$$\delta > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |z_n - x_0| < \varepsilon$$

bo'ladi. Unda  $\forall m > n_0, \forall n > n_0$  uchun

$$|f(z_m) - f(z_n)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Byndan  $f(z_n)$  ketma-ketlikning fyndamental ekanligi kelib chiqadi. Demak  $f(z_n)$  ketma-ketlik yaqinlashyvchi:

$$n \rightarrow \infty \text{ da } f(z_n) \rightarrow b.$$

Unda

$$f(x_n) \rightarrow b, f(y_n) \rightarrow b$$

bo‘lib, fynksiya limitining Geyne ta’pifiga binoan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

bo‘ladi. ►

### Mashqlar

1. Ushby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$$

limit bilan aniqlanadigan fynksiya topilsin.

2. Ushby

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sin(\pi \sqrt{n^2 + 1})$$

limit xisoblansin.

### Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*. Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar, I q.* T. “Vorish-nashriyot”, 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

### Nazorat savollari

13. Limitga ega bo‘lgan funksiyalarning xossalari qanday xossalari bor?
14. Monoton funksiyaning limiti haqida nima deyish mumkin?
15. Funksiya uchun Koshi sharti.
16. Koshi kriteriysi.

# Glossariy

**Funksiyaning nuqtadagi limiti (Geyne bo'yicha).** Agar  $n \rightarrow \infty$  da  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in X$ ,  $x_n \neq x_0$ ) bo'ladigan ixtiyoriy  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun  $n \rightarrow \infty$  da  $f(x_n) \rightarrow b$  bo'lsa,  $b$  ga  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti deyiladi va  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow b$  yoki

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$$

kabi belgilanadi.

**Funksiyaning nuqtadagi limiti (Koshi bo'yicha).** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  topilsaki,  $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$  uchun

$$|f(x) - b| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $b$  soni  $f(x)$  **funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi limiti** deyiladi:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b.$$

Bu ta'rifni qisqacha quyidagicha ham aytish mumkin:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}): |f(x) - b| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ .

**Koshi sharti.** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  olinganda ham shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}), \forall y \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

lar uchun

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  uchun  $x_0$  nuqtada Koshi sharti bajariladi deyiladi.

**Limitning yagonaligi.** Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiya limitga ega bo'lsa, u yagona bo'ladi.

# Keys banki

**12-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{1 + x^n}$$

limit bilan aniqlanadigan funksiya topilsin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

# 12-amaliy mashg'ulot

## Na'muna uchun misollar yechimi

### 1 – misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$$

*limit hisoblansin.*

◀ Avvalo  $1-x=t$  deb olamiz. Unda  $x \rightarrow 1$  da  $t \rightarrow 0$  bo'ladi. SHuni e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1-x) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (1-t) = \lim_{t \rightarrow 0} t \cdot \operatorname{ctg} \frac{\pi t}{2} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t \cos \frac{\pi t}{2}}{\sin \frac{\pi t}{2}} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\sin \frac{\pi t}{2}} = \frac{2}{\pi}.$$



## Misollar

Quyidagi limitlar topilsin.

605.  $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x-4}{\sqrt{x}-2}$

606.  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)^2}{x^3-8}$

607.  $\lim_{x \rightarrow 16} \frac{\sqrt[4]{x^3}-8}{\sqrt{x}-4}$

608.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^n-1}{x^m-1}, \quad (n, m \in \mathbb{N})$

609.  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[m]{x}-1}{\sqrt[n]{x}-1}, \quad (n, m \in \mathbb{N})$

610.  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{n}{1-x^n} - \frac{m}{1-x^m} \right), \quad (n, m \in \mathbb{N})$

611.  $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$

612.  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{1+\frac{4}{x}} - \sqrt[4]{1+\frac{3}{x}}}{1-\sqrt[5]{1-\frac{5}{x}}}$

613.  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt[n]{1+ax} \cdot \sqrt[m]{1+bx} - 1}, \quad (n, m \in \mathbb{N})$

$$614. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2} + x)^n - (\sqrt{1+x^2} - x)^n}{x}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$615. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}}{\sqrt{x+1}}$$

$$616. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + x^2 + \dots + x^n - n}{x-1}, \quad n \in \mathbb{N}$$

$$617. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$618. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 1}{x^2 - 2} \right)^{x^2}$$

$$619. \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt[3]{1-2x}$$

Quyidagi limitlar topilsin.

$$620. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin mx^2}{nx^2}$$

$$622. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x}$$

$$624. \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x}$$

$$626. \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{\pi^2 - x^2}$$

$$628. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( \cos \frac{1}{x} - \cos \frac{3}{x} \right)$$

$$630. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x \cdot \cos^2 2x \cdot \cos^3 3x}{x^2}$$

$$632. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$634. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh} x}{x}$$

$$636. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\operatorname{ch} 2x}{\operatorname{ch} x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$638. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left( 3^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$$

$$621. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\frac{\pi}{2} - x}$$

$$623. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x^3 - 1}{\sin^6 2x}$$

$$625. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\sin 2x \cdot \sin x} - \frac{1}{\sin^2 x} \right)$$

$$627. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos x}}{\operatorname{tg} x^2}$$

$$629. \lim_{n \rightarrow \infty} \sin^2 \pi \sqrt{n^2 + n}$$

$$631. \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\sin x}{\sin a} \right)^{\frac{1}{x^2 - a^2}}$$

$$633. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\sin x)^{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$635. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} 2x - 1}{\cos x - 1}$$

$$637. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x + \cos x)^{\frac{1}{2x}}$$

$$639. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{7x} - e^{2x}}{\operatorname{tg} x}$$

$$640. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin 5x} - e^{\sin x}}{\ln(1+2x)}$$

$$642. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos 5x}{\ln \cos 4x}$$

$$644. \lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1 + \sin x - \cos x}{1 + \sin 4x - \cos 4x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$646. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x);$$

$$647. \text{ a) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2}); \quad \text{ b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{1+x+x^2} - \sqrt{1-x+x^2})$$

$$641. \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 \left( 4^{\frac{1}{x}} - 4^{\frac{1}{x+1}} \right)$$

$$643. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{a^x + b^x}{2} \right)^{\frac{1}{x}} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$645. \lim_{x \rightarrow +0} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{x}}$$

$$\text{ b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x)$$



## Test

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{\sqrt{x-2} - 2}{x-6} = ?$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
2.	$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}} = ?$	3	5	7	9
3.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 + 1})$	0	1	-1	$\infty$
4.	$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^4 + 13x^2 - 7} - 2x^2) = ?$	$\frac{13}{4}$	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{13}{4}$
5.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 4x}{\sin x} = ?$	4	3	2	1
6.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 6x - \sin 7x} = ?$	-1	0	1	$\infty$
7.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin 2x}{x} = ?$	2	0	5	7
8.	$\lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x}{x+1} \right)^x = ?$	$\frac{1}{e}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$
9.	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{10^x - 1}{2^x - 1} = ?$	$\frac{\ln 10}{\ln 2}$	$\frac{1}{e}$	0	-1
10.	$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x^2 + 4}{x^2 - 4} \right)^{x^2} = ?$	$e^8$	$e^2$	$e^4$	$e$

# 13-mavzu. Funktsiyalarni taqqoslash

## 13-ma'ruza

### Reja

1. Cheksiz katta va cheksiz kichik funktsiyalar.
2. "O" va "o" belgilar, ularning xossalari.
3. Funktsiyalarning ekvivalentligi.

#### 1. Cheksiz katta va cheksiz kichik funktsiyalar.

Aytaylik,  $\alpha(x)$  hamda  $\beta(x)$  funktsiyalar  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in R$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**1-ta'rif.** ([2], p. 130, Def. 5.8) Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

bo'lsa,  $\alpha(x)$  funktsiya  $x \rightarrow x_0$  da **cheksiz kichik funktsiya** deyiladi.

Masalan,  $x \rightarrow 0$  da  $\alpha(x) = \sin x$  funktsiya cheksiz kichik funktsiya bo'ladi.

**2-ta'rif.** ([2], p. 130, Def. 5.8) Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty$$

bo'lsa,  $\beta(x)$  funktsiya  $x \rightarrow x_0$  da **cheksiz katta funktsiya** deyiladi.

Masalan,  $x \rightarrow 0$  da  $\beta(x) = \frac{1}{x}$  funktsiya cheksiz katta funktsiya bo'ladi.

Cheksiz kichik hamda cheksiz katta funktsiyalar cheksiz kichik hamda cheksiz katta miqdorlar kabi xossalarga ega bo'ladi:

1) Chekli sondagi cheksiz kichik funktsiyalar yig'indisi cheksiz kichik funktsiya bo'ladi;

2) Chegaralangan funktsiyaning cheksiz kichik funktsiya bilan ko'paytmasi cheksiz kichik funktsiya bo'ladi;

3) Agar  $\alpha(x)$  ( $\alpha(x) \neq 0$ ) cheksiz kichik funktsiya bo'lsa,  $\frac{1}{\alpha(x)}$  cheksiz katta funktsiya bo'ladi.

4) Agar  $\beta(x)$  cheksiz katta funktsiya bo'lsa,  $\frac{1}{\beta(x)}$  cheksiz kichik funktsiya bo'ladi.

#### 2. "O" va "o" belgilar, ularning xossalari.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funktsiyalari  $X \subset R$  to'plamda berilgan

bo‘lib,  $x_0$  nuqta  $X$  to‘planning limit nuqtasi bo‘lsin.

**3-ta’rif.** ([2], p. 123, Def. 5.1) Agar shunday o‘zgarmas  $C > 0$  soni va shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$  uchun

$$|f(x)| \leq C |g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) : |f(x)| \leq C |g(x)|$$

bo‘lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiya  $g(x)$  funksiyaga nisbatan **chegaralangan** deyiladi va  $f(x) = O(g(x))$  kabi belgilanadi.

Agar

$$\exists C \in \mathbb{R}, \exists d \in \mathbb{R}_+, \forall x, |x| > d : |f(x)| \leq C |g(x)|$$

bo‘lsa,  $x \rightarrow x_0 = \infty$  da  $f(x)$  funksiya  $g(x)$  funksiyaga nisbatan **chegaralangan** deyiladi va yuqoridagidek  $f(x) = O(g(x))$  kabi belgilanadi.

Masalan,  $x \rightarrow 0$  da  $x^2 = O(x)$  bo‘ladi, chunki  $x \in (-1, 1)$  da  $|x^2| \leq |x|$ .

([2], p. 126, i))

Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqta atrofida chegaralangan bo‘lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) = O(1)$  kabi yoziladi.

“*O*” ning xossalari ([2], p. 125, Properties):

1) Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = b$$

bo‘lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) = O(g(x))$  bo‘ladi.

2) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) = O(g(x))$  va  $g(x) = O(h(x))$  bo‘lsa, u holda  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) = O(h(x))$  bo‘ladi. Demak,  $x \rightarrow x_0$  da  $O(O(h(x))) = O(h(x))$ .

3) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) = O(g(x))$  va  $h(x) = O(g(x))$  bo‘lsa, u holda  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) + h(x) = O(g(x))$  bo‘ladi.

4) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1(x) = O(g_1(x))$  va  $f_2(x) = O(g_2(x))$  bo‘lsa, u holda  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1(x) \cdot f_2(x) = O(g_1(x) \cdot g_2(x))$  bo‘ladi.

**4-ta’rif.** ([2], p. 124, Def. 5.1) Agar har qanday  $\varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

uchun

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya’ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

bo‘lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiya  $g(x)$  funksiyaga nisbatan **yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya** deyiladi va  $f(x) = o(g(x))$  yoki  $f = o(g)$  kabi belgilanadi.

“*o*” ning xossalari ([2], p. 125, Properties):

Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f = o(g)$  bo'lsa, u holda  $x \rightarrow x_0$  da  $f = O(g)$  bo'ladi.

1) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f = o(g)$ ,  $g = o(h)$  bo'lsa, u holda  $x \rightarrow x_0$  da  $f = o(h)$  bo'ladi. Demak,  $o(o(h)) = o(h)$ .

2) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1 = o(g)$ ,  $f_2 = o(g)$  bo'lsa, u holda  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1 + f_2 = o(g)$  bo'ladi.

3) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1 = o(g_1)$ ,  $f_2 = o(g_2)$  bo'lsa, u holda  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1 \cdot f_2 = o(g_1 \cdot g_2)$  bo'ladi. Demak,  $o(g_1) \cdot o(g_2) = o(g_1 \cdot g_2)$ .

### 3. Funktsiyalarning ekvivalentligi.

Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalari  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**5-ta'rif.** ([2], p. 124, Def. 5.1)  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar ( $x \neq x_0$  da  $g(x) \neq 0$ ) uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bo'lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  **ekvivalent funksiyalar** deyiladi va  $f(x) \sim g(x)$  ( $x \rightarrow x_0$ ) kabi belgilanadi.

Masalan,  $x \rightarrow 0$  da  $f(x) = \sin x$  va  $g(x) = x$  funksiyalar ekvivalent funksiyalar bo'ladi:  $\sin x \sim x$  ( $x \rightarrow 0$ ). ([2], p. 124, Example 5.3)

**1-teorema.**  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar ( $x \neq x_0$  da  $g(x) \neq 0$ ) ekvivalent bo'lishi uchun

$$g(x) - f(x) = o(g(x))$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.**  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \sim g(x)$  bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ 1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,  $g(x) - f(x) = o(g(x))$ .

**Yetarliligi.**  $x \rightarrow x_0$  da  $g(x) - f(x) = o(g(x))$  bo'lsin. U holda  $x \rightarrow x_0$  da

$$1 - \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = \frac{o(g(x))}{g(x)}$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left[ 1 - \frac{f(x)}{g(x)} \right] = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - f(x)}{g(x)} = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

ya'ni  $f(x) \sim g(x)$  ekanini bildiradi. ►

“~” ning xossalari:

1)  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$ .

2) Har qanday funksiya uchun  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \sim f(x)$  bo'ladi.

3) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \sim g(x)$ ,  $g(x) \sim h(x)$  bo'lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \sim h(x)$  bo'ladi.

4) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1(x) \sim g_1(x)$ ,  $f_2(x) \sim g_2(x)$  bo'lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1(x) \cdot f_2(x) \sim g_1(x) \cdot g_2(x)$  bo'ladi.

Funksiyaning asimptotik yoyilmasi. Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g_1(x)} = c_1 = const \neq 0$$

bo'lsin. Unda  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \sim c g_1(x)$  bo'lib,

$$f(x) = c_1 g_1(x) + o(g_1(x))$$

bo'ladi. Bu holda  $c_1 g_1(x)$  funksiya  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiyaning **bosh qismi** deyiladi.

Faraz qilaylik,  $x \rightarrow x_0$  da  $c_2 g_2(x)$  ( $c_2 = const \neq 0$ ) funksiya  $f(x) - c_1 g_1(x)$  ning bosh qismi bo'lsin. U holda  $x \rightarrow x_0$  da

$$f(x) - c_1 g_1(x) \sim c_2 g_2(x)$$

bo'lib,

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + o(g_2(x))$$

bo'ladi.

Bu jarayonni  $n$  marta takrorlab,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiyaning quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n(x)) \quad (1)$$

bunda  $c_i \neq 0$  va

$$g_{i+1}(x) = o(g_i(x)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Odatda, (1) formula  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiyaning **asimptotik yoyilmasi** deyiladi.

Endi funksiyalarning ekvivalentligiga asoslangan holda funksiyalarning limitini hisoblashda foydalaniladigan teoremani keltiramiz.

**2-teorema.** ([2], p. 128, Prop. 5.5) Agar  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1(x) \sim f_2(x)$ ,  $g_1(x) \sim g_2(x)$  bo'lib, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

limit mavjud bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$$

limit ham mavjud va

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $x \rightarrow x_0$  da  $f_1(x) \sim f_2(x)$ ,  $g_1(x) \sim g_2(x)$  bo'lsin. Unda ravshanki,  $x \rightarrow x_0$  da

$$\begin{aligned} f_2(x) &= f_1(x) + o(f_1(x)), \\ g_2(x) &= g_1(x) + o(g_1(x)) \end{aligned}$$

bo'ladi. Bu munosabatlardan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_2(x)}{g_2(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x) + o(f_1(x))}{g_1(x) + o(g_1(x))} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f_1(x)}{g_1(x)}. \blacktriangleright$$

**Misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$$

limit hisoblansin.

◀ Ravshanki,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x^2}$$

Endi  $\sin \frac{3x}{2} = \frac{3x}{2} + o(x)$  va  $\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x)$  bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \frac{3}{2}x + o(x) \right) \left( \frac{1}{2}x + o(x) \right)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

### Mashqlar

1. Aytaylik,  $n \in \mathbb{N}$ :  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  bo'lsin. U holda  $x \rightarrow +\infty$  da

$$x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \dots + a_{n-1} x + a_n = O(x^n)$$

bo'lishi isbotlansin.

2. Agar  $x \rightarrow x_0$  da

$$f(x) - g(x) = o(f(x))$$

bo'lsa,  $x \rightarrow x_0$  da

$$f(x) - g(x) = o(g(x))$$

bo‘lishi isbotlansin.

3. Agar  $x \rightarrow x_0$  da

$$f_1(x) \sim g_1(x), f_2(x) \sim g_2(x)$$

bo‘lsa,  $x \rightarrow x_0$  da

$$f_1(x) + f_2(x) \sim g_1(x) + g_2(x),$$

$$f_1(x) - f_2(x) \sim g_1(x) - g_2(x),$$

munosabatlar o‘rinli bo‘ladimi?

### Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*. Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’ruzalar, I q.* T. “Vorish-nashriyot”, 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

### Nazorat savollari

17. Cheksiz kichik funksiya.
18. Cheksiz katta funksiya.
19. Nisbatan chegaralangan funksiya.
20. Nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya.
21. Funksiyaning asimptotik yoyilmasi.
22. Funksiyaning bosh qismi deyiladi.

# Glossariy

**Cheksiz katta funksiya.** Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \beta(x) = \infty$$

bo'lsa,  $\beta(x)$  funksiya  $x \rightarrow x_0$  da cheksiz katta funksiya deyiladi.

**Cheksiz kichik funksiya.** Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha(x) = 0$$

bo'lsa,  $\alpha(x)$  funksiya  $x \rightarrow x_0$  da cheksiz kichik funksiya deyiladi.

**Cheksizlikda funksiya nisbatan chegaralangan (O).** Agar

$$\exists C \in \mathbb{R}, \exists d \in \mathbb{R}_+, \forall x, |x| > d: |f(x)| \leq C |g(x)|$$

bo'lsa,  $x \rightarrow x_0 = \infty$  da  $f(x)$  funksiya  $g(x)$  funksiya nisbatan chegaralangan deyiladi va yuqoridagidek  $f(x) = O(g(x))$  kabi belgilanadi.

**Ekvivalent funksiyalar.**  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar ( $x \neq x_0$  da  $g(x) \neq 0$ ) uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

bo'lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  va  $g(x)$  ekvivalent funksiyalar deyiladi va  $f(x) \sim g(x)$  ( $x \rightarrow x_0$ ) kabi belgilanadi.

**Funksiyaga nisbatan chegaralangan (O).** Agar shunday o'zgarmas  $C > 0$  soni va shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$  uchun

$$|f(x)| \leq C |g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\exists C \in \mathbb{R}_+, \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}): |f(x)| \leq C |g(x)|$$

bo'lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiya  $g(x)$  funksiya nisbatan chegaralangan deyiladi va  $f(x) = O(g(x))$  kabi belgilanadi.



**Funksiyaga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya.** Agar har qanday  $\varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\})$$

uchun

$$|f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in X \cap (U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}) : |f(x)| \leq \varepsilon |g(x)|$$

bo'lsa,  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiya  $g(x)$  funksiya nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi va  $f(x) = o(g(x))$  yoki  $f = o(g)$  kabi belgilanadi.

**Funksiyaning asimptotik yoyilmasi.**  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiyaning quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x) = c_1 g_1(x) + c_2 g_2(x) + \dots + c_n g_n(x) + o(g_n(x))$$

bunda  $c_i \neq 0$  va

$$g_{i+1}(x) = o(g_i(x)) \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

**Funksiyaning bosh qismi.** Aytaylik,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g_1(x)} = c_1 = \text{const} \neq 0$$

bo'lsin. Unda  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \sim c g_1(x)$  bo'lib,

$$f(x) = c_1 g_1(x) + o(g_1(x))$$

bo'ladi. Bu holda  $c_1 g_1(x)$  funksiya  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x)$  funksiyaning bosh qismi deyiladi.

# Keys banki

**13-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Aytaylik,  $n \in \mathbb{N}$ :  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$  bo`lsin. U holda  $x \rightarrow +\infty$  da

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \dots + a_{n-1}x + a_n = O(x^n)$$

bo`lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma`lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

# 13-amaliy mashg'ulot

## Na'muna uchun misollar yechimi

**Misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2}$$

limit hisoblansin.

◀ Ravshanki,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 2x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x^2}$$

Endi  $\sin \frac{3x}{2} = \frac{3x}{2} + o(x)$  va  $\sin \frac{x}{2} = \frac{x}{2} + o(x)$  bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin \frac{3x}{2} \cdot \sin \frac{x}{2}}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\frac{3}{2}x + o(x)\right) \left(\frac{1}{2}x + o(x)\right)}{x^2} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{4}x^2 + o(x^2)}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \sin 2x}{x^2} = \frac{3}{2}. \blacktriangleright$$

## Misollar

$\alpha$  va  $\beta$  larning qanday qiymatlarda  $f(x)$  funksiya cheksiz kichik bo'ladi?

665.  $f(x) = \frac{x^2 \cdot (x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta, \quad x \rightarrow \infty$

666.  $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x^3} - \alpha x - \beta, \quad x \rightarrow +\infty$

667.  $f(x) = \frac{xe^x}{e^x - 1} - \alpha x - \beta, \quad x \rightarrow +\infty$

668.  $f(x) = x^\alpha \cdot \sin \frac{1}{x^\beta}, \quad x \rightarrow +0$

669.  $f(x) = (1 - x^\alpha)^{x^\beta}, \quad x \rightarrow +0$

670.  $f(x) = \frac{\ln(1 + x^\alpha)}{x^\beta}, \quad x \rightarrow +0$

671.  $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta, \quad x \rightarrow +\infty$

$\alpha$  va  $\beta$  larning qanday qiymatlarida  $f(x)$  va  $g(x) = \alpha x^\beta$  funksiyalar

ekvivalent bo'ladi?

672.  $f(x) = \sqrt{2x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$  a)  $x \rightarrow +0$ , b)  $x \rightarrow +\infty$

673.  $f(x) = \sqrt{1-2x} - \sqrt[3]{1-3x}$ ,  $x \rightarrow 0$

674.  $f(x) = \sin^2 2x + \arcsin^2 x + 2\operatorname{arctg} x^2$ ,  $x \rightarrow 0$

675.  $f(x) = 1 - \cos\left(1 - \cos \frac{1}{x}\right)$ ,  $x \rightarrow \infty$

$x \rightarrow 0$  da cheksiz kichik funksiyaning tartibi  $n$  aniqlansin.

676.  $f(x) = 3\sin^2 x^2 - 5x^2$

677.  $f(x) = \sqrt{4-x^4} + x^2 - 2$

678.  $f(x) = 1 - x^4 - \cos x^2$

679.  $f(x) = 2\sin x - \operatorname{tg} 2x$

680.  $f(x) = \sin(\sqrt{x^2 + 9} - 3)$

Cheksiz katta funksiyaning tartibi  $n$  aniqlansin.

681.  $f(x) = \frac{x^5}{2-x+3x^2}$ ,  $x \rightarrow \infty$

682.  $f(x) = \sqrt{x^4 - x + 1}$ ,  $x \rightarrow \infty$

683.  $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x+2} - 2\sqrt{x+1} + \sqrt{x}}$ ,  $x \rightarrow +\infty$

684.  $f(x) = \frac{\ln x}{(x-1)^2}$ ,  $x \rightarrow 1$

685.  $f(x) = \operatorname{ctg}^2 x^3$ ,  $x \rightarrow 0$

686.  $f(x) = \frac{1 - \cos x \cdot \sqrt{\cos 2x}}{x^5}$ ,  $x \rightarrow 0$

Quyidagi munosabatlar isbotlansin.

687.  $o(o(f)) = o(f)$

688.  $O(o(f)) = o(f)$

689.  $O(O(f)) = O(f)$

690.  $o(f) + O(f) = O(f)$

691.  $o(f) \cdot O(f) = o(f)$



## Test

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^3 - x}$ funksiya $x \rightarrow 1$ qanday funksiya bo'ladi?	Cheksiz kichik	Cheksiz katta	Davriy	Toq
2.	$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$ funksiya $x \rightarrow +\infty$ qanday funksiya bo'ladi?	Cheksiz kichik	Cheksiz katta	Davriy	Toq
3.	$f(x) = \frac{1}{x^3 - 4x^2 + 4x} - \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$ funksiya $x \rightarrow 2$ qanday funksiya bo'ladi?	Cheksiz katta	Cheksiz kichik	Toq	Davriy
4.	$f(x) = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x$ funksiya $x \rightarrow -\infty$ qanday funksiya bo'ladi?	Cheksiz katta	Cheksiz kichik	Toq	Davriy
5.	$\alpha$ va $\beta$ qanday qiymatlarida $f(x) = \frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2} - \alpha x - \beta$ funksiya $x \rightarrow \infty$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi?	$\alpha = 1,$ $\beta = -3$	$\alpha = -2,$ $\beta = 1$	$\alpha = 0,$ $\beta = -4$	$\alpha = 0,$ $\beta = 0$
6.	$\alpha$ va $\beta$ qanday qiymatlarida $f(x) = \sqrt{4x^2 + x + 1} - \alpha x - \beta$ funksiya $x \rightarrow +\infty$ cheksiz kichik funksiya bo'ladi?	$\alpha = 2,$ $\beta = \frac{1}{4}$	$\alpha = 0,$ $\beta = 1$	$\alpha = 0,$ $\beta = 2$	$\alpha = 0,$ $\beta = 0$
7.	Quyidagi ifodalardan qaysi biri $x \rightarrow 0$ to'g'ri?	$x^2 = o(x)$	$x^2 = o(x^2)$	$x^2 = o(x^3)$	$x^2 = o(x^4)$
8.	Quyidagi ifodalardan qaysi biri $x \rightarrow \infty$ to'g'ri?	$x = o(x^2)$	$x = o(x)$	$x^2 = o(x)$	$x^3 = o(x)$
9.	Quyidagi ifodalardan qaysi biri $x \rightarrow 0$ to'g'ri?	$x^2 = O(x^2)$	$x = O(x^2)$	$x = O(x^3)$	$x = O(x^3)$
10.	Quyidagi ifodalardan qaysi biri $x \rightarrow \infty$ noto'g'ri?	$x^2 = o(x)$	$x = o(x^2)$	$x = o(x^3)$	$x = o(x^4)$

# 14-mavzu. Funktsiyaning uzluksizligi

## 14-ma'ruza

### Reja

1. Funktsiyaning uzluksizligi ta'riflari.
2. Funktsiyaning uzilishi va uzilish turlari.
3. Monoton funktsiyaning uzilish nuqtasi.

#### 1. Funktsiyaning uzluksizligi ta'riflari.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funktsiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in X$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**1-ta'rif.** ([1], p. 227, Def. 9.4.1) Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad (1)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funktsiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

Demak,  $f(x)$  funktsiyaning  $x_0$  nuqtada uzluksizligi ushbu

1)  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$  ning mavjudligi;

2)  $b = f(x_0)$  bo'lishi;

shartlarining bajarilishi bilan ifodalanadi.

**Misollar. 1.** ([2], p. 81, Prop. 3.20) Ushbu

$$f(x) = x^4 + x^2 + 1$$

funktsiya  $\forall x_0 \in R$  nuqtada uzluksiz bo'ladi, chunki

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^4 + x^2 + 1) = x_0^4 + x_0^2 + 1 = f(x_0).$$

2. ([1], p. 228, Example 9.4.4) Ushbu

$$f(x) = (\text{sign}x)^2 = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ бўлса,} \end{cases}$$

funktsiyani qaraylik. Ravshanki,  $\forall x_0 \in R$  nuqtada  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$  bo'ladi. Demak,

qaralayotgan funktsiya  $\forall x_0 \in R$ ,  $x_0 \neq 0$  nuqtada uzluksiz bo'ladi. Ammo  $f(0) = 0$  bo'lganligi sababli

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \neq f(0)$$

bo'ladi. Demak,  $f(x)$  funktsiya  $x_0 = 0$  nuqtada uzluksiz bo'lmaydi.

Funktsiya limitining Geyne va Koshi ta'riflariga binoan funktsiyaning  $x_0$  nuqtadagi uzluksizligini quyidagicha ta'riflash mumkin.

**2-ta'rif.** Agar

$$n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow x_0 \text{ (} x_n \in X, n = 1, 2, \dots \text{)}$$

bo'ladigan ixtiyoriy  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun

$$n \rightarrow \infty \text{ da } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**3-ta'rif.** ([2], p. 76, Def. 3.14) Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$$

uchun

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

Odatda,  $x - x_0$  ayirma **argument orttirmasi**,  $f(x) - f(x_0)$  esa **funksiya orttirmasi** deyilib, ular mos ravishda  $\Delta x$  va  $\Delta f$  kabi belgilanadi:

$$\Delta x = x - x_0, \Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

Unda funksiya uzluksizligining 1-ta'rifidagi (1) munosabat ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f = 0 \quad (2)$$

ko'rinishga keladi.

Demak, (2) munosabatni funksiyaning  $x_0$  nuqtada uzluksizligi ta'rifi sifatida qarash mumkin.

Aytaulik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in X$  nuqta  $X$  to'plamning o'ng (chap) limit nuqtasi bo'lsin.

**4-ta'rif.** ([1], p. 231, Def. 9.5.1) Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0))$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Demak,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz bo'lganda funksiyaning o'ng (chap) limiti uning  $x_0$  nuqtadagi qiymatiga teng bo'ladi:

$$f(x_0 + 0) = f(x_0) \quad (f(x_0 - 0) = f(x_0)).$$

Keltirilgan ta'riflardan,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada ham o'ngdan, ham chapdan bir vaqtda uzluksiz bo'lsa, funksiya shu nuqtada uzluksiz bo'lishini topamiz.

Umuman,  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lishi,  $\forall \varepsilon > 0$  berilganda ham unga ko'ra shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  topilib,

$$\forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \quad \Rightarrow \quad f(x) \in U_\varepsilon(f(x_0))$$

bo'lishini bildiradi.

**5-ta'rif.** ([2], p. 80, Def. 3.19) Agar  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda uzluksiz deyiladi.

**6-ta'rif.**  $X \subset R$  to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalardan iborat to'plam uzluksiz funksiyalar to'plami deyiladi va  $C(X)$  kabi belgilanadi.

Masalan,  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lishi,  $f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  segmentining har bir nuqtasida uzluksiz, ya'ni  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalning har bir



nuqtasida uzluksiz,  $a$  nuqtada o'ngdan,  $b$  nuqtada esa chapdan uzluksiz bo'lishini bildiradi.

**3-misol.** ([2], p. 81, Prop. 3.20)  $f(x) = \sin x$  bo'lsin.  $U$  holda  $f(x) \in C(R)$  bo'ladi.

◀  $x_0 \in R$  nuqtani olib,  $\forall \varepsilon > 0$  ga ko'ra  $\delta = \varepsilon$  deymiz.

Unda  $\forall x, |x - x_0| < \delta$ :

$$|\sin x - \sin x_0| = 2 \left| \cos \frac{x + x_0}{2} \cdot \sin \frac{x - x_0}{2} \right| \leq |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. ▶

Xuddi shunga o'xshash  $f(x) = \cos x$  funksiya  $R$  da,  $f(x) = \operatorname{tg} x$  va  $f(x) = \operatorname{ctg} x$  funksiyalarning esa o'z aniqlanish to'plamlarida uzluksiz bo'lishi ko'rsatiladi.

**4-misol.** ([1], p. 230, Prop. 9.4.10)  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  bo'lsin.  $U$  holda  $f(x) \in C(R)$  bo'ladi.

◀ Ravshanki,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (a^{x-x_0} - 1) = 0.$$

Unda

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{x \rightarrow x_0} (a^{x-x_0} - 1) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} a^{x_0} (a^{x-x_0} - a^{x_0}) = 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow a^{x_0} \lim_{x \rightarrow x_0} (a^x - a^{x_0}) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} a^x = a^{x_0} \end{aligned}$$

bo'ladi. ▶

**5-misol.** Aytaylik,

$$f(x) = \begin{cases} -1, & \text{agar } x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ 1, & \text{agar } x > 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$f(+0) = 1, \quad f(-0) = -1$$

bo'lib, berilgan funksiya  $X = R \setminus \{0\}$  to'plamda uzluksiz bo'ladi.

## 2. Funksiyaning uzilishi. ([1], p. 233-234)

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da  $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$  berilgan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$  bo'lsin.

Ma'lumki,  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$f(x_0 + 0), \quad f(x_0 - 0) \tag{3}$$

mavjud bo'lib,

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0) \tag{4}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lar edi.

Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lmasa, unda  $x_0$  nuqta  $f(x)$

funksiyaning **uzilish nuqtasi** deyiladi.

**7-ta'rif.** Agar (3) limitlar mavjud va chekli bo'lib, (4) tengliklarning birortasi o'rinli bo'lmasa,  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning **birinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

Bunda

$$f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$$

ayirma funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi sakrashi deyiladi.

Masalan,  $f(x) = [x]$  funksiya  $x = p$  ( $p \in \mathbb{Z}$ ) nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki

$$f(p+0) = p, f(p_0 - 0) = p - 1$$

bo'lib,

$$f(p+0) \neq f(p_0 - 0)$$

bo'ladi.

Agar hech bo'lmaganda (3) limitlarning birortasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa,  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning **ikkinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya  $x = 0$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi, chunki bu funksiyaning  $x = 0$  nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud emas.

Murakkab funksiyaning uzluksizligi. Faraz qilaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda,  $u = F(y)$  funksiya esa  $Y_f$  to'plamda aniqlangan bo'lib, ular yordamida  $u = F(f(x))$  murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

**1-teorema.** ([1], p. 230, Prop. 9.4.13) Agar  $y = f(x)$  funksiya  $x_0 \in X$  nuqtada,  $u = F(y)$  funksiya esa  $y_0 \in Y_f$  nuqtada ( $y_0 = f(x_0)$ ) uzluksiz bo'lsa,  $F(f(x))$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◀  $u = F(y)$  funksiya  $y_0 \in Y_f$  nuqtada ( $y_0 = f(x_0)$ ) uzluksiz bo'lgani uchun

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \sigma > 0, \forall y, |y - y_0| < \sigma: |F(y) - F(y_0)| < \varepsilon \quad (5)$$

ya'ni,  $|F(f(x)) - F(f(x_0))| < \varepsilon$  bo'ladi.

Shartga ko'ra  $y = f(x)$  funksiya  $x_0 \in X$  nuqtada uzluksiz. U holda yuqoridagi  $\sigma > 0$  ga ko'ra

$$\exists \delta > 0, \forall x, |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| < \sigma$$

ya'ni,

$$|y - y_0| < \sigma \quad (4)$$

bo'ladi.

(5) va (6) munosabatlardan

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x, |x - x_0| < \delta: |F(f(x)) - F(f(x_0))| < \varepsilon$   
bo'lishi kelib chiqadi. Demak,  $F(f(x))$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz. ►

### 3. Monoton funksiya uzilish nuqtasining xarakteri.

**2-teorema.**  $[a, b] \subset \mathbb{R}$  da monoton bo'lgan  $f(x)$  funksiya shu  $[a, b]$  ning istalgan nuqtasida yoki uzluksiz bo'ladi, yoki birinchi tur uzilishga ega bo'ladi.

◀  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da o'suvchi bo'lsin. Aytaylik,

$$x_0 \in [a, b], (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset [a, b] \quad (\delta > 0)$$

bo'lsin. Monoton funksiyaning limiti hakidagi teorema ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0) \leq f(x_0),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0) \geq f(x_0)$$

bo'ladi. Agar

$$f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz, agar

$$f(x_0 - 0) < f(x_0 + 0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da kamayuvchi bo'lganda ham tasdiq isbotlanadi. ►

### Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin x, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irrational son bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning  $x_k = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) nuqtalarida uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x - \text{irrational son bo'lsa,} \end{cases}$$

Dirixle funksiyasi  $\mathbb{R}$  ning har bir nuqtasida uzilishga ega ekanligi isbotlansin.

3. Ushbu

$$f(x) = [x] \cdot \sin \pi x \quad (x \in \mathbb{R})$$

funksiya uchun  $f(x) \in C(\mathbb{R})$  bo'lishi ko'rsatilsin.

### Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*. Springer-Verlag,

Italia, 2008.

3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, I q.* T. "Vorishashriyot", 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

#### **Nazorat savollari**

23. Funksiyani nuqtadagi uzluksizligi.
24. Funksiyani to'plamdagi uzluksizligi.
25. Argument orttirmasi.
26. Funksiyaning orttirmasi.
27. Funksiyaning uzilish nuqtalari.

# Glossariy

**Argument orttirmasi.**  $\Delta x = x - x_0$  ayirma argument orttirmasi deyiladi.

**Bir tomonlama uzluksizlik.** Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = f(x_0))$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

**Birinchi tur uzilish nuqtasi.** Agar  $f(x_0 + 0)$ ,  $f(x_0 - 0)$  limitlar mavjud va chekli bo'lib,  $f(x_0 - 0) = f(x_0) = f(x_0 + 0)$  tengliklarning birortasi o'rinli bo'lmasa,  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning birinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

**Funksiya orttirmasi.**  $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ayirma funksiya orttirmasi deyiladi.

**Funksiyaning nuqtadagi sakrashi.**  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  ayirma funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi sakrashi deyiladi.

**Ikkinchi tur uzilish nuqtasi.** Agar hech bo'lmaganda  $f(x_0 + 0)$ ,  $f(x_0 - 0)$  limitlarning birortasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa,  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning ikkinchi tur uzilish nuqtasi deyiladi.

**Uzilish nuqtasi.** Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lmasa, unda  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning uzilish nuqtasi deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Geyne bo'yicha).** Agar

$$n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \in X, n = 1, 2, \dots)$$

bo'ladigan ixtiyoriy  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun

$$n \rightarrow \infty \text{ da } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Koshi bo'yicha).** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$$

uchun

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada).** Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (to'plamda).** Agar  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiyalar to'plami.**  $X \subset R$  to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalardan iborat to'plam uzluksiz funksiyalar to'plami deyiladi va  $C(X)$  kabi belgilanadi.

# Keys banki

**14-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{agar } x \text{ – ratsional son bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x \text{ – irratsional son bo'lsa,} \end{cases}$$

Dirixle funksiyasi  $R$  ning har bir nuqtasida uzilishga ega ekanligi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

# 14-amaliy mashg'ulot

## Na'muna uchun misollar yechimi

### 1 – misol. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x - \text{ ratsional son bo'lsa} \\ -x, & \text{agar } x - \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

funksiyaning  $x_0 = 0$  nuqtada uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

◀ Ravshanki, bu funksiyaning  $x_0 = 0$  nuqtadagi orttirmasi

$$\Delta f(0) = f(0 + \Delta x) - f(0) = \begin{cases} \Delta x, & \text{agar } \Delta x - \text{ ratsional son bo'lsa} \\ -\Delta x, & \text{agar } \Delta x - \text{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

bo'ladi. Unda

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$$

bo'ladi. Demak, berilgan funksiya  $x_0 = 0$  nuqtada uzluksiz. ▶

## Misollar

Berilgan  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtada uzluksiz ekanligi ta'rif yordamida isbotlansin.

705.  $f(x) = 2x^2 - 4, \quad x_0 = 3$

706.  $f(x) = -3x^2 + 8, \quad x_0 = 5$

707.  $f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 2$

708.  $f(x) = x^4, \quad x_0 = 3$

709.  $f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1$

Berilgan funksiyalarning o'zining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

710.  $f(x) = \sin x$

711.  $f(x) = |x|$

712.  $f(x) = x^3$

713.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

714.  $f(x) = \frac{1}{x}$

Quyidagi funksiyalar uzluksizlikka tekshirilsin va grafiklari chizilsin.

715.  $f(x) = \text{Sgn}x$

716.  $f(x) = [x]$

717.  $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$

718.  $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2 - x^3}$

719.  $f(x) = \text{Sgn}(e^x - 1)$

720.  $f(x) = \text{Sgn}(\sin x)$



$$721. f(x) = x - [x]$$

$$722. f(x) = \frac{1}{x - [x]}$$

$$723. f(x) = \left[ \frac{1}{x} \right]$$

$$724. f(x) = \frac{x}{\sin x}$$

$$725. f(x) = \frac{x}{\cos x}$$

$$726. f(x) = e^{\frac{1}{x}}$$

$$727. f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 9}{x - 3}, & \text{агар } x \neq 3 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = 3 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$728. f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

729. Hech bir nuqtada uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltirilsin.

730. Faqat birgina  $x_0 \in \mathbb{R}$  nuqtada uzluksiz, boshqa nuqtalarda uzluksiz bo'lmagan funksiyaga misol keltirilsin.

731.  $f(x) + g(x)$  funksiya biror  $x_0$  nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'lsa, u holda  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalarning kamida bittasi  $x_0$  nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo'lishi shartmi?

732.  $f(x) \cdot g(x)$  funksiya biror  $x_0$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'lsa, u holda  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalarning hech bo'lmaganda bittasi  $x_0$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'lishi shartmi?

**Quyidagi funksiyalar  $A$  ning qanday qiymatlarida uzluksiz bo'lishi aniqlansin.**

$$733. f(x) = \begin{cases} \frac{(1+x)^n - 1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$734. f(x) = \begin{cases} x \cdot \operatorname{ctgx}, & \text{агар } x \neq 0, |x| < \frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$735. f(x) = \begin{cases} \frac{a^x - 1}{x}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса, } (a > 0) \\ A, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$736. f(x) = \begin{cases} (\pi + 2x) \operatorname{tg} x, & \text{агар } -\pi < x < \frac{\pi}{2}, x \neq -\frac{\pi}{2} \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = -\frac{\pi}{2} \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$737. \quad f(x) = \begin{cases} \frac{x}{\ln(1+2x)}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$738. \quad f(x) = \begin{cases} (1+x)^{\frac{1}{x}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$739. \quad f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$740. \quad f(x) = \begin{cases} e^x, & \text{агар } x < 0 \text{ бўлса,} \\ A+x, & \text{агар } x \geq 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

$$741. \quad f(x) = \begin{cases} x \ln x^2, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ A, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса.} \end{cases}$$

## Test

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri butun sonlar o'qida uzluksiz?	$f(x) = x^2$	$f(x) = \frac{1}{x}$	$f(x) = \arcsin x$	$f(x) = \ln x$
2.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri butun sonlar o'qida uzluksiz?	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f(x) = \arccos x$	$f(x) = \sqrt{x}$
3.	$f(x) = [x]$ funksiyaning uzilish nuqtalari to'plamini aniqlang.	<b>Z</b>	<b>N</b>	<b>R</b>	<b>Q</b>
4.	$f(x) = \operatorname{sgn} x$ funksiyaning uzilish nuqtalari to'plamini aniqlang.	{0}	{-1;0;1}	<b>N</b>	<b>Z</b>
5.	$f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6}$ funksiyaning uzilish nuqtalari to'plamini aniqlang.	{2;3}	{-1;0;1}	{0;1}	{1}
6.	$f(x) = \frac{\sin x}{x}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularni turini aniqlang.	$x = 0$ , bartaraf etiladigan uzilish nuqtasi	$x = 1$ , I-tur uzilish nuqtasi	$x = -1$ , I-tur uzilish nuqtasi	$x = \pi$ , II-tur uzilish nuqtasi
7.	$f(x) = \frac{1}{x^2-4}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularni turini aniqlang.	$x = \pm 2$ , II-tur uzilish nuqtasi	$x = \pm 2$ , I-tur uzilish nuqtasi	$x = \pm 1$ , I-tur uzilish nuqtasi	$x = 0$ , II-tur uzilish nuqtasi

8.	$f(x) = \{x\}$ funksiyaning uzilish nuqtalarini toping va ularni turini aniqlang.	$x \in \mathbf{Z}$ , I-tur uzilish nuqtasi	$x \in \mathbf{N}$ , II-tur uzilish nuqtasi	$x = \pm 1$ , bartaraf etiladigan uzilish nuqtasi	$x = 0$ , II-tur uzilish nuqtasi
9.	$a$ qanday qiymatida $f(x) = \begin{cases} \frac{1+x}{1+x^3}, & x \neq -1 \\ a, & x = -1 \end{cases}$ funksiya $x_0 = -1$ nuqtada uzluksiz bo'ladi?	$a = \frac{1}{3}$	$a = 0$	$a = \frac{1}{9}$	$a = -\frac{1}{3}$
10.	$a$ qanday qiymatida $f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ funksiya $x_0 = 0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi?	$a = 0$	$a = 1$	$a = -1$	$a = \pi$

# 15-mavzu. Uzluksiz funksiyalarning lokal xossalari

## 15-ma'ruza

### Reja

1. Uzluksiz funksiyalarning chegaralanganligi.
2. Ishorani saqlash xossasi.
3. Murakkab funksiya uzluksizligi.
4. Uzluksiz funksiyalar ustida amallar.

#### 1. Uzluksiz funksiyalarning chegaralanganligi.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in X$  bo'lsin.

1. Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0 \in X$  nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday  $\delta > 0$  va  $M > 0$  sonlari topiladiki,  $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$  da  $|f(x)| < M$  bo'ladi, ya'ni  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning  $U_\delta(x_0)$  atrofida chegaralangan bo'ladi.

#### 2. Ishorani saqlash xossasi.

2. Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0 \in X$  nuqtada uzluksiz bo'lib,  $f(x_0) \neq 0$  bo'lsa, u holda shunday  $\delta > 0$  son topiladiki,  $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$  da  $\text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$  bo'ladi, ya'ni  $f(x)$  funksiyaning  $U_\delta(x_0)$  dagi ishorasi  $f(x_0)$  ning ishorasi kabi bo'ladi.

Bu tasdiqlarning isboti limitga ega bo'lgan funksiyaning xossalariidan kelib chiqadi.

#### 3. Murakkab funksiya uzluksizligi.

3. ([2], p. 103, Corollary 4.17) Aytaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \quad (b \in \mathbb{R}) \quad (1)$$

ga ega bo'lib,  $g(y)$  funksiya  $Y$  to'plamda berilgan  $\{f(x) | x \in X\} \cup \{b\} \subset Y$  va  $y = b$  nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(b),$$

Ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)) \quad (2)$$

bo'ladi.

◀  $n \rightarrow \infty$  da  $x_n \rightarrow x_0$  ( $x_n \in X$ ,  $x_n \neq x_0$ ,  $n=1,2,\dots$ ) bo'ladigan ixtiyoriy  $\{x_n\}$  ketma-ketlikni olaylik. Unda (1) munosabatga ko'ra

$$n \rightarrow \infty \text{ da } f(x_n) \rightarrow b$$

bo'ladi. Shartga ko'ra  $g(f(x))$  funksiya  $b$  nuqtada uzluksiz. Demak,

$$n \rightarrow \infty \text{ da } g(f(x_n)) \rightarrow g(b)$$

bo'ladi. Keyingi munosabatdan (2) tenglikni o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.



**1-misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \log_a e \quad (a > 0, a \neq 1) \quad (3)$$

munosabat isbotlansin.

◀ (2) munosabatdan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log_a(1+x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \log_a(1+x)^{\frac{1}{x}} = \log_a \left[ \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} \right] = \log_a e.$$

Xususan,  $a = e$  bo'lganda  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$  bo'ladi. ▶

**2-misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \ln a \quad (a > 0)$$

munosabat isbotlansin.

◀ Keltirilgan tenglikni isbotlash uchun  $a^x - 1 = t$  deb olamiz. Unda  $x \rightarrow 0$  da  $t \rightarrow 0$  bo'ladi. Shuni hamda (3) munosabatni e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{\log_a(1+t)} = \frac{1}{\log_a e} = \ln a. \quad \blacktriangleright$$

**3-misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha \quad (\alpha \in \mathbb{R})$$

munosabat isbotlansin

◀ Ravshanki,

$$(1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$$

va  $x \rightarrow 0$  da  $\ln(1+x) \rightarrow 0$  bo'ladi. Unda

$$\frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \frac{(e^{\alpha \ln(1+x)} - 1) \cdot \ln(1+x) \cdot \alpha}{\alpha \cdot \ln(1+x) \cdot x}$$

bo'lib, undan

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha \ln(1+x)} - 1}{\alpha \ln(1+x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} \cdot \alpha = \alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

#### 4. Uzlüksiz funksiyalar ustida amallar.

Uzlüksiz funksiyalarning yig'indisi, ko'paytmasi va nisbatining uzlüksiz funksiya bo'lishi haqidagi tasdiqlarini keltiramiz.

**1-teorema.** ([2], p. 97, Corollary 4.11)  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalari  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in X$  nuqtada uzlüksiz bo'lsin. U holda

- a)  $\forall c \in \mathbb{R}$  da  $c \cdot f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzlüksiz bo'ladi;
- b)  $f(x) + g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzlüksiz bo'ladi;
- v)  $f(x) \cdot g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzlüksiz bo'ladi;
- g)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ( $g(x) \neq 0$ ) funksiya  $x_0$  nuqtada uzlüksiz bo'ladi.

◀ Teoremaning tasdiqlari uzlüksizlik ta'rifi hamda limitga ega bo'lgan funksiyalar ustida arifmetik amallar haqidagi teoremadan kelib chiqadi. Masalan, teoremaning v) tasdig'i quyidagicha isbotlanadi:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) &\Rightarrow \\ \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = f(x_0) \cdot g(x_0). &\blacktriangleright \end{aligned}$$

**4-misol.** ([1], p. 227, Example 9.4.2)  $f(x) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$  bo'lsin. Unda  $f(x) \in C(\mathbb{R})$  bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham,  $\forall \varepsilon > 0$  ga ko'ra  $\delta = \varepsilon$  deyilsa, u holda

$$\forall x, |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| = |c - c| = 0 < \varepsilon$$

bo'ladi. ►

**5-misol.** ([1], p. 230, Prop. 9.4.11)  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  bo'lsa, u holda  $f(x) \in C(\mathbb{R})$  bo'ladi.

◀ Haqiqatan ham,  $\forall \varepsilon > 0$  ga ko'ra  $\delta = \varepsilon$  deyilsa, u holda

$$\forall x, |x - x_0| < \delta: |f(x) - f(x_0)| = |x - x_0| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. ►

**6-misol.** ([2], p. 98, Corollary 4.12)  $f(x) = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \dots + a_{m-1} x + a_m$ ;  $m \in \mathbb{N}$ ,  $a_0, a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$  bo'lsin. U holda  $f(x) \in C(\mathbb{R})$  bo'ladi.

◀ Bu tasdiqning isboti 5- va 6-misollar hamda 1-teoremadan kelib chiqadi. ▶

Shunga o'xshash ushbu

$$f(x) = \frac{a_0x^m + a_1x^{m-1} + \dots + a_{m-1}x + a_m}{b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n}$$

funksiyani, (bunda  $m, n \in \mathbb{N}$ ;  $a_0, a_1, \dots, a_m, b_0, b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ )

$$\{x \in \mathbb{R} \setminus b_0x^n + b_1x^{n-1} + \dots + b_{n-1}x + b_n = 0\}$$

to'plamda uzluksiz bo'lishi ko'rsatiladi.

## Mashqlar

1. Ushbu

$$x \cdot e^x = 1$$

tenglama (0, 1) da hech bo'lmaganda bitta ildizga ega ekanligi isbotlansin.

2. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{agar } -1 \leq x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ x^2 - 1, & \text{agar } 0 < x \leq 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya  $[-1, 1]$  da eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadimi?

## Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*. Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

## Nazorat savollari

28. Uzluksiz funksiyaning chegaralanganligi.
29. Uzluksiz funksiyaning ishorani saqlash xossasi.
30. Uzluksiz funksiyalar ustida qanday amallar bajarish mumkin?



# Glossariy

**Funksiya orttirmasi.**  $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ayirma funksiya orttirmasi deyiladi.

**Funksiyaning nuqtadagi sakrashi.**  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  ayirma funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi sakrashi deyiladi.

**Ishorani saqlash xossasi.** Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0 \in X$  nuqtada uzluksiz bo'lib,  $f(x_0) \neq 0$  bo'lsa, u holda shunday  $\delta > 0$  son topiladiki,  $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$  da  $\text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$  bo'ladi, ya'ni  $f(x)$  funksiyaning  $U_\delta(x_0)$  dagi ishorasi  $f(x_0)$  ning ishorasi kabi bo'ladi.

**Murakkab funksiya uzluksizligi.** Aytaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \quad (b \in R)$$

ga ega bo'lib,  $g(y)$  funksiya  $Y$  to'plamda berilgan  $\{f(x) | x \in X\} \cup \{b\} \subset Y$  va  $y = b$  nuqtada uzluksiz bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(b),$$

Ya'ni

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x))$$

bo'ladi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Geyne bo'yicha).** Agar

$$n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow x_0 \quad (x_n \in X, n = 1, 2, \dots)$$

bo'ladigan ixtiyoriy  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun

$$n \rightarrow \infty \text{ da } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Koshi bo'yicha).** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$$

uchun

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada).** Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (to'plamda).** Agar  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiyalar to'plami.**  $X \subset R$  to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalardan iborat to'plam uzluksiz funksiyalar to'plami deyiladi va  $C(X)$  kabi belgilanadi.

**Uzluksiz funksiyalarning chegaralanganligi.** Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0 \in X$  nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda shunday  $\delta > 0$  va  $M > 0$  sonlari topiladiki,  $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$  da  $|f(x)| < M$  bo'ladi, ya'ni  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning  $U_\delta(x_0)$  atrofida chegaralangan bo'ladi.

# Keys banki

**15-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} -x^2 + 1, & \text{agar } -1 \leq x < 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \\ x^2 - 1, & \text{agar } 0 < x \leq 1 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya  $[-1, 1]$  da eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadimi?

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

# 15-amaliy mashg'ulot

## Na'muna uchun misollar yechimi

1 – m i s o l. *Uzluksiz funksiya xossalaridan foydalanib, ushbu*

$$\sin x - \cos x > 0$$

*tengsizlik echilsin.*

◀ Ravshanki,  $f(x) = \sin x - \cos x$  funksiya uzluksiz. Bu funksiyaning  $[0, 2\pi]$  oraliqda qaraymiz.  $f(x)$  funksiya  $[0, 2\pi]$  oraliqning  $x_1 = \frac{\pi}{4}$ ,  $x_2 = \frac{5\pi}{4}$  nuqtalarida nolga aylanadi:  $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f\left(\frac{5\pi}{4}\right) = 0$ . Uzluksiz funksiyaning xossasiga ko'ra  $f(x)$  funksiya

$$\left[0, \frac{\pi}{4}\right), \left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 2\pi\right]$$

oraliqlarning har birida ishora saqlaydi.  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$  bo'lganligi sababli  $\left(\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right)$

da  $f\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$  bo'ladi. Demak, berilgan tengsizlikning echimi

$$\frac{\pi}{4} + 2k\pi < x < \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

bo'ladi. ▶

## Misollar

**Quyidagi funksiyalar uzluksizlikka tekshirilsin va ularning grafiklari chizilsin.**

742.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + x^n} \quad (x \geq 0)$

743.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^{2n} - 1}{x^{2n} + 1}$

744.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + e^{nx}}{1 + xe^{nx}}$

745.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x + x^2 e^{nx}}{1 + e^{nx}}$

746.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1 + x^{2n}}$

747.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x}{1 + (2 \sin x)^{2n}}$

748.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos^{2n} x$

749.  $f(x) = [x] \cdot \sin \pi x$

750.  $f(x) = x \cdot [x]$

751.  $f(x) = x^2 - [x^2]$

752.  $f(x) = \frac{1}{\sin(x^2)}$

753.  $f(x) = \operatorname{sgn}\left(\cos \frac{1}{x}\right)$

**754.**  $f(g(x))$  va  $g(f(x))$  funksiyalar uzluksizlikka tekshirilsin.

a)  $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = 1 + x^2$

b)  $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = x(1 - x^2)$

v)  $f(x) = \operatorname{sgn} x, \quad g(x) = 1 + x - [x].$

**755.**  $f(g(x))$  murakkab funksiya  $x_0$  nuqtada birinchi tur (ikkinchi tur) uzilishga ega bo'lsa,  $g(x)$  ning  $x_0$  nuqtada albatta birinchi tur (ikkinchi tur) uzilishga ega bo'lishi shartmi?

**756.** Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi haqidagi teoremlar keltirilsin.

**757.** Monoton, lekin uzluksiz bo'lmagan funksiyalarga misol keltirilsin.

**758.** Veyershtrass teoremlarida  $[a, b]$  kesma o'rniga  $(a, b)$  yoki  $[a, b] \cup [c, d]$  qaralsa tasdiq o'rinli bo'ladimi?

**759.**  $[a, b]$  kesmada chegaralangan ixtiyoriy  $f(x)$  funksiya uzluksiz bo'ladimi?

**760.** Uzluksiz bo'lmagan funksiyalar uchun Veyershtrass teoremlari o'rinlimi?

**761.** Ushbu  $xe^x = 1$  tenglama  $(0, 1)$  oraliqda hech bo'lmaganda bitta ildizga ega ekanligi ko'rsatilsin.

**762.** Agar  $f(x)$  funksiya  $A$  va  $B$  to'plamlarda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiyaning  $A \cup B$  to'plamda uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?

**763.** Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda  $p(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad q(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \quad x \in [a, b],$  funksiyalar ham  $[a, b]$  da uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

**764.**  $f(x)$  funksiya  $[a, c] \cup [c, b]$  kesmalarda uzluksiz bo'lsin.  $f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  kesmada uzluksiz bo'lishi uchun etarli shart keltirilsin va isbotlansin.

**765.** Agar  $f(x)$  funksiya  $\forall [a, b] \subset X$  kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u  $X$  to'plamda uzluksiz bo'lishi isbotlansin ( $a < b$ ).

**766.** Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqida teorema keltirilsin va isbotlansin.

**767.**  $f(x)$  funksiya  $[0; 1]$  kesmada aniqlangan, monoton bo'lib,  $f(0) = 0$  va  $f(1) = 1$  bo'lsin. Agar  $\forall x \in [0; 1]$  uchun shunday  $n \in \mathbb{N}$  topilsaki,

$$\underbrace{f(f \dots f(f(x)))}_{n \text{ marta}} = x$$

munosabat bajarilsa,  $[0; 1]$  oraliqda  $f(x) = x$  ekani isbotlansin

**768.**  $f(x)$  funksiya  $\mathbf{R}$  da uzluksiz bo'lib,  $\forall x \in \mathbf{R}$  uchun

$$f(f(x)) = x$$

munosabat bajarilsa, u holda shunday  $c$  nuqta topilib,  $f(c) = 0$  bo'lishi

isbotlansin.

**769.**  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar uzluksiz va bir xil davrli bo'lsin. Agar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

bo'lsa,

$$f(x) = g(x)$$

bo'lishi isbotlansin.

**770.** Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x-a}, & \text{agar } x \neq a \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = a \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyaning ixtiyoriy  $[a, b]$  kesmadagi qiymatlari  $[f(a); f(b)]$  kesmani to'ldirishi, lekin  $f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  kesmada uzluksiz bo'lmasligi ko'rsatilsin.

**771.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a; +\infty]$  da uzluksiz bo'lib, chekli  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  limitga ega bo'lsa, unda  $f(x)$  funksiyaning  $[a; +\infty]$  da chegaralangan bo'lishi isbotlansin.

**772.** Agar  $f(x)$  funksiya

1)  $[a, b]$  kesmada aniqlangan va monoton,

2) uning qiymatlari to'plami  $[f(a); f(b)]$  kesmani tutash to'ldirsa,

u holda  $f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  kesmada uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

## Test

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Agar $f(x) = \operatorname{sgn} x$ , $g(x) = 1 + x^2$ bo'lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo'ladimi?	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega
2.	Agar $f(x) = \operatorname{sgn} x$ , $g(x) = x^3 - x$ bo'lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo'ladimi?	$f(g(x))$ — $x = 0$ , $x = \pm 1$ nuqtalard a uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega
3.	Agar $f(x) = \operatorname{sgn}(x - 1)$ , $g(x) = \operatorname{sgn}(x + 1)$ bo'lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo'ladimi?	$f(g(x))$ — $x = 0$ , $x = -1$ nuqtalard a uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x = 1$ nuqtalard a uzilishga ega	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega

4.	Agar $f(x) = \sin x$ , $g(x) = x^2$ bo'lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo'ladimi?	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$ , $x=-1$ nuqtalarda uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=1$ nuqtalarda uzilishga ega	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x=0$ nuqtada uzilishga ega
5.	Quidagi xossa qanday nomlanadi: agar $f(x)$ funksiya $x_0 \in X$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $f(x_0) \neq 0$ bo'lsa, u holda shunday $\delta > 0$ son topiladiki, $\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$ da $\text{sign } f(x) = \text{sign } f(x_0)$ bo'ladi, ya'ni $f(x)$ funksiyaning $U_\delta(x_0)$ dagi ishorasi $f(x_0)$ ning ishorasi kabi bo'ladi?	Ishorani saqlash xossasi	Uzluksiz funksiyalarnin g chegaralangan ligi	Ishorani o'zgartiris h xossasi	Uzluksiz funksiyalarni ng chegaralanm a-ganligi
6.	Agar $f(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, $g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzilishga ega bo'lsa, u holda $f(x) + g(x)$ funksiya haqida nima deyish mumkin?	$f(x) + g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi	$f(x) + g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi	$f(x) + g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada ham uzluksiz, ham uzilishga ega bo'lishi mumkin	$f(x) + g(x)$ funksiya $x_0 + 1$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi



7.	Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x) + g(x)$ funksiya haqida nima deyish mumkin?	$f(x) + g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi	$f(x) + g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi	$f(x) + g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada ham uzluksiz, ham uzilishga ega bo'lishi mumkin	$f(x) + g(x)$ funksiya $x_0 + 1$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi
8.	Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x) \cdot g(x)$ funksiya haqida nima deyish mumkin?	$f(x) \cdot g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi	$f(x) \cdot g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi	$f(x) \cdot g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada ham uzluksiz, ham uzilishga ega bo'lishi mumkin	$f(x) \cdot g(x)$ funksiya $2x_0$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi
9.	Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $f(x) - g(x)$ funksiya haqida nima deyish mumkin?	$f(x) - g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi	$f(x) - g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi	$f(x) - g(x)$ funksiya $x_0$ nuqtada ham uzluksiz, ham uzilishga ega bo'lishi mumkin	$f(x) - g(x)$ funksiya $x_0 - 1$ nuqtada uzilishga ega bo'ladi
10.	Agar $f(x) = x^2$ , $g(x) = x - 1$ bo'lsa, $f(g(x))$ va $g(f(x))$ funksiyalar uzluksiz bo'ladimi?	$f(g(x))$ — uzluksiz, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x = 0, x = 2$ nuqtalarda uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x = -2$ nuqtalarda uzilishga ega	$f(g(x))$ — $x = -1$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — uzluksiz	$f(g(x))$ — $x = 3$ nuqtada uzilishga ega, $g(f(x))$ — $x = 0$ nuqtada uzilishga ega



# 16-mavzu. Uzluksiz funksiyalarning global xossalari

## 16-ma'ruza

### Reja

1. Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremlari.
2. Bolsano–Koshining birinchi va ikkinchi teoremlari.

#### 1. Veyershtrassning birinchi va ikkinchi teoremlari.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  segmentda berilgan bo'lsin. Ma'lumki,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da uzluksiz,  $a$  nuqtada o'ngdan,  $b$  nuqtada chapdan uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  segmentda uzluksiz bo'ladi.

Endi segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyalarning xossalarini keltiramiz. Ular teoremlar orqali ifodalanadi.

**1-teorema.** ([1], p. 235, Lemma 9.6.3) (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  segmentda uzluksiz, ya'ni  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, funksiya  $[a, b]$  da chegaralangan bo'ladi.

◀ Ma'lumki,  $f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  da chegaralanganligi quyidagini

$$\exists M \in (0, +\infty), \forall x \in [a, b]: |f(x)| \leq M$$

anglatadi.

Teskarisini faraz qilaylik, ya'ni  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa ham funksiya  $[a, b]$  da chegaralanmagan bo'lsin. U holda

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in [a, b]: |f(x_n)| > n \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1)$$

bo'ladi. Ayni paytda, hosil bo'ladigan  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun  $x_n \in [a, b]$  ( $n=1, 2, \dots$ ) bo'lganligi sababli u chegaralangan bo'ladi. Unda Bolsano-Veyershtrass teoremasiga ko'ra bu  $\{x_n\}$  ketma-ketlikdan yaqinlashuvchi qismaniy  $\{x_{n_k}\}$  ketma-ketlik ajratish mumkin:

$$k \rightarrow \infty \text{ da } x_{n_k} \rightarrow x_0 \quad (x_0 \in [a, b]).$$

Shartga ko'ra  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da uzluksiz. Binobarin,

$$k \rightarrow \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \rightarrow f(x_0) \quad (2)$$

bo'ladi. Bu (5) munosabat yuqorida qilingan farazga ziddir (chunki, faraz bo'yicha

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = +\infty$$

bo'lishi lozim edi). Demak,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da chegaralangan bo'ladi. ►

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** ([1], p. 236, Def. 9.6.5) Agar  $X$  to'plamda shunday  $x_0 \in X$  nuqta topilsaki,  $\forall x \in X$  uchun

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi deyiladi va

$$f(x_0) = \max_X f(x) \quad (f(x_0) = \min_X f(x))$$

kabi belgilanadi.

**2-teorema.** ([1], p. 236, Prop. 9.6.7) (Veyershtrassning ikkinchi teoremasi). Agar  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, bu funksiya  $[a, b]$  segmentda eng katta hamda eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni

$$\exists c_1 \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]: \quad f(x) \leq f(c_1),$$

$$\exists c_2 \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]: \quad f(x) \geq f(c_2)$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsin. Veyershtrassning 1-teoremasiga ko'ra  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  segmentda chegaralangan, ya'ni ushbu

$$\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

to'plam chegaralangan bo'ladi. Unda to'plamning aniq chegarasi haqidagi teoreмага ko'ra

$$\sup_{x \in [a, b]} f(x) = M \quad (M \in R)$$

mavjud bo'ladi.

To'plamning aniq yuqori chegarasi ta'rifiga muvofiq:

$$\forall x \in [a, b]: \quad f(x) \leq M,$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists x(\varepsilon) \in [a, b]: \quad f(x(\varepsilon)) > M - \varepsilon$$

bo'ladi. Keyingi tengsizlikda

$$\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$$

deb olinadigan bo'lsa,

$$x_n = x\left(\frac{1}{n}\right) \in [a, b]$$

ketma-ketlik hosil bo'lib, uning uchun

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}$$

tengsizlik bajariladi. Demak,  $\forall n \in N$  da

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

bo'ladi. Bu munosabatdan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = M \quad (3)$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Yuqorida hosil qilingan  $\{x_n\}$  ketma-ketlik chegaralangan. Undan yaqinlashuvchi qisman ketma-ketlikni ajratish mumkin. Uni  $\{x_{n_k}\}$  deylik:

$$k \rightarrow \infty \text{ da } x_{n_k} \rightarrow c_1 \quad (c_1 \in [a, b]).$$

Berilgan  $f(x)$  funksiyaning uzluksizligidan foydalanib topamiz:

$$k \rightarrow \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \rightarrow f(c_1).$$

Ravshanki,  $\{f(x_{n_k})\}$  ketma-ketlik  $\{f(x_n)\}$  ketma-ketlikning qisman ketma-ketligi.

Demak (6) munosabatga ko'ra

$$k \rightarrow \infty \text{ da } f(x_{n_k}) \rightarrow M$$

bo'lib,  $f(c_1) = M$  bo'lishi kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash,  $f(x)$  funksiyaning eng kichik qiymatga erishishi ko'rsatiladi. ►

## 2. Bolsano-Koshining birinchi va ikkinchi teoremlari.

**3-teorema.** ([2], p. 109, Th. 4.23) (Bolsano-Koshining birinchi teoremasi) Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  segmentda berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1)  $f(x) \in C[a, b]$ ;

2) segmentning chetki nuqtalari  $a$  va  $b$  larda har xil ishorali qiymatlarga ega, ya'ni

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ yoki } f(a) > 0 > f(b)$$

bo'lsin.

$U$  holda  $(a, b)$  da shunday  $x_0$  nuqta ( $a < x_0 < b$ ) topiladiki,  $f(x_0) = 0$  bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lib,  $f(a) < 0 < f(b)$  bo'lsin.  $[a, b]$  segmentning  $f(x)$  funksiyaga manfiy qiymatlar beradigan nuqtalaridan iborat to'plamini  $E$  deylik:

$$E = \{x \in [a, b] \mid f(x) < 0\}.$$

Ravshanki,  $a \in E$ ,  $E \subset [a, b]$ . Demak,  $E$  to'plam chegaralangan va  $E \neq \emptyset$ .

To'plamning aniq yuqori chegarasi haqidagi teorema ko'ra

$$\sup E = x_0 \quad (x_0 \in (a, b))$$

mavjud bo'ladi.

Aniq yuqori chegara ta'rifi binoan,

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in E: x_0 - \frac{1}{n} < x_n < x_0$$

bo'ladi. Demak,

$$f(x_n) < 0 \quad (n=1,2,3,\dots).$$

$f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  da uzluksiz bo'lganligini e'tiborga olib topamiz:

$$n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow x_0 \text{ bo'lib, } f(x_n) \rightarrow f(x_0).$$

Bir tomondan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0,$$

ikkinchi tomondan

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0)$$

bo'lishidan

$$f(x_0) \leq 0 \tag{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki,  $x > x_0$  da  $x \notin E$ . Binobarin,  $f(x) \geq 0$ . Shuning uchun

$$\lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \geq 0$$

bo'lib,

$$f(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f(x) \geq 0 \tag{5}$$

bo'ladi. (4) va (5) munosabatlardan  $f(x_0) = 0$  bo'lishi kelib chiqadi. Xuddi shunga o'xshash,  $f(x) \in C[a, b]$  va  $f(a) > 0 > f(b)$  bo'lgan holda teorema isbotlanadi. ►

**4-teorema.** ([1], p. 238, Prop. 9.7.1) (Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi) Agar  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, u holda chegaralari  $f(a)$  va  $f(b)$  bo'lgan segmentga tegishli ixtiyoriy  $l$  soni olinganda  $[a, b]$  da shunday  $x_0$  nuqta topiladiki,  $f(x_0) = l$  bo'ladi.

◀  $f(a) < f(b)$  deb,  $f(a) \leq l \leq f(b)$  ni olaylik. Ravshanki,  $f(a) = l$  yoki  $f(b) = l$  bo'lgan holda teorema isbotlangan hisoblanadi.

Endi  $f(a) < l < f(b)$  bo'lsin. Ushbu

$$g(x) = f(x) - l \quad (x \in [a, b])$$

funksiyani olaylik. Bu funksiya uchun:

$$1) \quad g(x) \in C[a, b];$$

$$2) \quad g(a) < 0 < g(b);$$

bo'ladi. Unda 3-teoremaga ko'ra shunday  $x_0 \in (a, b)$  topiladiki,

$$g(x_0) = 0,$$

ya'ni,

$$f(x_0) = l$$

bo'ladi. ►

Ushbu ma'ruzaning pirovardida berilgan funksiyaga teskari bo'lgan funksiyaning mavjudligi haqidagi toeremani isbotsiz keltiramiz.

**5-teorema.** (teskari funksiyaning mavjudligi). Agar  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  orliqda uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lsa, u holda  $Y_f = \{ f(x) | x \in X \}$  oraliqda teskari  $f^{-1}(y)$  funksiya mavjud bo'lib, u uzluksiz qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'ladi.

### Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x) = x^3 - x \quad (x \in R)$$

funksiya qiymatlari to'plami  $R$  bo'lishi isbotlansin.

2. Aytaylik,  $f(x)$  funksiya tekislikdagi biror aylanada berilgan va uzluksiz bo'lsin. U holda aylanada diametral qarama-qarshi joylashgan  $a$  va  $b$  nuqtalar topilib,  $f(a) = f(b)$  bo'lishi isbotlansin.

### Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*. Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

### Nazorat savollari

31. Veyershtrassning birinchi teoremasi.
32. Veyershtrassning ikkinchi teoremasi.
33. Bolsano-Koshining birinchi teoremasi.
34. Bolsano-Koshining ikkinchi teoremasi.

# Glossariy

**Bolsano–Koshining birinchi teoremasi.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  segmentda berilgan bo‘lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1)  $f(x) \in C[a, b]$ ;

2) segmentning chetki nuqtalari  $a$  va  $b$  larda har xil ishorali qiymatlarga ega, ya’ni

$$f(a) < 0 < f(b) \text{ yoki } f(a) > 0 > f(b)$$

bo‘lsin.

**Bolsano–Koshining ikkinchi teoremasi.** Agar  $f(x) \in C[a, b]$  bo‘lsa, u holda chegaralari  $f(a)$  va  $f(b)$  bo‘lgan segmentga tegishli ixtiyoriy  $l$  soni olinganda  $[a, b]$  da shunday  $x_0$  nuqta topiladiki,  $f(x_0) = l$  bo‘ladi.

**Funksiya nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishishi.** Agar  $X$  to‘plamda shunday  $x_0 \in X$  nuqta topilsaki,  $\forall x \in X$  uchun

$$f(x) \leq f(x_0) \text{ (} f(x) \geq f(x_0) \text{)}$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishadi deyiladi va

$$f(x_0) = \max_x f(x) \text{ (} f(x_0) = \min_x f(x) \text{)}$$

kabi belgilanadi.

**Funksiya orttirmasi.**  $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ayirma funksiya orttirmasi deyiladi.

**Funksiyaning nuqtadagi sakrashi.**  $f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$  ayirma funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi sakrashi deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Geyne bo‘yicha).** Agar

$$n \rightarrow \infty \text{ da } x_n \rightarrow x_0 \text{ (} x_n \in X, n = 1, 2, \dots \text{)}$$

bo‘ladigan ixtiyoriy  $\{x_n\}$  ketma-ketlik uchun

$$n \rightarrow \infty \text{ da } f(x_n) \rightarrow f(x_0)$$

bo‘lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.



**Uzluksiz funksiya (nuqtada) (Koshi bo'yicha).** Agar  $\forall \varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in X \cap U_\delta(x_0)$$

uchun

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada).** Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (to'plamda).** Agar  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiyalar to'plami.**  $X \subset R$  to'plamda uzluksiz bo'lgan funksiyalardan iborat to'plam uzluksiz funksiyalar to'plami deyiladi va  $C(X)$  kabi belgilanadi.

**Veyershtrassning birinchi teoremasi.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  segmentda uzluksiz, ya'ni  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, funksiya  $[a, b]$  da chegaralangan bo'ladi.

**Veyershtrassning ikkinchi teoremasi.** Agar  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, bu funksiya  $[a, b]$  segmentda eng katta hamda eng kichik qiymatlarga erishadi, ya'ni

$$\exists c_1 \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]: \quad f(x) \leq f(c_1),$$

$$\exists c_2 \in [a, b], \quad \forall x \in [a, b]: \quad f(x) \geq f(c_2)$$

bo'ladi.

## Keys banki

**16-keys.** Masala o'rtaga tashlanadi: Aytaylik,  $f(x)$  funksiya tekislikdagi biror aylanada berilgan va uzluksiz bo'lsin. U holda aylanada diametral qarama-qarshi joylashgan  $a$  va  $b$  nuqtalar topilib,  $f(a) = f(b)$  bo'lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

## 16-amaliy mashg'ulot

### Na'muna uchun misollar yechimi

**1-misol.** Agar  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, u holda chegaralari  $f(a)$  va  $f(b)$  bo'lgan segmentga tegishli ixtiyoriy  $l$  soni olinganda  $[a, b]$  da shunday  $x_0$  nuqta topiladiki,  $f(x_0) = l$  bo'ladi.

◀  $f(a) < f(b)$  deb,  $f(a) \leq l \leq f(b)$  ni olaylik. Ravshanki,  $f(a) = l$  yoki  $f(b) = l$  bo'lgan holda teorema isbotlangan hisoblanadi.

Endi  $f(a) < l < f(b)$  bo'lsin. Ushbu

$$g(x) = f(x) - l \quad (x \in [a, b])$$

funksiyani olaylik. Bu funksiya uchun:

1)  $g(x) \in C[a, b]$ ;

2)  $g(a) < 0 < g(b)$ ;

bo'ladi. Unda 3-teoremaga ko'ra shunday  $x_0 \in (a, b)$  topiladiki,

$$g(x_0) = 0,$$

ya'ni,

$$f(x_0) = l$$

bo'ladi. ►

### Misollar

**756.** Monoton funksiyaning uzluksizligi va uzilishi haqidagi teoremlar keltirilsin.

**757.** Monoton, lekin uzluksiz bo'lmagan funksiyalarga misol keltirilsin.

**758.** Veyershtrass teoremlarida  $[a, b]$  kesma o'rniga  $(a, b)$  yoki  $[a, b] \cup [c, d]$  qaralsa tasdiq o'rinli bo'ladimi?

**759.**  $[a, b]$  kesmada chegaralangan ixtiyoriy  $f(x)$  funksiya uzluksiz bo'ladimi?

**760.** Uzluksiz bo'lmagan funksiyalar uchun Veyershtrass teoremlari o'rinlimi?

**761.** Ushbu  $xe^x = 1$  tenglama  $(0, 1)$  oraliqda hech bo'lmaganda bitta ildizga ega ekanligi ko'rsatilsin.

**762.** Agar  $f(x)$  funksiya  $A$  va  $B$  to'plamlarda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiyaning  $A \cup B$  to'plamda uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?

**763.** Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda  $p(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ ,  $q(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ ,  $x \in [a, b]$ , funksiyalar ham  $[a, b]$  da uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.

**764.**  $f(x)$  funksiya  $[a, c] \cup [c, b]$  kesmalarda uzluksiz bo'lsin.  $f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  kesmada uzluksiz bo'lishi uchun etarli shart keltirilsin va

isbotlansin.

**765.** Agar  $f(x)$  funksiya  $\forall [a,b] \subset X$  kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda u  $X$  to'plamda uzluksiz bo'lishi isbotlansin ( $a < b$ ).

**766.** Teskari funksiyaning mavjudligi va uzluksizligi haqida teorema keltirilsin va isbotlansin.

**767.**  $f(x)$  funksiya  $[0;1]$  kesmada aniqlangan, monoton bo'lib,  $f(0) = 0$  va  $f(1) = 1$  bo'lsin. Agar  $\forall x \in [0;1]$  uchun shunday  $n \in \mathbb{N}$  topilsaki,

$$\underbrace{f(f \dots f(f(x)))}_{n \text{ marta}} = x$$

munosabat bajarilsa,  $[0;1]$  oraliqda  $f(x) = x$  ekani isbotlansin

**768.**  $f(x)$  funksiya  $\mathbf{R}$  da uzluksiz bo'lib,  $\forall x \in \mathbf{R}$  uchun

$$f(f(x)) = x$$

munosabat bajarilsa, u holda shunday  $c$  nuqta topilib,  $f(c) = 0$  bo'lishi isbotlansin.

**769.**  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar uzluksiz va bir xil davrli bo'lsin. Agar

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

bo'lsa,

$$f(x) = g(x)$$

bo'lishi isbotlansin.

**770.** Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x-a}, & \text{agar } x \neq a \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = a \text{ bo'lsa.} \end{cases}$$

funksiyaning ixtiyoriy  $[a,b]$  kesmadagi qiymatlari  $[f(a); f(b)]$  kesmani to'ldirishi, lekin  $f(x)$  funksiyaning  $[a,b]$  kesmada uzluksiz bo'lmisligi ko'rsatilsin.

**771.** Agar  $f(x)$  funksiya  $[a; +\infty]$  da uzluksiz bo'lib, chekli  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  limitga ega bo'lsa, unda  $f(x)$  funksiyaning  $[a; +\infty]$  da chegaralangan bo'lishi isbotlansin.

**772.** Agar  $f(x)$  funksiya

1)  $[a,b]$  kesmada aniqlangan va monoton,

2) uning qiymatlari to'plami  $[f(a); f(b)]$  kesmani tutash to'ldirsa,

u holda  $f(x)$  funksiyaning  $[a,b]$  kesmada uzluksiz bo'lishi ko'rsatilsin.



## Test

№	Savol	To‘g‘ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda quyidagi ifodalarning qaysi biri o‘rinli?	$\inf_{(a;b)} f(x) = \inf_{[a;b]} f(x)$	$\inf_{(a;b)} f(x) < \inf_{[a;b]} f(x)$	$\inf_{(a;b)} f(x) > \inf_{[a;b]} f(x)$
2.	Agar $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsa, u holda quyidagi ifodalarning qaysi biri o‘rinli?	$\sup_{(a;b)} f(x) = \sup_{[a;b]} f(x)$	$\sup_{(a;b)} f(x) < \sup_{[a;b]} f(x)$	$\sup_{(a;b)} f(x) > \sup_{[a;b]} f(x)$
3.	Agar $f(x) \in C[a;b]$ bo‘lsa, u holda $m(x) = \min_{[a;x]} f$ funktsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$[a;b]$ kesmada uzluksiz	$b$ nuqtada uzilishga ega	$a$ nuqtada uzilishga ega

4.	Agar $f(x) \in C[a;b]$ bo'lsa, u holda $M(x) = \max_{[a;x]} f$ funktsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$[a;b]$ kesmada uzluksiz	$b$ nuqtada uzilishga ega	$a$ nuqtada uzilishga ega
5.	Agar $f(x) \in C[a;b]$ bo'lsa, u holda $m(x) = \min_{[a;x]} f$ funktsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$(a;b)$ kesmada uzluksiz	$[a;b]$ kesmaning barcha nuqtalarda uzilishga ega	$[a;b]$ kesmaning ratsional nuqtalarda uzilishga ega
6.	Agar $f(x) \in C[a;b]$ bo'lsa, u holda $M(x) = \max_{[a;x]} f$ funktsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$(a;b)$ kesmada uzluksiz	$[a;b]$ kesmaning barcha nuqtalarda uzilishga ega	$[a;b]$ kesmaning ratsional nuqtalarda uzilishga ega
7.	Agar $f, g \in C(X)$ bo'lsa, u holda $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ funktsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$X$ to'plamda uzluksiz	$X$ to'plamning barcha nuqtalarida uzilishga ega	$X$ to'plamning ratsional nuqtalarida uzilishga ega

8.	Agar $f, g \in C(X)$ bo'lsa, u holda $M(x) = \min\{f(x), g(x)\}$ funktsiya uzluksizligi haqida nima deyish mumkin?	$X$ to'plamda uzluksiz	$X$ to'plamning barcha nuqtalarida uzilishga ega	$X$ to'plamning ratsional nuqtalarida uzilishga ega
9.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri $R$ da uzluksiz?	$y = \sin x$	$y = \operatorname{sgn} x$	$y = \ln x$
10.	Quyidagi funksiyalardan qaysi biri uzilishga ega?	$y = \operatorname{sgn} x$	$y = \sin x$	$y = x$





# 17-mavzu. Tekis uzluksizlik

## 17-ma'ruza

### Reja

1. Funksiyaning tekis uzluksizligi tushunchasi.
2. Kantor teoremasi.

#### 1. Funksiyaning tekis uzluksizligi tushunchasi.

Faraz qilaylik  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lsin.

**1-ta'rif.** ([1], p. 244, Def. 9.9.2) Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$$|x' - x''| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $x', x'' \in X$  uchun

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta:$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda **tekis uzluksiz** deyiladi.

Keltirilgan ta'rifdan:

1)  $\delta > 0$  sonning faqat  $\varepsilon > 0$  ga bog'liqligi,

2)  $f(x)$  funksiya  $X$  da tekis uzluksiz bo'lsa, y shu  $X$  to'plamda uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

**1-misol.**  $f(x) = x$ ,  $x \in R$  bo'lsin. Bu funksiya  $R$  da tekis uzluksiz bo'ladi.

◀ Agar  $\forall \varepsilon > 0$  ga ko'ra  $\delta = \varepsilon$  deb olinsa, unda  $\forall x', x'' \in X$ ,  $|x' - x''| < \delta$  da

$$|f(x') - f(x'')| = |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. ▶

**2-misol.**  $f(x) = \sin x$ ,  $x \in R$  bo'lsin. Bu funksiya  $R$  da tekis uzluksiz bo'ladi.

◀ Agar  $\forall \varepsilon > 0$  ga ko'ra,  $\delta = \varepsilon$  deyilsa, unda  $\forall x', x'' \in R$ ,  $|x' - x''| < \delta$  da

$$|\sin x' - \sin x''| = 2 \left| \cos \frac{x' + x''}{2} \right| \cdot \left| \sin \frac{x' - x''}{2} \right| \leq |x' - x''| < \delta = \varepsilon$$

bo'ladi. ▶

**3-misol.**  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $x \in X = (0, 1]$  bo'lsin. Bu funksiya  $X = (0, 1]$  da tekis

uzluksiz bo'lmaydi.

◀  $\forall \varepsilon > 0$  sonni, masalan,  $\varepsilon = \frac{1}{2}$  deb olib,  $x'$  va  $x''$  nuqtalar sifatida

$$x' = \frac{1}{n}, x'' = \frac{1}{n+1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

deb olinsa, u holda  $|x' - x''|$  ayirma quyidagicha

$$|x' - x''| = \left| \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right| = \frac{1}{n(n+1)}$$

bo'ladi. Bundan ( $|x' - x''| < \delta$ )  $\delta$  ni har qancha kichik qilib olish mumkin bo'lsa ham

$$|f(x') - f(x'')| = \left| \frac{1}{x'} - \frac{1}{x''} \right| = |n - (n+1)| = 1 > \frac{1}{2} = \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,  $f(x) = \frac{1}{x}$  funksiya  $X = (0, 1]$  da tekis uzluksiz emas. ▶

## 2. Kantor teoremasi.

**1-teorema.** ([1], p. 247, Th. 9.9.16) (Kantor teoremasi) Agar  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da tekis uzluksiz bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa ham funksiya  $[a, b]$  da tekis uzluksiz bo'lmasin. Unda biror  $\varepsilon > 0$  va ixtiyoriy  $\delta > 0$  uchun  $[a, b]$  da shunday  $x'$  va  $x''$  nuqtalar topiladiki,

$$|x' - x''| < \delta \Rightarrow |f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$$

bo'ladi.  $n \rightarrow +\infty$  da  $\delta_n \rightarrow 0$  ( $\delta_n > 0, n = 1, 2, \dots$ ) bo'ladigan ixtiyoriy  $\{\delta_n\}$  ketma-ketlikni olamiz. Unda

$$|x'_1 - x''_1| < \delta_1 \Rightarrow |f(x'_1) - f(x''_1)| \geq \varepsilon,$$

$$|x'_2 - x''_2| < \delta_2 \Rightarrow |f(x'_2) - f(x''_2)| \geq \varepsilon,$$

.....

$$|x'_n - x''_n| < \delta_n \Rightarrow |f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon,$$

.....

bo'ladi.

Ravshanki,  $\{x'_n\}$  uchun  $x'_n \in [a, b]$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) bo'lib, undan

$$k \rightarrow +\infty \text{ da } x'_{n_k} \rightarrow x_0 \quad (x_0 \in [a, b])$$

bo'ladigan qisman ketma-ketlik ajratish mumkin. Ayni paytda,  $x''_{n_k}$  uchun ham

$$k \rightarrow +\infty \text{ da } x''_{n_k} \rightarrow x_0$$

bo'ladi.  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lishidan

$$k \rightarrow +\infty \text{ da } f(x'_{n_k}) \rightarrow f(x_0), f(x''_{n_k}) \rightarrow f(x_0)$$

bo'lib, ulardan  $k \rightarrow +\infty$  da  $f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k}) \rightarrow 0$  bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa

$\forall n \in \mathbb{N}$  uchun

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon$$

deb olingan farazga zid. Demak  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da tekis uzluksiz. ►

**2-ta'rif.** Faraz qilaylik  $f(x)$  funksiya  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan bo'lsin.

Ushbu

$$\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$$

ayirma  $f(x)$  **funksiyaning  $X$  to'plamdagi tebranishi** deyiladi va u  $\omega$  opqali belgilanadi:

$$\omega = \omega(f; X) = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x).$$

$f(x)$  funksiyaning  $X$  to'plamdagi tebranishi quyidagicha

$$\omega = \sup_{x', x'' \in X} \{|f(x') - f(x'')|\}$$

ham ta'riflanishi mumkin.

**Natija.** Agar  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, u holda  $\forall \varepsilon > 0$  uchun shunday  $\delta > 0$  topiladiki,  $[a, b]$  segment uzunliklari  $\delta$  dan kichik bo'laklarga ajratilganda har bir bo'lakdagi funksiyaning tebranishi  $\varepsilon$  dan kichik bo'ladi.

◀ Shartga ko'ra  $f(x) \in C[a, b]$ . Demak, Kantor teoremasiga ko'ra u  $[a, b]$  da tekis uzluksiz. Unda ta'rifga binoan

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta: |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi  $[a, b]$  segmentni uzunligi  $\delta$  dan kichik bo'lgan

$$[x_k, x_{k+1}] \quad (x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n, \quad x_0 = a, \quad x_n = b)$$

bo'laklarga ajaratamiz. Unda

$$\forall x', x'' \in [x_k, x_{k+1}], |x' - x''| < \delta: |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,

$$\omega = \sup_{x', x'' \in [x_k, x_{k+1}]} \{|f(x') - f(x'')|\} \leq \varepsilon$$

bo'ladi. ►

Funksiyaning uzluksizlik moduli.  $f(x)$  funksiya  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan bo'lib, u shu to'plamda uzluksiz bo'lsin. Endi

$$\forall \delta > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta$$

uchun

$$|f(x') - f(x'')| \tag{1}$$

ayirmani qaraymiz.

**3-ta'rif.** (1) ayirmaning aniq yuqori chegarasi

$$\sup \{|f(x') - f(x'')|\}$$

$f(x)$  funksiyaning  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamdagi uzluksizlik moduli deyiladi va  $\omega(\delta)$  kabi belgilanadi:

$$\omega(\delta) = \sup_{|x' - x''| \leq \delta} \{|f(x') - f(x'')|\}.$$

Demak,  $f(x)$  funksiyaning  $X$  to'plamdagi uzluksizlik moduli  $\delta$  ning manfiy bo'lmagan funksiyasi bo'ladi.

Endi uzluksizlik modulining ba'zi xossalarini keltiramiz:

1) Funksiyaning uzluksizlik moduli  $\delta$  ning o'suvchi funksiyasi bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  va  $\delta_1 > \delta_2$  bo'lsin. U holda

$$\{x', x'' \in X : |x' - x''| \leq \delta_1\}, \{x', x'' \in X : |x' - x''| \leq \delta_2\}$$

to'plamlar uchun

$$\{x', x'' \in X : |x' - x''| \leq \delta_2\} \subset \{x', x'' \in X : |x' - x''| \leq \delta_1\}$$

bo'lib, undan

$$\omega(\delta_2) \leq \omega(\delta_1)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,  $\delta_1 > \delta_2 \Rightarrow \omega(\delta_1) \geq \omega(\delta_2)$ . ▶

Uzluksizlik modulining keyingi xossasini isbotsiz keltiramiz.

2) Funksiyaning uzluksizlik moduli uchun ushbu

$$\omega(\lambda\delta) \leq (1 + \lambda) \cdot \omega(\delta)$$

munosabat o'rinli bo'ladi, bunda  $\lambda$  – musbat son.

**4-misol.** Ushbu  $f(x) = ax + b$  ( $a, b \in R$ ) funksiyaning  $X = [\alpha, \beta]$  dagi uzluksizlik moduli topilsin.

◀ Ta'rifga binoan,

$$\omega(\delta) = \sup_{|x' - x''| \leq \delta} |(ax' + b) - (ax'' + b)| = \sup_{|x' - x''| \leq \delta} |a(x' - x'')| = |a| \cdot \delta$$

bo'ladi. Demak,  $\omega(\delta) = |a| \cdot \delta$ . ▶

**2-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda tekis uzluksiz bo'lishi uchun

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$$

tenglikning o'rinli bo'lishi zarur va yetarli.

◀ **Zarurligi.**  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda tekis uzluksiz bo'lsin:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta_\varepsilon : |f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

U holda  $0 < \delta < \delta_\varepsilon$  tengsizliklarni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $\delta$  uchun

$$\sup_{|x' - x''| \leq \delta} \{|f(x') - f(x'')|\} \leq \sup_{|x' - x''| \leq \delta_\varepsilon} \{|f(x') - f(x'')|\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

bo'lib, unda  $\omega(\delta) < \varepsilon$ , ya'ni

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

**Yetarliligi.** Ushbu

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \omega(\delta) = 0$$

munosabat o'rinli bo'lsin. Demak,  $\delta \rightarrow +0$  da

$$\omega(\delta) = \sup_{|x'-x''|\leq\delta} \{|f(x') - f(x'')|\} \rightarrow 0.$$

U holda

$$\forall x', x'' \in X, |x' - x''| \leq \delta < \delta_\varepsilon : |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

bo'ladi. Demak,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda tekis uzluksiz bo'ladi. ►

Funksiyaning uzluksizlik moduli funksiyalarni sinflarga ajratish imkonini beradi. Masalan, uzluksizlik moduli ushbu

$$\omega(\delta) \leq M \cdot \delta^\alpha$$

(bunda  $M = \text{const}$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ ) tengsizlikni qanoatlantiruvchi funksiyalar to'plami  $\alpha$  tartibli Lipshits sinfi deyiladi va  $Lip_M \alpha$  kabi belgilanadi.

### Mashqlar

1. Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalarning har biri  $[a, b] \subset R$  da tekis uzluksiz bo'lsa, u holda  $f(x) \cdot g(x)$  funksiya ham  $[a, b] \subset R$  da tekis uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

2.  $f(x) = x$  funksiyaning  $[0, +\infty)$  da tekis uzluksiz emasligi ko'rsatilsin.

3. Ushbu

$$f(x) = x^2 + 1$$

funksiyaning  $X = [0, 1]$  segmentdagi uzluksizlik moduli topilsin.

4. Agar  $f(x)$  funksiya  $(0, 1)$  da tekis uzluksiz bo'lsa, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$$

limit mavjud bo'ladimi?

### Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.

2. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, 1 q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.

3. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, 1 т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

### Nazorat savollari

35. Funksiyaning tekis uzluksizligi.

36. Kantor teoremasi.

37. Funksiyaning to'plamdagi tebranishi nima?

38. Funksiyaning to'plamdagi uzluksizlik moduli nima?



# Glossariy

**Funksiyaning to'plamdagi tebranishi.** Faraz qilaylik  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lsin. Ushbu

$$\sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x)$$

ayirma  $f(x)$  funksiyaning  $X$  to'plamdagi tebranishi deyiladi va u  $\omega$  opqali belgilanadi:

$$\omega = \omega(f; X) = \sup_{x \in X} f(x) - \inf_{x \in X} f(x).$$

**Funksiyaning to'plamdagi uzluksizlik moduli.**  $|f(x') - f(x'')|$  ayirmaning aniq yuqori chegarasi

$$\sup\{|f(x') - f(x'')|\}$$

$f(x)$  funksiyaning  $X \subset R$  to'plamdagi uzluksizlik moduli deyiladi va  $\omega(\delta)$  kabi belgilanadi:

$$\omega(\delta) = \sup_{|x' - x''| \leq \delta} \{|f(x') - f(x'')|\}.$$

**Kantor teoremasi.** Agar  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da tekis uzluksiz bo'ladi.

**Tekis uzluksizlik.** Agar ixtiyoriy  $\varepsilon > 0$  son olinganda ham shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$$|x' - x''| < \delta$$

tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $x', x'' \in X$  uchun

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

tengsizlik bajarilsa, ya'ni

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in X, |x' - x''| < \delta:$$

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda tekis uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada).** Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (to'plamda).** Agar  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda uzluksiz deyiladi.



## Keys banki

**17-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Agar  $f(x)$  funksiya  $(0,1)$  da tekis uzluksiz bo`lsa, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +0} f(x)$$

limit mavjud bo`ladimi?

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

# 17-amaliy mashg'ulot

## Na'muna uchun misollar yechimi

### 1 – misol. Ushbu

$$f(x) = \sin x$$

*f* funksiyaning  $(-\infty; +\infty)$  da tekis uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

◀  $\forall \varepsilon > 0$  sonni olib, unga ko'ra  $\delta$  ni  $\delta = \varepsilon$  deymiz. Unda  $|x_1 - x_2| < \delta$  tengsizlikni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy  $x_1, x_2 \in (-\infty; +\infty)$  uchun

$$|\sin x_1 - \sin x_2| = \left| 2 \cos \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \leq 2 \cdot 1 \cdot \left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right| = |x_1 - x_2| < \delta = \varepsilon$$

bo'lishini topamiz. Demak,  $f(x) = \sin x$  funksiya  $(-\infty; +\infty)$  da tekis uzluksiz. ▶

### Misollar

$y = f(x)$  funksiyaning  $X$  to'plamda tekis uzluksiz ekanligi ta'rif yordamida ko'rsatilsin ( $\delta = \delta(\varepsilon)$  topilsin).

773.  $f(x) = 3x - 5$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .

774.  $f(x) = x^2 - x + 1$ ,  $X = (-3; 4)$ .

775.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $X = [0, 2; 1]$ .

776.  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $X = [0; +\infty)$ .

777.  $f(x) = \sqrt[3]{x}$ ,  $X = [0; 2]$ .

778.  $f(x) = x^3 - 1$ ,  $X = [-2; 3]$ .

779.  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ,  $X = [3; 4]$ .

780.  $f(x) = 3\sin x + 2\cos x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$ .

$y = f(x)$  funksiyaning  $X$  to'plamda tekis uzluksiz emasligi isbotlansin.

781.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $X = (0; 1)$ .

782.  $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ ,  $X = (0; 1)$ .

783.  $f(x) = \cos \frac{1}{x}$ ,  $X = (0; 1)$ .

784.  $f(x) = x^2$   $X = (-\infty; +\infty)$ .

785.  $f(x) = \frac{1}{x-3}$   $X = (3; 5)$ .

786.  $f(x) = \ln x$   $X = (0; 1)$ .

Quyidagi funksiyalar berilgan oraliqda tekis uzluksizlikka tekshirilsin.

787.  $f(x) = \frac{\sin x}{x}$  ( $0 < x < \pi$ )

788.  $f(x) = x^2$  ( $-10 < x < 10$ )

789.  $f(x) = x \sin x$  ( $0 \leq x < \infty$ )

790.  $f(x) = e^x$  ( $-\infty < x < +\infty$ )

791.  $f(x) = \cos x \cdot \cos \frac{\pi}{x}$  ( $0 < x < 1$ )

792.  $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$  ( $0 < x < \pi$ )

793.  $f(x) = \sin \sqrt{x}$  ( $1 \leq x < +\infty$ )

794.  $f(x) = e^{-\arcsin x}$  ( $-1 \leq x \leq 1$ )

795.  $f(x) = \begin{cases} x+1, & \text{agar } x \leq 0 \text{ бўлса,} \\ e^{-x}, & \text{agar } x > 0 \text{ бўлса} \end{cases}$   $X = (-\infty; +\infty)$

796.  $f(x) = x + \sin x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$

Quyidagi funksiyalarning berilgan oraliqdagi uzluksizlik modullari topilsin.

797.  $f(x) = 2x - 1$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$       798.  $f(x) = x^2$ ,  $X = [-e; e]$

799.  $f(x) = \frac{1}{x}$ ,  $X = [a; +\infty)$ ,  $a > 0$       800.  $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ,  $X = (0; 1)$

801.  $f(x) = x^3$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$       802.  $f(x) = \ln x$ ,  $X = [1; +\infty)$

803.  $f(x) = \cos x$ ,  $X = (-\infty; +\infty)$

## Test

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	Quyidagi funksiyalarda n qaysi biri $R$ da tekis uzluksiz?	$f(x) = \sin x$	$f(x) = \sin x^2$	$f(x) = x^2$	$f(x) = x^4$
2.	Quyidagi funksiyalarda n qaysi biri $R$ da tekis uzluksiz?	$f(x) = 3x - 4$	$f(x) = 3x^2 - 4$	$f(x) = x^2$	$f(x) = 5x^4$
3.	Quyidagi funksiyalarda n qaysi biri $R$ da tekis uzluksiz bo'lmaydi?	$f(x) = x^2$	$f(x) = \sin x$	$f(x) = x$	$f(x) = 5$
4.	Quyidagi funksiyalarda n qaysi biri $R$ da tekis uzluksiz bo'lmaydi?	$f(x) = \sin x^2$	$f(x) = \cos x$	$f(x) = 3x$	$f(x) = x - 1$
5.	$f(x) = \ln x$ funksiya qaysi to'plamda tekis uzluksiz?	[1;2]	(0;1)	(0;2)	(0;3)
6.	$f(x) = \frac{1}{x}$ funksiya qaysi to'plamda tekis uzluksiz bo'lmaydi?	(0;1)	[1;2]	[2;3]	[4;5]

7.	$f(x) = x^2 + 1$ funksiya qaysi to'plamda tekis uzluksiz bo'lmaydi?	$(-\infty; +\infty)$	$[-10; 10]$	$[-100; 100]$	$[-1000; 1000]$
8.	$f(x) = 3x^4$ funksiya qaysi to'plamda tekis uzluksiz?	$[-2; 2]$	$(0; +\infty)$	$(-2; +\infty)$	$(-\infty; 0)$
9.	$f(x) = 2x - 1$ funksiyaning $X = R$ to'plamda uzluksizlik modulini toping.	$\omega(\delta) = 2\delta$	$\omega(\delta) = \delta$	$\omega(\delta) = 3\delta$	$\omega(\delta) = 4\delta$
10.	$f(x) =  x $ funksiyaning $X = R$ to'plamda uzluksizlik modulini toping.	$\omega(\delta) = \delta$	$\omega(\delta) = 2\delta$	$\omega(\delta) = 3\delta$	$\omega(\delta) = 4\delta$

# 18-mavzu. Funksiyaning hosilasi

## 18-ma'ruza

### Reja

1. Funksiya hosilasining ta'rifi.
2. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari.
3. Hosilaning geometrik va mexanik ma'no'lari.

### 1. Funksiya hosilasining ta'rifi.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b) \subset R$  da berilgan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 + \Delta x \in (a, b)$  bo'lsin.

Ma'lumki ushbu

$$\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$$

ayirma  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi orttirmasi deyiladi. ([2], p. 167, item 6.1)

**1-ta'rif.** ([2], p. 168, Def. 6.1) Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi hosilasi deyiladi va  $\frac{df(x_0)}{dx}$ , yoki  $f'(x_0)$ , yoki  $(f(x))'_{x_0}$  kabi belgilanadi. Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad (1)$$

Agar  $x_0 + \Delta x = x$  deyilsa, unda  $\Delta x = x - x_0$  va  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $x \rightarrow x_0$  bo'lib, (1) munosabat quyidagi

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (2)$$

ko'rinishga keladi.

**1-misol.** ([2], p. 170, i)  $f(x) = x$ ,  $x_0 \in R$  bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 1$$

bo'ladi. Demak,  $f'(x) = (x)' = 1$ .

**2-misol.** ([1], p. 253, Example 10.1.6)  $f(x) = |x|$ ,  $x \in R$  bo'lsin.

Agar  $x > 0$  bo'lsa, u holda  $f(x) = x$  bo'lib,  $f'(x) = 1$  bo'ladi.

Agar  $x < 0$  bo'lsa, u holda  $f(x) = -x$  bo'lib,  $f'(x) = -1$  bo'ladi.

Agar  $x_0 = 0$  bo'lsa, u holda  $\frac{f(x) - 0}{x - 0} = \frac{|x|}{x}$  bo'lib,  $x \rightarrow 0$  da bu nisbatlarning limiti mavjud bo'lmaydi. Demak, berilgan funksiya  $x_0 = 0$  nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.

**3-misol.**  $f(x) = x|x|$ ,  $x \in R$ ,  $x_0 \in R$  bo'lsin.

a)  $x_0 > 0$ ,  $x > 0$ ,  $x \neq x_0$  uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x|x| - x_0|x_0|}{x - x_0} = \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = x + x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 2x_0 = 2|x_0|$$

bo'ladi.

b)  $x_0 < 0$ ,  $x < 0$ ,  $x \neq x_0$  uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = -x - x_0$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -2x_0 = 2|x_0|$$

bo'ladi.

v)  $x_0 = 0$ ,  $x \neq x_0$  uchun

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - 0} = \frac{x|x|}{x} = |x|$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$$

bo'ladi. Demak,  $\forall x \in R$  da  $f'(x) = (x|x|)' = 2|x|$ .

**4-misol.** Aytaylik,

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

bo'lib,  $x_0 = 0$  bo'lsin. Unda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{x \cdot \sin \frac{1}{x} - 0}{x - 0} = \sin \frac{1}{x}$$

bo'lib, uning  $x \rightarrow 0$  dagi limiti mavjud emas. Demak, berilgan funksiya  $x_0 = 0$

nuqtada hosilaga ega emas.

## 2. Funksiyaning o'ng va chap hosilalari.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $(x_0 - \delta, x_0) \subset X$  ( $\delta > 0$ ) bo'lsin.

**2-ta'rif.** ([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi chap hosilasi deyiladi va  $f'(x_0 - 0)$  kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $(x_0, x_0 + \delta) \subset X$  ( $\delta > 0$ ) bo'lsin.

**3-ta'rif.** ([2], p. 176, Def. 6.13) Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi o'ng hosilasi deyiladi va  $f'(x_0 + 0)$  kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Masalan,  $f(x) = |x|$  funksiyaning  $x_0 = 0$  nuqtadagi o'ng hosilasi  $f'(+0) = 1$ , chap hosilasi  $f'(-0) = -1$  bo'ladi.

Yuqorida keltirilgan ta'riflardan quyidagi xulosalar kelib chiqadi:

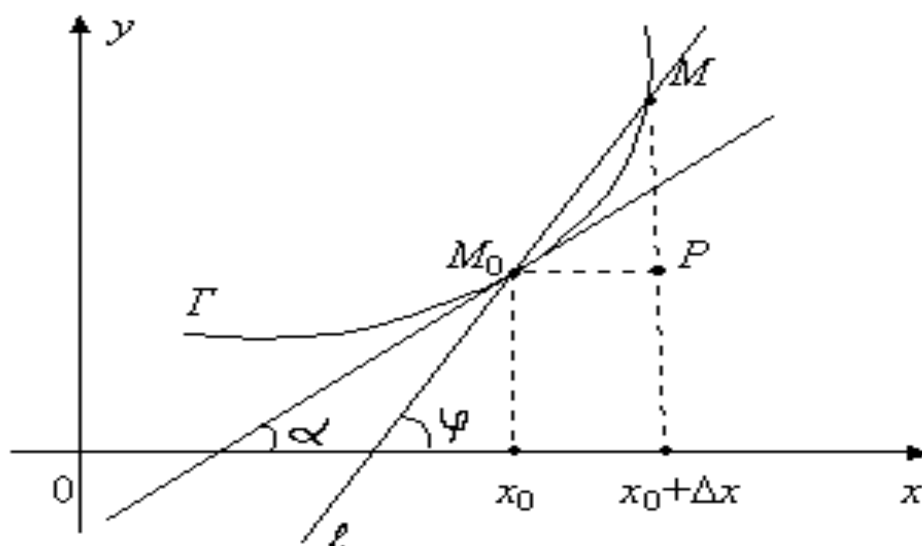
1. ([2], p. 176, Property 6.14) Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada  $f'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsa, u holda bu funksiya  $x_0$  nuqtada o'ng  $f'(x_0 + 0)$  hamda chap  $f'(x_0 - 0)$  hosilalarga ega va  $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$  tengliklar o'rinli bo'ladi.

2. ([2], p. 176, Property 6.14) Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada o'ng  $f'(x_0 + 0)$  hamda chap  $f'(x_0 - 0)$  hosilalarga ega bo'lib,  $f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0)$  bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada  $f'(x_0)$  hosilaga ega va  $f'(x_0 - 0) = f'(x_0) = f'(x_0 + 0)$  tengliklar o'rinli bo'ladi.

## 3. Hosilaning geometrik hamda mexanik ma'nolari.

([2], p. 168, (6.1)) Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsin. Bu  $f(x)$  funksiyaning grafigi 5-chizmada tasvirlangan  $\Gamma$  egri chiziqni ifodalasin:





5-chizma.

Bu  $\Gamma$  chiziqda  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M(x, y)$  nuqtalarni olib, ular orqali o'tuvchi  $l$  kesuvchini qaraymiz.

$M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ ,  $M(x, f(x)) \in \Gamma$ ,  $M \rightarrow M_0$  da  $l$  kesuvchi limit holati  $\Gamma$  chiziqqa  $M_0$  nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi.

Ravshanki,  $\varphi$  burchak  $\Delta x$  ga bog'liq:  $\varphi = \varphi(\Delta x)$ .  $f(x)$  funksiyaning grafigiga  $M_0$  nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

ning mavjud bo'lishi lozim. Bunda  $\alpha$ –urinmaning  $OX$  o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchak.

$M_0MP$  uchburchakdan:

$$\operatorname{tg} \varphi(\Delta x) = \frac{MP}{M_0P} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lib, undan

$$\varphi(\Delta x) = \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Funksiya uzluksizligidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \operatorname{arctg} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \operatorname{arctg} \left[ \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \right] = \operatorname{arctg} f'(x_0). \end{aligned}$$

Demak,  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $\varphi(\Delta x)$  ning limiti mavjud va  $\alpha = \operatorname{arctg} f'(x_0)$ .

Keyingi tenglikdan

$$f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi  $f'(x_0)$  hosilasi urinmaning burchak koeffitsientini ifodalaydi. Bunda urinmaning tenglamasi

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

ko'rinishda bo'ladi.

Aytaylik,  $P$  nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab  $s = s(t)$  qonun bilan harakat qilsin, bunda  $t$  – vaqt,  $s$  – o'tilgan yo'l. Agar vaqtning  $t_1$  va  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) qiymatlaridagi o'tilgan yo'l  $s(t_1)$ ,  $s(t_2)$  bo'lsa, unda ushbu nisbat

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$  vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

Quyidagi

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1^+} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

limit harakatdagi nuqtaning  $t_1$  vaqtdagi oniy tezligini bildiradi.

Demak, harakatdagi  $P$  nuqtaning  $t$  vaqtdagi oniy tezligi  $v(t)$ , o'tilgan  $s(t)$  yo'lining hosilasidan iborat bo'ladi:

$$v(t) = s'(t).$$

Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b) \subset R$  da berilgan bo'lsin.

**Teorema.** ([2], p. 169, Prop. 6.3) Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada chekli  $f'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada chekli  $f'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsin. Ta'rifga binoan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

ya'ni

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ da } \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0)$$

bo'ladi.

Endi

$$\alpha = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0)$$

deb belgilaymiz.

Ravshanki,

$$\Delta x \rightarrow 0 \text{ da } \alpha \rightarrow 0.$$

Keyingi tengliklardan topamiz:

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x.$$

Odatda, bu tenglik funksiya orttirmasining formulasi deyiladi. Undan

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta f(x_0) = 0$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtada uzluksiz ekanini bildiradi. ►

**Eslatma.** ([2], p. 170, (6.2)) Funksiyaning biror nuqtada uzluksiz bo'lishidan uning shu nuqtada chekli hosilaga ega bo'lishi har doim ham kelib chiqavermaydi. Masalan,  $f(x) = |x|$  funksiya  $x = 0$  nuqtada uzluksiz, ammo u shu nuqtada hosilaga ega emas.

### Mashqlar

1. Funksiya hosilasi ta'rifidan foydalanib, quyidagi

$$f(x) = x\sqrt{x}, \quad f(x) = 3^x \sin x$$

funksiyalarning hosilalari topilsin.

2. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \text{ - ratsional son bo'lsa,} \\ -x^2, & \text{agar } x \text{ - irratsional son bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning  $x = 0$  nuqtada hosilasi mavjud bo'lishi isbotlansin.

### Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Canuto C., Tabacco A.** *Mathematical analysis I*. Springer-Verlag, Italia, 2008.
3. **Xudayberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'ruzalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
4. **Фихтенгольц Г. М.** *Курс дифференциального и интегрального исчисления, I т.* М. «ФИЗМАТЛИТ», 2001.

### Nazorat savollari

39. Funksiyaning nuqtadagi hosilasi.
40. Funksiyaning nuqtadagi chap (o'ng) hosilasi.
41. Funksiya hosilasining geometrik ma'nosi.
42. Funksiya hosilasining mexanik ma'nosi.

# Glossariy

**Argument orttirmasi.**  $\Delta x = x - x_0$  ayirma argument orttirmasi deyiladi.

**Funksiya orttirmasi.**  $\Delta f = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ayirma funksiya orttirmasi deyiladi.

**Funksiyaning nuqtadagi chap hosilasi.** Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi chap hosilasi deyiladi va  $f'(x_0 - 0)$  kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Funksiyaning nuqtadagi hosilasi.** Agar ushbu

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

limit mavjud va chekli bo'lsa, u  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi hosilasi deyiladi va  $\frac{df(x_0)}{dx}$ , yoki  $f'(x_0)$ , yoki  $(f(x))'_{x_0}$  kabi belgilanadi. Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

**Funksiyaning nuqtadagi o'ng hosilasi.** Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

limit mavjud bo'lsa, bu limit  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi o'ng hosilasi deyiladi va  $f'(x_0 + 0)$  kabi belgilanadi:

$$f'(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

**Hosilaning geometrik ma'nosi.**  $\Gamma$  chiziqda  $M_0(x_0, y_0)$ ,  $M(x, y)$  nuqtalarni olib, ular orqali o'tuvchi  $l$  kesuvchini qaraymiz.

$M_0(x_0, f(x_0)) \in \Gamma$ ,  $M(x, f(x)) \in \Gamma$ ,  $M \rightarrow M_0$  da  $l$  kesuvchi limit holati  $\Gamma$  chiziqqa  $M_0$  nuqtada o'tkazilgan urinma deyiladi.

Ravshanki,  $\varphi$  burchak  $\Delta x$  ga bog'liq:  $\varphi = \varphi(\Delta x)$ .  $f(x)$  funksiyaning grafigiga  $M_0$  nuqtada o'tkazilgan urinmaning mavjud bo'lishi uchun

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi(\Delta x) = \alpha$$

ning mavjud bo'lishi lozim. Bunda  $\alpha$ -urinmaning  $OX$  o'qining musbat yo'nalishi bilan tashkil etgan burchak.

**Hosilaning mexanik ma'nosi.** Aytaylik,  $P$  nuqta to'g'ri chiziq bo'ylab  $s = s(t)$  qonun bilan harakat qilsin, bunda  $t$  - vaqt,  $s$  - o'tilgan yo'l. Agar vaqtning  $t_1$  va  $t_2$  ( $t_1 < t_2$ ) qiymatlaridagi o'tilgan yo'l  $s(t_1)$ ,  $s(t_2)$  bo'lsa, unda ushbu nisbat

$$\frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

$[t_1, t_2]$  vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlikni ifodalaydi.

Quyidagi

$$\lim_{t_2 \rightarrow t_1 + 0} \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}$$

limit harakatdagi nuqtaning  $t_1$  vaqtdagi oniy tezligini bildiradi.

**Uzluksiz funksiya (nuqtada).** Agar

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz deyiladi.

**Uzluksiz funksiya (to'plamda).** Agar  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $X$  to'plamda uzluksiz deyiladi.

## Keys banki

**18-keys.** Masala o'rtaga tashlanadi: Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x - \text{ratsional son bo'lsa,} \\ -x^2, & \text{agar } x - \text{irratsional son bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiyaning  $x = 0$  nuqtada hosilasi mavjud bo'lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).

# 18-amaliy mashg'ulot

## Na'muna uchun misollar yechimi

**1 – misol.** Agar  $f(x) = x \cdot |x|$  bo'lsa,  $f'(x_0)$  topilsin.

◀ Aytaylik,  $x_0 > 0$ ,  $x > 0$  va  $x \neq x_0$  bo'lsin. Unda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x \cdot |x| - x_0 \cdot |x_0|}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = 2|x_0|$$

bo'ladi.

Aytaylik,  $x_0 < 0$ ,  $x < 0$  va  $x \neq x_0$  bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{-x^2 + x_0^2}{x - x_0} = -2x_0 = 2|x_0|$$

bo'ladi.

Aytaylik,  $x_0 = 0$ ,  $x \neq x_0$  bo'lsin. U holda

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = 0$$

bo'ladi. Demak,  $f'(x_0) = 2|x_0|$ . ▶

## Misollar

**Ta'rif yordamida  $f'(x_0)$  topilsin:**

**823.**  $f(x) = x^2$ ,  $x_0 = 0,1$

**824.**  $f(x) = 2 \sin 3x$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{6}$

**825.**  $f(x) = 1 + \ln 2x$ ,  $x_0 = 1$

**826.**  $f(x) = x + \operatorname{ctgx}$ ,  $x_0 = \frac{\pi}{4}$

**Ta'rif yordamida  $f'(x)$  topilsin:**

**827.**  $f(x) = x^3 + 2x$

**828.**  $f(x) = \frac{1}{x}$

**829.**  $f(x) = \sqrt{x}$

**830.**  $f(x) = x\sqrt[3]{x}$

**831.**  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

**832.**  $f(x) = 2^{x+1}$

**833.**  $f(x) = \ln x$

**834.**  $f(x) = \sin 2x$

**835.**  $f(x) = \operatorname{ctgx} + 2$

**836.**  $f(x) = \arcsin x$

**837.**  $f(x) = \arccos 3x$

**838.**  $f(x) = 7 \arctg(x+1)$

**839.**  $y = \frac{2x}{1-x^2}$

**840.**  $y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$

**841.**  $y = \frac{x}{(1-x)^2(1+x)^3}$

**842.**  $y = \frac{(2-x^2)(2-x^3)}{(1-x)^2}$

$$843. y = \frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$$

$$845. y = x + \sqrt{x} + \sqrt[3]{x}$$

$$847. y = \sqrt[3]{x^2} - \frac{2}{\sqrt{x}}$$

$$849. y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$$

$$851. y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$853. y = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$$

$$855. y = \sqrt[3]{1+\sqrt[3]{1+\sqrt[3]{x}}}$$

$$857. y = (2-x^2)\cos x + 2x\sin x$$

$$859. y = \sin^n x \cos nx$$

$$861. y = \frac{\sin^2 x}{\sin x^2}$$

$$863. y = \frac{1}{\cos^n x}$$

$$865. y = tg \frac{x}{2} - ctg \frac{x}{2}$$

$$867. y = 4\sqrt[3]{ctg^2 x} + \sqrt[3]{ctg^8 x}$$

$$869. y = \sin \left[ \cos^2 (tg^3 x) \right]$$

$$871. y = (\sqrt{2})^x + (\sqrt{5})^{-x}$$

$$873. y = 2^x \ln|x|$$

$$875. y = \log_2 x \cdot \ln x \cdot \log_3 x$$

$$877. y = \log_x 2^x$$

$$879. y = e^x \left( 1 + ctg \frac{x}{2} \right)$$

$$881. y = e^{ax} \cdot \frac{a \sin bx - b \cos bx}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$844. y = \frac{x^p (1-x)^q}{1+x}$$

$$846. y = \frac{1}{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt[3]{x}}$$

$$848. y = x\sqrt{1+x^2}$$

$$850. y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m (1+x)^n}$$

$$852. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$$

$$854. y = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$$

$$856. y = \cos 2x - 2\sin x$$

$$858. y = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$$

$$860. y = \sin \left[ \sin(\sin x) \right]$$

$$862. y = \frac{\cos x}{2\sin^2 x}$$

$$864. y = \frac{\sin x - x \cos x}{\cos x + x \sin x}$$

$$866. y = tgx - \frac{1}{3}tg^3 x + \frac{1}{5}tg^5 x$$

$$868. y = \sec^2 \frac{x}{a} + \operatorname{cosec}^2 \frac{x}{a}$$

$$870. y = \ln x^3 - \frac{9}{x} - \frac{27}{2x^2}$$

$$872. y = (x^2 - 7x + 8)e^x$$

$$874. y = e^x \log_2 x$$

$$876. y = \log_x 2$$

$$878. y = \left( \frac{1-x^2}{2} \cdot \sin x - \frac{(1-x)^2}{2} \cdot \cos x \right) e^{-x}$$

$$880. y = \frac{\ln 3 \cdot \sin x + \cos x}{3^x}$$

$$882. y = e^x + e^{e^x} + e^{e^{e^x}}$$



$$883. y = \left(\frac{a}{b}\right)^x \left(\frac{b}{x}\right)^a \left(\frac{x}{a}\right)^b \quad (a > 0, b > 0) \quad 884. y = x^{a^a} + a^{x^a} + a^{a^x} \quad (a > 0)$$

$$885. y = \lg^3 x^2$$

$$886. y = \ln(\ln(\ln x))$$

$$887. y = \ln(\ln^2(\ln^3 x))$$

$$888. y = \frac{1}{2} \ln(1+x) - \frac{1}{4} \ln(1+x^2) - \frac{1}{2(1+x)}$$

$$889. y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

$$890. y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}$$

$$891. y = \frac{1}{2\sqrt{6}} \ln \frac{x\sqrt{3} - \sqrt{2}}{x\sqrt{3} + \sqrt{2}}$$

$$892. y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \quad (0 < k < 1)$$

$$893. y = \sqrt{x+1} - \ln(1+\sqrt{x+1})$$

$$894. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$895. y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$896. y = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x$$

$$897. y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$898. y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$899. y = \frac{2+3x^2}{x^4} \sqrt{1-x^2} + 3 \ln \frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$900. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$



## Test

№	Savol	To'g'ri javob	Muqobil javob	Muqobil javob	Muqobil javob
1.	$f(x) = x^2$ bo'lsa, u holda $f'(1)$ ni toping.	2	3	4	5
2.	$f(x) = \sin x$ bo'lsa, u holda $f'(\pi)$ ni toping.	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
3.	$f(x) = x$ bo'lsa, u holda $f'(1000)$ ni toping.	1	2	3	4
4.	$f(x) = x^3 - 500$ bo'lsa, u holda $f'(2)$ ni toping.	12	13	14	15
5.	$f(x) = 2$ bo'lsa, u holda $f'(5000)$ ni toping.	0	1	2	-1
6.	$f(x) =  x $ funksiyaning $x = 0$ nuqtada o'ng hosilasini toping.	1	-1	2	-2
7.	$f(x) =  x^2 - 5x + 6 $ funksiyaning $x = 2$ nuqtada o'ng hosilasini toping.	1	-10	200	-2
8.	$f(x) = \sqrt{\sin x^2}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada chap hosilasini toping.	-1	1	0	$\frac{1}{2}$
9.	$f(x) =  2^x - 2 $ funksiyaning $x = 1$ nuqtada chap hosilasini toping.	$-\ln 4$	$\ln 4$	1	-1
10.	$f(x) = \begin{cases} x, & \text{agar } x \leq 0 \\ \sqrt[3]{x^4} \ln x, & \text{agar } x > 0 \end{cases}$ funksiyaning $x = 0$ nuqtada chap hosilasini toping.	1	2	-2	-3

# 19-mavzu. Hosilani hisoblash qoidalari

## 19-ma'ruza

### Reja

- 1<sup>o</sup>. Ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining hosilasi.
- 2<sup>o</sup>. Murakkab funksiyaning hosilasi.
- 3<sup>o</sup>. Teskari funksiyaning hosilasi.
- 4<sup>o</sup>. Hosilalar jadvali.

**1<sup>o</sup>. Ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va nisbatining hosilasi.** ([1], Theorem 10.1.13, 255-bet) Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalari  $(a, b) \subset R$  da berilgan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x_0)$  va  $g'(x_0)$  hosilalarga ega bo'lsin. Hosila ta'rifi ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0), \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = g'(x_0) \quad (2)$$

bo'ladi.

- 1)  $f(x) \pm g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib,  
 $(f(x) \pm g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0)$

bo'ladi.

◀  $F(x) = f(x) \pm g(x)$  deb topamiz:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}.$$

Bu tenglikda  $x \rightarrow x_0$  da limitga o'tib, yuqoridagi (1) va (2) munosabatlarni e'tiborga olsak, unda

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \pm \\ &\pm \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0) \end{aligned}$$

bo'lishi kelib chiqadi. Demak,

$$F'(x_0) = (f(x) \pm g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \pm g'(x_0). \blacktriangleright$$

- 2)  $f(x) \cdot g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(f(x) \cdot g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) \pm f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

bo'ladi.

◀  $\Phi(x) = f(x) \cdot g(x)$  deb

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0}$$

nisbatni quyidagicha

$$\frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) + \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x)$$

yozib olamiz. So'ng  $x \rightarrow x_0$  da limitga o'tib topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\Phi(x) - \Phi(x_0)}{x - x_0} &= g(x_0) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \cdot f(x) = \\ &= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

Demak,

$$\Phi'(x_0) = (f(x) \cdot g(x))'_{x_0} = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \blacktriangleright$$

3)  $\frac{f(x)}{g(x)}$  funksiya ( $g(x_0) \neq 0$ )  $x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)'_{x_0} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

bo'ladi.

◀ Modomiki,  $g(x_0) \neq 0$  ekan, unda  $x_0$  nuqtaning biror atrofidagi  $x$  larda  $g(x) \neq 0$  bo'ladi. SHuni e'tiborga olib topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} &= \frac{f(x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x)}{g(x) \cdot g(x_0) \cdot (x - x_0)} = \\ &= \frac{1}{g(x) \cdot g(x_0)} \left[ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \right]. \end{aligned}$$

Bu tenglikda  $x \rightarrow x_0$  da limitga o'tib, ushbu

$$\left( \frac{f(x)}{g(x)} \right)'_{x_0} = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

tenglikka kelamiz. ▶

**1-natija.** Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada  $f'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsa,  $c \cdot f(x)$  funksiya ( $c = const$ )  $x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(c \cdot f(x))'_{x_0} = c \cdot f'(x_0)$$

bo'ladi, ya'ni o'zgarmas sonni hosila ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin.

**2-natija.** Agar  $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$  funksiyalar  $x_0$  nuqtada

hosilalarga ega bulib,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  o'zgarmas sonlar bo'lsa, u holda

$$(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \dots + c_n f_n(x))'_{x_0} = c_1 f_1'(x_0) + c_2 f_2'(x_0) + \dots + c_n f_n'(x_0)$$

bo'ladi.

**2<sup>o</sup>. Murakkab funksiyaning hosilasi.** ([1], Theorem 10.1.15, 256-bet)

Faraz qilaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda,  $g(y)$  funksiya  $\{f(x) | x \in X\}$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in X$  nuqtada  $f'(x_0)$  hosilaga,  $y_0 \in \{f(x) | x \in X\}$  nuqtada ( $y_0 = f(x_0)$ )  $g'(y_0)$  hosilaga ega bo'lsin. U holda  $g(f(x))$  murakkab funksiya  $x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(g(f(x)))'_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

bo'ladi.

◀  $g(y)$  funksiyaning  $y_0$  nuqtada  $g'(y_0)$  hosilaga ega bo'lganligidan

$$g(y) - g(y_0) = g'(y_0) \cdot (y - y_0) + \alpha \cdot (y - y_0)$$

bo'lishi kelib chiqadi, bunda

$$y = f(x), y_0 = f(x_0) \text{ va } y \rightarrow y_0 \text{ da } \alpha \rightarrow 0.$$

Keyingi tenglikning har ikki tomonini  $x - x_0$  ga bo'lib topamiz:

$$\frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = g'(f(x_0)) \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \alpha \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Bundan  $x \rightarrow x_0$  da limitga o'tib,

$$(g(f(x)))'_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

tenglikka kalamiz. ▶

**3<sup>o</sup>. Teskari funksiyaning hosilasi.** ([1], Lemma 10.4.1, Theorem 10.4.2, 262-bet) Aytaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan, uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x_0)$  ( $f'(x_0) \neq 0$ ) hosilaga ega bo'lsin. U holda  $x = f^{-1}(y)$  funksiya  $y_0$  ( $y_0 = f(x_0)$ ) nuqtada hosilaga ega va

$$[f^{-1}(y)]'_{x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bo'ladi.

◀ Ravshanki,

$$f(x) - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) + \alpha(x - x_0)$$

bo'lib,  $x \rightarrow x_0$  da  $\alpha \rightarrow 0$  bo'ladi. Bu tenglikdan

$$\begin{aligned} y - y_0 &= f'(x_0)[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)] - \alpha[f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)] = \\ &= [f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)] \cdot [f'(x_0) + \alpha] \end{aligned}$$

ifodaga kalamiz. Bundan esa

$$\frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{1}{f'(x_0) + \alpha}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Keyingi tenglikda  $y \rightarrow y_0$  da limitga o'tib topamiz:

$$[f^{-1}(y)]_{y_0} = \frac{1}{f'(x_0)}. \blacktriangleright$$

**4<sup>0</sup>. Misollar. 1-misol.**  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  bo'ladi,  $\alpha \in R, x > 0$ .

◀ Aytaylik,  $x > 0$  bo'lsin. Unda  $f(x) = x^\alpha$  funksiya uchun

$$\frac{(x + \Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \cdot \frac{\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{\Delta x}{x}}$$

bo'lib,  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$  bo'ladi. ▶

**2-misol.**  $(a^x)' = a^x \ln a$  bo'ladi,  $a > 0, x \in R$ .

◀  $f(x) = a^x$  funksiya uchun

$$\frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}$$

bo'lib,  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $(a^x)' = a^x \ln a$  bo'ladi. ▶

**3-misol.**  $(\sin x)' = \cos x$ ,  $(\cos x)' = -\sin x$  bo'ladi,  $x \in R$ .

◀  $f(x) = \sin x$  funksiya uchun

$$\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x} = 2 \cdot \frac{1}{\Delta x} \cdot \sin \frac{\Delta x}{2} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \frac{\sin \frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cos \left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)$$

bo'lib,  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $(\sin x)' = \cos x$  bo'ladi. Xuddi shunga o'xshash  $(\cos x)' = -\sin x$  bo'lishi topiladi ▶

**4-misol.**  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$  bo'ladi,  $a > 0, a \neq 1, x > 0$ .

◀  $f(x) = \log_a x$  funksiya uchun

$$\frac{\log_a(x + \Delta x) - \log_a(x)}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \frac{1}{x} \log_a \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}$$

bo'lib,  $\Delta x \rightarrow 0$  da

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x} \log_a e = \frac{1}{x \ln a}$$

bo'ladi. Xususan,  $(\ln x)' = \frac{1}{x}$  bo'ladi. ▶

**5-misol.**  $(\operatorname{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$  bo'ladi.

◀ Teskari funksiya hosilasini hisoblash formulasiga asosan ( $y = \operatorname{arctg}x$ ,  $x = \operatorname{tgy}$ )

$$y' = (\operatorname{arctg}x)' = \frac{1}{(\operatorname{tgy})'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash,

$$(\operatorname{arcsin} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1, 1)),$$

$$(\operatorname{arccos} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (x \in (-1, 1)),$$

$$(\operatorname{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

bo'ladi. ▶

**6-misol.** Faraz qilaylik,

$$y = [u(x)]^{v(x)} \quad (u(x) > 0)$$

bo'lib,  $u'(x)$  va  $v'(x)$  lar mavjud bo'lsin. U holda

$$\left([u(x)]^{v(x)}\right)' = [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x)\right]$$

bo'ladi.

◀ Ushbu  $y = [u(x)]^{v(x)}$  ni logarifmlab,

$$\ln y = v(x) \ln u(x),$$

so'ng murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} \frac{1}{y} y' &= v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{1}{u(x)} \cdot u'(x), \\ y' &= y \left[ v'(x) \cdot \ln u(x) + v(x) \cdot \frac{v(x)}{u(x)} \cdot u'(x) \right] = \\ &= [u(x)]^{v(x)} \cdot \left[ v'(x) \ln u(x) + \frac{v(x)}{u(x)} u'(x) \right]. \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

Bu,

$$(u^v)' = u^v \cdot \ln u \cdot v' + v \cdot u^{v-1} \cdot u'. \quad (3)$$

tenglikdan,  $y = u^v$  funksiya hosilasini hisoblashning quyidagi qoidasi kelib chiqadi:  $y = u^v$  funksiyaning hosilasi ikki qo'shiluvchidan iborat bo'lib, birinchi qo'shiluvchi  $u^v$  ni ko'rsatkichli funksiya deb olingan hosilasiga (bunda asos



$u(x)$  o'zgarimas deb qaraladi) ikkinchi qo'shiluvchi esa  $u^v$  ni darajali funksiya deb olingan hosilasiga (bunda daraja ko'rsatkich  $v(x)$  o'zgarimas deb qaraladi) teng bo'ladi.

**7-misol.** Ushbu

$$f(x) = x^x, \quad g(x) = x^{x^x}$$

funksiyalarning hosilalari topilsin.

◀ (3) formuladan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^x)' = x^x \cdot \ln x + x \cdot x^{x-1} = x^x (\ln x + 1), \\ g'(x) &= (x^{x^x})' = (x^{f(x)})' = x^{f(x)} \cdot \ln x \cdot f'(x) + f(x) \cdot x^{f(x)-1} = \\ &= x^{x^x} \cdot \ln x \cdot (x^x (\ln x + 1)) + x^{x^x} \cdot x^{x^x-1} = \\ &= x^{x^x+x-1} (x^x \ln x (\ln x + 1) + 1). \blacktriangleright \end{aligned}$$

**5<sup>0</sup>. Hosilalar jadvali.** Quyida sodda funksiyalarning hosilalarini ifodalovchi formulalarni keltiramiz:

1.  $(C)' = 0, \quad C = const.$
2.  $(x^\alpha)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}, \quad \alpha \in R, \quad x > 0.$   
 $(x^n)' = nx^{n-1}, \quad n \in N, \quad x \in R.$
3.  $(a^x)' = a^x \ln a, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \in R$   
 $(e^x)' = e^x, \quad x \in R.$
4.  $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x > 0.$   
 $(\log_a |x|)' = \frac{1}{x \ln a}, \quad a > 0, \quad a \neq 1, \quad x \neq 0.$   
 $(\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad x > 0.$   
 $(\ln |x|)' = \frac{1}{x}, \quad x \neq 0.$
5.  $(\sin x)' = \cos x, \quad x \in R.$
6.  $(\cos x)' = -\sin x, \quad x \in R.$
7.  $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi, \quad n \in Z.$
8.  $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq n\pi, \quad n \in Z.$
9.  $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$

$$10. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

$$11. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$$

$$12. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}, \quad x \in R.$$

$$13. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad x \in R.$$

$$14. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x, \quad x \in R.$$

$$15. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad x \in R.$$

$$16. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad x \neq 0.$$

### Mashqlar

1. Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $(-a, a) \subset R$  da berilgan va  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin. Agar  $f(x)$  juft funksiya bo'lsa,  $f'(x)$  ham juft funksiya bo'lishi isbotlansin.

2.  $f(x)$  funksiya  $R$  da berilgan bo'lib,  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin. Qanday nuqtalarda  $|f(x)|$  funksiya hosilaga ega bo'ladi?

3. Ushbu

$$\phi(g(f))$$

murakkab funksiya hosilasini hisoblash qoidasi topilsin.

### Adabiyotlar

1. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
2. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
3. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

## Glossariy

**Murakkab funksiyaning hosilasi.** Faraz qilaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda,  $g(y)$  funksiya  $\{f(x) | x \in X\}$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in X$  nuqtada  $f'(x_0)$  hosilaga,  $y_0 \in \{f(x) | x \in X\}$  nuqtada ( $y_0 = f(x_0)$ )  $g'(y_0)$  hosilaga ega bo'lsin. U holda  $g(f(x))$  murakkab funksiya  $x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lib,

$$(g(f(x)))'_{x_0} = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$$

bo'ladi.

**Teskari funksiyaning hosilasi.** Aytaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan, uzluksiz va qat'iy o'suvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x_0)$  ( $f'(x_0) \neq 0$ ) hosilaga ega bo'lsin. U holda  $x = f^{-1}(y)$  funksiya  $y_0$  ( $y_0 = f(x_0)$ ) nuqtada hosilaga ega va

$$[f^{-1}(y)]'_{x_0} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

bo'ladi.

## Keys banki

**19-keys.** Masala o'rtaga tashlanadi:  $f(x)$  funksiya  $R$  da berilgan bo'lib,  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin. Qanday nuqtalarda  $|f(x)|$  funksiya hosilaga ega bo'ladi?

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).

## 19-amaliy mashg`ulot

1 – misol. Ushbu

$$y = x^2 - 4x$$

parabolaga absissasi  $x=1$  bo'lgan nuqtada o'tkazilgan urinma va normalning tenglamalari topilsin.

◀ Absissasi  $x=1$  paraboladagi nuqtaning ordinatasi  $y=-3$  bo'ladi. Parabolaga  $(1, -3)$  nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini topamiz:

$$y' = 2x - 4, \quad y'(1) = -2$$

Demak, urinmaning tenglamasi

$$y + 3 = -2(x - 1), \text{ ya'ni } 2x + y + 1 = 0,$$

normalning tenglamasi esa

$$y + 3 = \frac{1}{2}(x - 1), \text{ ya'ni } x - 2y - 7 = 0$$

bo'ladi. ►

2 – misol. Ushbu

$$12y = x^3$$

kubik parabola bo'yicha xarakat qilayotgan nuqtaning koordinatalaridan qaysi biri tezroq o'zgaradi?

◀ Qaralayotgan  $x$  va  $y$  larning  $t$  vaqtning funksiyasi deb topamiz:

$$12 \frac{dy}{dx} = 3x^2 \frac{dx}{dt}$$

Bu tenglikdan

$$\frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{x^2}{4}$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Ravshanki, bu tenglikning chap tomonidagi nisbat nuqta ordinatasining o'zgarish tezligining shu nuqta absissasining o'zgarish tezligiga nisbatidan iborat bo'lib, u  $|x| < 2$  bo'lganda birdan kichik,  $|x| = 2$  bo'lganda birga teng,  $|x| > 2$  bo'lganda esa birdan katta bo'ladi. Demak,

1)  $-2 < x < 2$  bo'lganda nuqtaning ordinatasi uning absissasiga qaraganda sekinroq o'zgaradi;

2)  $x = \pm 2$  bo'lganda absissasi hamda ordinatasining o'zgarish tezligi bir hil bo'ladi;

3)  $x < -2$  va  $x > 2$  bo'lganda nuqtaning ordinatasi uning absissasiga qaraganda tezroq o'zgaradi. ►

**Hosilalar jadvalidan foydalanib, quyidagi funksiyalarning hosilalari**

topilsin.

$$1. y = \frac{2x}{1-x^2}$$

$$2. y = (1+x)\sqrt{2+x^2}\sqrt[3]{3+x^3}$$

$$3. y = \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$$

$$4. y = \log_x 2^x$$

$$5. y = \frac{1}{4} \ln \frac{x^2-1}{x^2+1}$$

$$6. y = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$$

$$7. y = \sqrt[m+n]{(1-x)^m(1+x)^n}$$

$$8. y = \sqrt[3]{\frac{1+x^3}{1-x^3}}$$

$$9. y = \left( \frac{1-x^2}{2} \cdot \sin x - \frac{(1-x)^2}{2} \cdot \cos x \right) e^{-x}$$

$$10. y = \frac{1}{4(1+x^4)} + \frac{1}{4} \ln \frac{x^4}{1+x^4}$$

Ko'rsatilgan nuqtalarda teskari funksiyalarning hosilalari topilsin:

$$972. y = x + \frac{1}{5}x^5, \quad y = 0, \quad y = \frac{6}{5}$$

$$973. y = 2x - \frac{\cos x}{2}, \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$974. y = 0,1x + e^{0,1x}, \quad y = 1$$

$$975. y = 2x^2 - x^4, \quad x > 1, \quad y = 0$$

$$976. y = 2x^2 - x^4, \quad 0 < x < 1, \quad y = \frac{3}{4}$$

Teskari funksiyaning hosilasi topilsin, ularning aniqlanish sohalari ko'rsatilsin.

$$977. y = x + \ln x, \quad x > 0$$

$$978. y = x + e^x$$

$$979. y = \frac{x^2}{1+x^2}, \quad x < 0$$

$$980. y = \operatorname{ch} x, \quad x > 0$$

Parametrik ko'rinishda berilgan  $y = y(x)$  funksiya uchun  $y'_x$  topilsin.

$$981. x = \sin^2 t, \quad y = \cos^2 t, \quad 0 < t < \frac{\pi}{2}$$

$$982. x = e^{-t}, \quad y = t^3, \quad -\infty < t < +\infty$$

$$983. x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad 0 < t < \pi$$

$$984.$$

$$x = a \operatorname{cht}, \quad y = b \operatorname{sht}, \quad -\infty < t < 0$$

$$985. x = t^2 + 6t + 5, \quad y = \frac{t^3 - 54}{t}, \quad 0 < t < +\infty$$

$$986. x = (t-1)^2(t-2), \quad y = (t-1)^2(t-3), \quad \frac{5}{3} < t < +\infty$$

$$987. x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad -\infty < t < +\infty$$

$$988. x = \ln \sin \frac{t}{2}, \quad y = \ln \sin t, \quad 0 < t < \pi$$

Uyga vazifa uchun misollar.

$$1. y = \frac{1}{1-k} \ln \frac{1+x}{1-x} + \frac{\sqrt{k}}{1-k} \ln \frac{1+x\sqrt{k}}{1-x\sqrt{k}} \quad (0 < k < 1)$$

$$2. y = \sqrt{x+1} - \ln(1 + \sqrt{x+1})$$

$$3. y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

$$4. y = x \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1}$$

$$5. y = x \ln^2(x + \sqrt{1+x^2}) - 2\sqrt{1+x^2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + 2x$$

$$6. y = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{a^2}{2} \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})$$

$$7. y = \frac{1}{2\sqrt{ab}} \ln \frac{\sqrt{a} + x\sqrt{b}}{\sqrt{a} - x\sqrt{b}} \quad (a > 0, b > 0)$$

$$8. y = \frac{2 + 3x^2}{x^4} \sqrt{1 - x^2} + 3 \ln \frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}$$

$$9. y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2}$$

$$10. y = \ln \operatorname{tg} \left( \frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$$

$$11. y = \frac{1}{2} \operatorname{ctg}^2 x + \ln \sin x$$

$$12. y = \ln \sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}$$

$$13. y = -\frac{\cos x}{2 \sin^2 x} + \ln \sqrt{\frac{1 + \cos x}{\sin x}}$$

$$14. y = \ln \frac{b + a \cos x + \sqrt{b^2 - a^2} \cdot \sin x}{a + b \cos x} \quad (0 \leq |a| < |b|)$$

$$15. y = \frac{1}{x} (\ln^3 x + 3 \ln^2 x + 6 \ln x + 6)$$

$$16. y = \frac{1}{4x^4} \ln \frac{1}{x} - \frac{1}{16x^4}$$

$$17. y = \frac{3}{2} \cdot \left( 1 - \sqrt[3]{1 + x^2} \right) + 3 \ln \left( 1 + \sqrt[3]{1 + x^2} \right)$$





# Test

1) Hosilasi hisoblansin.  $(x^{2016} + \cos x)' = ?$

A)  $2016x^{2015} - \sin x$

B)  $2016x^{2016} - \sin x$

C)  $2016x^{2015} + \sin x$

D)  $2016x^{2014} - \sin x$

2) Hosilasi hisoblansin.  $(\arctg x + \arccos x)' = ?$

A)  $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

B)  $\frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

C)  $\frac{1}{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

D)  $\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

3) Hosilasi hisoblansin.  $(e^x + \arcsin x)' = ?$

A)  $e^x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

B)  $e^{-x} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

C)  $e^x + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

D)  $-e^x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

4) Hosilasi hisoblansin.  $(\operatorname{tg} x + \cos x)' = ?$

A)  $\frac{1}{\cos^2 x} - \sin x$

B)  $\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x$

C)  $\frac{1}{\sin^2 x} + \sin x$

D)  $-\frac{1}{\cos^2 x} + \sin x$

5) Hosilasi hisoblansin.  $(x^{2016} \cdot \cos x)' = ?$

A)  $2016x^{2015} \cdot \cos x - x^{2016} \cdot \sin x$

B)  $2016x^{2015} \cdot \cos x + x^{2016} \cdot \sin x$

C)  $2016x^{2016} \cdot \cos x - x^{2016} \cdot \sin x$

D)  $2016x^{2015} \cdot \cos x - x^{2015} \sin x$

6) Hosilasi hisoblansin.  $(x^{2016} \cdot \cos 2x)' = ?$

A)  $2016x^{2015} \cdot \cos 2x - 2x^{2016} \cdot \sin 2x$

B)  $2016x^{2015} \cdot \cos 2x + x^{2016} \cdot \sin 2x$

C)  $2016x^{2016} \cdot \cos 2x - 2x^{2016} \cdot \sin x$

D)  $2016x^{2015} \cdot \cos 2x - 2x^{2015} \sin 2x$

7) Hosilasi hisoblansin.  $((x+1)^{2016} \cdot \sin 2x)' = ?$

A)  $2016(x+1)^{2015} \cdot \sin 2x + 2(x+1)^{2016} \cdot \cos 2x$

B)  $2016(x+1)^{2015} \cdot \sin 2x - 2(x+1)^{2016} \cdot \cos 2x$

C)  $2016(x+2)^{2015} \cdot \sin 2x + 2(x+1)^{2016} \cdot \cos 2x$

D)  $2016(x+1)^{2016} \cdot \sin 2x + 2(x+1)^{2016} \cdot \cos 2x$

8) Hosilasi hisoblansin.  $(\operatorname{tg}(3x+1))' = ?$

A)  $\frac{3}{\cos^2(3x+1)}$

B)  $\frac{1}{\cos^2(3x+1)}$

C)  $\frac{3}{\cos^2(x)}$

D)  $-\frac{3}{\cos^2(3x+1)}$

9) Hosilasi hisoblansin.  $(\cos(3x+1) \cdot x)' = ?$

A)  $-3x \cdot \sin(3x+1) + \cos(3x+1)$

B)  $3x \cdot \sin(3x+1) + \cos(3x+1)$

C)  $-3x \cdot \sin(3x+1) - \cos(3x+1)$

D)  $-3x \cdot \sin(3x-1) + \cos(3x-1)$

10) Hosilasi hisoblansin.  $(\operatorname{arctg}x)' = ?$

A)  $-\frac{1}{1+x^2}$

B)  $-\frac{1}{1-x^2}$

C)  $\frac{1}{1+x^2}$

D)  $-\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

# 20-mavzu. Funksiyaning differensiali

## 20-ma'ruza

### Reja

- 1<sup>o</sup>. Funksiya differensial tushunchasi.
- 2<sup>o</sup>. Funksiya differensialining sodda qoidalari.
- 3<sup>o</sup>. Funksiya differensial va taqribiy formulalar.

([1], 6.differential calculus, 185-bet ) 1<sup>o</sup>. **Funksiya differensial tushunchasi.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 + \Delta x \in (a, b)$  bo'lsin.

Ma'lumki,  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ayirma  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi orttirmasi deyiladi.

**1-ta'rif.** Agar  $\Delta f(x_0)$  ni ushbu

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqta-da differensiallanuvchi deyiladi, bunda  $A = const$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , da  $\alpha \rightarrow 0$ .

**Teorema.**  $f(x)$  funksiya  $x \in (a, b)$  nuqtada differensiallanuvchi bo'lishi uchun uning shu nuqtada chekli  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.**  $f(x)$  funksiya  $x \in (a, b)$  nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. Ta'rifga binoan,

$$\Delta f(x) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

bo'ladi, bunda  $A = const$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , da  $\alpha \rightarrow 0$ .

Bu tenglikdan foydalanib topamiz:

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = A + \alpha,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (A + \alpha) = A.$$

Demak,  $f'(x)$  mavjud va  $f'(x) = A$ .

**Etarliligi.**  $f(x)$  funksiya  $x \in (a, b)$  da chekli  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin. Ta'rifga ko'ra

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x)}{\Delta x}$$

bo'ladi. Agar

$$\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} - f'(x) = \alpha$$

deyilsa, undan

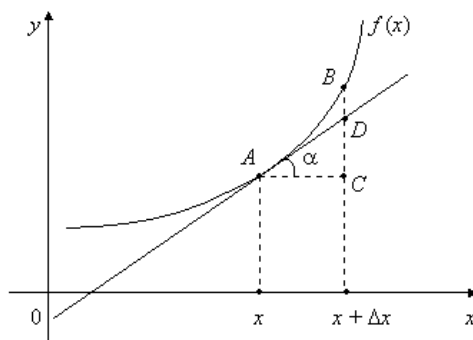
$$\Delta f(x) = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

bo'lishi kelib chiqadi, bunda  $\Delta x \rightarrow 0$  da  $\alpha \rightarrow 0$ . Demak,  $f(x)$  funksiya differensiallanuvchi. ►

([1], 6.differential calculus, 185-bet ) 2-ta'rif. Funksiya orttirmasidagi  $f'(x_0) \cdot \Delta x$  ifoda  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi differensial deyiladi va  $df(x_0)$  kabi belgilanadi:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Aytaylik,  $x \in (a, b)$  nuqtada differensiallanuvchi  $f(x)$  funksiyaning grafigi 6-chizmada tasvirlangan egri chiziqni ifodalasin:



6-chizma.

Keltirilgan chizmadan ko'rinadiki,

$$\frac{DC}{AC} = \operatorname{tg} \alpha$$

bo'lib,  $DC = \operatorname{tg} \alpha \cdot AC = f'(x) \cdot \Delta x$  bo'ladi.

Demak,  $f(x)$  funksiyaning  $x$  nuqtadagi differensial funksiya grafigiga  $(x, f(x))$  nuqtada o'tkazilgan urinma orttirmasi  $DC$  ni ifodalash ekan.

Faraz qilaylik,  $f(x) = x$ ,  $x \in \mathbb{R}$  bo'lsin. Bu funksiya differensiallanuvchi bo'lib,  $df(x) = (x)' \cdot \Delta x = \Delta x$ , ya'ni  $dx = \Delta x$  bo'ladi. Demak,  $(a, b)$  da differensiallanuvchi  $f(x)$  funksiya-ning differensialini

$$df(x) = f'(x) \cdot dx$$

ko'rinishda ifodalash mumkin.

([1], 6.differential calculus, 175-bet )Endi sodda funksiyalarning differensiallarini keltiramiz:

1.  $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx$ , ( $x > 0$ );
2.  $d(a^x) = a^x \cdot \ln a \cdot dx$ , ( $a > 0$ ,  $a \neq 1$ );

3.  $d(\log_a x) = \frac{1}{x} \log_a e dx, \quad (x > 0, a > 0, a \neq 1);$
4.  $d(\sin x) = \cos x dx;$
5.  $d(\cos x) = -\sin x dx;$
6.  $d(\operatorname{tg} x) = \frac{1}{\cos^2 x} dx, \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k = 0, \pm 1, \dots);$
7.  $d(\operatorname{ctg} x) = -\frac{1}{\sin^2 x} dx, \quad (x \neq k\pi, k = 0, \pm 1, \dots);$
8.  $d(\arcsin x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (-1 < x < 1);$
9.  $d(\arccos x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx, \quad (-1 < x < 1);$
10.  $d(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1+x^2} dx;$
11.  $d(\operatorname{arcctg} x) = -\frac{1}{1+x^2} dx;$
12.  $d(\operatorname{sh} x) = \operatorname{ch} x dx;$
13.  $d(\operatorname{ch} x) = \operatorname{sh} x dx;$
14.  $d(\operatorname{th} x) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x} dx;$
15.  $d(\operatorname{cth} x) = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x} dx \quad (x \neq 0)$

**2<sup>0</sup>. Funksiya differensialining sodda qoidalari.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalari  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $x \in (a, b)$  nuqtada differensiallanuvchi bo'lsin. U holda  $x \in (a, b)$  da

- 1)  $d(c \cdot f(x)) = c df(x), \quad c = \text{const};$
- 2)  $d(f(x) + g(x)) = df(x) + dg(x);$
- 3)  $d(f(x)g(x)) = g(x)df(x) + f(x)dg(x);$
- 4)  $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x)df(x) - f(x)dg(x)}{g^2(x)}, \quad (g(x) \neq 0).$

bo'ladi.

Bu tasdiqlardan birini, masalan 3)-sini isbotlaymiz.

◀Ma'lumki,

$$d(f(x)g(x)) = (f(x)g(x))' dx.$$

Agar

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda quyidagi tenglikka kelamiz:

$$d(f(x)g(x)) = (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx =$$

$$= g(x)f'(x)dx + f(x)g'(x)dx = g(x)df(x) + f(x)dg(x). \blacktriangleright$$

Faraz qilaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda,  $g(y)$  funksiya  $Y \supset \{f(x) : x \in X\}$  to'plamda berilgan bo'lib,  $f'(x)$  va  $g'(y)$  hosilalarga ega bo'lsin. U holda

$$d(g(f(x))) = g'(f(x)) \cdot df(x)$$

bo'ladi.

◀ Murakkab funksiyaning hosilasini hisoblash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$d(g(f(x))) = [g(f(x))] dx = g'(f(x)) \cdot f'(x)dx = g'(f(x)) \cdot df(x). \blacktriangleright$$

**1-misol.** Ta'rifdan foydalanib, ushbu  $f(x) = x - 3x^2$  funksiyaning  $x_0 = 2$  nuqtadagi differensiali topilsin.

◀ Bu funksiyaning  $x_0 = 2$  nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\begin{aligned} \Delta f(2) &= f(2 + \Delta x) - f(2) = 2 + \Delta x - 3(2 + \Delta x)^2 - 2 + 12 = \\ &= -11 \cdot \Delta x - 3\Delta x^2 = -11 \cdot \Delta x + (-3\Delta x) \cdot \Delta x. \end{aligned}$$

Demak,  $df(2) = -11 \cdot dx$ . ▶

([1], 6.differential calculus, 185-bet ) **3<sup>0</sup>. Funksiya differensiali va taqribiy formulalar.** Funksiya differensiali yordamida taqribiy formulalar yuzaga keladi.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada chekli  $f'(x_0)$  hosilaga ( $f'(x_0) \neq 0$ ) ega bo'lsin. U holda  $\Delta x \rightarrow 0$  da

$$\Delta f(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x)$$

bo'ladi.

Ayni paytda,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada differensial-lanuvchi bo'lib, uning differensiali

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\Delta f(x_0) - df(x_0) = o(\Delta x)$$

bo'lib,  $\Delta x \rightarrow 0$  da

$$\frac{\Delta f(x_0) - df(x_0)}{\Delta x} \rightarrow 0$$

bo'ladi. Natijada

$$\Delta f(x_0) \approx df(x_0),$$

ya'ni

$$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x \quad (1)$$

taqribiy formula hosil bo'ladi. (1) formula  $x_0 \in (a, b)$  nuqta-da differensiallanuvchi  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi orttirmasi  $\Delta f(x_0)$  ni uning shu nuqtadagi differensiali  $df(x_0)$  bilan almashtirish mumkinligini ko'rsatadi. Bu almashtirishning mohiyati funksiya orttirmasi argument

orttirmasining, umuman aytganda murakkab funksiyasi bo'lgan holda, funksiya differensialni esa argument orttirmasining chiziqli funksiyasi bo'lishidadir.

(1) formulada  $\Delta x = x - x_0$  deyilsa, unda

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) \quad (2)$$

bo'ladi.

**2-misol.** Ushbu  $\sin 29^\circ$  miqdor taqribiy hisoblansin.

◀ Agar  $f(x) = \sin x$ ,  $x_0 = 30^\circ$  deyilsa, unda (2) formulaga ko'ra

$$\sin 29^\circ \approx \sin 30^\circ + \cos 30^\circ \cdot (29^\circ - 30^\circ) \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} = 0,5 - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\pi}{360^\circ} \approx 0,4848$$

bo'ladi. ▶

Ma'lumki,  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada differensiallanuvchi  $f(x)$  funksiya grafigiga  $(x_0, f(x_0))$  nuqtada o'tkazilgan urinma-ning tenglamasi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Demak, (2) taqribiy formula geometrik nuqtai nazardan,  $f(x)$  funksiya ifodalagan egri chiziqni  $x_0$  nuqtaning etarli kichik atrofida shu funksiya grafigiga  $(x_0, f(x_0))$  nuqtada o'tkazilgan urinma bilan almashtirilishi mumkinligini bildiradi.

(2) formulada  $x_0 = 0$  deyilsa, u ushbu

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \quad (3)$$

ko'rinishga keladi.

$f(x)$  funksiya sifatida  $(1+x)^\alpha$ ,  $\sqrt{1+x}$ ,  $e^x$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $\sin x$ ,  $\operatorname{tg} x$  funksiyalarni olib, ularga (3) formulani qo'llash natijasida quyidagi taqribiy formulalar hosil bo'ladi:

$$(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x,$$

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x,$$

$$e^x \approx 1 + x,$$

$$\ln(1+x) \approx x,$$

$$\sin x \approx x,$$

$$\operatorname{tg} x \approx x.$$

## Mashqlar

1. Aytaylik,  $u$  va  $v$  lar differensiallanuvchi funksiya-lar bo'lib, ularning differensiallari  $du$  va  $dv$  bo'lsin. Unda ushbu

$$y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v} + \ln \sqrt{u^2 + v^2}$$

funksiyaning differensialini topilsin.

2. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiya  $x_0 = 0$  nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

3. Ushbu

$$\sqrt{1,2}, \sqrt{1,02}, \sqrt{1,002}$$

miqdorlarning taqribiy qiymati topilsin.

### Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A.** - Mathematical Analysis I, Italy 2008.
2. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.



# Glossariy

**Funksiya differensial tushunchasi.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$ ,  $x_0 + \Delta x \in (a, b)$  bo'lsin.

Ma'lumki,  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$  ayirma  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi orttirmasi deyiladi.

**1-ta'rif.** Agar  $\Delta f(x_0)$  ni ushbu

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \Delta x$$

ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqta-da differensiallanuvchi deyiladi, bunda  $A = \text{const}$ ,  $\Delta x \rightarrow 0$ , da  $\alpha \rightarrow 0$ .

**2-ta'rif.** Funksiya orttirmasidagi  $f'(x_0) \cdot \Delta x$  ifoda  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi differensial deyiladi va  $df(x_0)$  kabi belgilanadi:

$$df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x.$$

Aytaylik,  $x \in (a, b)$  nuqtada differensiallanuvchi  $f(x)$  funksiyaning grafigi 6-chizmada tasvirlangan egri chiziqni ifodalasin:

## Keys banki

**20-keys.** Masala o'rtaga tashlanadi: Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{arctg} \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiya  $x_0 = 0$  nuqtada differensiallanuvchi bo'ladimi?

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).

## 20-amaliy mashg`ulot

1 – misol. Ushbu

$$f(x) = \cos \frac{x}{3} + \sin \frac{3}{x}$$

funksiyaning differensiali topilsin.

◀ Bu funksiyaning differensialini (2) formuladan foydalanib topamiz:

$$df(x) = d\left(\cos \frac{x}{3} + \sin \frac{3}{x}\right) = \left(\cos \frac{x}{3} + \sin \frac{3}{x}\right)' \cdot dx = -\left(\frac{1}{3} \sin \frac{x}{3} + \frac{3}{x^2} \cos \frac{3}{x}\right) dx. \blacktriangleright$$

2 – misol. Agar  $u = u(x)$ ,  $v = v(x)$  differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa,

$$y = \operatorname{arctg} \frac{u}{v}$$

ning differensiali topilsin.

◀ Differensial shaklining invariantligi xossasidan foydalanib topamiz:

$$dy = d\left(\operatorname{arctg} \frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{u}{v}\right)^2} \cdot \frac{vdu - u dv}{v^2} = \frac{vdu - u dv}{u^2 + v^2} \blacktriangleright$$

3 – misol. Ushbu

$$\alpha = \sqrt[4]{17}$$

miqdorning taqribiy qiymati topilsin.

◀ (3) formulada

$f(x) = \sqrt[4]{x}$ ,  $x = 17$ ,  $x_0 = 16$  deyilsa, unda  $\Delta x = x - x_0 = 1$  bo'lib,

$$\sqrt[4]{17} \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x = 2 + \frac{1}{32} \cdot 1 = \frac{65}{32} \approx 2,031$$

bo'ladi. Demak,  $\alpha = 2,031$ . ▶

Funksiya differensiali topilsin:

$$1060. y = \frac{1}{x}$$

$$1061. y = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$1062. y = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right|$$

$$1063. y = \ln \left| x + \sqrt{x^2 + a} \right|$$

$$1064. y = \arcsin \frac{x}{a} \quad (a \neq 0)$$

Differensial topilsin:

$$\begin{array}{ll}
1065. d(e^{-x} + \ln x) & 1066. d(\sqrt{x} + 2\sqrt{x} + \sqrt{x}) \\
1067. d(2\sqrt{x^3}(3\ln x - 2)) & 1068. d(\arccos e^x) \\
1069. d \ln(\sqrt{1+2\sin x} + \sqrt{2\sin x - 1}) & 1070. d\left(5\operatorname{sh}^7\left(\frac{x}{35}\right) + 7\operatorname{sh}^5\left(\frac{x}{35}\right)\right) \\
1071. d\left(\frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \ln \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}\right) & 1072. d\left(\ln \frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} + 2\operatorname{arctg} \sqrt{\sin x}\right) \\
1073. d(x^{x^2}) &
\end{array}$$

Ko'rsatilgan nuqtalardagi differensial topilsin:

$$\begin{array}{ll}
1074. d\left(\frac{1}{x} + \ln \frac{x-1}{x}\right), x = -1 & 1075. d\left(\operatorname{arctg} \frac{\ln x}{x}\right), x_1 = \frac{1}{e}, x_2 = e \\
1076. d\left(\frac{(2x-1)^3 \sqrt{2+3x}}{(5x+4)^2 \sqrt{1-x}}\right), x = 0 & 1077. d\left(\frac{x^2 2^x}{x^x}\right), x_1 = 1, x_2 = 2
\end{array}$$

Agar  $u, \vartheta, \omega$  lar  $x$  ning differensiallanuvchi funksiyalari bo'lsa,  $y = y(x)$  funksiyaning differensial topilsin:

$$\begin{array}{lll}
1078. y = u\vartheta\omega & 1079. y = \frac{u}{\vartheta^2} & 1080. y = \frac{1}{\sqrt{u^2 + \vartheta^2}} \\
1081. y = \operatorname{arctg} \frac{u}{\vartheta} & 1082. y = \ln \sqrt{u^2 + \vartheta^2} &
\end{array}$$

Topilsin:

$$\begin{array}{lll}
1083. \frac{d}{d(x^3)}(x^3 - 2x^6 - x^9) & 1084. \frac{d}{d(x^2)}\left(\frac{\sin x}{x}\right) & 1085. \frac{d(\sin x)}{d(\cos x)} \\
1086. \frac{d(\operatorname{tg} x)}{d(\operatorname{ctg} x)} & 1087. \frac{d(\arcsin x)}{d(\arccos x)} &
\end{array}$$

Quyidagi oshkormas yoki parametrik ko'rinishda berilgan  $y = y(x)$  funksiyaning ko'rsatilgan nuqtadagi differensial topilsin:

$$\begin{array}{ll}
1088. y^3 - y = 6x^2, (1;2) & 1089. x^4 + y^4 - 8x^2 - 10y^2 + 16 = 0, (1;3) \\
1090. y^5 + x^4 = xy^2, (x_0; y_0) & 1091. x + y \ln y = 0, (x_0; y_0) \\
1092. xy - \sqrt[3]{xy^2 + 6} = 0, (2;1) & 1093. xe^{\left(\frac{x}{y^2-1}\right)} - 2y = 0, (4;2) \\
1094. 3^{\sin y x^2} - 3x(y - \pi) - 1 = 0, (1; \pi) & 1095. 4xy^3 + \ln \sqrt[3]{\frac{x}{x+y}} = 0, (1;0)
\end{array}$$

$$1096. \mathbf{x = (t-1)^2(t-2), \quad y = (t-1)^2(t-3), \quad (4;0)}$$

$$1097. \mathbf{x = \frac{e^t}{t}, \quad y = (t-1)^2 \cdot e^t, \quad \left(-\frac{2}{\sqrt{e}}; \frac{9}{4\sqrt{e}}\right)}$$

Funksiya orttirmasini differensial bilan almashtirib, quyidagi qiymatlar taqribiy hisoblansin:

$$1098. \sqrt[3]{1,02}$$

$$1099. \sin 29^\circ$$

$$1100. \cos 151^\circ$$

$$1101. \arctg 1,05$$

$$1102. \lg 11$$

# Test

1)Diferensial hisoblansin.  $d(x^{2016}) = ?$

A)  $2016x^{2015} dx$

B)  $2016x^{2016} dx$

C)  $2015x^{2015} dx$

D)  $-2016x^{2015} dx$

2)Diferensial hisoblansin.  $d(\cos x + \operatorname{tg}x) = ?$

A)  $\left(-\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

B)  $\left(-\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$

C)  $\left(-\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$

D)  $\left(-\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$  ( )

3)Diferensial hisoblansin.  $d(\cos 2x + e^{2x}) = ?$

A)  $(-\sin x + 2e^{2x}) dx$

B)  $(\sin x - 2e^{2x}) dx$

C)  $(\sin x + 2e^x) dx$

D)  $(\sin x + e^{2x}) dx$

4)Diferensial hisoblansin.  $d(\cos 2x \cdot e^{2x}) = ?$

A)  $(-2\sin 2x \cdot e^{2x} + 2\cos 2x \cdot e^{2x}) dx$

B)  $(-2\sin x \cdot e^{2x} + 2\cos 2x \cdot e^{2x}) dx$

C)  $(-2\sin 2x \cdot e^{2x} + \cos x \cdot e^{2x}) dx$

D)  $(-2\sin x \cdot e^{2x} + 2\cos x \cdot e^{2x}) dx$

5)Diferensial hisoblansin.  $d(x^{2016} \cdot e^{2x}) = ?$

A)  $x^{2016} \cdot d(e^{2x}) + e^{2x} \cdot d(x^{2016})$

B)  $x^{2016} \cdot d(e^{2x}) + e^{2x} \cdot x^{2016} \cdot d(x)$

C)  $x^{2016} \cdot d(e^{2x}) + e^{2x} \cdot 2016 \cdot x^{2016} \cdot d(x)$

D)  $x^{2016} \cdot e^{2x} \cdot d(x) + e^{2x} \cdot 2016 \cdot x^{2015} \cdot d(x)$

6)Diferensial hisoblansin.  $d(x^{2016} \cdot \cos x) = ?$

- A)  $x^{2016} \cdot d(\cos x) + \cos x \cdot d(x^{2016})$   
 B)  $x^{2016} \cdot d(\cos x) + \cos x \cdot 2016 \cdot x^{2015} \cdot d(x)$   
 C)  $-x^{2016} \cdot \sin x \cdot d(x) + \cos x \cdot 2016 \cdot x^{2015} \cdot d(x)$   
 D)  $-x^{2016} \cdot \sin x \cdot d(x) - \cos x \cdot 2016 \cdot x^{2015} \cdot d(x)$

7)Differensial hisoblansin.  $d(\cos x) = ?$

- A)  $-\sin x \cdot d(x)$   
 B)  $\sin x \cdot d(x)$   
 C)  $\sin x$   
 D)  $-\sin x$

8)Differensial hisoblansin.  $d(\ln(2x+1)) = ?$

- A)  $\frac{2}{2x+1} d(x)$   
 B)  $\frac{1}{2x+1} d(x)$   
 C)  $-\frac{2}{2x+1} d(x)$   
 D)  $\frac{2}{2x+1}$

9)Differensial hisoblansin.  $d(x + \cos x \cdot \text{ctgx}) = ?$

- A)  $\left(1 - \sin x \cdot \text{ctgx} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) d(x)$   
 B)  $\left(1 + \sin x \cdot \text{ctgx} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) d(x)$   
 C)  $\left(1 - \sin x \cdot \text{ctgx} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) d(x)$   
 D)  $\left(1 + \sin x \cdot \text{ctgx} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) d(x)$

10)Taqrbiy hisoblang.  $\sin 29^\circ = ?$

- A) 0,4848  
 B) 0,4747  
 C) 0,4546  
 D) 0,4948

# 21-mavzu. Funksiyaning yuqori tartibli hosila va differensiallari

## 21-ma'ruza

### Reja

- 1<sup>o</sup>. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.
- 2<sup>o</sup>. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari.
- 3<sup>o</sup>. Differensial shaklining invariantligi.

**([1],6.8 Higher-order derivatives, 187-bet) 1<sup>o</sup>. Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin. Bu  $f'(x)$  funksiyaning  $g(x)$  orqali belgilaymiz:

$$g(x) = f'(x) \quad (x \in (a, b)).$$

**1-ta'rif.** Agar  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $g(x)$  funksiya  $g'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsa, bu hosila  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi ikkinchi tartibli hosilasi deyiladi va  $f''(x_0)$  yoki  $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$  kabi belgilanadi.

Xuddi shunga o'xshash,  $f(x)$  ning 3-tartibli  $f'''(x)$ , 4-tartibli  $f^{IV}(x)$  va h.k. tartibli hosilalari ta'riflanadi.

Umuman,  $f(x)$  funksiyaning  $n$ -tartibli hosilasi  $f^{(n)}(x)$  ning hosilasi  $f(x)$  funksiyaning  $(n+1)$ -tartibli hosilasi deyiladi:

$$f^{(n+1)}(x) = \left( f^{(n)}(x) \right)'$$

Odatda,  $f(x)$  funksiyaning  $f''(x)$ ,  $f'''(x)$ , ... hosilalari uning yuqori tartibli hosilalari deyiladi. SHuni ta'kidlash lozimki,  $f(x)$  funksiyaning  $x \in (a, b)$  da  $n$ -tartibli hosilasining mavjudligi bu funksiyaning shu nuqta atrofida 1-, 2-, ...,  $(n-1)$ -tartibli hosilalari mavjudligini taqozo etadi. Ammo bu hosilalarning mavjudligidan  $n$ -tartibli hosila mavjudligi, umuman aytganda, kelib chiqavermaydi.

Masalan,

$$f(x) = \frac{x|x|}{2}$$

funksiyaning hosilasi  $f'(x) = |x|$  bo'lib, bu funksiya  $x=0$  nuqtada hosilaga ega emas, ya'ni berilgan funksiyaning  $x=0$  da birinchi tartibli hosilasi mavjud, ikkinchi tartibli hosilasi esa mavjud emas.

**1-misol.**  $f(x) = a^x$  bo'lsin,  $a > 0$ ,  $x \in R$ . Bu funksiya uchun

$$(a^x)' = a^x \ln a,$$

$$(a^x)'' = (a^x \ln a)' = a^x (\ln a)^2,$$

umuman

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\ln a)^n \quad (1)$$

bo'ladi. (1) munosabatning o'rinli bo'lishi matematik induksiya usuli bilan isbotlanadi.

**2-misol.**  $f(x) = \sin x$  bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

Umuman,

$$(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi.

SHunga o'xshash,

$$(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\frac{\pi}{2}\right)$$

bo'ladi.

**3-misol.**  $f(x) = x^\alpha$  bo'lsin,  $x > 0$ ,  $\alpha \in R$ . Bu funksiya uchun

$$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1},$$

$$(x^\alpha)'' = (\alpha x^{\alpha-1})' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2},$$

umuman,

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$$

bo'ladi.

Xususan,  $f(x) = \frac{1}{x}$ , ( $x > 0$ ) funksiya uchun

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

bo'lib, undan

$$(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{x^n}$$

bo'lishini topamiz.

Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f^{(n)}(x)$  va  $g^{(n)}(x)$  hosilalarga ega bo'lsin. U holda:



$$\begin{aligned}
1) & (c \cdot f(x))^{(n)} = c \cdot f^{(n)}(x), \quad c = \text{const}; \\
2) & (f(x) \pm g(x))^{(n)} = f^{(n)}(x) \pm g^{(n)}(x); \\
3) & (f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x) \quad (2) \\
& \left( C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \right), \quad f^{(0)}(x) = f(x)
\end{aligned}$$

bo'lad.

◀ Bu tasdiqlardan 3)-sining isbotini keltiramiz. Ravshanki,  $n = 1$  da (2) munosabat o'rinli bo'lad. Aytaylik, (2) munosabat  $n - 1$  da o'rinli bo'lsin:

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-1-k)}(x).$$

Keyingi tenglikni hamda

$$C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k$$

bo'lishini e'tiborga olib, topamiz:

$$\begin{aligned}
(f(x) \cdot g(x))^{(n)} &= \left( (f(x) \cdot g(x))^{(n-1)} \right)' = \left( \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-1-k)}(x) \right)' = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^k (f^{(k+1)}(x) g^{(n-1-k)}(x) + f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)) = C_{n-1}^0 f(x) g^{(n)}(x) + \\
&+ \sum_{k=0}^{n-1} (C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}) f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) + C_{n-1}^{n-1} f^{(n)}(x) g(x) = \\
&= \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \blacktriangleright
\end{aligned}$$

Odatda, (2) **Leybnits formulasi** deyiladi.

**4-misol.** Ushbu

$$y = x^2 \cos 2x$$

funksiyaning  $n$ -tartibli hosilasi topilsin.

◀Leybnits formulasida  $f(x) = \cos 2x$ ,  $g(x) = x^2$  deb olamiz. Unda bu formulaga ko'ra, ayni paytda  $g(x) = x^2$  funksiya uchun  $k > 2$  bo'lganda

$$g^{(k)}(x) = (x^2)^{(k)} = 0, \quad (k > 2)$$

bo'lishini e'tiborga olib topamiz:

Ravshanki,

$$\begin{aligned}
(\cos 2x)^{(n)} &= 2^n \cos \left( 2x + n \cdot \frac{\pi}{2} \right), \\
(\cos 2x)^{(n-1)} &= 2^{n-1} \cos \left( 2x + (n-1) \frac{\pi}{2} \right) = 2^{n-1} \sin \left( 2x + n \frac{\pi}{2} \right),
\end{aligned}$$

$$(\cos 2x)^{(n-2)} = 2^{n-2} \cos\left(2x + (n-2)\frac{\pi}{2}\right) = -2^{n-1} \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

Demak,

$$(x^2 \cos 2x)^{(n)} = 2^n \left(x^2 - \frac{n(n-1)}{4}\right) \cos\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right) + 2^n nx \sin\left(2x + n\frac{\pi}{2}\right). \blacktriangleright$$

**([1],6.8 Higher-order derivatives, 187-bet)2<sup>0</sup>. Funksiyaning yuqori tartibli differensiallari.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo‘lib,  $\forall x \in (a, b)$  nuqtada  $f''(x)$  hosilaga ega bo‘lsin. Ravshanki,  $f(x)$  funksiyaning differensial

$$df(x) = f'(x)dx \quad (3)$$

bo‘lib, bunda  $dx = \Delta x$  funksiya argumentning ixtiyoriy orttirmasi.

**2-ta’rif.**  $f(x)$  funksiyaning  $x \in (a, b)$  nuqtadagi dif-ferensial  $df(x)$  ning differensial  $f(x)$  funksiyaning  $x \in (a, b)$  nuqtadagi ikkinchi tartibli differensial deyi-ladi va  $d^2 f(x)$  kabi belgilanadi:

$$d^2 f(x) = d(df(x)).$$

Xuddi shunga o‘xshash,  $f(x)$  funksiyaning uchinchi  $d^3 f(x)$ , to‘rtinchi  $d^4 f(x)$  va h.k. tartibdagi differensiallari ta’riflanadi.

Umuman,  $f(x)$  funksiyaning  $n$ -tartibli differensial  $d^n f(x)$  ning differensial  $f(x)$  funksiyaning  $(n+1)$ -tartibli differensial deyiladi:

$$d^{n+1} f(x) = d(d^n f(x)).$$

**5-misol.** Ushbu

$$f(x) = xe^{-x}$$

funksiyaning ikkinchi tartibli differensial topilsin.

◀ Berilgan funksiyaning ikkinchi tartibli differensialini ta’rifiga ko‘ra topamiz:

$$\begin{aligned} d^2 f(x) &= d(df(x)) = d(d(xe^{-x})) = d(xde^{-x} + e^{-x}dx) = d(-xe^{-x}dx + e^{-x}dx) = \\ &= -d(xe^{-x})dx + (de^{-x})dx = -(xde^{-x} + e^{-x}dx)dx - e^{-x}(dx)^2 = xe^{-x}(dx)^2 - \\ &= x \cdot e^{-x}(dx)^2 - e^{-x}(dx)^2 - e^{-x}(dx)^2 = (x-2)e^{-x}(dx)^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

Differensiallash qoidasidan foydalanib topamiz:

$$d^2 f(x) = d(df(x)) = d(f'(x)dx) = dx \cdot d(f'(x)) = dx \cdot f''(x)dx = f''(x)(dx)^2, \quad (4)$$

$$d^3 f(x) = d(d^2 f(x)) = f'''(x)(dx)^3,$$

.....

$$d^n f(x) = f^{(n)}(x)(dx)^n$$

Masalan, yuqorida keltirilgan misol uchun

$$d^2(xe^{-x}) = (xe^{-x})''(dx)^2 = (e^{-x} - xe^{-x})'(dx)^2 =$$

$$= (e^{-x} - e^{-x} - xe^{-x})(dx)^2 = (x-2)e^{-x}(dx)^2$$

bo'ladi.

Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  nuqtada  $n$  – tartibli differensiallarga ega bo'lsin. U holda:

- 1)  $d^n(c \cdot f(x)) = c \cdot d^n f(x)$ ,  $c = const$ ;
- 2)  $d^n(f(x) \pm g(x)) = d^n f(x) \pm d^n g(x)$ ;
- 3)  $d^n(f(x) \cdot g(x)) = d^n f(x) \cdot g(x) + C_n^1 d^{n-1} f(x) \cdot dg(x) + \dots + C_n^k d^{n-k} f(x) \cdot d^k g(x) + \dots + f(x) \cdot d^n g(x)$

bo'ladi.

Bu munosabatlarning 1), 2) – larning isboti ravshan. 3) – munosabatni isbotlashda (2) formuladan foydalaniladi.

**3<sup>0</sup>. Differensial shaklining invariantligi.** Aytaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da differensiallanuvchi bo'lib,  $x$  o'zgaruvchi o'z navbatida biror  $t$  o'zgaruvchining  $[\alpha, \beta]$  da differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin:

$$x = \varphi(t) \quad (t \in [\alpha, \beta], x = \varphi(t) \in [a, b]).$$

Natijada

$$y = f(x) = f(\varphi(t))$$

bo'ladi. Bu funksiyaning differensial

$$dy = (f(\varphi(t)))' dt = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = f'(\varphi(t)) \cdot d\varphi(t) = f'(x) dx$$

bo'lib, u (3) ko'rinishga ega bo'ladi. SHunday qilib,  $y = f(x)$  funksiyada  $x$  o'zgaruvchi erkli bo'lgan holda ham, u biror  $t$  o'zgaruvchiga bo'g'liq bo'lgan holda ham  $y = f(x)$  funksiya differensialining ko'rinishi bir xil bo'ladi. Odatda bu xususiyat differensial shaklining **invariantligi** deyiladi.

$y = f(\varphi(t))$  funksiyaning ikkinchi tartibli differensial quyidagicha bo'ladi:

$$\begin{aligned} d^2 y &= d(df) = d(f'(x) dx) = df'(x) \cdot dx + f'(x) \cdot d(dx) = \\ &= f''(x) \cdot (dx)^2 + f'(x) d^2 x. \end{aligned}$$

Bu munosabatni (4) munosabat bilan solishtirib ikkinchi tartibli differensiallarda differensial shaklining invariantligi xossasi o'rinli emasligini topamiz.

## Mashqlar

1. Ushbu

$$f(x) = |x|^3$$

funksiya  $x = 0$  nuqtada uchinchi tartibdagi hosilaga ega bo'ladimi?

2. Ushbu

$$f(x) = (x-1)^2 \sin x \sin(x-1)$$

funksiyaning  $n$  – tartibli hosilasi topilsin ( $n > 2$ ).

3. Agar  $y = f(x)$  funksiya  $n$  – tartibli hosilaga ega bo‘lsa,

$$d^n f(ax + b) = a^n f^{(n)}(ax + b) \cdot (dx)^n$$

bo‘lishi isbotlansin.

#### Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A.** - Mathematical Analysis I, Italy 2008.
2. **Tao T.** *Analysis 1*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Vorish-nashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

# Glossariy

**Funksiyaning yuqori tartibli hosilalari.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin. Bu  $f'(x)$  funksiyani  $g(x)$  orqali belgilaymiz:

$$g(x) = f'(x) \quad (x \in (a, b)).$$

**1-ta'rif.** Agar  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $g(x)$  funksiya  $g'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsa, bu hosila  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi **ikkinchi tartibli hosilasi**

deyiladi va  $f''(x_0)$  yoki  $\frac{d^2 f(x_0)}{dx^2}$  kabi belgilanadi.

## Leybnits formulasi

$$(f(x) \cdot g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n C_n^k f^{(k)}(x) \cdot g^{(n-k)}(x)$$

$$\left( C_n^k = \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k!} \right), \quad f^{(0)}(x) = f(x)$$

**2-ta'rif.**  $f(x)$  funksiyaning  $x \in (a, b)$  nuqtadagi dif-ferensial  $df(x)$  ning differensial  $f(x)$  funksiyaning  $x \in (a, b)$  nuqtadagi **ikkinchi tartibli differensial** deyi-ladi va  $d^2 f(x)$  kabi belgilanadi:

$$d^2 f(x) = d(df(x)).$$

**Differensial shaklining invariantligi.** Aytaylik,  $y = f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da differensiallanuvchi bo'lib,  $x$  o'zgaruvchi o'z navbatida biror  $t$  o'zgaruvchining  $[\alpha, \beta]$  da differensiallanuvchi funksiyasi bo'lsin:

$$x = \varphi(t) \quad (t \in [\alpha, \beta], x = \varphi(t) \in [a, b]).$$

Natijada

$$y = f(x) = f(\varphi(t))$$

bo'ladi. Bu funksiyaning differensial

$$dy = (f(\varphi(t)))' dt = f'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) dt = f'(\varphi(t)) \cdot d\varphi(t) = f'(x) dx$$

bo'lib, u (3) ko'rinishga ega bo'ladi. SHunday qilib,  $y = f(x)$  funksiyada  $x$  o'zgaruvchi erkli bo'lgan holda ham, u biror  $t$  o'zgaruvchiga bo'g'liq bo'lgan holda ham  $y = f(x)$  funksiya differensialining ko'rinishi bir xil bo'ladi. Odatda bu xususiyat differensial shaklining **invariantligi** deyiladi.

# Keys banki

**21-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Agar  $y = f(x)$  funksiya  $n$ -tartibli hosilaga ega bo`lsa,

$$d^n f(ax + b) = a^n f^{(n)}(ax + b) \cdot (dx)^n$$

bo`lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

## 21-amaliy mashg`ulot

1 – misol. Ushbu

$$f(x) = |x|^3$$

funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi topilsin.

◀ Aytaylik,  $x \neq 0$  bo'lsin, Unda

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & \text{agar } x > 0, \\ -x^3, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

bo'lib,

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & \text{agar } x > 0, \\ -3x^2, & \text{agar } x < 0 \end{cases}$$

bo'ladi.

Aytaylik,  $x = 0$  bo'lsin. Bu holda ta'rifga binoan

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|\Delta x|^3}{\Delta x} = 0$$

bo'ladi.

Demak, berilgan funksiya  $x$  ning barcha qiymatlarida hosilaga ega bo'lib,

$$f'(x) = 3x^2 \operatorname{sign} x$$

bo'ladi.

Xuddi yuqoridagidek,  $x \neq 0$  bo'lganda

$$f''(x) = \begin{cases} 6x, & \text{agar } x > 0, \\ -6x, & \text{agar } x < 0, \end{cases} \quad x = 0$$

bo'lgan

$$f''(0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(0 + \Delta x) - f'(0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{3\Delta x^2 \operatorname{sign} \Delta x}{\Delta x} = 0$$

bo'lib, barcha  $x$  larda

$$f''(x) = 6|x|$$

bo'ladi. ▶

2 – misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 6}$$

funksiyaning  $n$ -tartibli hosilasi topilsin.

◀ Ravshanki,

$$\frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 6} = \frac{9}{x - 3} - \frac{7}{x - 2}$$

bo‘lib,

$$\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\right)^{(n)} = \left(\frac{9}{x-3}\right)^{(n)} - \left(\frac{7}{x-2}\right)^{(n)} = 9 \cdot ((x-3)^{-1})^{(n)} - 7 \cdot ((x-2)^{-1})^{(n)}$$

bo‘ladi. 3<sup>o</sup> dagi 4)–formuladan foydalanib topamiz:

$$((x-3)^{-1})^{(n)} = (-1)^n \cdot n! (x-3)^{-n-1} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-3)^{n+1}},$$

$$((x-2)^{-1})^{(n)} = (-1)^n \cdot n! (x-2)^{-n-1} = \frac{(-1)^n \cdot n!}{(x-2)^{n+1}}.$$

Demak,

$$\left(\frac{2x+3}{x^2-5x+6}\right)^{(n)} = \frac{9(-1)^n \cdot n!}{(x-3)^{n+1}} + \frac{7(-1)^{n+1} \cdot n!}{(x-2)^{n+1}}. \blacktriangleright$$

Faraz qilaylik,  $x$  o‘zgaruvchi va uning funksiyasi  $y$  lar biror yordamchi  $t$  o‘zgaruvchi (parametr) orqali berilgan bo‘lsin:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t)$$

$y$  ning  $x$  bo‘yicha hosilalari quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad (2)$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

**3 – m i s o l.** *Parametrik ko‘rinishda berilgan ushbu*

$$x = 1 + e^{at}, \quad y = at + e^{-at}$$

*funksiyaning uchinchi tartibli hosilasi topilsin.*

◀ Bu funksiyaning hosilalarini (2) formuladan foydalanib topamiz:

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{a - ae^{-at}}{ae^{at}} = e^{-at} - e^{-2at};$$

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{2ae^{-2at} - ae^{-at}}{ae^{at}} = 2e^{-3at} - e^{-2at};$$



$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{dy''}{dt} : \frac{dx}{dt} = \frac{2ae^{-2at} - 6ae^{-3at}}{ae^{at}} = 2e^{-3at} - 6e^{-4at} \blacktriangleright$$

4 – misol. Agar  $u$ ,  $v$ ,  $du$ ,  $dv$  hamda  $d^2u$ ,  $d^2v$  lar ma'lum bo'lsa,  $d^2\left(\frac{u}{v}\right)$  topilsin.

◀ Ta'rif hamda sodda qoidalardan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} d^2\left(\frac{u}{v}\right) &= d\left(d\left(\frac{u}{v}\right)\right) = d\left(\frac{vdu - udv}{v^2}\right) = \frac{v^2d(vdu - udv) - (vdu - udv)dv^2}{v^4} = \\ &= \frac{v^2(vd^2u + dvdu - ud^2v - dudv) - 2v(vdu - udv)dv}{v^4} = \\ &= \frac{1}{v}d^2u - \frac{u}{v^2}d^2v - \frac{2}{v^2}dudv + \frac{2u}{v^3}dv^2. \blacktriangleright \end{aligned}$$

**Ikkinchi tartibli hosila topilsin:**

1103.  $y = x^2 + 13x + 11$

1104.  $y = 1 + 10x + \frac{1}{x^{98}}$

1105.  $y = \frac{x(1 + 3\sqrt{1-x^2})}{\sqrt{1-x^2}}$

1106.  $y = \cos^2 x$

1107.  $y = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x$

1108.  $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$

1109.  $y = \operatorname{arctg}(x + \sqrt{x^2 + 1})$

1110.  $y = \operatorname{arctg} \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$

1111.  $y = \arcsin \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$

1112.

$$y = 2\operatorname{arctg} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1}}{x} - \ln \frac{\sqrt[4]{1 + x^4} + x}{\sqrt[4]{1 + x^4} - x}$$

1113.  $y(0)$ ,  $y'(0)$  va  $y''(0)$  lar topilsin:

$$y = e^{\sin x} \cdot \cos(\sin x)$$

**Funksiyaning ikkinchi differensial topilsin:**

1114.  $y = (x^2 + x + 1)e^{-x}$

1115.  $y = 2x + \operatorname{ctg} 2x$

1116.  $y = x(\cos \ln x + \sin \ln x)$

1117.  $y = x^x$

Agar  $u = u(x)$ ,  $\vartheta = \vartheta(x)$  - ikki marta differensiallanuvchi funksiyalar bo'lsa,  $d^2y$  topilsin.

1118.  $y = u \cdot \vartheta$

1119.  $y = \frac{u}{\vartheta}$

1120.  $y = u^m \cdot \vartheta^n$  ( $m$  va  $n$ -o'zgarimas sonlar)

1121.  $y = a^u$

1122.  $y = \ln \sqrt{u^2 + 9^2}$

1123.  $y = \arctg \frac{u}{9}$

$\frac{d^2y}{dx^2}$  topilsin:

1124.  $x = t^3, y = t^2$

1125.  $x = \frac{t^2}{1+t^3}, y = \frac{t^3}{1+t^3}$

1126.  $x = \ln \cos t, y = \ln \cos 2t$

1127.  $x = a \cos t, y = b \sin t$

1128.  $x = (1 + \cos^2 t) \sin t, y = \sin^2 t \cos t$

1129.  $x = t \operatorname{cht} - \operatorname{sht}, y = t \operatorname{sht} - \operatorname{cht}$

1130.  $x = \frac{e^t}{1+t}, y = (t-1)e^t$

1131.  $x = \frac{1}{\cos t}, y = \operatorname{tgt} - t$

1132.  $x = \sin \log_2 t, y = \operatorname{tg} \log_2 t$

1133.  $x = 2^{\cos^2 t}, y = 2^{\sin^2 t}$

Oshkormas ko‘rinishda berilgan  $y = y(x)$  funksiya uchun  $y''$  topilsin:

1134.  $x^2 + y^2 = a^2$

1135.  $x^2 - y^2 = a^2$

1136.  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

1137.  $y^2 = 2px$

1138.  $e^{x-y} = x + y$

1139.  $e^{2y} - 2 \ln x - 1 = 0$

1140.  $y - x \operatorname{tg} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$

1141.  $y^2 = e^{x^4 - y^2}$

Ko‘rsatilgan tartibdagi hosilalar topilsin:

1142.  $y = x(2x-1)^2(x+3)^3; y^{(6)}$  va  $y^{(7)}$

1143.  $y = \frac{a}{x^m}; y'''$

1144.  $y = \sqrt{x}; y^{(10)}$

1145.  $y = \frac{x^2}{1-x}; y^{(8)}$

1146.  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}; y^{(100)}$

1147.  $y = x^2 e^{2x}; y^{(20)}$

1148.  $y = \frac{e^x}{x}; y^{(10)}$

1149.  $y = x \ln x; y^{(5)}$

1150.  $y = \frac{\ln x}{x}; y^{(5)}$

1151.  $y = x^2 \sin 2x; y^{(50)}$

1152.  $y = \frac{\cos 3x}{\sqrt[3]{1-3x}}; y'''$

1153.  $y = \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 3x; y^{(10)}$

1154.  $y = x \cdot \operatorname{sh} x; y^{(100)}$

1155.  $y = e^x \cos x; y^{iv}$

1156.  $y = \sin^2 x \cdot \ln x; y^{(6)}$

$y = y(x)$  funksiya uchun ko‘rsatilgan tartibdagi differensiallar topilsin:

$$1157. y = x^5; \quad d^5 y$$

$$1158. y = \frac{1}{\sqrt{x}}; \quad d^3 y$$

$$1159. y = x \cos 2x; \quad d^{10} y$$

$$1160. y = e^x \ln x; \quad d^4 y$$

$$1161. y = \cos x \cdot \operatorname{ch} x; \quad d^6 y$$

1162. Oshkormas  $y = y(x)$  funksiya berilgan tenglamani qanoatlantirishi isbotlansin:

$$1) \quad y = A \ln y + x + B, \quad y \cdot y'' = (y')^2 - (y')^3$$

$$2) \quad (A + Bx)e^{\frac{y}{x}} = x, \quad x^3 y'' = (xy' - y)^2$$

Quyidagi funksiyalar uchun  $y^{(n)}(x)$  topilsin:

$$1163. y = x^3 + x + e^{3x}$$

$$1164. y = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n$$

$$1165. y = \frac{1+x}{1-x}$$

$$1166. y = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$1167. y = \ln(ax+b)$$

$$1168. y = \sin^2 x$$

$$1169. y = \sin ax \sin bx$$

$$1170. y = \operatorname{ch} ax \cdot \operatorname{ch} bx$$

$$1171. y = \sin^2 x \sin 2x$$

$$1172. y = \sin^4 x + \cos^4 x$$

$$1173. y = \cos^4 x$$

$$1174. y = \frac{1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$1175. y = \frac{x}{x^2 - 4x - 12}$$

$$1176. y = \frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$1177. y = \frac{3-2x^2}{2x^2+3x-2}$$

$d^n y$  topilsin:

$$1178. y = x^n e^x$$

$$1179. y = \frac{\ln x}{x}$$

1180. Tenglik isbotlansin:

$$\left( x^{n-1} e^{\frac{1}{x}} \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

**Ko'rsatma:** Matematik induksiya usulini qo'llang.



# Test

1)Funksiyani  $n$ -tartibli hosilasi hisoblansin.  $y(x) = \sin x$

A)  $\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

B)  $\sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{3}\right)$

C)  $\sin\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

D)  $\sin\left(x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

2)Funksiyani  $n$ -tartibli hosilasi hisoblansin.  $y(x) = \cos x$

A)  $\sin\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

B)  $\cos\left(x + n \cdot \frac{\pi}{3}\right)$

C)  $\cos\left(x + (n+1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

D)  $\cos\left(x + (n-1) \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

3)Funksiyani  $n$ -tartibli hosilasi hisoblansin.  $y(x) = e^{2x+1}$

A)  $2^n \cdot e^{2x+1}$

B)  $2^n \cdot e^{x+1}$

C)  $2^{n+1} \cdot e^{2x+1}$

D)  $2^n \cdot e^x$

4)Funksiyani  $n$ -tartibli hosilasi hisoblansin.  $y(x) = \cos 2x$

A)  $2^n \cdot \cos\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

B)  $2^n \cdot \sin\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

C)  $2^n \cdot \sin\left(2x + n \cdot \frac{\pi}{3}\right)$

D)  $2^n \cdot \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)$

5)Funksiyani  $n$ -tartibli hosilasi hisoblansin.  $y(x) = x^n$

A)  $n!$

- B)  $(n-1)!$   
 C) 1  
 D)  $n!!$
- 6)Funksiyani  $n$ -tartibli differensial hisoblansin.  $y(x) = x^n$   
 A)  $n!(dx)^n$   
 B)  $(n-1)!(dx)^n$   
 C)  $(dx)^n$   
 D)  $n!!(dx)^n$
- 7)Funksiyani 3-tartibli differensial hisoblansin.  $y(x) = x^3 + x^2 + 8x + 9$   
 A)  $6 \cdot (dx)^3$     B)  $3 \cdot (dx)^3$     C)  $(dx)^3$     D)  $2(dx)^3$
- 7)Funksiyani 3-tartibli differensial hisoblansin.  $y(x) = x^3 + x^2 + 8x + 9$   
 A)  $6 \cdot (dx)^3$     B)  $3 \cdot (dx)^3$     C)  $(dx)^3$     D)  $2(dx)^3$
- 8)Funksiyani 2-tartibli differensial hisoblansin.  $y(x) = x^3 + x^2 + 8x + 9$   
 A)  $(6x+2) \cdot (dx)^2$   
 B)  $(3x+1) \cdot (dx)^2$   
 C)  $(6x+2)(dx)^3$   
 D)  $(2x+2)(dx)^2$
- 9)Funksiyani 2-tartibli differensial hisoblansin.  $y(x) = \sin x + \cos x$   
 A)  $(-\sin x - \cos x)(dx)^2$   
 B)  $(-\sin x + \cos x)(dx)^2$   
 C)  $(\sin x - \cos x)(dx)^2$   
 D)  $(\sin x + \cos x)(dx)^2$
- 10)Funksiyani 2-tartibli differensial hisoblansin.  $y(x) = x^2 + \cos x$   
 A)  $(2 - \cos x)(dx)^2$   
 B)  $(2 + \cos x)(dx)^2$   
 C)  $(2 - \cos 2x)(dx)^2$   
 D)  $(2 + \cos 2x)(dx)^2$

## 22-mavzu. Asosiy teoremlar

# 22-ma'ruza

## Reja

- 1<sup>o</sup>. Hosilaga ega bo'lgan funksiyalar haqidagi teoremlar.
- 2<sup>o</sup>. Funksiya hosilasining uzilishi haqida.

([1] 6.5 Theorems of Rolle and of the Mean Value 181, [2] 10.2 Local maxima, local minima and derivatives, 295-bet) 1<sup>o</sup>. Hosilaga ega bo'lgan funksiyalar haqidagi teoremlar. Bu teoremlar funksiyalarni tekshirishda muhim rol o'ynaydi.

**1-teorema (Ferma teoremasi).**  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan.  $x_0 \in X$  nuqtaning atrofi uchun  $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$  ( $\delta > 0$ ) bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

- 1)  $\forall x \in U_\delta(x_0)$  da  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ),
- 2)  $f'(x_0)$  mavjud va chekli bo'lsin.

U holda  $f'(x_0) = 0$  bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $\forall x \in U_\delta(x_0)$  da  $f(x) \leq f(x_0)$  bo'lsin. Ravshanki, bu holda  $f(x) - f(x_0) \leq 0$

bo'ladi.

SHartga ko'ra  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada chekli  $f'(x_0)$  hosilaga ega. SHuning uchun

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

bo'ladi. Ayni paytda,  $x > x_0$  bo'lganda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \leq 0,$$

$x < x_0$  bo'lganda

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0$$

bo'lishidan  $f'(x_0) = 0$  ekani kelib chiqadi. ▶

**2-teorema (Roll teoremasi).** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 1)  $f(x) \in C[a, b]$ ,
- 2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  mavjud va chekli,
- 3)  $f(a) = f(b)$  bo'lsin.

U holda shunday  $x_0 \in (a, b)$  nuqta topiladiki,  $f'(x_0) = 0$  bo'ladi.

◀ SHartga ko'ra  $f(x) \in C[a, b]$ . Unda Veyershtrassning ikkinchi teoremasiga ko'ra  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da o'zining eng katta va eng kichik

qiymatlarga erishadi, ya'ni shunday  $c_1, c_2$  nuqtalar ( $c_1, c_2 \in [a, b]$ ) topiladiki,

$$f(c_1) = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\},$$

$$f(c_2) = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

bo'ladi.

Agar  $f(c_1) = f(c_2)$  bo'lsa, unda  $[a, b]$  da  $f(x) = \text{const}$  bo'lib,  $\forall x_0 \in (a, b)$  da  $f'(x_0) = 0$  bo'ladi.

Agar  $f(c_1) > f(c_2)$  bo'lsa, unda  $f(a) = f(b)$  bo'lganligi sababli  $f(x)$  funksiya  $f(c_1)$  hamda  $f(c_2)$  qiymatlarning kamida bittasiga  $[a, b]$  segmentning ichki  $x_0$  ( $a < x_0 < b$ ) nuqtasida erishadi. Ferma teoremasiga binoan  $f'(x_0) = 0$  bo'ladi. ►

**3-teorema (Lagranj teoremasi).** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1)  $f(x) \in C[a, b]$ ,

2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosila mavjud va chekli bo'lsin.

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo'ladi.

◀ Ushbu

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (1)$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Ayni paytda, uning hosilasi

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bo'ladi.

Roll teoremasiga binoan, shunday  $c$  ( $c \in (a, b)$ ) nuqta topiladiki,

$$F'(c) = 0 \quad (2)$$

bo'ladi.

(1) va (2) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ya'ni

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

**1-natija.** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x) = 0$  bo'lsin. U holda  $\forall x \in (a, b)$  da  $f(x) = \text{const}$  bo'ladi.

◀  $x, x_0 \in (a, b)$  ni olib, chekkalari  $x$  va  $x_0$  bo'lgan segmentda  $f(x)$  funksiya Lagranj teoremasini qo'llab  $f(x) = f(x_0) = \text{const}$  bo'lishini topamiz. ►



**2-natija.**  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalari  $(a, b)$  da  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  hosilalarga ega bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x) = g'(x)$  bo'lsin. U holda  $\forall x \in (a, b)$  da  $f(x) = g(x) + const$  bo'ladi.

◀ Bu natijaning isboti  $f(x) - g(x)$  funksiyaga nisbatan 1-natijani qo'llash bilan kelib chiqadi. ▶

**4-teorema (Koshi teoremasi).** Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

- 1)  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $g(x) \in C[a, b]$ ,
- 2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalar mavjud va chekli;
- 3)  $\forall x \in (a, b)$  da  $g'(x) \neq 0$  bo'lsin.

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

◀ Avvalo  $g(b) \neq g(a)$  bo'lishini ta'kidlab o'tamiz, chunki  $g(b) = g(a)$  bo'ladigan bo'lsa, unda Roll teoremasiga ko'ra shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topilar ediki,  $g'(c) = 0$  bo'lar edi. Bu 3)-shartga zid.

Quyidagi

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)] \quad (x \in [a, b])$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga binoan shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$\Phi'(c) = 0 \tag{3}$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \tag{4}$$

(3) va (4) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

ya'ni

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

**1-misol.**  $\forall x', x'' \in R$  uchun  $|\sin x' - \sin x''| \leq |x' - x''|$  tengsizlik isbotlansin.

◀ Aytaylik,  $x' < x''$  bo'lsin.  $f(x) = \sin x$  ga  $[x', x'']$  da Lagranj teoremasini qo'llaymiz. Unda shunday  $c \in (x', x'')$  nuqta topiladiki,

$$|\sin x' - \sin x''| = |\cos c| \cdot (x'' - x')$$

bo'ladi. Agar  $\forall t \in R$  da  $|\cos t| \leq 1$  ekanini e'tiborga olsak, unda yuqoridagi munosabatdan

$$|\sin x' - \sin x''| \leq |x'' - x'| \quad (\forall x', x'' \in R)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

**2-misol.** Ushbu

$$e^x \geq 1 + x$$

tengsizlik isbotlansin.

◀ Aytaylik,  $x > 0$  bo'lsin. Unda  $f(t) = e^t$  funksiyaga  $[0, x]$  da Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$e^x - e^0 = e^c(x - 0). \quad c \in (0, x)$$

Agar  $c > 0$  da  $e^c > 1$  bo'lishini e'tiborga olsak, unda keyingi munosabatdan  $e^x \geq 1 + x$  bo'lishi kelib chiqadi.

Agar  $x < 0$  bo'lsa, unda  $f(t) = e^t$  funksiyaga  $[x, 0]$  da Lagranj teoremasini qo'llab,

$$e^x - e^0 = e^c(0 - x)$$

ni va  $-x > 0$ ,  $e^c < 1$  bo'lishini e'tiborga olib,  $e^x \geq 1 + x$  ekanligini topamiz.

Ravshanki,  $x = 0$  da  $e^0 = 1$ . Demak,  $\forall x \in R$  da  $e^x \geq 1 + x$ . ►

**3-misol.** Ushbu

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (0 < b < a)$$

tengsizlik isbotlansin.

◀  $[b, a]$  segmentda  $f(x) = \ln(x)$  funksiyani qaraymiz. Bu funksiya shu segmentda uzluksiz va  $(b, a)$  da  $f'(x) = \frac{1}{x}$  hosilaga ega. Unda Lagranj teoremasiga ko'ra shunday  $c$  ( $b < c < a$ ) nuqta topiladiki,

$$\frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{c} \quad (5)$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$b < c < a \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}. \quad (6)$$

(5) va (6) munosabatlardan

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

## Mashqlar

1. Agar  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da chekli  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsa, uning shu  $(a, b)$  da tekis uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

2. Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $x \geq x_0$  da chekli hosilalar:  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  ga ega bo'lib,

$$f(x_0) = g(x_0), \quad x > x_0 \quad \text{da} \quad f'(x) > g'(x)$$

bo'lsa, u holda  $x > x_0$  da  $f(x) > g(x)$  bo'lishi isbotlansin.

3.  $\forall x > -1$  uchun

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

tengsizliklarning o'rinli bo'lishi isbotlansin.

### Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A.** - Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis I.* Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, I t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

# Glossariy

**1-teorema (Ferma teoremasi).**  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan.  $x_0 \in X$  nuqtaning atrofi uchun

$U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$  ( $\delta > 0$ ) bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

- 1)  $\forall x \in U_\delta(x_0)$  da  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ),
- 2)  $f'(x_0)$  mavjud va chekli bo'lsin.

U holda  $f'(x_0) = 0$  bo'ladi.

**2-teorema (Roll teoremasi).** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 1)  $f(x) \in C[a, b]$ ,
- 2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  mavjud va chekli,
- 3)  $f(a) = f(b)$  bo'lsin.

U holda shunday  $x_0 \in (a, b)$  nuqta topiladiki,  $f'(x_0) = 0$  bo'ladi.

**3-teorema (Lagranj teoremasi).** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 3)  $f(x) \in C[a, b]$ ,
- 4)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosila mavjud va chekli bo'lsin.

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo'ladi.

**4-teorema (Koshi teoremasi).** Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

- 1)  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $g(x) \in C[a, b]$ ,
- 2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalar mavjud va chekli;
- 3)  $\forall x \in (a, b)$  da  $g'(x) \neq 0$  bo'lsin.

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

# Keys banki

**22-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Agar  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da chekli  $f'(x)$  hosilaga ega bo`lsa, uning shu  $(a, b)$  da tekis uzluksiz bo`lishi isbotlansin.

## Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

## 22-amaliy mashg`ulot

1 – misol. Ushbu

$$f(x) = 2 - \sqrt[3]{x^2}$$

funksiyaga  $[-1,1]$  oraliqda Roll teoremasini qo'llash mumkinmi?

◀ Ravshanki, berilgan funksiya  $(-\infty, +\infty)$  oraliqda, jumladan  $[-1,1]$  da uzluksiz.  $[-1,1]$  oraliqning chetlarida

$$f(-1) = 1 - \sqrt[3]{(-1)^2} = 1 - 1 = 0,$$

$$f(1) = 1 - \sqrt[3]{1^2} = 1 - 1 = 0$$

bo'lib,  $f(-1) = f(1)$  bo'ladi.  $f(x)$  funksiyaning hosilasi  $x \neq 0$  bo'lganda

$$f'(x) = -\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

bo'lib,  $x = 0$  nuqtada mavjud emas. Binobarin, Roll teoremasining  $(-1,1)$  da chekli hosila mavjud bo'lishi sharti bajarilmaydi. SHuning uchun berilgan funksiya Roll teoremasini qo'llab bo'lmaydi. ▶

2 – misol. Ushbu

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$$

funksiyaga  $[0,2]$  oraliqda Lagranj teoremasini tadbiq etib, undagi  $c$  nuqta topilsin.

◀ Berilgan funksiyaning  $[0,2]$  oraliqda Lagranj teoremasining shartlarini bajarishi ravshan. Lagranj teoremasiga binoan

$$f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2 - 0)$$

bo'ladi. Berilgan funksiya uchun

$$f(2) = 12, \quad f(0) = -2, \quad f'(x) = 12x^2 - 10x + 1,$$

$$f'(c) = 12c^2 - 10c + 1$$

bo'lib,

$$12 - (-2) = f'(c) \cdot 2$$

bo'ladi. Natijada

$$12c^2 - 10c - 6 = 0$$

kvadrat tenglamaga kelamiz. Bu kvadrat tenglamaning echimlari

$$c_1 = \frac{5 + \sqrt{97}}{12}, \quad c_2 = \frac{5 - \sqrt{97}}{12}$$

bo'lib, ulardan  $c_1$  echim  $[0,2]$  ga tegishli bo'ladi. ▶

1181.  $f(x) = x(x^2 - 1)$  funksiya uchun  $[-1,1]$  va  $[0,1]$  oraliqlarda Roll

teoremasining shartlari tekshirilsin..

**1182.**  $f(x) = (x^2 - 1)(x - 2)$  funksiya uchun  $(-1, 1)$  va  $(1, 2)$  intervallarda shunday nuqtalar topilsinki, bu nuqtalarda funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar absissalar o'qiga parallel bo'lsin.

**1183.** Haqiqiy koeffitsientli ko'phad faqat haqiqiy ildizlarga ega bo'lsa, uning barcha hosilalari ham faqat haqiqiy ildizlarga ega ekani isbotlansin.

**1184.** Haqiqiy koeffitsientli ko'phadning ikkita haqiqiy ildizlari orasida uning hosilasining ildizi ham bor ekani isbotlansin.

**1185.** Agar  $f$  funksiya  $[a, b]$  kesmada  $n$  marotaba differensiullanuvchi va bu kesmaning  $n + 1$  ta nuqtasida nolga aylansa, u holda  $f^{(n)}(\xi) = 0$  bo'ladigan  $\xi \in (a, b)$  nuqtaning mavjudligi isbotlansin.

**1186.** Ushbu

$$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

ko'phadning hosilasining ildizlari haqiqiy, tub va  $(0;1)$ ,  $(1;2)$ ,  $(2;3)$ ,  $(3;4)$  intervallarda yotishi isbotlansin.

**1187.**  $y = x^3$  egri chizig'ida shunday nuqta topilsinki, bu nuqtada unga o'tkazilgan urinma  $A(-1; -1)$  va  $B(2; 8)$  nuqtalarni tutashtiruvchi vatarga parallel bo'lsin.

**1188.**  $f(x) = \frac{1}{x}$  funksiyasi uchun  $[a, b]$  kesmada ( $a \cdot b < 0$ ) chekli orttirmalar formulasi (Lagranj formulasi) o'rinlimi?

**1189.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda uzluksiz  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin.  $(a, b)$  da yotuvchi ixtiyoriy  $\xi$  nuqta uchun

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (a < x_1 < \xi < x_2 < b)$$

munosabat o'rinli bo'ladigan  $x_1, x_2$  nuqtalarini ko'rsatish (topish) mumkinmi?

Ushbu misolni qarang:  $f(x) = x^3$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ),  $\xi = 0$ .

**1190.** Lagranj teoremasidan foydalanib, tengsizliklar isbotlansin:

a)  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$

b)  $px^{p-1}(x - y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x - y)$ , bu erda  $0 < y < 1$  va  $p > 1$ ;

b)  $|\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|;$

г)  $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ ,  $x > 0$ ;

д)  $e^x > 1 + x$ ,  $x \in \mathbf{R}$ ;

e)  $e^x > ex$ ,  $x > 1$ .





# Test

1)  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + R_n(x)$ . Funktsiyani  $a_3$  ni hisoblang.  
 $f(x) = \cos x$   $x = 0$  nuqtada.

- A) 0      B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{6}$       D)  $\frac{1}{6!}$

2)  $f(x) = e^x$  funksiyani  $x = 0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasini toping.

A)  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$

B)  $e^x = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$

C)  $e^x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$

D)  $e^x = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$

3)  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + R_n(x)$ . Funktsiyani  $a_5$  ni hisoblang.  
 $f(x) = \sin x$   $x = 0$  nuqtada.

- A)  $\frac{1}{5!}$       B)  $\frac{1}{3!}$       C)  $\frac{1}{6!}$       D)  $\frac{1}{24}$

4)  $f(x) = \ln(1 + x)$  funksiyani  $x = 0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A)  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^k}{k} + o(x^n)$       B)  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)$       C)

$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^n)$       D)  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$

5)  $f(x) = \ln(1 - x)$  funksiyani  $x = 0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A)  $-\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n)$       B)  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)$       C)

$-\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$       D)  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$

6)  $f(x) = \frac{1}{3x + 2}$  funksiyani  $x = 0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^k}{2^{k+1}} x^k + o(x^n)$       B)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^{k+1}}{2^k} x^k + o(x^n)$

C)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} x^k + o(x^n)$       D)  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} x^k + o(x^n)$

7) Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had berilgan qatorni toping.

A)  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$

B)  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-x_0)^{n+1}$  C)

$R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-x_0)^{n+1}$

D)  $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$

8)  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in R$  funksiyani  $x=0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

A)  $\sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n)$

B)  $\sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!} x^k + o(x^n)$

C)  $\sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{(k+1)!} x^k + o(x^n)$

D)  $\sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k-1)}{k!} x^k + o(x^n)$

9)  $f(x) = e^{2x}$  funksiyani  $x=0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasini toping.

A)  $e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!} + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$

B)  $e^{2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 2^n x^n + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$

C)  $e^{2x} = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \dots + (-2)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$

D)  $e^{2x} = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + o(x^n)$ ,  $x \rightarrow 0$

10) Makloren qatori berilgan qatorni toping.

A)  $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n)$ ,  $(x \rightarrow 0)$

B)  $f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!} (x-1) + \frac{f''(1)}{2!} (x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} (x-1)^n + o(x^n)$ ,  $(x \rightarrow 1)$

C)  $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} (x-1) + \frac{f''(0)}{2!} (x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-1)^n + o(x^n)$ ,  $(x \rightarrow 1)$

D)  $f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{2!} x + \frac{f''(0)}{3!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!} x^n + o(x^n)$ ,  $(x \rightarrow 0)$

# 23-mavzu. Asosiy teoremlar natijalari. Koshi teoremasi

## 23-ma'ruza

### Reja

- 1<sup>o</sup>. Lagranj teoremasi natijalari.
- 2<sup>o</sup>. Koshi teoremasi.

### 1<sup>o</sup>. Lagranj teoremasi natijalari.

([1] 6.5 Theorems of Rolle and of the Mean Value 181, [2] 10.2 Local maxima, local minima and derivatives, 295-bet) Lagranj teoremasi. Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 5)  $f(x) \in C[a, b]$ ,
- 6)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosila mavjud va chekli bo'lsin.

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo'ladi.

◀ Ushbu

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \quad (1)$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Ayni paytda, uning hosilasi

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

bo'ladi.

Roll teoremasiga binoan, shunday  $c$  ( $c \in (a, b)$ ) nuqta topiladiki,

$$F'(c) = 0 \quad (2)$$

bo'ladi.

(1) va (2) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0,$$

ya'ni

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

**1-natija.** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x) = 0$  bo'lsin. U holda  $\forall x \in (a, b)$  da  $f(x) = \text{const}$  bo'ladi.

◀  $x, x_0 \in (a, b)$  ni olib, chekkalari  $x$  va  $x_0$  bo'lgan segmentda  $f(x)$

funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab  $f(x) = f(x_0) = const$  bo'lishini topamiz. ►

**2-natija.**  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalari  $(a, b)$  da  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  hosilalarga ega bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x) = g'(x)$  bo'lsin. U holda  $\forall x \in (a, b)$  da  $f(x) = g(x) + const$  bo'ladi.

◀ Bu natijaning isboti  $f(x) - g(x)$  funksiyaga nisbatan 1-natijani qo'llash bilan kelib chiqadi. ►

**2<sup>o</sup>. 4-teorema (Koshi teoremasi).** Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

- 1)  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $g(x) \in C[a, b]$ ,
- 2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalar mavjud va chekli;
- 3)  $\forall x \in (a, b)$  da  $g'(x) \neq 0$  bo'lsin.

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

◀ Avvalo  $g(b) \neq g(a)$  bo'lishini ta'kidlab o'tamiz, chunki  $g(b) = g(a)$  bo'ladigan bo'lsa, unda Roll teoremasiga ko'ra shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topilar ediki,  $g'(c) = 0$  bo'lar edi. Bu 3)-shartga zid.

Quyidagi

$$\Phi(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} [g(x) - g(a)] \quad (x \in [a, b])$$

funksiyani qaraymiz. Bu funksiya Roll teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi. Unda Roll teoremasiga binoan shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$\Phi'(c) = 0 \tag{3}$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$\Phi'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x) \tag{4}$$

(3) va (4) munosabatlardan

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

ya'ni

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

**1-misol.**  $\forall x', x'' \in R$  uchun  $|\sin x' - \sin x''| \leq |x' - x''|$  tengsizlik isbotlansin.

◀ Aytaylik,  $x' < x''$  bo'lsin.  $f(x) = \sin x$  ga  $[x', x'']$  da Lagranj teoremasini qo'llaymiz. Unda shunday  $c \in (x', x'')$  nuqta topiladiki,

$$|\sin x' - \sin x''| = |\cos c| \cdot (x'' - x')$$

bo'ladi. Agar  $\forall t \in R$  da  $|\cos t| \leq 1$  ekanini e'tiborga olsak, unda yuqoridagi munosabatdan

$$|\sin x' - \sin x''| \leq |x' - x''| \quad (\forall x', x'' \in R)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

**2-misol.** Ushbu

$$e^x \geq 1 + x$$

tengsizlik isbotlansin.

◀ Aytaylik,  $x > 0$  bo'lsin. Unda  $f(t) = e^t$  funksiyaga  $[0, x]$  da Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$e^x - e^0 = e^c(x - 0), \quad c \in (0, x)$$

Agar  $c > 0$  da  $e^c > 1$  bo'lishini e'tiborga olsak, unda keyingi munosabatdan  $e^x \geq 1 + x$  bo'lishi kelib chiqadi.

Agar  $x < 0$  bo'lsa, unda  $f(t) = e^t$  funksiyaga  $[x, 0]$  da Lagranj teoremasini qo'llab,

$$e^x - e^0 = e^c(0 - x)$$

ni va  $-x > 0$ ,  $e^c < 1$  bo'lishini e'tiborga olib,  $e^x \geq 1 + x$  ekanligini topamiz.

Ravshanki,  $x = 0$  da  $e^0 = 1$ . Demak,  $\forall x \in R$  da  $e^x \geq 1 + x$ . ▶

**3-misol.** Ushbu

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b} \quad (0 < b < a)$$

tengsizlik isbotlansin.

◀  $[b, a]$  segmentda  $f(x) = \ln(x)$  funksiyani qaraymiz. Bu funksiya shu segmentda uzluksiz va  $(b, a)$  da  $f'(x) = \frac{1}{x}$  hosilaga ega. Unda Lagranj teoremasiga ko'ra shunday  $c$  ( $b < c < a$ ) nuqta topiladiki,

$$\frac{\ln a - \ln b}{a - b} = \frac{1}{c} \quad (5)$$

bo'ladi.

Ravshanki,

$$b < c < a \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{c} < \frac{1}{b}. \quad (6)$$

(5) va (6) munosabatlardan

$$\frac{a-b}{a} < \ln \frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

**2<sup>o</sup>. Funksiya hosilasining uzilishi haqida.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  ning  $x_0$  nuqtasidan boshqa barcha nuqtalarida  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lib, funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz bo'lsin.

Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = b$  limit mavjud bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada chap hosila  $f'(x_0 - 0)$  ga ega bo'lib,  $f'(x_0 - 0) = b$  bo'ladi.

Agar  $\lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = d$  limit mavjud bo'lsa, u holda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada o'ng hosila  $f'(x_0 + 0)$  ga ega bo'lib,  $f'(x_0 + 0) = d$  bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $\Delta x \neq 0$  va  $x_0 + \Delta x \in (a, b)$  bo'lsin. Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x), \quad (0 < \theta < 1).$$

Endi

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = b$$

mavjud bo'lsin deylik. Unda

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow -0} f'(x_0 + \Delta x) = b$$

bo'lib,

$$\Delta x \rightarrow -0 \text{ da } f'(x_0 + \theta \cdot \Delta x) \rightarrow b,$$

ya'ni

$$\Delta x \rightarrow -0 \text{ da } \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow b$$

bo'ladi. Demak,  $f'(x_0 - 0) = b$ . SHunga o'xshash,  $f'(x_0 + 0) = d$  bo'lishi ko'rsatiladi. ►

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada hosilaga ega bo'lsin. Unda, ravshanki,

$$f'(x_0 - 0) = f'(x_0 + 0) = f'(x_0)$$

bo'ladi. Ayni paytda,

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x)$$

limitlarnig mavjud va chekli bo'lishidan

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} f'(x) = f'(x_0)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

Bundan quyidagi xulosa kelib chiqadi: agar  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsa, u holda bu  $f'(x)$  hosila birinchi tur uzilishga ega bo'lolmaydi.

Boshqacha aytganda har bir  $x_0 \in (a, b)$  nuqtada  $f'(x)$  funksiya yoki uzluksiz bo'ladi, yoki ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi. ►

**4-misol.** Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ бўлса,} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiyani qaraylik.

◀  $x \neq 0$  bo'lganda

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

bo'ladi.

$x = 0$  bo'lganda, hosila ta'rifiga ko'ra

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{x} = 0$$

bo'ladi.

Demak,  $f'(x)$  funksiya  $R$  da aniqlangan va  $x \neq 0$  da uzluksiz bo'ladi.  $f'(x)$  hosila  $x = 0$  nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi, chunki  $x \rightarrow 0$  da

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

funksiya limitga ega emas. ▶

### Mashqlar

1. Agar  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da chekli  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsa, uning shu  $(a, b)$  da tekis uzluksiz bo'lishi isbotlansin.

2. Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $x \geq x_0$  da chekli hosilalar:  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  ga ega bo'lib,

$$f(x_0) = g(x_0), \quad x > x_0 \text{ da } f'(x) > g'(x)$$

bo'lsa, u holda  $x > x_0$  da  $f(x) > g(x)$  bo'lishi isbotlansin.

4.  $\forall x > -1$  uchun

$$\frac{x}{1+x} \leq \ln(1+x) \leq x$$

tengsizliklarning o'rinli bo'lishi isbotlansin.

### Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A.** - Mathematical Analysis I, Italy 2008.
2. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T.,**

- Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Vorishashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, I t.* M. «FIZMATLIT», 2001.



# Glossariy

**1-teorema (Ferma teoremasi).**  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan.  $x_0 \in X$  nuqtaning atrofi uchun  $U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$  ( $\delta > 0$ ) bo'lib, quyidagi shartlar bajarilsin:

- 1)  $\forall x \in U_\delta(x_0)$  da  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ),
- 2)  $f'(x_0)$  mavjud va chekli bo'lsin.

U holda  $f'(x_0) = 0$  bo'ladi.

**2-teorema (Roll teoremasi).** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 1)  $f(x) \in C[a, b]$ ,
- 2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  mavjud va chekli,
- 3)  $f(a) = f(b)$  bo'lsin.

U holda shunday  $x_0 \in (a, b)$  nuqta topiladiki,  $f'(x_0) = 0$  bo'ladi.

**3-teorema (Lagranj teoremasi).** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 7)  $f(x) \in C[a, b]$ ,
- 8)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosila mavjud va chekli bo'lsin.

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

bo'ladi.

**4-teorema (Koshi teoremasi).** Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

- 1)  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $g(x) \in C[a, b]$ ,
- 2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalar mavjud va chekli;
- 3)  $\forall x \in (a, b)$  da  $g'(x) \neq 0$  bo'lsin.

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

# Keys banki

**23-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Quyidagi tasdiq isbotlansin (Koshi teoremasi): Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin.

- 1)  $f(x) \in C[a, b]$ ,  $g(x) \in C[a, b]$ ,
- 2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalar mavjud va chekli;
- 3)  $\forall x \in (a, b)$  da  $g'(x) \neq 0$  bo'lsin.

U holda shunday  $c \in (a, b)$  nuqta topiladiki,

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

bo'ladi.

## Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).

## 23-amaliy mashg`ulot

1 – misol. Ushbu

$$f(x) = 4x^3 - 5x^2 + x - 2$$

funksiyaga  $[0,2]$  oraliqda Lagranj teoremasini tadbiiq etib, undagi  $c$  nuqta topilsin.

◀ Berilgan funksiyaning  $[0,2]$  oraliqda Lagranj teoremasining shartlarini bajarishi ravshan. Lagranj teoremasiga binoan

$$f(2) - f(0) = f'(c) \cdot (2 - 0)$$

bo'ladi. Berilgan funksiya uchun

$$f(2) = 12, \quad f(0) = -2, \quad f'(x) = 12x^2 - 10x + 1,$$

$$f'(c) = 12c^2 - 10c + 1$$

bo'lib,

$$12 - (-2) = f'(c) \cdot 2$$

bo'ladi. Natijada

$$12c^2 - 10c - 6 = 0$$

kvadrat tenglamaga kelamiz. Bu kvadrat tenglamaning echimlari

$$c_1 = \frac{5 + \sqrt{97}}{12}, \quad c_2 = \frac{5 - \sqrt{97}}{12}$$

bo'lib, ulardan  $c_1$  echim  $[0,2]$  ga tegishli bo'ladi. ▶

1188.  $f(x) = \frac{1}{x}$  funksiyasi uchun  $[a,b]$  kesmada ( $a \cdot b < 0$ ) chekli orttirmalar formulasi (Lagranj formulasi) o'rinlimi?

1189. Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a,b)$  intervalda uzluksiz  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin.  $(a,b)$  da yotuvchi ixtiyoriy  $\xi$  nuqta uchun

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi) \quad (a < x_1 < \xi < x_2 < b)$$

munosabat o'rinli bo'ladigan  $x_1, x_2$  nuqtalarini ko'rsatish (topish) mumkinmi?

Ushbu misolni qarang:  $f(x) = x^3$  ( $-1 \leq x \leq 1$ ),  $\xi = 0$ .

1190. Lagranj teoremasidan foydalanib, tengsizliklar isbotlansin:

ж)  $|\sin x - \sin y| \leq |x - y|;$

з)  $py^{p-1}(x-y) \leq x^p - y^p \leq px^{p-1}(x-y)$ , bu erda  $0 < y < 1$  va  $p > 1$ ;

и)  $|\arctg a - \arctg b| \leq |a - b|;$

$$\kappa) \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x, \quad x > 0;$$

$$\lambda) e^x > 1+x, \quad x \in \mathbf{R};$$

$$\mu) e^x > ex, \quad x > 1.$$

1191. Quyidagi

$$f(x) = x^2 \quad \text{va} \quad g(x) = x^3$$

funksiyalar uchun  $[-1;1]$  kesmada Koshi formulasi o'rinli emasligi tushuntirilsin.

1192. Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $[x_1, x_2]$  ( $x_1 \cdot x_2 > 0$ ) kesmada differensiallanuvchi bo'lsin. Quyidagi isbotlansin:

$$\frac{1}{x_1 - x_2} \cdot \left| \begin{array}{cc} x_1 & x_2 \\ f(x_1) & f(x_2) \end{array} \right| = f(\xi) - \xi f'(\xi), \quad \text{bu erda } x_1 < \xi < x_2.$$

1193. Agar  $f(x)$  funksiya  $x > 0$  nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lib,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  bo'lsa, u holda

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

bo'lishi isbotlansin.

1194. Agar  $f(x)$  funksiya  $x > 0$  nuqtalarda differensiallanuvchi bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

bo'lsa, u holda  $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f'(x)| = 0$  ekani isbotlansin.

1195. Agar  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda differensiallanuvchi va chegaralanmagan bo'lsa, u holda uning hosilasi ham chegaralanmaganligi isbotlansin.

1196. Agar  $f(x)$  funksiya  $[a, b]$  kesmada differensiallanuvchi bo'lib,  $f(a) = f(b)$  bo'lsa, u holda  $\exists \xi \in (a, b)$  mavjud bo'lib,

$$f(a) - f(\xi) = \frac{1}{2} \xi f'(\xi)$$

munosabat o'rinligini isbotlansin.

1197. Isbotlansin:

$$a) 2\arctg x + \arcsin \frac{2x}{1+x^2} = \pi \operatorname{sgn} x, \quad |x| \geq 1;$$

$$b) 3\arccos x - \arccos(3x - 4x^3) = \pi, \quad |x| \leq \frac{1}{2}.$$



# Test

1)Diferensial hisoblansin.  $d(x^{2016}) = ?$

- A)  $2016x^{2015} dx$
- B)  $2016x^{2016} dx$
- C)  $2015x^{2015} dx$
- D)  $-2016x^{2015} dx$

2)Diferensial hisoblansin.  $d(\cos x + \operatorname{tg}x) = ?$

- A)  $\left(-\sin x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$
- B)  $\left(-\sin x - \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$
- C)  $\left(-\sin x + \frac{1}{\sin^2 x}\right) dx$
- D)  $\left(-\cos x + \frac{1}{\cos^2 x}\right) dx$  ( )

3)Diferensial hisoblansin.  $d(\cos 2x + e^{2x}) = ?$

- A)  $(-\sin x + 2e^{2x}) dx$
- B)  $(\sin x - 2e^{2x}) dx$
- C)  $(\sin x + 2e^x) dx$
- D)  $(\sin x + e^{2x}) dx$

4)Diferensial hisoblansin.  $d(\cos 2x \cdot e^{2x}) = ?$

- A)  $(-2 \sin 2x \cdot e^{2x} + 2 \cos 2x \cdot e^{2x}) dx$
- B)  $(-2 \sin x \cdot e^{2x} + 2 \cos 2x \cdot e^{2x}) dx$
- C)  $(-2 \sin 2x \cdot e^{2x} + \cos x \cdot e^{2x}) dx$
- D)  $(-2 \sin x \cdot e^{2x} + 2 \cos x \cdot e^{2x}) dx$

5)Diferensial hisoblansin.  $d(x^{2016} \cdot e^{2x}) = ?$

- A)  $x^{2016} \cdot d(e^{2x}) + e^{2x} \cdot d(x^{2016})$
- B)  $x^{2016} \cdot d(e^{2x}) + e^{2x} \cdot x^{2016} \cdot d(x)$
- C)  $x^{2016} \cdot d(e^{2x}) + e^{2x} \cdot 2016 \cdot x^{2015} \cdot d(x)$
- D)  $x^{2016} \cdot e^{2x} \cdot d(x) + e^{2x} \cdot 2016 \cdot x^{2015} \cdot d(x)$

6)Diferensial hisoblansin.  $d(x^{2016} \cdot \cos x) = ?$

- A)  $x^{2016} \cdot d(\cos x) + \cos x \cdot d(x^{2016})$   
 B)  $x^{2016} \cdot d(\cos x) + \cos x \cdot 2016 \cdot x^{2015} \cdot d(x)$   
 C)  $-x^{2016} \cdot \sin x \cdot d(x) + \cos x \cdot 2016 \cdot x^{2015} \cdot d(x)$   
 D)  $-x^{2016} \cdot \sin x \cdot d(x) - \cos x \cdot 2016 \cdot x^{2015} \cdot d(x)$

7) Differensial hisoblansin.  $d(\cos x) = ?$

- A)  $-\sin x \cdot d(x)$   
 B)  $\sin x \cdot d(x)$   
 C)  $\sin x$   
 D)  $-\sin x$

8) Differensial hisoblansin.  $d(\ln(2x+1)) = ?$

- A)  $\frac{2}{2x+1} d(x)$   
 B)  $\frac{1}{2x+1} d(x)$   
 C)  $-\frac{2}{2x+1} d(x)$   
 D)  $\frac{2}{2x+1}$

9) Differensial hisoblansin.  $d(x + \cos x \cdot \operatorname{ctgx}) = ?$

- A)  $\left(1 - \sin x \cdot \operatorname{ctgx} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) d(x)$   
 B)  $\left(1 + \sin x \cdot \operatorname{ctgx} - \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) d(x)$   
 C)  $\left(1 - \sin x \cdot \operatorname{ctgx} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) d(x)$   
 D)  $\left(1 + \sin x \cdot \operatorname{ctgx} + \frac{\cos x}{\sin^2 x}\right) d(x)$

10) Taqribiy hisoblang.  $\sin 29^\circ = ?$

- A) 0,4848  
 B) 0,4747  
 C) 0,4546  
 D) 0,4948

## 24-mavzu. Teylor formulasi

# 24-ma'ruza

## Reja

- 1<sup>o</sup>. Ko'phad uchun Teylor formulasi.
- 2<sup>o</sup>. Ixtiyoriy funksiyaning Teylor formulasi va uning qoldiq hadlari.
- 3<sup>o</sup>. Ba'zi funksiyalarning Teylor formulalari.

**([1], 7.1 Taylor formulas, 223-bet) 1<sup>o</sup>. Ko'phad uchun Teylor formulasi.** Ushbu

$$P(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2 + \dots + b_n(x - x_0)^n \quad (1)$$

funksiyani ( $n$  - darajali ko'phadni) qaraylik, bunda  $x_0 \in R$  va  $b_0, b_1, \dots, b_n$  - haqiqiy sonlar. Bu  $b_0, b_1, \dots, b_n$  lar quyidagicha ham aniqlanishi mumkin:

(1) tenglikda  $x = x_0$  deyilsa,

$$b_0 = P(x_0)$$

bo'ladi;

$P(x)$  funksiyani differensiallab,

$$P'(x) = 1 \cdot b_1 + 2 \cdot b_2 \cdot (x - x_0) + \dots + n \cdot b_n (x - x_0)^{n-1}$$

va bu tenglikda  $x = x_0$  deb

$$b_1 = \frac{P'(x_0)}{1!}$$

bo'lishini topamiz.

$P(x)$  funksiyani ikki marta differensiallab

$$P''(x) = 2 \cdot 1 \cdot b_2 + \dots + n(n-1) \cdot b_n (x - x_0)^{n-2}$$

va bu tenglikda  $x = x_0$  deb topamiz:

$$b_2 = \frac{P''(x_0)}{2!}.$$

Bu jarayonni davom ettira borib,  $\forall k \geq 0$  da

$$b_k = \frac{P^{(k)}(x_0)}{k!}$$

bo'lishini topamiz.

Natijada  $P(x)$  ko'phad quyidagi ko'rinishga keladi:

$$P(x) = P(x_0) + \frac{P'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{P''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{P^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n \quad (2)$$

Demak,  $P(x)$  ko'phad o'zining hamda hosilalarining biror nuqtasidagi qiymati bilan to'liq aniqlanar ekan. (2) formula  $P(x)$  ko'phad uchun Teylor formulasi deyiladi.

**2<sup>o</sup>. Ixtiyoriy funksiyaning Teylor formulasi va uning qoldiq hadlari.**



Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $x_0 \in (a, b)$  bo'lsin. Bu funksiya  $x_0$  nuqtaning

$$\cup_{\delta}(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (a, b) \quad \delta > 0$$

atrofida  $f'(x), f''(x), \dots, f^{(n)}(x), f^{(n+1)}(x)$  hosilalarga ega bo'lsin. Funksiya hosilalaridan foydalanib, ushbu

$$P_n(f; x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

ko'phadni tuzamiz.

Agar  $f(x)$  funksiya  $n$ -darajali ko'phad bo'lsa, ravshanki,

$$f(x) = P_n(f; x)$$

bo'ladi.

Agar  $f(x)$  funksiya ko'phad bo'lmasa,

$$f(x) \neq P_n(f; x)$$

bo'lib, ular orasidagi farq yuzaga keladi. Uni  $R_n(x)$  orqali belgilaymiz:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(f; x).$$

Natijada ushbu

$$f(x) = P_n(f; x) + R_n(x)$$

ya'ni,

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x) \quad (3)$$

formulaga kelamiz. Bu (3) formula  $f(x)$  funksiyaning Teylor formulasi deyiladi. (3) formuladagi  $R_n(x)$  esa Teylor formulasining qoldiq hadi deyiladi.

Endi qoldiq had  $R_n(x)$  ni aniqlaymiz.  $x_0$  nuqtaning  $\cup_{\delta}(x_0)$  atrofidagi  $x$  ni tayinlab, ushbu

$$F(t) = f(x) - f(t) - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

funksiyani  $[x_0, x] \subset \cup_{\delta}(x_0)$  (yoki  $[x, x_0] \subset \cup_{\delta}(x_0)$ ) da qaraymiz.

Bu funksiya  $[x_0, x]$  segmentda uzluksiz bo'lib,  $(x_0, x)$  da hosilaga ega bo'ladi:

$$F'(t) = -f'(t) - \left[ \frac{f'(t)}{1!}(x-t) - f'(t) \right] - \left[ \frac{f''(t)}{2!}(x-t)^2 - \frac{f'(t)}{1!}(x-t) \right] - \dots - \left[ \frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1} \right] = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Demak,

$$F'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n.$$

Endi  $[x_0, x]$  da uzluksiz,  $(x_0, x)$  da chekli (nolga teng bo'lmagan)

hosilaga ega  $\phi(x)$  funksiyani olib,  $F(x)$  va  $\phi(x)$  funksiyalarga  $[x_0, x]$  da Koshi teoremasini qo'llaymiz. Natijada quyidagi

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{\phi(x) - \phi(x_0)} = \frac{F'(c)}{\phi'(c)} \quad (4)$$

tenglikka kelamiz, bunda  $c = x_0 + \theta(x - x_0)$  ( $0 < \theta < 1$ ).

Ravshanki,

$$F(x) = 0, \quad F(x_0) = R_n(x), \quad F'(c) = -\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n.$$

Unda (4) tenglikdan

$$R_n(x) = \frac{\phi(x) - \phi(x_0)}{\phi'(c)} \cdot \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n \quad (5)$$

bo'lishini topamiz.

**a) Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.**

Aytaylik,  $\phi(t) = x - t$  bo'lsin. Unda

$$\phi(x) = 0, \quad \phi(x_0) = x - x_0, \quad \phi'(c) = -1$$

bo'lib, (5) tenglik quyidagi

$$\begin{aligned} R_n(x) &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot \frac{-(x-x_0)}{-(n+1)(x-c)^n} (x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} [x-x_0 - \theta(x-x_0)]^n \cdot (x-x_0) = \\ &= \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-x_0)^{n+1} (1-\theta)^n \end{aligned}$$

ko'rinishga keladi. Bu holda

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \\ &+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n \end{aligned}$$

formula hosil bo'lib, uni funksiyaning Koshi ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi deyiladi.

([1], 7.1 Taylor formulas, 227-bet) **b) Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.**

Aytaylik,  $\phi(t) = (x-t)^{n+1}$  bo'lsin. Unda

$$\phi(x) = 0, \quad \phi(x_0) = (x-x_0)^{n+1},$$

$$\phi'(c) = -(n+1)(x-c)^n \quad (c = x_0 + \theta(x-x_0))$$

bo'lib, (5) tenglik quyidagi

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} \cdot \frac{-(x-x_0)^{n+1}}{-(n+1)(x-c)^n} \cdot (x-c)^n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1}$$

ko'rinishga keladi. Bu holda

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1},$$

$$(c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1)$$

(6)

formula hosil bo'lib, uni  $f(x)$  funksiyaning Lagranj ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi deyiladi.

**v) Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi.**

YUqoridagi (6) formuladan foydalanib topamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots$$

$$\dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n,$$

$$(c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1).$$

$f^{(n)}(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada uzluksiz. Demak,  $x \rightarrow x_0$  da  $c \rightarrow x_0$  bo'lib,

$$f^{(n)}(c) \rightarrow f^{(n)}(x_0).$$

SHuni e'tiborga olib,  $x \rightarrow x_0$  da

$$\frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)$$

bo'lishini topamiz.

Natijada ushbu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad (x \rightarrow x_0)$$

formula hosil bo'ladi. Bu formula  $f(x)$  funksiyaning Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasi deyiladi.

**([1], 7.1 Expanding the elementary functions, 227-bet) 3<sup>0</sup>. Ba'zi funksiyalarning Teylor formulalari.**  $f(x)$  funksiyaning Peano ko'rinishidagi qoldiq hadli Teylor formulasini olamiz:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots +$$

$$+ \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad (x \rightarrow x_0)$$

Bu tenglikda  $x_0 = 0$  deb, ushbu

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n), \quad (x \rightarrow 0) \quad (7)$$

formulaga kelamiz. (7) formula  $f(x)$  funksiyaning Makloren formulasi deyiladi.

1)  $f(x) = e^x$  bo'lsin. Bu funksiya uchun  $f(0) = 1$ ,  $f^{(n)}(0) = 1$  bo'lib,

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

bo'ladi.

2)  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in R$  bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$f(0) = 1, \quad f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)$$

bo'lib,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

bo'ladi.

Xususan,

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

bo'ladi.

3)  $f(x) = \ln(1+x)$  bo'lsin. Bu funksiya uchun

$$f(0) = 0, \quad f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

bo'lib,

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

bo'ladi.

SHuningdek,

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

bo'ladi.

4)  $f(x) = \sin x$  bo'lsin. Bu funksiya uchun  $f(0) = 0$ ,  $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$

bo'lib,

$$\sin x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), \quad x \rightarrow 0$$

bo'ladi.

5)  $f(x) = \cos x$  bo'lsin. Bu funksiya uchun  $f(0) = 1$ ,  $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$

bo'lib,

$$\cos x = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}), \quad x \rightarrow 0$$

bo‘ladi.

**Misol.** Ushbu

$$f(x) = \frac{1}{3x+2}$$

funksiyaning Teylor (Makloren) formulasi yozilsin.

◀ Bu funksiyani quyidagicha

$$f(x) = \frac{1}{3x+2} = \frac{1}{2\left(1+\frac{3}{2}x\right)}$$

yozib, so‘ng

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$$

bo‘lishidan foydalanib topamiz:

$$\frac{1}{3x+2} = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^k}{2^{k+1}} x^k + o(x^n), \quad x \rightarrow 0. \blacktriangleright$$

### Mashqlar

1. Asimptotik formulalardan foydalanib, ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$$

limit hisoblansin.

2. Ushbu

$$f(x) = e^{x^2}$$

funksiyaning Teylor (Makloren) formulasi yozilsin.

### Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A.** - Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis I.* Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Vorishashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

## Glossariy

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + R_n(x)$$

formulaga kelamiz. Bu (3) formula  $f(x)$  funksiyaning **Taylor formulasi** deyiladi. (3) formuladagi  $R_n(x)$  esa **Taylor formulasi qoldiq hadi** deyiladi.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1}(1-\theta)^n$$

funksiyaning **Koshi ko‘rinishidagi qoldiq hadli Taylor formulasi** deyiladi.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-x_0)^{n+1},$$
$$(c = x_0 + \theta(x-x_0), \quad 0 < \theta < 1)$$

(6)

formula hosil bo‘lib, uni  $f(x)$  funksiyaning **Lagranj ko‘rinishidagi qoldiq hadli Taylor formulasi** deyiladi.

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), \quad (x \rightarrow x_0)$$

Bu formula  $f(x)$  funksiyaning **Peano ko‘rinishidagi qoldiq hadli Taylor formulasi** deyiladi.

# Keys banki

**24-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}} - \cos x}{x^3 \sin x}$$

limit hisoblansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

## 24-amaliy mashg`ulot

1 – m i s o l. *Ushbu*

$$f(x) = \sin(\sin x)$$

*funksiya Makloren formulasi bo'yicha  $o(x^3)$  hadgacha yozilsin.*

Bu funksiyani Makloren formulasi bo'yicha yozishda 2-formuladan foydalanimiz. Avvalo 2) da  $x$  ning o'rniga  $\sin x$  ni qo'yib topamiz:

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{\sin^3 x}{6} + o(\sin^4 x)$$

Agar

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4),$$

$$\sin^3 x = \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^3 = x^3 + o(x^4),$$

$$\sin^4 x = \left( x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) \right)^4 = x^4 + o(x^5)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$\sin(\sin x) = x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

bo'lishini topamiz. ►

2 – m i s o l. *Ushbu*

$$\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

*munosabat isbotlansin.*

◀ Ravshanki,

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

1) -formuladan foydalanib topamiz:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n!} + o(x^n).$$

Keyingi tengliklardan



$$e^x - e^{-x} = 2x + 2\frac{x^3}{3!} + \dots + 2\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{n+2})$$

bo'ladi. Natijada

$$\operatorname{sh}x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

**3 – misol.** Agar  $x \rightarrow 0$  da  $f(x) = 1 + \frac{1}{2}x + o(x)$  bo'lsa,

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \sqrt{e}$$

*bo'lishi isbotlansin.*

◀ Ravshanki,

$$[f(x)]^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x} \ln f(x)}$$

Agar

$$\ln f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{2}x + o(x)\right) = \frac{1}{2}x + o(x)$$

bo'lishini e'tiborga olsak, unda

$$e^{\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x + o(x)\right)} = e^{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}}$$

bo'lishini topamiz.

Keyingi tenglikdan

$$\lim_{x \rightarrow 0} [f(x)]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left( e^{\frac{1}{2} + \frac{o(x)}{x}} \right) = \sqrt{e}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ►

**4 – misol.** Ushbu

$$\alpha = (1,2)^{1,1}$$

*miqdor taqribiy hisoblansin.*

◀ 5-formulaga ko'ra

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + o(x^2)$$

bo'lib, undan quyidagi taqribiy formula hosil bo'ladi:

$$(1+x)^m \approx 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2}x^2.$$

Keyingi munosabatda  $x = 0,2$ ,  $m = 1,1$  deb topamiz:

$$\alpha = (1,2)^{1,1} = (1 + 0,2)^{1,1} \approx 1 + 1,1 \cdot 0,2 + \frac{1,1 \cdot 0,1}{2} \cdot 0,04 = 1,2222. \blacktriangleright$$

Quyidagi funksiyalar Makloren formulasi bo'yicha  $o(x^2)$  hadgacha yoyilsin:

$$1198.f(x) = e^{\operatorname{tg} x}$$

$$1199.f(x) = e^{\sqrt{1+2x}}$$

$$1200.f(x) = \ln \cos x$$

Quyidagi funksiyalar Makloren formulasi bo'yicha  $o(x^3)$  hadgacha yoyilsin:

$$1201.f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$1202.f(x) = \sqrt[3]{1+3\sin x}$$

$$1203.f(x) = \ln(1 + \arcsin x)$$

$$1204.f(x) = \operatorname{arctg}(\sin x)$$

Quyidagi funksiyalar Makloren formulasi bo'yicha  $o(x^n)$  hadgacha yoyilsin:

$$1205.f(x) = e^{5x-1}$$

$$1206.f(x) = \sin(2x+3)$$

$$1207.f(x) = \cos\left(\frac{x}{2} + 2\right)$$

$$1208.f(x) = \ln(e^x + 2)$$

$$1209.f(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$$

$$1210.f(x) = 3^{2-x}$$

$$1211.f(x) = (x^2 - x)e^{-x}$$

$$1212.f(x) = \ln \frac{1+2x}{1-x}$$

$$1213.f(x) = \ln(2+x-x^2)$$

$$1214.f(x) = \frac{x^2 + 3e^x}{e^{2x}}$$

$$1215.f(x) = \frac{x^3}{x-1}$$

$$1216.f(x) = \frac{x^2 + 1}{2x-3}$$

$$1217.f(x) = \frac{1-2x^2}{2+x-x^2}$$

Quyidagi funksiyalar Teylor formulasi bo'yicha  $x_0$  nuqtaning atrofida  $o((x-x_0)^2)$  hadgacha yoyilsin:

$$1218.f(x) = \frac{1}{x}, x_0 = 2$$

$$1219.f(x) = \sin(2x-3), x_0 = 1$$

$$1220.f(x) = xe^{2x}, x_0 = -1$$

$$1221.f(x) = x^2e^{-2x}, x_0 = -1$$

$$1222.f(x) = (x^2-1)e^{2x}, x_0 = -1$$

$$1223.f(x) = \sin(x+1)\sin(x+2), x_0 = -1$$

$$1224.f(x) = \ln(2x+1), x_0 = \frac{1}{2}$$

$$1225.f(x) = \ln \sqrt[3]{7x-2}, x_0 = 1$$

$$1226.f(x) = \frac{2x+1}{x-1} \ln x, x_0 = 1$$

$$1227.f(x) = \frac{2x}{1-x^2}, x_0 = 2$$

Quyidagi limitlar hisoblansin:

$$1228. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$1230. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1 + \frac{x^2}{2}}{x^4}$$

$$1232. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg x - \arcsin x}{x^2}$$

$$1234. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}} - e}{x}$$

$$1236. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^{\sin x}}{x^3}$$

$$1238. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - \sqrt{1+x^2} - x \cos x}{\ln^3(1-x)}$$

$$1240. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^3 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - x^2 + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$1241. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \left( x^3 - x^2 + \frac{x}{2} + 1 \right) e^{\frac{1}{x}} - \sqrt[4]{x^{12} - x^9 + 2} \right)$$

$$1242. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(\sin \pi x)}{\ln(1 + \ln x)}$$

$$1243. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 - e^{\pi x - 2x^2}}{\cos x}$$

$$1244. \lim_{x \rightarrow \infty} x \left[ (2e)^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{1}{x}} - 2 \right]$$

$$1245. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x \operatorname{tg} x} \right)$$

$$1246. \lim_{x \rightarrow \infty} \left( x^2 - \frac{x}{2} - (x^3 + x + 1) \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)$$

$$1229. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

$$1231. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{x^3}$$

$$1233. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{\sin x - x}$$

$$1235. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1+x)^x - 1}{x^2}$$

$$1237. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sh}(\operatorname{tg} x) - x}{x^3}$$

$$1239. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}-0} \left( \left( \frac{\pi}{2} - x \right) \operatorname{tg} x \right)^{\operatorname{tg} x}$$

## Test

1)  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + R_n(x)$ . Funktsiyani  $a_3$  ni hisoblang.  
 $f(x) = \cos x$   $x = 0$  nuqtada.

- A) 0      B)  $\frac{1}{3}$       C)  $\frac{1}{6}$       D)  $\frac{1}{6!}$

2)  $f(x) = e^x$  funksiyani  $x = 0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasini toping.

A)  $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$

B)  $e^x = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$

C)  $e^x = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$

D)  $e^x = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0$

3)  $f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + \dots + a_n(x - x_0)^n + R_n(x)$ . Funktsiyani  $a_5$  ni hisoblang.  
 $f(x) = \sin x$   $x = 0$  nuqtada.

- A)  $\frac{1}{5!}$       B)  $\frac{1}{3!}$       C)  $\frac{1}{6!}$       D)  $\frac{1}{24}$

4)  $f(x) = \ln(1 + x)$  funksiyani  $x = 0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

- A)  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^k}{k} + o(x^n)$       B)  $\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n)$       C)

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k x^k}{k!} + o(x^n) \quad \text{D) } \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n)$$

5)  $f(x) = \ln(1-x)$  funksiyani  $x=0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

$$\begin{array}{ll} \text{A) } -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k} + o(x^n) & \text{B) } \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1} x^k}{k} + o(x^n) \\ -\sum_{k=1}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n) & \text{D) } \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} + o(x^n) \end{array} \quad \text{C)}$$

6)  $f(x) = \frac{1}{3x+2}$  funksiyani  $x=0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

$$\begin{array}{ll} \text{A) } \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^k}{2^{k+1}} x^k + o(x^n) & \text{B) } \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^{k+1}}{2^k} x^k + o(x^n) \\ \text{C) } \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} x^k + o(x^n) & \text{D) } \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{3^{k+1}}{2^{k+1}} x^k + o(x^n) \end{array}$$

7) Lagranj ko'rinishidagi qoldiq had berilgan qatorni toping.

$$\begin{array}{ll} \text{A) } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} & \text{B) } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{n!} (x-x_0)^{n+1} \\ R_n(x) = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-x_0)^{n+1} & \\ \text{D) } R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} & \end{array} \quad \text{C)}$$

8)  $f(x) = (1+x)^\alpha$ ,  $\alpha \in R$  funksiyani  $x=0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasi to'g'ri berilgan qatorni toping.

$$\begin{array}{ll} \text{A) } \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + o(x^n) & \text{B) } \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{k!} x^k + o(x^n) \\ \text{C) } \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k)}{(k+1)!} x^k + o(x^n) & \text{D) } \sum_{k=0}^n \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k-1)}{k!} x^k + o(x^n) \end{array}$$

9)  $f(x) = e^{2x}$  funksiyani  $x=0$  nuqtada Teylor (Маклорен) qatoriga yoyilmasini toping.

$$\begin{array}{l} \text{A) } e^{2x} = 1 + 2x + \frac{4x^2}{2!} + \frac{8x^3}{3!} + \dots + \frac{2^n x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \\ \text{B) } e^{2x} = 1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \dots + 2^n x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \\ \text{C) } e^{2x} = 1 - 2x + \frac{4x^2}{2!} - \frac{8x^3}{3!} + \dots + (-2)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \\ \text{D) } e^{2x} = 1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \dots + n!x^n + o(x^n), \quad x \rightarrow 0 \end{array}$$

10) Makloren qatori berilgan qatorni toping.

$$\text{A) } f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + o(x^n), \quad (x \rightarrow 0)$$

$$\text{B) } f(x) = f(1) + \frac{f'(1)}{1!}(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!}(x-1)^n + o(x^n), \quad (x \rightarrow 1)$$

$$\text{C) } f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(x-1) + \frac{f''(0)}{2!}(x-1)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-1)^n + o(x^n), \quad (x \rightarrow 1)$$

$$\text{D) } f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{2!}x + \frac{f''(0)}{3!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n+1)!}x^n + o(x^n), \quad (x \rightarrow 0)$$

# 25-mavzu. Funksiyaning monotonligi. Funksiyaning ekstremumlari

## 25-ma'ruza

### Reja

- 1<sup>o</sup>. Funksiyaning monotonligi.
- 2<sup>o</sup>. Funksiyaning ekstremumlari.

**([1], 2.4 Monotone functions,41-bet)1<sup>o</sup>. Funksiyaning monotonligi.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da  $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$  berilgan bo'lsin.

Ma'lumki,

$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , uchun  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) < f(x_2)$ ) bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da o'suvchi (qat'iy o'suvchi),  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  uchun  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ) bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) deyiladi.

**([1], 2.4 Monotone maps,186-bet)1-teorema.** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin.

$f(x)$  funksiyaning  $(a, b)$  da o'suvchi bo'lishi uchun  $\forall x \in (a, b)$  da

$$f'(x) \geq 0$$

bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.**  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da o'suvchi bo'lsin. Unda  $\Delta x > 0$  bo'lganda

$$f(x + \Delta x) - f(x) \geq 0$$

bo'ladi. Hosila ta'rifidan foydalanib topamiz:

$$f'(x) = f'(x + 0) = \lim_{\Delta x \rightarrow +0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0.$$

**Etarliligi.** Aytaylik,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  mavjud bo'lib,  $f'(x) \geq 0$  bo'lsin.  $[x_1, x_2]$  da  $(x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2)$   $f(x)$  funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llab topamiz:

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1) \geq 0.$$

Demak,  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$ ,  $f(x)$  o'suvchi. ▶

Xuddi shunga o'xshash, quyidagi teorema isbotlanadi.

**([1], 2.4 Monotone maps,186-bet)2-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin.

$f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da kamayuvchi bo'lishi uchun  $\forall x \in (a, b)$  da

$$f'(x) \leq 0$$

bo'lishi zarur va etarli.

SHuningdek quyidagi teoremlarni isbotlash qiyin emas.

**([1], 2.4 Monotone maps, 186-bet) 3-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin.  $f(x)$  funksiyaning  $(a, b)$  da qat'iy o'suvchi bo'lishi uchun

1)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x) \geq 0$ .

2)  $\forall x \in (\alpha, \beta)$  da  $f'(x) = 0$  tenglik bajariladigan  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  intervalning mavjud bo'lmashlik shartlarining bajarilishi zarur va etarli.

**4-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin.  $f(x)$  funksiyaning  $(a, b)$  da qat'iy kamayuvchi bo'lishi uchun

1)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x) \leq 0$ ,

2)  $\forall x \in (\alpha, \beta)$  da  $f'(x) = 0$

tenglik bajariladigan  $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$  intervalning mavjud bo'lmashligi shartlarining bajarilishi zarur va etarli.

Demak,  $(a, b)$  da

$$f'(x) \geq 0 \Rightarrow f(x) \text{ o'suvchi} \Rightarrow f'(x) \geq 0,$$

$$f'(x) \leq 0 \Rightarrow f(x) \text{ kamayuvchi} \Rightarrow f'(x) \leq 0,$$

$$f'(x) > 0 \Rightarrow f(x) \text{ qat'iy o'suvchi} \Rightarrow f'(x) \geq 0,$$

$$f'(x) < 0 \Rightarrow f(x) \text{ qat'iy kamayuvchi} \Rightarrow f'(x) \leq 0$$

bo'ladi.

**1-misol.** Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2}{2^x}$$

funksiyaning o'suvchi, kamayuvchi bo'lish oraliqlari topilsin.

◀ Ravshanki,

$$f'(x) = x \cdot 2^{-x} (2 - x \ln 2)$$

bo'ladi.

Ushbu  $f'(x) > 0$ ,  $x \cdot 2^{-x} (2 - x \ln 2) > 0$  tengsizlik  $x \in \left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$  da o'rinli

bo'ladi. Demak,  $f(x)$  funksiya  $x \in \left(0, \frac{2}{\ln 2}\right)$  da o'suvchi,

$(-\infty, 0) \cup \left(\frac{2}{\ln 2}, +\infty\right)$  da kamayuvchi bo'ladi. ▶

**2<sup>o</sup>. Funksiyaning ekstremumlari.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in X$  bo'lsin.



**1-ta'rif.** Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$  nuqtalarda

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada maksimumga (minimumga) erishadi deyiladi,  $x_0$  nuqtaga esa  $f(x)$  funksiya-ning maksimum (minimum) nuqtasi deyiladi.

**2-ta'rif.** Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$  ( $U_\delta(x_0) \subset X$ ) nuqtalarda

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada qat'iy maksimumga (qat'iy minimumga) erishadi deyiladi,

Funksiyaning maksimum hamda minimumi umumiy nom bilan uning ekstremumlari, maksimum hamda minimum nuqtalari esa uning ekstremum nuqtalari deyiladi.

**5-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in X$  nuqtada ekstremumga erishsin.

Agar  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada  $f'(x_0)$  hosilaga ega bo'lsa, u holda

$$f'(x_0) = 0$$

bo'ladi.

◀ Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada maksimumga erishib, shu nuqtada hosilaga ega bo'lsin. U holda

$$\exists \delta > 0: \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X \text{ da } f(x) \leq f(x_0)$$

bo'ladi.

$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  intervalda  $f(x)$  funksiyaga Ferma teoremasini qo'llab topamiz:

$$f'(x_0) = 0. \blacktriangleright$$

**3-ta'rif.** Funksiya hosilasini nolga aylantiradigan nuqta uning stansionar (kritik) nuqtasi deyiladi.

**Eslatma.** Agar  $f(x)$  funksiya biror nuqtada ekstremumga erishsa, u shu nuqtada hosilaga ega bo'lishi shart emas.

Masalan,  $f(x) = |x|$  funksiya  $x_0 = 0$  nuqtada minimumga erishadi, biroq u shu nuqtada hosilaga ega emas.

Demak,  $f(x)$  funksiyaning ekstremum nuqtalari uning stansionar hamda hosilasi mavjud bo'lmagan nuqtalari bo'lishi mumkin.

**4-ta'rif.** Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ da } g(x) > 0 \text{ ёки}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ da } g(x) < 0$$

bo'lsa,  $g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning chap tomonida ishora saqlaydi deyiladi.

Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$  да  $g(x) > 0$  ёки

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$  да  $g(x) < 0$

bo'lsa,  $g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning o'ng tomonida ishora saqlaydi deyiladi.

**6-teorema.** Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1)  $\exists \delta > 0, \forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$  да  $f'(x)$  hosila mavjud;

2)  $f'(x_0) = 0$ ;

3)  $f'(x)$  hosila  $x_0$  nuqtaning o'ng va chap tomonlarida ishora saqlasin.

Agar  $f'(x)$  hosila  $x_0$  nuqtani o'tishda ishorasini o'zgartirsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishadi.

Agar  $f'(x)$  hosila  $x_0$  nuqtani o'tishda ishorasini o'zgartirmasa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishmaydi.

◀ Aytaylik,

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$  да  $f'(x) > 0$ ,

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$  да  $f'(x) < 0$

bo'lsin. U holda  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  o'suvchi, ya'ni  $f(x) < f(x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  kamayuvchi, ya'ni  $f(x) < f(x_0)$  bo'lib,  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  да  $f(x) < f(x_0)$  bo'ladi. Demak, bu holda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada maksimumga erishadi.

Aytaylik,

$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$  да  $f'(x) < 0$ ,

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$  да  $f'(x) > 0$

bo'lsin. U holda  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0), f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$  kamayuvchi, ya'ni  $f(x) > f(x_0)$ ,  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta), f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$  o'suvchi, ya'ni  $f(x) > f(x_0)$  bo'lib,  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  да  $f(x) > f(x_0)$  bo'ladi.

Demak, bu holda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada minimumga erishadi.

Agar  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$  да  $f'(x) > 0$ ,

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$  да  $f'(x) > 0$  yoki  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$  да  $f'(x) < 0$ ,  $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$  да  $f'(x) < 0$  bo'lsa, unda  $f(x)$  funksiya  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  da o'suvchi yoki  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  da kamayuvchi bo'lib  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishmaydi. ▶

**7-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1)  $f(x) \in C(X)$ ;

2)  $\exists \delta > 0, \forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$  да  $f'(x)$  hosila mavjud va chekli;

3)  $f'(x)$  hosila  $x_0$  nuqtaning o'ng va chap tomonlarida ishora saqlansin.

Agar  $f'(x)$  hosila  $x_0$  nuqtani o'tishda ishorasini o'zgartirsa,  $f(x)$

funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishadi.

Agar  $f'(x)$  hosila  $x_0$  nuqtani o'tishda ishorasini o'zgar-tirmasa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishmaydi.

Bu teorema yuqoridagi 6-teorema kabi isbotlanadi.

**8-teorema.** Faraz qilaylik  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan va  $m \in N$ ,  $m \geq 2$ ,  $x_0 \in X$  bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1)  $\exists \delta > 0$ ,  $\forall x \in U_\delta(x_0) \subset X$  da  $f^{(m-1)}(x)$  hosila mavjud;

2)  $f^{(m)}(x_0)$  hosila mavjud;

3)  $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(m-1)}(x_0) = 0$ ,  $f^{(m)}(x_0) \neq 0$ .

U holda  $m = 2k$ ,  $k \in N$  bo'lganda  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishib,  $f^{(m)}(x_0) < 0$  bo'lganda  $x_0$  nuqtada maksimumga,  $f^{(m)}(x_0) > 0$  da minimumga erishadi.

Agar  $m = 2k + 1$ ,  $k \in N$  bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishmaydi.

◀  $f(x)$  funksiyaning  $x_0$  nuqtadagi Teylor formulasi

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k + o((x-x_0)^n), \quad x \rightarrow x_0$$

ni olamiz. Bu formula teoremaning shartida ushbu

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m + o((x-x_0)^m), \quad x \rightarrow x_0$$

ko'rinishga keladi. Bundan esa  $x \neq x_0$  da

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^m \left[ \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m} \right], \quad x \rightarrow x_0$$

bo'lishi kelib chiqadi.

« $o$ » ning ta'rifiga ko'ra  $\frac{1}{m!} |f^{(m)}(x_0)| > 0$  son uchun

$\exists \delta > 0$ ,  $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$  nuqtalarda

$$\left| \frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m} \right| < \frac{1}{m!} |f^{(m)}(x_0)|$$

bo'ladi. Demak,  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$  uchun

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} + \frac{o((x-x_0)^m)}{(x-x_0)^m} \quad \text{Ba} \quad \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!}$$

miqdorlar bir xil ishorali bo'ladi. Bundan esa  $x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$  da

$$\frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} (x-x_0)^m$$

ning ishorasi  $f(x) - f(x_0)$  ayirmaning ishorasi bilan bir xil bo'lishi kelib

chiqadi.

Agar  $m = 2k$ ,  $k \in N$  bo'lib,  $f^{(m)}(x_0) > 0$  bo'lsa, unda  $f(x) - f(x_0) > 0$ , ya'ni  $f(x) > f(x_0)$  bo'ladi.  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada minimumga erishadi.

Agar  $m = 2k$ ,  $k \in N$  bo'lib,  $f^{(m)}(x_0) < 0$  bo'lsa, unda  $f(x) - f(x_0) < 0$ , ya'ni  $f(x) < f(x_0)$  bo'ladi.  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada maksimumga erishadi.

Agar  $m = 2k + 1$ ,  $k \in N$  bo'lsa,  $f(x) - f(x_0)$  ayirma ishora saqlamaydi. Bu holda funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishmaydi. ►

Xususan, agar  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning statsionar nuqtasi bo'lib,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada chekli  $f''(x_0) \neq 0$  hosilaga ega bo'lsa, shu nuqtada  $f(x)$  funksiya  $f''(x_0) < 0$  bo'lganda maksimumga,  $f''(x_0) > 0$  minimumga ega bo'ladi.

**2-misol.** Ushbu

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◀ Bu funksiya  $R = (-\infty; +\infty)$  aniqlangan bo'lib, u shu to'plamda uzluksiz. Uning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = 2 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} - 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}} \quad (1)$$

Ravshanki, funksiyaning hosilasi  $x_1 = 1$  nuqtada nolga alanadi:  $f'(1) = 0$ ;  $x_2 = 0$  nuqtada esa funksiyaning hosilasi mavjud emas.

Hosila ifodasi (1) dan ko'radiki,  $x = 1$  nuqtaning chap tomonidagi nuqtalarda  $f'(x) < 0$  o'ng tomonidagi nuqtalarda  $f'(x) > 0$  bo'ladi. Demak, berilgan funksiya  $x = 1$  nuqtada minimumga erishadi va  $\min f(x) = f(1) = -2$  bo'ladi.

Yana hosila ifodasi (1) dan ko'rinadiki,  $x = 0$  nuqtaning chap tomonidagi nuqtalarda  $f'(x) > 0$ , o'ng tomonidagi nuqtalarda  $f'(x) < 0$  bo'ladi.

Demak,  $f(x)$  funksiya  $x = 0$  nuqtada maksimumga erishadi va  $\max f(x) = f(0) = 1$  bo'ladi. ►

### Mashqlar

$f(x)$  funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtada funksiya ekstremumga erishishi shart emasligi isbotlansin.

1. Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

3. Aytaylik,  $f(x) \in C[a, b]$  bo'lsin. Bu funksiyaning  $[a, b]$  dagi eng katta va eng kichik qiymatlari qanday topiladi?

#### **Adabiyotlar**

1. **Canuto C., Tabacco A.** - Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis I.* Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, I t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

# Glossariy

Ma'lumki,

$\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , uchun  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$  ( $f(x_1) < f(x_2)$ ) bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da **o'suvchi (qat'iy o'suvchi)**,  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  uchun  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$  ( $f(x_1) > f(x_2)$ ) bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da **kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi)** deyiladi.

**1-ta'rif.** Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$  nuqtalarda

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada **maksimumga (minimumga)** erishadi deyiladi,  $x_0$  nuqtaga esa  $f(x)$  funksiya-ning **maksimum (minimum) nuqtasi** deyiladi.

**2-ta'rif.** Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in U_\delta(x_0) \setminus \{x_0\}$  ( $U_\delta(x_0) \subset X$ ) nuqtalarda

$$f(x) < f(x_0) \quad (f(x) > f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada **qat'iy maksimumga (qat'iy minimumga)** erishadi deyiladi,

**4-ta'rif.** Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ da } g(x) > 0 \text{ ёки}$$

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0) \text{ da } g(x) < 0$$

bo'lsa,  $g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning **chap tomonida ishora saqlaydi** deyiladi.

Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } g(x) > 0 \text{ ёки}$$

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } g(x) < 0$$

bo'lsa,  $g(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtaning **o'ng tomonida ishora saqlaydi** deyiladi.

## Keys banki

**25-keys.** Masala o'rtaga tashlanadi: Funksiyaning hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtada funksiya ekstremumga erishishi shartmi?

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);

- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

## 25-amaliy mashg`ulot

1 – misol. Ushbu

$$f(x) = \cos \frac{\pi}{x}$$

funksiyaning o'suvchi va kamayuvchi bo'ladigan oraliqlari topilsin.

◀ Berilgan funksiya juft bo'lganligi uchun uni  $(0, +\infty)$  da qarash etarli bo'ladi. Ravshanki,

$$f'(x) = \frac{\pi}{x^2} \cdot \sin \frac{\pi}{x}.$$

Endi  $f'(x) > 0$ , ya'ni  $\frac{\pi}{x^2} \cdot \sin \frac{\pi}{x} > 0$  tengsizlikni echamiz.

$$\sin \frac{\pi}{x} > 0 \Rightarrow 0 < \frac{\pi}{x} < \pi \quad \text{va} \quad 2n\pi < \frac{\pi}{x} < \pi + 2n\pi \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Keyingi tengsizliklardan

$$x > 1 \quad \text{va} \quad \frac{1}{2n+1} < x < \frac{1}{2n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

bo'lishi kelib chiqadi.

Demak,  $(1, +\infty)$  va  $\left(\frac{1}{2n+1}, \frac{1}{2n}\right)$ ,  $(n \in \mathbb{N})$  intervallarda funksiya qat'iy o'suvchi bo'ladi.

Ravshanki,  $f'(x) < 0$ , ya'ni  $\frac{\pi}{x^2} \cdot \sin \frac{\pi}{x} < 0$  tengsizlikning echimi

$$\frac{1}{2n} < x < \frac{1}{2n-1} \quad (n \in \mathbb{N})$$

bo'ladi. Demak,  $f(x)$  funksiya

$$\left(\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

intervallarda qat'iy kamayuvchi bo'ladi.



$f(x)$  juft funksiya bo'lgani uchun u  $(-\infty, 0)$  dagi

$$\left(-\frac{1}{2n}, -\frac{1}{2n-1}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

intervallarda qat'iy o'suvchi,

$$(-\infty, -1) \quad \text{va} \quad \left(-\frac{1}{2n+1}, -\frac{1}{2n}\right) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Intervallarda esa qat'iy kamayuvchi bo'ladi. ►

**2 – m i s o l . Ushbu**

$$f(x) = \frac{x^2}{10} - \ln x$$

*funksiya o'suvchi, kamayuvchilikka tekshirilsin.*

◀ Bu funksiya  $(0, +\infty)$  da aniqlangan bo'lib, uning hosilasi

$$f'(x) = \frac{x}{5} - \frac{1}{x}$$

bo'ladi.

$$\text{Endi } f'(x) \geq 0, \text{ ya'ni } \frac{x}{5} - \frac{1}{x} \geq 0$$

$$\text{yoki } f'(x) \leq 0, \text{ ya'ni } \frac{x}{5} - \frac{1}{x} \leq 0$$

bo'lishga tekshiramiz. Ravshanki,

$$\frac{x}{5} - \frac{1}{x} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5}{5x} \geq 0 \Leftrightarrow (x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5}) \geq 0$$

Bundan esa,  $(\sqrt{5}, +\infty)$  da  $f'(x) \geq 0$ ,  $(0, \sqrt{5})$  da  $f'(x) \leq 0$  bo'lishini topamiz. Demak, berilgan funksiya  $(0, \sqrt{5})$  da kamayuvchi,  $(\sqrt{5}, +\infty)$  da o'suvchi bo'ladi. ►

**3 – m i s o l . Agar  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $[a, b]$  segmentda:**

- 1)  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  hosilalarga ega,
- 2)  $f'(x) \geq g'(x)$  tengsizlik o'rinli,
- 3)  $f(a) = g(a)$

bo'lsa,  $\forall x \in (a, b]$  da  $f(x) > g(x)$  bo'lishi isbotlansin.

◀  $f(x) - g(x) = \varphi(x)$  deylik. Unda  $\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) \geq 0$  bo'ladi. Demak,  $\varphi(x)$  funksiya  $[a, b]$  da o'suvchi.

Endi  $\varphi(a) = f(a) - g(a) = 0$  bo'lishini e'tiborga olib  $(a, b]$  da  $\varphi(x) > 0$  ya'ni  $f(x) > g(x)$  bo'lishini topamiz.

Xususan,  $f(x) = \ln(1+x)$ ,  $g(x) = x - \frac{x^2}{2}$  ( $0 < x < +\infty$ ) deyilsa, ular uchun uchchala shart bajarilib, ushbu

$$\ln(1+x) > x - \frac{x^2}{2} \quad (0 < x < +\infty)$$

tengsizlik kelib chiqadi. ▶

**Quyidagi funksiyalarning o'suvchi, kamayuvchi bo'ladigan oraliqlari topilsin.**

1247.  $f(x) = 3x - x^3$

1248.  $f(x) = 8x^3 - x^4$

1249.  $f(x) = x^3 - 3x + 5$

1250.  $f(x) = x(1 + 2\sqrt{x})$

1251.  $f(x) = e^{kx}$

1252.  $f(x) = x |x|$

1253.  $f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

1254.  $f(x) = |x|^3$

1255.  $f(x) = \frac{e^x}{x}$

1256.  $f(x) = \cos x - x$

1257.  $f(x) = x + \sin x$

1258.  $f(x) = x^2 - 10 \ln x$

1259.  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$

1260.  $f(x) = x^2 e^{-x^2}$

1262.  $f(x) = x + |\sin 2x|$

1263.  $f(x) = x^2 \ln x$

1264.  $f(x) = \frac{x^3}{3-x^2}$

1265.  $f(x) = x^2 - \ln x^2$

1266.  $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{2x}{x^2-1}$

1267.  $f(x) = x^n e^{-x}$  ( $n > 0, x \geq 0$ )

1268.  $f(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$

1269.  $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

1270.  $f(x) = 3^{\frac{1}{x-3}}$

1271.  $f(x) = (x+1)\sqrt{x^2-1}$

1272.  $f(x) = \arctg x - \ln x$

**Quyidagi funksiyalar o'suvchilikka va kamayuvchilikka tekshirilsin:**

1273.  $f(x) = \ln |x|$

1274.  $f(x) = x + \operatorname{arctg} x$

1275.  $f(x) = x^3 + \arcsin x$

1276.  $f(x) = \lg^3 x + x^4$

1277.  $f(x) = x^5 \lg^7 x \quad (x \geq 1)$

1278.  $f(x) = \lg \cos x \quad \left(0 \leq x < \frac{\pi}{2}\right)$

1279.  $f(x) = \arcsin(3x - 1)$

1280.  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x - 1) \operatorname{arctg} x^n$

1281.  $f(x) = |\ln x|$

1282.  $f(x) = \operatorname{arctg}(x^2 - 2x + 3)$

1283.  $f(x) = (x^2 + 4x + 6) \cdot \ln(x^2 + 4x + 6)$

1284.  $f(x) = \frac{1}{1 + \cos^2 x}$

1285.  $f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x - 16}$

1286.  $f(x) = 2 \cdot e^{x^2 - 4x}$

1287.  $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 8x + 20)$

$f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan bo'lib, bu to'plamda  $f(x)$  musbat va kamayuvchi,  $g(x)$  esa manfiy va o'suvchi bo'lsa, quyidagi funksiyalarning o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lishi aniqlansin:

1289.  $y = f(x) \cdot g(x)$

1290.  $y = f(x) - 4g(x)$

1291.  $y = f^2(x)$

1292.  $y = g^2(x)$

$f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan bo'lib, shu to'plamda bu funksiyalar manfiy va kamayuvchi bo'lsa, quyidagi funksiyalarning o'suvchi yoki kamayuvchi bo'lishi aniqlansin:

1293.  $y = f(x) \cdot g(x)$

1294.  $y = f^3(x)$

1295.  $y = 4f(x) + 8g(x)$

1296.  $y = g^6(x)$

1297. Agar  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda o'suvchi bo'lib,  $f'(x)$  mavjud bo'lsa,  $f'(x)$  ning  $(a, b)$  da o'suvchiligi haqida nima deyish mumkin?

1298.  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar quyidagi shartlarni bajarsin:

1)  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $n$  marta differensiallanuvchi;

2)  $f^{(k)}(x_0) = g^{(k)}(x_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n - 1),$

3)  $x > x_0$  da  $f^{(n)}(x) > g^{(n)}(x).$

U xolda  $x > x_0$  da  $f(x) > g(x)$  bo'lishi isbotlansin.

Quyidagi tengsizliklar isbotlansin:

1299.  $x + \frac{1}{x} \geq 2 \quad (x > 0)$

$$1300. 2\sqrt{x} > 3 - \frac{1}{x} \quad (x > 1)$$

$$1301. (1+x)^\alpha \geq 1 + \alpha x \quad (x \geq -1, \alpha > 1)$$

$$1302. e^x \geq 1 + x$$

$$1303. e^x \geq ex$$

$$1304. e^x \geq 1 + x + \frac{x^2}{2} \quad (x \geq 0)$$

$$1305. \ln(1+x) \leq x \quad (x \geq 0)$$

$$1306. \ln(1+x) > \frac{x}{x+1} \quad (x > 0)$$

$$1307. e^x > 1 + \ln(1+x) \quad (x > 0)$$

$$1308. 1 - 2\ln x \leq \frac{1}{x^2} \quad (x > 0)$$

$$1309. \sin x \geq \frac{2}{\pi} x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1310. \sin x > x - \frac{x^3}{6} \quad (x > 0)$$

$$1311. \cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad (x > 0)$$

$$1312. \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3} \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1313. \operatorname{arctg} \leq x \quad (x \geq 0)$$

$$1314. \sin x + \operatorname{tg} x > 2x \quad \left(0 < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1315. \left(\frac{\sin x}{x}\right)^3 \geq \cos x \quad \left(0 < |x| < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1316. (a+b)^\alpha \leq a^\alpha + b^\alpha \quad (0 \leq \alpha \leq 1)$$

$$1317. \sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{x-y} \quad (x \geq y \geq 0.)$$

$$1318. \left(\frac{x+y}{2}\right)^n \leq \frac{x^n + y^n}{2} \quad (x \geq 0, y \geq 0, n \in \mathbf{N})$$

$$1319. \frac{x-y}{x} < \ln \frac{x}{y} < \frac{x-y}{y} \quad (x > y > 0)$$

$$1320. \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+1} \quad (x > 0)$$

$$1321. x^\alpha - 1 > \alpha(x-1) \quad (x > 1, \alpha \geq 2)$$

4 – m i s o l . Ushbu  $f(x) = 2\sqrt[3]{x^5} - 5\sqrt[3]{x^2} + 1$  funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◀Berilgan funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = \frac{10}{3}x^{\frac{2}{3}} - \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}}$$

$f(x)$  funksiyaning hosilasi  $x=1$  nuqtada nolga aylanadi ( $f'(1)=0$ ),  $x=0$  nuqtada esa funksiya hosilasi mavjud emas. Demak,  $f(x)$  funksiyaning ekstremumga sinaladigan nuqtalari  $x=1$ ,  $x=0$  bo'ladi.

$x=0$  nuqtaning  $(-\delta, \delta)$  atrofini ( $0 < \delta < 1$ ) olib,  $(-\delta, 0)$  va  $(0, \delta)$  da funksiya hosilasining ishorasini aniqlaymiz:

$$\forall x \in (-\delta, 0) \text{ da } f'(x) = \frac{10}{3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} > 0$$

$$\forall x \in (0, \delta) \text{ da } f'(x) = \frac{10}{3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} < 0$$

bo'lib, berilgan funksiya  $x=0$  nuqtada maksimumga erishib,  $\max f(x) = f(0) = 1$  bo'ladi.

Endi  $x=1$  nuqtaning atrofida funksiya hosilasining ishorasini aniqlaymiz:

$$\forall x \in (1-\delta, 1) \text{ da } f'(x) = \frac{10}{3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} < 0$$

$$\forall x \in (1, 1+\delta) \text{ da } f'(x) = \frac{10}{3} \cdot \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}} > 0$$

bo'lib, berilgan funksiya  $x=1$  nuqtada minimumga erishib,  $\min f(x) = f(1) = -2$  bo'ladi ▶

5 – m i s o l . Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{agar } x \neq 0 \text{ бўлса} \\ 1, & \text{agar } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

funksiya ekstremumga tekshirilsin.

◀Berilgan funksiyaning hosilasi  $f'(x) = 2x$  bo'lib, uning ishorasi  $(-\delta, 0)$  da manfiy,  $(0, \delta)$  da esa musbat bo'lsada funksiya  $x=0$  nuqtada minimumga ega bo'lmaydi, chunki berilgan funksiya  $x=0$  nuqtada uzluksiz emas. ▶

6 – m i s o l . Ushbu

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{agar } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

*funksiya ekstremumga tekshirilsin.*

◀  $x \neq 0$  da berilgan funktsiyaning hosilasi

$$f'(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \cdot \frac{2}{x}$$

bo'ladi.

Demak,  $x = 0$  nuqta funktsiyaning ekstremumga erishishiga sinaladigan nuqta bo'ladi.

$$\begin{aligned} \forall x \in (-\delta, 0) \text{ da } f'(x) < 0 \\ \forall x \in (0, \delta) \text{ da } f'(x) > 0 \end{aligned} \quad (\delta > 0)$$

bo'lib,  $x = 0$  nuqtada berilgan funktsiya uzluksiz bo'lganligi sababli  $f(x)$  funktsiya  $x = 0$  nuqtada minimumga ega bo'ladi. ▶

**7 – misol. Ushbu**

$$f(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x$$

*funksiya ekstremumga tekshirilsin.*

◀ Berilgan funktsiya hosilasi

$$f'(x) = e^x - e^{-x} - 2 \sin x$$

bo'lib, u  $x = 0$  nuqtada nolga aylanadi. Funktsiyaning yuqori tartibli hosilalarini topib, ularni  $x = 0$  nuqtadagi qiymatlari hisoblaymiz:

$$f''(x) = e^x + e^{-x} - 2 \cos x, \quad f''(0) = 0$$

$$f'''(x) = e^x - e^{-x} + 2 \sin x, \quad f'''(0) = 0$$

$$f^{(iv)}(x) = e^x + e^{-x} + 2 \cos x, \quad f^{(iv)}(0) = 4$$

Juft tartibli hosila  $x = 0$  nuqtada musbat bo'lgani uchun berilgan funktsiya  $x = 0$  nuqtada minimumga ega bo'lib,  $\min f(x) = f(0) = 4$  bo'ladi. ▶

**Quyidagi funktsiyalar ekstremumga tekshirilsin:**

1322.  $y = x^2 - 6x + 8$

1323.  $y = 2x^2 - x^4$

1324.  $y = \frac{x^4}{4} - 2x^3 + \frac{11}{2} \cdot x^2 - 6x + 3$

1325.  $y = (x-1)^3$

1326.  $y = x^2 \cdot e^{-x}$

1327.  $y = e^x + e^{-x}$

1328.  $y = \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x$

1329.  $y = x - \arctg x$

1330.  $y = x \cdot \sqrt{1-x^2}$

1331.  $y = x^3 - 3x^2 + 3x$

1332.  $y = \sin x - x$

1333.  $y = 2 \sin 2x + \sin 4x$

1334.  $y = \frac{x}{\ln x}$

1335.  $y = |x^2 - 5x + 6|$

1336.  $y = |x^2 - 1| \cdot e^{|x|}$

1337.  $y = x^{\frac{1}{x}}$

$$1338. y = |x^3 - 3x^2| \qquad 1339. y = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}}, & \text{агар } x \neq 0 \text{ бўлса} \\ 0, & \text{агар } x = 0 \text{ бўлса} \end{cases}$$

1340. Ushbu  $y = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \dots + (x - a_n)^2$  funksiya  $x$  ning qanday qiymatida minimumga erishadi.  $a_1, a_2, \dots, a_n$  -berilgan sonlar.

**Quyidagi funksiyalarning ekstremumlari topilsin:**

$$1341. y = \sqrt[5]{x^4}$$

$$1342. y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$$

$$1343. y = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 8}}$$

$$1344. y = \frac{(x-2)(8-x)}{x^2}$$

$$1345. y = x + \frac{1}{x}$$

$$1346. y = x - \ln(1+x)$$

$$1347. y = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1}$$

$$1348. y = \sqrt[3]{(x^2 - 1)^2}$$

$$1349. y = \frac{e^x}{x}$$

$$1350. y = x \cdot \ln^2 x$$

$$1351. y = \sqrt[3]{2x^3 + 3x^2 - 36x}$$

$$1352. y = \cos x + \frac{1}{2} \cos 2x$$

$$1353. y = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!}\right) \cdot e^{-x}, n \in \mathbb{N}$$

$f(x)$  funksiya  $X \subset \mathbb{R}$  to'plamda berilgan bo'lsin. Agar  $\forall x \in X$  da  $f(x) \leq f(x_0)$  ( $f(x) \geq f(x_0)$ ) bo'lsa,  $f(x_0)$  miqdor funksiyani  $X$  dagi *eng katta* (*eng kichik*) qiymati deyiladi.

$[a, b]$  segmentda uzluksiz bo'lgan funksiyaning **eng katta** va **eng kichik** qiymatlari quyidagiga topiladi:

1)  $f(x)$  funksiyaning  $[a, b]$  dagi ekstremumga sinaladigan nuqtalari topilib, bu nuqtalarda funksiya qiymatlari xisoblanadi.

2)  $f(a), f(b)$  lar xisoblanadi.

Topilgan qiymatlar orasidagi **eng kattasi** (**eng kichigi**) berilgan funksiyaning  $[a, b]$  dagi **eng katta** (**eng kichik**) qiymati bo'ladi.

**Quyidagi funksiyalarning eng katta va eng kichik qiymatlarining mavjudligi aniqlansin va mavjud bo'lgan holda ular topilsin:**

$$1354. y = |x| \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$1355. y = x^3 - 6x \quad (-3 \leq x \leq 4)$$

$$1356. y = x + 2\sqrt{x} \quad (0 < x \leq 4)$$

$$1357. y = \frac{1}{x} \quad (0 < x \leq 4)$$

$$1358. y = \sin 2x - x \quad \left(-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1359. y = x^x \quad (0,1 \leq x \leq \infty)$$

$$1360. y = \sqrt[3]{(x^2 - 2x)^2} \quad (0 \leq x \leq 3)$$

$$1361. y = x^2 \cdot \ln x \quad (1 \leq x \leq e)$$

$$1362. y = \sqrt[3]{x^2} - 1 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$1363. y = 2 \sin x + \cos 2x \quad \left(0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}\right)$$

Quyidagi funksiyalarning eng katta va eng kichik fiymatlari topilsin:

$$1364. y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35 \quad (-4 \leq x \leq 4)$$

$$1365. y = e^{-x^2} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$1366. y = x \cdot |x| \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

$$1367. y = \arctg \frac{1-x}{1+x} \quad (0 \leq x \leq 1)$$

$$1368. y = x^4 - 2x^2 + 5 \quad (-2 \leq x \leq 2)$$

1369. SHunday son topilsinki, unga shu sonning kvadratini qo'shganda, hosil bo'ladigan yig'indi eng katta qiymatga ega bo'lsin.

1370. Ushbu

$$f(x) = x \cdot \sin \frac{\pi}{x}$$

funksiya (0,1) oraliqda cheksiz ko'p sondagi ekstremum nuqtalarga ega bo'lishi isbotlansin.

1371. Ushbu

$$\frac{3}{2} \leq \frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1} \leq 2 \quad (-\infty < x < +\infty)$$

tensizlik isbotlansin.

1372. Ushbu  $|a \cdot \sin x + b \cdot \cos x| \leq \sqrt{a^2 + b^2}$  tensizlik isbotlansin.

Quyidagi ketma-ketlik nechanchi hadida eng katta qiymatiga ega



bo'ladi?

$$1373. x_n = 105n + 3n^2 - n^3$$

$$1374. x_n = \frac{\sqrt{n}}{n + 1985}$$

$$1375. x_n = \frac{\sqrt[3]{n}}{n + 19}$$

$$1376. x_n = \frac{n^2}{n^2 + 200}$$

$$1377. x_n = \frac{n^{10}}{2^n}$$

$$1378. x_n = \sqrt[n]{n}$$

Quyidagi funksiyalarning aniq yuqori chegarasi (sup), aniq quyi chegarasi (inf) topilsin.

$$1379. f(x) = \frac{x}{1+x} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

$$1380. f(x) = \frac{1}{x^2 + 1} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$1381. f(x) = \operatorname{tg}^2 x \quad \left(-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}\right)$$

$$1382. f(x) = \frac{1}{x^2 - 4} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

$$1383. f(x) = \frac{1}{x} + x^2 \quad (0 < x \leq 1)$$

$$1384. f(x) = \ln x - x \quad (0 < x < +\infty)$$

$$1385. f(x) = (x^2 + 4) \cdot e^{-x} \quad (0 \leq x < +\infty)$$

$$1386. f(x) = \frac{1}{x} \cdot e^{-\frac{1}{x}} \quad (0 < x < +\infty)$$

$$1387. f(x) = \frac{1+x^2}{1+x^4} \quad (-\infty < x < +\infty)$$

$$1388. f(x) = (x+1) \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 \quad \left(\frac{3}{2} < x < 6\right)$$

# Test

1) Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da  $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$  berilgan bo'lsin.  
 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , uchun  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$  bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da ..... deyiladi.

A) o'suvchi      B) kamayuvchi      C) qat'iy o'suvchi      D) qat'iy kamayuvchi

2) Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da  $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$  berilgan bo'lsin.  
 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , uchun  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$  bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da ..... deyiladi.

A) qat'iy o'suvchi      B) kamayuvchi      C) o'suvchi      D) qat'iy kamayuvchi

3) Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da  $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$  berilgan bo'lsin.  
 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , uchun  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$  bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da ..... deyiladi.

A) kamayuvchi      B) qat'iy o'suvchi      C) o'suvchi      D) qat'iy kamayuvchi

4) Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da  $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$  berilgan bo'lsin.  
 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ , uchun  $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$  bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da ..... deyiladi.

A) qat'iy kamayuvchi      B) qat'iy o'suvchi      C) o'suvchi      D) kamayuvchi

5) Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$  nuqtalarda

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada maksimumga erishadi deyiladi,  $x_0$  nuqtaga esa  $f(x)$  funksiyaning ..... nuqtasi deyiladi.

A) maksimum      B) minimum      C) qutb      D) qo'zg'almas

6) Agar shunday  $\delta > 0$  son topilsaki,  $\forall x \in U_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$  nuqtalarda

$$f(x) \leq f(x_0) \quad (f(x) \geq f(x_0))$$

tengsizlik bajarilsa,  $f(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada minimumga erishadi deyiladi,  $x_0$  nuqtaga esa  $f(x)$  funksiyaning ..... nuqtasi deyiladi.

A) minimum      B) maksimum      C) qutb      D) qo'zg'almas

# 26-mavzu. Funksiyaning qavariqligi, egilish nuqtalari va asimptotalari

## 26-ma'ruza

### Reja

- 1<sup>o</sup>. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi.
- 2<sup>o</sup>. Funksiyaning egilish nuqtalari.
- 3<sup>o</sup>. Funksiya grafigining asimptotalari.

**[[1] 6.9 Convexity and inflection points, 189-bet) 1<sup>o</sup>. Funksiyaning qavariqligi va botiqligi.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $x_1, x_2 \in (a, b)$  uchun  $x_1 < x_2$  bo'lsin.

$f(x)$  funksiya grafigining  $(x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$  nuqta-laridan o'tuvchi to'g'ri chiziqni  $y=l(x)$  desak, u quyidagicha

$$l(x) = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

bo'ladi.

**1-ta'rif.** Agar har qanday oraliq  $(x_1, x_2) \subset (a, b)$  da joylashgan  $\forall x \in (x_1, x_2)$  uchun

$$f(x) \leq l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

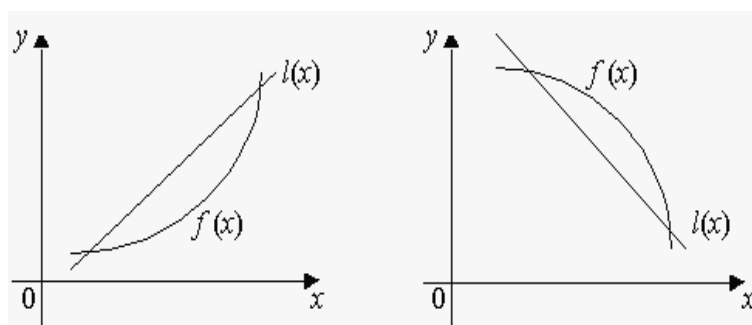
bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da botiq (qat'iy botiq) funksiya deyiladi.

**2-ta'rif.** Agar har qanday oraliq  $(x_1, x_2) \subset (a, b)$  da joylashgan  $\forall x \in (x_1, x_2)$  uchun

$$f(x) \geq l(x) \quad (f(x) > l(x))$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da qavariq (qat'iy qavariq) funksiya deyiladi.

Botiq hamda qavariq funksiyalarning grafiklari 7-chizmada tasvirlangan:



## 7-chizma.

Aytaylik,  $\alpha_1 \geq 0$ ,  $\alpha_2 \geq 0$ ,  $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$  bo'lib,  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  bo'lsin. Funktsiyaning botiqligi hamda qavariqligini quyidagicha ta'riflash ham mumkin.

**3-ta'rif.** Agar

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &\leq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \\ (f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &< \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)) \end{aligned}$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da botiq (qat'iy botiq) deyiladi.

**4-ta'rif.** Agar

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &\geq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \\ (f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &> \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)) \end{aligned}$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da qavariq (qat'iy qavariq) deyiladi.

**1-misol.** Ushbu

$$f(x) = x^2$$

funksiya  $R$  da qat'iy botiq funksiya bo'ladi.

◀ 3-ta'rifdan foydalanib topamiz:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)^2 = (\alpha_1 x_1)^2 + 2\alpha_1 \alpha_2 x_1 x_2 + (\alpha_2 x_2)^2 < \\ &< \alpha_1^2 x_1^2 + \alpha_1 \alpha_2 (x_1 + x_2)^2 + \alpha_2^2 x_2^2 = \alpha_1 x_1^2 (\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_2 x_2^2 (\alpha_1 + \alpha_2) = \\ &= \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad \blacktriangleright \end{aligned}$$

**1-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib, unda  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin.  $f(x)$  funksiyaning  $(a, b)$  da botiq (qat'iy botiq) bo'lishi uchun  $f'(x)$  ning  $(a, b)$  da o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.**  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da botiq bo'lsin. U holda  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$ ,  $x_1 < x_2$ ,  $\forall x \in (x_1, x_2)$  uchun

$$f(x) \leq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

bo'lib, undan

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

bo'lishi kelib chiqadi. ( $(x_2 - x_1) = (x_2 - x) + (x - x_1)$  deyildi). Keyingi tengsizlikda  $x \rightarrow x_1$  so'ng  $x \rightarrow x_2$  da limitga o'tib,

$$\begin{aligned} f'(x_1) &\leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \\ f'(x_2) &\geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \end{aligned}$$

bo'lishini topamiz. Undan  $f'(x_1) \leq f'(x_2)$  bo'lishi kelib chiqadi. Demak,  $f'(x)$  funksiya  $(a, b)$  da o'suvchi.

$f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da qat'iy botiq bo'lsin. U holda

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

bo'ladi. Lagranj teoremasiga muvofiq

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2$$

bo'lib, undan  $f'(x_1) < f'(x_2)$  bo'lishi kelib chiqadi.

**Etarliligi.**  $f'(x)$  funksiya  $(a, b)$  da o'suvchi (qat'iy o'suvchi) bo'lsin:  $\forall x_1, x_2 \in (a, b), x_1 < x_2$  da

$$f'(x_1) \leq f'(x_2) \quad (f'(x_1) < f'(x_2)).$$

Lagranj teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = f'(c_1), \quad x_1 < c_1 < x;$$

$$\frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} = f'(c_2), \quad x < c_2 < x_2.$$

Ravshanki,  $x_1 < c_1 < x < c_2 < x_2 \Rightarrow c_1 < c_2$ . Demak,  $f'(c_1) \leq f'(c_2)$  ( $f'(c_1) < f'(c_2)$ ) bo'lib, yuqoridagi munosabatlardan

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \quad \left( \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} < \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x} \right)$$

bo'lishi kelib chiqadi. Bu esa  $f(x)$  funksiyaning  $(a, b)$  da botiq (qat'iy botiq) ekanini bildiradi. ►

Xuddi shunga o'xshash, quyidagi teorema ham isbotlanadi.

**2-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib, unda  $f'(x)$  hosilaga ega bo'lsin.

$f(x)$  funksiyaning  $(a, b)$  da qavariq (qat'iy qavariq) bo'lishi uchun  $f'(x)$  ning  $(a, b)$  da kamayuvchi (qat'iy kamayuvchi) bo'lishi zarur va etarli.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib, u shu intervalda  $f''(x)$  hosilaga ega bo'lsin. Bundan tashqari  $(a, b)$  intervalning har qanday  $(\alpha, \beta)$  ( $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ ) qismida  $f''(x)$  aynan nolga teng bo'lmasin.

**3-teorema.**  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  intervalda botiq (qavariq) bo'lishi uchun  $(a, b)$  da

$$f''(x) \geq 0 \quad (f''(x) \leq 0)$$

bo'lishi zarur va etarli.

Bu teoremaning isboti yuqoridagi hamda funksiyaning monotonligi haqidagi teoremlardan kelib chiqadi.

**2-misol.** Ushbu

$$f(x) = \ln x \quad (x > 0)$$

funksiya qavariq bo'ladi.

◀ Bu funksiya uchun

$$f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$$

bo'ladi. 2-teoremaga ko'ra berilgan  $f(x) = \ln x$  funksiya  $(0, +\infty)$  da qat'iy qavariq bo'ladi. ►

**[1] 6.9 Convexity and inflection points, 189-bet)2<sup>0</sup>. Funksiyaning egilish nuqtalari.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0 \in X$ ,  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset X$ ,  $\delta > 0$  bo'lsin.

**5-ta'rif.** Agar  $f(x)$  funksiya  $(x_0 - \delta, x_0)$  da botiq (qavariq),  $(x_0, x_0 + \delta)$  da qavariq (botiq) bo'lsa,  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning **egilish nuqtasi** deyiladi.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$  da  $f''(x)$  hosilaga ega bo'lsin. Agar  $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$  da  $f''(x) \geq 0$  ( $f''(x) \leq 0$ ),

$$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta) \text{ da } f''(x) \leq 0 \quad (f''(x) \geq 0),$$

bo'lsa,  $f'(x)$  funksiya  $x_0$  nuqtada ekstremumga erishadi va demak,  $f''(x_0) = 0$  bo'ladi. Demak,  $f(x)$  funksiya egilish nuqtasi-da  $f''(x) = 0$  bo'ladi.

**3-misol.** Ushbu

$$f(x) = x^3$$

funksiya  $x_0 = 0$  nuqtada egiladi.

◀ Bu funksiya uchun

$$f''(x) = 6x$$

bo'lib,

$$\forall x \in (-\delta, 0) \text{ da } f''(x) < 0$$

$$\forall x \in (0, \delta) \text{ da } f''(x) > 0 \quad (\delta > 0)$$

bo'ladi. ►

**[1, 5.3 Asymptotes, 135-bet) 3<sup>0</sup>. Funksiya grafigining asimptotalari.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  funksiya  $X \subset R$  to'plamda berilgan bo'lib,  $x_0$  nuqta  $X$  to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

**6-ta'rif.** Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi xam cheksiz bo'lsa,  $x = x_0$  to'g'ri chiziq  $f(x)$  funksiya grafigining vertikal asimp-totasi deyiladi.

Masalan,  $f(x) = \frac{1}{x}$  funksiya grafigi uchun  $x = 0$  to'g'ri chiziq vertikal

asimptota bo'radi.

Aytaylik,  $f(x)$  funksiya  $(x_0, +\infty)$  da aniqlangan bo'lsin.

**7-ta'rif.** Agar shunday  $k$  va  $b$  sonlari topilsaki,

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad (x \rightarrow +\infty \text{ da } \alpha(x) \rightarrow 0)$$

bo'lsa,  $y = kx + b$  to'g'ri chiziq  $f(x)$  funksiya grafigining og'ma asimptotasi deyiladi.

**4-teorema.**  $f(x)$  funksiya grafigi  $y = kx + b$  og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$$

bo'lishi zarur va etarli.

◀ **Zarurligi.**  $y = kx + b$  to'g'ri chiziq  $f(x)$  funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'lsin. Unda

$$f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

bo'lib,  $x \rightarrow +\infty$  da  $\alpha(x) \rightarrow 0$  bo'ladi. Bu tenglikni e'tiborga olib topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{kx + b + \alpha x}{x} = k;$$
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (b + \alpha(x)) = b.$$

**Etarliligi.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = k, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = b$$

munosabatlar o'rinli bo'lsin. Bu munosabatlardan

$$(f(x) - kx) - b = \alpha(x) \rightarrow 0 \Rightarrow f(x) = kx + b + \alpha(x)$$

bo'lishi kelib chiqadi. ▶

**4-misol.**  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$  funksiyaning og'ma asimptotasi topilsin.

◀ Bu funksiya uchun

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1;$$
$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{x^3}{(x-1)^2} - x \right) = 2$$

bo'ladi. Demak,  $y = x + 2$  to'g'ri chiziq berilgan funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi. ▶

## Mashqlar

### 1. Ushbu

$$f(x) = \frac{|x-1|}{x\sqrt{x}}$$

funksiyaning botiq hamda qavariq bo'ladigan oraliqlari topilsin.

2. Ushbu

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$$

funksiya grafigining og'ma asimptotasi topilsin.

3. Ushbu

a)  $f(x) = x^2 \sqrt[3]{e}$ ,

b)  $f(x) = x + 2\text{arcctg}x$ ,

В)  $f(x) = |e^x - 1|$  funksiyalarni hosilalar yordamida to'liq tekshirilsin, grafiglari chizilsin.

### Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A.** - Mathematical Analysis I, **Italy 2008.**
2. **Tao T.** *Analysis 1.* Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma'rizalar, I q.* T. "Vorish-nashriyot", 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.



# Glossariy

**1-ta'rif.** Agar har qanday oraliq  $(x_1, x_2) \subset (a, b)$  da joylashgan  $\forall x \in (x_1, x_2)$  uchun

$$f(x) \leq l(x) \quad (f(x) < l(x))$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da **botiq (qat'iy botiq) funksiya** deyiladi.

**2-ta'rif.** Agar har qanday oraliq  $(x_1, x_2) \subset (a, b)$  da joylashgan  $\forall x \in (x_1, x_2)$  uchun

$$f(x) \geq l(x) \quad (f(x) > l(x))$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da **qavariq (qat'iy qavariq) funksiya** deyiladi.

**3-ta'rif.** Agar

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \\ (f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) < \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2))$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da **botiq (qat'iy botiq)** deyiladi.

**4-ta'rif.** Agar

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f_1(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \\ (f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) > \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2))$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da **qavariq (qat'iy qavariq)** deyiladi.

**5-ta'rif.** Agar  $f(x)$  funksiya  $(x_0 - \delta, x_0)$  da botiq (qavariq),  $(x_0, x_0 + \delta)$  da qavariq (botiq) bo'lsa,  $x_0$  nuqta  $f(x)$  funksiyaning **egilish nuqtasi** deyiladi.

**6-ta'rif.** Agar ushbu

$$\lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x), \quad \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x)$$

limitlardan biri yoki ikkalasi xam cheksiz bo'lsa,  $x = x_0$  to'g'ri chiziq  $f(x)$  funksiya grafigining **vertikal asimptotasi** deyiladi.

**7-ta'rif.** Agar shunday  $k$  va  $b$  sonlari topilsaki,

$$f(x) = kx + b + \alpha(x) \quad (x \rightarrow +\infty \text{ da } \alpha(x) \rightarrow 0)$$

bo'lsa,  $y = kx + b$  to'g'ri chiziq  $f(x)$  funksiya grafigining **og'ma asimptotasi** deyiladi.

# Keys banki

**26-keys.** Masala o`rtaga tashlanadi: Ushbu

г)  $f(x) = x^2 \sqrt{x} e$ ,

д)  $f(x) = x + 2\text{arcctg}x$ ,

е)  $f(x) = |e^x - 1|$  funksiyalarni hosilalar yordamida to`liq tekshirilsin, grafiklari chizilsin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma`lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

## 26-amaliy mashg`ulot

1 – misol. Ushbu

$$f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$$

*funksiyaning qavariqligi, botiqligini aniqlab egilish nuqtasi topilsin.*

◀ Berilgan funksiyaning hosilalarini hisoblaymiz:

$$f'(x) = 15x^4 - 20x^3,$$

$$f''(x) = 60x^3 - 60x^2 = 60x^2(x - 1)$$

Ravshanki,  $x_1 = 0$  da  $f''(0) = 0$ ,  $x_2 = 1$  da  $f''(1) = 0$  bo'ladi. Bu nuqtalar atrofida  $f''(x)$  ning ishorasini aniqlaymiz;

$$(-\delta, 0) \text{ da } f''(x) < 0, \quad (0, \delta) \text{ da } f''(x) < 0, \quad (\delta > 0)$$

$$(1 - \delta, 1) \text{ da } f''(x) < 0, \quad (1, 1 + \delta) \text{ da } f''(x) > 0.$$

Demak,  $(-\infty, 1)$  da  $f''(x) < 0$  bo'lib, shu oraliqda funksiya qavariq bo'ladi;  $(1, +\infty)$  da  $f''(x) > 0$  bo'lib, shu oraliqda funksiya botiq bo'ladi.  $x = 1$  nuqta egilish nuqtasi bo'ladi. (6-chizma). ▶

9 – misol. Ushbu  $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$  funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.

◀ Bu funksiyaning hosilalarini hisoblaymiz:

$$f'(x) = \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}}, \quad f''(x) = \frac{10}{9} \cdot x^{-\frac{1}{3}} = \frac{10}{9 \cdot \sqrt[3]{x}}$$

Ravshanki  $x = 0$  nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud emas. Bu nuqta atrofida  $f''(x)$  ning ishorasini aniqlaymiz:

$x < 0$  bo'lganda  $f''(x) < 0$ ,  $x > 0$  bo'lganda  $f''(x) > 0$  bo'lgani sababli berilgan funksiya  $(-\infty, 0)$  da qavariq,  $(0, +\infty)$  da botiq bo'lib  $x = 0$  egilish nuqtasi bo'ladi. ▶

10 – misol. Ushbu

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$$

*funksiya grafigining asmpotalari topilsin.*

◀ Ravshanki,  $x \rightarrow 3$  da  $f(x) \rightarrow \infty$ . Demak  $x = 3$  to'g'ri chiziq funksiya grafigining vertikal asimptotasi bo'ladi. Endi quyidagi

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - kx]$$

limitlarni hisoblaymiz.

$$k = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 6x + 3}{x(x-3)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{3}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 - 6x + 3}{x-3} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 - 3x}{x-3} = -3$$

Demak,  $y = x - 3$  to'g'ri chiziq berilgan funksiya grafigining og'ma asimptotasi bo'ladi. (7-chizma). ►

**Quyidagi funksiyalarning qavariq va botiq bo'lish oraliqlari topilsin.**

1389.  $y = x^3 - 4x$

1390.  $y = \frac{1}{x^2}$

1391.  $y = 3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 12$

1392.  $y = \frac{a^3}{a^2 + x^2} \quad (a > 0)$

1393.  $y = \frac{1}{(x+1)^3}$

1394.  $y = x + 2 - \sqrt[3]{x^5}$

1395.  $y = \arcsin \frac{1}{x}$

1396.  $y = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$

1397.  $y = \sqrt{1+x^2}$

1398.  $y = e^{-x^2}$

1399.  $y = x + \sin x$

1400.  $y = \ln(1+x^3)$

1401.  $y = \frac{|x-1|}{x \cdot \sqrt{x}}$

1402.  $y = 4 \cdot \sqrt{(x-1)^5} + 20\sqrt{(x-1)^3}$

1403.  $y = 1 - |x^2 - 2|$

1404.  $y = (1+x^2)e^x$

1405. Ushbu  $y = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2} \cdot x^2 + 1$  funksiya  $a$  ning qanday qiymatida  $(-\infty, +\infty)$  da botiq bo'ladi.

1406. Ushbu  $y = x^n$  funksiya  $n > 1$  bo'lganda  $(0, +\infty)$  oraliqda qavariq,  $0 < n < 1$  bo'lganda  $(0, +\infty)$  da botiq bo'lishi ko'rsatilsin.

1407. Agar  $[a, b]$  segmentda  $f''(x) \geq 0$  bo'lsa, ixtiyoriy  $x_1, x_2 \in [a, b]$  lar uchun

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

bo'lishi isbotlansin.

$f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da berilgan bo'lib,  $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$  va  $\alpha_1 \geq 0, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1$  uchun

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da botiq,

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

bo'lsa,  $f(x)$  funksiya  $(a, b)$  da qavariq deyiladi.

1408. Ushbu

$$e^{\frac{x+y}{2}} \leq \frac{e^x + e^y}{2} \quad (x, y \in (-\infty, +\infty))$$

tengsizlik isbotlansin.

Quyidagi funksiya grafigining egilish nuqtalari topilsin.

1409.  $y = 3x^5 - 5x^4 + 4$

1410.  $y = \cos x$

1411.  $y = 1 + x^2 - \frac{x^4}{2}$

1412.  $y = e^{\frac{1}{x}}$

1413.  $y = 1 - \ln(x^2 - 4)$

1414.  $y = \arctg \frac{1}{x}$

1415.  $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1416.  $y = \frac{|x-1|}{x^2}$

1417.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1418.  $y = 2x^2 + \ln x$

1419.  $y = \frac{x^4}{(1+x)^3}$

1420.  $y = \sqrt{1-x^3}$

Quyidagi funksiyalarni qavariqlikka, botiqlikka tekshirilsin, egilish nuqtalari topilsin.

1421.  $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 9$

1422.  $y = \frac{1}{x^2 - 4}$

1423.  $y = (x+1)^4 + e^x$

1424.  $y = \arctg x - x$

1425.  $y = \sqrt[3]{4x^3 - 12x}$

1426.  $y = 2 - |x^5 - 1|$

1427.  $y = x + x^{\frac{5}{3}}$

1428.  $y = e^{\sin x} \left( -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right)$

Quyidagi funksiyalarning egilish nuqtalari topilsin.

1429.  $y = x^5 - 10x^2 + 3$

1430.  $y = e^{\arctg x}$

1431.  $y = 4x^2 + \frac{1}{x}$

1432.  $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1433.  $a$  va  $b$  qanday qiymatlarida  $y = ax^3 + bx^2$  funksiyaning egilish nuqtasi  $x = 1$  bo'ladi?

1434. Ushbu  $y = x^3 + x^4 \sin \frac{\pi}{x}$  funksiyaning egilish nuqtasi  $x = 0$  bo'lishi isbotlansin.

1435. Ushbu  $y = x \sin x$  funksiyaning egilish nuqtasi quyidagi

$$y^2(4 + x^2) = 4x^2$$

tenglikni qanoatlantirishi ko'rsatilsin.

1436.  $h$  ning qanday qiymatlarida  $x = \pm \sigma$  nuqta

$$y = \frac{h}{\sqrt{\pi}} \cdot e^{-h^2 \cdot x^2} \quad (h > 0)$$

funksiyaning egilish nuqtasi bo'ladi?

Quyidagi funksiyalarning egilish nuqtalari topilsin.

1437.  $y = \sin^4 x + \cos^4 x$

1438.  $y = |e^x - 1|$

Quyidagi funksiya grafiklarining asimptotalari topilsin.

1439.  $y = \frac{2x^2 + x - 2}{x - 1}$

1440.  $y = \frac{1}{x^2 - 4x + 3}$

1441.  $y = \frac{x^5}{x^4 - 1}$

1442.  $y = \frac{\sqrt{1 + x^2}}{x}$

1443.  $y = 2x - \frac{\cos x}{x}$

1445.  $y = 4x + \operatorname{arctg} \frac{x}{4}$

1446.  $y = \sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}$

1447.  $y = \frac{x^2}{|x| + 1}$

1448.  $y = x \cdot \operatorname{arctg} x$

1449.  $y = \sqrt{x^2 - 1} - x$

1450.  $y = 1 + x \cdot e^{\frac{x}{2}}$

1451.  $y = |e^x - 1|$

1452.  $y = x + \frac{\ln x}{x}$

1453.  $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$

1454.  $y = x \sin \frac{1}{x}$

1455.  $y = x^2 \ln x$

1456.  $y = \ln(1 + e^{-x})$

1457.  $y = \frac{1}{\sin x + \cos x}$

1458.  $y = \ln \operatorname{sh} x$

1459.  $y = \ln x - \operatorname{arctg} x$



# Test

- Ushbu  $f(x) = \sqrt[3]{x^5}$  funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.  
A)  $x=0$  B)  $x=2$  C)  $x=1$  D)  $x=3$
- Ushbu  $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 3}{x - 3}$  funksiya grafigining asmtotalari topilsin.  
A)  $y = x - 3$  B)  $y = -x + 3$  C)  $y = x + 2$  D)  $y = x - 2$
- Ushbu  $f(x) = \frac{x^3}{(x-1)^2}$  funksiyaning og'ma asimptotasi topilsin.  
A)  $y = x + 2$  B)  $y = -x - 2$  C)  $y = x - 2$  D)  $y = x + 1$
- Ushbu  $f(x) = x^3$  funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.  
A)  $x=0$  B)  $x=1$  C)  $x=-1$  D)  $x=2$
- Ushbu  $f(x) = 3x^5 - 5x^4 + 4$  funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.  
A)  $x=1$  B)  $x=2$  C)  $x=-1$  D)  $x=0$
- Ushbu  $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$  funksiyaning og'ma asimptotasi topilsin.  
A)  $x=0$  B)  $x=2$  C)  $x=1$  D)  $x=3$
- Ushbu  $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$  funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.  
A)  $x=0$  B)  $x=1$  C)  $x=-1$  D)  $x=2$
- Ushbu  $f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$  funksiya grafigining egilish nuqtasi topilsin.  
A)  $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$  B)  $x = \frac{\sqrt[3]{2}}{2}$  C)  $x = -\frac{\sqrt[3]{3}}{2}$  D)  $x = -\frac{\sqrt[3]{2}}{3}$
- Ushbu  $f(x) = \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2}$  funksiyaning og'ma asimptotasi topilsin.  
A) Asimptotaga ega emas. B)  $x=1$  C)  $x=-1$  D)  $x=0$
- Ushbu  $f(x) = \ln x$  ( $x > 0$ ) funksiya qavariq yoki botiqmi.  
A) qavariq B) botiq C) qavariq emas D) botiq emas



# 27-mavzu. Lopital qoidalari

## 27-ma'ruza

### Reja

1<sup>o</sup>.  $\frac{0}{0}$  va  $\frac{\infty}{\infty}$  ko'rinishidagi hollar.

2<sup>o</sup>.  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  ko'rinishidagi hollar.

([1], 6.11 The Theorem of de L'Hopital, 197-bet) Ma'lum shartlarda funksiya limitini hisoblash qoidalari o'rganilgan edi. Ko'p hollarda bunday shartlar bajarilmaganda, ya'ni

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $g(x) \rightarrow 0$ :  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ning limiti  $\left(\frac{0}{0}\right)$ ,

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ :  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ning limiti  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ,

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ :  $f(x) - g(x)$  ning limiti  $(\infty - \infty)$ ,

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $g(x) \rightarrow 0$ :  $(f(x))^{g(x)}$  ning limiti  $(0^0)$ ,

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow 1$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ :  $(f(x))^{g(x)}$  ning limiti  $(1^\infty)$

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow \infty$ ,  $g(x) \rightarrow 0$ :  $f(x)g(x)$  ni limiti  $\infty^0$  ni topishda funksiyaning hosilalariga asoslangan qoidaga ko'ra hisoblash qulay bo'ladi. Bunday usul bilan funksiya limitini topish **Lopital qoidalari** deyiladi.

1<sup>o</sup>.  $\frac{0}{0}$  va  $\frac{\infty}{\infty}$  ko'rinishidagi hollar.

**1-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

1)  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = 0$ ;

2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$  va  $g'(x)$  hosilalar mavjud;

3)  $\forall x \in (a, b)$  da  $g'(x) \neq 0$ ;

4) Ushbu  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , ( $\ell \in \mathbb{R}$ ) mavjud. U holda  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

bo'ladi.

◀  $f(b) = 0$ ,  $g(b) = 0$  deb olamiz. Unda  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $(b - \delta, b]$  da ( $\delta > 0$ ) uzluksiz bo'lib qoladi. Teoremaning 4-shartiga ko'ra:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in (b - \delta, b): \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - \ell \right| < \varepsilon$$

bo'ladi.

Endi  $(b - \delta, b]$  da Koshi teoremasidan foydalanib topamiz:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f(b) - f(x)}{g(b) - g(x)} - \ell \right| = \left| \frac{f'(c)}{g'(c)} - \ell \right| < \varepsilon$$

$$(c \in (x, b) \subset [b - \delta, b]).$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

SHuni isbotlash talab qilingan edi. ►

**1-misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln x)^\alpha - \left(\frac{x}{e}\right)^\beta}{x - e} = \frac{\alpha - \beta}{e}$$

munosabat isbotlansin.

◀  $f(x) = (\ln x)^\alpha - \left(\frac{x}{e}\right)^\beta$ ,  $g(x) = x - e$  funksiyalari uchun  $(1, e)$  da 1-

teoremaning barcha shartlari bajariladi:

$$1) \lim_{x \rightarrow e} f(x) = \lim_{x \rightarrow e} \left[ (\ln x)^\alpha - \left(\frac{x}{e}\right)^\beta \right] = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow e} g(x) = \lim_{x \rightarrow e} (x - e) = 0;$$

$$2) f'(x) = \alpha (\ln x)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x} - \frac{\beta}{e} \left(\frac{x}{e}\right)^{\beta-1}, \quad g'(x) = 1;$$

$$3) g'(x) = 1 \neq 0;$$

$$4) \lim_{x \rightarrow e} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{\alpha (\ln x)^{\alpha-1} \cdot \frac{1}{x} - \frac{\beta}{e} \cdot \left(\frac{x}{e}\right)^{\beta-1}}{1} = \frac{\alpha - \beta}{e}.$$

Demak,

$$\lim_{x \rightarrow e} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow e} \frac{(\ln x)^\alpha - \left(\frac{x}{e}\right)^\beta}{x - e} = \frac{\alpha - \beta}{e}. \blacktriangleright$$

**([1], 6.11 The Theorem of de L'Hopital, 198-bet) 2-teorema.** Aytaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $(a, +\infty)$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

$$1) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0;$$

- 2)  $\forall x \in (a, +\infty)$  da  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  hosilalar mavjud;  
 3)  $\forall x \in (a, +\infty)$  da  $g'(x) \neq 0$ ;  
 4) Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$$

mavjud ( $\ell \in \mathbb{R}$ ). U holda

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

bo'ladi.

◀  $a > 0$  deb,  $t = \frac{1}{x}$  deymiz. Unda  $t \in (0, \frac{1}{a})$  bo'lib,  $x \rightarrow +\infty$  da  $t \rightarrow +0$ .

Endi  $F(t)$  va  $G(t)$  funksiyalarni quyidagicha

$$F(t) = f\left(\frac{1}{t}\right), \quad G(t) = g\left(\frac{1}{t}\right)$$

aniqlaymiz. Unda

$$t \rightarrow +0 \text{ da } F(t) \rightarrow 0, \quad G(t) \rightarrow 0;$$

$$F'(t) = f'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right), \quad G'(t) = g'\left(\frac{1}{t}\right) \cdot \left(-\frac{1}{t^2}\right);$$

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'\left(\frac{1}{t}\right)}{g'\left(\frac{1}{t}\right)} \rightarrow \ell, \quad (t \rightarrow +0)$$

bo'lib, 1-teoremaga ko'ra,  $t \rightarrow +0$  da

$$\frac{F(t)}{G(t)} \rightarrow \ell$$

bo'ladi. Keyingi munosabatdan esa

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

bo'lishi kelib chiqadi ►

**2-misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2\arctg x^2 - \pi}$$

limitni hisoblang.

◀ Agar  $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} - 1$ ,  $g(x) = 2\arctg x^2 - \pi$  deyilsa, ular uchun 2-teoremaning barcha shartlari bajariladi, jumladan

$$f'(x) = -\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}, \quad g'(x) = \frac{4x}{1+x^4}$$

bo'lib,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{2}{x^3} e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{4x}{1+x^4}} = - \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+x^4}{2x^4} = -\frac{1}{2}$$

bo'ladi. 2-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2}} - 1}{2 \arctg x^2 - \pi} = -\frac{1}{2}$$

bo'ladi. ►

Quyidagi teoremlar ham yuqorida keltirilgan teoremlarga o'xshash isbotlanadi.

**([1], 6.11 The Theorem of de L'Hopital, 198-bet) 3-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $(a, b)$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow b-0} g(x) = \infty$ ;
- 2)  $\forall x \in (a, b)$  da  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  hosilalar mavjud;
- 3)  $\forall x \in (a, b)$  da  $g'(x) \neq 0$ ;
- 4) Ushbu  $\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , ( $\ell \in R$ ) mavjud. U holda

$$\lim_{x \rightarrow b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$$

bo'ladi.

**4-teorema.** Faraz qilaylik,  $f(x)$  va  $g(x)$  funksiyalar  $(a, +\infty)$  da berilgan bo'lib, quyidagi shartlarni bajarsin:

- 1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \infty$ ;
- 2)  $\forall x \in (a, +\infty)$  da  $f'(x)$ ,  $g'(x)$  hosilalar mavjud;
- 3)  $\forall x \in (a, +\infty)$  da  $g'(x) \neq 0$ ;
- 4) Ushbu  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ell$ , ( $\ell \in R$ ) mavjud. U holda  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell$

bo'ladi.

**([1], 6.11.1 Applications of de L'Hopital's theorem, 199-bet) 2<sup>o</sup>.**  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $1^\infty$ ,  $0^0$  ko'rinishdagi hollar. Bu ko'rinishdagi aniqmasliklar

$\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$  hollarga keltirilib, so'ng yuqoridagi teoremlar qo'llaniladi.

1)  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $g(x) \rightarrow \infty$  bo'lganda  $f(x) \cdot g(x)$  funksiyaning limitini topish uchun uni

$$f(x) \cdot g(x) = \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} = \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

deb, so'ng 1- yoki 2-teoremlar qo'llaniladi.

2)  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$  bo'lganda  $f(x) - g(x)$  funksiyaning limitini topish uchun uni

$$f(x) - g(x) = \frac{\frac{1}{\frac{1}{f(x)}} - \frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}{\frac{1}{f(x)} \cdot \frac{1}{g(x)}}$$

deb, so'ng 1-teorema qo'llaniladi.

3)  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $g(x) \rightarrow 0$  hamda  $x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow 1$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$  bo'lganda  $(f(x))^{g(x)}$  funksiyaning limitini topish uchun avvalo

$$y = (f(x))^{g(x)}$$

funksiya logarifmlanadi, so'ng yuqoridagi teoremlar qo'llaniladi.

**3-misol.** Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

limit hisoblansin.

◀ Avvalo  $y = \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$  deb olamiz. Ravshanki,  $x \rightarrow 0$  da

$$f(x) = \frac{\sin x}{x} \rightarrow 1, \quad g(x) = \frac{1}{x^2} \rightarrow +\infty.$$

Sodda hisoblashlar yordamida topamiz:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \ln y &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \frac{\sin x}{x}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left( \ln \frac{\sin x}{x} \right)'}{(x^2)'} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}}{2x} = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cos x - \sin x)'}{(x^3)'} = \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{3x^2} = -\frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Demak,  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-\frac{1}{6}}$  ►

### Mashqlar

1. Ixtiyoriy  $\alpha \in R$  da ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{4}{\pi} \arctg x\right)^\alpha - 1}{\ln x} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

tenglikning o‘rinli bo‘lishi isbotlansin.

2. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \frac{\pi}{2} - \arctg x \right)$$

limit hisoblansin.

### Adabiyotlar

1. **Canuto C., Tabacco A.** - Mathematical Analysis I, Italy 2008.
2. **Tao T.** *Analysis I*. Hindustan Book Agency, India, 2014.
3. **Xudoyberganov G., Vorisov A. K., Mansurov X. T., Shoimqulov B. A.** *Matematik analizdan ma’rizalar, I q.* T. “Vorishashriyot”, 2010.
4. **Fixtengols G. M.** *Kurs differensialnogo i integralnogo ischisleniya, 1 t.* M. «FIZMATLIT», 2001.

## Glossariy

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $g(x) \rightarrow 0$ :  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ning limiti  $\left(\frac{0}{0}\right)$ ,

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ :  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ning limiti  $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ ,

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow +\infty$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ :  $f(x) - g(x)$  ning limiti  $(\infty - \infty)$ ,

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow 0$ ,  $g(x) \rightarrow 0$ :  $(f(x))^{g(x)}$  ning limiti  $(0^0)$ ,

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow 1$ ,  $g(x) \rightarrow +\infty$ :  $(f(x))^{g(x)}$  ning limiti  $(1^\infty)$

$x \rightarrow x_0$  da  $f(x) \rightarrow \infty$ ,  $g(x) \rightarrow 0$ :  $f(x) g(x)$  ni limiti  $\infty^0$  ni topishda funksiyaning hosilalariga asoslangan qoidaga ko'ra hisoblash qulay bo'ladi. Bunday usul bilan funksiya limitini topish **Lopital qoidalari** deyiladi.

## Keys banki

**27-keys.** Masala o'rtaga tashlanadi: Ixtiyoriy  $\alpha \in \mathbb{R}$  da ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\left(\frac{4}{\pi} \arctg x\right)^\alpha - 1}{\ln x} = \frac{2\alpha}{\pi}$$

tenglikning o'rinli bo'lishi isbotlansin.

**Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:**

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo'lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to'plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo'yilgan masalani yeching (individual).

## 27-amaliy mashg`ulot

1 – misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$$

limit hisoblansin.

◀ Bu xolda  $\frac{0}{0}$  ko‘rinishidagi aniqmaslikka ega bo‘lamiz. Lopital qoidalaridan foydalanib topamiz.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \operatorname{arctg} x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x - \operatorname{arctg} x)'}{(x^3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{1+x^2}}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{3(1+x^2)} = \frac{1}{3} \blacktriangleright$$

2 – misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x}$$

limit hisoblansin.

◀ Bu holda  $\frac{\infty}{\infty}$  ko‘rinishidagi aniqmaslikka ega bo‘lgan Lopital qoidasidan foydalanib topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\operatorname{ctg} x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\ln x)'}{(\operatorname{ctg} x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x} = 0 \blacktriangleright$$

3 – misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

limit hisoblansin.

◀ Bu xolda  $\infty - \infty$  ko‘rinishidagi aniqmaslik yuzaga keladi. Agar  $\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} = \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \cdot \ln x}$  deyilsa,  $\frac{0}{0}$  ko‘rinishidagi aniqmaslik hosil bo‘lib limitni Lopital qoidasiga ko‘ra topamiz:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \ln x - x + 1}{(x-1) \ln x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x \ln x - x + 1)'}{((x-1) \ln x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x - 1}{\ln x + \frac{1}{x}(x-1)} =$$



$$= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\ln x}{\ln x - \frac{1}{x} + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(-\ln x)'}{\left(\ln x - \frac{1}{x} + 1\right)'}, = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2} \blacktriangleright$$

4 – misol. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

limit hisoblansin.

◀  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  da  $(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$  ifoda  $1^\infty$  ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi. Avvalo

$$y = (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$$

ni logarifmlab topamiz:

$$\ln y = \ln(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \frac{\ln \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} 2x)^{-1}}.$$

Bu  $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$  da  $\frac{0}{0}$  ko‘rinishdagi aniqmaslik bo‘ladi. Unda Lopital qoidasidan foydalanib

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\ln \operatorname{tg} x}{(\operatorname{tg} 2x)^{-1}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(\ln \operatorname{tg} x)'}{\left[(\operatorname{tg} 2x)^{-1}\right]'} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{1}{\operatorname{tg} x} \cdot \frac{1}{\cos^2 x}}{\frac{2 \cdot (\operatorname{tg} 2x)^2}{\cos^2 2x}} = -\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \sin 2x = -1$$

bo‘lishini topamiz. Demak,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = -1$  bo‘lib,  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x} = \frac{1}{e}$

bo‘ladi. ▶

Quyidagi limitlar hisoblansin:

$$1500. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$$

$$1501. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$$

$$1502. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\operatorname{tg} x}$$

$$1503. \lim_{x \rightarrow a} \frac{e^x - e^a}{x - a}$$

$$1504. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$$

$$1505. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{\sin x}$$

$$1506. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x - x}{x - \sin x}$$

$$1507. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\ln(1+x)}$$

$$1508. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cdot \cos x}{\sin^3 x}$$

$$1510. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$$

$$1512. \lim_{x \rightarrow \infty} x^n \sin \frac{a}{x} \quad (n > 0)$$

$$1514. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x^2)}{\cos 3x - e^{-x}}$$

$$1516. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \ln x}{x}$$

$$1518. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x) - x}{\operatorname{tg}^2 x}$$

$$1520. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\sin ax)}{\ln(\sin bx)}$$

$$1522. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2x - x^4} - \sqrt[3]{x}}{1 - \sqrt[4]{x^3}}$$

$$1524. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctg 2x}{\arcsin 5x}$$

$$1526. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin x} - e^x}{\sin x - x}$$

$$1528. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x)^{\frac{1}{x}}$$

$$1530. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\pi x - 1}{2x^2} + \frac{\pi}{x(e^{2\pi x} - 1)} \right]$$

$$1532. \lim_{x \rightarrow +0} \left( \frac{1}{x} \right)^{\operatorname{tg} x}$$

$$1534. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$1536. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln(e^x - 1)}}$$

$$1538. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{1}{\ln \operatorname{sh} x}}$$

$$1509. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$$

$$1511. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{10x}}{x^{100}}$$

$$1513. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e - (1 + x)^{\frac{1}{x}}}{x}$$

$$1515. \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$$

$$1517. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\arcsin(2 - x)}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}$$

$$1519. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^a - a^x}{x^a - a^a} \quad (a > 0)$$

$$1521. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(\sin x) - \sin^2 x}{x^6}$$

$$1523. \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt[3]{\operatorname{tg} x} - 1}{2 \sin^2 x - 1}$$

$$1525. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(a + x)^x - a^x}{x^2} \quad (a > 0)$$

$$1527. \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \sin(2x - 1) \cdot \operatorname{tg} \pi x$$

$$1529. \lim_{x \rightarrow +0} x^{\frac{6}{1 + 2 \ln x}}$$

$$1531. \lim_{x \rightarrow +0} (x^x - 1) \ln x$$

$$1533. \lim_{x \rightarrow a} \left( 2 - \frac{x}{a} \right)^{\operatorname{tg} \frac{\pi x}{2a}}$$

$$1535. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-0,01x}$$

$$1537. \lim_{x \rightarrow +0} (\arcsin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$1539. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$1540. \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{e} \right]^{\frac{1}{x}}$$

$$1541. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^n}$$

$$1542. \lim_{x \rightarrow a} \left( \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{tga}} \right)^{\operatorname{ctg}(x-a)}$$

$$1543. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\frac{1}{\ln x}}$$

$$1544. \lim_{x \rightarrow 0} (\operatorname{ctg} x)^{\sin x}$$

$$1545. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{2}{\pi} \cdot \arccos x \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$1546. \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x} - \frac{1}{\arcsin x} \right)$$

$$1547. \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x^{\frac{7}{3}} - x^{\frac{6}{7}} \cdot \ln^2 x \right)$$

$$1548. \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln \left( \frac{2}{\pi} \operatorname{arg} \operatorname{tg} x \right)$$

$$1549. \lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha \cdot a^x \quad (\alpha > 0, a \neq 1)$$

$$1550. \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 3^x)^{\frac{1}{x}}$$

$$1551. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\ln x}}{(\ln x)^x}$$

1552. Agar  $f(x)$  funksiya ikkinchi tartibli  $f''(x)$  hosilaga ega bo'lsa, u holda ushbu

$$f''(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x-h) - 2f(x)}{h^2}$$

tenglik o'rinli bo'lishi isbotlansin.

1553. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x - \sin x}$$

limit hisoblashda Lopital qoidasidan foydalanish mumkinmi? Limit hisoblansin.

1554. Ushbu

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x}$$

limit hisoblashda Lopital qoidasidan foydalanish mumkinmi? Limit hisoblansin.

Quyidagi limitlar Lopital qoidasi bo'yicha hisoblanmasligi ko'rsatilsin. Limitlar topilsin.

$$1555. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin x}$$

$$1556. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 \cdot \sin \frac{1}{x}}{\sin^2 x}$$

$$1557. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \cos x}{x - \cos x}$$

$$1558. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}$$

$$1559. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - \sin x}{x + \cos x}$$

$$1560. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^{-ax}}{e^{-x}(2 - \sin x - \cos x)} \quad (a \neq 1)$$

## Test

1. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \arctg x}{x^3}$  limit hisoblansin.  
A)  $\frac{1}{3}$  B) 2 C) 5 D) 3
2. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\ctg x}$  limit hisoblansin.  
A) 0 B) 2 C) 3 D) 1
3. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$  limit hisoblansin.  
A)  $-\frac{1}{2}$  B)  $\frac{1}{2}$  C) 24 D) 15
4. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} (\tg x)^{\tg 2x}$  limit hisoblansin.  
A) -1 B) 1 C) 2 D) -2
5. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^5 - 1}{2x^3 - x - 1}$  limit hisoblansin.  
A) 1 B) -1 C) -2 D) 2
6. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$  limit hisoblansin.  
A) 0 B) 2 C) -1 D) 1
7. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tg x - x}{x - \sin x}$  limit hisoblansin.  
A) 0 B) 1 C) -2 D) 4
8. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 3x}{\cos x}$  limit hisoblansin.  
A) -3 B) 3 C) 1 D) -1
9. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$  limit hisoblansin.  
A)  $\frac{1}{2}$  B)  $-\frac{1}{2}$  C) 1 D) 2
10. Ushbu  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + 2 \ln x}{x}$  limit hisoblansin.  
A) 1 B) -1 C) 2 D) -2