O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O’RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

Matematik analiz kafedrasi

“ODDIY DIFFERENSIAL TENGLAMALAR”

fanidan

O’QUV–USLUBIY MAJMUA

Bilim sohasi: 100 000 - Gumanitar
Ta’lim sohasi: 130 000 – Matematika
Ta’lim yo’nalishi: 5130100 - Matematika

Namangan-2021

O‘quv uslubiy majmua 2016 yil O‘zR OO‘MTV tomonidan № BD 5130100-3.04. raqami bilan 2016 yil 20 avgustagi 5- sonli buyrug‘i bilan tasdiqlangan fan dasturi asosida ishlab chiqilgan.

Tuzuvchilar: **N.Xatamov** – fizika-matematika fanlari Nomzodi
A.Mashrabboyev – fizika-matematika fanlari nomzodi

Taqrizchilar: **B.Samatov**– fizika-matematika fanlari doktori, dotsent.
Yu.Toshmirzayev – fizika-matematika fanlari nomzodi, dotsent.

O‘quv uslubiy majmua Namangan davlat universiteti Kengashininig 2021 yil "…" avgustdagi "..." - son yig‘ilishida ko‘rib chiqilgan va foydalanishga tavsiya etilgan.

MUNDARIJA

MA'RUZA №1

MAVZU: Differensial tenglama haqida tushuncha. Mashqlar
Reja:

1. Differensial tenglama xaqida tushuncha.
2. Differensial tenglamaga olib kelinadigan ba'zi masalalar.
3. Differensial tenglamalar nazariyasining asosiy tushunchalari.

Tayanch so’z va iboralar: *differensial tenglamalar, differensial tenglamaga olib kelinadigan ba'zi masalalar, oddiy differensial tenglama, xususiy xosilali differensial tenglama, differensial tenglama tartibi, differensial tenglama yechimi yoki integrali, integral egri chiziq.*

1.Tabiatda uchraydigan turli jarayonlar (avtomobil harakati, tayyorani uchishi, fizik, ximik va biologik jarayonlar va h.k.) o‘z harakat qonuniga ega. Ba'zi jarayonlar bir xil qonun bo‘yicha sodir bo‘lishi mumkin, bu hol esa ularni ishni o‘rganishni osonlashtiradi. Ammo jarayonlarni tafsiflaydigan qonunlarni to‘g‘ridan-to‘g‘ri topish har doim ham mumkin bo‘lavermaydi. Bu harakat qonunlarini tavsiflovchi no'malum funksiyalar va hosilalarini o‘zaro bog‘lovchi munosabatlar differensial tenglamalar deyiladi. Jumladan

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

birinchi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

$F(x,y,y')=0$ birinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilmagan oddiy differensial tenglama deyiladi.

$y^{(n)}=f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ - n-chi tartibli yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan oddiy differensial tenglama deyiladi.

$F(x,y,y',...,y^{(n)})=0$ - n-chi tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi.

Agar $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ yoki $F(x,y,y',...,y^{(n)})$ funksiyalar $x,y,y',...,y^{(n)}$ argumentlariga nisbatan chiziqli bo‘lsa tegishli differensial tenglama chiziqli deyiladi.

2. Differensial tenglamaga olib keladigan ba'zi masalalar.

1-masala. Massasi m bo‘lgan jism $v(0)=v_0$ boshlang‘ich tezlik bilan biror balandlikdan tashlab yuborilgan. Jism tezligining o‘zgarish qonunini toping.

Nyutonning 2-qonuniga ko‘ra

$$m\frac{dv}{dt}=F\ .$$

Bu yerda F -jismga ta'sir etayotgan kuchlar yig‘indisi.

Jismga faqat 2 ta kuch ta'sir etishi mumkin deb faraz qiliylik.

1) havoning qarshiligi: $F_1=-kv,\ k>0$

2) yerning tortish kuchi: $F_2=mg$

Shunday qilib, matematik nuqtai-nazardan

a) $F=F_2$;

b) $F=F_1$;

c) $F=F_1+F_2$ teng bo‘lishi mumkin.

a) $F=F_2\Rightarrow m\dfrac{dv}{dt}=mg\Rightarrow\dfrac{dv}{dt}=g\Rightarrow\int dv=\int gdt\Rightarrow v_1(t)=gt+C$,

$$v(0)=v_0\Rightarrow v_1(0)=C=v_0,\ C=const\ .$$

$$v_1(t)=gt+v_0$$

b) $F = F_1 \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -kv \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\frac{k}{m}\int dt \Rightarrow \ln|v| = -\frac{k}{m} + \ln C \Rightarrow v(t) = Ce^{-\frac{k}{m}t}$,

$$v(0) = v_0 \Rightarrow v(0) = C = v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-\frac{k}{m}t}.$$

c) $F = F_1 + F_2 \Rightarrow m\frac{dv}{dt} = mg - kv \Rightarrow \int \frac{dv}{g - \frac{k}{m}v} = \int dt \Rightarrow -\frac{m}{k}\int \frac{d(g - \frac{k}{m}v)}{g - \frac{k}{m}v} = t + \ln C \Rightarrow$

$$-\frac{m}{k}\ln\left|g - \frac{k}{m}v\right| = t + \ln C \Rightarrow g - \frac{k}{m}v = Ce^{-\frac{k}{m}t} \Rightarrow$$

$$-\frac{k}{m}v = Ce^{-\frac{k}{m}t} - g \Rightarrow v_2(t) = C_1 e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k},\ v(0) = v_0,\ C_1 = -\frac{m}{k}C.$$

$$v_2(0) = C_1 + \frac{mg}{k} = v_0 \Rightarrow C_1 = v_0 - \frac{mg}{k} \Rightarrow v_2(t) = (v_0 - \frac{mg}{k})e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}.$$

Endi differensial tenglamalar fanining asosiy tushuncha va ta'riflarini keltiramiz.

3. Ta'rif. *Erkli o'zgaruvchi va noma'lum funksiya hamda uning hosilalari yoki differensiallarini bog'lovchi munosabat differensial tenglama deyiladi.*

Agar differensial tenglamadagi no'malum funksiya faqat bitta erkli o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama *oddiy differensial tenglama* deyiladi.

Agar differensial tenglamadagi no'malum funksiya ikki yoki undan ortiq erkli o'zgaruvchilarga bog'liq bo'lsa, bunday differensial tenglama *xususiy xosilali differensial tenglama* deyiladi.

Ta'rif. Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibi *tenglamaning tartibi* deyiladi.

Misollar.

1) $y'' - y'\cos x - x^2 y = 0$ ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama.

2) $x(1 - y^2)dx + y(1 + x^2)dy = 0$ birinchi tartibli oddiy differensial tenglama.

3) $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$ birinchi tartibli xususiy hosilali differensial tenglama bo'ladi $(z = z(x, y))$.

Ta'rif. Differensial tenglamaning *yechimi* yoki *integrali* deb tenglamaga qo'yganda uni ayniyatga aylantiradigan har qanday differensiallanuvchi $y = \varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Ta'rif. Differensial tenglama yechimining grafigi *integral egri* chiziq deyiladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, " Ўзбекистон", 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Differentsial tenglamalarga keltiriladigan ba`zi (fizika, matematika, biologiya, iqtisodiyotga oid) masalalar.

2. Bir jinsli va umumlashgan bir jinsli differensial tenglamalar.

Glossariy

Differensial tenglama - Matematika, fizika va texnikaning ko‘pchilik masalalarini yechishda ko‘pincha izlanayotgan va berilgan o‘zgaruvchi miqdorlar orasidagi funksional bog‘lanishni birdaniga topish qiyin bo‘ladi, lekin erkli o‘zgaruvchi izlanayotgan funksiya va uning xosilalarini bog‘lovchi tenglama tuzishga muvaffaq bo‘linadi. Bunday tenglamalar differensional tenglamalar deyiladi.

Differensial tenglama tartibi - Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibi tenglamaning tartibi deyiladi.

Birinchi tartibli differensianal tenglamalar - erkli o‘zgaruvchi, izlanayotgan funksiya va uning birinchi tartibli funksiyasini o‘zaro bog‘laydi. Shuning uchun uni $F(x,y,y')=0$ ko‘rinishda yoziladi.

Differensial tenglamaning yechimi - differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan xar qanday differensiallanuvchi $y=\varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Differensianal tenglamalarni yechish – tenglamani ayniyatga aylantiradigan barcha funsiyalarni topish demakdir.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y-xy'=a(1+x^2y')$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglamalar deb nimaga aytiladi?
2. Quyidagi $y^{(n)}=f(x_1 y_1 y^1,.y^{(n-1)})$ tenglama qanday tenglama turiga kiradi?
3. Oddiy differensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
4. Xususiy xosilali differensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
5. Differensial tenglamaning yechimi yoki integrali deb nimaga aytiladi?

Amaliy mashg’ulot-1

1. Quyidagi keltirilgan masalalarni yechish uchun grafik chizib, qidirilayotgan funksiyani $y=y(x)$ deb belgilab, agar grafik dekart koordinatalarida chizilgan bo‘lsa, masala keltirilgan miqdorlarni x,y,y' deb belgilab, ular orasida bog‘lanish hosil qilish kerak. U holda masalada keltirilgan fikr diffrensial tenglamaga keltiriladi, undan qidirilayotgan funksiya $y=y(x)$ ni topish mumkin.

2. Fizik masalada birinchi bo‘lib, aniqlash kerakki, qaysi o‘zgaruvchini erkli (x) va qaysi o‘zgaruvchini qidirilayotgan funksiya (u) deb olish kerak. So‘ng erkli o‘zgaruvchi x Δx ortirma olsa, qidirilayotgan funksiya u qancha orttirma oladi:

$$y(x+\Delta x)-y(x)$$

Bu ifodani Δx ga bo‘lib va $\Delta x \to 0$ da limitga o‘tib, differensial hosil qilamiz. Ko‘pgina masalalarda shunday qo‘shimcha shartlar borki, ular orqali differensial tenglama yechimidagi o‘zgarmaslarning qiymatlarini aniqlash mumkin. Ba'zan differensial tenglama hosilasini fizik ma'nosi orqali juda oson tuzilishi ham mumkin: axir t-vaqt, $\frac{dy}{dt}-y$ miqdorning vaqt bo‘yicha o‘zgarish tezligi.

Ba'zi masalalarda, differensial tenglama tuzish uchun fizik qonunlardan foydalanish mumkin. Odatda ular masalalar oldida keltiriladi, yoki juda keng tarqalgan, hammaga tanish bo‘ladi.

Masalan, Nyutonning ikkinchi qonuni, harakat miqdorining o‘zgarishi qonuni va hakazo.

Misol 1. 10 litr suv solingan idishga 2 litr minut tezlikda aralashma kelib tushadi, aralashmaning har bir litrida 0,3 kg tuz bor. Idishga tushayotgan aralashma suv bilan aralashadi va yangi aralashma shunday tezlik bilan idishdan chiqib ketadi. Idishda 5 minutdan keyin qancha tuz bo‘ladi?

yechish: t-vaqt bo‘lsin, u(t) t- vaqt ichida idishdagi tuz miqdori bo‘lsin. (tajriba boshidan beri) vaqt t dan $t+\Delta t$ ga o‘zgarganda idishdagi tuz o‘zgarishi $y(t+\Delta t)-y(t)$ ni topaylik. 1-minutda idishga 2 litr aralashma qo‘shiladi. Bu $2\Delta t$ hajmda $0,3\cdot 2\cdot \Delta t=0,6\Delta t$ tuz bor. Ikkinchi tomondan Δt vaqtdan so‘ng idishdan $2\Delta t$ aralashma chiqib ketadi. t vaqtda (10 litr) suvda $y(t)$ kg tuz bo‘lsin. $2\Delta t$ litrli chiqib ketayotgan aralashmada $0,2\cdot \Delta t\cdot y(t)$ tuz bo‘lishi mumkin, agar bu Δt vaqt ichida idishdagi tuz miqdori o‘zgarmas. Lekin bu t vaqt ichidagi tuz miqdori $\Delta t\to 0$ da cheksiz kichik (chik) miqdorga o‘zgaradi. Shuning uchun chiqib ketayotgan $2\Delta t$ litr suyuqlikda

$$0,2t\cdot(y(t)+2) \text{ kg}$$

tuz bo‘ladi, $\alpha\to 0$, agar $\Delta t\to 0$ bo‘lsa. Shunday qilib, $(t,t+\Delta t)$ vaqt ichida idishga kirib kelayotgan suyuqlik ichida $0,6\Delta t$ tuz chiqib ketayotgan suyuqlik ichida

$0,2\cdot \Delta t(y(t)+\alpha)$ kg tuz mavjud.

Bu vaqt ichida tuz miqdorini o‘zgarishi.

$$\frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t}=0,6-0,2(y(t)+\alpha),\quad \Delta t\to 0$$

$$y'(t)=0,6=0,2y(t)$$

Chunki $\alpha\to 0,\quad \Delta t\to 0$.

Bu tenglamani yechib; $y(t)=3-ce^{-0,2t}$ funksiyani olamiz. $t=0$ tuz yo‘q edi, shuning uchun $y(0)=3-ce^{-0,2\cdot 0}=3-c=0;\quad c=3$ ya'ni, $y=3-3e^{-0,2t}$. $t=5$ minutda idishda $y(5)=3-e^{-0,2\cdot 3}=3-3e^{-1}\approx 1,9$ kg tuz qoladi.

Misol-2: O‘q $v_0=400$ m/sek tezlik bilan harakatlanib, $h=20$ sm qalinlikdagi devorni teshib, undan $v_1=100$ m/sek tezlik bilan uchib chiqadi. Devorning qarshilik kuchi o‘qning harakat tezligi kvadratiga proporsional deb olib, o‘qning devor ichida harakatlanish vaqti T ni toping:

yechish: Nyutonning ikkinchi qonuniga binoan o‘q harakatning differensial tenglamasi

$$m\frac{dv}{dt}=-kv^2 \qquad (1)$$

ko‘rinishga ega (manfiy ishora devorning qarshilik kuchi o‘qning tezligiga qarama-qarshi yo‘nalgan bo‘lgani uchun olindi).

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. O‘zgaruvchilarni ajratib va $\frac{k}{m}$ ni k_1 orqali belgilab,

$$\frac{dv}{v^2} = k_1 dt$$

ni hosil qilamiz, bu yerdan

$$-\frac{1}{v} = -k_1 t - C \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{v} = k_1 t + C.$$

$t = 0$ da $v = v_0$ boshlang‘ich shartdan S = 1 /v_0 ni aniqlaymiz; shuning uchun

$$\frac{1}{v} = k_1 t + \frac{1}{v_0} \qquad (2)$$

Agar bu munosabatda $v = v_1$ deb olsak, $t = T$ bo‘ladi va binobarin, izlanayotgan T vaqt $\frac{1}{v_1} = k_1 T + \frac{1}{v_0}$, tenglamadan topiladi, bu yerda

$$T = \frac{1}{k_1}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) \qquad (3)$$

T uchun topilgan ifodada noma'lum k_1 kattalik ishtirok etyapti. Uni aniqlash uchun (2) umumiy yechimini quyidagicha qayta yozib olamiz:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{v_0}{1 + k_1 v_0 t},$$

bu yerda v tezlik $\frac{dx}{dt}$ bilan almashtirilgan. Bu tenglamadan integrallab topamiz:

$$x = \frac{1}{k_1}\ln(1 + k_1\ v_0 t) + c_1.$$

$t = 0$ da $x = 0$ (o‘q devorga kiradi) va shuning uchun $C_1 = 0,\ t = T$ va $X = h$ (o‘q devordan chiqyapti) shuning uchun $h = \frac{1}{k_1}\ln(1 + k_1 v_0 T)$. (3) tenglamadan

$$v_1 = \frac{v_0}{1 + k_1 v_0 T},$$

bu yerdan $1 + k_1 v_0 T = \frac{v_0}{v_1}$. Shuning uchun h ning ifodasi ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$h = \frac{1}{k_1}\ln\frac{v_0}{v_1} \quad \text{yoki} \quad \frac{1}{k_1} = \frac{h}{\ln\frac{v_0}{v_1}}.$$

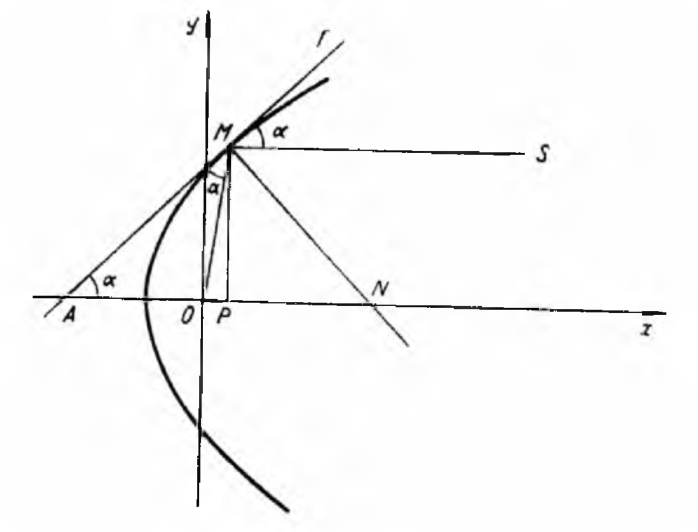
$\frac{1}{k_1}$ ning topilgan qiymatini (3) ifodaga qo‘yib, izlanayotgan T vaqtni topish uchun formula hosil qilamiz.

$$T = \frac{h}{\ln\frac{v_0}{v_1}}\left(\frac{1}{v_1} - \frac{1}{v_0}\right) \qquad (4)$$

Sonli hisoblashlarni bajarib

$\left(v_0 = 400\dfrac{м}{сек},\ v_1 = 100\dfrac{м}{сек}, h = 20\,\text{см деб олиб} \right) T = 0,00108$
sek in topamiz.

Misol-3: Aylanish o‘qining O nuqtasiga joylashtirilgan yorug‘lik manbaidan chiqadigan hamma nurlar reflektor ko‘zgusidan bu o‘qqa parallel bo‘lib qaytishi uchun reflektor ko‘zgusini qaysi aylanish sirti bo‘yicha silliqlash kerak.



yechilishi: Izlanayotgan aylanish sirtining meridian kesimini olamiz. Koordinatalar markazini 0 nuqtada tanlaymiz, OX o‘qni esa aylanish o‘qi bo‘yicha yo‘naltiramiz. Agar OX o‘q bilan egri chiziqning $M(x,y)$ nuqta siga o‘tkazilgan AT urinma orasidagi burchakni α orqali belgilasak, u holda masala shartiga ko‘ra: $< SMT = \alpha$. Ikkinchi tomonidan, burchaklar tushish burchagi (<OMN) va qaytish burchagi (<NMS) ni $\pi/2$ ga to‘ldiruvchi burchaklar bo‘lgani sababli $< OMA =< SMT$ va bundan $< OMA = \alpha$. Shunday qilib, OAM uchburchak teng yonli va OA=OM. Chizmadan: $OA = AP - OP = y / y' - x, \quad OM = \sqrt{x^2 + y^2}$, natija ushbu differensial tenglamani hosil qilamiz:

$$\frac{y}{y'} - x = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad (1)$$

yoki differensiallarda yozsak,

$$ydx - (x + \sqrt{x^2 + y^2})dy = 0$$

Bu *x* va *u* ga nisbatan bir jinsli tenglama. $x = yz$ va mos ravishda $dx = zdy + ydz$ o‘rniga qo‘yish yordamida bu tenglamani o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiramiz:

$y(zdy + ydz) = y(z + \sqrt{z^2 + 1})dy$ yoki $ydz = \sqrt{z^2 + 1}dy$, bu yerdan

$$\frac{dz}{\sqrt{z^2 + 1}} = \frac{dy}{y} \text{ yoki } \ln(z + \sqrt{z^2 + 1}) = \ln y - \ln c.$$

ya'ni

$$z+\sqrt{z^2+1}=\frac{y}{c}.$$

irratsionallikni yo‘qotib, bu tenglamani soddalashtiramiz:

yechilishi: Izlanayotgan aylanish sirtining meridian kesimini olamiz, OX.

$$\left(\frac{y}{c}-z\right)^2=\sqrt{z^2+1} \quad \text{yoki} \quad \frac{y^2}{c^2}-\frac{2yz}{c}=1.$$

Eski x o‘zgaruvchiga qaytib, quyidagi umumiy integralni hosil qilamiz:

$$y^2=2c\left(x+\frac{c}{2}\right). \qquad (2)$$

Bu simmetriya o‘qi OX. o‘q bilan ustma-ust tushadigan, parametri p=c bo‘lgan va uchi koordinatalar boshidan chap tomonda $\frac{c}{2}$ masofada yotadigan parabolalar oilasidir. Demak, aylanish sirtlari aylanish paraboloidlari bo‘lib, ularning

$$y^2+z^2=2c\left(x+\frac{c}{2}\right)$$

tenglamalari ma'lum qoida bo‘yicha u^2 ni y^2+z^2 orqali almashtirish bo‘yicha hosil bo‘ladi.

Agar ko‘zguning diametri d va chuqurligi h berilgan bo‘lsa, parabola tenglamasidan $x+\frac{c}{2}=h,\ y=\frac{d}{2}$ deb, S ning qiymatini aniqlash mumkin: $c=\frac{d^2}{8h}$, u holda parabola tenglamasi $y^2=\frac{d^2}{4h}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right)$ (xususiy integral), aylanish paraboloidining tenglamasi esa

$$y^2+z^2=\frac{d^2}{h^2}\left(x+\frac{d^2}{16h}\right)$$

(3) bo‘ladi.

1. $y'=(x+y)^2$ j: $arctg(x+y)=x+c.$
2. $y'=(8x+2y+1)^2.$ j: $8x+2y+1=2tg(2x+c).$
3. $(2x+3y-1)dx+(4x+6y-5)dy=0$ j: $x+2y+3\cdot\ln/2x+3y-7/=c.$
4. $(2x-y)dx+(4x-2y+3)dy=0.$ j: $5x+10y+c=3\ln|10x-5y+6|.$
5. $y'=10^{x+y}$ j: $10^x+10^{-y}=c.$
6. $y'+\sin\frac{x+y}{2}=\sin\frac{x-y}{2}$ j: $\ln\left|tg\frac{y}{4}\right|=c-2\sin\frac{x}{2}.$
7. $z'=\cos(z-t).$ j: $ctg\frac{z-t}{2}=t+c,\quad z-t=2nk,\quad k\in Z$
8. $x'-x=2t-3.$ j: $2t+x-1=ce^t.$
9. $(t+2x)x'=1.$ j: $t+2x+2=ce^x$
10. $S'=\sqrt{4t+2s-1}$ j: $\sqrt{4t+2s-1}-2\ln\left(\sqrt{4t+2s-1}+2\right)=t+c.$

TEST

Differensial tenglama deb nimaga aytiladi?	* Erkli o‘zgaruvchi va no’malum funksiya va uning hosilalari yoki differensiallarini	Erkli o‘zgaruvchi va no’malum funksiya bog‘lovchi munosabatlar	Noma’lum funksiyani bog‘lovchi munosabat	Erkli o‘zgaruvchi va no’malum funksiya hosilalari yoki differensiallarini

	bog‘lovchi munosabatlar differensial tenglama deyiladi.	differensial tenglama deyiladi.	differensial tenglama deyiladi.	bog‘lovchi munosabatlar differensial tenglama deyiladi.
Oddiy differensial tenglama deb nimaga aytiladi?	* Agar no’malum funksiya bitta erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.	Agar no’malum funksiya ikkita erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.	Agar no’malum funksiya uchta erkli erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.	Agar no’malum funksiya beshta erkli erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, bunday differensial tenglama oddiy differensial tenglama deyiladi.
Differensial tenglama erkli o‘zgaruvchiga nechta erkli o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, xususiy hosila differensial tenglama deyiladi?	*2 yoki undan ortiq	3 yoki undan ortiq	1 yoki undan ortiq	4 yoki undan ortiq
Differensial tenglamaga kirgan hosilalarning eng yuqori tartibi nima deb ataladi?	* Differensial tenglama tartibi	Differensial tenglama o‘lchami	Differensial tenglama o‘lchovi	Differensial tenglama yechimi
Differensial tenglamaning yechimi eki integrali deb tenglamaga qo‘yganda uni ayniyatga aylantiradigan nimaga aytiladi?	* Har qanday differensiallanuvchi funksiyaga aytiladi.	Har qanday uzilishga ega bo‘lgan funksiyaga aytiladi.	Har qanday funksionalga aytiladi.	Har qanday uzluksiz funksiyaga aytiladi.
quyidagi tenglama nechanchi tartibli differensial tenglama $y''-y'\cos x - x^2 y = 0$	*2-tartibli	1-tartibli	3-tartibli	4-tartibli
quyidagi differensial tenglamaning tartibini aniqlang: $x(1-y^2)dx - y(1-x^2)dy = 0$	*1-tartibli	3-tartibli	5-tartibli	0-tartibli
quyidagi differensial tenglamada erkli o‘zgaruvchi nechta: $x\frac{\partial z}{\partial x} = y\frac{\partial z}{\partial y}$	*2 ta	5 ta	3 ta	1 ta
Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamani umumiy ko‘rinishini aniqlang.	* $F(x, y, y') = 0$	$F(x, y, c,) = 0$	$\Phi(y, y') = 0$	$y' = f(x, y)$
Birinchi tartibli differensial tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasini aniqlang:	* $\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y\vert_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ x\vert_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y'\vert_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y''\vert_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$

MA'RUZA №2

MAVZU: O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.

Reja:

1. Birinchi tartibli differensial tenglama.
2. O‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama.
3. O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama.

Tayanch so’z va iboralar: *birinchi tartibli differensial tenglama, o‘zgaruvchilari ajraladigan differensialtenglamalar, o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama, o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglama, birinchi tartibli differensial tenglama xususiy yechimi, birinchi tartibli differensial tenglama umumiy yechimi.*

1. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy ko‘rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$F(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

bu yerda x-erkli o‘zgaruvchi, y-no'malum funksiya va $y' = \frac{dy}{dx}$-noma’lum funksiya hosilasi.

Agar (1) ni y' ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, u holda

$$y' = f(x, y) \tag{2}$$

bo‘ladi.

(2) dan differensial ishtirok etgan ko‘rinishga o‘tish oson, ya'ni

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{3}$$

ko‘rinishga.

Haqiqatan, agar $y' = \frac{dy}{dx}$ desak, $f(x, y)dx - dy = 0$, bu yerdan $M(x, y) = f(x, y)$, $N(x, y) = -1$ va aksincha (3) dan (2) ga o‘tish oson.

Differensial tenglamani umuman aytganda, bitta funksiya emas, balki funksiyalarning butun bir to‘plami qanoatlantirishi mumkin. Ulardan birini ajratib ko‘rsatish kerak, yani $x = x_0$ bo‘lganda $y = y_0$ ko‘rinishdagi shart berilishi kerak. Bu shart boshlang‘ich shart deyiladi va quyidagicha yoziladi:

$$y|_{x=x_0} = y_0 \tag{4}$$

Ushbu,

$$\begin{cases} y' = f(x, y) & (2) \\ y|_{x=x_0} = y_0 & (4) \end{cases}$$

(2) , (4) masala *Koshi masalasi* yoki *boshlang‘ch masala* deyiladi.

Teorema.(Koshi yoki yechimning $\exists$ va ! haqidagi teorema). Agar (x_0, y_0) nuqtani o‘z ichiga olgan $D \subset R^2$ sohada $f(x, y)$ funksiya uzluksiz va uzluksiz $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy hosilaga ega bo‘lsa, u holda (2) differensial tenglamaning (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ yechimi $\exists$ va ! bo‘ladi.

Ta'rif. Birinchi tartibli differensial tenglamaning *umumiy yechimi* deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x, C)$, $C = const$ funksiyaga aytiladi:

1) u ixtiyoriy o‘zgarmas C ning mumkin bo‘lgan har qanday qiymatida differensial tenglamani qanoatlantirsa;

2) boshlang‘ich $y|_{x=x_0} = y_0$ shart qanday bo‘lganda ham undan o‘zgarmas C ning shunday C_0 qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x, C_0)$ funksiya berilgan boshlang‘ich shartni

qanoatlantirsa, ya'ni $y_0 = \varphi(x_0, C_0)$.

Ta'rif. Differensial tenglamaning umumiy yechimidan o‘zgarmasning mumkin bo‘lgan qiymatlarida hosil qilinadigan yechim *xususiy yechim* deyiladi.

2. Differensial tenglamaning eng sodda turi *o‘zgaruvchilari ajralgan* tenglamadir. Uning umumiy ko‘rinishi:

$$M(x)dx + N(y)dy = 0 \qquad (5)$$

Bu tenglamaning muhimligi shundaki dx oldidagi funksiya faqat x ga bog‘liq, dy oldidagi funksiya faqat y ga bog‘liq. Bu tenglamaning umumiy yechimini topish uchun, uni hadlab integrallash orqali hosil qilinadi:

$$\int M(x)dx + \int N(y)dy = C, \quad C = const.$$

Bu yerda o‘zgarmas C ni berilgan tenglama uchun qulay bo‘lgan istalgan ko‘rinishda olish mumkin.

1-misol.

$$xdx + ydy = 0, \ M(x) = x, \ N(y) = y$$

$$\int xdx + \int ydy = C,$$

$$\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} = C \Rightarrow x^2 + y^2 = 2C = C_1^2,$$

$$x^2 + y^2 = C_1^2$$

Bu markazi koordinatalar boshida bo‘lgan, radiusi C_1 bo‘lgan kontsentrik aylanalar oilasidan iborat.

$$M_1(x)N_1(y)dx + M_2(x)N_2(y)dy = 0 \qquad (6)$$

ko‘rinishdagi differensial tenglama *o‘zgaruvchilari ajraladigan* tenglama deyiladi.

(6) da $N_1(y)M_2(x) \neq 0$ ifodaga bo‘lib, uni o‘zgaruvchilari ajralgan (5) tenglamaga keltirish mumkin:

$$\frac{M_1(x)}{M_2(x)}dx + \frac{N_2(y)}{N_1(y)}dy = 0,$$

buni esa integrallab umumiy yechim topiladi.

Ushbu

$$y' = f_1(x)f_2(y)$$

ko‘rinishdagi tenglama ham o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. $y' = \frac{dy}{dx}$ desak, u holda

$$dy = f_1(x)f_2(y) \Big| : f_2(y) \neq 0,$$

$$\frac{1}{f_2(y)}dy = f_1(x)dx,$$

integrallasak

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C$$

bo‘ladi.

2-misol. Quyidagi differensial tenglamani umumiy yechimini toping.

$$x(1+y^3)dx - y^2(1+x^2)dy = 0.$$

Yechish.

$$x(1+y^3)dx - y^2(1+x^2)dy = 0 \Big| : (1+x^2)(1+y^3) \neq 0$$

$$\frac{x}{1+x^2}dx-\frac{y^2}{1+y^3}dy=0$$

integrallaymiz.

$$\int\frac{x}{1+x^2}dx-\int\frac{y^2}{1+y^3}dy=\frac{1}{6}\ln C$$

bu yerda o‘zgarmas C -ni yechim ko‘rinishi oson bo‘lishi uchun $\frac{1}{6}\ln C$ deb oldik. Natijada

$$\frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right|-\frac{1}{3}\ln\left|1+y^3\right|=\frac{1}{6}\ln C$$

hosil bo‘ladi. Bundan

$$(1+x^2)^3=C(1+y^3)^2 \tag{7}$$

ega bo‘lamiz.

$$(1+x^2)(1+y^3)\neq 0$$

shartdan

$$y=-1$$

bo‘lishi mumkin. Bu $y=-1$ chiziq yechim bo‘lib, (7) yechimlar oilasida yotmaydi. Shuning uchun berilgan tenglamani umumiy yechimi

$$(1+x^2)^3=C(1+y^3)^2,\ \ y=-1$$

bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Hosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli differensial tenglamalar. Yechim tushunchasi. Xususiy va umumiy yechim.

2. Chiziqli differensial tenglamalar. yechimning xossalari.

Glossariy

Xosilaga nisbatan yechilgan birinchi tartibli tenglama - $y'=f(x,y)$ ko’rinishdagi tenglama.

Koshi masalasi – $y'=f(x,y)$ tenglamaning $y(x_0)=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi.

Yechimning mavjudlik va yagonaligi xaqidagi teorema – Agar (x_0,y_0) nuqtani o‘z ichiga olgan $D\subset R^2$ soxada $f(x,y)$ funksiya uzluksiz va uzluksiz $\frac{\partial f}{\partial y}$ xususiy xosilaga ega bo‘lsa, u xolda (2) differensial tenglamaning (4) boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi $y=f(x)$ yechimi Z va ! bo‘ladi.

Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi - Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $y = f(x,c), c = const$ funksiyaga aytiladi:

a) y ixtiyoriy o‘zgarmas C ning xar qanday qiymatida differensial tenglamani qanoatlantiradi.

b) boshlang‘ich $y\big|_{x=x_0} = y_0$ $_0$ shart xar qanday bo‘lganda xam o‘zgarmas C ning shunday C_c qiymatini topish mumkinki, $y = \varphi(x, c_0)$ funksiya berilgan boshlang‘ich shartni qanoatlantiradi, ya'ni $y_0 = \varphi(x_0, c_0)$.

Xususiy yechim - Differensial tenglamaning umumiy yechimidan o‘zgarmasning mumkin bo‘lgan qiymatlarida xosil qilinadigan yechimlar xususiy yechimlar deyiladi.

O‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama – $M(x)dx + N(y)\cdot dy = 0$ ko’rinishdagi tenglama.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $(x+1)^3 dy - (y-2)^2 dx = 0$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning umumiy ko‘rinishi qanday bo‘ladi?
2. Koshi masalasi deb nimaga aytiladi?
3. Birinchi tartibli differensial tenglamaning umumiy yechimi deb qaysi shartni qanoatlantiruvchi funksiyaga aytiladi?
4. Differensial tenglamaning eng sodda turi qanday ko‘rinishida bo‘ladi?
5. Qanday ko‘rinishdagi differensial tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama deyiladi?

Amaliy mashg’ulot-2

O‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar quyidagicha yozilishi mumkin:

$$y' = f(x)\cdot g(y) \qquad (1)$$

yoki quyidagi ko‘rinishda

$$M(x)\cdot N(y)dx + p(x)Q(y)dy = 0. \qquad (2)$$

Bunday tenglamalarni yechish uchun tenglamaning ikkala tomonini shunday ifodaga ko‘paytirish kerakki, tenglamaning bir tomonida faqat *x*, ikkinchi tomonida faqat *u* o‘zgaruvchi qolsin. So‘ngra ikkala tomonini integrallash kerak. Bo‘lishda extiyot bo‘lish kerak, chunki ifodani nolga aylantiruvchi qiymatlarida yechim yo‘qolib qolishi mumkin.

Misol 1. Quyidagi tenglamani yeching.

$$x^2y^2y' + 1 = y. \qquad (3)$$

Tenglamani (2) ko‘rinishga keliramiz.

$$x^2y^2\frac{dy}{dx} = y - 1; \qquad x^2y^2dy = (y-1)dx.$$

Ikkala tomonini $x^2(y-1)$ ga bo‘lamiz:

$$\frac{y^2}{y-1}dy = \frac{dx}{x^2}$$

O‘zgaruvchilari ajratildi. Tenglamani ikkala tomonini integrallaymiz:

$$\int\frac{y^2}{y-1}dy=\int\frac{dx}{x^2}; \qquad \frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+c.$$

$x^2(y-1)$ ga bo‘lishda $x=0$ va $y-1=0$ ya'ni $y=1$ yechimlar yo‘qolishi mumkin.

Ravshanki, $y=1$ funksiya (3) ning yechimi, $x=0$ yechim emas.

2. $y'=f(ax+by)$ ko‘rinishdagi tenglamalar o‘zgaruvchilari ajraladigan ko‘rinishga $z=ax+by$ yoki $z=ax+by+c,\ c-$ ixtiyoriy o‘zgarmas, almashtirish yordamida keltirish mumkin.

Misol-2. $(xy+y)dx+(xy+x)dy=0$ differensial tenglamani umumiy yechimini toping.

yechish: $x\neq 0,\ y\neq 0$ deb faraz qilib, berilgan tenglamaning ikkala qismini *xu* ga bo‘lamiz. Natijada o‘zgaruvchilari ajralgan quyidagi tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=0.$$

uning integralini topamiz:

$$\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx+\int\left(1+\frac{1}{y}\right)dy=\ln|c|.$$

$$x+\ln|x|+\ln|y|=\ln|c|.$$

$$\ln|xy|+\ln e^{x+y}=\ln|c|, \qquad xye^{x+y}=c.$$

Oxirgi tenglik berilgan differensial tenglamaning umumiy integralidir. Uni topishda $x\neq 0,\ y\neq 0,$ deb qabul qilgan Edik. Ammo $x=0$ va $y=0$ ham berilgan tenglamaning yechimi bo‘lishini osongina tekshirish mumkin. Ikkinchi tomondan, ularni umumiy integralida $c=0$ deb topish ham mumkin.

Demak, $x=0,\ y=0$ berilgan tenglamaning xususiy yechimi.

Misol 3: $x(y^3+1)dx-y^2(1+x^2)dy=0$ differensial tenglamaning umumiy yechimini toping.

yechish: Tenglamani $(1+x^2)(1+y^3)\neq 0$ ga bo‘lib, o‘zgaruvchilarini ajratamiz:

$$\frac{xdx}{1+x^2}-\frac{y^2}{1+y^3}=0$$

Integrallab, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{1}{2}\ln|1+x^2|-\frac{1}{3}\ln|1+y^3|=\frac{1}{6}\ln c.$$

Bu yerda kelgusi o‘zgartirishlarni osonlashtirish uchun ixtiyoriy o‘zgarmas sifatida $\frac{1}{6}\ln C$ olindi. Yuqoridagi ifodani potensirlab, umumiy yechimni hosil qilamiz: $\frac{(1+x^2)^3}{(1+y^3)^2}=C.$

Misol 4: Ushbu $\sqrt{1-y^2}dx+\sqrt{1-x^2}dy=0$ tenglamaning umumiy integralini toping.

Tenglamaning ikkala tomonini $\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ ko‘paytmaga bo‘lib, o‘zgaruvchilari ajralgan

$$\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$$

tenglamani hosil qilamiz, bu yerdan umumiy integralni topamiz: $\arcsin x+\arcsin y=\arcsin c$. Agar bu tenglikda sinuslarga o‘tadigan bo‘lsak, umumiy integralning algebraik shaklini hosil qilamiz:

$$x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=C.$$

$\sqrt{1-y^2}$ ga bo‘lishda $y=\pm 1$ yechimni yo‘qotishimiz mumkinligini qayd qilamiz. Bevosita tekshirish $y=\pm 1$ ni haqiqatan ham yechimlar ekanligini ko‘rsatadi.

$y/_{x=0}=0$ boshlang‘ich shart S ni topishga imkon beradi $(C=0)$ va $x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}=0$ xususiy integralga olib keladi.

1. $tgx\cdot\sin^2 y dx+\cos^2 x\, ctgy\, dy=0.$ j/b: $ctg^2 y=tg^2 x+c$.
2. $xy'-y=y^2$ j/b: $x\sqrt{1+y^2}=cy;\quad y=0.$
3. $xyy'=1-x^2$ j/b: $x^2+y^2=\ln cx^2$.
4. $y-xy'=a(1+x^2y')$ j/b: $y=\dfrac{a+cx}{ax+1}$
5. $3e^x tgy dx+(1-e^x)\sec^2 y\, dy=0$ j/b: $tgy=c(1-e^x)^3;\quad x=0$.
6. $y'tgx=y$ j/b: $y=c\sin x$.
7. $(x+1)^3dy-(y-2)^2dx=0$ j/b: $\dfrac{1}{2-y}+\dfrac{1}{2(x+1)^2}=c.$
8. $\sec^2 x\cdot\sec y dx=-ctgx\cdot\sin y dy.$ j/b: $tg^2x+\sin^2 y=c$.
9. $(y+xy)dx+(x-xy)dy=0$ j/b: $x-y+\ln|xy|=c.$
10. $yy'+x=1.$ j/b: $(x-1)^2+y^2=c^2.$
11. $\sin\alpha\cdot\sin\beta d\alpha=\cos\alpha\cdot\sin\beta d\beta$ .j/b: $\cos\beta=c\cos\alpha$.
12. $1+(1+y')e^y=0$. j/b: $(e^y+1)e^x=c.$
13. $3e^x\sin y dx=(e^x-1)\sec y dy.$ j/b: $tgy=c(e^x-1)^3.$
14. $x^2(2yy'-1)=1.$ j/b: $x(y^2+c)=x^2-1$
15. $y^2+x^2y'=0;\quad y(-1)=1$ j/b: $x+y=0$
16. $2(1+e^x)yy'=e^x;\quad y(0)=0$. j/b: $2e^{y^2}=e^x+1$.
17. $(1+x^2)y^3dx-(y^2-1)x^3dy=0;\ \ y(1)=-1$ j/b: $x^{-2}+y^{-2}=2\left(\ln\left|\dfrac{x}{y}\right|+1\right)$.
18. $(xy^2+x)dx+(x^2y-y)dy=0;\ \ y(0)=1;$ j/b: $1+y^2=\dfrac{2}{1-x^2}$
19. $y'\sin x=y\ln y;\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$ j/b: $y=1$
20. $y'=(2y+1)ctgx;\quad y\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$: j/b: $y2\sin^2 x-\dfrac{1}{2}.$

TEST

Birinchi tartibli differensial tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasini aniqlang:	* $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\big\vert_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ x\big\vert_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y'\big\vert_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$	$\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y''\big\vert_{x=x_0}=y_0' \end{cases}$

Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy yechimi ko‘rinishini aniqlang:	* $\Phi(x,y,c)=0$	$F(x,y,y')=0$	$y'=f(y,c)$	$y'=f(x,c)$
O‘zgaruvchilarga ajralgan oddiy differensial tenglamani aniqlang.	* $M_1(x)dx+N_1(x)dy=0$	$M_1(x)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$	$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$	$M_1(x,y)dx+N_1(x)dy=$
O‘zgaruvchilarga ajraladigan oddiy differensial tenglamani aniqlang.	* $M_1(x)N_1(y)dx+$ $+M_2(x)N_2(y)dy=0$	$M(x,y)dx+$ $+N(x,y)dy=0$	$M_1(y)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$	$M_1(x)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$
Quyidagi differensial tenglama umumiy yechimini toping: $x(1+y^3)dx-y^2(1+x^2)dy=0$	* $(1+x^2)^3=e^c(1+y^3)^2$	$(1+x^3)^3=\ln c(1+y^2)^2$	$(1+x^2)^3=(1+y^3)^2$	$(1+x^2)^3=c(1+y^3)^2$
Birinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglamani ko‘rinishini toping.	* $y'+P(x)y=Q(x)$	$y'=f(x,y)$	$y'+P(x)z=Q(x)$	$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$
Quyidagi funksiyani bir jinslilik o‘lchovini aniqlang: $f(x)=\sqrt{x^2+y^2}$	*1-o‘lchovli	2-o‘lchovli	3-o‘lchovli	4-o‘lchovli
Quyidagi funksiyaning bir jinslilik o‘lchovini aniqlang: $f(x,y)=\dfrac{x-xy}{x+y^2}$	* o‘lchovi yo‘q	2-o‘lchovli	1-o‘lchovli	0-o‘lchovli
$f(x,y)$ 0 o‘lchovli 1 jinsli funksiyani ko‘rinishini aniqlang:	* $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$f(x,y)=\varphi(x+y)$	$f(x,y)=\varphi(xy)$	$f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{1}{xy}\right)$
Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamani yechishda qanday almashtirish bajariladi?	* $z=\dfrac{y}{x}$	$z=xy$	$z=x-y$	$z=x+y$

MA'RUZA №3

Mavzu: Bir jinsli diferensial tenglamalar va ularga keltiriladigan tenglamalar.

Reja

1. Bir jinsli funksiya. Misollar.
2. Bir jinsli diferensial tenglama. Misollar.
3. Bir jinsli diferensial tenglamaga keltiriladigan tenglamalar. Misollar.

Tayanch so'z va iboralar: *n-o'lchovli bir jinsli funksiya, bir jinsli differensial tenglama, bir jinsli differensial tenglamaga olib kelinadigan tenglamalar,* $\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ *ko'rinishdagi tenglama, umumlashgan bir jinsli tenglama.*

x va y ga nisbatan bir jinsli tenglama o'zgaruvchilarini almashtirish yordamida osongina o'zgaruvchilarga ajraladigan tenglamalarga keltirish mumkin. Bir jinsli tenglamaga ta'rif berishdan oldin bir jinsli funksiyaga ta'rif beraylik.

Ta'rif. Agar $f(x,y)$ funksiyada x va y o'zgaruvchilarni mos ravishda tx va ty ga almashtirganda (t - $\forall$ parametr) t^n ga ko'paytirilganda yana o'sha funksiya hosil bo'lsa, ya'ni

$$f(tx,ty) = t^n f(x,y)$$

shart bajarilsa, $f(x,y)$ funksiya n *o'lchovli bir jinsli funksiya* deyiladi. (n-funksiya bir jinsliligining o'lchovi deyiladi).

Bir nechta misollar ko'raylik.

1-misol.

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$$

funksiya bir o'lchovli bir jinsli funksiyadir, chunki,

$$f(tx,ty) = \sqrt{(tx)^2+(ty)^2} = t\sqrt{x^2+y^2} = t^1 f(x,y).$$

2-misol.

$$f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$$

0 o'lchovli bir jinsli funksiya bo'ladi, chunki

$$f(tx,ty) = \frac{tx-ty}{tx+ty} = \frac{t(x-y)}{t(x+y)} = \frac{x-y}{x+y} = t^0 f(x,y),$$

ya'ni

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y).$$

Tasdiq.

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y)$$

shartga bo'ysinadigan 0 o'lchovli bir jinsli funksiyani

$$f(x,y) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right)$$

ko'rinishida yozilishi mumkin.

Isbot. Haqikatdan ham, t parametrni tanlab olish mumkin bo'lgani uchun $t = \frac{1}{x}$ deb olamiz.

U holda

$$f(x,y) = f(tx,ty) = f\left(\frac{1}{x}x, \frac{1}{x}y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \varphi\left(\frac{y}{x}\right).$$

2-misoldagi $f(x,y)$ funksiyani quyidagicha yozish mumkin:

$$f(x,y)=\frac{x(1-\frac{y}{x})}{x(1+\frac{y}{x})}=\frac{1-\frac{y}{x}}{1+\frac{y}{x}}=\varphi(\frac{y}{x})$$

Biz quyidagi 0 o‘lchavli bir jinsli funksiya bilan ish ko‘ramiz.

Ta'rif. Agar 1-chi tartibli $y'=f(x,y)$ differensial tenglamaning o‘ng tomoni x va y ga nisbatan 0 o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘lsa, u holda bunday tenglama *bir jinsli tenglama* deyiladi.

Shunday qilib bir jinsli tenglamani

$$y'=\varphi(\frac{y}{x}) \tag{1}$$

ko‘rinishda yozish mumkin ekan.

Bir jinsli (1) tenglamani $\frac{y}{x}=u(x)$ o‘rniga qo‘yish yordamida o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltirish mumkin, u holda $y=u\cdot x$, bu yerda u-yangi izlanayotgan funksiya. Keyingi tenglikni differensiallab, $y'=u'x+u$ ni hosil qilamiz. y va y' qiymatlarini (1) ga qo‘yamiz va quyidagini hosil qilamiz:

$$u'x+u=\varphi(u)$$

$$u'x=\varphi(u)-u$$

o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Bundan

$$du\cdot x=(\varphi(u)-u)dx\,|\,x(\varphi(u)-u)\neq 0$$

$$\frac{du}{\varphi(u)-u}=\frac{dx}{x}$$

hosil qilamiz.

Buni integrallaymiz:

$$\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\int\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{\varphi(u)-u}=\ln|x|+\ln C$$

$$\ln C|x|=\int\frac{du}{\varphi(u)-u}\Rightarrow Cx=e^{\int\frac{du}{\varphi(u)-u}}$$

Integrallashdan so‘ng u o‘rniga $\frac{y}{x}$ nisbatni qo‘yib, (1) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz.

Ushbu

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2}$$

tenglamada $M(x,y)$, $N(x,y)$ lar bir xil o‘lchavli bir jinsli funksiyalar bo‘lgandagina (2) tenglama bir jinsli tenglama bo‘ladi.

Bu 2 ta bir xil o‘lchovli bir jinsli funksiya nisbati 0 ulchovli bir jinsli funksiya bo‘lishidan kelib chiqadi.

(2) ko‘rinishdagi tenglamani yechish uchun uni dastlab (1) ko‘rinishga keltirish kerak:

$$y'=-\frac{M(x,y)}{N(x,y)}$$

nisbat 0 o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘ladi.

Masalan,

$$(y^2-3x^2)dy+2yxdx=0$$

tenglama bir jinslidir, chunki y^2-3x^2 va $2yx$ funksiyalar ikki o‘lchovli bir jinsli funksiyalardir. Tenglamani yechishdan oldin uni hosilaga nisbatan yechilgan shakliga keltirish kerak:

$$y' = \frac{2xy}{3x^2 - y^2} = \frac{2\frac{y}{x}}{3 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}.$$

Quyidagi

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{3}$$

ko‘rinishdagi tenglama bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Buning uchun x va y-larni o‘rniga yangi u va v o‘zgaruvchilarni quyidagicha kiritamiz:

$$x = u + \alpha, \ \ y = v + \beta \tag{4}$$

Bunda α va β - larni shunday tanlaymizki, tenglama bir jinsli tenglamaga aylansin. Bunday almashtirishda $dx = du, \ dy = dv$ bo‘ladi. Bularni (3) ga qo‘yib quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{(au + bv) + (a\alpha + b\beta + c)}{(a_1u + b_1v) + (a_1\alpha + b_1\beta + c_1)}\right)$$

Quyidagi tengliklar bajarilsa, (5) tenglama bir jinsli bo‘ladi:

$$\begin{cases} a\alpha + b\beta + c = 0 \\ a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \end{cases} \tag{6}$$

Bu sistemani α va β ga nisbatan yechib, α va β ni (4) ning o‘rniga qo‘yib, (3) tenglamani bir jinsli qiladigan qiymatlarini aniqlaymiz.

Agar $\begin{vmatrix} ab \\ a_1b_1 \end{vmatrix} = 0$ bo‘lsa, u holda (6) sistema yechimga ega bo‘lmaydi. Bunday holda (3) tenglama o‘zgaruvchilarini ajraladigan tenglamaga

$$z = ax + by$$

o‘rniga qo‘yish orqali keltiriladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Integral chiziq. Koshi masalasi. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.
2. O‘zgarmasni variatsiyalash usuli.

Glossariy

Bir jinsli funksiya – Agar $f(x, y)$ funksiyada x va y o‘zgaruvchilarni mos ravishda tx va ty ga almashtirganda (t - $\forall$ parametr) t^n ga ko‘paytirilganda yana o‘sha funksiya hosil bo‘lsa, ya'ni

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

shart bajarilsa, $f(x, y)$ funksiya n o‘lchovli bir jinsli funksiya deyiladi.

Bir jinsli tenglama – Agar 1-chi tartibli $y' = f(x,y)$ differensial tenglamaning o‘ng tomoni x va y ga nisbatan 0 o‘lchovli bir jinsli funksiya bo‘lsa, u holda bunday tenglama bir jinsli tenglama deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $2x^2y' = x^2 + y^2$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. n o‘lchovli bir jinsli funksiya deb nimaga aytiladi va u qanday shartni bajaradi?
2. Bir jinsli tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
3. Bir jinsli tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. $(y^2 3x^2)dy + 2yxdx = 0$ tenglamani bir jinsli ekanini isbotlang?
5. $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiya qanday funksiya turiga kiradi?

Amaliy mashg’ulot-3

Bir jinsli tenglamalar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right) \text{ yoki } M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$

ko‘rinishda yozilishi mumkin. Bu yerda *M,N* lar bir xil darajali bir xil jinsli funksiyalar yani

$$M(kx,ky) = k^n M(x,y)$$
$$N(kx,ky) = k^n N(x,y), \quad \forall k \in R.$$

Bir jinsli tenglamani yechish uchun tenglamada $y = tx$ yoki $\frac{y}{x} = t$ almashtirish bajarish kerak. Natijada tenglama o‘zgaruvchilari ajralgan ko‘rinishga keladi.

Misol 1. $xdy = (x+y)dx$ tenglama yechilsin. Bu tenglama bir jinsli differensiya tenglama chunki $\frac{dy}{dx} = 1 + \frac{y}{x}$.

$y = tx$ desak, $dy = tdx + xdt$. Bu ifodani tenglamaga qo‘yamiz:

$$x(tdx + xdt) = (x + xt)dx \Rightarrow xdt = dx \Rightarrow dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow t = \ln|x| + c.$$

Eski o‘zgaruvchilarga qaytamiz.

$$y = x(\ln|x| + c)$$

Undan tashqari $x = 0$ yechim bo‘lish davrida yo‘qotilgan edi.

Misol-2. $2x^2y' = x^2 + y^2$ differensial tenglamaning umumiy va boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

yechish. $2x^2$ va $x^2 + y^2$ funksiyalar ikki o‘lchovli bir jinsli bo‘lgani uchun berilgan tenglama bir jinsli bo‘ladi.

$$y = xu,$$
$$y' = xu' + u$$

almashtirish bajaramiz.

$$2x^2(u+xu')=x^2+(xu)^2,$$

$$2x^2(u+xu')=x^2(1+u^2), x\neq 0$$

deb tenglamani ikkala qismini x^2 ga bo‘lamiz. So‘ngra o‘zgaruvchilarni ajratamiz:

$$2u+2x\frac{du}{dx}=1+u^2$$

$$2xdu=(1-2u+u^2)dx.$$

$$\frac{du}{(u-1)^2}=\frac{dx}{x}\Rightarrow\int\frac{du}{(u-1)^2}=\int\frac{dx}{2x}\Rightarrow\int\frac{d(u-1)}{(u-1)^2}=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln|c|-$$

$$-\frac{1}{u-1}=\frac{1}{2}\ln|x|+\ln c,\quad 1=(1-u)\ln\left(c\sqrt{|x|}\right).$$

Oxirgi ifodani u ning o‘rniga $\frac{y}{x}$ qiymatini qo‘yamiz:

$$1=\left(1-\frac{y}{x}\right)\ln\left(c\sqrt{|x|}\right),\qquad x=(x-y)\ln\left(c\sqrt{|x|}\right).$$

Uni *u* ga nisbatan yechib, berilgan defferensial tenglamani umumiy yechimini topamiz:

$$y=x-\frac{x}{\ln\left(c\sqrt{|x|}\right)}$$

$y(1)=0$ boshlang‘ich shartdan foydalanib, o‘zgarmas *s* ning qiymatini aniqlaymiz:

$$0=1-\frac{1}{\ln c},\qquad \ln c=1,\qquad c=e$$

Demak, berilgan tenglamaning xususiy yechimi quyidagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y=x-\frac{x}{1+\ln\sqrt{|x|}}$$

2. Bir jinsli tenglamaga

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$$

tenglama koordinata boshini

$$\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\ ax+by+c=0\end{cases}$$

chiziqlarning kesishish nuqtasiga ko‘chirilgandan so‘ng keltiriladi. Agar to‘g‘ri chiziqlar kesishmasa $a_1x+b_1y=k(ax+by)$ va tenglama $y'=F(ax+by)$ ko‘rinishga keltiriladi va bu tenglama $z=ax+by$ yoki $z=ax+by+c$ almashtirish bilan o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamaga keltiriladi.

3. Ba'zi tenglamalar $y=z^m$ almashtirish yordamida bir jinsli tenglamaga keltiriladi. Odatda m soni oldindan noma'lum. Uni topish uchun $y=z^m$ almashtirishni tenglamaga qo‘yiladi va bir jinslilik sharti talab qilinadi. Agar shunday m ni topish mumkin bo‘lsa tenglama bir jinsli tenglamaga keltiriladi, aks holda yo‘q.

Misol-3: $2x^4yy'+y^4=4x^6$ tenglamani almashtirish yordamida bir jinsli ko‘rinishga keltiring.

yechish: $y=z^m$ deb quyidagiga kelamiz:

$$2mx^4 \cdot z^{2m-1} \cdot z^1 + z^{4m} = 4x^6$$

Bu tenglama bir jinsli bo‘ladi, agar barcha xadlarining darajalari teng bo‘lsa: $4+(2m-1)=4m=6$ bu yerdan $m=3/2$. Shunday qilib tenglamani bir jinsli ko‘rinishga $y=z^{3/2}$ almashtirish bajarib keltirish mumkin.

Misol-4: Ushbu $y'=\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$ yoki $y'=\dfrac{y}{x}+\sqrt{1-\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}$; bir jinsli tenglamani umumiy yechimini toping.

yechish: O‘ng tomoni nol o‘lchovli bir jinsli funksiyadan iborat.

$\dfrac{y}{x}=u$ almashtirish bajaramiz, u holda $y=ux \Rightarrow y'=u'x+u$. u va y' ning qiymatini tenglamaga qo‘yamiz:

$$u'x+\cancel{u}=\cancel{u}+\sqrt{1+u^2} \Rightarrow u'x=\sqrt{1-u^2}$$

Quyidagi o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamani hosil qilamiz:

$x\dfrac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}$ yoki $\dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\dfrac{dx}{x}$.

integrallab topamiz:

$$\arcsin u = \ln x + \ln c.$$

Bu yerdan $U=\sin(\ln cx)$. Endi $\dfrac{y}{x}=u$ debo‘rniga qo‘ysak, $\dfrac{y}{x}=\sin(\ln cx)$ ni hosil qilamiz. Bu yerdan u ni x orqali ifodalash oson: $y=x\sin(\ln cx)$.

Umumiy yechimni topdik.

Amaliy mashg‘ulot № 3

1. $(x^2+y^2)dx-2xydy=0$. j: $y^2=x^2-cx$.
2. $y-xy'=y\ln\dfrac{x}{y}$. j: $y=xe^{cx}$
3. $xdy-ydx=ydy; \quad y(1)=1$. j: $x=-y(1+\ln|y|)$.
4. $y-xy'=x+yy'$. j: $arctg\dfrac{y}{x}+\ln c\sqrt{x^2+y^2}=0.$
5. $ydy+(x-2y)dx=0.$ j: $x=(y-x)\ln c(y-x)$.
6. $y=x\left(y'-\sqrt[x]{e^y}\right)$. j: $e^{-\frac{y}{x}}+\ln cx=0$.
7. $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0; \quad y(1)=-2$. j: $3y^3=8\left(x^2-y^2\right)$.
8. $y-xy'=x\sec\dfrac{y}{x}; \quad y(1)=\pi.$ j: $\sin\dfrac{y}{x}+\ln|x|=0$.
9. $(3y^2+3xy+x^2)dx=(x^2+2xy)dy$ j: $(x+y)^2=cx^3e^{-\frac{x}{x+y}}$;
10. $y'=\dfrac{y}{x}+\dfrac{\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)}{\varphi'\left(\dfrac{y}{x}\right)}$; j: $cx=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

11. $(xy'-y)arctg\frac{y}{x}=x;\quad y/_{x=1}=0$ j: $\sqrt{x^2+y^2}=e^{\frac{y}{x}arctg\frac{y}{x}}$;

12. $(y^2-3x^2)dy+2xydx=0;\quad y(0)=1$. j: $y^3=y^2-x^2$.

13. $y'=\frac{y^2-2xy-x^2}{y^2+2xy-x^2};\quad y(1)=-1$. j: $y=-x$.

14. $y\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+2x\frac{dy}{dx}-y=0;\quad y(0)=\sqrt{5}$. j: $y^2=5\pm2\sqrt{5}x.$

15. $\left(x-y\cos\frac{y}{x}\right)dx+x\cos\frac{y}{x}dy=0$. j: $\sin\frac{y}{x}+\ln|x|=c.$

16. $(8y+10x)dx+(5y+7x)dy=0.$ j: $(x+y)^2(2x+y)^3=c$.

17. $x^3y'=y(y^2+x^2)$. j: $x=xe^{\frac{x^2}{2y^2}}$

18. $\frac{xy'-y}{x}=tg\frac{y}{x}$ j: $\sin\frac{y}{x}=cx$

19. $\frac{ds}{dt}=\frac{s}{t}-\frac{t}{s}$ j: $s^2=2t^2\ln\frac{c}{t}$.

20. $xy'=y\left(1+\ln\frac{y}{x}\right);\quad y(1)=\frac{1}{\sqrt{e}}.$ j: $y=xe^{-\frac{x}{2}}$.

TEST

quyidagi differensial tenglamada erkli o‘zgaruvchi nechta: $x\frac{\partial z}{\partial x}=y\frac{\partial z}{\partial y}$	*2 ta	5 ta	3 ta	1 ta
Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamani umumiy ko‘rinishini aniqlang.	* $F(x,y,y')=0$	$F(x,y,c,)=0$	$\Phi(y,y')=0$	$y'=f(x,y)$
Birinchi tartibli differensial tenglamaga qo‘yilgan Koshi masalasini aniqlang:	* $\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y\big\|_{x=x_0}=y_0\end{cases}$	$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ x\big\|_{x=x_0}=y_0\end{cases}$	$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y'\big\|_{x=x_0}=y_0\end{cases}$	$\begin{cases}y'=f(x,y)\\ y''\big\|_{x=x_0}=y'_0\end{cases}$
Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama umumiy yechimi ko‘rinishini aniqlang:	* $\Phi(x,y,c)=0$	$F(x,y,y')=0$	$y'=f(y,c)$	$y'=f(x,c)$
O‘zgaruvchilarga ajralgan oddiy differensial tenglamani aniqlang.	* $M_1(x)dx+N_1(x)dy=0$	$M_1(x)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$	$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$	$M_1(x,y)dx+N_1(x)dy=$
O‘zgaruvchilarga ajraladigan oddiy differensial tenglamani aniqlang.	* $M_1(x)N_1(y)dx+$ $+M_2(x)N_2(y)dy=0$	$M(x,y)dx+$ $+N(x,y)dy=0$	$M_1(y)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$	$M_1(x)dx+$ $+N_1(x,y)dy=0$
Quyidagi differensial tenglama umumiy yechimini toping: $x(1+y^3)dx-y^2(1+x^2)dy=0$	* $(1+x^2)^3=e^c(1+y^3)^2$	$(1+x^3)^3=\ln c(1+y^2)^2$	$(1+x^2)^3=(1+y^3)^2$	$(1+x^2)^3=c(1+y^3)^2$
Birinchi tartibli chiziqli oddiy differensial tenglamani ko‘rinishini toping.	* $y'+P(x)y=Q(x)$	$y'=f(x,y)$	$y'+P(x)z=Q(x)$	$M(x,y)dx+N(x,y)dy=$

Quyidagi funksiyani bir jinslilik o‘lchovini aniqlang: $f(x) = \sqrt{x^2 + y^2}$	*1-o‘lchovli	2-o‘lchovli	3-o‘lchovli	4-o‘lchovli
Quyidagi funksiyaning bir jinslilik o‘lchovini aniqlang: $f(x,y) = \dfrac{x - xy}{x + y^2}$	* o‘lchovi yo‘q	2-o‘lchovli	1-o‘lchovli	0-o‘lchovli

MA'RUZA №4
Mavzu: Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar.
Bernulli, Rikkati, tenglamalari.
Reja

1. Chiziqli tenglama va uni yechishning o‘rniga qo‘yish usuli.
2. Ixtiyoriy o‘zgarmasini variatsiyalash usuli.
3. Bernulli tenglamasi.
4. Rikkati tenglamasi.

Tayanch so’z va iboralar: *birinchi tartibli chiziqli tenglama, o‘rniga qo‘yish usuli, ixtiyoriy O‘zgarmasni varitsialash usuli, Bernulli tenglamasi, Rikkati tenglamasi.*

1. Ta'rif. Noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli (birinchi darajali) bo‘lgan tenglamalar *birinchi tartibli chiziqli* tenglamalar deyiladi.

Birinchi tartibli chiziqli tenglamalarning umumiy ko‘rinishi quydagicha bo‘ladi:

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

bu yerda $P(x), Q(x)$ lar x ning ma'lum uzluksiz funksiyalari (yoki o‘zgamasidir).

Agar (1) tenglamanig o‘ng tamoni $Q(x) = 0$ bo‘lsa, (1) tenglama chiziqli *bir jinsli* (boshqacha ma'noda), aks holda, ya'ni $Q(x) \neq 0$ bo‘lsa chiziqli *bir jinsli bo‘lmagan* tenglama deyiladi.

Aytaylik, (1) tenglama bir jinsli bo‘lmasin, ya'ni $Q(x) \neq 0$ teng bo‘lsin. Bu tenglamani integrallash (yoki yechimini topish)ning ikki usulini keltiramiz. Birinchisi **a) o‘rniga qo‘yish usuli** va ikkinchisi **b) o‘zgarmasni variatsiyalash usuli**.

Bir jinsli chiziqli tenglama bo‘lgan holni alohida qarab chiqish shart emas, chunki $Q(x) = 0$ bo‘lganda (1) tenglama ayni vaqtda o‘zgaruvchilarni ajratiladigan tenglama bo‘ladi.

a) o‘rniga qo‘yish usuli. (1) tenglamada $y = u \cdot v$ deb o‘zgaruvchini almashtiramiz. Bu bilan y o‘rniga izlanyotgan yangi o‘zgaruvchi, masalan, u ni kiritgan bo‘lamiz, shu sababli ikkinchi o‘zgaruvchi v ni yordamchi o‘zgaruvchi deb qarab uni o‘z hoxishimizga ko‘ra tanlashimiz mumkin. Kelgusida shunday qilinadi ham, ya'ni (1) da $y = u \cdot v$ almashtirish bajaramiz. y va y' ning u va v orqali ifodalarini (1) ga quyamiz:

$$y' = u'v + uv'$$

$$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$$

$$u'v + u(v' + P(x)v) = Q(x) \tag{2}$$

Yordamchi funksiya v ni tanlash mumkinligidan foydalanib, uni o‘rta qavs ichidagi ifoda 0 ga aylanadigan qilib olamiz, ya'ni

$$v' + P(x)v = 0 \tag{3}$$

talab qilamiz. Bu o‘zgaruvchilarga ajratiladigan tenglama. (3) dan

$$v' + P(x)v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{v} = -P(x)dx \Rightarrow \ln|v| = -\int P(x)dx + \ln C \Rightarrow$$

$$v = Ce^{-\int P(x)dx} \tag{4}$$

v-ni bu ifodasini (2) tenglamaga qo‘ysak, u uchun o‘zgaruvchilari aratiladigan tenglamani hosil qilamiz, ya'ni (3) o‘rinli bo‘lsa (2) quyidagicha bo‘ladi.

$$u'v = Q(x)$$

(4) dan esa

$$Ce^{-\int P(x)dx}u' = Q(x)$$

$$Cu' = Q(x)e^{\int P(x)dx}, \tag{5}$$

$$Cdu = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$

$$u = \frac{1}{C}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right]. \tag{6}$$

$y = u \cdot v$ bo‘lgani uchun (4) va (6) dan (1) tenglamaning umumiy yechimi uzil-kesil quyidagicha ko‘rinishida bo‘ladi:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right]. \tag{7}$$

(3) tenglamaning integrallashdan hosil bo‘lgan C o‘zgarmas u ni v ga kupaytirganda qisqarib ketgani uchun (4) yechimda oldindan $C = 1$ deb olish va (3) chi tenglamaning umumiy yechimi o‘rniga

$$v = e^{-\int P(x)dx}$$

xususiy yechimni olish mumkin edi, amalda shunday qilinadi. O‘rniga quyish usuli bitta (1) tenglamani o‘zgaruvchilarga ajraladigan ikkita (3) va (5) tenglamalarning yechimlarini izlashga olib keladi.

1-misol. $y' - ay = e^{bx}$ tenglamani o‘rniga qo‘yish usuli bilan yeching.

b) O‘zgarmasini variatsiyalash usuli. Bu usulda bir jinsli bo‘lmagan (1) tenglamani ($Q(x) \neq 0$) yechimini izlash o‘rniga dastlab unga mos bir jinsli

$$y' + P(x)y = 0 \tag{8}$$

tenglamani yechamiz, bu tenglama o‘zgaruvchilari ajladigan tenglamadir. Uning umumiy yechimi:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{y} = -P(x)dx \Rightarrow y = Ce^{-\int P(x)dx}. \tag{9}$$

Bu yerda C o‘zgarmasni $C = C(x)$ funksiya deb qaraydigan bo‘lsak, u holda $C(x)$ formulani shunday tanlab olish mumkin ekanki, (9) funksiya bir jinsli bo‘lmagan (1) tenglamaning yechimi bo‘lar ekan.

$C(x)$ funksiyani topishi uchun $y = C(x)e^{-\int P(x)dx}$ funksiyaning hosilasini hisoblaymiz, y va y' ning ifodalarni (1) tenglamalarga qo‘yamiz, ya'ni

$$y' = C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx}$$

bo‘lgani uchun (1) tenglama ushbu tenglamaga o‘tadi:

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} - C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} + C(x)P(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x)$$

$$C'(x)e^{-\int P(x)dx} = Q(x) \tag{10}$$

Biz yana o‘zgaruvchilari ajraladigan va noma'lum funksiya $C(x)$ bo‘lgan tenglamani hal qilishga keldik. (10) dan

$$C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$$
$$dC(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}dx$$
$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1$$

kelib chiqadi. Bu (10) ni umumiy yechimi bo‘ladi. $C(x)$ ning tanlangan ifodasini (9) tenglikka qo‘yib bir jinsli bo‘lmagan (1) tenglamaning izlanayotgan yechimini yana (7) ko‘rinishda hosil qilamiz:

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C_1\right]. \qquad (7)$$

Oldingi (7) bilan bir xil bo‘lar ekan.

Bu usulning nomi C o‘zgarmasni x ning funksiyasi deb qarab, uni variatsiyalaganimizdan (o‘zgartirganimizdan) kelib chiqqan.

Bu usul o‘rniga quyish usuli kabi (1) tenglamani o‘zgaruvchilarga ajratiladigan ikkita (8) va (10) tenglamaga keltirildi.

2-misol. $\frac{dy}{dx} - yctgx = a\sin x$ tenglamani o‘zgarmasni variatsiyalash usuli bo‘yicha yeching.

3. Bernulli tenglamasi.

Bernulli tenglamasining umumiy ko‘rinishi:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n,\ n \in R, \qquad (11)$$

bu yerda $n = const$. $n = 0$ da Bernulli tenglamasi chiziqli tenglamaga aylanadi, $n = 1$ da o‘zgaruvchilarga ajraladigan tenglama bo‘ladi, chunki uni

$$y' + [P(x) - Q(x)]y = 0$$

ko‘rinishga keltirish mumkin. Shuning uchun $n \neq 0,\ n \neq 1$ deb faraz qilamiz.

Bernulli tenglamasini tegishli o‘rniga qo‘yish orqali chiziqli ko‘rinishga keltirish mumkin. Buning uchun tenglamaning ikkala qismini $y^n \neq 0$ ga bo‘lamiz:

$$\frac{1}{y^n}y' + P(x)\frac{1}{y^{n-1}} = Q(x).$$

$\frac{1}{y^{n-1}} = z$ deylik, u holda

$$z' = -(n-1)y^{-n}y' = (1-n)\frac{1}{y^n}y'$$

va Bernulli tenglamasi ushbu ko‘rinishga keladi:

$$\frac{1}{y^n}y' = \frac{z'}{1-n}$$
$$\frac{z'}{1-n} + P(x)z = Q(x)$$
$$z' + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$$

Bu z ga nisbatan birinchi tartibli chiziqli tenglama, bu tenglamani yechishni bilamiz. Misol ko‘riladi.

4.Rikkati tenglamasi.

Ba'zi tenglamalar o‘zgaruvchini almashtirish yordamida Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Masalan, Rikkati tenglamasi uning bitta xususiy yechimi ma'lum bo‘lganda Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Ushbu

$$y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x) \qquad (12)$$

ko‘rinishdaga tenglama Rikkati tenglamasi deyiladi.

$y = y_1(x)$ funksiya (12) tenglamaning xususiy yechimi bo‘lsin. Agar $y = y_1(x) + z$ almashtirishni bajarsak

$$y' = y_1'(x) + z' \Rightarrow y_1'(x) + z' + p(x)(y_1(x) + z) + q(x)(y_1(x) + z)^2 = f(x)$$

kelib chiqadi.

$$y_1'(x) + p(x)y_1(x) + q(x)y_1^2(x) = f(x)$$

ekaniligini e'tiborga olsak, ushbu

$$z' + \left[p(x) + 2q(x)y_1(x)\right]z + q(x)z^2 = 0$$

Bernulli tenglamasi hosil qilamiz.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. O‘zgaruvchilari ajralgan va unga keltiriladigan differensial tenglamalar.
2. Bernulli va Rikkati tenglamalari.

Glossariy

Birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama – Noma'lum funksiya va uning hosilasiga nisbatan chiziqli (birinchi darajali) bo‘lgan tenglamalar birinchi tartibli chiziqli tenglamalar deyiladi.

Chiziqli bir jinsli differensial tenglama – $y' + P(x)y = Q(x)$ tenglamada $Q(x) = 0$ bo’lgan hol.

Bernulli tenglamasi – $y' + P(x)y = Q(x)y^n, n \in R$ ko’rinishdagi tenglama.

Rikkati tenglamasi – $y' + p(x)y + q(x)y^2 = f(x)$ ko’rinishdagi tenglama.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $\frac{x^2dy}{dx} - 2xy = 3$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar deb (nima) qanday tenglamaga aytiladi?
2. Bernulli tenglamasining umumiy ko‘rinishi qanday?
3. Ba'zi tenglamalar o‘zgaruvchilarga almashtirish yordamida qanday tenglamaga keltiriladi?
4. Qanday ko‘rinishdagi tenglama Rikatti tenglamasi deyiladi?
5. Rikatti tenglamasi orqali Bernulli tenglamasini keltirib chiqaring?

Amaliy mashg'ulot-4

1. $y'+a(x)y=b(x)$ (1) tenglama chiziqli tenglama deyiladi. Uni yechish uchun avval bir jinsli $y'+a(x)y=0$ (2) tenglamani yechish kerak. Uni o‘zgaruvchilarini ajratib yechish mumkin.

$$\frac{dy}{y}=-a(x)dx$$

Umumiy yechimdan o‘zgarmas *s* ni $c=c(x)$ funksiya deb va topilgan yechim $y=y(x)$ ni (1) ga qo‘yib s(x) topiladi.

2. Ba'zi tenglamalarda x o‘zgaruvchini funksiya, *u* o‘zgaruvchini argument deb olinsa, chiziqliga aylanadi.

Masalan: $y=(2x+y^3)y'$, $y=y(x)$ tenglamani quyidagicha yozamiz:

$$ydx=(2x+y^3)dy \Rightarrow \frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=y^2$$

va tenglama (1) ga o‘xshab yechiladi.

Bayon qilingan bu usul ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash (yoki Langranj) usuli deyiladi. O‘rniga qo‘yish usulini kiritish mumkin.

3. Bernulli tenglamasi

$$y'+a(x)y=b(x)y^n \qquad (3)$$

ikkla tomonini y^n ga bo‘linib, $\frac{1}{y^{n-1}}=z$ almashtirish bajarib, chiziqli tenglamaga keltiramiz.

4. Rikkatti tenglamasi:

$$y'+a(x)y+b(x)y^2=c(x) \qquad (4)$$

umumiy holda kvadraturalarda yechilmaydi. Lekin uning biror $y_1(x)$ xususiy yechimi topilsa tenglama $y=y_1(x)+z$ almashtirish yordamida Bernulli tenglamasiga keltiriladi. Ba'zan (4) tenglamaning xususiy yechimi o‘ng tomon s(x) ko‘rinishga qarab topilishi mumkin.

Masalan: $y'+y^2=x^2-2x$ tenglamada $y=ax+b$ almashtirish bajarsak, chap va o‘ng tomonda bir xil hadlar paydo bo‘ladi. Noma'lumlar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib xususiy yechimni topamiz, lekin buni har qachon ham qilib bo‘lmaydi.

Masalan: $y'+2y=\frac{6}{x^2}$ tenglamada yuqoridagi fikrlashlar xususiy yechimni $y=\frac{a}{x}$ ko‘rinishda olishga undaydi. Uni tenglamaga qo‘yib, a noma'lumni topamiz.

$$y'=-\frac{a}{x^2} \Rightarrow -\frac{a^2}{x^2}+\frac{2a}{x}=\frac{6}{x^2} \Rightarrow -a+2ax=6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2ax-(a-6)x^0=0 \Rightarrow 2a=0 \Rightarrow a+6=0.$$

bunday a yo‘q.

Misol-1: $(x^2-x)y'+y=x^2(2x-1)$ tenglamaning umumiy yechimini va $y(-2)=2$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni toping.

yechish: Berilgan tenglamaning ikkala qismini $x^2-x\neq 0$ ga bo‘lib, uni (1) ko‘rinishdagi tenglamaga keltiramiz:

$$y'+\frac{y}{x^2-x}=\frac{x^2(2x-1)}{x^2-x}$$

Bunda $a(x)=\dfrac{1}{x^2-x}=\dfrac{1}{x(x-\alpha)};\ b(x)=\dfrac{x^2(2x-\alpha)}{x(x-1)}=\dfrac{x(2x-1)}{x-1}$

Quyidagi $y=e^{-\int a(x)dx}\left(\int b(x)e^{\int a(x)dx}dx+c\right)$ formulaga asosan berilgan tenglamaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y=e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}\left(\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{-\int\frac{dx}{x(x-1)}}dx+c\right).$$

Bu yechimdagi integrallarni topamiz:

$$\int\frac{dx}{x(x-1)}\left|\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)},\ A=-1,\ B=1\right|=$$

a) $$=\int\left(-\frac{1}{x}+\frac{1}{x-1}\right)dx=-\ln|x|+\ln|x-1|=\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|;$$

$$\int\frac{x(2x-1)}{x-1}e^{\ln\frac{x-1}{x}}dx=\int\frac{x(2x-1)}{x-1}\cdot\left|\frac{x-1}{x}dx=\right|$$

v) $$=\pm\int(2x-1)dx=\pm(x^2-x);$$

bunda musbat va manfiy ishoralar $\left|\dfrac{x-1}{x}\right|=\pm\dfrac{x-1}{x}$ tenglamadan hosil bo‘ladi. Topilgan (*a*) va (*v*) integrallarni umumiy yechimga qo‘yamiz:

$$y=e^{-\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|}(\pm(x^2-x)+c)=\left|\frac{x}{x-1}\right|\cdot(\pm x^2-x)+c)=$$

$$=\pm\frac{x}{x-1}\cdot(\pm x(x-1)+c)=x^2+\frac{cx}{x-1}.$$

Undan $y(-2)=2$ shartni qanoatlantiruvchi xususiy yechimni ajratib olamiz:

$$2=4-\frac{2c}{-2-1}\Rightarrow c=-3\Rightarrow y=x^2-\frac{3x}{x-1}.$$

Misol-2: $\dfrac{x^2dy}{dx}-2xy=3$ differensial tenglamani umumiy yechimini toping.

yechish: Bu tenglamaning barcha hadlarini x^2 ga bo‘lib, qayta yozamiz:

$$\frac{dy}{dx}-\frac{2}{x^2}y=\frac{3}{x^2}.$$

Demak, berilgan misolda $a(x)=-\dfrac{2}{x},\ b(x)=\dfrac{3}{x^2}$ bo‘lib berilgan tenglama

$\dfrac{dy}{dx}+a(x)y=b(x)$ tipdagi birinchi tartibli chiziqli differensial tenglama ekan. Berilgan tenglamada $y=u\cdot v$ deb olamiz, u holda

$\dfrac{dy}{dx}=v\dfrac{du}{dx}=u\dfrac{dv}{dx}$ almashtirishdan so‘ng quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$x^2\left(v\frac{du}{dx}+u\frac{dv}{dx}\right)-2xuv=3$$

$$x^2v\frac{du}{dx}+x^2u\frac{dv}{dx}-2xuv=3$$

yoki $x^2v\frac{du}{dx}+u\,x/\,x\frac{dv}{dx}-2v/=3$ (*)

Bu yerda v ni shunday tanlaymizki, $x\frac{dv}{dx}-2v=0$ bo‘lsin. Xuddi shuningdek $xv\left[x\frac{du}{dx}-2u\right]+x^2u\frac{dv}{dx}=0$ tenglamada u ni $x\frac{du}{dx}-2u=0$ bo‘lsin deb tanlash mumkin.

$x\frac{dv}{dx}-2v=0$ tenglamada o‘zgaruvchilarni ajratib, v ni topamiz:

$\frac{dv}{v}-2\frac{dx}{x}=0$ bundan $\ln v-2\ln x=\ln c$ yoki $v=cx^2$. Yuqoridagi aytib o‘tilgani c = 1 bo‘lganidagi $v=x^2$ xususiy yechim bilan cheklanish mumkin. v ning ifodasini almashtirilgan (*) tenglamaga qo‘yib u ni topamiz:

$$x^2\frac{du}{dx}=3 \quad \text{yoki} \quad du=\frac{3dx}{x^4}$$

bundan $u=-\frac{1}{x^3}+c.\quad y=u\cdot v$ formulaga u va v uchun topilgan ifodalarni qo‘yib, berilgan chiziqli differensial tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$y=cx^2-\frac{1}{x}.$$

Misol-4: Ushbu $\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}y=-x^3y^2$ Bernulli tenglamasini umumiy integralini topaylik.

Tenglamani ikkala qismini u^2 ga bo‘lib, quyidagini hosil qilamiz: $\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}-\frac{3}{x}\frac{1}{y}=-x^3$.

$\frac{1}{y}=z$ deb olamiz; u holda $-\frac{1}{y^2}\frac{dy}{dx}=\frac{dz}{dx}$ va tenglama ushbu ko‘rinishga keladi:

$$\frac{dz}{dx}+\frac{3}{x}z=x^3.$$

Bu chiziqli tenglama variatsiyalash usuli bilan integrallaymiz. Bir jinsli $\frac{dz}{dx}+\frac{3}{x}z=0$ tenglamaning umumiy yechimi: $z=\frac{c}{x^3}$. Bu yerda $c=c(x)$ deb quyidagini hisoblaymiz: $\frac{dz}{dx}=\frac{dc(x)}{dx}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{3c(x)}{x^4}$ va chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaga qo‘yamiz:

$\frac{dc(x)}{dx}\cdot\frac{1}{x^3}-\frac{3c(x)}{x^4}+\frac{3}{4}\frac{c(x)}{x^3}=x^3$ yoki $dc(x)=x^5dx,$ bu yerdan $C(x)=\frac{x^7}{7}+C_1$, binobarin bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi $z=\frac{x^4}{7}+\frac{c_1}{x^3}$ bo‘ladi z ni $\frac{1}{y}$ bilan almashtirib, quyidagini hosil qilamiz:

1. $\frac{1}{y}=\frac{x^4}{7}+\frac{c_1}{x^3}$ yoki $y\left(\frac{x^7}{7}+C_1\right)=x^3$. $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=x$ j: $y=cx+x^2$

2. $\frac{dy}{dx}+\frac{2y}{x}=x^3$ j: $y=\frac{1}{6}x^4+\frac{c}{x^2}$.

3. $(1+y^{r})dx=(\sqrt{1+y^2}\sin y-xy)dy$ j: $x\sqrt{1+y^2}+\cos y=c$

4. $y^2dx-(2xy+3)dy=0$ j: $x=cy^2-\frac{1}{y}$

5. $xy'+y-e^x=0;\quad y(a)=b$ j: $y=\frac{e^x}{x}+\frac{ab-e^a}{x}$

6. $y'-\frac{y}{1-x^2}-1-x=0;\quad y(0)=0$ j: $y=\frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+arc\sin x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$

7. $y'-ytgx=\frac{1}{\cos x};\quad y(0)=0$ j: $y=\frac{x}{\cos x}$

8. $y'-\frac{3y}{x}=x$ j: $y=cx^3-x^2$

9. $y'+\frac{2y}{x}=\frac{e^{-x^2}}{x}$ j: $y=\frac{c-e^{-x^2}}{2x^2}$

10. $y'\cos x-y\sin x=\sin 2x$ j: $y=\frac{c-\cos 2x}{2\cos x}$

11. $(a^2+x^2)y'+xy=1$ j: $y=\frac{\ln c(x+\sqrt{a^2+x^2})}{\sqrt{a^2+x^2}}$

12. $y'-ytgx=ctgx$ j: $y=1+\frac{\ln ctg\frac{x}{2}}{\cos x}$

13. $y'+ay=e^{mx}$ j: 1) $m\neq -a\quad y=ce^{-ax}+\frac{e^{mx}}{m+a}$; 2) $m=-a\quad y=(c+x)e^{mx}$

14. $2ydx+(y^2-6x)dy=0$ j: $y^2-2x=cy^3$

15. $y'=\frac{1}{2x-y^2}$ j: $x=ce^{2y}+\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{2}y+\frac{1}{4}$

16. $y'=\frac{y}{2y\ln y+y-x}$ j: $x=y\ln y+\frac{c}{y}$

17. $x(y'-y)=(1+x^2)e^x$ j: $y=e^x\left(\ln|x|+\frac{x^2}{2}\right)+ce^x$

18. $y'+y\Phi'(x)-\Phi(x)\Phi'(x)=0,\ \Phi(x)-$ berilgan funksiya.

j: $y=ce^{\Phi(x)}+\Phi(x)-1$

19. $y'-ytgx=\sec x;\quad y(0)=0$ j: $y=\frac{x}{\cos x}$

20. $xy'+y-e^x=0;\quad y(a)=b$ j: $y=\frac{e^x+ab-e^a}{x}$

21. $xy'-\frac{y}{x+1}=x;\quad y(1)=0$ j: $y=\frac{x}{x+1}(x-1+\ln|x|)$

22. $t(1+t^2)dx=(x+xt^2-t^2)dt;\quad x(1)=\frac{\pi}{4}$ j: $x=-tarctgt$

TEST

Quyidagi funksiyaning bir jinslilik o'lchovini aniqlang: $f(x,y)=\dfrac{x-xy}{x+y^2}$	* o'lchovi yo'q	2-o'lchovli	1-o'lchovli	0-o'lchovli
$f(x,y)$ 0 o'lchovli 1 jinsli funksiyani ko'rinishini aniqlang:	* $f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$	$f(x,y)=\varphi(x+y)$	$f(x,y)=\varphi(xy)$	$f(x,y)=\varphi\left(\dfrac{1}{xy}\right)$
Birinchi tartibli bir jinsli differensial tenglamani yechishda qanday almashtirish bajariladi?	* $z=\dfrac{y}{x}$	$z=xy$	$z=x-y$	$z=x+y$
$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ tenglamada $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\neq 0$ bo'lsa, qanday almashtirish bajariladi.	* $x=\alpha+u,\ y=\beta+v$	$x=\dfrac{\alpha}{u},\ y=\dfrac{\beta}{v}$	$x=\alpha u,\ y=\beta v$	$x=zy$
$\dfrac{dy}{dx}=f\left(\dfrac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ tenglamada $\Delta=\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}=0$ bo'lsa, qanday almashtirish bajariladi.	* $z=ax+by$	$z=ax$	$z=by$	$z=ax+c$
Birinchi tartibli chiziqli tenglamani yechish usuli nomini aniqlang.	* Ixtiyoriy o'zgarmasni variatsiyalash usuli	Aniqmas koeffitsientlar usuli	Ketma-ket yaqinlashish usuli	Ketma-ket yo'qotish usuli
O'rniga qo'yish usulida qanday almashtirish bajariladi?	* $y=uv$	$y=u^2v$	$y=uv^2$	$y=u+v$
Umumlashgan bir jinsli tenglamada qanday almashtirish bajarilishini aniqlang.	* $y=z^\alpha$	$y=z+x$	$y=\dfrac{u}{v}$	$y=uv$
Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: $y'=\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$	* $y=x\sin(\ln cx)$	$y=x\ln(\sin cx)$	$y=x\ln(\cos cx)$	$y=xtg(\ln cx)$
Tenglamaning umumiy yechimini aniqlang: $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$	* $y=\dfrac{1}{x}(c-\cos x)$	$y=\dfrac{1}{x}(c-\sin x)$	$y=\dfrac{1}{x}(c-\cos\sin x)$	$y=\dfrac{1}{x}(c-\arccos x)$

MA'RUZA 5

5. Mavzu: To‘liq differensialli tenglama. Integrallovchi ko‘paytuvchi.

Reja:

1. To‘liq differensialli tenglama .
2. Funksiya to‘liq differensialli bo‘lishining zaruriy va yetarli sharti.
3. Integrallovchi ko‘paytuvchi.

Tayanch so’z va iborlar: *to‘liq dıfferensial tenglama, tenglama to‘liq bыlishining zaruriy va yetarli sharti, integrallovchi ko‘paytuvchi.*

1. Agar

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{1}$$

tenglamaning chap tomoni birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali, ya'ni

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = dU(x,y)$$

bo‘lsa, (1) tenglama *to‘liq dıfferensialli tenglama* deyiladi. Bu holda uni quyidagicha yozish mumkin:

$$dU(x,y) = 0$$

Buni integrallash bilan quyidagi umumiy integralni (yechimni) hosil qilamiz:

$$U(x,y) = C$$

Quyidagi savolning yuzaga kelishi tabiiy: qanday shartlarda (1) tenglama to‘liq differensialli $dU(x,y) = 0$ tenglama bo‘ladi va $U(x,y)$ funksiya qanday topiladi? Quyidagi teorema bu savolga javob beradi.

2. **Teorema.** *Ushbu*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \tag{2}$$

dıfferensial ıfoda (bu yerda $M(x,y)$ va $N(x,y)$ funksiyalar xOy tekislikning D sohasida aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, uzluksiz $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ va $\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega) birorta $U(x, y$ funksiyaning to‘liq dıfferensialli bo‘lishi uchun D sohaning barcha nuqtalarida

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{3}$$

shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Dastlab bu shartning zarurligini isbot qilamiz. Buning uchun shunday $U(x,y)$ funksiya mavjudki, uning uchun $dU = M(x,y)dx + N(x,y)dy$ bo‘ladi deb faraz qilamiz va (3) tenglikni isbot qilamiz. $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensialli

$$dU(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

ifoda bo‘ladi. U (2) ga teng bo‘lgani sababli istalgan dx va dy uchun o‘rinli bo‘lgan

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy \equiv \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy$$

ayniyatga ega bo‘lamiz. dx va dy oldidagi ko‘paytuvchilarni taqqoslab topamiz:

$$M(x,y) = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial U}{\partial y}$$

1-tenglikning ikala tomonini u bo‘yicha, 2-tenglikni x bo‘yicha differensiallaymiz, natijada:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial N}{\partial x}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$$

$U\in C^2(D)$ bo‘lgani uchun $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ bo‘ladi.

Teorema shartiga ko‘ra aralash hosilalar teng bo‘ladi, ya'ni

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$$

Bularni chap tomoni $\dfrac{\partial M}{\partial y},\ \dfrac{\partial N}{\partial x}$ mavjud bo‘lgani uchun (xususiy hosilalar uzluksizligidan) bu hosilalar mavjudki, ya'ni $U\in C^2(D)$ bo‘ladi, $\dfrac{\partial^2 U}{\partial x\partial y}=\dfrac{\partial^2 U}{\partial y\partial x}$ aralash hosila teng bo‘ladi.

Bundan $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ kelib chiqadi.

Endi yetarliligini isbtlaymiz. Buning uchun (3) shart bajarilgan deb, faraz qilamiz. (2) ifoda birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensialli bo‘lishini, ya'ni

$$\frac{\partial U}{\partial x}=M(x,y),\ \frac{\partial U}{\partial y}=N(x,y) \tag{4}$$

tenglik o‘rinli ekanligini isbot qilamiz.

Bu bilan masala xususiy hosilalai ikkita differensial tenglamadan iborat (4) sistemani qanoatlantiruvchi $U(x,y)$ funksiyani topishga keltiriladi:

(4) tenglamalarning birinchisini olamiz:

$\dfrac{\partial U}{\partial x}=M(x,y)$ buni $[x_0,x]$oraliq bo‘yicha integrallab quyidagi yechimni topamiz:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi(y) \tag{5}$$

bu yerda x_0 D sohaning birorta $P_0(x_0,y_0)$ nuqtasining absissasi $\varphi(y)$ esa uning $\forall C$ o‘zgarmasning o‘rnini bosuvchi birorta funksiya, chunki x bo‘yicha differensiallasak, yana oldingi tenglama hosil bo‘ladi ($\varphi'_x(y)=0$). $\varphi(y)$ni shunday aniqlaymizki, (4) tenglamalarning ikkinchisi ham qanoatlantirilsin. (5) ni ikkala qismini y bo‘yicha differensiallaymiz, u holda

$$\frac{\partial U}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\varphi'(y)$$

biroq $\dfrac{\partial U}{\partial y}=N(x,y$ bo‘lgani uchun va aniq integralni parametr bo‘yicha differensiallash teoremasiga ko‘ra

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx$$

,

bo‘lgani uchun

$$N(x,y)=\int_{x_0}^{x}\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}dx+\varphi'(y)$$

Shartga ((3) shart) $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ ga ko‘ra

$$\varphi'(y)=N(x,y)-\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx$$

Keyingi integral

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}dx=N(x,y)\Big|_{x_0}^{x}=N(x,y)-N(x_0y)$$

ga teng, shu sababli

$$\varphi'(y)=N(x,y)-N(x,y)+N(x_0,\,y)\Rightarrow\varphi'(y)=N(x_0,y)$$

ni $[y_0,y]$ gacha integrallaymiz (y bo‘yicha) bu yerdan

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,y)dy+C$$

bu yerda y_0 D sohadagi $P_0(x_0,y_0)$ nuqtaning ordinatasi , C-o‘zgarmas.

$\varphi(y)$ ni topilgan qiymatini (5) tenglikka qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$$U(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(x,y)dx+\int_{y_0}^{y}N(x,y)dx+\varphi(y) \tag{6}$$

Shunday qilib $U(x,y)$ funksiyaning mavjud ekanligini isbotlanibgina qolmasdan, hatto bu funksiyani topish uchun formula ham keltirib chiqarildi.

Aslini olganda tegishli masalalar yechganda tayyor (6) formuladan foydalanmasdan, umumiy holdagi kabi yo‘l tutish mumkin (yoki aniq integrallarni aniqmass integrallar bilan almashtirish kerak)

Misol ko‘riladi.

1-misol. $(7x+3y)dx+(3x-5y)dy=0$

3. Agar $\dfrac{\partial M}{\partial y}=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ shart bajarilmagan bo‘lsa, u holda (1) tenglama to‘liq differensialli tenglama bo‘lmaydi. Biroq bu tenlamani μ(x,y) funksiyaga ko‘paytirish bilan uni to‘liq differensialli tenglamaga keltirish mumkin. Bunday funksiya berilgan differensial tenglama uchun **integrallovchi ko‘paytuvchi** deyiladi. Har qanday differensial tenglama uchun integrallovchi ko‘paytuvchi mavjud, Biroq uni topish oson emas. (1) tenglamaning integrallovchi ko‘paytuvchisini qanday izlanishini ko‘rsatamiz.

Ushbu

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0$$

tenglama to‘liq diffrensialli tenglama bo‘lishi uchun

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}=\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

yoki

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}+\mu\frac{\partial M}{\partial y}=N\frac{\partial\mu}{\partial x}+\mu\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{7}$$

shart bajarilishi kerak.

(7) tenglik birinchi tenglamaning integrallovchi ko‘paytuvchilarining differensial tenglamasidir, chunki uning har bir yechimi (1) tenglamaning ikkala tomoniga ko‘paytirilgandan so‘ng uni to‘liq differensiallardagi tenglamaga keltiriladi. $\mu(x,y)$ ni topish uchun xususiy hosilali (7) differensial tenglamani integrallash kerak. Umumiy holda bu masalani yechish qiyin. Agar μ faqat birgina x yoki y o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa, masala ancha soddalashadi. Biz shu ikki holni qaraymiz.

1-hol. $\mu=\mu(x)$ bo‘lsin. U holda (7) tenglama ushbu ko‘rinishini egallaydi.

$$N\frac{d\mu(x)}{dx}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

yoki

$$\frac{d\mu(x)}{\mu(x)}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx$$

bu yerdan

$$\ln\mu(x)=\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx+C,$$

ya'ni

$$\mu(x)=e^{\int\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx} \tag{8}$$

($\forall C$ o‘zgarmas nolga teng deb olingan, chunki qandaydir bitta integrallovchi ko‘paytuvchiga ega bo‘lsak, kifoya).

Bu holda $\dfrac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}$ ifoda y - ga bog‘liq bo‘lmasligi ravshan.

2-hol. $\mu=\mu(y)$ bo‘lsin. U holda (7) tenglama ushbu ko‘rinishda bo‘ladi: $\dfrac{d\mu}{dx}=0$

$$M\frac{d\mu(y)}{dy}=-\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

yoki

$$\frac{d\mu(y)}{\mu(y)} = -\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M} dy$$

bu yerdan

$$\mu(y) = e^{-\int \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N} dy} \qquad (9)$$

bu yerda $C = 0$ deb olingan.

Bu holda $\frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{M}$ ifoda x-ga bog'liq emas.

(1) tenglamani to'liq diferensialli tenglama ko'rinishiga keltirish uchun qaralayotgan xususiy hollarda odatda quyidagicha yo'l tutiladi. $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ ifoda tuziladi va uning N ga nisbati olinadi. Agar bu ifoda y ga bog'liq bo'lmasa, integrallovchi ko'paytuvchini topish uchun (8) formuladan foydalanish kerak; aks holda $\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}$ ifodaning M ga nisbati olinadi, agar bu nisbat x ga bog'liq bo'lmasa, u holda x ga bog'liq bo'lmagan μ ko'paytuvchi mavjud va uni (9) formula bo'yicha topish mumkin.

$\mu = \mu(\omega(x, y))$**-ko'rinishidagi integrallovchi ko'paytuvchi.** $\omega(x, y)$- berilgan funksiya

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \qquad (1)$$

$$N\frac{\partial \mu}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right) \qquad (7)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial x} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x}, \quad \frac{\partial \mu}{\partial y} = \frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y},$$

$$N\frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{\partial \mu}{\partial \omega} \cdot \left(N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}\right) = \mu\left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right)$$

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \omega} = \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial \omega}{\partial x} - M\frac{\partial \omega}{\partial y}}$$

$$\frac{\partial\mu}{\partial y}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial x}}\partial\omega$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\frac{\partial\omega}{\partial x}-M\frac{\partial\omega}{\partial x}}=\psi(\omega)$$

$$\mu(\omega)=e^{\int\psi(\omega)d\omega}=f(\omega)=f(\omega(x,y))$$

bog‘liq bo‘lsa $\Rightarrow$ (1) tenglama uchun $\mu=\mu(\omega(x,y))$ integrallovchi ko‘paytuvchi

1) $\omega(x,y)=x,\ \omega(x,y)=y\Rightarrow\mu(x),\ \mu(y)$ mavjud.

2) $\omega(x,y)=x\pm y$ (10) da $\frac{\partial\omega}{\partial x}=1,\ \frac{\partial\omega}{\partial y}=\pm1$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N\pm M}=\omega(x\pm y)$$

bo‘lsa, u holda $\mu=\mu(x\pm y)$mavjud.

3) $\omega(x,y)=x^2\pm y^2$ (10) da

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\pm2y$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{2(xN\pm yM)}=\omega(x^2\pm y^2)$$

bo‘lsa, u holda $\mu=\mu(x^2\pm y^2)$ mavjud.

4) $\omega(x,y)=x\cdot y$ (10) da $\frac{\partial\omega}{\partial x}=y,\ \frac{\partial\omega}{\partial y}=x$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{yN-xM}=\omega(xy)$$

bo‘lsa, u holda $\mu=\mu(x\cdot y)$ mavjud.

5) $\omega(x,y)=\frac{y}{x}$ (10) da

$$\frac{\partial\omega}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\qquad \frac{\partial\omega}{\partial y}=\frac{1}{x}$$

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-\frac{y}{x^2}N-\frac{1}{x}M}=\omega\left(\frac{y}{x}\right)$$

bo‘lsa, u holda $\mu=\mu\left(\frac{y}{x}\right)$ mavjud.

$\mu(x,y)=\mu_1(x)\mu_2(y)$ **ko‘rinishida integrallovchi** ko‘paytuvchi qidiramiz:

$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right) \tag{7}$$

$\mu(x,y)=\mu_1(x)\mu_2(y)$ ni (7) ga qo‘yamiz.

$$N\mu_2(y)\frac{\partial\mu_1(x)}{\partial x}-M\mu_1(x)\frac{\partial\mu_2(y)}{\partial y}=\mu_1(x)\mu_2(y)\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\Bigg|:\mu_1(x)\mu_2(y)\neq 0$$

$$N\frac{1}{\mu_1(x)}\cdot\frac{\partial\mu_1(x)}{\partial x}-M\frac{1}{\mu_2(y)}\cdot\frac{\partial\mu_2(y)}{\partial y}=\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=N\psi_1(x)-M\psi_2(y),$$

bu yerda

$$\psi_1(x)=\frac{1}{\mu_1(x)}\frac{\partial\mu_1(x)}{\partial x}\Rightarrow\frac{\partial\mu_1(x)}{\mu_1(x)}=\psi_1(x)dx,$$

$$\mu_1(x)=e^{\int\psi_1(x)dx},$$

$$\frac{\partial\mu_2(y)}{\mu_2(y)}=\psi_2(y)dy\Rightarrow\psi_2(y)=\frac{1}{\mu_2(y)}\frac{\partial\mu_2(y)}{\partial y},$$

$$\mu_2(y)=e^{\int\psi_2(y)dy}.$$

Misol.

$$(y^4-4xy)dx+(2xy^3-3x^2)dy=0\quad(x>0,y>0)\ (1/4y^3<x<2/3y^3)$$

tenglama umumiy yechimini toping. Bu tenglama to‘liq differensialli bo‘lmaydi.

$$M=y^4-4xy,\ N=xy^3-3x^2$$

va

$$\frac{\partial M}{\partial y}=4y^3-4x,\ \frac{\partial N}{\partial x}=2y^3-6x\Rightarrow\frac{\partial M}{\partial y}\neq\frac{\partial N}{\partial x}$$

Berilgan tenglama $\mu(x,y)=\mu_1(x)\mu_2(y)$ ko‘rinishidagi integrallovchi ko‘paytuvchiga ega, chunki

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=4y^3-4x-(2y^3-6x)=(2xy^3-3x^2)\frac{2}{x}-(y^4-4xy)\cdot\frac{2}{y}=N\frac{2}{x}-M\frac{2}{y}$$

Bundan

$$\psi_1(x)=\frac{2}{x},\quad \psi_2(y)=\frac{2}{y},\quad \mu_1(x)=e^{\int\frac{2}{x}dx}=x^2,\quad \mu_2(y)=e^{\int\frac{2}{y}dy}=y^2.$$

Demak, $\mu(x,y)=x^2y^2$. U holda

$$x^2y^2(y^4-4xy)dx+x^2y^2(2xy^3-3x^2)dy=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x^2y^6-4x^3y^3)dx+(2x^3y^5-3x^4y^2)dy=0$$

Oxirgi tenglama uchun esa

$$\frac{\partial M}{\partial y}=6x^2y^5-12x^3y^2=\frac{\partial N}{\partial x}=6x^2y^5-12x^3y^2\Rightarrow$$

Bundan tenglama to‘liq diffenrensialliligi kelib chiqadi. Bu esa tenglama to‘liq yechildi degani.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. O‘zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli tenglamalar.
2. To‘la differensial tenglamalar.

Glossariy

To‘liq differensial tenglama – Agar $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ tenglamaning chap tomoni birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensiali, ya'ni $M(x,y)dx+N(x,y)dy=dU(x,y)$ bo‘lsa, (1) tenglama to‘liq differensialli tenglama deyiladi.

To’la dıfferensial tenglama bo’lish zarur va yetarli sharti **-** Ushbu $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ differensial ifoda (bu yerda $M(x,y)$ va $N(x,y)$ funksiyalar xOy tekislikning D sohasida aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, uzluksiz $\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}$ va $\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}$ xususiy hosilalarga ega) birorta $U(x,y)$ funksiyaning to‘liq differensialli bo‘lishi uchun D sohaning barcha nuqtalarida $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ shart bajarilishi zarur va yetarlidir.

Integrallovchi ko'paytuvchi – Agar $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ shart bajarilmagan bo'lsa, u holda (1) tenglama to'liq differensialli tenglamaga aylantirish uchun tenglamani ko'paytirish lozim bo'lgan μ (x,y) funksiya.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Qanday tenglama to'liq differensialli tenglama deyiladi?
2. Qanday shart bajarilmasa N(x,y)dx+N(x,y)dy=0 tenglama to'liq differensialli tenglama deyiladi?
3. Berilgan differensial uchun integrallovchi ko'paytuvchi deb nimaga aytiladi?
4. N(x,y)dx+N(x,y)dy=0 tenglama to'liq differensialli tenglama bo'lishi uchun qanday shart bajarilishi kerak?
5. $(y^4 - 4xy)dx + (2xy^3 - 3x^2)dy = 0 \qquad (x>0, y>0) \quad (1/4y^3 < 2/3y^3)$ tenglama to'liq differensial tenglama emasligini isbotlang?

Amaliy mashg'ulot-5

1. $y' + y = x\sqrt{y}$ j: $y = \left(x - 2 + ce^{-\frac{x}{2}}\right)^2$
2. $\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = -xy^2$ j: $y(x^2 + cx)1$
3. $2xy\frac{dy}{dx} - y^2 + x = 0$ j: $y^2 = x\ln\frac{c}{x}$
4. $ydx + \left(x - \frac{1}{2}x^3y\right)dy = 0$ j: $x^2 = \frac{1}{y + cy^2}$
5. $3xdy = y(1 + x\sin x - 3y^3\sin x)dx$ j: $y^3(3 + ce^{\cos x}) = x$
6. $xy' + 2\sqrt{xy} = y$ j: $x > 0\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln\frac{c}{x}; \quad x < 0\sqrt{\frac{y}{x}} = \ln cx$
7. $y' + xy = xy^3$ j: $y^2 = \frac{1}{1 + ce^{x^2}}$
8. $3y^2y^1 + y^3 = x + 1; \quad y(1) = -1$ j: $y^3 = x + ce^{-x}; \quad y^3 = x - 2e^{1-x}$
9. $(1 - x^2)y' - xy = xy^2; \quad y(0) = 0,5$ j: $y = \frac{1}{3\sqrt{1 - x^2} - 1}$
10. $y' + 2xy = 2x^3y^3$ j: $\frac{1}{y^2} = ce^{2x^2} = x^2 + \frac{1}{2}$
11. $y' + \frac{y}{x+1} + y^2 = 0$ j: $y = \frac{1}{(1+x)[c + \ln|1+x|]}$

12. $y^{n-1}(ay'+y)=x$ j: $ny^n = ce^{\frac{-nx}{a}} + nx - a$

13. $xdx = \left(\dfrac{x^2}{y} - y^3\right)dy$ j: $x^2 = y^2(c-y^2)$

14. $xy'+y = y^2\ln x$ j: $y(1+\ln x + cx) = 1$

15. $y' - ytgx + y^2\cos x = 0$ j: $y(x+c) = \sec x$

16. $y' + \dfrac{2y}{x} = \dfrac{2\sqrt{y}}{\cos^2 x}$ j: $y = \left(\dfrac{c+\ln(\cos x)}{x} + tgx\right)^2$

17. $xy' - 4y - x^2\sqrt{y} = 0$ j: $y = \dfrac{x^4}{4}\ln^2|cx|$

18. $ydy - \dfrac{ay^2}{x^2}dx = \dfrac{bdx}{x^2}$ j: $y^2 = ce^{\frac{-2a}{x}} - \dfrac{b}{a}$

19. $y' = \dfrac{y\varphi'(x) - y^2}{\varphi(x)}$, $\varphi(x)-$ berilgan funksiya.

j: $y = \dfrac{\varphi(x)}{x+c}$

20. $(2x^2 y\ln y - x)y' = y$ j: $xy(c - \ln^2 y) = 1$

TEST

O‘rniga qo‘yish usulida qanday almashtirish bajariladi?	* $y = uv$	$y = u^2 v$	$y = uv^2$	$y = u + v$
Umumlashgan bir jinsli tenglamada qanday almashtirish bajarilishini aniqlang.	* $y = z^\alpha$	$y = z + x$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = uv$
Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: $y' = \dfrac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$	* $y = x\sin(\ln cx)$	$y = x\ln(\sin cx)$	$y = x\ln(\cos cx)$	$y = xtg(\ln cx)$
Tenglamaning umumiy yechimini aniqlang: $y' + \dfrac{1}{x}y = \dfrac{\sin x}{x}$	* $y = \dfrac{1}{x}(c - \cos x)$	$y = \dfrac{1}{x}(c - \sin x)$	$y = \dfrac{1}{x}(c - \cos\sin x)$	$y = \dfrac{1}{x}(c - \arccos x)$
Quyidagi tenglamalarni qaysi biri Bernulli tenglamasi hisoblanadi:	* $y' + P(x)y = Q(x)y^\alpha$	$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = F(x)$	$y' + Q(x)y^2 = F(x)$	$y' + Q(x)y^2 = F(x)y^\alpha$
Bernulli tenglamasi qanday tenglamaga keltiriladi?	* Chiziqli	Bir jinsli	Eyler	Rikkati
Rikkati tenglamasini aniqlang.	* $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = F(x)$	$y' + Q(x)y^4 = F(x)$	$x^2 y' + P(x)y^{\frac{1}{2}} = 0$	$y' + P(x)y^3 = Q(x)$
Rikkati tenglamasi avval qanday tenlamaga keltiriladi?	* Bernulli	Lagranj	O‘zgaruvchilarga ajralgan	Klero
Rikkati tenglamasining yechishda qanday almashtirish bajariladi.	* $y = y_1(x) + z$	$y = uv$	$y = \dfrac{u}{v}$	$y = y_1(x)z$

Differensial tenglama to'liq bo'lishining zaruriy va yetarli shartini aniqlang: $(M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0)$	* $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$	$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}$

MA'RUZA №6 (№7)
Mavzu: Koshi masalasi yechimi mavjudligi va yagonaligi .

Reja

1. Koshi masalasi haqida tushuncha.
2. Mavjudlik va yagonalik teoramalari. Koshi, Pikar-Lindelef, Peano teoremasi.
3. Ekvivalentlik lemmasi. Gronuoll lemmasi.

Tayanch so'z va iboralar: *birinchi tartibli differensial tenglama uchun Koshi masalasi, Koshi teoremasi, Pikar – Lindelef teoremasi, Pikar teoremasi, ekvivalentlik lemmasi, Gronuoll lemmasi.*

Koshi masalasining qo'yilishi:

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1}$$

tenglama berilgan bo'lib, unda $f(x,y)$ funksiya R^2 tekislikning D sohasida aniqlangan, uzluksiz va I interval Ox o'qidagi interval bo'lsin, x_0 ni o'z ichiga oladigan I intervalni va shu I intervalda aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi hamda ushbu

$$\begin{cases} 1^0.(x,\varphi(x)) \in D \ (x \in I) \\ 2^0.\varphi'(x) = f(x,\varphi(x)) \ (x \in I) \\ 1^0.\varphi(x_0) = y_0, \ (x_0, y_0) \in D \end{cases} \tag{2}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi $y = \varphi(x)$ funksiyani topish talab etiladi. Bu masala qisqacha

$$\begin{cases} y' = f(x,y) & (1) \\ y(x_0) = y_0 & (2) \end{cases}$$

kabi yoziladi va (1) tenglama uchun Koshi masalasi (yoki boshlang'ich masala) deyiladi. Yuqoridagi 1^0, 2^0 va 3^0 shartlarni qanoatlantiradigan funksiya I intervalda Koshi masalasining *yechimi* deyiladi.

Har bir (1) ko'rinishdagi differensial tenglama uchun Koshi masalasi (1) va (2) ning yechimi bormi? Agar bunday yechim bor bulsa yagonami?- degan savollarga javob berish kerak bo'ladi. Bu savollarga javob beradigan teoremalar *mavjudlik va yagonalik teoremalari* deb yuritiladi. Quyida ulardan asosiylarni keltiramiz va Koshi-Pikar teoremasini isboti bilan beramiz.

1-TEOREMA(Koshi teoremasi). *Agar $f(x,y)$ funksiya D sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, uning y bo'yicha xususiy hosilasi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, biror $G (G \subset D)$ sohada* *aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda:*

1⁰. (1) tenglamaning x_0 *–ni o'z ichiga oladigan biror intervalda aniqlangan va har bir berilgan* $(x_0, y_0) \in G$ *nuqta uchun* $y(x_0) = y_0$ *boshlang'ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.*

2⁰ . Agar (1) tenglamaning ikkita $y = \varphi(x)$ *va* $y = \psi(x)$ *yechimlari* x_0 *da ustma-ust tushsa, ya'ni* $\varphi(x_0) = \psi(x_0) = y_0$*, bo'lsa, u holda bu* $y = \varphi(x)$ *va* $y = \psi(x)$ *yechimlar aniqlanish sohalarining umumiy qismida ustma-ust tushadi.*

TA'RIF. Agar $f(x, y)$ funksiya D sohada aniqlagana bo'lib, shu funksiya uchun shunday $L \geq 0$ son mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $(x, y_1) \in D, (x, y_2) \in D$ nuqtalar uchun ushbu

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_2 - y_1| \qquad (L)$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x, y)$ funksiya D sohada y argumenti bo'yicha *Lipshits shartini qanoatlantiradi* deyiladi, L esa *Lipshits o'zgarmasi* deyiladi.

2-TEOREMA (Koshi-Pikar-Lindelef teoremasi). *Agar*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \qquad (1)$$

tenglamada $f(x, y)$ *funksiya:*

1⁰) $D = \{(x, y) : x_0 - a \leq x \leq x_0 + a,\ y_0 - a \leq y \leq y_0 + a\}$ *tugri to'rtburchakda uzluksiz (demak, unda chegaralangan, ya'ni* $\exists M > 0\ |f(x, y)| \leq M$ *) bo'lsa,*

2⁰) y *argumenti bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda (1) tenglamani (2) boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan va* $|x - x_0| \leq h,\ h = \min(a, \frac{b}{M})$ *intervalda aniqlangan yagona yechimga ega bo'ladi.*

3-TEOREMA(Peano teoremasi). *Agar* $f(x, y)$ *funksiya* D *sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda* D *sohaning berilgan* $(x_0, y_0) \in D$ *nuqtasi uchun (1) tenglamaning ikkinchi shartini qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud bo'ladi.*

Pikar teoremasini isbotiga o'tishdan avval zarur ikki tasdiqni keltiramiz:

1-Ekvivalentlik lemmasi. *Agar* $y = \varphi(x)$ *funksiya* x_0 *nuqtani o'z ichiga olgan biror* I *intervalda aniqlangan bo'lib, (1) va (2) Koshi masalasining yechimi bo'lsa, u holda* $y = \varphi(x)$ *funksiya* I *intervalda*

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))d\tau \qquad (3)$$

integral tenglamaning yechimi bo'ladi, va aksincha, agar $y=\varphi(x)$ *funksiya* I *intervalda uzluksiz bo'lib, (3) tenglamaning yechim bo'lsa, u holda* $y=\varphi(x)$ *funksiya (1) va (2) Koshi masalasining ham yechimi bo'ladi.*

Isbot. $y=\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi bo'lgani uchun uni ayniyatga aylantiradi, ya'ni:

$$\frac{d\varphi(x)}{dx}\equiv f(x,\varphi(x)).$$

Bu ayniyatni x_0 dan x gacha $(x_0\in I,\, x\in I)$ integrallaymiz. ($\varphi(x_0)=y_0$ ekanini hisobga olib):

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau$$

Bundan $y=\varphi(x)$ funksiya (3) integral tenglamaning yechimi ekani kelib chiqadi. Endi $y=\varphi(x)$ funksiya (3) tenglamaning yechimi bo'lsin. Undan $\varphi(x_0)=y_0$ ekani va

$$\varphi'(x)=\frac{d}{dx}(y_0+\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau)=0+\frac{d}{dx}(\int_{x_0}^{x} f(\tau,\varphi(\tau))d\tau)=f(x,\varphi(x))$$

dan $y=\varphi(x)$ funksiya (1) tenglamaning yechimi ekanligi kelib chiqadi. Lemma isbot bo'ldi.

2-Gronoull lemmasi. *Agar* $u(x)$ *funksiya* $[x_0,x_0+h]$ *intervalda* $u(x)\geq 0$, *uzluksiz bo'lib, shu intervalda ushbu*

$$u(x)\leq A+B\int_{x_0}^{x} u(\tau)d\tau,\ A\geq 0, B\geq 0 \qquad (4)$$

integral tengsizlikni qanoatlantirsa, shu $u(x)$ *funksiya uchun quyidagi*

$$u(x)\leq Ae^{B(x-x_0)},\ x\in[x_0,x_0+h] \qquad (5)$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Ushbu

$$u(x)=e^{B(x-x_0)}v(x)$$

belgilashni kiritamiz. Lemma shartiga ko'ra $u(x)\geq 0$, bo'lgani uchun $v(x)\geq 0$ va $v(x)$ ham $[x_0,x_0+h]$ intervalda uzluksiz bo'ladi. Shuning uchun $v(x)$ funksiya o'sha yopiq intervalning biror x_1, $x_1\in[x_0,x_0+h]$ nuqtasida maksimumga erishadi. (4) munosabatga $u(x)$ funksiya uchun ifodani qo'yib, $x=x_1$ deymiz:

$$e^{B(x_1-x_0)}v(x_1)=u(x)\le A+B\int_{x_0}^{x_1}e^{B(\tau-x_0)}v(\tau)d\tau\le$$

$$\le A+Bv(x_1)\int_{x_0}^{x_1}e^{B(\tau-x_0)}d\tau=A+Bv(x_1)\frac{e^{B(\tau-x_0)}}{B}\Bigg|_{x_0}^{x_1}=$$

$$=A+v(x_1)e^{B(x_1-x_0)}+v(x_1)$$

Bundan $v(x_1)\le A$ kelib chiqadi. Demak,

$$u(x)=v(x)e^{B(x-x_0)}\le v(x_1)e^{B(x-x_0)}\le Ae^{B(x-x_0)}$$

ya'ni $u(x)\le Ae^{B(x-x_0)}$. Lemma isbot bo‘ldi.

Gronoull lemmasidan natija sifatida $A=0$ bo‘lganda (5) ga ko‘ra $u(x)\equiv 0,\ x\in[x_0,x_0+h]$ kelib chiqadi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Chiziqli differensial tenglamalar. Yechimning xossalari.
2. Integrallovchi ko‘paytuvchi va uning mavjudligi haqida teorema.

Glossariy

Koshi masalasi – $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ tenglama berilgan bo‘lib, unda $f(x,y)$ funksiya R^2 tekislikning D sohasida aniqlangan, uzluksiz va I interval x o‘qidagi interval bo‘lsin, x_0 ni o‘z ichiga oladigan I intervalni va shu I intervalda aniqlangan uzluksiz differensiallanuvchi hamda ushbu $\begin{cases}1^0.\ (x,\varphi(x))\in D\ (x\in I)\\ 2^0.\ \varphi'(x)=f(x,\varphi(x))(x\in I)\\ 3^0.\ \varphi(x_0)=y_0,\ (x_0,y_0)\in D\end{cases}$ shartlarni qanoatlantiruvchi $y=\varphi(x)$ funksiyani topish talab etiladi. Bu masala qisqacha $\begin{cases}y'=f(x,y) & (1)\\ y(x_0)=y_0 & (2)\end{cases}$ kabi yoziladi va (1) tenglama uchun Koshi masalasi (yoki boshlang‘ich masala) deyiladi.

Koshi teoremasi - Agar $f(x,y)$ funksiya D soxada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, uning y bo‘yicha xususiy xosilasi $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}$, biror $G(G\in D)$ soxada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u xolda :

1^0. (1) tenglamaning x_0–ni o‘z ichiga oladigan biror intervalda aniqlangan va xar bir berilgan $(x_0, y_0)\in G$ nuqta uchun $y(x_0)=y_0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.

2^0 . Agar (1) tenglamaning ikkita $y=\varphi(x)$ va $y=\psi(x)$ yechimlari x_0 da ustma-ust tushsa, ya'ni $\varphi(x_0)=\psi(x_0)=y_0$, bo‘lsa, u xolda bu $y=\varphi(x)$ $y=\psi(x)$ yechimlar aniqlanish soxalarining umumiy qismida ustma-ust tushadi.

Lipshits sharti - Agar $f(x,y)$ funksiya D soxada aniqlagana bo‘lib, shu funksiya uchun shunday $L\geq 0$ son mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy $(x,y_2)\in D$ $(x,y_2)\in D$ nuqtalar uchun ushbu

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_2-y_1| \qquad (L)$$

tengsizlik bajarilsa, u xolda $f(x,y)$ funksiya D soxada u bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi, L esa Lipshits o‘zgarmasi deyiladi.

Koshi-Pikar-Lindelef teoremasi - Agar

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \qquad (1)$$

tenglamada $f(x,y)$ funksiya:

1^0) $D=\{(x,y): x_0-a\leq x\leq x_0+a,\ y_0-b\leq y\leq y_0+b\ \}$

tugri to‘rtburchakda uzluksiz(demak, unda chegaralangan, ya'ni $\exists M>0\ |f(x,y)|\leq M)$ bo‘lsa,

2^0) y bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda (1) tenglama (2) boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan va $|x-x_0|\leq h,\ h-\min\left(a,\dfrac{b}{M}\right)$ intervalda aniqlangan yagona yechimga ega bo‘ladi.

Peano teoremasi - Agar $f(x,y)$ funksiya D sohada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u xolda D sohaning berilgan $(x_0,y_0)\in D$ nuqtasi uchun (1) tenglamaning ikkinchi shartini qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud bo‘ladi.

Gronoull lemmasi. Agar $u(x)$ funksiya $[x_0,x_0+h]$ intervalda $u(x)\geq 0$, uzluksiz bo‘lib, shu intervalda ushbu

$$u(x)\leq A+B\int_{x_0}^{x}u(\tau)d\tau,\ A\geq 0, B\geq 0$$

integral tengsizlikni qanoatlantirsa, shu $u(x)$ funksiya uchun quyidagi

$$u(x)\leq Ae^{B(x-x_0)}, x\in[x_0,x_0+h]$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching:

$(1-x^2)y'-xy=xy^2;\quad y(0)=0,5$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Koshi masalasi qanday qo‘yiladi?
2. Koshi masalasi deb nimaga aytiladi?
3. Lipishu o‘zgarmasi deb nimaga aytiladi?
4. Ekvivalentlik lemmasini isbotlang?
5. Gronoull lemmosini isbotlang?

Amaliy mashg’ulot-6

1. $xdx = (x^2 - 2y + 1)dy$ j: $x^2 = ce^{2y} + 2y$
2. $(x+1)(yy' - 1) = y^2$ j: $y^2 = c(x+1)^2 - 2(x+1)$
3. $x(e^y - y^1) = 2$ j: $e^{-y} = ex^2 + x$
4. $(x^2 - 1)y'\sin y + 2x\cos y = 2x - 2x^3$ j: $\cos y = (x^2 - 1)\ln c(x^2 - 1)$
5. $y(x) = \int_0^x y(t)dt - x + 1$ j: $y = 2e^x - 1$
6. $\int_0^x (x-t)y(t)dt = 2x + \int_0^x y(t)dt$ j: $y = -2e^x$
7. $x^2y^1 + xy + x^2y^2 = 4;\quad y = \frac{2}{x} -$ xususiy yechim.

j: $y = \frac{2}{x} + \frac{4}{cx^5 - x}$

8. $3y^1 + y^2 + \frac{2}{x^2} = 0;\quad y = \frac{1}{x} - x \cdot e.$ j: $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{cx^{2/3} + x}$
9. $xy^1 - (2x+1)y + y^2 = -x^3;\quad y = x -$ xususiy yechim.

j: $y = x + \frac{x}{x + c}$

10. $y^1 - 2xy + y^2 = 5 - x^2;\quad y = x + 2 -$ xususiy yechim j: $y = x + 2 + \frac{4}{ce^{4x} - 1}$.
11. $y^1 + 2ye^x - y^2 = e^{2x} + e^x;\quad y = e^x -$ xususiy yechim j: $y = e^x - \frac{1}{x + c}$

TEST

$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{ax + by + c}{a_1x + b_1y + c_1}\right)$ tenglamada $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} = 0$ bo‘lsa, qanday almashtirish bajariladi.	* $z = ax + by$	$z = ax$	$z = by$	$z = ax + c$
Birinchi tartibli chiziqli tenglamani yechish usuli nomini aniqlang.	* Ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usuli	Aniqmas koeffitsientlar usuli	Ketma-ket yaqinlashish usuli	Ketma-ket yo‘qotish usuli
O‘rniga qo‘yish usulida qanday almashtirish bajariladi?	* $y = uv$	$y = u^2v$	$y = uv^2$	$y = u + v$

Umumlashgan bir jinsli tenglamada qanday almashtirish bajarilishini aniqlang.	* $y = z^{\alpha}$	$y = z + x$	$y = \frac{u}{v}$	$y = uv$
Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: $y' = \frac{y + \sqrt{x^2 - y^2}}{x}$	* $y = x \sin(\ln cx)$	$y = x \ln(\sin cx)$	$y = x \ln(\cos cx)$	$y = x tg(\ln cx)$
Tenglamaning umumiy yechimini aniqlang: $y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$	* $y = \frac{1}{x}(c - \cos x)$	$y = \frac{1}{x}(c - \sin x)$	$y = \frac{1}{x}(c - \cos \sin x)$	$y = \frac{1}{x}(c - \arccos x)$
Quyidagi tenglamalarni qaysi biri Bernulli tenglamasi hisoblanadi:	* $y' + P(x)y = Q(x)y^{\alpha}$	$y' + P(x)y + Q(x)y^2 = F(x)$	$y' + Q(x)y^2 = F(x)$	$y' + Q(x)y^2 = F(x)y^{\alpha}$
Bernulli tenglamasi qanday tenglamaga keltiriladi?	* Chiziqli	Bir jinsli	Eyler	Rikkati
Rikkati tenglamasini aniqlang.	* $y' + P(x)y + Q(x)y^2 = F(x)$	$y' + Q(x)y^4 = F(x)$	$x^2 y' + P(x) y^{\frac{1}{2}} = 0$	$y' + P(x)y^3 = Q(x)$
Rikkati tenglamasi avval qanday tenlamaga keltiriladi?	* Bernulli	Lagranj	O'zgaruvchilarga ajralgan	Klero

MA'RUZA № 8.

Mavzu: Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalar. Parametr kiritish usuli.

Reja:

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli tenglama.
2. n-chi darajali birinchi tartibli tenglama.
3. y - ga nisbatan yechilgan va x qatnashmagan tenglama.
4. x - ga nisbatan yechilgan va y qatnashmagan tenglama.
5. y yoki x ga nisbatan yechilmagan tenglama.
6. Parametr kiritish usuli.

Tayanch so'z va iboralar: *hosilaga nisbatan yechilmagan 1-chi tartibli tenglama, n-darajali birinchi tartibli tenglama, y-ga nisbatan yechilgan va x qatnashmagan tenglama, x-ga nisbatan yechilgan va uqatnashmagan tenglama, u yoki x-ga nisbatan yechilmagan tenglama, parametr kiritish usuli.*

1. Shu paytga qadar hosilaga nisbatan yechilgan, ya'ni

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

ko‘rinishdagi differensial tenglamalarni tekshirish bilan cheklanib keldik. Biroq, oldingi ma'ruzalarda aytib o‘tilganidek, birinchi tartibli tenglama umuman aytganda,

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2}$$

ko‘rinishga ega bo‘lishi mumkin, shu bilan birga (2) ko‘rinishdagi tenglamadan (1) ko‘rinishdagi tenglamaga har doim ham o‘tish mumkin bo‘lavermaydi. Bunday holda (2) tenglama hosilaga *nisbatan yechilmagan differensial tenglama* deyiladi. (2) differensial tenglamani integrallash masalasini *parametr kiritish usuli* bilan hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani integrallash masalasiga keltirish mumkin.

(2) tenglamaning ayrim xususiy hollarini qarab chiqamiz va ularni integrallash yo‘llarini ko‘rsatamiz.

2. **n-darajali birinchi tartibli tenglama.** n-darajali birinchi tartibli tenglamaning chap tomoni y' ga nisbatan butun ratsional funksiyadan iborat, ya'ni quyidagi ko‘rinishga ega:

$$(y')^n + p_1(y')^{n-1} + p_2(y')^{n-2} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y = 0,$$

bu yerda n butun son, $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ lar x va y ning funksiyalari.

Bu tenglamani y' ga nisbatan yecha olamiz deb faraz qilaylik. Bunda y' uchun, umuman aytganda n ta har xil ifoda hosil bo‘ladi:

$$y' = f_1(x,y),\ y' = f_2(x,y), \dots,\ y' = f_n(x,y)\ . \tag{3}$$

Bu holda (2) tenglamani integrallash birinchi tartibli n ta (1) tenglamani integrallashga keltirildi. Ularning umumiy integrallari(yechimlsri) mos ravishda quyidagilar bo‘lsin:

$$\Phi_1(x,y,C_1)=0,\ \Phi_2(x,y,C_2)=0,\dots,\Phi_n(x,y,C_n)=0 \tag{4}$$

(4) integrallarning chap tomonlarni o‘zaro ko‘paytirib, nolga tenglaymiz:

$$\Phi_1(x,y,C_1)\cdot \Phi_2(x,y,C_2)\cdot\ldots\cdot\Phi_n(x,y,C_n)=0\,. \tag{5}$$

Agar (5) tenglamani y ga nisbatan yechadigan bo‘lsak, (2) tenglamaning yechimini hosil qilamiz. Haqiqatan ham, (5) tenglamaning har qanday yechimi (4) tenglamalarning birini, binobarin, (1) tenglamalarning birontasini va shunday qilib, (2) tenglama (1) tenglamalarga yoyilgani uchun uni ham qanoatlantiradi. Umumiylikka ziyon keltirmasdan, (5) dagi barcha $C_1, C_2, \dots, C_n$ o‘zgarmaslarni bitta C bilan almashtirish va tenglamani

$$\Phi_1(x,y,C)\cdot \Phi_2(x,y,C)\cdot\ldots\cdot\Phi_n(x,y,C)=0 \tag{6}$$

ko‘rinishda yozish mumkin, bu (2) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi. Bunga ishonch hosil qilish uchun (6) tenglamaning n ta tenglamaga ajralishini ko‘rish mumkin:

$$\Phi_1(x,y,C)=0,\ \Phi_2(x,y,C)=0,\dots,\Phi_n(x,y,C)=0 \tag{7}$$

Bu yerda C - istalgan qiymatlarni qabul qiluvchi ixtiyoriy o‘zgarmas, shu sababli (4) tenglamadan hosil qilinadigan barcha yechimlar (7) tenglamadan hosil qilinadigan yechimlar orasida bo‘ladi.

Misol. Ushbu $(y')^2 - \frac{xy}{a^2} = 0$ tenglamaning umumiy integralini topamiz. Tenglamaning chap tomonini ko‘paytuvchilarga ajratib, quyidagini hosil qilamiz.

$$(y' - \frac{\sqrt{xy}}{a})(y' + \frac{\sqrt{xy}}{a}) = 0\,,$$

bu yerdan $y' - \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0$ va $y' + \frac{\sqrt{xy}}{a} = 0$. Bu ikkala tenglama o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Uning umumiy integrallari:

$$\sqrt{y} - \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0, \qquad \sqrt{y} + \frac{x\sqrt{x}}{3a} - C = 0\,.$$

Shuning uchun berilgan tenglamaning umumiy integrali ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$(\sqrt{y} - C)^2 - \frac{x^3}{9a^2} = 0,$$

3. y **ga nisbatan yechilgan va** x **qatnashmagan tenglama.** y ga nisbatan yechilgan va x qatnashmagan tenglama

$$y = \varphi(y') \tag{8}$$

ko‘rinishda bo‘ladi.

Bu holda parametr kiritish usulini qo‘llash maqsadga muvofiqdir. U qaralayotgan o‘zgaruvchilarni parametr orqali ifodalash va yechimni parametrik shaklda izlashdan iborat.

$y' = p$ deylik. U holda berilgan tenglama

$$y = \varphi(p) \tag{9}$$

kurinishda yoziladi. Agar x ni p va C orqali ifodalovchi yana bitta tenglama topish mumkin bo‘lsa, u holda bu ikkita tenglamadan iborat to‘plam (8) tenglamaning parametrik shakldagi umumiy yechimi bo‘ladi. Ulardan p ni yo‘qotib, x, y va C orasidagi munosabatni, yana odatdagi shakldagi umumiy integralni hosil qilish mumkin.

Ikkinchi tenglamani quyidagicha topamiz. $y' = p$ tenglikni $dx = \frac{dy}{p}$ ko‘rinishda qayta yozib olamiz, bu yerdan $x = \int \frac{dy}{p} + C$. Bu yerdagi integralni bo‘laklab integrallaymiz:

$$\int \frac{dy}{p} = \frac{y}{p} + \int \frac{ydp}{p^2} + C = \frac{y}{p} + \int \frac{\varphi(p)dp}{p^2} + C.$$

Demak,

$$x = \frac{y}{p} + \int \frac{\varphi(p)dp}{p^2} + C \tag{10}$$

(10) va (9) tenglamalar sistemasi (8) tenglamaning parametrik shakldagi umumiy yechimi bo‘ladi. Agar iloji bo‘lsa, bu tenglamalardan p ni yo‘qotib, $\Phi(x, y, C) = 0$ shakldagi umumiy integralni hosil qilamiz.

4. x ga nisbatan yechilgan va y qatnashmagan tenglama. x ga nisbatan yechilgan va y qatnashmagan tenglama

$$x = \varphi(y') \tag{11}$$

ko‘rinishga ega.

Yuqoridagidek ish ko‘ramiz. $y' = p$ deymiz. Tenglama quyidagi ko‘rinishda yoziladi:

$$x = \varphi(p) \tag{12}$$

$y' = p$ tenglikni bunday yozib olamiz: $dy = pdx$. Bu yerdan

$$y = \int pdx = px - \int xdp + C$$

yoki

$$y = p\varphi(p) - \int \varphi(p)dp + C \tag{13}$$

(12) va (13) tenglamalar sistemasi (11) tenglamaning parametrik shakldagi umumiy

yechimidir. Ulardan p parametrni yo‘qotib, $\Phi(x, y, C) = 0$ umumiy integralni hosil qilamiz.

Shuni qayd etish lozimki, (9), (10),(12) va (13) tengliklardagi p o‘zgaruvchi ixtiyoriy parametr rolini o‘ynaydi va istalgan boshqa harf bilan almashtirilishi mumkin.

5. **x yoki y qatnashmagan, biroq y yoki x ga nisbatan yechilgan bo‘lishi shart bo‘lmagan tenglama.** x yoki y qatnashmagan, biroq y yoki x ga nisbatan yechilgan bo‘lishi shart bo‘lmagan tenglama ushbu ko‘rinishga ega:

$$F(y, y') = 0 \tag{14}$$

yoki

$$F(x, y') = 0$$

Shu bilan birga tenglamadan y ni (birinchi tenglamada) yoki x ni (ikkinchi tenglamada), shuningdek, $p = y'$ ni t parametr orqali ifodalash mumkin deb faraz qilamiz. Yuqoridagi 3 va 4 hollardagi kabi bu yerda ham tenglamaning umumiy yechimi parametrik shaklda hosil bo‘ladi.

Masalan, $F(y, p) = 0$ tenglama bo‘lgan holni ko‘raylik.

$y = \varphi(t)$ deb, tenglamadan $p = \psi(t)$ ni yoki aksincha, $p = \psi(t)$ deb tenglamadan $y = \varphi(t)$ ni topdik deb faraz qilaylik. U holda, bir tomondan $dy = pdx = \psi(t)dx$, ikkinchi tomondan $dy = \varphi'(t)dt$. Bu dy uchun ikkala ifodani taqqoslab, $\psi'(t)dx = \varphi'(t)dt$ ni hosil qilamiz. Bu yerdan

$$dx = \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt \qquad \text{va} \qquad x = \int \frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C\ .$$

Umumiy yechim parametrik shaklda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x = \int \dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt + C \\ y = \varphi(t) \end{cases} \tag{15}$$

Misol. $y = a\sqrt{1 + y'^2}$ tenglamaning umumiy yechimini topaylik. $p = y' = sht$ deymiz, u holda $y = a\sqrt{1 + sh^2 t} = acht$.

Ushbu $\dfrac{dy}{dx} = p$ tenglikdan $dx = \dfrac{dy}{p}$ ni topamiz. $dy = a\,sht\,dt$ bo‘lgani uchun $dx = adt$ va $x = at - C$. Umumiy yechim parametrik shaklda quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases} x = at - C \\ y = a\,sht \end{cases}$$

t parametrni yo‘qotamiz. Buning uchun birinchi tenglamadan t ni topib, 2-chi tenglamaga qo‘yamiz. Natijada $t = \dfrac{x + C}{a}$ va umumiy yechim

$$y = a\,ch\frac{x+C}{a}$$

bo‘ladi.

6. Parametr kiritish usuli.

$$F(x, y, y') = 0 \tag{1}$$

tenglama ushbu $x = \psi(u,v),\ y = \chi(u,v),\ y' = \omega(u,v),\ (u, v -$ parametrlar) parametrik ko‘rinishda yozilgan bo‘lsin, u holda

$$F(\psi(u,v), \chi(u,v), \omega(u,v)) = 0$$

tenglamaga egamiz. Agar ψ, χ, ω funksiyalar biror ochiq T to‘plamda aniqlangan va differensiallanuvchi bo‘lsa, unda

$$dx = \frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv, \quad dy = \frac{\partial\chi}{\partial u}du + \frac{\partial\chi}{\partial v}dv$$

bo‘ladi. Endi

$$\frac{dy}{dx} = \omega(u,v)$$

bo‘lgani uchun

$$\frac{\partial\chi}{\partial u}du + \frac{\partial\chi}{\partial v}dv = \omega(u,v)\left[\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv\right]$$

tenglama u va v parametrlar orasidagi differensial bog‘lanishni ifodalaydi. Bu tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$\left(\frac{\partial\chi}{\partial u} - \omega\frac{\partial\psi}{\partial u}\right)du = \left(\omega\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}\right)dv$$

Agar $\frac{\partial\chi}{\partial u} - \omega\frac{\partial\psi}{\partial u} \neq 0$ bo‘lsa, u ni no'malum funksiya, v ni esa erkli o‘zgaruvchi deb, ushbu

$$\frac{du}{dv} = \frac{\omega\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}}{\frac{\partial\chi}{\partial u} - \omega\frac{\partial\psi}{\partial u}} \tag{2}$$

hosilaga nisbatan yechilgan differensial tenglamaga kelamiz. Shunga o‘xshash, agar $\omega\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v} \neq 0$ bo‘lsa, u holda ushbu

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{\partial\chi}{\partial u} - \omega\frac{\partial\psi}{\partial u}}{\omega\frac{\partial\psi}{\partial v} - \frac{\partial\chi}{\partial v}} \tag{3}$$

differensial tenglamaga kelamiz.

Agar (2) yoki (3) differensial tenglama kvadraturalarda integrallansa, u holda berilgan (1) tenglama ham integrallanadi. Haqiqatan ham, agar (2) tenglamaning umumiy yechimi $u = u(v, C)$ bo‘lsa,

$$\begin{cases} u = u(v, C) \\ x = \psi(u(v, C), v) \\ y = \chi(u(v, C), v) \end{cases}$$

(bu yerda, v-parametr, C - o‘zgarmas) (1) tenglama umumiy yechimining parametrik ko‘rinishi bo‘ladi.

(3) uchun umumiy yechim

$$\begin{cases} v = v(u, C) \\ x = \psi(u, v(u, C)) \\ y = \chi(u, v(u, C)) \end{cases}$$

ko‘rinishda (bu yerda, u-parametr, C - o‘zgarmas) bo‘ladi.

Masalan, $F(x, y, y') = 0$ tenglama $y = f(x, y')$ ko‘rinishda yozilish mumkin bo‘lganda $u = x,\ v = y'$. $x = f(y, y')$ ko‘rinishda yozilganda esa $u = y,\ v = y'$ deyilishi lozim. Birinchi holda

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x, v) \\ y' = v \end{cases}$$

va

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\dfrac{\partial f}{\partial v}}{v - \dfrac{\partial f}{\partial x}}$$

differensial tenglamaga ega bo‘ladi.

Ikkinchi holda

$$\begin{cases} x = f(y, v) \\ y = y \\ y' = v \end{cases}$$

va

$$\frac{dy}{dv} = \frac{v\dfrac{\partial f}{\partial v}}{1 - v\dfrac{\partial f}{\partial y}}$$

differensial tenglamaga ega bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, " Ўзбекистон", 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. O'zgarmasni variatsiyalash usuli. Bernulli va Rikkati tenglamalari.
2. Parametr kiritish yo'li bilan tenglamalarni integrallash.

Glossariy

y ***ga nisbatan yechilgan va*** x ***qatnashmagan tenglama*** **-** $y=\varphi(y')$ ko'rinishda bo'lgan tenglama.

x **ga nisbatan yechilgan va** *y* **qatnashmagan tenglama -** $x=\varphi(y')$ ko'rinishga ega tenglama.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $(x+y^2)dx-2xydy=0$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. n chi darajali birinchi tartibli tenglama qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. u-ga nisbatan yechilmagan va x qatnashmagan tenglama qanday ko'rinishda bo'ladi?
4. x-ga nisbatan yechilgan va u qatnashmagan tenglama qanday lo'rinishda bo'ladi?
5. $F(x,y,y^1)=0$ tenglamani paralitrik ko'rinishda qanday yoziladi.

Amaliy mashg'ulot-7
To'liq differensialli tenglamalar.
Integrallovchi ko'paytma.

Ushbu tenglamani qaraylik:

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \qquad (1)$$

Agar (1) tenglamaning chap tomoni biror F(x,y) funksiyaning to'liq differensiali bo'lsa (1) tenglama to'liq differensialli tenglama deyiladi. Bunday holda (1) tenglamani yechish uchun $dF=F'_x dx+F'_y dy=M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ ekanligidan $F(x,y)=c$ yechimni olamiz, bu yerda s-ixtiyoriy konstanta. Buning uchun $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ bo'lishi kerak.

Misol-1: Berilgan $(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

shartni tekshiramiz:

$$\frac{\partial M}{\partial y}=3x^2,\quad \frac{\partial N}{\partial x}=3x^2.$$

Demak, berilgan tenglama to‘liq differensialli tenglama. Shuning uchun

$$F_x'=2x+3x^2y,\quad F_y'=x^3-3y^2$$

Bu yerdan $F=\int F_x'dx=\int(2x+3x^2y)dx+\varphi(y)=x^2+x^3y+\varphi(y).$ $\varphi(y)$ funksiyani topish uchun $F=x^2+x^3y+\varphi(y)$ ifodani $F_y'=x^3-2y^2$ ga qo‘yamiz:

$$x^3+\varphi'(y)=x^3-3y^2,\quad \varphi'(y)=-3y^2.$$

Demak $\varphi(y)=-y^3+c$

$$F=x^2+x^3y-y^3=c.$$

deyish mumkin.

Misol-2: Ushbu $(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy=0.$ differensial tenglamani yeching.

Bu tenglamada $M(x,y)=(2xy+3y^2),\quad N(x,y)=x^2+6xy-3y^2$ bo‘lib,

$$\frac{\partial N(x,y)}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(x^2+6xy-3y^2)=2x+6y$$

$$\frac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}(2xy+3y^2)=2x+6y$$

bo‘ladi.

Demak, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Bu esa berilgan tanglamaning chap tomonidagi ifoda biror funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lishini bildiradi:

$$du(x,y)=(2xy+3y^2)dx+(x^2+6xy-3y^2)dy.$$

Ravshanki,

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2xy+3y^2,$$

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=x^2+6xy-3y^2. \qquad (**)$$

Endi $\dfrac{\partial u(x,y)}{\partial x}=2xy+3y^2.$

tenglikning har ikki tomonini x bo‘yicha integrallab topamiz:

$$u(x,y)=\int(2xy+3y^2)dx=2y\frac{x^2}{2}+3y^2x+c(y)=x^2y+3xy^2+c(y).$$

Bu tenglikdagi $S(u)$ ni topish uchun

$$u(x,y)=x^2y+3xy^2+c(y). \qquad (***)$$

ni $\boldsymbol{u}$ bo‘yicha differensiyalaymiz:

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(x^2y+3xy^2+c(y))=x^2+6xy+c'(y).$$

Demak (**) munosabatga ko‘ra

$$x^2 = 6xy + c'(y) = x^2 + 6xy - 3y^2,$$

ya'ni $c'(y) = -3y^2$ bo‘ladi.

Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamadir. Uni yechamiz:

$$c'(y) = -3y^2 \Rightarrow \frac{dc(y)}{dy} = -3y^2 \Rightarrow dc(y) = -3y^2dy$$

$$\Rightarrow c(y) = -y^3 + C_1.$$

Bunda S_1-ixtiyoriy o‘zgarmas son. Topilgan $s(u)$ ni (**) tenglikdagi s(u) ni o‘rniga qo‘ysak, unda $u(x,y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + c_1$.
ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, berilgan tenglamaning yechimi

$$u(x,y) = x^2y + 3xy^2 - y^3 + c_1 = c_1$$

ya'ni $x^2y + 3xy^2 - y^3 = c^*$ bo‘ladi.

Bunda S*-o‘zgarmas son.

2. (1) tenglama to‘liq differensialli bo‘lmasa quyidagicha ish yuritiladi. (1) tenglama biri $m(x,y) \neq 0$ funksiyaga ko‘paytiriladi:

$$m(x,y)\cdot M(x,y)dx + m(x,y)\cdot N(x,y)dy = 0 \qquad (4)$$

shundan so‘ng bu tenglama to‘liq differensiyalli tenglamaga aylansa, uni yuqoidagi usul bilan yechish mumkin. Bu holda $m(x,y)$ funksiya integrallovchi ko‘paytma deyiladi.

Agar M,N-differensiallanuvchi, bir paytda 0 ga aylanmasa integrallovchi ko‘paytma mavjud. Lekin, umumiy holda $m(x,y)$ ni topish uchun biror bir qoida yo‘q. Ba'zi tenglamalarni yechishda integrallovchi ko‘paytma topish uchun mavjud ushbu formulalardan foydalanish mumkin:

$$d(x,y)ydx + xdy,\ d(y^2) = 2ydy$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{ydx - xdy}{y^2},\ d\ln(y) = \frac{dy}{y}$$ va hakazo.

Misol-3. Tenglama yechilsin:

$$ydx - (4x^2y + x)dy = 0 \qquad (5)$$

Avvalo, to‘liq differensialni tashkil etuvchi ko‘paytmalarni ajratamiz.

$ydx - xdy = -x^2d\left(\frac{y}{x}\right)$ bo‘lganligidan (5) tenglamani $-x^2$ ga bo‘lamiz va hosil qilamiz:

$$d\left(\frac{y}{x}\right) + 4ydy = 0 \Rightarrow d\left(\frac{y}{dx} + d(2y^2) = 0\right)$$

Bu yerdan

$$\frac{y}{x} + 2y^2 = c$$

Bo‘lishda $x = 0$ yechim yo‘qotilgan edi.

Izoh: (5) tenglamani $-x^2$ ga bo‘lgandan keyin to‘liq differensialli tenglama olganimiz uchun integrallovchi ko‘paytma $-\frac{1}{x^2}$ ga teng.

Misol-4: Ushbu $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ tenglamani yeching. Bu tenglamada

$$M(x,y) = x + y^2,\ N(x,y) = -2xy$$

bo‘lib, $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}=2y,\quad \dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}=-2y$

bo‘ladi: $\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}\neq\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}$.

Berilgan tenglama to‘la differensial tenglama emas. Integrallovchi ko‘paytmani topamiz. Avvalo $\dfrac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}$ ni hisoblaymiz:

$$\frac{\dfrac{\partial M(x,y)}{\partial y}-\dfrac{\partial N(x,y)}{\partial x}}{N(x,y)}=\frac{2y-(-2y)}{-2xy}=-\frac{2}{x}.$$

Unda $\dfrac{d\ln\mu(x)}{dx}=-\dfrac{2}{x}$ bo‘lib, $\ln\mu(x)=-2\ln|x|$, $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$ bo‘ladi. Berilgan tenglamani $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$ ga ko‘paytirsak, u to‘la differensial tenglamaga aylanadii:

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-\frac{2xy}{x^2}dy=0$$

Bu tenglamaning chap tomonidagi ifoda uchun

$$\frac{x+y^2}{x^2}dx-\frac{2xy}{x^2}dy=\frac{1}{x}dx-\frac{2xydy-y^2dx}{x^2}=$$

$$=d\ln|x|-d\frac{y^2}{x}=d\left(\ln|x|-\frac{y^2}{x}\right)$$

bo‘ladi. Unda tenglama ushbu $d\left(\ln|x|-\dfrac{y^2}{x}\right)=0$ ko‘rinishga keladi. Bu tenglamaning yechimi

$$\ln|x|-\frac{y^2}{x}=\ln c,$$

ya'ni $x=c\cdot e^{\frac{y^2}{x}}$ bo‘ladi.

3. Ba'zan (1) tenglamada biror $\varphi(x,y)$ funksiyaning to‘liq kvadrati ajratilsa, u holda (1) tenglamada (x,u) o‘zgaruvchilardan (x,z) ni (y,z) o‘zgaruvchiga o‘tilsa tenglama soddalashadi, bu yerda $z=\varphi(x,y)$.

Misol-5: $ydx-(x^3y+x)dx=0$ tenglama yechilsin. Yuqoridagi misoldek to‘liq differensialga ajratamiz:

$$d\left(\frac{y}{x}\right)+xydy=0$$

$z=y/x$ desak,

$$dz+\frac{y^2}{z}dz=0\Rightarrow z+y^2\ln z=e\Rightarrow\frac{y}{x}+y^2\ln\left(\frac{y}{x}\right)=e.$$

yechimga kelamiz.

Misol-6: $(xy+y^4)dx+(x^2-xy^3)dy=0$.
tenglama yechilsin. Hadlarni shunday ixchamlaymizki, to‘liq differensial ajralsin:

$$x(ydx+xdy)+y^3(ydx-xdy)=0,$$

$$xd(xy)+y^3d\left(\frac{x}{y}\right)=0.$$

x ga bo‘lib, $xy=u,\ \dfrac{x}{y}=v$ deb almashtirish bajaramiz:

$$du+\frac{u^2}{v^2}dv=0\Rightarrow\frac{du}{u^2}+\frac{dv}{v^2}=0\Rightarrow u^{-1}+v^{-1}=C.$$

1. $(x+y)dx+(x+2y)dy=0$ j: $\dfrac{x^2}{2}+xy+y^2=C$
2. $(x^2+y^2+2x)dx+2xydy=0$ j: $\dfrac{x^3}{3}+xy^2+x^2=C$
3. $(x^3-3xy^2+2)dx-(3x^2y-y^2)dy=0$ j: $\dfrac{x^4}{4}-\dfrac{3}{2}x^2y^2+2x+\dfrac{y^3}{3}=C$
4. $xdx+ydy=\dfrac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$ j: $x^2+y^2-2arctg\dfrac{y}{x}=C$
5. $\dfrac{2xdx}{y^3}+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}dy=0$ j: $x^2-y^2=Cy^3$
6. $(x+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}\left(1-\dfrac{x}{y}\right)dy=0;\quad y(0)=2$ j: $\dfrac{x^2}{2}+ye^{\frac{x}{y}}=2$
7. $\left(4-\dfrac{y^2}{x^2}\right)dx+\dfrac{2y}{x}dy=0$ j: $4x^2+y^2=cx$
8. $3x^2e^ydx+(x^3e^y-1)dy=0$ j: $x^3e^y-y=c$
9. $e^{-y}dx+(1-xe^{-y})dy=0$ j: $y+xe^{-y}=c$
10. $2x\cos^2 ydx+(2y-x^2\sin 2y)dy=0$ j: $x^2\cos^2 y+y^2=c$

TEST

Quyidagi tenglamaning umumiy yechimini toping: $y'=\dfrac{y+\sqrt{x^2-y^2}}{x}$	* $y=x\sin(\ln cx)$	$y=x\ln(\sin cx)$	$y=x\ln(\cos cx)$	$y=xtg(\ln cx)$
Tenglamaning umumiy yechimini aniqlang: $y'+\dfrac{1}{x}y=\dfrac{\sin x}{x}$	* $y=\dfrac{1}{x}(c-\cos x)$	$y=\dfrac{1}{x}(c-\sin x)$	$y=\dfrac{1}{x}(c-\cos\sin x)$	$y=\dfrac{1}{x}(c-\arccos x)$
Quyidagi tenglamalarni qaysi biri Bernulli tenglamasi hisoblanadi:	* $y'+P(x)y=Q(x)y^\alpha$	$y'+P(x)y+Q(x)y^2=F(x)$	$y'+Q(x)y^2=F(x)$	$y'+Q(x)y^2=F(x)y^\alpha$
Bernulli tenglamasi qanday tenglamaga keltiriladi?	* Chiziqli	Bir jinsli	Eyler	Rikkati
Rikkati tenglamasini aniqlang.	* $y'+P(x)y+Q(x)y^2=F(x)$	$y'+Q(x)y^4=F(x)$	$x^2y'+P(x)y^{\frac{1}{2}}=0$	$y'+P(x)y^3=Q(x)$
Rikkati tenglamasi avval qanday tenlamaga keltiriladi?	* Bernulli	Lagranj	O‘zgaruvchilarga ajralgan	Klero

Rikkati tenglamasining yechishda qanday almashtirish bajariladi.	* $y = y_1(x) + z$	$y = uv$	$y = \frac{u}{v}$	$y = y_1(x)z$
Differensial tenglama to‘liq bo‘lishining zaruriy va yetarli shartini aniqlang: $\left(M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0\right)$	* $\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$	$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$	$\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 N}{\partial y^2}$	$\frac{\partial^2 M}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 N}{\partial x \partial y}$
Quyidagi Koshi masalasini yeching: $\begin{cases} 2x\cos^2 y dx + \left(2y - x^2 \sin 2y\right)dy = 0 \\ y\|_{x=0} = 0 \end{cases}$	* $x^2 \cos^2 y + y^2 = 0$	$x^2 tg^2 y + y^2 = 0$	$y^2 \cos^2 y + x^2 = 0$	$x^2 \sin^2 y + y^2 = 0$
Quyidagi tenglama uchun integralovchi ko‘paytuvchi qanday bo‘ladi: $\left(x^2 - y\right)dx + \left(x^2 y^2 + x\right)dy = 0$	* $\mu(x) = \frac{1}{x^2}$	$\mu(x) = x^2$	$\mu(x) = \frac{1}{x^3}$	$\mu(x) = x^3$

MA'RUZA № 9

Mavzu: Maxsus nuqta va maxsus yechim.

Reja:

1. Maxsus nuqta.
2. Maxsus nuqta turlari.
3. Maxsus yechim.
4. O‘ramalar.

Tayanch so’z va iboralar: *maxsus nuqta, tugun maxsus nuqta, dikritik tugun maxsus nuqta, egar maxsus nuqta, fokus maxsus nuqta, markaz maxsus nuqta, maxsus yechim, o’rama chiziq.*

TA’RIF. *Differensial tenglama yechimining mavjudligi yoki yagonaligi buziladigan nuqtasi bu tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.*

Boshqacha qilib aytganda, Koshi teoremasi shartlari buziladigan nuqtalar *maxsus nuqtalar* deyiladi. Maxsus nuqtalar orqali yo birorta ham integral egri chiziq o‘tmaydi, yo bir necha chiziq o‘tadi.

Koshi teoremasini shartlari faqat yetarli bo‘lib, zaruriy emasligini qayd qilib o‘taylik. Shuning uchun $f(x,y)$ funksiyaning uzilish nuqtalari orasidan va $\frac{\partial f}{\partial y}$ hosila mavjud bo‘lmagan nuqtalar orasidan izlash kerak, biroq bu nuqtalarning hammasi ham maxsus nuqtalar bo‘lishi shart emas.

Integral egri chiziqlar maxsus nuqta atrofida o‘zini har xil tutishi mumkin. Maxsus nuqtalarning mumkin bo‘lgan ayrim turlari bilan misollar orqali tanishamiz. Bir jinsli

$$y' = \frac{a_1x + b_1y}{a_2x + b_2y}$$

differensial tenglamani qarash bilan chegaralanamiz. Bu tenglamaning ko‘rinib turgan maxsus nuqtasi $(0,0)$ bo‘lib, unda o‘ng tomon aniqlanmagan. Koeffitsientlar orasida turli munosabatlar maxsus nuqta (koordinata boshi) atrofida integral egri chiziqlar joylashishining u yoki bu tipiga olib keladi.

1-misol. Ushbu

$$y' = \frac{2y}{x} \tag{1}$$

tenglamani tekshiramiz. O‘zgaruvchilarni ajratib va integrallab umumiy yechimni topamiz:

$$y = Cx^2 \tag{2}$$

Shunday qilib, umumiy yechim uchi koordinatalar boshida bo‘lib absissalar o‘qiga urinadigan parabolalar oilasidan iborat ekan. Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar joylashishning umumiy ko‘rinishi 1-rasmda tasvirlangan. Integral egri chiziqlari ana shunday joylashgan differensial tenglamaning maxsus nuqtasi *tugun* deyiladi.

2-misol. Ushbu tenglama berilgan:

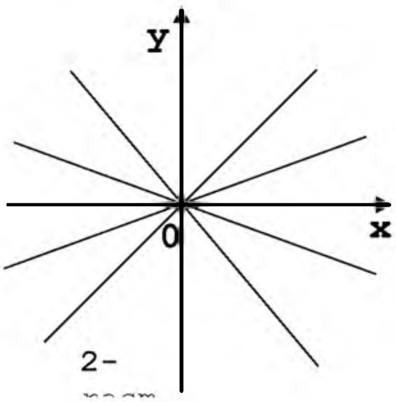
$$y' = \frac{y}{x} \tag{3}$$

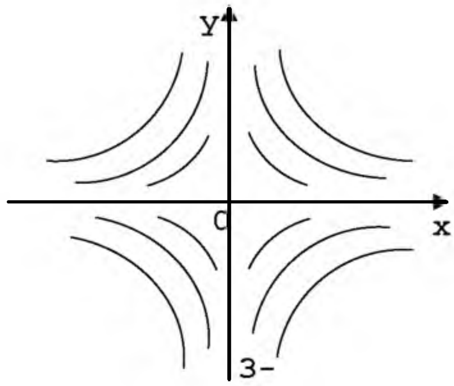
Uning umumiy yechimi $y = Cx$, ya'ni koordinatalar boshidan o‘tuvchi barcha to‘g‘ri chiziqlar (ordinata o‘qi ham, chunki yechimni $x = Cy$ ko‘rinishda yozish mumkin edi) oilasidan iborat. Bunday nuqta ham *tugun* (*dikritik tugun*) deyiladi. Ushbu hol oldingi holdan har bir integral egri chiziq maxsus nuqtada o‘zgaruvchi yo‘nalishiga egaligi bilan farq qiladi. (2-rasm).

3-misol. Ushbu

$$y' = -\frac{y}{x} \tag{4}$$

tenglama uchun umumiy integral $xy = C$ dan, ya'ni asimptotalari koordinata o‘qlaridan iborat bo‘lgan giperbolalar oilasidan iborat. Xususiy holda, $C = 0$ da $x = 0$ va $y = 0$ (koordinata o‘qlari)ni hosil qilamiz. Bu integral egri chiziqlar koordinatalar boshidan o‘tadi, qolgan hamma chiziqlar esa maxsus nuqta orqali o‘tmaydi. Bu turdagi maxsus nuqta *egar* deyiladi.





4-misol. Ushbu tenglamani qaraymiz:

$$y' = \frac{x+y}{x-y} \tag{5}$$

$y = ux$ o‘rniga qo‘yish (5) ni

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{1+u^2}{1-u}$$

ko‘rinishga keltiriladi, bu yerdan o‘zgaruvchilarni ajratib va integrallab topamiz:

$$\ln C + arctgu - \frac{1}{2}\ln(1+u^2) = \ln x$$

yoki

$$x\sqrt{1+u^2} = Ce^{arctgu}.$$

Eski o‘zgaruvchilarga qaytsak,

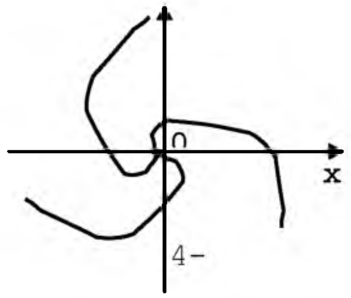
$$\sqrt{x^2+y^2} = Ce^{arctg\frac{y}{x}}. \qquad (6)$$

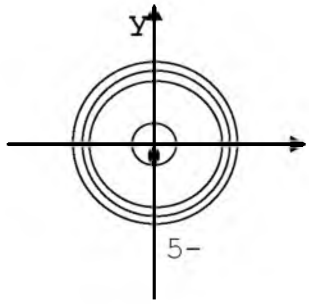
Qutb koordinata ($x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi$) larga o‘tib, (6) tenglamani $\rho = Ce^{\varphi}$ ko‘rinishga keltiramiz. Bu koordinatalar boshi atrofida cheksiz sondagi ($\varphi \to -\infty$ da) o‘ramalar hosil qiluvchi *logarifmik spirallar* oilasidir. Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar oilasining ko‘rinishi 4-rasmda keltirilgan. Bunday maxsus nuqta *fokus* deb nomlanadi.

5-misol. Ushbu tenglamani qaraylik:

$$y' = -\frac{x}{y}. \qquad (7)$$

Bu tenglamani integrallash $x^2 + y^2 = C = C_1^2$ ni, ya'ni markazi koordinatalar boshida bo‘lgan radiusi C_1 ga teng *aylanalar* oilasini beradi. Maxsus nuqta orqali bitta ham integral egri chiziq o‘tmaydi(5- rasm). Bunday maxsus nuqta *markaz* deyiladi.





2. **TA’RIF**. *Differensial tenglamada uning umumiy yechimidan ixtiyoriy o‘zgarmasning xech bir qiymatida hosil qilinishi mumkin bo‘lmagan yechimi maxsus yechim deyiladi.*

Maxsus yechimning grafigi umumiy yechimga kirgan integral egri chiziqlarning *o‘ramasi* deb ataluvchi chiziqdan iboratdir. Bu chiziq o‘zining har bir nuqtasida oilaning u yoki bu integral egri chizig‘iga urinadi shu bilan birga o‘ramaning turli nuqtalarida oilaning turli integral egri chiziqlari urinadi(6-rasm).

Demak, o‘ramaning (maxsus yechimning) har bir nuqtasi orqali eng kamida 2 tadan integral egri chizig‘i o‘tadi, ya'ni uning har bir nuqtasida yechimning yagonaligi buziladi.

Bunday nuqtalarni biz maxsus nuqtalar deb atadik. Shunday qilib, maxsus yechim maxsus nuqtalardan iboratdir.

Agar $F(x,y,y')=0$ tenglamaning umumiy integrali $\Phi(x,y,C)=0$ bo‘lsa, o‘ramani topish uchun quyidagi tenglamalar sistemasi xizmat qiladi:

$$\begin{cases}\Phi(x,y,C)=0\\ \Phi'_C(x,y,C)=0\end{cases} \qquad (8)$$

Bu yerda C ni yo‘qotib, $y=\varphi(x)$ funksiya hosil qilamiz. Agar bu funksiya differensial tenglamani qanoatlantirsa va $\Phi(x,y,C)=0$ oilaga tegishli bo‘lmasa, u holda u tenglamaning maxsus yechimii bo‘lib, uning grafigi $\Phi(x,y,C)=0$ oilaning o‘ramasidan iborat bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. To‘la differensial tenglamalar. Integrallovchi ko‘paytuvchi va uning mavjudligi haqidagi teoremalar.
2. Lagranj va Klero tenglamalari.

Glossariy

Maxsus nuqta - Differensial tenglama yechimining mavjudligi yoki yagonaligi buziladigan nuqtasi bu tenglamaning maxsus nuqtalari deyiladi.

Tugun maxsus nuqta - Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar joylashishning umumiy ko‘rinishi 1-rasmda tasvirlangan. Integral egri chiziqlari ana shunday joylashgan differensial tenglamaning maxsus nuqtasi *tugun* deyiladi.

Egar maxsus nuqta - Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar joylashishning umumiy ko‘rinishi 3-rasmda tasvirlangan. Integral egri chiziqlari ana shunday joylashgan differensial tenglamaning maxsus nuqtasi *egar* deyiladi.

Fokus maxsus nuqta - Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar oilasining ko‘rinishi 4-rasmda keltirilgan maxsus nuqta *fokus* deb nomlangan.

Markaz maxsus nuqta – shbu tenglamani qaraylik:

$$y' = -\frac{x}{y}$$

Bu tenglamani integrallash $x^2+y^2=C=C_1^2$ ni , ya'ni markazi koordinatalar boshida bo‘lgan radiusi C_1 ga teng aylanalar oilasini beradi. Maxsus nuqta orqali bitta xam integral egri chiziq o‘tmaydi(5- rasm). Bunday maxsus nuqta *markaz* deyiladi.

Maxsus yechim - Differensial tenglamada uning umumiy yechimidan ixtiyoriy o‘zgarmasning xech bir qiymatida hosil qilinishi mumkin bo‘lmagan yechimi *maxsus yechim* deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $(x^2+y^2+2x)dx+2ydy=0$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglamasining maxsus nuqtalari deb nimaga aytiladi?
2. Maxsus nuqta atrofida integral egri chiziqlar joylashishining umumiy ko‘rinishini tasvirlang?
3. Differensial tenglamaning maxsus yechimi deb nimaga aytiladi?
4. Maxsus nuqta yechimi deb nimaga aytiladi?
5. Maxsus yechimning grafigi qanday chiziqdan iborat?

Amaliy mashg’ulot-8

1. $(3x^2+2y)dx+(2x-3)dy=0$ j: $x^3+2xy-3y=C$
2. $(3x^2y-4xy^2)dx+(x^3-4x^2y+12y^3)dy=0$ j: $x^3y-2x^2y^2+3y^4=C$
3. $(x\cos 2y+1)dx-x^2\sin 2ydy=0$ j: $\dfrac{x^2\cos 2y}{2}+x=C$
4. $(2x^3-xy^2)dx+(2y^3-x^2y)dy=0$ j: $x^4-x^2y^2+y^4=c$
5. $\dfrac{xdy}{x^2+y^2}=\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1\right)dx$ j: $x+arctg\dfrac{y}{x}=c$
6. $e^ydx+(xe^y-2y)dy=0$ j: $xe^y-y^2=c$
7. $yx^{y-1}dx+x^y\ln xdy=0$ j: $x^y=C$
8. $\dfrac{xdx+ydy}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{ydx-xdy}{x^2}$ j: $\sqrt{x^2+y^2}+\dfrac{y}{x}=C$
9. $\dfrac{y+\sin x\cdot\cos^2(xy)}{\cos^2(xy)}dx+\dfrac{x}{\cos^2(xy)}dy+\sin ydy=0$ j: $tg(xy)-\cos x-\cos y=c$
10. $\left(1+x\sqrt{x^2+y^2}\right)dx+\left(1+\sqrt{x^2+y^2}\right)ydy=0$ j: $\dfrac{1}{3}\sqrt{(x^2+y^2)^3}+x-\dfrac{1}{2}y^2=C$

TEST

Quyidagi Koshi masalasini yeching: $\begin{cases}2x\cos^2 ydx+\left(2y-x^2\sin 2y\right)dy=0\\ y\mid_{x=0}=0\end{cases}$	* $x^2\cos^2 y+y^2=0$	$x^2tg^2y+y^2=0$	$y^2\cos^2 y+x^2=0$	$x^2\sin^2 y+y^2=0$
Quyidagi tenglama uchun integralovchi ko‘paytuvchi qanday bo‘ladi:	* $\mu(x)=\dfrac{1}{x^2}$	$\mu(x)=x^2$	$\mu(x)=\dfrac{1}{x^3}$	$\mu(x)=x^3$

$(x^2-y)dx+(x^2y^2+x)dy=0$				
Koshi masalasini yechimining mavjudlik shartini aniqlang: $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$	* $f(x,y)-$uzluksiz	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-$ mavjud va uzluksiz	$f(x,y)-$2-tartibli hosilasi mavjud	$\frac{\partial f}{\partial y}-$ mavjud va uzluksiz
Koshi masalasini yechimining yagonalik shartini aniqlang: $\begin{cases} y'=f(x,y) \\ y\|_{x=x_0}=y_0 \end{cases}$	* $\frac{\partial f}{\partial y}-$ mavjud va uzluksiz	$f(x,y)-$2-tartibli hosilasi mavjud	$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}-$ mavjud va uzluksiz	$f(x,y)-$uzluksiz
$y'=\frac{y}{x}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	* dikritik tugun	Egar	Tugun	Fokus
$y'=\frac{2y}{x}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	*Tugun	Fokus	dikritik nuqta	Markaz
$y'=-\frac{y}{x}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	* Egar	Fokus	Markaz	Tugun
$y'=\frac{x+y}{x-y}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	* Fokus	Egar	Dikritik tugun	Markaz
$y'=-\frac{x}{y}$ tenglamani $(0,0)$ maxsus nuqtasini nomini aniqlang.	* Markaz	Fokus	Dikritik tugun	Egar
Differensial tenglamada uning umumiy yechimidan ixtiyoriy o‘zgarmasning hech bir qiymatida hosil qilish mumkin bo‘lmagan yechim nima deb ataladi.	* maxsus yechim	xususiy yechim	umumiy yechim	maxsus nuqta

MA'RUZA № 10
Mavzu: Lagranj va Klero tenglamalari
Reja:

1. Klero tenglamasi
2. Klero tenglamasining umumiy yechimi
3. Lanranj tenglamasi
4. Lagranj tenglamasining umumiy yechimini parametrik koʻrinishi.

Klero tenglamasi . Quyidagi

$$y = xy' + \psi(y') \tag{1}$$

tenglama *Klero tenglamasi* deyiladi, bunda $\psi(y')$ y' – ning funksiyasi. Tenglamani yechish uchun $y' = p(x)$ belgilash kiritamiz. U holda (1) tenglama

$$y = xp + \psi(p) \tag{2}$$

koʻrinishga keladi.

Bu tenglamani, $y' = \dfrac{dp}{dx}$ ekanini hisobga olib, differensiallaymiz:

$$y' = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx}, \quad y' = p,$$

$$p = p + x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$

bundan

$$x\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx} = 0.$$

yoki

$$\frac{dp}{dx}(x + \psi'(p)) = 0.$$

Bu tenglama

$$\frac{dp}{dx} = 0 \tag{3}$$

yoki

$$x + \psi'(p) = 0 \tag{4}$$

boʻlgan holda ayniyatga aylanadi. Har ikki holni qaraymiz.

A) (3) tenglamani tegrallaymiz:

$$\int dp = 0 \Rightarrow p = C.$$

Endi quyidagi

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p) \\ p = C \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan p parametrni yoʻqotsak, berilgan (1) tenglamaning umumiy yechimini hosil qilamiz:

$$y = Cx + \psi(C) \tag{5}$$

Geometrik nuqtai-nazardan bu yechim tugri chiziqlar oilasini tasvirlaydi.

Hosil qilingan (5) yechimni tenglama bilan solishtirib, Klero tenglamasining umumiy yechimi undagi y' hosilasini ixtiyoriy oʻzgarmas C ga almashtirish orqali hosil qilinishini koʻramiz.

B) (4) tenglamada p ni x ning funksiyasi sifatida topamiz. Quyidagini

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p) \\ p = p_0(x) \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan p parametrni yo‘qotib

$$y = xp_0(x) + \psi(p_0(x)) \tag{6}$$

funksiyani hosil qilamiz. Bu funksiya (1) tenglamaning yechimidir. Haqiqatdan ham, bunga ishonch hosil qilish uchun (6) dan y' ni topamiz:

$$y' = p_0(x) + x\frac{dp_0(x)}{dx} + \psi'(p_0(x))\frac{dp_0(x)}{dx},$$

yoki

$$y' = p_0(x) + (x + \psi'(p_0(x)))\frac{dp_0(x)}{dx}.$$

(5) ga ko‘ra oxirgi ifoda quyidagi ko‘rinshga keladi, ya'ni $x + \psi'(p) = 0$ dan

$$y' = p_0(x). \tag{7}$$

Endi y va y' ning (6) va (7) formuladagi qiymatlarini (1) tenglamaga qo‘ysak,

$$xp_0(x) + \psi(p_0(x)) \equiv xp_0(x) + \psi(p_0(x))$$

ayniyat hosil bo‘ladi. Demak, (6) haqiqatdan ham berilgan tenglamalarning yechimi ekan. Bu yechimni (5) umumiy yechimdan C ning birorta ham qiymatida hosil qilib bo‘lmaydi. Ma'lumki, bunday yechimlar maxsus yechimlar deyiladi. Ko‘rayapmizki, bunday yechimni

$$\begin{cases} y = xp + \psi(p) \\ x + \psi'(p) = 0 \end{cases}$$

sistemadan yoki quyidagi

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C) \\ x + \psi'(C) = 0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasidan C ni yo‘qotib hosil qilish mumkin. Ma'lumki bu yechim $y = Cx + \psi(C)$ umumiy yechimning o‘ramasini aniqlaydi. Demak, Klero tenglamasining maxsus yechimi $y = Cx + \psi(C)$ to‘g‘ri chiziqlar oilasining o‘ramasini aniqlaydi.

Shunday qilib, Klero tenglamasini yechish uchun avvalo berilgan tenglamada y' ni C ga almashtirib, uning umumiy yechimini topish kerak:

$$y = Cx + \psi(C).$$

Shundan so‘ng quyidagi

$$\begin{cases} y = xC + \psi(C) \\ x + \psi'(C) = 0 \end{cases}$$

sistemadan C ni yo‘qotib, maxsus yechimni (uning grafigi integral egri chiziqlar oilasining o‘ramasi bo‘ladi) topish kerak.

Misol. $y = xy' + (y' - y'^2)$ tenglamani yeching.

Yechish. $y = xC + (C - C^2)$ umumiy yechim bo‘ladi. Bu tenglikning ikki tomonidan C bo‘yicha hosila olib, hosil bo‘lgan sistemani birgalikda yechamiz:

$$y'_C = 0 = x + (1 - 2C) \Rightarrow C = \frac{x+1}{2}.$$

Buni umumiy yechimga qo‘yib berilgan tenglamani maxsus yechimni hosil qilamiz:

$$y = \frac{(x+1)^2}{4}$$

Lagranj tenglamasi. Ushbu

$$y = x\varphi(y') + \psi(y') \qquad (8)$$
tenglama Lagranj tenglamasi deyiladi, bunda $\varphi(y')$, $\psi(y')$ lar y' ni ma'lum funksiyalari.

Bunday tenglamani ham p parametr kiritish usuli bilan yechiladi. $y' = p(x)$ deb belgilaymiz. U holda (8) tenglama ushbu ko‘rinishga keladi:
$$y = x\varphi(p) + \psi(p) \qquad (9)$$
Buni x bo‘yicha differensiallab,
$$p = y' = \varphi(p) + x\varphi'(p)\frac{dp}{dx} + \psi'(p)\frac{dp}{dx},$$
yoki
$$p - \varphi(p) = (x\varphi'(p) + \psi'(p))\frac{dp}{dx} \qquad (10)$$
tenglamani hosil qilamiz. $p - \varphi(p) \neq 0$ yoki $p - \varphi(p) = 0$ hollarni qaraymiz.

a) $p - \varphi(p) \neq 0$ bo‘lsin. (10) ni $\dfrac{dx}{dp}$ ga nisbatan yechib, quyidagi ko‘rinishda yozamiz:
$$\frac{dx}{dp} - x\frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$
Hosil qilingan tenglama x va $\dfrac{dx}{dp}$ ga nisbatan chiziqlidir va demak
$$x = \Phi(p, C) \qquad (11)$$
umumiy yechimga ega bo‘lamiz. (11) ni (9) ga qo‘yib, uni p va C orqali ifodalaymiz:
$$y = \Phi(p, C)\varphi(p) + \psi(p) = f(p, C) \qquad (12)$$
(11) va (12) bizga Langranj tenglamasining umumiy yechimini parametrik ko‘rinishni beradi:
$$\begin{cases} x = \Phi(p, C) \\ y = f(p, C) \end{cases}$$
Bu sistemada p parametrni yo‘qotib, Langranj tenglamasining umumiy yechimini quyidagi ko‘rinishda hosil qilamiz:
$$F(x, y, C) = 0.$$
Tenglamaning umumiy yechimidan hosil bo‘lmaydigan maxsus yechimi bo‘lishi mumkin. Bu quyidagicha bo‘ladi:

b) $p - \varphi(p) = 0$ bo‘lsin, ya'ni biror $p = p_0$ da $\varphi(p_0) = p_0$ bo‘lsin. Ushbu
$$\begin{cases} y = x\varphi(p) + \psi(p) \\ p = p_0 \end{cases}$$
sistemadan p ni yo‘qotib,
$$y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$$
yechimni hosil qilamiz. Bu esa Langranj tenglamasining maxsus yechimidir.

Misol. $y = x + y'^3$ tenglamani yeching.

Tenlamaning umumiy yechimi
$$\begin{cases} x = 3(\ln(p - 1) + \dfrac{(p+1)^2}{2}) + C \\ y = 3(\ln(p - 1) + \dfrac{(p+1)^2}{2}) + C + p^3 \end{cases}$$

va maxsus yechimi $y = x + 1$ bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. $y' = f(x, y)$ tenglama yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teoremaning isboti.
2. O‘ng tamoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemasini yechish.

Glossariy

Klero tenglamasi **-** Quyidagi $y = xy' + \psi(y')$ tenglama Klero tenglamasi deyiladi**.**

Klero tenglamasining umumiy yechimi **-** $y = xy' + \psi(y')$ ko’rinishdagi Klero tenglamasining umumiy yechimi $y = Cx + \psi(C)$ dan iborat.

Lagranj tenglamasi **-** Ushbu $y = x\varphi(y') + \psi(y')$ tenglama Lagranj tenglamasi deyiladi

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Klero tenglamasi deb nimaga aytiladi va u qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Klero tenglamasini maxsus yechimi $y = cx + \gamma(c)$ to‘g‘ri chiziqlar oilasining o‘ramasini qanday aniqlaydi?
3. Logranj tenglamasi deb nimaga aytilidi va u qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Logranj tenglamasining umumiy yechimi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Logranj tenglamasining maxsus yechimi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Amaliy mashg’ulot-9

1. $(x + y^2)dx - 2xydy = 0$ j: $\ln|x| - \dfrac{y^2}{x} = c$

2. $y(1 + xy)dx - xdy = 0$ j: $\dfrac{x}{y} + \dfrac{x^2}{2} = c$

3. $\dfrac{y}{x}dx + (y^3 - \ln x)dy = 0$ j: $\dfrac{1}{y}\ln x + \dfrac{1}{2}y^2 = c$

4. $(x\cos y - y\sin y)dy + (x\sin y + y\cos y)dx = 0$ j: $(x\sin y + y\cos y - \sin y)e^{x} = c$

5. $(x^2 - y)dx + xdy = 0$ j: $M = \frac{1}{x^2};\ \ x + \frac{y}{x} = C$

6. $2xtgydy + (x^2 - 2\sin y)dy = 0$ j: $\ln\mu = \ln\cos y;\ \ x^2\sin y + \frac{1}{2}\cos 2y = C$

7. $(e^{2x} - y^2)dx + ydy = 0$ j: $\mu = e^{-2x};\ \ y^2 = (c - 2x)e^{2x}$

8. $(1 + 3x^2\sin y)dx - xctgydy = 0$ j: $\mu = \frac{1}{\sin y};\ \ \frac{x}{\sin y} + x^3 = C$

9. $y^2dx + (yx - 1)dy = 0$ j: $\mu = \frac{1}{y};\ \ xy - \ln y = 0$

10. $(x^2 - 3y^2)dx + 2xydy = 0$ j: $\mu = \frac{1}{x^4};\ \ y^2 = cx^3 + x^2$

TEST

Differensial tenglamada uning umumiy yechimidan ixtiyoriy o‘zgarmasning hech bir qiymatida hosil qilish mumkin bo‘lmagan yechim nima deb ataladi.	* maxsus yechim	xususiy yechim	umumiy yechim	maxsus nuqta
Maxsus yechimni topish formulasini toping.	* $\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\ \Phi_c(x,y,c)=0\end{cases}$	$\begin{cases}\Phi(x,y,y',c)=0\\ \Phi_c(x,y,y',c)=0\end{cases}$	$\begin{cases}\Phi(x,y)=0\\ \Phi_c(x,y)=0\end{cases}$	$\begin{cases}\Phi(x,y',c)=0\\ \Phi_c(x,y',c)=0\end{cases}$
Klero tenglamasini aniqlang.	* $y = xy' + \psi(y')$	$y = xy^2 + \psi(y')$	$y = x + \psi(y')$	$y = x(y')^{-1} + \psi(y')$
Klero tenglamasini umumiy yechimi ko‘rinishini aniqlang.	* $y = cx + \psi(c)$	$y = x + \psi(c)$	$y = x(c)^{-1} + \psi(c)$	$y = c^2x + \psi(c)$
Klero tenglamasini maxsus yechimini aniqlang.	* $y = xp_0(x) + \psi(p_0(x))$	$x = y\varphi(y') + \psi(y')$	$x' = y\varphi(y) + \psi(y)$	$y = x'\varphi(y) + \psi(y')$
Lagranj tenglamasining ko‘rinishini aniqlang.	* $x = y\varphi(y') + \psi(y')$	$y = x\varphi(y') + \psi(y')$	$x' = y\varphi(y) + \psi(y)$	$y = y'\varphi(x) + \psi(x)$
Lagranj tenglamasining maxsus yechimi ko‘rinishini aniqlang.	* $y = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$	$y' = x\varphi(p_0) + \psi(p_0)$	$y = y'\varphi(p_0) + \psi(p_0)$	$x = y'\varphi(p_0) + \psi(p_0)$
Quyidagi tenglamaning maxsus yechimini toping: $y = x + y'^3$	* $y = x + 1$	$y = x + 3$	$y = x + 2$	$y = x + 4$
Birinchi tartibli chiziqli tenglamada $Q(x)$ qanday bo‘lsa, chiziqli bir jinsli tenglama deyiladi?	* $Q(x) = 0$	$Q(x) \neq 0$	$Q(x) = 1$	$Q(x) = x$
Ushbu $y = Cx^3$ chiziqlar oilasi qaysi diffirensial tenglamaning yechimi?	*$xy' = 3y$	$y = e^{xy^{1/y}}$	$y' = 3y^{2/3}$	$y = xy'$

MA'RUZA № 11

Mavzu: Yuqori tartibli differensial tenglamalar. Koshi masalasi. Mavjudlik va yagonalik teoramelari.

Reja:

1. $n-$tartibli differensial tenglama.
2. Yechim, umumiy yechim, xususiy yechim tushunchalari.
3. Koshi masalasini qo‘yilishi.
4. Koshi, Pikar-Lindelyof va Peano teoremalari.

Ushbu

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglama $n-$tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. Bu yerda $F(x, y, y', \dots, y^{(n)})$ funksiya $(n+2)$ o‘lchovli R^{n+2} fazoning D_{n+2} sohasida aniqlangan. Ko‘p hollarda (1) tenglama ushbu

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \qquad (2)$$

ko‘rinishga keltiriladi. Bu tenglama yuqori tartibli hosilaga nisbatan yechilgan yoki kanonik ko‘rinishdagi $n-$tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi. (2) tenglamada $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funksiya $(n+1)$ o‘lchovli R^{n+1} fazoning D_{n+1} sohasida aniqlangan.

Agar (1) va (2) da $n=1$ bo‘lsa, 1-tartibli oddiy differensial tenglamaga ega bo‘lamiz. Bu holni biz ko‘rganmiz. Endi $n \geq 2$ bo‘lsin.

1-Ta'rif. (2) tenglama berilgan bo‘lib, $f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$ funksiya R^{n+1} fazoning D_{n+1} sohasida aniqlangan bo‘lsin. Agar I intervalda aniqlangan biror $y = \varphi(x)$ funksiya uchun quyidagi uchta

$$\left.\begin{array}{l} 1^0.\ \varphi(x) \in C^n(I) \\ 2^0.\ (x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)) \in D_{n+1}, x \in I \\ 3^0.\ \varphi^{(n)}(x) = f(x, \varphi(x), \varphi'(x), \dots, \varphi^{(n-1)}(x)), x \in I \end{array}\right\} \qquad (3)$$

shart bajarilsa, u holda $y = \varphi(x)$ funksiya I intervalda (2) differensial *tenglamaning yechimi* deyiladi.

(2) tenglama yechimining grafigi, ya'ni $y = \varphi(x)$ funksiyaning grafigi uning *integral chizig‘i* deyiladi.

Eslatib o‘tamizki, 1- tartibli differensial tenglamalardagi kabi yuqori tartibli differensial tenglamalarda ham yechim ba'zida oshkor $y = \varphi(x)$ ko‘rinishda yozilsa, ba'zida oshkormas $\Phi(x, y) = 0$ funksiya ko‘rinishida yozilishi mumkin. Yechimni ba'zan parametrik ko‘rinishda $x = x(t)$, $y = y(t)$ $t \in I$ (t - parametr) izlash ham qulay bo‘ladi.

2-Ta'rif. (2) differensial tenglama va $x, C_1, C_2, \dots, C_n$ o‘zgaruvchilarning biror o‘zgarish sohasida aniqlangan xamda x bo‘yicha n marta uzluksiz differensiallanuvchi

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$$

(4)

funksiya berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ nuqta uchun ushbu

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, \dots, C_n) \end{cases} \qquad (5)$$

munosabatlar $C_1, C_2, \dots, C_n$ larning

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ C_2 = \psi_2(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \\ .... \\ C_n = \psi_n(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \end{cases} \tag{6}$$

qiymatlarini bir qiymatli aniqlasa va bu qiymatlarni ushbu

$$y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, ..., C_n) \tag{7}$$

tenglikka qo‘yish natijasida (2) tenglama hosil bo‘lsa, (ya'ni tenglamani qanoatlartirsa), u holda (4) funksiya (2) tenglamaning D_{n+1} sohasida aniqlangan *umumiy yechimi* deyiladi.

Shunday qilib, (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi n ta ixtiyoriy o‘zgarmasni o‘z ichiga oladi.

(2) differensial tenglamaning barcha yechimlarini topish asosiy masaladir. Umumiy yechim formulasi (4) ni olaylik. Unda $C_1, C_2, ..., C_n$ larga ma'lum qiymatlar bersak, tegishli yechim hosil bo‘ladi. Umuman aytganda, (2) tenglamaning (4) formula o‘z ichiga olmagan yechimlari ham bo‘lishi mumkin.

(2) differensial tenglamaning umumiy yechimi formulasi (4) dan $C_1, C_2, ..., C_n$ larga qiymatlar berib, hosil qilinadigan har bir yechimi (2) tenglamaning *xususiy yechimi* deyiladi.

Xususiy yechimni izlash Koshi masalasining yechimini izlashga keladi. Agar (2) tenglama, $(x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ nuqta va ushbu

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', ..., y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \tag{8}$$

munosabatlar berilgan bo‘lsa, (2) differensial tenglamaning (8) tengliklarini qanoatlantiradigan yechimini izlash (2) tenglama uchun *Koshi masalasi* deyiladi. Unda (8) tengliklar boshlang‘ich shartlar, $x_0, y_0, y_0', ..., y_0^{(n-1)}$ qiymatlar esa *boshlang‘ich qiymatlar* deyiladi. $n = 2$ bulganda Koshi masalasi aniq geometrik ma'noga ega. Masalan, $y'' = f(x, y, y')$ tenglama uchun $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0'$ shartni qanoatlantiruvchi integral chiziq tegishli sohaning (x_0, y_0) nuqtasidan berilgan y_0' burchak koeffitsientli urinma bilan o‘tishi lozim.

Agar (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi (4) ma'lum bo‘lsa, tegishli Koshi masalasini yechish uchun ushbu

$$\begin{cases} \varphi(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0, \\ \varphi'(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0', \\ .... \\ \varphi^{(n-1)}(x_0, C_1, C_2, ..., C_n) = y_0^{(n-1)}, \end{cases} \tag{9}$$

tenglamalar sistemasini $C_1, C_2, ..., C_n$ larga nisbatan yechish kerak bo‘ladi. Bu sistema yagona yechimga ega bo‘lishi, bittadan ortiq yechimga ega bo‘lishi yoki umuman yechimga ega emasligi mumkin. (9) sistema yagona yechimga ega bo‘lganda (2), (8) Koshi masalasi yagona yechimga ega deyiladi. Aks holda tegishli Koshi masalasida yagonalik buzilgan bo‘ladi.

Agar (2) differensial tenglamaning xususiy yechimi $\Phi(x, y) = 0$ ko‘rinishda berilsa, bu munosabat berilgan differensial tenglamaning *integrali* deyiladi. Agar umumiy yechim $\Phi(x, y, C_1, C_2, ..., C_n) = 0$ ko‘rinishda yozilgan bo‘lsa, bu munosabat (2) tenglamaning *umumiy integrali* deyiladi.

(2) differensial tenglamaning barcha (xususiy va maxsus) yechimlarini topish differensial tenglamani integrallash jarayoni bo‘ladi. Tenglamani integrallash jarayoni noaniq integrallarin hisoblashga kelganda differensial tenglama *kvadraturalarda integrallanadi* deyiladi.

Endi (2) differensial tenglama uchun yechimning mavjudlik va yagonalik teoremalarini keltiramiz.

1-Teorema (Koshi teoremasi). *Agar (2) dıfferensial tenglamada ushbu*

$$f(x,y,y',...,y^{(n-1)}),\frac{\partial f}{\partial y},\frac{\partial f}{\partial y'},...,\frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}$$

funksiyalar $D_{n+1}\subset R^{n+1}$ *sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda:*

1^0. (2) dıfferensial tenglamaning biror I *integralda aniqlangan,*

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y_0',...,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)},\ ((x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)})\in D_{n+1})$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.

2^0. Agar $y=\varphi(x),x\in I_1$ *va* $y=\psi(x),x\in I_2$ *funksiyalarning har biri (2) dıfferensial tenglamaning yechimi bo'lib, berilgan* x_0 *uchun*

$$\varphi(x_0)=\psi(x_0),\ \varphi'(x_0)=\psi'(x_0),...,\varphi^{(n-1)}(x_0)=\psi^{(n-1)}(x_0)$$

bo'lsa, $y=\varphi(x)$ *va* $y=\psi(x)$ *yechimlar aniqlanish sohalarining umumiy qismida ustma-ust tushadi. Boshqacha aytganda, agar* $x_0\in I_1\cap I_2$ *nuqtada* $\varphi^{(i)}(x_0)=\psi^{(i)}(x_0),\ i=0,1,...,n-1$ *bo'lsa, u holda* $I_1\cap I_2$ *intervalda* $\varphi(x)\equiv\psi(x)$ *bo'ladi.*

3-Ta'rif. Agar $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ funksiya $D_{n+1}\subset R^{n+1}$ sohada aniqlangan bo'lib, bu funksiya uchun shunday $L\geq 0$ son mavjud bo'lsaki, ixtiyoriy $(x_1,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)})\in D_{n+1}$, $(x_2,y_2,y_2',...,y_2^{(n-1)})\in D_{n+1}$ nuqtalar uchun ushbu

$$\left|f(x_1,y_1,y_1',...,y_1^{(n-1)})-f(x_2,y_2,y_2',...,y_2^{(n-1)})\right|\leq L\sum_{i=0}^{n-1}\left|y_1^{(i)}-y_2^{(i)}\right|,\ L\geq 0 \qquad \text{(L)}$$

tengsizlik bajarilsa, u holda $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ funksiya D_{n+1} sohada $y,y',...,y^{(n-1)}$ lar bo'yicha *Lipshits shartini qanoatlantiradi* deyiladi, L esa *Lipshits o'zgarmasi* deyiladi.

2-Teorema (Pikar-Lindelyof teoremasi). *Agar* $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ *funksiya* $D_{n+1}\subset R^{n+1}$ *sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lib, shu* D_{n+1} *sohada* $y,y',...,y^{(n-1)}$ *lar bo'yicha Lipshits shartini qanoatlantirsa, u holda har bir* $(x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)})\in D_{n+1}$ *nuqta uchun shunday o'zgarmas* $h>0$ *son topilsaki , natijada (2) tenglamaning (8) boshlang'ich shartlarini qanoatlantiradigan va* $I=\{x:|x-x_0|\leq h\}$ *oraliqda aniqlangan yagona yechimi mavjud bo'ladi.*

3-Teorema (Peano teoremasi). *Agar* $f(x,y,y',...,y^{(n-1)})$ *funksiya* D_{n+1} *sohada aniqlangan va uzluksiz bo'lib,* $(x_0,y_0,y_0',...,y_0^{(n-1)})\in D_{n+1}$ *bo'lsa, u holda (2) dıfferensial tenglamaning (8) boshlang'ich shartlarini qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud.*

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, " Ўзбекистон", 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Hosilaga nisbatan yechilmagan birinchi tartibli differensial tenglamalar va ularni integrallash

usullari.
2. Eksponensial matritsani hisoblash.

Glossariy

Umumiy yechim - (2) differensial tenglama va $x, C_1, C_2, ... C_n$ o‘zgaruvchilarning biror o‘zgarish soxasida aniqlangan xamda x bo‘yicha n marta uzluksiz differensiallanuvchi

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, ... C_n)$$

funksiya berilgan bo‘lsin. Agar ixtiyoriy $(x, y, y', ..., y^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ nuqta uchun ushbu

$$\begin{cases} y = \varphi(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y' = \varphi'(x, C_1, C_2, ..., C_n) \\ y^{(n-1)} = \varphi^{(n-1)}(x, C_1, C_2, ..., C_n) \end{cases}$$

munosabatlar $C_1, C_2, ... C_n$ larning

$$\begin{cases} C_1 = \psi_1(x, y, y', .. y^{(n-1)}) \\ C_2 = \psi_2(x, y, y', .. y^{(n-1)}) \\ C_n = \psi_n(x, y, y', .. y^{(n-1)}) \end{cases}$$

qiymatlarini bir qiymatli aniqlasa va bu qiymatlarni ushbu

$$y^{(n)} = \varphi^{(n)}(x, C_1, C_2, ... C_n)$$

tenglikka qo‘yish natijasida (2) tenglama xosil bo‘lsa, (ya'ni tenglamani qanoatlartirsa), u xolda (4) funksiya (2) tenglamaning D_{n+1} soxasida aniqlangan umumiy yechimi deyiladi.

Koshi teoremasi - Agar (2) differensial tenglamada ushbu

$$f(x, y, y', ..., y^{(n-1)}), \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, ..., \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}},$$

funksiya lar $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ soxada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsa, u xolda:

1^0. (2) differensial tenglama ning biror I integralda aniqlangan,

$$y(x_0) = y_0, \ y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, (x_0, y_0, y'_0, .. y_0^{(n-1)} \in D_{n+1})$$

boshlang‘ich shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud.

2^0. Agar $y = \varphi(x), x \in I_1$ va $y = \psi(x), x \in I_2$ funksiya larning xar biri (2) differensial tenglamaning yechimi bo‘lib, berilgan x_0 uchun $\varphi(x_0) = \psi(x_0), \ \varphi'(x_0) = \psi'(x_0), ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = x^{(n-1)}(x_0),$ bo‘lsa, $y = \varphi(x)$ va $y = \psi(x)$ yechimldar aniqlanganqlanish soxalarining umumiy qismida ustma-ust tushadi.

Boshqacha aytganda, agar $x_0 \in I_1 \cap I_2$ nuqtada $\varphi^{(i)}(x_0) = \psi^{(i)}(x_0), \ i = 0.1, ... n-1$ bo‘lsa, u xolda $I_1 \cap I_2$ intervalda $\varphi(x) = \psi(x)$ bo‘ladi.

Peano teoremasi - Agar $f(x, y, y', ..., y^{(n-1)})$ funksiya D_{n+1} soxada aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, $(x_0, y_0. y'_0, .. y_0^{(n-1)}) \in D_{n+1}$ bo‘lsa, u xolda (2) differensial tenglamaning (8) boshlang‘ich shartlarini qanoatlantiradigan kamida bitta yechimi mavjud.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y'^2 - y' \cdot x - y + \dfrac{x^2}{2} = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);

- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Qanday ko‘rinishdagi tenglama p-tartibli oddiy differensial tenglama deyiladi?
2. Differensial tenglamasining yechimideb nimaga aytiladi?
3. $y^{(n)} = f\left(x_1 y_1 y^1, \ldots, y^{(n-1)}\right)$ tenglamaning xususiy yechimi deb nimaga aytiladi?
4. $y^{(n)} = f(x_1 y_1 y_1, \ldots, y^{(n-1)})$ tenglama uchun.Koish masalasi deb nimaga aytiladi?
5. Koish masalasini yagona yechimga ega bo‘lishini isbotlang?

Amaliy mashg’ulot-10

1. $(\sin x + e^{y})dx + \cos x dy = 0$ j: $\mu = e^{-y}$; $e^{-y}\cos x = c + x$
2. $(x\sin y + y)dx + (x^2\cos y + x\ln x)dy = 0$ j: $\ln\mu = -\ln x$; $\mu = \frac{1}{x}$; $x\sin y + \ln x = c$
3. $(x^2 + y^2 + 2x)dx + 2ydy = 0$ j: $(x^2 + y^2)e^{x} = c$
4. $(x^2 + y)dx - xdy = 0$ j: $\mu = \frac{1}{x^2}$; $x - \frac{y}{x} = c$
5. $x^2y^3 + y + (x^3y^2 - x)y^1 = 0$ j: $x^2y^2 + 2\ln\frac{x}{y} = c$
6. $(x^2 + y^2 + 1)dx - 2xydy = 0$ j: $x^2 - y^2 - 1 = cx$
7. $(y + x^2)dy + (x - xy)dx = 0$ j: $x^2 + y^2 = C(y-1)^2$
8. $\left[2y + \frac{1}{(xtg)^2}\right]dx + \left[3y + x + \frac{1}{(xtg)^2}\right]dy = 0$ j: $y^3 + x^2y + 2xy^2 + \ln(x+y) = c$

TEST

Birinchi tartibli chiziqli tenglamada $Q(x)$ qanday bo‘lsa, chiziqli bir jinsli tenglama deyiladi?	* $Q(x)=0$	$Q(x)\neq 0$	$Q(x)=1$	$Q(x)=x$
Ushbu $y = Cx^3$ chiziqlar oilasi qaysi diffirensial tenglamaning yechimi?	*$xy' = 3y$	$y = e^{xy^{1/y}}$	$y' = 3y^{2/3}$	$y = xy'$
$y' = ax^{\alpha} + by^{\beta}$ tenglama α va β ning qanday qiymatlarida $y = z^m$ almashtirish yordamida bir jinsli tenglamaga keltiriladi.	*$\frac{1}{\beta} - \frac{1}{\alpha} = 1$	$\alpha + \beta = 1$	$-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\beta} = 1$	$\alpha - \beta = 1$
$y' + 2ye^{x} - y^2 = e^{2x} + e^{x}$ Rikkati tenglamasini bitta xususiy yechimini toping.	* $y_1 = e^{x}$	$y_1 = e^{-x}$	$y_1 = e^{2x}$	$y = x + 1$
Agar y_1 va y_2 – birinchi tartibli chiziqli tenglamaning ikkita turli yechimlari bo‘lsa, tenglamaning umumiy yechimi y_1 va y_2 yordamida qanday	* $y = y_1 + c(y_2 - y_1)$	$y = y_1 \cdot y_2$	$y = \frac{y_1}{y_2}$	Yozib bo‘lmaydi

yoziladi?				
Quyidagi funksiyalardan qaysi $y^2dx-(xy+x^3)dy=0$ tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchi bo'ladi?	$*\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{y^2}$
Quyidagi funksiyalardan qaysi $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$ tenglama uchun integrallovchi ko'paytuvchi bo'ladi?	$*\frac{1}{y}$	$\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^3}$	$\frac{1}{y^2}$
$e^{-x}\frac{1}{y}$ funksiya quyidagi tenglamalardan qaysi biri uchun integrallovchi ko'paytuvchi bo'ladi?	$*y^2dx+(e^x-y)dy=0$	$e^{-x}xydx-(x^2+y^2)dy=0$	$e^{-x}dx-$ $-(2y+xe^{-x})dy=0$	Hamma javoblar noto'g'ri
Agar $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$ tenglamada $M(x,y)$ va $N(x,y)$ m-tartibli bir jinsli funksiyalar bo'lsa, u holda integrallovchi ko'paytuvchi qanaqa ko'rinishda bo'ladi?	$*\ m(x,y)=[xM+yN]^{-1}$	$m(x,y)=xM+yN$	$m(x,y)=\frac{x+y}{M+N}$	$m(x,y)=[xN+yM]^{-1}$
Shunday egri chiziqlarni topingki, uning har bir nuqtasiga o'tkazilgan urinma koordinata o'qlari bilan birgalikda yuzasi $2a^2$ ga teng bo'lgan uchburchak hosil qilsin.	$*\ xy=\pm a^2$	$y=\frac{1}{a^2}$	$xy=\pm 2a^2$	$y=a^4$

MA'RUZA № 12

Mavzu: n-tartibli differensial tenglamalar.Tartibi kamayadigan differensial tenglamalar

Reja:

1. $n-$tartibli differensial tenglamalarning kvadraturada integrallanuvchi ba'zi turlari.
2. Tartibi kamayadigan differensial tenglamalar.

Tayanch so'z va iboralar: $y^n=f(x)$ *ko'rinishidagi tenglama,* $F(x,y^{(n)})=0$ *ko'rinishidagi tenglama,* $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ *ko'rinishidagi tenglama,* $F(y^{(n-2)},y^{(n)})=0$ *ko'rinishidagi tenglama,* $F(y^{(n)})=(y^{(n)})^k+a_1(y^{(n)})^{k-1}+...+a_{k-1}(y^{(n)})+a_k=0$ *ko'rinishidagi tenglama*

1. $y^n=f(x)$ **ko'rinishdagi tenglama.** Mavjudlik va yagonalik teoremasining

shartlarini bajarilishi uchun $f(x)$ funksiya biror I intervalda uzluksiz bo‘lishi yetarli. Shunday deb faraz qilaylik. Bu holda differensial tenglamani n marta ketma-ket integrallab, umumiy yechimni topish mumkin:

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx\dots dx+\frac{C_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}+$$

$$+\frac{C_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2}+\dots+C_{n-1}(x-x_0)+C_n. \qquad (1)$$

(1) formula $y^{(n)}=f(x)$ tenglamaning barcha yechimlarini o‘z ichiga oladi va umumiy yechim bo‘ladi. Maxsus yechimlar yo‘q.

2. $F(x,y^{(n)})=0$ **ko‘rinishdagi tenglama.** Agar bu tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa (ya'ni $y^{(n)}=f_k(x),\ k=1,2,\dots.$), u holda bu tenglamalarning integrallab, berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimini topamiz.

$F(x,y^{(n)})=0$ tenglama $y^{(n)}$ ga nisbatan yechilmasin deylik. x va $y^{(n)}$ lar parametrik ko‘rinishda yozilishi mumkin deb faraz qilamiz, ya'ni $x=\psi(t),\ y^{(n)}=\chi(t)$. U holda $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$ ga ko‘ra $dy^{(n-1)}=\chi(t)\psi'(t)dt$. Bundan

$$y^{(n-1)}=\chi_1(t,C_1),\ y^{(n-2)}=\chi_2(t,C_1,C_2),\dots,y=\chi_n(t,C_1,C_2,\dots,C_n).$$

Shunday qilib umumiy yechim $x=\psi(t),\ y=\chi_n(t,C_1,C_2,\dots,C_n)$ bo‘ladi.

3. $F(y^{(n-1)},y^{(n)})=0$ **ko‘rinishdagi tenglama.** a) Tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsin: $y^{(n)}=f(y^{(n-1)})$. Agar $z=y^{(n-1)}$ desak, $z'=f(z)$ ga kelamiz. Bu o‘zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglama. Uning umumiy yechimi

$$x=C_1+\int\frac{dz}{f(z)}$$

bo‘ladi. Bu tenglik z ga nisbatan yechilishi mumkin bo‘lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Agar uni z ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsa, (ya'ni $z=\psi_1(x_1,C_1)$), u holda $y^{(n-1)}=\psi_1(x_1,C_1)$ dan $y=\psi_n(t,C_1,C_2,\dots,C_n)$ umumiy yechim kelib chiqadi. Mabodo yuqoridagi tenglik z ga nisbatan yechilmasa, yana parametr kiritish usulidan foydalaniladi.

b) Tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan yechish mumkin emas, ammo $y^{(n)}=\chi(t),\ y^{(n-1)}=\psi(t)$ parametrik ifoda ma'lum deylik. U holda $dy^{(n-1)}=y^{(n)}dx$ dan $dx=\dfrac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}}=\dfrac{\psi'(t)}{\chi(t)}$ va $x=\int\dfrac{\psi'(t)dt}{x(t)}+C_1$ kelib chiqadi. Endi $dy^{(n-2)}=y^{(n-1)}dx$ dan

$$y^{(n-2)}=\int y^{(n-1)}dx+C_2=\int\psi(t)\cdot\frac{\psi'(t)}{\chi(t)}dt+C_2$$

ni hosil qilamiz. Shunga o‘xshash muloxazalar yuritib,

$$dy^{(n-3)}=y^{(n-2)}dx,\dots,dy=y'dx$$

tengliklarni integrallaymiz va $y=\int y'dx+C_n$ dan y uchun parametrik ifodani topamiz. Ma'lumki, x ning parametrik ifodasida bitta (C_1) ixtiyoriy o‘zgarmas, $y^{(n-2)}$ da ham bitta (C_2), $y^{(n-3)}$ da 2ta (C_2 va C_3),…, $y^{(n-(n-1))}$ da $n-2$ ta, y da esa $n-1$ ta ixtiyoriy o‘zgarmas qatnashadi. U holda x va y larning parametrik ifodalarida n ta ixtiyoriy o‘zgarmas qatnashadi. Demak,

$$x=\int\frac{\psi'(t)dt}{x(t)}+C_1,\ y=\int y'dx+C_n(=\chi_n(t,C_2,C_3,\dots,C_n))$$

umumiy yechim bo‘ladi.

4. $F(y^{(n-2)}, y^{(n)}) = 0$ **ko‘rinishdagi tenglama.** Ushbu $z = y^{(n-2)}$ almashtirish berilgan tenglamani $F(z, z'') = 0$ ko‘rinshga olib keladi.

a) Oxirgi tenglamani z'' ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsin deylik: $z'' = f(z)$. Bu tenglama 1) bandda ko‘rilgan usul bilan integrallanadi, yani

$$2z'z'' = 2f(z)z' \Rightarrow d(z')^2 = 2f(z)dz \Rightarrow z'^2 = 2\int f(z)dz + C \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z' = \pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1} \Rightarrow dx = \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}} \Rightarrow x + C_2 = \int \frac{dz}{\pm\sqrt{2\int f(z)dz + C_1}}.$$

Oxirgi tenglikdan z – ni topib bo‘lsa, u holda $z = y^{(n-2)}$ almashtirishdan tenglamani umumiy yechimini topish mumkin. Agar z – ga nisbatan yechilmasa yana parametr kiritib umumiy yechim topiladi.

b) Berilgan tenglama $y^{(n)}$ ga nisbatan yechilmasin, ammo $y^{(n-2)} = \psi(t)$, $y^{(n)} = \chi(t)$ parametrik ifoda ma'lum deylik. Ma'lumki, $dy^{(n-1)} = y^{(n)}dx$, $dy^{(n-2)} = y^{(n-1)}dx$. Bu tengliklardan

$$\frac{dy^{(n-1)}}{y^{(n)}} = \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}}$$

yoki

$$y^{(n-1)}dy^{(n-1)} = y^{(n)}dy^{(n-2)} = \chi(t)\psi'(t)dt$$

munosabat kelib chiqadi. Bundan

$$y^{(n-1)} = \pm\sqrt{2\int \chi(t)\psi'(t)dt + C_2}.$$

Keyingi mulohazalar 2 banddagi kabi bo‘ladi. x uchun topiladigan ifodada ikki ixtiyoriy o‘zgarmas (C_1 va C_2) qatnashadi. Oxirgi tenglamani ketma-ket integrallab borsak, yana $C_3, C_4, ..., C_n$ – ixtiyoriy o‘zgarmaslar ishtirok etadi. U holda umumiy yechimni bunday yozish mumkin:

$$x = \int \frac{dy^{(n-2)}}{y^{(n-1)}} + C_1 = \int \frac{\psi'(t)}{\pm\sqrt{2\int \chi(t)\psi'(t)dt + C_2}} + C_1,$$

$$y = \Phi(t, C_2, C_3, ..., C_n).$$

5. $F(y^{(n)}) = (y^{(n)})^k + a_1(y^{(n)})^{k-1} + ... + a_{k-1}(y^{(n)}) + a_k = 0$, $a_i = const, i = 1,2,...,k$ **ko‘rinishdagi tenglama.** Bu differensial tenglamani $y^{(n)}$ ga nisbatan k – tartibli algebraik tenglama deb qaraymiz. Uning haqiqiy ildizlari $p_1, p_2, ..., p_s$, $s \le k$ bo‘lsin. U holda $y^{(n)} = p_j$, $j = 1,2,...,s$ differensial tenglamani n marta integrallasak,

$$y = p_j\frac{x^n}{n!} + C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + ... + C_{n-2}\frac{x^2}{2!} + C_{n-1}x + C_n$$

kelib chiqadi. Undan:

$$p_j = \frac{n!}{x^n}\left(y - C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - ... - C_{n-2}\frac{x^2}{2!} - C_{n-1}x - C_n\right).$$

Shu topilgan p_j – ni berilgan tenglamada $y^{(n)}$ o‘rniga qo‘ysak, uning umumiy yechimi

$$F\left(\frac{n!}{x^n}\left(y - C_1\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} - ... - C_{n-2}\frac{x^2}{2!} - C_{n-1}x - C_n\right)\right) = 0$$

hosil bo‘ladi.

Agar

$$(y^{(n)})^k + a_1(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})(y^{(n)})^{k-1} + \dots + a_{k-1}(x,y,y',\dots,y^{(n-1)})(y^{(n)}) +$$
$$+ a_k(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}) = 0, \quad a_j \in C(D_{n+1})$$

differensial tenglama ko‘rilsa, u holda uni $y^{(n)}$ ga ko‘ra $k-$tartibli algebraik tenglama deb qarash mumkin. Agar haqiqiy ildizlarni topish mumkin bo‘lsa, u holda ushbu yuqori hosilaga nisbatan yechilgan

$$y^{(n)} = p_j(x,y,y',\dots,y^{(n-1)}), \ j = 1,2,\dots,s, \ s \le k$$

tenglamalarga ega bo‘lamiz.

2. a) $n-$tartibli differensial tenglamada noma'lum funksiya y va uning ketma-ket kelgan xosilalari $y,y',\dots,y^{(k-1)}$ qatnashmasin deylik. U holda differensial tenglama

$$F(x,y^{(k)},y^{(k+1)},\dots,y^{(n)}) = 0, \ k = \overline{1,n} \qquad (1)$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu holda $y^{(k)} = p(x)$ deyilsa, $F(x,p(x),p'(x),\dots,p^{(n-k)}(x)) = 0$ $(n-k)-$tartibli differensial tenglama hosil bo‘ladi, ya’ni tenglama tartibi k birlikka pasayadi. Agar uni integralldash mumkin desak, $\Phi(x,p(x),C_1,C_2,\dots,C_{n-k}) = 0$ ni hosil qilamiz. Endi $p(x) = y^{(k)}$ bo‘lgani uchun $\Phi(x,y^{(k)},C_1,C_2,\dots,C_{n-k}) = 0$ ni hosil qilamiz. Bu $k-$tartibli differensial tenglamani integrallasak umumiy yechimga ega bo‘lamiz.

b) Agar $n-$tartibli differensial tenglamada erkli o‘zgaruvchi oshkor holda qatnashmasa, ya'ni tenglama

$$F(y,y',\dots,y^{(n)}) = 0 \qquad (2)$$

ko‘rinishda bo‘lsa, y ni yangi erkli o‘zgaruvchi, $y' = p(y)$ ni yangi noma'lum funksiya deb, ushbu almashtirishni bajaramiz (x→y, y→p):

$$y' = p(y) \Rightarrow y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx} = p\cdot\frac{dp}{dy} = p\cdot p' \Rightarrow$$

$$y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d}{dy}\left(p\frac{dp}{dy}\right)\frac{dy}{dx} = p\left[p\frac{d^2p}{dy^2} + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right] = p^2\frac{d^2p}{dy^2} + p\left(\frac{dp}{dy}\right)^2 = p^2p'' + pp'^2,\dots$$

Bu hisoblashlar yordamida $\dfrac{d^ky}{dx^k}$ miqdor $p,\dfrac{dp}{dy},\dots,\dfrac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$ miqdorlar orqali ifodalanishini matematik induksiya usuli bilan ko‘rsatish mumkin. Shu almashtirishni bajarsak, $(n-1)-$tartibli

$$F_1\left(y,p,\frac{dp}{dy},\dots,\frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0$$

differensial tenglamaga kelamiz. Demak, ko‘rilayotgan holda differensial tenglamaning tartibini bittaga kamaytirish mumkin. Agar hosil bo‘lgan tenglamaning umumiy yechimi

$$\Phi(y,p,C_1,\dots,C_{n-1}) = 0$$

yoki

$$\Phi\left(y,\frac{dy}{dx},C_1,\dots,C_{n-1}\right) = 0$$

bo‘lsa, shu munosabat berilgan $F(y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ tenglamaning oraliq integrali bo‘ladi. Endi berilgan differensial tenglamaning umumiy integralini topish uchun uning oraliq integralini 1-tartibli differensial tenglama sifatida integrallash kifoya.

c)Agar (2) $F(y,y',\dots,y^{(n)}) = 0$ differensial tenglamada $F(y,y',\dots,y^{(n)})$ biror $\Phi(y,y',\dots,y^{(n-1)})$ funksiyaning to‘liq differensiali bo‘lsa, ya'ni

$$F(y,y',\dots,y^{(n)}) = \frac{d}{dx}\Phi(y,y',\dots,y^{(n-1)})$$

munosabat o‘rinli bo‘lsa, u holda (2) tenglamaning bitta birinchi integrali $\Phi(y, y',..., y^{(n-1)}) = C_1$ ko‘rinishda yoziladi. Bu esa o‘zgaruvchi navbatida berilgan differensial tenglamaga qaraganda tartibi bitta kam $(n-1)-$tartibli differensial tenglamadir.

s)Agar $F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$ tenglama $y, y',..., y^{(n)}$ argumentlariga nisbatan bir jinsli, ya’ni

$$F(x, ty, ty',..., ty^{(n)}) = t^k F(x, y, y',..., y^{(n)})$$

bo‘lsa, u holda $y = e^{\int zdx}$, $z = z(x)$ yoki $y' = yz$ almashtirish bajarib tenglamani tartibini bir birlikka pasaytirish mumkin.

Misol. $x^2yy'' = (y - xy')^2$ tenglamani yeching.

d) Agar $F(x, y, y',..., y^{(n)}) = 0$ tenglama umumiy holda bir jinsli bo‘lsa, ya’ni

$$\begin{aligned}
&x \to kx \\
&y \to k^m y \\
&y' \to k^{m-1} y' \\
&y'' \to k^{m-2} y'' \\
&\dots\dots\dots\dots\dots \\
&y^{(n)} \to k^{m-n} y^{(n)}
\end{aligned}$$

almashtirish natijasida, tenglamani bir jinsli qiladigan $m-$ni tanlash mumkin bo‘lsa, u holda $x = e^t$, $y = u(t)e^{mt}$ almashtirish bajarib, tenglamani tartibini pasaytirish mumkin. Hosil bo‘lgan tenglama u va $t-$ga bog‘liq bo‘lib, t oshkor qatnashmaydi. Bu biz ko‘rgan b) holga to‘g‘ri keladi.

Misol. $x^3y'' = (y - xy')^2$ tenglamani yeching.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Mavjudlik va yagonalik teoremasi.
2. Matritsali differensial tenglamalarni integrallash.

Glossariy

$y^{(n)} = f(x)$ ***ko’rinishidagi tenglama yechimi -***

$$y(x) = \int_{x_0}^{x}\int_{x_0}^{x}\dots\int_{x_0}^{x} f(x)dxdx..dx + \frac{c_1}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + + \frac{c_2}{(n-2)!}(x-x_0)^{n-2} + ... + c_{n-1}(x-x_0) + c_n$$

integraldan iborat.

Lipshits sharti - Agar $f(x, y, y',..., y^{(n-1)})$ funksiya $D_{n+1} \subset R^{n+1}$ soxada aniqlangan bo‘lib, bu funksiya uchun shunday $L \geq 0$ son mavjud bo‘lsaki, ixtiyoriy

$(x, y_1, y_1', \ldots, y^{(n-1)}) \in D_{n+1}, (x, y_2, y_2', \ldots y_2^{(n-1)}) \in D_{n+1},$
nuqtalar uchun ushbu

$$\left| f(x, y_1, y_1', \ldots, y_1^{(n-1)}) - f(x, y_2, y_2', \ldots, y_2^{(n-1)}) \right| \le L \sum_{i=0}^{n-1} \left| y_1^{(i)} - y_2^{(i)} \right|, L \ge 0$$

tengsizlik bajarilsa, u xolda, $f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ funksiya D_{n+1} soxada $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ lar bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi deyiladi, L esa Lipshits o‘zgarmasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y = x + y' - \ln y'$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. p-tartibli differensial tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. $F(x_1 y^{(n)}) = o$ tenglamani umumiy yechimi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. p- tartibli differensial tenglamada no'malum funksiya u va uning ketma-ket kelgan xosilalari $y^1, y^{11}, \ldots, y^{(x-1)}$ qatnashmasi, u xolda differensial tenglama qanday ko‘rinishda yoziladi?
4. Qanday munosabat berilgan $F(y_1 y^1, \ldots, y^{(n)}) = o$ tenglamaning oraliq integrali bo‘ladi.
5. Tartibi kamayadigan differensial tenglama deb nimaga aytiladi?

Amaliy mashg’ulot-11

Hosilaga nisbatan yechilmagan tenglamalar.

1. $F(x, y, y') = 0$ tenglama quyidagicha yechilishi mumkin.

a) Tenglama y' ga nisbatan yechib olish, ya'ni y' ni *x,u* orqali ifodalash. Bir necha $y' = f(x, y)$ ko‘rinishdagi tenglamalar paydo bo‘lishi mumkin. Ularni har birini yechish kerak.

b) Parametr kiritish usuli.

$F(x, y, y') = 0$ tenglamani *u* ga nisbatan yechish mumkin bo‘lsin, ya'ni tenglamani $y = f(x, y')$ ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsin.

U holda

$$P = \frac{dy}{dx} = y' \qquad (1)$$

deb $y = f(x, p)$ (2)

tenglikni olamiz. (2) tenglikni ikkala tomonidan to‘liq differensial olamiz va *dy* ni *pdx* bilan almashtirib quyidagini olamiz:

$$M(x, p)dx + N(x, p)dp = 0$$

Agar bu tenglama yechimini $x = \varphi(p)$ ko‘rinishda topish mumkin bo‘lsa $F(x, y, y') = 0$ tenglama yechimining parametrik ko‘rinishda topamiz:

$$x = \varphi(p), \ y = (\varphi(p), p)$$

$x = f(y, y')$ tenglama ham shu ko‘rinishda yechiladi.

Misol-1. $y = x + y' - \ln y'$ tenglama yechilsin. $p = y'$ parametrik kiritsak

$$y = x + p - \ln p \qquad (3)$$

tenglikni olamiz. (3) ning ikala tomonidan to‘liq differensial hisoblaymiz va $dy = pdx$ deymiz:

$$dy = dx + dp - \frac{dp}{p}, \quad pdx = dx + dp - \frac{dp}{p},$$

$$(p-1)dx = \frac{p-1}{p}dp.$$

a) $p \neq 1$ bo‘lsa, $dx = \frac{dp}{p} \Rightarrow x = \ln p + C$.

Buni (3) ga qo‘yib olamiz:

$$x = \ln p + c, \quad y = p + c \qquad (5)$$

r ni yo‘qotsak $p = e^{x-c}$,

$$y = e^{x-c} + c. \qquad (6)$$

b) $p = 1$ bo‘lsa (3)-tenglik asosida

$y = x + 1$ (7) ni olamiz.

Misol-2: Ushbu

$$y'^2 - y' \cdot x - y + \frac{x^2}{2} = 0$$

differensial tenglamani yeching.

Bu tenglamada $\Phi(x, y, y') = y'^2 - y \cdot x - y + \frac{x^2}{2}$ bo‘lib, u tenglama *u* ga nisbatan yechiladi:

$$y = y'^2 - y \cdot x + \frac{x^2}{2}.$$

Keyingi tenglamada $y' = p$ deb, uning har ikki tomonini differensiallaymiz:

$$y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$$

$$dy = d\left(p^2 - px + \frac{x^2}{2}\right) = 2pdp - pdx + xdx = (2p - x)dp - (p - x)dx.$$

Endi $dy = y' \cdot dx = p \cdot dx$ bo‘lishini e'tiborga olib topamiz:

$$pdx = (2p - x)dp - (p - x)dx \Rightarrow p = (2p - x)\frac{dp}{dx} - p + x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (2p - x) \cdot \frac{dp}{dx} = 2p - x \Rightarrow \frac{dp}{dx} = 1 \qquad (2p - x \neq 0)$$

Ravshanki, $\frac{dp}{dx} = 1$ tenglamaning yechimi $p = x + c$ bo‘ladi.

Yuqoridagi $y = p^2 - px + \frac{x^2}{2}$ hamda $p = x + c$ tengliklardan *r* ni yo‘qotib topamiz:

$$y = (x + c)^2 - (x + c)x + \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} + Cx + C^2.$$

Bu berilgan tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi.

2. $F(x, y, y') = 0$ tenglamaning $y = \varphi(x)$ yechimi maxsus deyiladi, agar uning har bir nuqtasidan boshqa yechim o‘tadi va uning urinmasi $y = \varphi(x)$ urinmasi bilan bir xil va bu

nuqtaning ixtiyoriy kichik atrofida u bilan ustma-ust tushmaydi.

Agar $F(x,y,y')$, F_y, $F_{y'}$ hosilalar uzluksiz bo‘lsa $F(x,y,y')=0$ (8) tenglamaning maxsus yechimi

$$F_{y'}=c \qquad \left(F_{y'}=\frac{\partial F}{\partial y}\right) \tag{9}$$

Tenglamani qanoatlantiradi. Shuning uchun maxsus yechimni topish uchun (8), (9) tenglamalardan y' ni yo‘qotish kerak:

$$F(x,y,y')=0, \qquad \frac{\partial F}{dy'}(x,y,y')=0$$

Hosil bo‘lgan $\varphi(x,y)=0$ tenglama egri chiziqning diskriminantasi deyiladi. Diskriminanta chiziqning har bir shoxi $F(x,y,y')=0$ tenglamani yechimi bo‘ladimi degan savolga javob berish kerak, ya'ni uni har bir nuqtasida boshqa yechimlar urinib o‘tadimi deb tekshirish kerak.

Misol-3: $y=x+y'-\ln y'$ (10)

tenglama maxsus yechimlari topilsin.

Bu tenglikni y' bo‘yicha differensiallaymiz:

$$0=1-\frac{1}{y'}.$$

(10) va (11) tenglamadan y' ni yo‘qotamiz.

(11) tenglamadan $y'=1$. Uni (10) tenglamaga qo‘ysak, diskriminanta chiziq tenglamasini olamiz:

$$y=x+1 \tag{12}$$

Tekshirib ko‘ramiz: bu chiziq maxsusmi? Buning uchun avvalo, u (10) tenglamaning yechimini tekshiramiz: $x+1=x+1$ (ayniyat). Demak, (12), (10) tenglamaning yechimi. Endi uning maxsuslikka tekshiramiz, ya'ni unga boshqa yechimlar har bir nuqtada urinib o‘tadimi degan savolni ravshanlashtiramiz. $y=y_1(x)$, $y=y_2(x)$ yechimlarning $x=x_0$ nuqtada urinish shartlarini topamiz:

$$y_1(x_0)=y_2(x_0), \ y'_1(x_0)=y'_2(x_0) \tag{13}$$

(6), (12) yechimlar uchun bu shartlar ushbu ko‘rinishlarni oladi:

$$e^{x_0-c}+c=x_0+1, \qquad e^{x_0-c}=1$$

Ikkinchi tenglikdan $c=x_0$ munosabatni topamiz. Uni birinchi tenglikka qo‘ysak $1+x_0=1+x_0$ munosabatni olamiz. Bu tenglik barcha x_0 lar uchun o‘rinli. Shuning uchun har bir x_0 da (12) yechim (6) oilaning har bir egri chizig‘i bilan urinadi, bu chiziq uchun $c=x_0$ o‘rinli.

Shunday qilib, har bir nuqtada (12) yechim birorta ham nuqtada ustma-ust tushmaydigan (6) yechim bilan urinadi va (12) yechim maxsus.

Agar yechimlar oilasi parametrik ko‘rinishda yozilgan bo‘lsa, urinish shartlari shu kabi tekshiriladi. Bunda $y'=p$ ekanligini nazarda tutish kerak.

3. Agar chiziqlar oilasi $\Phi(x,y,c)=0$ $F(x,y,y')=0$ ning yechimi bo‘lib, $y=\varphi(x)$ urinishdagi bog‘lamga ega bo‘lsa, u tenglamaning maxsus yechimi bo‘ladi. Agar $\phi(x,y,c)$ funksiya 1-hosilalarga ega bo‘lsa, bog‘lamni topish uchun S ni

$$\phi(x,y,c)=0, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial c}(x,y,c)=0$$

Tenglamalardan yo‘qotish kerak va bu chiziq bog‘lam bo‘lmasligini tekshirish kerak ya'ni uni har bir nuqtada oila a'zolari urinib o‘tishini aniqlash kerak. Bu tekshirishni 2-punkt oxiridagi keltirilgan (13) shartlar asosida olib borish kerak.

1. $(y^1)^2 - \frac{2y}{x}y' + 1 = 0$ j: $(x^2c^2+1-2cy)(x^2+c^2-2cy)=0; \quad x^2-y^2=0$

2. $4(y^1)^2 - 9x = 0$ j: $(y+c)^2 = x^3$

3. $y(y^1)^2 - (xy+1)y + x = 0$ j: $\left(\frac{x^2}{2} - y + c\right)\left(x - \frac{y^2}{2} + c\right) = 0$

4. $y(y^1)^2 - 2xy^1 + y = 0$ j: $y^2 + c^2 = 2cx; \quad x^2 - y^2 = 0$

5. $(y')^2 + y^2 = 1; \quad y(0) = \frac{1}{2}$ j: $y = \frac{1}{2}\cos x \pm \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x$

6. $x = \sin y' + \ln y'$ j: $\begin{cases} x = \sin p + \ln p \\ y = p\sin p + \cos p + p + c \end{cases}$

7. $y = (y^1)^2 e^{y'}$ j: $\begin{cases} x = e^p + pe^p + c \\ y = p^2e^p \end{cases}$

8. $y = (y^1)^2 + 2\ln y'$ j: $\begin{cases} x = 2p - \frac{2}{p} + c \\ y = p^2 + 2\ln p \end{cases}$

9. $4y = x^2 + (y^1)^2$ j: $4y = x^2 + p^2; \quad \ln|p - x| = C + \frac{x}{p-x}$

$e^x = \frac{y^2 + (y^1)^2}{2y'}$ j: $\ln\sqrt{p^2+y^2} + arctg\frac{p}{y} = c, \quad x = \ln\frac{y^2+p^2}{2p} \quad y = e^x$

TEST

Agar $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tenglamada $M(x,y)$ va $N(x,y)$ m-tartibli bir jinsli funksiyalar bo‘lsa, u holda integrallovchi ko‘paytuvchi qanaqa ko‘rinishda bo‘ladi?	* $m(x,y) = [xM + yN]^{-1}$	$m(x,y) = xM + yN$	$m(x,y) = \frac{x+y}{M+N}$	$m(x,y) = [xN + yM]^{-1}$
Shunday egri chiziqlarni topingki, uning har bir nuqtasiga o‘tkazilgan urinma koordinata o‘qlari bilan birgalikda yuzasi $2a^2$ ga teng bo‘lgan uchburchak hosil qilsin.	* $xy = \pm a^2$	$y = \frac{1}{a^2}$	$xy = \pm 2a^2$	$y = a^4$
Differensial tenglamalar tuzish yo‘li bilan $y = cx^2$ chiziqlar oilasiga ortogonal chiziqlar oilasini toping.	* $2y^2 + x^2 = c$	$y = cx^{-2}$	$y = -cx^2$	$y^2 + 2x = c$
Quyidagi tenglamalardan qaysi biri bir jinsli tenglama emas?	* $(x^2 + y)dx - xdy = 0$	$xy' Cos\frac{y}{x} = yCos\frac{y}{x} - x$	$(2x^3 - xy^2)dx + \dots + (2y^3 - x^2y)dy = 0$	$y' = \frac{y^3}{2(xy^2 - x^3)}$

$y' + P(x)y = Q(x)$ tenglamani integrallovchi ko‘paytuvchi qanaqa ko‘rinishda bo‘ladi?	* $e^{\int p(x)dx}$	$e^{-\int p(x)dx}$	$\int p(x)dx$	$e^{\int p^2(x)dx}$
Agar chiziqli differensial tenglama Klero tenglamasi bo‘lsa, uning integral chiziqlari oilasi nimadan iborat bo‘ladi?	* To‘g‘ri chiziqlar dastasi	Giperbolalar	Aylanalar	Parabolalar
Berilgan tenglamaning tipini aniqlang: $y\sin x + y'\cos x = 1$	**Chiziqli*	*Bernulli*	*o‘zgaruvchilari ajraladigan*	*Rikkati*
$y' = \dfrac{3y - x^2}{x}$ tenglamani yechimini aniqlang.	* $y = cx^3 + x^2$	$y = cx + x^2$	$y = cxe^x$	$y = cx^2 + 2x^3$
$(2xy + 3x^2)dx + x^2dy = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	* $x^2y + x^3 = c$	$x^2y + y^3 = c$	$x^3y - x = c$	$\dfrac{x}{y} + x^3 = c$
Qanday almashtirish yordamida $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$ tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirish mumkin?	* $y = zx^{-1}$	$y = zx$	$z = y^2$	$z = \sqrt{y}$

MA'RUZA № 13
Mavzu: $n-$tartibli chiziqli tenglamalar.
Chiziqli bir jinsli teglamalar xossalari.

Reja
1. $n-$tartibli chiziqli tenglamalar.
2. $n-$tartibli chiziqli differensial operator.
3. Chiziqli bir jinsli teglama yechimlari xossalari.

Tayanch so’z va iboralar: *n-tartibli chizikli tenglama, n-tartibli chizikli dıfferensial operator, n-tartibli chizikli bir jinsli tenglama yechimlarining xossalari*

1. $n-$tartibli differensial tenglamalarning muhim xususiy holi $n-$tartibli chiziqli differensial tenglamalar bo‘lib, ular

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishda yoziladi. Bu yerda $p_1(x),\ldots, p_{n-1}(x), p_n(x), q(x) -$funksiyalar biror I intervalda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, $q(x) -$funksiya (1) tenglamaning *o‘ng tomoni* yoki *ozod hadi*, $p_1(x),\ldots, p_{n-1}(x), p_n(x) -$ funksiyalar esa uning *koeffisiyentlari* deb yuritiladi.

Agar (1) tenglamada $q(x) -$funksiya I intervalda aynan 0 gat eng bo‘lmasa, u holda (1) tenglama *chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglama* deyiladi. Agar $q(x) \equiv 0,\ x \in I$ bo‘lsa, mos differensial tenglama

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \qquad (2)$$

bo‘lib, *chiziqli bir jinsli tenglama* deyiladi.

Endi (1) differensial tenglama uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi bilan shig‘ullanamiz. (1) tenglamani yoqori hosilasiga nisbatan yechish mumkin:

$$y^{(n)} = q(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y. \tag{3}$$

Umumiy belgilashga ko‘ra [$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$]

$$f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = q(x) - p_1(x)y^{(n-1)} - \ldots - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y. \tag{4}$$

Bu funksiya $D_{n+1} = \{(x, y, y', \ldots y^{(n-1)}) : x \in I,\ -\infty < y^{(i)} < +\infty,\ i = 0,1,2,\ldots,n-1\}$ sohada aniqlangan. Agar $p_1(x), \ldots, p_{n-1}(x), p_n(x), q(x)$ – funksiyalar $[x_1, x_2] = I$ oraliqda uzluksiz bo‘lsa, u holda (4) funksiya tegishli D_{n+1} sohada $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ bo‘yicha Lipshits shartini qanoatlantiradi. Haqiqatdan ham, f funksiya $x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ bo‘yicha $-\infty < y^{(i)} < +\infty$, $(i = 0,1,2,\ldots,n-1)$ intervalda uzluksiz va uzluksiz hosalalarga ega, chunki $\frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} = -p_{n-1}(x)$ va $p_{n-i}(x)$ $[x_1, x_2]$ – da uzluksiz. Agar $\max\limits_{x \in [x_1, x_2]} \left| \frac{\partial f}{\partial y^{(i)}} \right| = L_i,\ L_i \geq 0,\ i = 0,1,2,\ldots,n-1$, $\max(L_0, L_1, \ldots, L_n) = L \geq 0$ dasak, f funksiya Lipshits shartini qanoatlantiradi. Bundan $x_0 \in [x_1, x_2]$ uchun (1) tenglama $y(x_0) = y_0$, $y^{(i)}(x_0) = y_0^{(i)}$, $i = \overline{1, n-1}$ shartni qanoatlantiruvchi yagona yechimga egaligi kelib chiqadi.

2. Endi (2) differensial tenglamani alohida o‘rganaylik. Noma’lum funksiya $y(x)$ ga nisbatan (2) tenglamaning chap tomonida ko‘rsatilgan amallar (differensiallash, $p_i(x)$ funksiyalarga ko‘paytirish va qo‘shish) qo‘llanish natijasida *n – tartibli chiziqli differensial operator* deb yuritiladi va $L[y]$ deb belgilanadi, ya’ni:

$$L[y] \equiv y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y \tag{5}$$

Bu operatitor yordamida (1) va (2) tenglamalar

$$L[y] = q(x) \tag{1'}$$

$$L[y] = 0 \tag{2'}$$

ko‘rinishda yoziladi.

Kiritilgan $L[y]$ operatorning muhim ikki xossasi bor:

1^0. $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2],\ y_1 \in C^n,\ y_2 \in C^n$;

2^0. $L[Cy] = CL[y],\ y \in C^n,\ C = const$;

Bu xossalar aslida haqiqiy o‘zgaruvchining kompleks funksiyalari uchun ham o‘rinli, C ham kompleks bo‘lishi mumkin. Birinchi xossani isbot etish uchun (5) ifodadagi y va uning hosilalarini qo‘yamiz:

$$L[y_1 + y_2] = (y_1 + y_2)^{(n)} + p_1(x)(y_1 + y_2)^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)(y_1 + y_2)' + p_n(x)(y_1 + y_2) =$$
$$= (y_1^{(n)} + p_1(x)y_1^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_1' + p_n(x)y_1) + (y_2^{(n)} + p_1(x)y_2^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)y_2' + p_n(x)y_2) =$$
$$= L[y_1] + L[y_2].$$

Bu xossadan ushbu

$$L[\sum_{i=1}^{k} y_i] = \sum_{i=1}^{k} L[y_i],\ y_i \in C^n,\ i = \overline{1, k}$$

formulaning to‘g‘riligi kelib chiqadi.

Ikkinchi xossa ham birinchi kabi isbot etiladi. Yuqoridagi ikki xossadan ushbu natija kelib chiqadi:

$$L[\sum_{i=1}^{k} C_i y_i] = \sum_{i=1}^{k} C_i L[y_i], \tag{6}$$

bu yerda $C_1, C_2, \ldots, C_k$ – ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar. $L[y]$ operatorning yuqorida keltirilgan xossalariga asoslanib muhim teoremalarni isbotlash mumkin.

1-teorema. Agar $y = y_1(x),\ y = y_2(x)$ funksiyalar I intervalda (2’) tenglamaning yechimlari bo‘lsa, u holda $y = y_1(x) + y_2(x)$ funksiya ham I intervalda (2’) ning yechimi bo‘ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko‘ra $L[y_1] = 0,\ L[y_2] = 0$. Bundan 1^0-chi xossaga ko‘ra $L[y_1 + y_2] = L[y_1] + L[y_2] = 0$. Teorema isbot bo‘ldi.

2-teorema. Agar $y_1(x)$ funksiya I intervalda (2’) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda $C_1y_1(x)$ (C – ixtiyoriy o‘zgarmas) funksiya ham I intervalda (2’) ning yechimi bo‘ladi.

Isbot. Shartiga ko‘ra $L[y_1] = 0,\ L[y_2] = 0$. 2^0-chi xossaga ko‘ra $L[Cy_1] = CL[y_1] = 0$ kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

1-natija. Agar $y_1(x), y_2(x), ..., y_k(x)$ funksiyalar I intervalda (2’) tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda shu intervalda $\sum_{i=1}^{k} C_i y_i$ funksiya ham (2’) ning yechimi bo‘ladi.

Isboti 1 va 2-teoremalardan kelib chiqadi.

3-teorema. Agar koeffitsiyentlari $p_i(x),\ x \in I\ (i = 1,2,...,n)$ haqiqiy bo‘lgan (2’) tenglama $y(x) = u(x) + iv(x)$ kompleks yechimga ega bo‘lsa, u holda $u(x)$ va $v(x),\ x \in I$ har biri (2’) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Isbot. $L[u(x) + iv(x)] \equiv 0$ dan $L[u(x)] + iL[v(x)] \equiv 0$ ga ega bo‘lamiz. Bu ayniyat bajarilishi uchun $L[u(x)] \equiv 0,\ L[v(x)] \equiv 0$ bo‘lishi zarur va yetarli. Teorema isbot bo‘ldi.

Agar 1-natijada $k = n$ bo‘lsa, u holda n ta ixtiyoriy o‘zgarmasni o‘z ichiga olgan

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x) + ... + C_ny_n(x) \tag{7}$$

funksiya ham (2’) tenglamaning yechimi bo‘ladi. (2’) tenglama n – tartibli bo‘lganidan uning umumiy yechimi formulasi n – ta ixtiyoriy o‘zgarmasni o‘z ichiga olishi lozimligini biz bilamiz. Unday bo‘lsa, (7) formula bilan berilgan funksiya (2’) tenglama uchun umumiy yechim bo‘la oladimi. Bu savolga javob $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ yechimlar orasidagi munosabatga bo‘g‘liq. Buni keyingi mavzuda ko‘ramiz.

MA'RUZA № 14
Mavzu: Funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi. Fundamental yechimlar. Vronskiy determinanti. Xossalari.
Reja:

1. Chiziqli bog‘liq va chiziqli erkli funksiyalar.
2. Funksiyalarning chiziqli bog‘liqligiga misollar.
3. Vronskiy determinanti.

Tayanch so’z va iboralar: *n-tartibli chizikli tenglama, n-tartibli chizikli differensial operator, n-tartibli chizikli bir jinsli tenglama yechimlarining xossalari, chiziqli boglik va chizikli erkli funksiyalar, Vronskiy determinanti va xossalari.*

Biror I intervalda aniqlangan $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar berilgan bo‘lsin.

1- **Ta’rif**. Agar bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ o‘zgarmas sonlar mavjud bo‘lsaki, I intervalda ushbu

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0 \tag{1}$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar I intervalda *chiziqli bog‘liq* deyiladi.

Agar yuqorida aytilgan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ sonlar mavjud bo‘lmasa, ya'ni (1) ayniyat o‘zgarmaslarning faqat nolga teng qiymatlaridagina, ya’ni $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$ o‘rinli bo‘lsa, u holda $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar I intervalda *chiziqli erkli* deyiladi.

Natija. *Agar I intervalda $\varphi_i(x) \equiv 0,\ 1 \le i \le k$ bo'lsa, u holda $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar I intervalda chiziqli bog'liq bo'ladi.*

Haqiqatan, $C_i \neq 0,\ C_1 = C_2 = ... = C_{i-1} = C_{i+1} = ... = C_k = 0$ deb tanlasak, $\sum_{i=1}^{k} C_j^2 \neq 0$ va $C_i\varphi_i(x) \equiv 0$ bo'ladi.

Agar $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m$ ba'zi kompleks sonlar, $f_1(x), f_2(x), ..., f_k(x)$ lar x ga nisbatan ko'phadlar bo'lsa, ushbu

$$F(x) = f_1(x)e^{\lambda_1 x} + f_2(x)e^{\lambda_2 x} + ... + f_m(x)e^{\lambda_m x}$$

ko'rinishda yoziladigan har bir $F(x)$ funksiya *kvaziko'phad* deyiladi.

1-lemma. *Ushbu $F(x) = f_1(x)e^{\lambda_1 x} + f_2(x)e^{\lambda_2 x} + ... + f_m(x)e^{\lambda_m x}$ kvaziko'phad berilgan va $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, ..., \lambda_m$ lar o'zaro turli sonlar bo'lsin. Agar shu kvaziko'phad biror I intervalda aynan nolga teng bo'lsa, u holda hamma $f_1(x), f_2(x), ..., f_m(x)$ ko'phadlar nolga teng bo'ladi.*

Isbot. Isbotni m soni bo'yicha induksiya bilan isbotlaymiz. m sonni kvaziko'phadning tartibi deb ataymiz. $m = 1$ bo'lganda 1-lemma to'g'ri, chunki bu holda $F(x) = f_1(x)e^{\lambda_1 x}$ va $f_1(x)e^{\lambda_1 x} \equiv 0,\ x \in I$ ayniyatdan $f_1(x) \equiv 0$ kelib chiqadi. Endi $m-1$ dan m $(m \ge 2)$ ga induktiv o'tishni bajaramiz. Agar $F(x)$ ko'phad I intervalda aynan nolga teng bo'lsa, u holda bu natija ushbu

$$G(x) = p^{l+1}(F(x)e^{-\lambda_m x})$$

kvaziko'phad uchun ham o'rinli (bu yerda $p-$differensiallash operatori, l esa $f_m(x)$ ko'phadning darajasi). Bevosita hisoblash yordamida

$$G(x) = g_1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)} + g_2(x)e^{(\lambda_2-\lambda_m)} + ... + g_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)}$$

ni ko'rsatish mumkin, bunda

$$g_i(x) = (p + \lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} f_i(x),\ i = 1,2,...,m-1$$

$G(x)$ kvaziko'phadning tartibi $m-1$ ga teng. Shu $G(x)$ kvaziko'phad I intervalda aynan nolga teng bo'lgani uchun induksiya faraziga ko'ra barcha $g_1(x), g_2(x), ..., g_{m-1}(x)$ ko'phadlar I da aynan nolga teng. Faraz etaylik, $f_1(x), f_2(x), ..., f_{m-1}(x)$ ko'phadlardan birontasi masalan, $f_1(x)$ nolga teng bo'lmasin, ya'ni $f_1(x) \neq 0, x \in I$. Shu $f_1(x)$ ko'phadning darajasi k bo'lsin, ya'ni $f_1(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + ... + a_k$, bunda $a_0 \neq 0$. Bevosita tekshirish mumkinki:

$$g_1(x) = (p + \lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} f_i(x) = (\lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} a_0x^k + ...$$

Endi $g_1(x) \equiv 0,\ x \in I$ ayniyatga ko'ra $(\lambda_1 - \lambda_m)^{l+1} a_0 = 0$ tenglikka ega bo'lamiz. Ammo $\lambda_1 \neq \lambda_m$ ga ko'ra bundan $a_0 = 0$ kelib chiqadi. Bu ziddiyat $f_1(x), f_2(x), ..., f_{m-1}(x)$ ko'phadlar I da aynan nolga tengligini isbotlaydi. Demak, $F(x) = f_m(x)e^{\lambda_m x}$ ga egamiz. Bundan $F(x) \equiv 0$ bo'lishi uchun $f_m(x)$ ko'phadning barcha koeffitsientlari nolga tengligi kelib chiqadi. Shunday qilib, $F(x) \equiv 0,\ x \in I$ ayniyat o'rinli bo'lsa, $f_m(x) \equiv 0,\ x \in I$ ayniyatlar ham o'rinli bo'lish isbot etildi. 1-lemma isbotlandi.

Misollar. 1. Ushbu $1,\ x,\ x^2,\ ...,\ x^k$ funksiyalar $(-\infty, +\infty)$ intervalda aniqlangan bo'lib, ular shu intervalda chiziqli erkli. Bu tasdiq ixtiyoriy, chekli intervalda ham o'rinli.

Agar teskarisini faraz etsak, bir vaqtda nolga teng bo'lmagan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ lar (ya'ni $\sum_{i=1}^{k} \alpha_j^2 \neq 0$) uchun ko'rilayotigan chekli yoki cheksiz intervaldan olingan x ning barcha qiymatlarida

$$\alpha_0 + \alpha_1x + \alpha_2x^2 + ... + \alpha_kx^k \equiv 0$$

ayniyat o‘rinli bo‘lishi kerak. Ammo algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra bu tenglik x dan ko‘p bo‘lsa $k-$ta qiymatidagina o‘rinli. Bu ziddiyat yuqoridagi fikrni isbotlaydi .

2. Ushbu

$$e^{k_1x},\ e^{k_2x},\ ...,\ e^{k_sx},\ k_i \neq k_j, i \neq j$$

funksiyalar istalgan I intervalda chiziqli erkli. Buni isbot etish uchun shu funksiyalar I intervalda chiziqli bog‘liq bo‘lsin deylik, ya'ni bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ sonlar mavjudki, I intervalda

$$F(x) = \alpha_1 e^{k_1x} + \alpha_2 e^{k_2x} + ... + \alpha_s e^{k_sx} \equiv 0$$

ayniyat o‘rinli. Bu ayniyatning chap tomonida turgan funksiya kvaziko‘phad bo‘lib, unda $f_1(x) = \alpha_1, ..., f_s(x) = \alpha_s$. 1-lemmaga ko‘ra $F(x) \equiv 0$ ayniyat bajarilgan bo‘lsa, undan $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_s = 0$ kelib chiqadi. Bu esa $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_s$ larning tanplanishiga zid. Demak, berilgan funksiyalar I intervaloda chiziqli erkli

3. Ixtiyoriy I intervalda ushbu $1, \cos x, \cos^2\frac{x}{2}$ funksiyalar chiziqli bog‘liqdir. Haqiqatan,

$$\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot \cos x + \alpha_3 \cdot \cos^2\frac{x}{2} \equiv 0$$

ifodada $\alpha_1 = 1,\ \alpha_2 = 1,\ \alpha_3 = -2$ deyilsa, trigonometriyadagi $1 + \cos x \equiv 2\cos^2\frac{x}{2}$ (bunda $x-$ixtiyoriy) ayniyat hosil bo‘ladi.

Yuqorida funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi va erkinligi tekshirildi. Tekshirish ta’rif bo‘yicha olib borildi. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar I intervalda aniqlangan va uzluksiz bo‘lishidan tashqari yana ba'zi shartlarni qanoatlantirsa, tekshirish soddalashadi. Shu maqsadda $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalar I intervalda $(k-1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo‘lsin deylik, ya'ni $\varphi_i(x) \in C^{k-1}(I),\ i = \overline{1,k}$. Ushbu

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & ... & \varphi_k \\ \varphi_1' & \varphi_2' & ... & \varphi_k' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_1^{(k-1)} & \varphi_2^{(k-1)} & ... & \varphi_k^{(k-1)} \end{vmatrix} \qquad (2)$$

determinant *Vronskiy determinanti* yoki *Vronskian* deyiladi.

1-**Teorema**. *Agar* $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ *funksiyalar* I *intervalda chiziqli bog‘liq bo‘lib,* $(k-1)$ *taribgacha uzluksiz hosilalarga ega bo‘lsa, u holda* I *intervalda bu funksiyalardan tuzilgan Vronskiy determinanti aynan nolga teng bo‘ladi.*

Isbot. Teoremaning shartiga ko‘ra $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$, $\sum_{i=1}^{k}\alpha_j^2 \neq 0$ lar uchun I intervalda

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0$$

ayniyat o‘rinli. Uni $(k-1)$ marta differensiallab,

$$\alpha_1\varphi_1'(x) + \alpha_2\varphi_2'(x) + ... + \alpha_k\varphi_k'(x) \equiv 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\alpha_1\varphi_1^{(k-1)}(x) + \alpha_2\varphi_2^{(k-1)}(x) + ... + \alpha_k\varphi_k^{(k-1)}(x) \equiv 0$$

ayniyat hosil qilamiz. Bu ayniyatlarni $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ $-$larga nisbatan tenglamalarning bir jinsli sistemasi deb qarash mumkin. Ammo $\sum_{i=1}^{k}\alpha_j^2 \neq 0$ bo‘lgani uchun bu sistema trivialmas (trivial bo‘lmagan (noldan farqli)) yechimga ega. Algebradagi ma'lum teoremadan sistemaning determinanti (ya'ni Vronskiy determinanti) aynan nolga teng bo‘lishi kelib chiqadi.

Isbot etilgan teorema funksiyalarning chiziqli bog‘liq bo‘lishi uchun faqat zaruriy shartni beradi. Boshqacha aytganda agar biror I intervalda $(k-1)$ marta uzluksiz differensiallanuvchi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_k(x)$ funksiyalardan tuzilgan Vronskiy determinanti aynan nolga teng bo‘lsa, bundan u funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi, umuman aytganda kelib chiqmaydi. Masalan, quyidagi ikki funksiyani olaylik.

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} -(x-2)^2, & 0 \le x \le 2 \\ 0, & 2 \le x \le 4 \end{cases}, \quad \varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x \le 2 \\ (x-2)^2, & 2 \le x \le 4 \end{cases}.$$

Bu funksiyalar $0 \le x \le 4$ oraliqda $W[\varphi_1, \varphi_2] \equiv 0$. Ammo $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funksiyalar shu oraliqda chiziqli erkli. Haqiqatan ham, $0 \le x \le 2$ da

$$W = \begin{vmatrix} -(x-2)^2 & 0 \\ -2(x-2) & 0 \end{vmatrix} \equiv 0,$$

$2 \le x \le 4$ da

$$W = \begin{vmatrix} 0 & (x-2)^2 \\ 0 & 2(x-2) \end{vmatrix} \equiv 0.$$

Bulardan $0 \le x \le 4$ da $W(x) \equiv 0$. Ammo, $0 \le x \le 2$ da $\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) \equiv 0$ ayniyatdan $\alpha_1 = 0$, $2 \le x \le 4$ da shu ayniyatdan $\alpha_2 = 0$ kelib chiqadi. U holda $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ funksiyalar shu oraliqda chiziqli erkli.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Maxsus yechimlar va ularning mavjudligi.
2. Avtonom sistemalarning xolatlar tekisligi.

Glossariy

Chiziqli bog’liq funksiyalar - Agar bir vaqtda nolga teng bo‘lmagan shunday $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ o‘zgarmas sonlar mavjud bo‘lsaki, I intervalda ushbu

$$\alpha_1\varphi_1(x)Q\alpha_2\varphi_2(x)Q\ldots Q\ \alpha_k\varphi_k(x) \equiv 0 \qquad (1)$$

ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u xolda $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ $\varphi_k(x)$, funksiyalar I intervalda chiziqli bog‘liq deyiladi.

Chiziqli erkli funksiyalar - Agar yuqorida aytilgan $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_k$ sonlar mavjud bo‘lmasa, ya'ni (1) ayniyat o‘zgarmaslarning faqat nolga teng qiymatlaridagina o‘rinli bo‘lsa, u xolda $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ $\varphi_k(x)$, funksiyalar I intervalda chiziqli erkli deyiladi.

Vronskiy determinanti - Ushbu

$$W(x) = W[\varphi_1, \varphi_2, .. \varphi_k] = \begin{vmatrix} \varphi_1, \varphi_2, .. \varphi_k \\ \varphi_1^1, \varphi_2^2, .. \varphi_k^1 \\ ------- \\ \varphi_1^{(k-1)}, \varphi_2^{(k-1)} .. \varphi_k^{(k-1)} \end{vmatrix}$$

determinant Vronskiy determinanti yoki Vronskian deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y(y^1)^2 - 2xy^1 + y = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. $\mathfrak{I}$ intervalda chiziqli bog‘liq funksiyalar deb nimaga aytiladi?
2. $\mathfrak{I}$ intervalda chiziqli erknli funksiyalar deb nimaga aytiladi?
3. Kvazi ko‘pxadini ta'riflang?
4. Kanday ko‘rinishdagi determenant Vranskiy deteminanti yoki Vronslan detsiladi?
5. Tenglamalarning bir jinsli sistemasi deb qanday ko‘rinishdagi sistemaga aytiladi?

Amaliy mashg’ulot-12

1. $y = (y^1)^2 + 2\ln y'$ j: $\begin{cases} x = 2p - \dfrac{2}{p} + c \\ y = p^2 + 2\ln p \end{cases}$

2. $4y = x^2 + (y^1)^2$ j: $4y = x^2 + p^2; \quad \ln|p - x| = C + \dfrac{x}{p-x}$

3. $e^x = \dfrac{y^2 + (y^1)^2}{2y'}$ j: $\ln\sqrt{p^2 + y^2} + arctg\dfrac{p}{y} = c, \quad x = \ln\dfrac{y^2 + p^2}{2p} \quad y = e^x$

4. $y(y^1)^2 + y^1(x - y) - x = 0$ j: $y = x + c$ va $x^2 + y^2 = c^2$

5. $x(y^1)^2 + 2xy^1 - y = 0$ j: $x\left(\sqrt{1 + \dfrac{y}{x}} \pm 1\right)^2 = c$ yoki $(y - c)^2 = 4cx$

6. $y = 1 + (y^1)^2$ j: $y = 1 + \dfrac{(x-c)^2}{4}; \quad y = 1$

7. $x = 2y^1 - \dfrac{1}{(y^1)^2}$ j: $x = 2p - \dfrac{1}{p^2}; \quad y = p^2 - \dfrac{2}{p} + c$

TEST

Agar chiziqli differensial tenglama Klero tenglamasi bo‘lsa, uning integral chiziqlari oilasi nimadan iborat bo‘ladi?	* To‘g‘ri chiziqlar dastasi	Giperbolalar	Aylanalar	Parabolalar
Berilgan tenglamaning tipini aniqlang: $y\sin x + y'\cos x = 1$	**Chiziqli*	*Bernulli*	*o‘zgaruvchilari ajraladigan*	*Rikkati*
$y' = \dfrac{3y - x^2}{x}$ tenglamani yechimini aniqlang.	* $y = cx^3 + x^2$	$y = cx + x^2$	$y = cxe^x$	$y = cx^2 + 2x^3$
$\left(2xy + 3x^2\right)dx + x^2dy = 0$ tenglamaning umumiy	* $x^2y + x^3 = c$	$x^2y + y^3 = c$	$x^3y - x = c$	$\dfrac{x}{y} + x^3 = c$

yechimini toping				
Qanday almashtirish yordamida $y' = y^2 - \frac{2}{x^2}$ tenglamani bir jinsli tenglamaga keltirish mumkin?	* $y = zx^{-1}$	$y = zx$	$z = y^2$	$z = \sqrt{y}$
Quyidagi tenglama qaysi tipga tegishli $\left(x\cos y - y^2\right)dy + \left(\sin y + x\right)dx = 0$	* to‘la differensial	Bernulli	x ga nisbatan chiziqli	hosilaga nisbatan yechilmagan
Boshlang‘ich shartli masala nechta yechimga ega $y' = xy - y^3,\ y(0) = 0$	*1	2	yechimga ega emas	3
Tenglamaning tipini aniqlang $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$	*Bir jinsli	Bernulli	Chiziqli	to‘la differensial
Ushbu $y' = \frac{y}{3x - y^2}$ tenglamaning yechimini toping.	* $x = cy^3 + y^2$	$y = 3x^3 + cx^2$	$y = cx^3 + x^2$	$y = cx + x^2$
Ushbu $y = cx^2$ chiziqlar sinfning differensial tenglamasini toping	* $xy' = 2y$	$y' = y^{\frac{2}{x}}$	$y'x = 3y$	$y'x^2 = y^2$

MA'RUZA № 15

Mavzu: Funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi. Vronskiy determinanti. Xossalari. Fundamental yechimlar. (davomi)

Reja

1.Funksiyalar chiziqli bog‘liqligini Vronskiy determinanti yordamida tekshirish.
2. $n-$tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi haqida teorema.
3. Fundamental yechimlar sistemasi.

Tayanch so’z va iboralar: *fundamental yechimlar sistemasi, funksiyalar chiziqli bog‘liqligini Vronskiy determinanti yordamida tekshirish, n-tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimi haqidagi teorema.*

2- **TEOREMA**. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0 \qquad (1)$$

yoki

$$L[y] = 0 \qquad (1')$$

tenglamaning I intervalda aniqlangan va tegishli boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan yechimlari bo‘lib, ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti biror $x = x_0, x_0 \in I$ nuqtada nolga teng bo‘lsa, u holda I intervalda $W[\varphi_1, \varphi_2, ..., \varphi_n] \equiv 0$ va $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar chiziqli bog‘liq bo‘ladi.

Oldingi mavzuda isbot etilgan 1-teorema chiziqli bog‘liqlikning zaruriy shartini, bu 2-teorema yetarli shartni beradi.

Isbot. Ushbu tenglamalarni ko‘ramiz:

$$\begin{cases}\alpha_1\varphi_1(x_0)+\alpha_2\varphi_2(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n(x_0)=0\\ \alpha_1\varphi_1'(x_0)+\alpha_2\varphi_2'(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n'(x_0)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+\alpha_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0\end{cases} \tag{2}$$

Bu sistemada $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ larni noma'lum deb qaraymiz. (2) sistemaning determinanti $W[\varphi_1(x_0),\varphi_2(x_0),...,\varphi_n(x_0)]=W(x_0)=0$ bo‘lgani uchun shu sistemaning nolga teng bo‘lmagan (trivialmas) yechimlari ham bor. Ulardan birortasi $\alpha_1^0,\alpha_2^0,...,\alpha_n^0$ bo‘lsin. Endi ushbu

$$\varphi(x)=\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x) \tag{3}$$

funksiyani ko‘raylik. Bu funksiya 13-ma'ruzadagi natijaga ko‘ra I intervalda aniqlangan bo‘lib, (1’) tenglamaning yechimidan iborat. $\varphi(x)$ funksiya uchun boshlang‘ich shartlar quyidagicha yoziladi:

$$\begin{cases}\varphi(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0\varphi_i(x_0),\\ \varphi^{(j)}(x_0)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^0\varphi_i^{(j)}(x_0),\quad j=1,2,...,n-1.\end{cases} \tag{4}$$

(2) munosabatlarga ko‘ra, ravshanki $\varphi(x_0)=0,\ \varphi'(x_0)=0,\ ...,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=0$. Teoremani isbot etish uchun $\varphi(x)\equiv 0,\ x\in I$ ekanini ko‘rsatish lozim. Ammo Pikar teoremasiga ko‘ra faqat $\varphi(x)\equiv 0,\ x\in I$ yechimgina $\varphi(x_0)=0,\ \varphi'(x_0)=0,\ ...,\ \varphi^{(n-1)}(x_0)=0$ boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradi. Demak, $\varphi(x)\equiv 0,\ x\in I$. Bundan $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^0)^2\neq 0$ tengsizlikka ko‘ra $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ funksiyalarning I intervalda chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi. Endi, agar $\varphi(x)$ funksiyadan $(n-1)$ – tartibgacha hosilalar olsak, n ta ayniyatga ega bo‘lamiz. Uning determinanti $W[\varphi_1,\varphi_2,...,\varphi_n]\equiv 0,\ x\in I$ bo‘ladi.

3-**TEOREMA**. (1’) tenglamaning I intervalda aniqlangan $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ yechimlari chiziqli erkli bo‘lishi uchun bu yechimlardan tuzilgan Vronskiy determinanti I intervalning biror x_0 nuqtasida noldan farqli bo‘lishi zarur va yetarli. Shu bilan birga agar $W(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, u holda $W(x)\neq 0,\ x\in I$; agar $W(x_0)=0$ bo‘lsa, u holda $W(x)=0,\ x\in I$ bo‘ladi.

Isbot. Yetarliligi. $W(x_0)\neq 0$ deylik. $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ yechimlarning chiziqli erkli ekanini ko‘rsatamiz. Bu yechimlar chiziqli bog‘liq bo‘lsin, ya'ni $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$, $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^0)^2\neq 0$ lar uchun I intervalda

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\alpha_2\varphi_2(x)+...+\alpha_n\varphi_n(x)\equiv 0$$

ayniyat o‘rinli. Undan $(n-1)$ tartibgacha hosilalar olib, $x=x_0$ deymiz:

$$\begin{cases}\alpha_1\varphi_1(x_0)+\alpha_2\varphi_2(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n(x_0)=0\\ \alpha_1\varphi_1'(x_0)+\alpha_2\varphi_2'(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n'(x_0)=0\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0)+\alpha_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0)+...+\alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0)=0\end{cases}$$

bundan $\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^0)^2\neq 0$ bo‘lgani uchun $W(x_0)=0$ ekani kelib chiqadi. Bu esa $W(x_0)\neq 0$ ga zid.

Demak, $W(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ yechimlar chiziqli erkli. Ammo

$W(x_0) \neq 0$ bo‘lsa, $W(x) \neq 0,\ x \in I$ bo‘lishi ham kelib chiqadi. Haqiqatan, agar $W(x_1) = 0,\ x_1 \neq x_0$ bo‘lsa, bundan I da $W(x) = 0$ masalan, $x = x_0$ da ham $W(x_0) = 0$ ekani chiqadi, bu esa $W(x_0) \neq 0$ ga zid.

Zarurligi. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar I intervalda (1’) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo‘lsin. U holda $W(x_0) \neq 0$ bo‘ladi. Aks holda $W(x_0) = 0$ dan $W(x) = 0,\ x \in I$ va demak, $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ yechimlarning chiziqli bog‘liqligi kelib chiqar edi. Teorema to‘la isbot bo‘ldi.

Ushbu $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar I intervalda (1’) tenglamaning ($x_0 \in I$)

$$\begin{array}{l} \varphi_1(x_0) = 1,\ \varphi_2(x_0) = 0,\ ...,\ \varphi_n(x_0) = 0 \\ \varphi_1'(x_0) = 0,\ \varphi_2'(x_0) = 1,\ ...,\ \varphi_n'(x_0) = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_1^{(n-1)}(x_0) = 0,\ \varphi_2^{(n-1)}(x_0) = 0,\ ...,\ \varphi_n^{(n-1)}(x_0) = 1 \end{array}$$

boshlang‘ich shartini qanoatlantiruvchi yechimlari bo‘lsin. Endi (1’) tenglamani

$$y^{(n)} = -p_1(x)y^{(n-1)} - p_2(x)y^{(n-2)} - ... - p_{n-1}(x)y' - p_n(x)y$$

ko‘rinishda yozsak, bu tenglamaning o‘ng tomoni $y, y', y'', ..., y^{(n-1)}$ larga nisbatan ixtiyoriy sohada Lipshit shartini qanoatlantiradi. Ko‘rinadiki, $D_{n+2} \subset R^{n+2}$ sohada Pikar teoremasining yuqoridagi shartlarini har birini qanoatlantiradigan yagona yechimi mavjud. Shuning uchun

$$W[\varphi_1(x_0), \varphi_2(x_0), ..., \varphi_n(x_0)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

tengsizlikka ko‘ra $n-$tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning $n$ta chiziqli erkli yechimlari mavjud. Endi umumiy yechim haqidagi teoremani keltiramiz.

4-**TEOREMA**. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar (1’) differensial tenglamaning I intervalda aniqlanmagan chiziqli erkli yechimlari bo‘lsa, u holda umumiy yechim ushbu

$$y = C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) + ... + C_n\varphi_n(x) \tag{5}$$

($C_1, C_2, ..., C_n -$ixtiyoriy o‘zgarmaslar) formula bilan yoziladi.

Isbot. $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar I intervalda chiziqli erkli bo‘lgani uchun $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0,\ x \in I$. Masalan, $x_0 \in I$ nuqtada ham $W(x_0) \neq 0$. Endi $y = \varphi(x),\ x \in I$ funksiya (1’) tenglamaning ixtiyoriy boshlang‘ich shartni, ya'ni

$$\varphi(x_0) = y_0, \varphi'(x_0) = y_0', ..., \varphi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

munosabatlarni qanoatlantiradigan yechimi bo‘lsin. Bunda ikki holni qarash lozim bo‘ladi. Avvalo I intervalda $\varphi(x) \equiv 0$ bo‘lishi mumkun. Bu yechim (5) folmuladan ($C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$ bo‘lganda) hosil bo‘ladi. Endi $\varphi(x) \neq 0,\ x \in I$ bo‘lsin, (5) ga ko‘ra

$$\begin{cases} y_0 = \alpha_1\varphi_1(x_0) + \alpha_2\varphi_2(x_0) + ... + \alpha_n\varphi_n(x_0) \\ y_0' = \alpha_1\varphi_1'(x_0) + \alpha_2\varphi_2'(x_0) + ... + \alpha_n\varphi_n'(x_0) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_0^{(n-1)} = \alpha_1\varphi_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2\varphi_2^{(n-1)}(x_0) + ... + \alpha_n\varphi_n^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \tag{6}$$

Ko‘rilayotgan holda (6) sistema $C_1, C_2, ..., C_n -$larga nisbatan asosiy determinanti $W(x_0) \neq 0$ bo‘lgan bir jinsli bo‘lmagan sistemadir. Bu sistema yagona $C_1^0, C_2^0, ..., C_n^0$ yechimga ega. Demak, $\varphi(x) = C_1^0\varphi_1(x) + C_2^0\varphi_2(x) + ... + C_n^0\varphi_n(x)$. Olingan $\varphi(x)$ yechim ixtiyoriy boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan sodda (trivialmas) yechim bo‘lgani uchun (5) formula umumiy yechim formulasidir. Teorema isbot bo‘ldi.

Biz yuqorida n ta chiziqli erkli yechimlar ((1’) tenglama uchun) mavjudligini ko‘rsatdik. Bundan (1’) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari maksimal soni $n$dan kam emasligi kelib chiqadi. Ammo n-tartibli chiziqli bir jinsli (1’) tenglamaning chiziqli erkli yechimlari soni n dan ortiq bo‘lmaydi. Haqiqatan, isbot etish uchun (1’) tenglamani ixtiyoriy ($n+1$) ta yechimi chiziqli bog‘liq ekanini isbot etish yetarli. $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x),\ x \in I$ funksiyalar (1’) tenglamalarning yechimlari bo‘lsin. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x),\ x \in I$ funksiyalar chiziqli erkli bo‘lsa, u holda yuqorida isbotlangan 4-teoremaga ko‘ra shunday $C_1^0, C_2^0,..., C_n^0$ o‘zgarmas sonlar topiladiki, ushbu

$$\varphi_{n+1}(x_0) \equiv C_1^0\varphi_1(x_0) + C_2^0\varphi_2(x_0) + ... + C_n^0\varphi_n(x_0),\ \ x \in I$$

ayniyatga ega bo‘lamiz. Bundan $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_{n+1}(x)$ yechimlarning I intervalda chiziqli bog‘liq ekani kelib chiqadi. Agar $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x)$ funksiyalar I da chiziqli bog‘liq bo‘lsa, u holda

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0,\ x \in I,\ \sum_{i=1}^{n}(\alpha_i^0)^2 \neq 0$$

ayniyat o‘rinli. Demak,

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + ... + \alpha_n\varphi_n(x) + 0 \cdot \varphi_{n+1}(x) \equiv 0,\ x \in I$$

ayniyat ham o‘rinli. Bundan yana $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_{n+1}(x)$ yechimlarning I intervalda chiziqli bog‘liqligi kelib chiqadi.

1-**TA’RIF**. $n-$tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning chiziqli erkli yechimlari $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x),\ x \in I$ *yechimlarning fundamental sistemasi* deyiladi.

Bu ta’rifga va 4-teoremaga ko‘ra bir jinsli differensial tenglamaning umumiy yechimini topish uchun fundamental sistemaga tegishli hamma yechimlarni ixtiyoriy o‘zgarmaslarga ko‘paytirib qo‘shish kerak.

5-**TEOREMA**. Agar biror I intervalda aniqlangan $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x)$ funksiyalar chiziqli erkli bo‘lib, n marta uzluksiz differensiallanuvchi bo‘lsa, u holda bu funksiyalar yagona $n-$tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglama yechimlarini fundamental sistemasi bo‘ladi.

Isbot. Berilgan fundamental sistemaga ushbu ikkita chiziqli bir jinsli differensial tenglama mos kelsin deylik:

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y = 0, \tag{7}$$

$$y^{(n)} + q_1(x)y^{(n-1)} + ... + q_n(x)y = 0\ , \tag{8}$$

bu yerda $p_i(x) \in C(I),\ q_i(x) \in C(I),\ i = 1,2,...,n$. Endi $p_i(x) \equiv q_i(x),\ \ i = 1,2,...,n,\ x \in I$ ekanini isbotlaymiz. Buning uchun (7) dan (8) ni hadma-had ayiramiz:

$$[p_1(x) - q_1(x)]y^{(n-1)} + ... + [p_n(x) - q_n(x)]y = 0 \tag{9}$$

Bu differensial tenglama ham (7), (8) tenglamalar kabi $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x)$ yechimlarga ega. (9) tenglamada biror $j\ \ (1 \leq j \leq n)$ uchun $p_j(x) - q_j(x) \neq 0,\ x \in I$ bo‘lsin. U holda $p_j(x) - q_j(x) \neq 0$ bo‘lganda (9) tenglama $(n-1)-$tartibli bo‘ladi va u n ta chiziqli, erkli $\varphi_1(x), \varphi_2(x),..., \varphi_n(x)$ yechimlarga ega bo‘lishi kerak. Bu ziddiyatdir. Shunday kilib, $p_j(x) \equiv q_j(x),\ \ x \in I$.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.

3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Parametr kiritish yo‘li bilan tenglamalarni integrallash.
2. Chegaraviy masalalar uchun Grin funksiyasini qurish.

Glossariy

Chiziqli bir jinsli dıfferensianal tenglamalar – yuqoridagi (1) da $Q(x) \equiv 0$ bo‘lsa.

Yechimlar fundamental sistemasi - n- tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning chiziqli erkli yechimlari $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$,.., $\varphi_n(x)$, x € I yechimlarning fundamental sistemasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y = (y^1)^2 + 2\ln y'$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. funksiyalar chizikli bog‘liqligini. Vronskiy determinanti yordamida tekishring?
2. p- tartibli chiziqli bir chiziqli differensialtenglamani umumiy yechimi xaqida teremani aniqlang?
3. Fundamentalechimlar sistemasi deb nimaga aytiladi?
4. Fundamental yechimlar sitemasi o‘rnli bo‘ladigan teoremanini isbotlang?

Amaliy mashg’ulot-13

1. $y^1(2y - y^1) = y^2 \sin 2x$ j: $\ln cy = x \pm \sin x; \quad y = 0$

$$arctg 4 + \frac{1}{2}\ln\left((4-1)/(u+1)\right) = \pm x + c$$

2. $y^{1^4} + y^2 = y^4$ j: $4 = \sqrt[4]{1-(1/y^2)}; \quad y = 0; \quad y = \pm 1$
3. $x(y - xy^1)^2 = xy^{12} - 2yy^1$ j: $x^2 + (cy+1)^2 = 1; \quad y = 0$
4. $y(xy^1 - y)^2 = y - 2xy^1$ j: $(cx+1)^2 = 1 - y^2; \quad y = \pm 1$
5. $yy^1(yy^1 - 2x) = x^2 - 2y^2$ j: $2(x-c)^2 + 2y^2 = c^2; \quad y = \pm x$
6. $y^{12} + 4xy^1 - y^2 - 2x^2 y = x^4 - 4x^2$ j: $y = ce^{\pm x} - x^2$
7. $y(y - 2xy^1)^2 = 2y^1$ j: $y^2 = c^2 x - c; \quad 4xy^2 = -1$

TEST

Boshlang‘ich shartli masala nechta yechimga ega $y' = xy - y^3,\ y(0) = 0$	*1	2	yechimga ega emas	3
Tenglamaning tipini aniqlang	*Bir jinsli	Bernulli	Chiziqli	to‘la differensial

$xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$				
Ushbu $y' = \dfrac{y}{3x - y^2}$ tenglamaning yechimini toping.	* $x = cy^3 + y^2$	$y = 3x^3 + cx^2$	$y = cx^3 + x^2$	$y = cx + x^2$
Ushbu $y = cx^2$ chiziqlar sinfning differensial tenglamasini toping	* $xy' = 2y$	$y' = y^{\frac{2}{x}}$	$y'x = 3y$	$y'x^2 = y^2$
$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)} \dots y^{(n)}) = 0$ tenglamaning tartibini pasaytirish uchun qanday almashtirish bajariladi?	* $y^{(k)} = z$	$y^{(k-1)} = z$	$y' = z$	$y^{(n)} = z$
$F(y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$ .. $(n \geq 2)$ tenglamaning tartibini pasaytirish qanday almashtirish bajariladi?	* $y' = p(y)$	$y^{(n+1)} = z$	$y^{(n)} = z$	$y'p = z$
$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ tenglamada qaysi almashtirish bajarilsa, y va uning xosilalariga nisbatan bir jinsli deyiladi.	* Agar y ning o‘rniga ky, y' ning o‘rniga ky', va x .k $y^{(n)}$ ning o‘rniga $ky^{(n)}$ qo‘yilganda tenglama o‘zgarmasa.	Agar y va uning bir necha tartibli xosilalari qatnashmasa	Agar x argument qatnashmasa	Agar x ning o‘rniga kx, y ning o‘rniga ky', va x .k $y^{(n)}$ ning o‘rniga $ky^{(n)}$ qo‘yilganda tenglama o‘zgarmasa.
$a_0 x^n y^{(n)} + a_i x^{n-1} y^{y-1} + \dots$ $.. + a_{n-1} y' + a_n y = 0$ (bu yerda a_i – o‘zgarmas son) Eyler tenglamasining harakteristik tenglamasini yozing.	* $a_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+1)+$ $+a_1\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\dots(\lambda-n+2)+$ $+\dots a_{n-1}\lambda + a_a = 0$	$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-2} + \dots$ $\dots + a_{n-1} = 0$	$a_0\lambda^n + a_i\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0$	$a_0\lambda(\lambda-1) + a_1(\lambda-1)(\lambda \dots + a_{n-1}(\lambda - n) + a_n =$
$a_0(x)y'' + a_1(x)y' +$ $+ a_2(x)y = f(x)$ $x_0 \leq x \leq x_1$ tenglama uchun umumiy chegaraviy masalani yozing.	* $\alpha y'(x_0) + \beta y(x_0) = 0,$ $\gamma y'(x_1) + \delta y(x_1) = 0$	$J'(x_0) = Y_0$	$y(x_1) = y_1$	$y(x_0) = y$

MA'RUZA №16
Mavzu: Ostrogradskiy-Liuvill formulasi.

Reja:

1.Ostrogradskiy-Liuvill formulasini keltirib chiqarish.
2. Ostrogradskiy-Liuvill formulasini qo‘llanishi.
3. Misolllar.

Tayanch so’z va iboralar: *Ostrogradskiy – Liuvill formulasi, Ostrogradskiy – Liuvill formulasini qo‘llanilishi.*

Fundamental sistema mos chiziqli bir jinsli differensial tenglamani to‘la aniqlagani uchun bu differensial tenglamani topish masalasini qo‘yish mumkin.

Endi $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x)$ funksiyalar I intervalda aniqlangan bo‘lib, yechimlarning fundamental sistemasini tashkil etsin deylik. Ixtiyoriy $\varphi(x)$, $x \in I$ yechim shu funksiyalar bilan chiziqli bog‘liq bo‘lgani uchun $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_n(x), \varphi(x)$ funksiyalardan tuzilgan vronskian aynan nolga teng bo‘ladi ($y_i = \varphi_i(x)$, $y = \varphi(x)$):

$$W[y_1, y_2, ..., y_n, y] = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n & y \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' & y' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} & y^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} & y^{(n)} \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Aslida biz izlangan differensial tenglamani yozdik. Bu tenglama chiziqli bir jinsli ekaniga ishonish uchun (1) dagi determinantni oxirgi ustun elementlari bo‘yicha yoyamiz:

$$W[y_1, y_2, ..., y_n] y^{(n)} - \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y^{(n-1)} + ... + (-1)^n \begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots & y_n'' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix} y = 0 \qquad (2)$$

Ravshanki, chiziqli erkli yechimlar uchun $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$. Shuning uchun (2) tenglamaning hamma hadlarini $W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$ ga bo‘lamiz. Natijada

$$L[y] = y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + ... + p_n(x) y = 0 \qquad (3)$$

ko‘rinishdagi tenglama hosil bo‘ladi. Masalan, (3) dagi $p_1(x)$ uchun ushbu

$$p_1(x) = -\frac{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \cdots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \cdots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}}{W[y_1, y_2, ..., y_n]}$$

munosabat chiqadi. Bundan vronskian uchun muhim formula chiqarish mumkin. Uning uchun avval

$$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

ayniyat o‘rinli ekaniga ishonch hosil qilamiz. Yo‘l elementlari bo‘yicha determinant hosilasini olamiz:

$$\frac{dW(x)}{dx}=\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1'' & y_2'' & \dots & y_n'' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}+$$

$$+\dots+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \dots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_n \\ y_1' & y_2' & \dots & y_n' \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \dots & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)} & y_2^{(n)} & \dots & y_n^{(n)} \end{vmatrix}.$$

Ravshanki, vronskianning hosilasi n ta $n-$tartibli determinantlar yig‘indisidan iborat bo‘lib, oxirgisidan avvalgi $(n-1)$ tasining har biri 2 ta bir xil yo‘l elementlariga ega. Shuning uchun ular nolga teng bo‘lib, faqat oxirgi determinant qoladi. Bu esa izlangan determinantdir. Shunday qilib ushbu

$$p_1(x)=-\frac{W'(x)}{W(x)}$$

formula hosil bo‘ladi. Uni birinchi tartibli o‘zgaruvchilari ajralgan differensial tenglama kabi integrallaymiz:

$$W(x)=Ce^{-\int_{x_0}^{x}p_1(\xi)d\xi},\ x_0\in I,\ x\in I\,.$$

Bundan $x=x_0$ da $C=W(x_0)$. Demak,

$$W(x)=W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x}p_1(\xi)d\xi} \tag{4}$$

formulaga egamiz. Bu formula *Ostrogradskiy-Liuvill nomi* bilan ataladi. Ostrogradskiy-Liuvill formulasidan avavldan ma'lum natija (ya'ni $W(x_0)=0$, bo‘lganda $W(x)=0,\ x\in I$, $W(x_0)\neq 0$ bo‘lsa, $W(x)\neq 0,\ x\in I$ ekani kelib chiqadi.

Yana bu formuladan ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalarni ularning bitta xususiy yechimi ma'lum bo‘lganda integrallash uchun foydalaniladi. Haqiqatan,

$$y''+p_1(x)y'+p_2(x)y=0$$

tenglamaning xususiy yechimi $y=\psi(x),\ x\in I$, bo‘lsin. (4) formulaga ko‘ra

$$\begin{vmatrix}\psi(x) & y\\ \psi'(x) & y'\end{vmatrix}=C_1e^{-\int p_1(x)dx}$$

yoki

$$\psi(x)y'-y\psi'(x)=C_1e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Bu birinchi tartibli differensial tenglama bo‘lib, unign chap tomoni $\mu = \dfrac{1}{\psi^2(x)}$ ga ko‘paytirilishi natijasida to‘liq differensialga keladi, ya'ni

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{\psi(x)}\right) = \frac{C_1}{\psi^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx}.$$

Bundan

$$\frac{y}{\psi(x)} = \int \frac{C_1}{\psi^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_2,$$

$$y = C_1\psi(x)\int \frac{1}{\psi^2(x)} e^{-\int p_1(x)dx} dx + C_2\psi(x)$$

kelib chiqadi.

Misollar. 1. Fundamental sistemasi $\varphi_1(x) = \cos\omega x,\ \varphi_2(x) = \sin\omega x$ bo‘lgan differensial tenglama tuzilsin.

(2) formulaga ko‘ra

$$\begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x & y \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x & y' \\ -\omega^2\cos\omega x & -\omega^2\sin\omega x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$\begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \end{vmatrix} y'' - \begin{vmatrix} \cos\omega x & \sin\omega x \\ -\omega^2\cos\omega x & -\omega^2\sin\omega x \end{vmatrix} y' + \begin{vmatrix} -\omega\sin\omega x & \omega\cos\omega x \\ -\omega^2\cos\omega x & -\omega^2\sin\omega x \end{vmatrix} y = 0$$

Bundan:

$$\omega y'' + \omega^3 y = 0$$

yoki

$$y'' + \omega^2 y = 0.$$

2. Yechimlarning fundamental sistemasi $\varphi_1(x) = 1,\ \varphi_2(x) = \cos x$ bo‘lgan tenlamani tuzing.

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & y \\ 0 & -\sin x & y' \\ 0 & -\cos x & y'' \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$y'' - ctgx\, y' = 0$$

bo‘ladi.

3. $y'' + \dfrac{2}{x}y' + y$ tenglamaning bitta yechimi $y_1 = \dfrac{\sin x}{x}$ bo‘lsa, uning umumiy yechimini toping.

Yuqoridagi formulaga ko‘ra

$$y = \frac{\sin x}{x}\left(C_2 + C_1\int \frac{x^2 e^{-\int \frac{2}{x}dx}}{\sin^2 x} dx\right) = \frac{\sin x}{x}(C_2 - C_1 ctgx),$$

ya'ni

$$y = \frac{\sin x}{x}(C_2 - C_1 ctgx).$$

4. Yechimlarining fundamental sistemasi $x,\ x^2$ bo‘lgan tenglamani tuzing. Izlanayotgan tenglama

$$\begin{vmatrix} x & x^2 & y \\ 1 & 2x & y' \\ 0 & 2 & y'' \end{vmatrix} = 0$$

yoki

$$x^2y'' - 2xy + 2y = 0$$

bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Lagranj va Klero tenglamalari.
2. Shturm-Liuvill masalasi. Xos sonlari va xos funksiyalar.

Glossariy

Ostrogradskiy-Liuvill formulasi - $W(x)Ce^{-\int_{x_0}^{x} P_1(\xi)d\xi}$ $, x_0 \in I, x \in I$ formula Ostrogradskiy-Liuvill nomi bilan ataladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y(y-2xy^1)^3 = y^{1^2}$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1.Determinantlardan hosila olish qoidasi qanday bo‘ladi?
2. Ostrogradskiy-Liuvill formulasini keltirib chiqaring?
3. Ostrogradskiy-Liuvill formulasidan kelib chiqadigan zaruriy va yetarli shart nimadan iborat7
4. Ostrogradskiy-Liuvill formulasi qo‘llanishga doir misollar keltiring?

Amaliy mashg’ulot-13

1. $5y + (y^1)^2 = x(x + y^1)$ j: $x = -\frac{p}{2} + c,\ 5y = c^2 - \frac{5p^2}{4};\ \ x^2 = 4y$

2. $x^2y^{1^2} = xyy^1 + 1$ j: $\pm xp\sqrt{2\ln cp} = 1;\ \ y = \mp\left(\sqrt{2\ln cp} - \frac{1}{\sqrt{2\ln cp}}\right)$

3. $y^{1^3} + y^2 = xyy^1$ j: $pxy = y^2 + p^3,\ y^2(2p + c) = p^4;\ \ y = 0$

4. $2xy^1 - y = y^1 \ln yy^1$ j: $y^2 = 2c_x - c\ln c;\quad 2x = 1 + 2\ln|y|$
5. $y^1 = e^{xy^1/y}$ j: $C_x = \ln c_y;\quad y = ex$
6. $y = xy^1 - x^2 y^{1^3}$ j: $xp^2 = c\sqrt{|p|-1};\quad y = xp - x^2p^3;\ y = 0$
7. $y = 2xy^1 + y^2 y^{1^3}$ j: $2p^2x = c - c^2p^2,\ \ py = c;\ 32x^3 = -27y^4$
8. $y(y - 2xy^1)^3 = y^{1^2}$ j: $y^2 = 2c^3x + c^2;\ 27x^2y^2 = 1$

TEST

$a_0(x)y^{//} + a_1(x)y^{/} + $ $+ a_2(x)y = f(x)$ $x_0 \le x \le x_1$ tenglama uchun umumiy chegaraviy masalani yozing.	* $\alpha y^{/}(x_0) + \beta y(x_0) = 0,$ $\gamma y^{/}(x_1) + \delta y(x_1) = 0$	$J^{/}(x_0) = Y_0$	$y(x_1) = y_1$	$y(x_0) = y$
$a_0(x)y^{n} + a_1(x)y^{/} + a_2(x)y = f(x)$ tenglama uchun umumiy chegaraviy masalaning Grin funksiyasi ko'rinishini yozing ($y_1(x)$ va $y_2(x)$ – tenglamani yechimlari)	* $G(x,s) = \begin{cases} a(s)y_1(x), x_0 \le x \le s \\ b(s)y_2(x), s \le x \le x_1 \end{cases}$	$G(x,s) = \begin{cases} a(s) + y_1(x), x_0 \le x \le s \\ b(s)y_2(x), s \le x \le x_1 \end{cases}$	$G(x,s) = \begin{cases} \dfrac{a(s)}{y_1(x)}, x_0 \le x \le s \\ \dfrac{b(s)}{y_2(x)}, s \le x \le x_1 \end{cases}$	$G(x,s) = \begin{cases} a(s)y_1(x), x_0 \le x \le s \\ b(s)y_2(x), s \le x \le x_1 \end{cases}$
$y^{//} = f(x),\quad y(0) = 0,$ $y(1) = 0$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasini ko'rsating.	$* G(x,s) = \begin{cases} (s-1)x \\ s(x-1) \end{cases}$ $0 \le x \le s$ $s \le x \le 1$	$G(x,s) = \begin{cases} s^2 x \\ s(x+1) \end{cases}$, $0 \le x \le s$ $s \le x \le 1$	$G(x,s) = \begin{cases} (s^2-1)x \\ s(x^2-1) \end{cases}$, $0 \le x \le s$ $s \le x \le 1$	$G(x,s) = \begin{cases} (s+1)x \\ s(x+1) \end{cases}$, $0 \le x \le s$ $s \le x \le 1$
$G(x,s) = \begin{cases} SinsCosx \\ SinxCoss \end{cases}$ $0 \le x \le s$ $s \le x \le \pi$ ko'rinishdagi Grin funksiyasi qaysi chegaraviy masalaga tegishli?	$* y^{//} + y = f(x),$ $y^{/}(0) = 0,\ \ y(\pi) = 0$	$y^{//} + f(x),$ $y(0) = 0,\ \ y(1) = 0$	$y^{//} - y = f(x),$ $y^{/}(0) = 0,$ $y(1) = 0$	$y^{//} + y = f(x),$ $y^{/}(0) = y(\pi),$ $y(1) = 0$
$y^{//} = \lambda y, y(0) = 0, y(l) = 0$ masalaning hos qiymati va hos funksiyalarini toping.	* $\lambda_k = -\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)^2,$ $y_k(x) = Sin\dfrac{\pi k}{e}x$ $k = 1,2,3$	$\lambda_k = \left(\dfrac{\pi k}{2}\right)^2,$ $y_k(x) = Cos\dfrac{\pi k}{e}x$	$\lambda_k = \left(\dfrac{2\pi}{3}k\right)^2,$ $y_k(x) = Sin\dfrac{\pi k}{e}x$	$\lambda_k = -\left(\dfrac{\pi k}{2}\right)^2,$ $y_k = Cos\dfrac{\pi k}{e}x$
Agar o'zgarmas koeffitsentli yuqori tartibli chiziqli tenglamaning o'ng tomoni $P_m(x)e^{\gamma x}, (P_m(x) - ko'pxad)$ ko'rinishida bo'lsa, bitta hususiy yechim qaysi ko'rinishda bo'ladi? (Hamma javoblarda s – karralilikni bildiradi)	* $y_1 = x^s Q_m(x)e^{\gamma x}$	$y_1 = x^{s-1}Q_m(x)e^{\gamma x}$	$y_1 = x^{s+1}Q_m(x)e^{\gamma x}$	$y_1 = Q_{m+s}(x)e^{\gamma x}$
$a_0x^n a y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots$	$* x = e^t$	$x = e^{-t}$	$x = \ln\|t\|$	$x = \ln\|t\| + e^t$

$\ldots + a_{n-1}xy' + a_n y = f(x)$ ko‘rinishidagi Eyler tenglamasini o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamaga keltirish uchun qanday almashtirish bajariladi? (x>0 deb faraz qiling).				
$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ tenglamani yechishda ushbu Ostrogradskiy –Liuvill formulasi qo‘llaniladi: $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}$ bu formuladagi r(x) deb nimaga teng?	$*\, p(x) = \frac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\frac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\frac{a_0(x)}{a_1(x)}$	$p(x) = a_0(x)$
Quyidagi funksiyalardan qaysi biri chiziqli bog‘liq?	$*\, 6x+9,\ 8x+12$	$x+2, x-2$	$Sinx,\ Cosx$	$x^2+2x,$ $3x^2-1, x+4$

MA'RUZA №17

Mavzu: O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglamalar

Reja

1. Xarakteristik ko‘phad.
2. Xarakteristik tenglama .
3. Xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari har xar xil va haqiqiy.

Tayanch so'z va iboralar: *n-chi tartibli o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli differensial tenglama, xarakteristik ko'pxad, xarakteristik tenglama, xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari xar xil xaqiqiy bo'lgan xol.*

O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$u^{(n)}Qp_1y^{(b-1)}Qp_2y^{(n-2)}Q\ldots Qp_n\text{-}y\square\square Qp_nyq0 \qquad (1)$$

bu yerda $r_1, r_2, \ldots, r_n$ koeffitsientlar yuqoridagi ko'rilgan umumiy holdan farqli o'laroq o'zgarmasdir. Bu holda xususiy yechimlarning fundamental sistemasini izlash n-chi darajasi bitta algebraik tenglamani yechishga keltiriladi.
Xususiy yechimlarni dastlab uqe^{rx} ko'rinishida izlaymiz:
Endi $u\square\square qre^{rx}$, $u\square\square\square\square qr^2e^{rx}$, ..,$u^{(n)}q\ uqr^re^{rx}$ bo'lgani sababli (1) tenglamaning chap tomoni uchun quyidagini hosil qilamiz:

$$L\left[e^{zx}\right] = r^n e^{zx} + p_1 r^{n-1} e^{zx} + \ldots + p_{n-1} e^{rp} + p_n e^{zx} = e^{zx}(r^n + p_1 r^{n-1} + \ldots + p_{n-1} z + p_n)$$

Shunday qilib, (1) tenglamada uqu^{rx} o'rniga qo'yish uni

$$e^{rx}f(r)q0 \qquad (2)$$

ko'rinishga keltiriladi, bu yerda $f(r)qr^nQp_1r^{n-1}Q\ldots Qp_{n-1}rQp_n$-ni berilgan differensial xarakteristik ko'phadi deyiladi.
(2) ifodadagi e^{rx} ko'paytuvchi X ning hech qanday qiymatida 0ga aylanmaydi. Shuning uchun r son

$$f(r)q0 \qquad (3)$$

tenglamaning ildizi bo'lgan holda va faqat shundagina yqe^{rx} funksiya o'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli (1) differensial tenglamani qanoatlantiradi.
(3)algebraik tenglama berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi. U (1)differensial tenglamadan izlanayotgan funksiyaning hosilalarini r noma'lumning mos darajalari bilan almashtirishdan hosil bo'ladi, bunda funksiyaning o'zi nolinchi tartibli hosila sifatida r ning nolinchi darajasi, ya'ni 1 bilan almashtiriladi. (3) xarakteristik tenglamaning yechimi (1) differensial tenglamaning birorta xususiy yechimlari sistemasini beradi. Bunda (3) xarakteristik tenglamaning ildizlari har xil bo'lishi mumkin. Shuning uchun shar qaysi holni alohida-alohida qaraymiz.
Xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari haqiqiy va har xil, ya'ni xarakteristik tenglama karrali ildizlarga ham, kompleks ildizlarga ham ega emas.
Algebraning asosiy teoremasidan ma'lumki algebraik tenglama uning darajasi qancha bo'lsa, shuncha ildizga ega bbo'lgani uchun xarakteristik tenglamaning roppa–rosa n ta har xil $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ildizi bo'ladi.bu ildizlarning har biriga differensial tenglamaning xususiy yechimi mos keladi. Demak, n ta xususiy yechimini topamiz:

$$y = e^{zx}, \ldots, y_n = e^{zx} \qquad (4)$$

Endi $Y_1, .., Y_n$ funksiyalar sistemasi fundamental, ya'ni, $y_1, y_2, \ldots, y_n$ funksiyalar chiziqli erkli ekanligini ko'rsatsak yetarli bo'ladi. Buning uchun bu funksiyalar sistemasining Vroskiy determinantini tuzish lozim. Biz nq3 bilan chegaralanamiz. Ixtiyoriy n uchun xuddi shunday ko'rsatiladi.
nq3 vroskian ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$W[y_1, y_2, y_3] = \begin{vmatrix} e^{r_1x} e^{r_2x} e^{r_3x} \\ r_1 e^{r_1x} r_2 e^{r_2x} r_3 e^{r_3x} \\ r_1^2 e^{r_1x} r_2^2 e^{r_{21}x} r_3^2 e^{r_3x} \end{vmatrix} = e^{(r_1+r_2+r_3)x} \begin{vmatrix} 111 \\ r_1 r_2 r_3 \\ r_1^2 r_2^2 r_3^2 \end{vmatrix} \qquad (5)$$

Bu yerda determinantning har qaysi ustunidan e^{rx} ko'rinishdagi ko'paytuvchi qavs tashqarisiga chiqarilgan. So'nggi determinantni uchburchak qoidasidan foydalanib hisoblaymiz.
Determinantning uchunchi ustunini 1-chi va 2-chi ustunlaridan ayiramiz. U holda

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\ r_1&r_2&r_3\\ r_1^2&r_2^2&r_3^2\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1&1&1\\ r_1-r_3&r_2-r_3&r_3\\ r_1^2-r_3^2&r_2^2-r_3^2&r_3^2\end{vmatrix} \text{q}(r_1-r_3)(r_2-r_3)\begin{vmatrix}1&1\\ r_1+r_3;&r_2+r_3\end{vmatrix} \text{q}(r_1-r_3)(r_1-r_3)[r_2\text{Q}r_3-r_1-r_3]\text{q}$$

q-$(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_2-r_3)$

bu yerda 1-chi ustundan r_1-r_3 umumiy ko‘paytuvchi 2-ustundan $r_2 - r_3$ umumiy ko‘paytuvchi tashqariga chiqarilgan va 3-chi tartibli determinant 1-chi satri bo‘yicha yoyish orqali 2-chi tartibli determinantga keltirilgan. Shunday qilib, 3ta funksiyadan iborat sistema uchun

$$W[y_1,y_2,y_3]\text{q}e^{(r_1\text{Q}r_2\text{Q}r_3)x}\,(-1)^3(r_1-r_2)(r_1-r_3)(r_2-r_3)$$

Umumiy holda ham xuddi shunga o‘xshash ushbu formula o‘rinli bo‘lishni ko‘rsatish mumkin:

$$W[y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n]\text{q}\begin{vmatrix}1&1&\ldots\ldots&1\\ r_1&r_2&\ldots\ldots&r_n\\ r_1^{n-1}&r_2^{n-1}&\ldots\ldots&r_n^{n-1}\end{vmatrix}\cdot e^{(r_1+\ldots+r_n)x}$$

bu yerda $\begin{vmatrix}1&1&\ldots\ldots&1\\ r_1&r_2&\ldots\ldots&r_n\\ r_1^{n-1}&r_2^{n-1}&\ldots\ldots&r_n^{n-1}\end{vmatrix}$ q$(-1)^n(r_1-r_2)(r_1-r_3)\ldots(r_1-r_n)(r_2-r_3)\ldots(r_{n-1}-r_n)\neq 0$ Vandermand determinanti deyiladi. Bundan

$$W[y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n]\text{q}e^{(r_1\text{Q}\ldots\text{Q}r_n)x}(-1)^n(r_1-r_2)(r_1-r_3)\ldots(r_1-r_n)(r_2-r_3)\ldots(r_{n-1}-r_n)\neq 0$$

Xarakteristik tenglamaning barcha $r_1,r_2,\ldots,r_n$ ildizlari shartga ko‘ra turlacha, e^{rx} funksiya esa hech qanday x larda nolga aylanmaganlagi uchun

$$W[y_1,y_2,\ldots\ldots,y_n]\neq 0$$

Bu bilan xarakteristik tenglamaning barcha $r_1,r_2,\ldots,r_n$ ildizlari haqiqiy va har xil bo‘lsa, xususiy yechimlar sistemasi (4) fundamental bo‘lishni isbatladik. Demak, bu sistema funksiyalarining

$$Y_2C_1e^{r_1x}+\ldots+C_ne^{r_nx} \tag{7}$$

chiziqli kombinatsiyasi differensial tenglamaning umumiy yechimini beradi.

Misollar.

1. y□□□□□□-5y□□□□Q6y□□q0 tenglama uchun r^3-5r^2Q6rq0 xarakteristik tenglama z_2q0, r_2q2, r_3q3 ildizlarga ega. Fundamental yechimlar sistemasi y_1q1, y_2qe^{2x}, y_3qe^{3x} . Differensial tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

2. y□□^{v}-5y□□□□Q4yq0 tenglama uchun xarakteristik tenglama r^4-5r^2Q4q0, uning ildizlari $r_{1,2}$q±1, $r_{3,4}$±2. Differensial tenglamaning umumiy yechimi yqC_1e^xQC_2e^{-x}QC_3e^{2x}QC_3e^{-2x}

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Yuqori tartibli differensial tenglamalar. $n-$ tartibli differensial tenglamalar.
2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalarni darajali qatorlar yordamida integrallash.

Glossariy

O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglama - O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli tenglama quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

u $^{(n)}$Qp$_1$y$^{(b-1)}$Qp$_2$y$^{(n-2)}$Q….Qp$_n$-y Qp$_n$yq0 (1)

bu yerda r$_1$,r$_2$,…,r$_n$ koeffitsientlar.

Harakteristik ko'phad - (1) tenglamada uqu^{rx} o'rniga qo'yish uni

e^{rx}f(r)q0 (2)

ko'rinishga keltiriladi, bu yerda f(r)qr^{n}Qp$_1$r^{n-1}Q…..Qp$_{n-1}$rQp$_n$-ni berilgan differensial xarakteristik ko'phadi deyiladi.

Harakteristik tenglama -

f(r)q0 (3)

tenglama berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y^{(IV)}-13y''+36y=0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. O'zgarmas koeffitsentli chiziqli bir jinsli tenglama qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Xarakteristikko'p xad deb nimaga aytiladi?
3. Differensial tenglamaning xarakteristik tenglama deb nimaga aytiladi?
4. Xarakteristik tenglamaning barcha ildizlpri xar xil va xaqiqiy bo'lishini ko'rsating.
5. Ixtiyoriy $n=3$ uchun Vranskiy determinanti qanday ko'rinishda bo'ladi?

Amaliy mashg'ulot-14

1. $y=xy^1+y^{1^2}$ j: $y=C_x+C^2;\ y=-\dfrac{x^2}{4}$
2. $y=xy^1+y^1$ j: $y=C_x+C;$ maxsus yechim yo'q.
3. $y=xyh1+\sqrt{1+(y^1)^2}$ j: $y=cx+\sqrt{1+c^2};\ x^2+y^2=1$
4. $y=xy^1+\dfrac{1}{y'}$ j: $y=cx+\dfrac{1}{c};\ y^2=4x$
5. $y=xy^1-y^2$ j: $y=cx-c^2;\ y=\dfrac{x^2}{4}$
6. $y=xy^1-a\sqrt{1+(y^1)^2}$ j: $y=cx-a\sqrt{1+c^2};\ x^2+y^2=a^2$
7. $y=xy^1+\dfrac{1}{2(y^1)^2}$ j: $y=cx+\dfrac{1}{2c^2};\ y=1,5x^{\frac{2}{3}}$

TEST

$a_0x^nay^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\dots$ $\dots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x)$ ko'rinishidagi Eyler tenglamasini o'zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamaga keltirish uchun	$*\,x=e^t$	$x=e^{-t}$	$x=\ln\lvert t\rvert$	$x=\ln\lvert t\rvert+e^t$

qanday almashtirish bajariladi? (x>0 deb faraz qiling).				
$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ tenglamani yechishda ushbu Ostrogradskiy –Liuvill formulasi qo'llaniladi: $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}$ bu formuladagi r(x) deb nimaga teng?	$* \ p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$	$p(x) = a_0(x)$
Quyidagi funksiyalardan qaysi biri chiziqli bog'liq?	$*6x+9, \ 8x+12$	$x+2, x-2$	$Sinx, \ Cosx$	$x^2+2x,$ $3x^2-1, x+4$
$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.	$* \ e^{-2x}$	e^{-2x^2}	e^x	x^3
Ushbu $(x-a)^2 + by^2 = 1$ chiziqlar oilasi qaysi diffirensial tenglamaning yechimi?	$*(yy''+y'^2)^2 = -y^3y''$	$2yy''+y'^2 = \sqrt{yy''}$	$yy''+y'^2 = 0$	Hech birining yechimi emas
$y = a(x)z$ almashtrish yordamida $x^2y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$ tenglamada birinchi tartibli yoqotib soddalashtring.	$*z''+z=0$	$z''-z=0$	$z''+4z=0$	$z''-4z=0$
Yechimni $y_1 = ax+b$ ko'rinishda izlab, $x^2y''\ln x - xy' + y = 0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.	$* \ y_1 = x$	$y_1 = 2x+1$	$y_1 = 2x-1$	$y_1 = x+2$
a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=1$, $y(0)=0, \ y(1)=0$ masala yechimga ega emas?	$* \ a = (2\pi-1)\pi^2$	$a = (2\pi-1) \ \pi$	$a = (2\pi-1)^2 \pi$	$a=0$
a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=f(x)$ $y(0)=0, \ y(1)=0$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasi mavjud bo'ladi?	$* \ a \neq k^2\pi^2$	$a = k\pi$	$a = k^2\pi^2$	$a \neq k\pi$
$y''+4y'+3y=0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$* \ y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$	$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$	$y = c_1e^{x} + c_2e^{-3x}$	$y = c_1e^{x} + c_2e^{3x}$

MA'RUZA №18

Mavzu: O'zgarmas koeffitsientlar chiziqli bir jinsli tenglamalar.

Reja

1. Xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari har xil kompleks ildizlarga ega.
2. Xarakteristik tenglamaning ildizlari karrali.
3. Misollar.

Tayanch so'z va iboralar: *xarakteristik tenglamaning barcha ildizlari xar xil kompleks ildizlarga ega bo'lgan xol, xarakteristik tenglama.* $\alpha > 1$ *karrali* $r = 0$ *ildizga ega bo'lgan xol, xarakteristik tenglamaning* $\alpha > 1$ *karrali* $r \neq 0$ *ildizga ega bo'lgan xol, xarakteristik tenglamaning karrali kompleks ildizga ega bo'lgan xol.*

f(r)q0 xarakteristik tenglamaning ildizlari har xil kompleks ildizlarga ega bo'lsin. Umumiy yechim uchun

$$y = c_1 e^{r_1 x} + \ldots + c_n e^{r_n x} \tag{1}$$

ifodaga olib kelgan mulohazalar bu yerda ham o'z kuchini saqlaydi. Biroq (1) ifodada noqulay chunki $e^{(aQbi)x}$ ko'rinishdagi kompleks funksiyalarga ega, biz esa haqiqiy funksiyalar bilan cheklangan edik. Shuning uchun (1) ifodani xarakteristik tenglama kompleks ildizlarga ega bo'lgan holda ham faqat haqiqiy funksiyalarga ega bo'ladigan qilib o'zgartirishni maqsad qilib qo'yamiz.

Aytaylik, rqaQbi xarakteristik tenglamaning kompleks ildizlaridan biri bo'lsin. f(r) ko'phad faqat haqiqiy koeffitsientlarga ega bo'lgani uchun, algebradan ma'lumki $\bar{r}$ qa-bi qo'shma kompleks son ham xarakteristik tenglamaning ildizi bo'ladi, ya'ni

f(r)q0q>f($\bar{r}$)q0q>f($\bar{r}$)qf($\bar{r}$)q0q>r-ildiz.

a±bi qo'shma kompleks sonlar juftiga 2 ta xususiy yechim

$y_k qe^{(aQbi)x}$ va $y_s qe^{(a-bi)x}$

mos keladi. Bu 2 ta yechim o'rniga ularning ba'zi kombinatsiyalarini ko'ramiz, bular ham L[y]q0 (2) tenglamani yechimlari o'ladi. Chunonchi, $\bar{y}_k q(y_k Q y_s)/2$ va $\bar{y}_s q(y_k - y_s)/2i$ funksiyalarni ko'raylik. Bu ham (2)ni yechimlari.

Eylerning quyidagi formulalaridan

$$cosx = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} (l^{\pm ix} = \cos x \pm i \sin x)$$

foydalanib, $\bar{y}_k$ va $\bar{y}_s$ ni quyidagicha o'zgartiramiz:

$$\bar{y}_k = \frac{y_k + y_s}{2} = \frac{e^{(a+bi)x} + e^{(a-bi)x}}{2} = \frac{e^{ax}(e^{ibx} + e^{-ibx})}{2} e^{ax} \cos bx$$

$$\bar{y}_s = \frac{y_k - y_s}{2v} = e^{(a+bi)x} - e^{(a-bi)x} = e^{ax} \sin bx$$

Shunday qilib, xarakteristik tenglamaning qo'shma kompleks ildizlari jufti $r_{k,s}$qa±bi ga differensial tenglamaning xususiy yechimlari jufti $y_k qe^{ax}\cos bx$, $y_s qe^{ax}\sin bx$ ni mos keltirish mumkin. Umuman yechimni yana xususiy yechimlarni ixtiyoriy koeffitsientli chiziqli kombinatsiyasi kabi hosil qilish mumkin, biroq bu yechim endi (1) ko'rinishga ega bo'lmaydi.

Xarakteristik tenglamaning har bir r haqiqy ildiziga e^{rx} ko'rinishdagi xususiy yechim, xarakteristik tenglamaning qo'shma kompleks ildizlari jufti a±bi ga $e^{ax}\cos bx$, $e^{ax} \sin bx$ ko'rinishdagi xususiy yechimlar jufti mos keltiriladi.

Misol. 1. $y^{11}-2y^{1}Q5yq0$ differensial tenglamaga mos xarakteristik tenglama r^2-2rQ5q0. Uning ildizlari $r_{1,2}$q1±2i. U holda differensial tenglamaning umumiy yechimi $yqc_1e^x\cos 2xQc_2e^x\sin 2x$, bo'ladi.

2. y^{111}-8yq0. r^3-8q0 xarakteristik tenglama. Uning ildizlari r_1q2, $r_{2,3}$q-±i$\sqrt{3}$.

U holda umumiy yechim $yqc_1e^{2x}Qc_2e^{-x}\cos \sqrt{3}x$ $Qc_3e^{-x}\sin \sqrt{3}x$

Xarakteristik tenglama ildizlari orasida karrali ildizlar ham bor bo'lsin. Bu holda (1) ifoda umumiy yechim uchun o'z kuchini yaqotadi, chunki chiziqli erkli yechimlar soni h dan kichik bo'ladi. Haqiqatdan, agar r xarakteristik tenglamaning α karrali ildizi bo'lsa,u holda unga α ta emas, balki 1ta ye^{rx} yechim mos keladi va fundamental sistemani hostl qilish uchun (α-1)ta yechim yetishmaydi. Bunday holda yetishmayotgan xususiy yechimlarni qanday topishni aniqlaymiz.

1)Dastlab, xarakteristik tenglama α>1 karrali (rq0) yechimga ega bo‘lgan holni tekshiramiz. Xarakteristik tenglama bu holda

f(r)q(r-0)$^{\alpha}$ φ(r)qr$^{\alpha}$φ(r), φ(r)-(n-α)-chi tartibli ko‘phad, ya'ni

φ(r)qr$^{n-\alpha}$Qp, r$^{n-\alpha-1}$Q……Qp$_{n-\alpha}$ bo‘lgani uchun

r$^{\alpha}$φ(r)qr$^{\alpha}$(r$^{n-\alpha}$Qp$_1$ r$^{n-\alpha-1}$Q…Qp$_{n-\alpha}$)q0

r^{n}Qp$_1$r^{n-1}Q..Qp$_{n-\alpha}$r$^{\alpha}$q0, p$_{n-\alpha}$≠0

ko‘rinishga ega bo‘ladi. Yuqoridagiga ko‘ra tenglama r ning kichik darajalarini o‘z ichiga olmaydi. Bu holda (2) differensial tenglama ushbu ko‘rinishda hosil bo‘ladi:

(*) y$^{(n)}$Qp$_1$y$^{(n-1)}$Q….Qp$_{n-\alpha}$y$^{(\alpha)}$q0, ya'ni yuqoridagiga ko‘ra bu yerda α dan past tartibli hosilalar qatnashmaydi.

Bunday tenglamani (α-1)dan yuqori tartibli barcha hosilalari aynan 0ga teng balgan darajasi α dan yuqori bo‘lmagan istalgan ko‘phad qanoatlantiradi, ya'ni yqf(x)qa$_1$x$^{\alpha-1}$Q….Qa$_{\alpha-1}$xQQ$_{\alpha}$ (α-1) tartibli ko‘phad (*)ni qanoatlantiradi.

Bunday ko‘phadlar cheksiz ko‘p, biroq ularning orasidan o‘zaro chiziqli erkli bo‘lgan α tasini tanlab olish mumkin. Buning uchun

y$_1$q1, y$_2$qx, y$_3$qx^2,……,y$_{\alpha}$qx$^{\alpha-1}$

deb olish yetarli.

Bu funksiyalar sistemasi chiziqli erkli. Ikkinchi tomondan, darajasi

(α-1)dan yuqori bo‘lmagan har qanday ko‘phad bu sistema funksiyalarining chiziqli kombinatsiyasi sifatida hosil qilinish mumkin.

Shunday qilib, α karrali rq0 ildiz uchun differensial tenglamaning α ta chiziqli erkli yechimlari topiladi, ya'ni y$_1$q1, y$_2$qx, y$_3$qx^2,……, y$_{\alpha}$qx$^{\alpha-1}$,

Endi (3) f(x)q0 xarakteristik tenglamaning α karrali bo‘lgan ildizi r$_1$≠0 sondan iborat bo‘lsine (2) tenglamada yqz l$^{r}{}_{1}{}^{x}$ deb, o‘zgaruvchini almashtiramiz. U holda y□□qz□□l$^{r}{}_{1}{}^{x}$Qr$_1$zl$^{r}{}_{1}{}^{x}$

y□□□□qz□□□□l$^{r}{}_{1}{}^{x}$Q2r$_1$z□□l$^{r}{}_{1}{}^{x}$Qr$_1{}^{r}$zl$^{r}{}_{1}{}^{x}$

y□□□□□□qz□□□□□□l$^{r}{}_{1}{}^{x}$Q3r$_1$z□□□□l$^{r}{}_{1}{}^{x}$Q3r$_1{}^{r}$z□□l$^{r}{}_{1}{}^{x}$Q r$_1{}^{3}$zl$^{r}{}_{1}{}^{x}$

Bu ifodalarni (2) tenglamaga qo‘yib noma'lum funksiyasi z bo‘lgan differensial tenglamani hosil qilamiz. U n-chi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglama bo‘ldi, chunki uning barcha hadlari l$^{r}{}_{1}{}^{x}$ ko‘paytuvchiga ega bo‘lib, uni qisqartirish mumkin. Bu tenglamani z$^{(n)}$Qq$_1$z$^{(n-1)}$Q….Qq$_{n-1}$z□□Qq$_n$q0 (4)

ko‘rinishda yozamiz. Xarakteristik tenglamasi ya'ni zql^{kx} (4) almashtirish bajarishdan hosil bo‘lgan tenglama:

k^{n}Qq$_1$k^{n-1}Q…..Qq$_{n-1}$kQq$_n$q0 (5)

bo‘lsin. Agar k son (5) xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lsa, u holda zql^{kx} (4)differensial tenglamani qanoatlantiradi. Biroq u holda

$$y = ze^{r_1 x} = e^{kx}e^{r_1 x} = e^{(k+r_1)x} \quad (6)$$

(2) differensial tenglamani qanoatlantiradi va rqkQr$_1$ son (3)xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘ladi. Aksincha (4) tenglamada $z = ye^{-r_1 x}$ almashtirish bajarib (1) tenglamani hosil qilish mumkin. Shuning uchun (3) xarakteristik tenglamaning har bir r ildiziga (5) xarakteristik tenglamaning kqr-r$_1$ ildazaga mos keladi. Shunday qilib,(3)va (5)xarakteristik tenglamalarning ildizlari orasida $r = k + r_1$tenglik mavjud shu bilan birga (3) tenglamaning har xil ildizlariga (5)tenglamaning har xil ildizlari mos keladi va aksincha.

(3)xarakteristik tenglama α karrali rqr$_1$ ildizlarga ega bo‘lgani uchun (5)xarakteristik tenglama α karrali kq0 ildizga ega bo‘lishi kerak. Haqiqatdan ham (3) tenglamaning rqr$_1$ ildiziga (5) tenglamaning kq0 ildizi va (5) tenglamaning har xil ildizlariga (3)tenglamaning har xil ildizlari mos kelgani uchun kq0 ildizning karraligi rqr$_1$ ildizning karraligiga teng bo‘lishi kerak. Biroq bunday holda yuqorida isbot qilinganiga ko‘ra (4) differensial tenglama o‘zaro chiziqli erkli bo‘lgan ushbu α ta yechimga ega bo‘ladi:z$_1$q1, z$_2$qx, z$_3$qx^2,…..,z$_{\alpha}$qx$^{\alpha-1}$

bular (2)differensial tenglamaning ushbu ko‘rinishdagi α ta yechimini beradi: yqz

$$y_1 = e^{r_1 x}, \ldots, y_\alpha = x^{\alpha-1} e^{r_1 x}$$

Shunday qilib, (3) xarakteristik tenglamaning α karrali r_1 ildiziga differensial tenglamaning rosa α ta har xil yechimi mos keladi. Yana xususiy yechimlar sistemasi hosil bo‘lib, unda n ta funksiya bo‘ladi. Hosil qilingan xususiy yechimlar chiziqli erkli bo‘ladi.

Avvalgi mulohazalarimizda karrali r_1 ildiz haqiqiy son deb faraz qilinmagan edi. Shuning uchun barcha mulohazalar karrali ildizlar kompleks bo‘lgan xal uchun ham o‘z kuchida qoladi. Masalan,a±bi kompleks ildizlar jufti 2 karrali bo‘lsa, unga quyidagi ko‘rinishdagi 4 ta xususiy yechim mos keladi:

$e^{ax}\cos bx$, $e^{ax}\sin bx$, $xe^{ax}\cos bx$, $xe^{ax}\sin bx$.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Kanonik ko‘rinishdagi $n-$ tartibli differensial tenglamalar yechimining mavjudligi va yagonaligi haqidagi teorema.

2. Yuqori tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligi haqida teorema.

Glossariy

Chiziqli bir jinsli differensianal tenglamalar – yuqoridagi (1) da $Q(x) \equiv 0$ bo‘lsa.

Harakteristik ko’phad - (1) tenglamada uqu^{rx} o‘rniga qo‘yish uni

e^{rx}f(r)q0

ko‘rinishga keltiriladi, bu yerda f(r)qr^{n}Qp$_{1}$r^{n-1}Q…..Qp$_{n-1}$rQp$_{n}$-ni berilgan differensial xarakteristik ko‘phadi deyiladi.

Harakteristik tenglama -

f(r)q0

tenglama berilgan differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. $F(r) = o$ xarakteristik tenglamaning ildizlari xar xil kompleks ildizlariga ega bo‘lsa, u xolda umumiy yechim qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Xarakteristik tenglamaning kopleks ildizlari qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
3. (Qo‘shma) Xarkteristik tenglamaning qo‘shma kompleks ildizlari jufti $r_{k,s} = a \pm вi$ ga differensial tenglamaning xususiy yechimlari jufti qanday ko‘rinishni mos keltirish mumkin?

4. p- tartibli o‘zgarmas koeffitsentli chiziqli tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Xarakteristik tenglamani ildizi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Amaliy mashg’ulot-15

1. $y = xy^{1} + y^{1} + y^{1^2}$ j: $y = c(x+1) + c^2;\ y = -\dfrac{(x+1)^2}{4}$

2. $y = (1+y^{1})x + y^{1^2}$ j: $\begin{cases} x = ce^{-p} - 2p + 2 \\ y = c(1+p)e^{-p} - p^2 + 2 \end{cases}$

3. $y = -\dfrac{1}{2} y^{1}(2x + y^{1})$ j: $\begin{cases} x = \dfrac{1}{3}(cp^{-\frac{1}{2}} - p \\ y = \dfrac{1}{6}(2cp^{\frac{1}{2}} + p^2) \end{cases}$

4. $y = xy^{1^2} + y^{1^2}$ j: $y = \left(c + \sqrt{x+1}\right);\quad y = 0$

5. $y = 2xy^{1} + \dfrac{1}{y^{1^2}}$ j: $x = ct^2 - 2t^3;\ y = 2ct - 3t^2,\ t = \dfrac{1}{p}$

6. $2y = \dfrac{xy^{1^2}}{y^{1} + 2}$ j: $cy = (x-c)^2;\ y = 0$ ва $y = -4x$

7. $y = y^{1}x + a\sqrt[3]{1 - y^{13}}$ j: $y = cx + a\sqrt[3]{1 - c^3};\ \sqrt{y^3} - \sqrt{x^3} = \sqrt{a^3}$

8. $x = y\left(\dfrac{1}{\sqrt{y^{1}}} - \dfrac{1}{y^{1}}\right)$ j: $(c-x)y = c^2;\ y = 4x$

TEST

$a_0x^n a y^{(n)} + a_1x^{n-1}y^{(n-1)} + \dots$ $\dots + a_{n-1}xy' + a_n y = f(x)$ ko‘rinishidagi Eyler tenglamasini o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamaga keltirish uchun qanday almashtirish bajariladi? (x>0 deb faraz qiling).	$*\, x = e^t$	$x = e^{-t}$	$x = \ln\lvert t\rvert$	$x = \ln\lvert t\rvert + e^t$
$a_0(x)y'' + a_1(x)y' + a_2(x)y = 0$ tenglamani yechishda ushbu Ostrogradskiy –Liuvill formulasi qo‘llaniladi: $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = Ce^{-\int p(x)dx}$ bu formuladagi r(x) deb nimaga teng?	$*\, p(x) = \dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\dfrac{a_1(x)}{a_0(x)}$	$p(x) = -\dfrac{a_0(x)}{a_1(x)}$	$p(x) = a_0(x)$
Quyidagi funksiyalardan qaysi biri chiziqli bog‘liq?	$*\, 6x + 9,\ 8x + 12$	$x + 2, x - 2$	$Sinx,\ Cosx$	$x^2 + 2x,$ $3x^2 - 1, x + 4$
$(2x+1)y'' + 4xy' - 4y = 0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.	$*\, e^{-2x}$	e^{-2x^2}	e^x	x^3

Ushbu $(x-a)^2 + by^2 = 1$ chiziqlar oilasi qaysi diffirensial tenglamaning yechimi?	$*(yy'' + y'^2)^2 = -y^3 y''$	$2yy'' + y'^2 = \sqrt{yy''}$	$yy'' + y'^2 = 0$	Hech birining yechimi emas
$y = a(x)z$ almashtrish yordamida $x^2 y'' - 2xy' + (x^2+2)y = 0$ tenglamada birinchi tartibli yoqotib soddalashtring.	$*z'' + z = 0$	$z'' - z = 0$	$z'' + 4z = 0$	$z'' - 4z = 0$
Yechimni $y_1 = ax + b$ ko‘rinishda izlab, $x^2 y'' \ln x - xy' + y = 0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.	$*\ y_1 = x$	$y_1 = 2x + 1$	$y_1 = 2x - 1$	$y_1 = x + 2$
a ning qanday qiymatlarida $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ masala yechimga ega emas?	$*\ a = (2\pi - 1)\pi^2$	$a = (2\pi - 1)\ \pi$	$a = (2\pi - 1)^2\ \pi$	$a = 0$
a ning qanday qiymatlarida $y'' + ay = f(x)$ $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasi mavjud bo‘ladi?	$*\ a \neq k^2 \pi^2$	$a = k\pi$	$a = k^2 \pi^2$	$a \neq k\pi$
$y'' + 4y' + 3y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*\ y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$	$y = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}$	$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-3x}$	$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{3x}$

MA'RUZA № 19
Mavzu: Chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar
Mavzu: Bir jinsli bo'lmagan o'zgarmas koeffitsiyentli chiziqli differensidl tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari. (O'ng tomoni maxsus ko'rinishda bo'lgan tenglamalar).
Reja
1. Chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning umumiy yechimi haqida teorema.
2. Xususiy yechimni topish haqidagi teorema.
3. Chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama xususiy yechimlarini topishning aniqmas koeffitsientlar usuli.
4. Xarakteristik tenglama ildizi karrali bo'lgan hol.
5. Xarakteristik tenglama ildizi kompleks bo'lgan hol.
6. Misollar.

Tayanch so'z va iboralar: *n-tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani umumiy yechimi haqidagi teorema, (isboti bilan), chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalar, n-tartibli chiziqli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglama, n-tartibli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani yechishning aniqmas koeffitsientlari usuli.*

Bir jinsli bo'lmagan chiziqli differensial tenglama deb
$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+p_2(x)y^{(n-2)}+\ldots+p_{n-1}(x)y'+p_n(x)y=q(x) \tag{1}$$
ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Chiziqli differensial operator ifodasidan foydalanib, (1) tenglamani
$$L[y]=q(x) \tag{2}$$
ko'rinishda yozish mumkin. Bu (2) tenglamaga mos bir jinsli tenglama
$$L[y]=0 \tag{3}$$
bo'ladi.

1-TEOREMA ***(Chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi haqidagi teorema).*** *Chiziqli bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaning xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat.*

Isbot. (2) tenglamaning birorta xususiy yechimini $\bar{y}$ – orqali, bu tenglamaga mos bir jinsli (3) tenglamaning umumiy yechimini Y – orqali belgilaymiz. Bunga ko'ra
$$L[\bar{y}]=q(x),\quad L[Y]=0.$$
Endi quyidagicha funksiya tuzamiz:
$$y=\bar{y}+Y. \tag{4}$$
Bu funksiyani (2) tenglamaga qo'yib, L operatorning additivlik xossasidan quyidagiga ega bo'lamiz:
$$L[y]=L[\bar{y}+Y]=L[\bar{y}]+L[Y]=q(x)+0=q(x).$$
Shunday qilib, $y=\bar{y}+Y$ funksiya berilgan (2) tenglamani qanoatlantiradi, ya'ni uni yechimi bo'ladi. Endi (4) ifoda umumiy yechim ekanini isbotlash qoldi.

Agar $y_1,y_2,\ldots,y_n$ funksiya bir jinsli (3) tenglamaning fundamental yechimlar sistemasini tashkil qilsa, u holda uning umumiy yechimi bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi:
$$Y=C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n,$$
bu yerda $C_1,C_2,\ldots,C_n$ –ixtiyoriy o'zgarmaslar .

U holda (4) ifodani quyidagicha yozish mumkin:
$$y=\bar{y}+C_1y_1+C_2y_2+\ldots+C_ny_n. \tag{5}$$
(5) ifoda (2) tenglamaning umumiy yechimi ekanini ko'rsatish uchun ushbu
$$y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y'_0,\ldots,y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{6}$$

boshlang‘ich shartlar qanday bo‘lishdan qat'iy nazar $C_1, C_2, ..., C_n$ o‘zgarmaslarni yagona ravishda topish mumkin ekanligini ko‘rsatish kerak.

(5) funksiya (6) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantirsin

$$\begin{cases} y(x_0) = \bar{y}(x_0) + C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = \bar{y}'(x_0) + C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y_0' \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = \bar{y}^{(n-1)}(x_0) + C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases} C_1 y_1(x_0) + C_2 y_2(x_0) + ... + C_n y_n(x_0) = y_0 - \bar{y}(x_0) \\ C_1 y_1'(x_0) + C_2 y_2'(x_0) + ... + C_n y_n'(x_0) = y' - \bar{y}'(x_0) \\ .... \\ C_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + C_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + ... + C_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} - \bar{y}^{(n-1)}(x_0) \end{cases} \tag{7}$$

Natijasida $C_1, C_2, ..., C_n$ noma'lumlarga nisbatan $n-$ta algebraik tenglamalar sistemasi (7)ni hosil qilamiz. Bu sistemaning asosiy determinanti $x = x_0$ nuqtada $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalarning Vronskiy determinantidan iborat, ya'ni

$$W(x_0) = W[y_1(x_0), y_2(x_0), ..., y_n(x_0)] \neq 0$$

bo‘ladi, chunki $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar chiziqli erkli. Shunday qilib, (7) sistema yagona yechimga ega. Bu yechim Kramer formulasi yoki Gauss usuli yordamida aniqlanadi.

Bu yerdan (5) funksiya yoki (4) qaralayotgan (1) yoki (2) differensial tenglamaning umumiy yechimi ekani kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Shunday qilib, bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglamani yechishning bir jinsli tenglamani yechishdan farqi faqat bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning birorta xususiy yechimni topishdadir.

Xususiy yechimlarni topishda quyidagi teoremadan foydalanish maqsadga muvofiq.

2-**TEOREMA**. *Agar bir jinsli bo‘lmagan (2) tenglamaning o‘ng tomoni 2 ta funksiyaning yig‘indisidan iborat, ya'ni* $L[y] = q_1(x) + q_2(x)$ *bo‘lsa, bunday tenglamaning xususiy yechimini o‘ng tomonlari mos ravishda* $q_1(x)$ *va* $q_2(x)$ *bo‘lgan xuddi shunday tenglamaning xususiy yechimlari yig‘indisi sifatida hosil qilish mumkin.*

Isbot. $L[y] = q_1(x)$ va $L[y] = q_2(x)$ tenglamalarni qaraymiz. $\bar{y}_1$ va $\bar{y}_2$ funksiyalar mos ravishda birinchi va ikkkinchi tenglamalarni qanoatlantirsin deylik, ya'ni $L[\bar{y}_1] = q_1(x)$, $L[\bar{y}_2] = q_2(x)$.

Chiziqli L operatorning additivlik xossasiga ko‘ra

$$L[\bar{y}_1 + \bar{y}_2] = L[\bar{y}_1] + L[\bar{y}_2] = q_1(x) + q_2(x),$$

ya'ni $\bar{y} = \bar{y}_1 + \bar{y}_2$ funksiya $L[y] = q_1(x) + q_2(x)$ tenglamani qanoatlantiradi. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimlari $q(x)$ maxsus ko‘rinishga ega bo‘lganda aniqmas koeffitsientlar usuli bilan topiladi.

Aniqmas koeffitsientlar usuli koeffitsientlari o‘zgarmas va o‘ng tomoni maxsus ko‘rinishda bo‘lgan bir jinsli bo‘lmagan tenglamalar uchun tadbiq qilinadi.

Agar o‘ng tomonda ko‘rsatkichli funksiyalar, sinuslar, kosinuslar va ko‘phadlar yoki ularning butun ratsional kombinatsiyalari turgan bo‘lsa, u holda aniqmas koeffitsientlar usuli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning xususiy yechimini topishga imkon beradi.

(1) tenglamani $n = 4$ bo‘lgan hol uchun tekshirish yetarli, chunki ixtiyoriy n uchun uzundan-uzun hisoblash kerak xolos.

$q(x) = P_m(x)e^{kx}$ ni olamiz. U holda (1) tenglama

$$y^{IV}+p_1y'''+p_2y''+p_3y'+p_4y=P_m(x)e^{kx} \tag{8}$$

ko‘rinishda bo‘ladi, bu yerda $P_m(x)-m$-chi darajali ko‘phad, p_1,p_2,p_3,p_4- koeffitsientlar o‘zgarmaslar.

(8) tenglamani tekshiramiz. Uni xususiy yechimini $\bar{y}=Q(x)e^{kx}$ shaklda izlaymiz. Bu yerda $Q(x)-$ darajasi va koeffitsientlari tanlash lozim bo‘lgan noma’lum ko‘phad. $\bar{y}=Q(x)e^{kx}$ ($Q=Q(x)$) funksiyani (5) tenglamaga qo‘yamiz:

$$\begin{array}{c||l}
p_4 & \bar{y}=Qe^{kx} \\
p_3 & \bar{y}'=Qke^{kx}+Q'e^{kx} \\
p_2 & \bar{y}''=Qk^2e^{kx}+2Q'ke^{kx}+Q''e^{kx} \\
p_1 & \bar{y}'''=Qk^3e^{kx}+3Q'k^2e^{kx}+3Q''ke^{kx}+Q'''e^{kx} \\
1 & \bar{y}^{IV}=Qk^4e^{kx}+4Q'k^3e^{kx}+6Q''ke^{kx}+4Q'''ke^{kx}+Q^{IV}e^{kx}
\end{array}$$

Chap tomonda turgan koeffitsientlarga ko‘paytirib, qo‘shib va o‘xshash hadlarini ixchamlab, quyidagini hosil qilamiz:

$$[Q(k^4+p_1k^3+p_2k^2+p_3k+p_4)+Q'(4k^3+3p_1k^2+2p_2k+p_3)+Q''(6k^2+3p_1k+p_2)+$$
$$+Q'''(4k+p_1)+Q^{IV}]e^{kx}=P_m(x)e^{kx}.$$

Tenglikning chap qismida Q oldidagi koeffitsient (8) tenglamaning r o‘rniga k qo‘yilgan xarakteristik ko‘phadi, ya'ni (8) ga mos xarakteristik ko‘phad

$$f(r)=r^4+p_1r^3+p_2r^2+p_3r+p_4$$

da $r=k$ qo‘yilgan

$$f(k)=k^4+p_1k^3+p_2k^2+p_3k+p_4.$$

Q' oldidagi koeffitsient $f'(k)$ dan, $Q'',Q''',Q^{IV}-$lar oldidagi koeffitsientlar esa sonli koeffitsientlari kerakligicha tanlab olingan xarakteristik ko‘phadning mos ravishda keyingi hosilalaridan iborat, ya'ni

$$4k^3+3p_1k^2+2p_2k+p_3=\frac{1}{1!}f'(k)$$

$$6k^2+3p_1k+p_2=\frac{1}{2!}f''(k)$$

$$4k+p_1=\frac{1}{3!}f'''(k)$$

$$1=\frac{1}{4!}f^{IV}(k).$$

Bundan foydalanib va hosil bo‘lgan ifodani e^{kx} ga qisqartirib, quyidagiga, ega bo‘lamiz:

$$Qf(k)+\frac{1}{1!}Q'f'(k)+\frac{1}{2!}Q''f''(k)+\frac{1}{3!}Q'''f'''(k)+\frac{1}{4!}Q^{IV}f^{IV}(k)=P_m(x) \tag{9}$$

(9) tenglikda $Q(x)-$ko‘phadning aniqmas koeffitsentlarini topish uchun (9) tenglikni chap va o‘ng qismlaridagi ko‘phadlarning darajalari bir xil bo‘lishi, ya'ni chap qismining darajasi o‘ng qismining darajasi kabi $m-$ga teng bo‘lishi kerak.

1) Agar k son xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmasa, $f(k)\neq 0$ va Q ko‘phad asosan (9) tenglikning chap qismida bo‘ladi. Shuning uchun chap qismning darajasi $Q-$ning darajasi bilan bir xildir (chunki $Q-$ning hosilalari $Q-$nikidan past darajasiga ega) va aniqmas koeffitsientlarni topish imkoniga ega bo‘lishimiz uchun $Q(x)$ ko‘phadning darajasi m bo‘lishi kerak. Binobarin, o‘ng qismi $P_m(x)e^{kx}$ ko‘rinishiga ega va $f(k)\neq 0$ bo‘lganda, xususiy yechimni

$$\bar{y} = Q_m(x)e^{kx} \quad (f(k) \neq 0)$$

shaklda izlash kerak.

2) Endi k son xarakteristik tenglamaning ildizi bo'lsin. Agar bu ildiz oddiy bo'lsa, u holda $f(k) = 0$ biroq $f'(k) \neq 0$. Agar ildiz $\alpha \geq 1$ karrali bo'lsa, u holda

$$f(k) = f'(k) = ... = f^{(\alpha-1)}(k) = 0$$

biroq $f^{(\alpha)}(k) \neq 0$ bo'ladi ($f(r) = (r-k)^{\alpha}\varphi(r)$).

Keyingi holda (9) tenglamaning chap tomoni Q ko'phadga ham, uning $(\alpha - 1)$ tartibgacha hosilalariga ham ega emas. Masalan, $\alpha = 3$ bo'lsa, ($f(k) = f'(k) = f''(k) = 0,\ f'''(k) \neq 0$) (9) tenglik quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$\frac{1}{3!}Q'''f'''(k) + \frac{1}{4!}Q^{IV}f^{IV}(k) = P_m(x).$$

(9) tenglikning chap qismi $Q^{(\alpha)}$(bizning holda Q''' dan) boshlanadi. Shuning uchun Q ko'phadni $Q^{(\alpha)}$ hosila m darajaga ega bo'ladigan qilib tanlash kerak. Bu holda Q ko'phadning o'zi $m+\alpha$ darajaga ega bo'ladi. Bundan tashqari, (9) tenglik $Q^{(\alpha)}$ning koeffitsientlarini aniqlashga imkon beradi. Qning darajasi α dan past bo'lgan bircha hadlari (9) ga kirmaydi, shuning uchun ular ixtiyoriy bo'lishi mumkin va ularni 0 ga teng deb hisoblash mumkin.

Demak, Q ko'phadning kichik hadini α darajali deb, butun ko'phadning o'zini esa x^{α} ning darajasi m bo'lgan ko'phadga ko'paytmasi deb hisoblash mumkin, ya'ni

$$Q = a_1x^{m+\alpha} + a_2x^{m+\alpha-1} + ... + a_mx^{\alpha+1} + a_{m+1}x^{\alpha} + a_{m+2}x^{\alpha-1} + ... + a_{m+\alpha}x + a_{m+\alpha+1}$$

ko'phadda

$$a_{m+2} = a_{m+3} = ... = a_{m+\alpha} = a_{m+\alpha+1} = 0$$

deyish mumkin,chunki $Q^{(\alpha)}$–ni hisoblasak bu koeffitsientlar qatnashmaydi. Shuning uchun ularni ixtiyoriyligidan 0 ga tenglash mumkin. U holda

$$Q = a_1x^{m+\alpha} + a_2x^{m+\alpha-1} + ... + a_mx^{\alpha+1} + a_{m+1}x^{\alpha} =$$
$$= x^{\alpha}(a_1x^m + a_2x^{m-1} + ... + a_mx + a_{m+1}) = x^{\alpha}Q_m(x)$$

Shunday qilib, agar bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng qismi $P_m(x)e^{kx}$ ko'rinishga ega bo'lsa, va k son xarakteristik ko'phadning $\alpha \geq 1$ karrali ildizi bo'lsa, u holda xususiy yechimni

$$\bar{y} = x^{\alpha}Q_m(x)e^{kx}$$

ko'rinishda izlash kerak. Bu hol *rezonans hol* deyiladi.

Yuqoridaga mulohazalar k son kompleks bo'lganda ham o'z kuchini saqlaydi. Agar berilgan tenglamani o'ng tomoni

$$e^{ax}[P_m(x)\cos bx + \overline{P}_m(x)\sin bx]$$

ko'rinishga ega bo'lsa, (bu yerda $P_m(x),\ \overline{P}_m(x)$ – lar m dan katta bo'lmagan ko'phadlar), bu funksiyani Eyler formulasi yordamida

$$e^{(a+ib)}R_m(x) + e^{(a-ib)}\overline{R}_m(x)$$

ko'rinishga keltirish mumkin (bu yerda $R_m(x)$ va $\overline{R}_m(x)$ – lar m-chi darajali ko'phadlar). Bu holda xususiy yechim avvalgi mulohazalar yordamida izlanadi.

Xususiy yechimni izlashning yakuniy qoidasi quyidagichadir.

a) agar $k = a \pm ib$ xarakteristik tenglamani ildizi bo'lmasa, xususiy yechim

$$y = e^{ax}[Q_m(x)\cos bx + \overline{Q}_m(x)\sin bx]$$

ko'rinishda izlanadi (bu yerda $Q_m(x)$ va $\overline{Q}_m(x)$ – lar koeffitsientlari noma'lum bo'lgan m-chi darajali ko'phadlar).

Shuni eslatib o'tish kerakki, $P_m(x)$ va $\overline{P}_m(x)$ – lardan birining darajasi $m$dan kichik bo‘lsa, ham $Q_m(x)$ va $\overline{Q}_m(x)$ – ko‘phadlar m-chi darajali qilib izlanadi.

Haqaqatdan ham ular turlicha bo‘lsa, u holda ko‘phadlardan biridagi yetishmayotgan darajalar oldidagi koeffitsientlarini 0 ga teng deb olish mumkin.

b) agar $k = a \pm ib$ xarakteristik tenglamaning $\alpha \geq 1$ karrali ildizi bo‘lsa, u holda xususiy yechim

$$y = x^{\alpha} e^{ax}[Q_m(x)\cos bx + \overline{Q}_m(x)\sin bx]$$

ko‘rinishda izlanadi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние диффердиальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Yuqori tartibli tenglamalarning tartibini pasaytirish.

2. Matritsali differensial tenglamalarni integrllash usullari.

Glossariy

Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial - Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama deb

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x) \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi haqidagi teorema - chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi bu tenglamaning xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig‘indisidan iborat.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching:

$64y^{VIII} + 48y^{VI} + 12y^{IV} + y'' = 0$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama deb qanday ko‘rinishdagi tenglamaga aytiladi?
2. chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimi xaqidagi teoremani isbotlang?
3. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamaning yechimini aniqmas koeffitsientlar usulini tushintiring?
4. Chiziqli operatorning additivlik xossasini ayting?
5. Xusiy yechimni izlashning yakuniy qoidasini ayting?

Amaliy mashg’ulot-16

Tartibi pasayadigan tenglamalar.

1. Agar tenglamaga *u* kirmasa, *u*

$F(x, y^{(n)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0$.

ko‘rinishda bo‘ladi. $y^{(k)} = z$ deb tenglamaga tartibini pasaytirish mumkin:

$$F(x, z, z^{(1)}, \ldots, z^{(n-k)}) = 0.$$

2. Agar tenglamaga *x* kirmasa, ya'ni

$$F(y, y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0,$$

u holda u ni erkin o‘zgaruvchi deb, $y^{(1)}$ ni ya'ni *p*(*y*) funksiya bilan almashtirish mumkin.

Misol-1: $2yy'' = y'^2 + 1$ tenglamada *x* yo‘q. $y' = p(y)$ deymiz, u holda

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dp(y)}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = p' \cdot p.$$

Tenglamaga, $y' = p,\ \ y'' = p' \cdot p$ almashtirishlarni kiritsak, $2yp \cdot p' = p^2 + 1$ munosabatni olamiz. Uni yechib, $p = \pm\sqrt{C_y - 1}$ ni olamiz. Shuning uchun, $y' = \pm\sqrt{C_y - 1}$ bu yerdan topamiz: $4(C_y - 1) = C^2(x + C_2)$.

Misol-2: Ushbu $y'' + y'^2 = 2e^{-y}$ tenglamani umumiy yechimini toping.

yechish: $y' = p(y),\ \ y'' p' \cdot p$ deb, Bernulli tenglamasini hosil qilamiz:

$pp' + p^2 = 2e^{-y}$ yoki $p' + p = \dfrac{2e^{-y}}{p}$.

$p = u \cdot v$ o‘rniga qo‘yishdan foydalanamiz, bu yerdan $p' = u'v + uv'$. Keyingi tenglama quyidagicha yoziladi:

$$u'v + uv' + uv = \frac{2e^{-y}}{u \cdot v} \quad \text{yoki} \quad u'v + (v' + v) \cdot u = \frac{2e^{-y}}{uv}.$$

v funksiyaning shunday tenglaymizki, qavs ichida turgan ifoda nolga teng bo‘lsin:

$$v' + v = 0 \qquad (1)$$

U holda

$$u'v = \frac{2e^{-y}}{u \cdot v} \qquad (2)$$

(1) tenglamani integrallaymiz:

$\dfrac{dv}{v} = -dy$ yoki $\ln v = -y$, bu yerdan $v = e^{-y}$ (3)

(3) ni (2) ga qo‘yib, quyidagini hosil qilamiz:

$uu' = \dfrac{2e^{-y}}{e^{-2y}}$ yoki $udu = 2e^{y}dy$, bundan integrallab, topamiz: $\dfrac{u^2}{2} = 2e^{y} + C_1$

yoki

$$u = \pm\sqrt{4e^{y} + 2C_1} \qquad (4)$$

Topilgan *u* va *v* funksiyalar bo‘yicha ((3) va (4) formulalar) izlanayotgan r oraliq funksiyani tuzamiz:

$p = u \cdot v = \pm e^{-y}\sqrt{4e^{y} + 2C_1}$.

yoki $p = \pm\sqrt{4e^{-y} + 2C_1 e^{-2y}}$

$p = \dfrac{dy}{dx}$ almashtirish bajarib, o‘zgaruvchilari ajraladigan tenglama hosil qilamiz:

$$\frac{dy}{dx} = \pm\sqrt{4e^{-y} + 2C_1e^{-2y}}$$

Buni integrallab, umumiy integralni topamiz:

$$\pm\frac{1}{2}\sqrt{4e^{y} + 2C_1} = x + C_2$$

yoki

$(x + c_2)^2 = e^y + \overline{C}_1$ bu yerda $\overline{C}_1 = \frac{C_1}{2}$.

3. Agar tenglama $y, y^{(1)}, ..., y^{(n)}$ ga nisbatan bir jinsli ya'ni $y, y', y'', ...,$ ni $ky, ky', ky'', ...,$ lar bilan almashtirganda o'zgarmasa, tenglama tartibi $y' = yz$ deb almashtirish bajarilsa pasayadi, bu yerda z yangi noma'lum funksiya.

4. Agar tenglama *x,u* ga nisbatan bir jinsli bo'lsa, ya'ni *x* ni *kx* ga, *u* ni $k^m y$ ga (bunda y' $k^{m-1}y'$ ga, $y''k^{m-2}y''$ ga va hakazo almashtiriladi). Uni tartibini pasaytirish mumkin. Bunda *m* ni topish uchun har bir xaddagi *k* ning darajalari tenglab hosil qilinadi.

Masalan: $2x^4y'' - 3y^2 = x^4$ bunday almashtirishdan so'ng chap tomonda $4 + (m-2)$ o'ng tomonda 4 hosil bo'ladi, ya'ni $4 + m - 2 = 4$. Bu yerdan $m = 2$. Agar hosil bo'lgan tenglamalardan *m* ni topib bo'lmasa tenglama ko'rilgan ma'noda bir jinsli bo'lmaydi.

Shunday *m* topilgach, $x = e^t$, $y = ze^{mt}$ almashtirish bajarish kerak, bu yerda $z = z(t)$ yangi noma'lum funksiya, *t*-yangi erkli o'zgaruvchi. Natijada *t* ni o'z ichiga oshkor olmagan tenglama hosil qilamiz: uni tartibini pasaytirish mumkin.

5. Agar tenglamaning ikkala qismini *x* bo'yicha biror funksiyasi bo'yicha to'liq hosilasi ko'rinishga keltirish mumkin bo'lsa, uning tartibini osongina pasaytirish mumkin.

Misol: $yy'' = y'^2 \Rightarrow \frac{y''}{y'} \Rightarrow (\ln y')' = (\ln y)' \Rightarrow \ln y' = \ln y + \ln c,\ y' = yc,$ tenglama tartibi pasaydi.

Amaliy mashg'ulot № 13

1. $y''' = \frac{1}{x}$ j: $y = x^2\ln\sqrt{x} + c_1x^2 + c_1x + c_3$
2. $y'' = -\frac{1}{2y^3}$ j: $1 + c_1y^2 = \left(c_2 + \frac{c_1x}{\sqrt{2}}\right)^2$
3. $y'' = 1 - y'^2$ j: $y = \ln|e^{2x} + c_1| - x + c_2$
4. $xy'' + y' = 0$ j: $y = c_1 + c_2\ln|x|$
5. $yy'' = y'^2$ j: $y = c_1e^{c_2x}$
6. $yy'' + y'^2 = 0$ j: $y = \pm\sqrt{c_1x + c_2}$
7. $(1 + x^2)y'' + y'^2 + 1 = 0$ j: $y = (1 + C_1^2)\ln|x + c_1| - c_1x + c_2$
8. $y'(1 + y'^2) = ay''$ j: $(x - c_1)^2 = a\ln\left|\sin\frac{y - c_2}{a}\right|$
9. $xy''' + y'' = 1 + x$ j: $y = \frac{x^3}{12} + \frac{x^2}{2} + c_1x\ln|x| + c_2x + c_3$
10. $y''' + y''^2 = 1$ j: $y = \sin(c_1 + x) + c_2x + c_3$

TEST

a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=1$, $y(0)=0,\ y(1)=0$ masala yechimga ega emas?	$*\,a=(2\pi-1)\pi^2$	$a=(2\pi-1)\ \pi$	$a=(2\pi-1)^2\,\pi$	$a=0$
a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=f(x)$ $y(0)=0,\ y(1)=0$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasi mavjud bo‘ladi?	$*\,a\neq k^2\pi^2$	$a=k\pi$	$a=k^2\pi^2$	$a\neq k\pi$
$y''+4y'+3y=0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*\ y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$	$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$	$y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$	$y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$
$y''+2y'+10y=0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*$ $y=e^{-x}(C_1Cos3x+C_2Sin3x)$	$y=e^{3x}(C_1Cosx+C_2Sinx)$	$y=e^{x}(C_1Cos3x+C_2Sin3x)$	$y=e^{2x}(c_1Cos2x+c_2Sin2x$
$y''-2y'+y=0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*\ y=(c_1+c_2x)e^x$	$y=(c_1+c_2)e^x$	$y=(c_1+c_2x^2)e^x$	$y=c_1e^x+c_2e^{-x}$
$y''-2y'-3y=x^2e^x$ tenglamaning bitta xususiy uchimi qanday ko‘rinishda izlanadi.	$*\ y=x(Ax^2+Bx+c)e^x$	$y=(Ax^2+Bx+c)e^x$	$y=x^2(Ax+B)e^x$	$y=Ax^2e^x$
$y''-4y'+8y=Sin2x$ tenglamaning bitta xususiy yechimi qaysi ko‘rinishda bo‘ladi?	$*\ y=ASin2x+BCos2x$	$y=(Ax+B)Sin2x+$ $+(cx+B)Cosx$	$y=Ax^2Sin2x+BxCosx$	$y=x(ASin2x+BCos2x$
a va b ning qanday qiymatlarida $y''+ay'+by=0$ tenglamaning yechimlari $-\infty\prec x\prec\infty$ da chegaralangan bo‘ladi?	$*a=0$ $b>0$	$a=0$ $b<0$	$a>0$ $b>0$	$a<0$ $b<0$
a va b ning qanday qiymatlarida $y''+ay'+by=0$ tenglamaning hamma yechimlari $x\to+\infty$ da nolga intiladi?	$*a>0$ $b>0$	$a=0$ $b<0$	$a=0$ $b>0$	$a<0$ $b<0$
$x^3y'''+xy'-y=0$ Eyler tenglamasini yeching.	$*$ $y=x(c_1+c_2\ln\|x\|+c_3\ln^2\|x\|)$	$y=c_1+c_2\ln\|x\|+c_3\ln^2\|x\|$	$y=x^2(c_1+c_2\ln\|x\|+c_3\ln^2\|x\|)$	$y=c_1+c_2x+c_3x^2$

MA'RUZA № 20-21

Mavzu: Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan differensial tenglamalar yechish usuli. Eyler tenglamasi

Reja

1.Ixtiyoriy o‘zgarmasni variatsiyalash usuli.

2.Misollar .

3.Eyler tenglamasi.

4.Eyler tenglamasining xarakteristik tenglamasi.

Aniqmas koeffitsientlar usulining tadbiq qilinish sohasi tor va cheklangandir. O‘ng qismida hech bo‘lmaganda tgx yoki kasr ko‘rsatkli funksiya turgan bo‘lsa, aniqmas koeffitsientlar usulani qo‘llab bo‘lmaydi. Shuning uchun bir jinsli bo‘lmagan tenglamalarni yechishning qo‘llanish sohasi ancha keng bo‘lgan yana bir usuli bilan tanishib chiqish kerak.

Ixtiyoriy o‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli o‘ng qismi qanday bo‘lishidan qat'iy nazar har qanday bir jinsli bo‘lmagan chiziqli tenglama uchun qo‘llanishga ega bo‘lib, mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi ma'lum bo‘lgan barcha hollarda bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning umumiy yechimini tenglamaning umumiy yechimini topishga imkon beradi. Aniqmas koeffitsientlar usulini bayon qilganimizdagidek, bu yerda ham 4-chi tartibli tenglamani qarash bilan cheklanamiz, ya'ni $n = 4$ uchun ko‘ramiz.

Shunday qilib,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + p_2(x)y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x) \tag{1}$$

bo‘lsin, bu yerda $p_1, p_2, p_3, p_4, q -$lar x ning ixtiyoriy funksiyalari, ushbu

$$Y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 \tag{2}$$

ifoda (2) tenglamaga mos $L[y] = 0$ bir jinsli tenglamani umumiy yechimi bo‘lib, ma'lum deb faraz qilamiz.

O‘zgarmaslarni variatsiyalash usulida umumiy yechim (2) ga o‘xshash ko‘rinishda izlanadi, lekin bu yerda ixtiyoriy o‘zgarmaslar x ning noma'lum funksiyalari bilan almashtirilgan. Noma'lum funksiyalar avvaldagidek C_1, C_2, C_3, C_4 harflar bilan belgalanadi. Boshqacha aytganda, yechim

$$y = C_1(x)y_1 + C_2(x)y_2 + C_3(x)y_3 + C_4(x)y_4 \tag{3}$$

ko‘rinishda izlanadi.

O‘zgarmasni variatsiyalash usuli birinchi tartibli chiziqli tenglama uchun qaralgan o‘zgarmasni variatsiyalash usuliga o‘xshaydi. Noma'lum funksiyalarni (3) ifoda (1) tenglamani qanoatlantiradigan qilib tanlash talab etiladi. Buning uchun (3) funksiyaning hosilalarini topib, ularni (1) ga qo‘yamiz. Bunda 4-ta noma'lum funksiya uchun faqat 1-ta tenglama hosil bo‘lishni ko‘rish mumkin. Shuning uchun bu 1-ta tenglamaga yana 3-ta (n tartibli tenglama bo‘lgan umumiy holda $(n-1)-$ta) tenglamani hosil bo‘ladigan sistema birgalikda (yechimga ega) bo‘ladigan qilab qo‘shish mumkin.

Biz bu 3-ta tenglamani tezda kerakli shakldа yozishimiz mumkin edi, biroq boshqa yo‘l tutish maqsadga muvofiqdir. Qo‘shimcha tenglamalar ketma-ket shunday tanlanadiki, (3) funksiya va uni hosilalarini (1) tenglamaga qo‘yish natijasida hosil bo‘ladigan asosiy tenglama eng sodda ko‘rinishga ega bo‘lsin. $C_1(x), C_2(x), C_3(x), C_4(x)$ o‘zgaruvchilar oldidagi 1-chi 3-ta hosila C_1, C_2, C_3, C_4 o‘zgarmaslar oldidagi hosilalarga o‘xshash ko‘rinishga ega bo‘lashga harakat qilamiz.

Bunda sistema faqat birinchi tartibli $C_1'(x), C_2'(x), C_3'(x), C_4'(x)$ hosilalarga ega bo‘ladi.

(3) funksiyani differensiallashdan boshlaymiz, bunda qisqalik uchun barcha funksiyalarda x argumentni yozmaymiz:

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_3y_3' + C_4y_4' + C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 + C_4'y_4$$

Qo‘shimcha tenglamalarning birinchisi sifatida bu ifodaning 2-chi yarmini 0 ga tenglaymiz, ya'ni

$$C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 + C_4'y_4 = 0 \tag{4}$$

deymiz. U holda y' ifoda $C_1(x), C_2(x), C_3(x), C_4(x)$ funksiyalar o‘zgarmas bo‘lgandagi kabi ko‘rinishga ega bo‘ladi. So‘ngra

$$y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_3y_3' + C_4y_4'$$

dan hosila olamiz:

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_3y_3'' + C_4y_4'' + C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_3'y_3' + C_4'y_4'.$$

Yuqoridagiga o‘xshash, 2-chi qo‘shimcha tenglama sifatida

$$C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_3'y_3' + C_4'y_4' = 0 \tag{5}$$

ni olib, qolgan qismini tashlab yuboramiz. U holda 3-chi tartibli hosilasi quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi. (5)dan

$$y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_3y_3'' + C_4y_4''$$

bo‘ladi. Bundan hosila olamiz:

$$y''' = C_1y_1''' + C_2y_2''' + C_3y_3''' + C_4y_4''' + C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + C_3'y_3'' + C_4'y_4''$$

bu yerdan

$$C_1'y_1'' + C_2'y_2'' + C_3'y_3'' + C_4'y_4'' = 0 \tag{6}$$

deb, yana bir marta 2-chi qolgan qismini tashlab yuborish mumkin.

Bundan ham soddalashtirish mumkin emas: 3-ta qo‘shimcha tenglama qo‘shib bo‘lindi. Ya'ni $y-$ning va uning hosilalarini o‘rniga qo‘yishda ularni ko‘paytirish lozim bo‘lgan tenglamaning koeffitsientlari bilan qaytadan yozib chiqamiz:

$$\begin{array}{c||l}
p_4 & y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 + C_4y_4 \\
p_3 & y' = C_1y_1' + C_2y_2' + C_3y_3' + C_4y_4' \\
p_2 & y'' = C_1y_1'' + C_2y_2'' + C_3y_3'' + C_4y_4'' \\
p_1 & y''' = C_1y_1''' + C_2y_2''' + C_3y_3''' + C_4y_4''' \\
1 & y^{IV} = C_1y_1^{IV} + C_2y_2^{IV} + C_3y_3^{IV} + C_4y_4^{IV} + C_1'y_1''' + C_2'y_2''' + C_3'y_3''' + C_4'y_4'''
\end{array}$$

1-chi ustuning elementlarining tegishli ko‘paytuvchilarga ko‘paytmalarini alohida qo‘shib quyidagini hosil qilamiz:

$$C_1y_1^{IV} + C_1p_1y_1''' + C_1p_2y_1'' + C_1p_3y_1' + C_1p_4y_1 = C_1L[y_1]$$

Bu ifoda y_1 funksiyani (1) tenglamaning chap qismiga qo‘yish natijasidir, u mos bir jinsli tenglamaning yechimi bo‘lganligi uchun $L[y_1] = 0$.

Mos ravishda $C_2L[y_2]$, $C_3L[y_3]$ va $C_4L[y_4]$ ga teng bo‘lgan, qolgan ustunlarning yig‘indisi ham 0ga teng bo‘ladi. Demak, tenglama quyidagi ko‘rinishga ega bo‘ladi:

$$C_1y_1''' + C_2y_2''' + C_3y_3''' + C_4y_4''' = q \tag{7}$$

Shunday qilib, $C_1(x), C_2(x), C_3(x), C_4(x)$ noma'lum funksiyalarni topish uchun (4), (5), (6), (7) dan iborat 4-ta tenglamalar sistemasini hosil qildik:

$$\begin{cases}
C_1'y_1 + C_2'y_2 + C_3'y_3 + C_4'y_4 = 0 \\
C_1'y_1' + C_2'y_2' + C_3'y_3' + C_4'y_4' = 0 \\
C_1'y_1'' + \dot{C}_2y_2'' + C_3'y_3'' + C_4'y_4'' = 0 \\
C_1'y_1''' + C_2'y_2''' + C_3'y_3''' + C_4'y_4''' = q(x)
\end{cases} \tag{8}$$

(8) sistemani esda yaxshi saqlab qolish uchun quyidagini aytib o‘tamiz: noma'lumlar bo‘lib, $C_1'(x), C_2'(x), C_3'(x), C_4'(x)$ hosilalar, koeffitsientlar bo‘lib ma'lum fundamental sistema Vronskiy determinantining satrlari xizmat qiladi, barcha tenglamlarda ularning o‘ng tomonlari, oxirgi tenglamadan tashqari (u yerda $q(x)-$berilgan (1) tenglamaning o‘ng qismi turadi), 0 ga teng.

(8) sistema chiziqli algebraik tenglamalarning bir jinsli bo‘lmagan sistemasidir, u

birgalikda, chunki bu sistemaning determinanti $D = W[y_1, y_2, ..., y_n] \neq 0$. Uni yechib quyidagini hosil qilamiz:

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad C_2'(x) = \varphi_2(x), \quad C_3'(x) = \varphi_3(x), \quad C_4'(x) = \varphi_4(x),$$

bu yerdan

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)dx + K_1, \quad C_2(x) = \int \varphi_2(x)dx + K_2,$$

$$C_3(x) = \int \varphi_3(x)dx + K_3, \quad C_4(x) = \int \varphi_4(x)dx + K_4.$$

Bu yerda K_1, K_2, K_3, K_4 – ixtiyoriy o'zgarmaslar (differensial tenglamalarda ixtiyoriy o'zgarmaslar odatda aniqmas integral belgisiga qo'shib yozilmaydi) hosil bo'lgan ifodalarni (3) tenglikka qo'yib, bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning umumiy yechimini ushbu ko'rinishda hosil qilamiz:

$$y = y_1 \int \varphi_1(x)dx + y_2 \int \varphi_2(x)dx + y_3 \int \varphi_3(x)dx + y_4 \int \varphi_4(x)dx +$$

$$+ K_1 y_1 + K_2 y_2 + K_3 y_3 + K_4 y_4$$

Bir jinsli bo'lmagan (1) tenglamaning umumiy yechimi ikki gruppa hadlarga bo'linishini aytib o'taylik: ulardan 1-chisi ixtiyoriy o'zgarmaslarga ega bo'lmay, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimidan, 2-chi gruppa hadlar esa mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimidan iborat. Shunday qilib, yana 1-teoremaning natijasini hosil qildik.

Keltirilgan isbotda p_1, p_2, p_3, p_4 – koeffitsientlar x ning funksiyalari deb faraz qilinadi. Shuday qilib, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning integrallash uchun mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini bilish yetarladir. Biroq amalda koeffitsientlari o'zgarmaslar bo'lgan yoki unga keltiriladigan tenglama bilan cheklanishimizga to'g'ri keladi, chunki faqat ular uchungina bir jinsli tenglama yechimlarining fundamental sistemasini topish usullari ma'lumdar.

Misol ko'raylik.

1. $y''' + y' = tgx$ tenglamani yechimiz:

Mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi:

$$(*) \quad y = C_1 + C_2 \cos x + C_3 \sin x,$$

ya'ni

$y''' + y' = 0 \Rightarrow r^3 + r = 0$ xarakteristik tenglamasi $r(r^2 + 1) = 0, \Rightarrow r_1 = 0, \ r_{2,3} = \pm i \Rightarrow$

$$y_1 = 1, \ y_2 = \cos x, \ y_3 = \sin x$$

(*) kelib chiqadi.

Bunday tenglama uchun (8) sistema quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$\begin{cases} C_1' + C_2' \cos x + C_3' \sin x = 0 \\ C_1' \cdot 0 - C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0 \\ C_1' \cdot 0 - C_2' \cos x - C_3' \sin x = tgx \end{cases}$$

$$\begin{cases} C_1' + C_2' \cos x + C_3' \sin x = 0 \\ \quad - C_2' \sin x + C_3' \cos x = 0 \\ \quad - C_2' \cos x - C_3' \sin x = tgx \end{cases}$$

2-chi tenglamaning ikkala qismini $\sin x$ga 3-chi tenglamaning ikkala qismini $\cos x$ga ko'paytirib qo'shsak, $C_2' = -\sin x$ ni hosil qilamiz. U holda 2-chi tenglamadan $C_3' = -\dfrac{\sin^2 x}{\cos x}$ kelib chiqadi. 1-chi va 3-chi tenglamalarning ikkala qismini qo'shib, $C_1' = tgx$ ni topamiz, ya'ni

$$C_1' = tgx, \quad C_2' = -\sin x, \quad C_3' = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}.$$

Integrallash ushbuni beradi:

1) $dC_1 = tgxdx \Rightarrow C_1 = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx + K_1 \Rightarrow C_1 = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} + K_1 \Rightarrow C_1 = -\ln \cos x + K_1$.

2) $dC_2 = -\sin xdx \Rightarrow C_2 = -\int \sin xdx \Rightarrow C_2 = \cos x + K_2$.

3) $dC_3 = -\frac{\sin^2 x}{\cos x}dx \Rightarrow C_3 = -\int \frac{1-\cos^2 x}{\cos x}dx \Rightarrow C_3 = \sin x - \ln tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) + K_4$.

($\int \frac{1}{\cos ax}dx = \frac{1}{a}\ln tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) + C$ formuladan foydalanildi).

Shunday qilib tenglama umumiy yechimi:

$$y = C_1y_1 + C_2y_2 + C_3y_3 = -\ln \cos x - \ln tg(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}) + \overline{K}_1 + K_2\cos x + K_3 \sin x, \quad \overline{K}_1 = K_1 + 1$$

bo'ladi.

3. EYLER TENGLAMASI.

Eyler tenglamasi koeffitsientlari o'zgaruvchan bo'lgan differensial tenglama bo'lib, uni koeffitsientlari o'zgarmas bo'lgan tenglamaga keltirish mumkin. Ushbu tenglama Eyler tenglamasi deyiladi.

$$x^n y^{(n)} + p_1x^{n-1}y^{(n-1)} + p_2x^{n-2}y^{(n-2)} + ... + p_{n-1}xy' + p_ny = q(x) \qquad (9)$$

bu yerda $p_1, p_2,..., p_n$ –o'zgarmas sonlar.

Shunday qilib Eyler tenglamasining koeffitsientlari darajasi funksiyalardir, shu bilan birga koeffitsientning darajasi u bilan birga turgan hosila tartibiga teng.

Eyler tenglamasi erkli o'zgaruvchini $x = e^t$ (yoki $t = \ln x$) o'rniga qo'yish orqali koeffitsientlari o'zgarmas bo'lgan chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Haqiqatdan ham $x = e^t$, ya'ni $t = \ln x$ deylik ($x > 0$ deb faraz qilinadi; $x < 0$ uchun $t = \ln|x|$ deb hisoblash kerak).

$t-$ni oraliq argument deb hisoblab va $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$ ekanlagini nazarda tutib, $y-$ning x bo'yicha hosilasini topamiz;

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt}\cdot\frac{1}{x} \Rightarrow xy' = x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \qquad (10)$$

($y(x) = y(t(x))$ -murakkab funksiya).

Murakkab funksiyani differensiallash qoidasigi ko'ra, x bo'yicha yana differensiallasak,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \frac{dy}{dt}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right), \qquad (11)$$

bu yerdan

$$x^2y'' = x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dt}, \qquad (12)$$

Yana x bo'yicha differensiallab, quyidagini hosil qilamiz.

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)^3 + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right) + \frac{d^2y}{dt^2}\cdot\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right) - \frac{dy}{dt}\cdot\left(-\frac{2}{x^3}\right)$$

va binobarin,

$$x^3y''' = x^3\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dt}. \qquad (13)$$

(10), (12) va (13) tengliklar quyi hosilalar uchun $x^n y^{(n)}$ ko'paytma $y-$ning t bo'yicha o‘zgarmas koeffitsientli hosilalari orqali ifodalashini ko‘rsatadi. To‘liq matematik induksiya metodidan foydalanib, bu xossa istalgan $n-$lar uchun o‘rinla ekanligini isbot qilish mumkin, bu yerdan istalgan tartibli Eyler tenglamasini o‘zgarmas koeffitsientli tenglamaga keltirish mumkinligi kelib chiqadi.

1-misol. $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $x = e^t$ deb (10), (12) va (13) tengliklardan foydalanib, quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(\frac{d^3y}{dt^3} - 3\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dt}\right) - \left(\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dt}\right) + 2\frac{dy}{dt} - 2y = 0$$

yoki

$$\frac{d^3y}{dt^3} - 4\frac{d^2y}{dx^2} + 5\frac{dy}{dt} - 2y = 0,$$

ya’ni koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan chiziqli tenglamani hosil qildik. Uning xarakteristik tenglamasi

$$r^3 - 4r^2 + 5r - 2 = 0$$

bo‘ladi. Bundan

$$r^3 - 4r^2 + 4r + r - 2 = 0 \Rightarrow r(r^2 - 4r + 4) + r - 2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (r-2)(r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1,\ r_3 = 2$$

kelib chiqadi. U holda tenglamaning umumiy ydchimi

$$y = C_1e^t + C_2te^t + C_3e^{2t}$$

yoki eski o‘ski o‘zgaruvchilarga qaytsak ($t = \ln x$),

$$y = C_1x + C_2x\ln x + C_3x^2$$

bo‘ladi.

Uuqorida aytilganlar Eylerning

$$x^ny^{(n)} + p_1x^{n-1}y^{(n-1)} + p_2x^{n-2}y^{(n-2)} + \dots + p_{n-1}xy' + p_ny = 0 \qquad (14)$$

bir jinsli tenlamasini erkli o‘zgaruvchini almashtirmasdan ($x = e^t$), bevosita integrallashga imkon beradi. Haqiqatdan ham, koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan o‘zgartirilgan tenglamada karrali ildizlar yo‘qligida xususiy yechim e^{rt} ko‘rinishga, ya’ni Eylerning dastlabki tenglamasida $y = x^r$ ko‘rinishga ega. Shuning uchun argumentni o‘zgartirib o‘tirmasdan, darhol Eyler tenglamasining xususiy yechinlarini $y = x^r$ ko‘rinishda izlash mumkin:

$$\frac{d^k(x^k)}{dx^k} = r(r-1)\dots(r-(k-1))x^{r-k},\ (k \le r)$$

bo‘lgani uchun barcha $k \le r$ larda

$$x^k\frac{d^k(x^k)}{dx^k} = r(r-1)\dots(r-(k-1))x^r$$

bo‘ladi.

Bu ifodani (14) tenglamaga qo‘yib va x^r ga qisqartirib, $r-$ni topish uchun $n-$chi darajali algebraik tenglamani hosil qilamiz:

$$r(r-1)\dots(r-(n-1)) + p_1r(r-1)\dots(r-(n-2)) + \dots + p_{n-2}r(r-1) + p_{n-1}r + p_n = 0. \qquad (15)$$

(15) algebraik tenglamani Eyler tenglamasi uchun *xarakteristik tenglama* deyiladi. U o‘zgartirilgan, koeffitsiyentlari o‘zgarmas bo‘lgan tenglama uchun ham xarakteristik tenglama bo‘ladi. Agar (15) tenglama $n-$ta turli $r_1, r_2, \dots, r_n$ ildizlarga ega bo‘lsa, $n-$ta xususiy yechim topiladi. U holda Eyler tenglamasining umumiy yechimi

$$y = C_1x^{r_1} + C_2x^{r_2} + \dots + C_nx^{r_n}$$

funksiya bo‘ladi. $\alpha \ge 1$ karrali r_1 ildizga

$$x^{r_1},\ x^{r_1}\ln x,\ x^{r_1}(\ln x)^2,\ \dots,\ x^{r_1}(\ln x)^{\alpha-1}$$

ko‘rinishdagi α – ta xususiy yechim mos keladi.

Kompleks qo‘shma $a \pm ib$ ildizlar juftiga $x^a \cos(b \ln x)$ va $x^a \sin(b \ln x)$ yechimlar jufti mos keladi.

2-Misol. $x^3 y''' + 2x^2 y'' - xy' + y = 0$ tenglamani yeching.

Yechish. $y = x^r$ almashtirish bojaramiz. U holda

$$y' = rx^{r-1} \Rightarrow xy' = rx^r$$

$$y'' = r(r-1)x^{r-2} \Rightarrow x^2 y'' = r(r-1)x^r$$

$$y''' = r(r-1)(r-2)x^{r-3} \Rightarrow x^3 y''' = r(r-1)(r-2)x^r.$$

Bularni tenglamaga qo‘yib va x^r – ga qisqartirib ushbuga ega bo‘lamiz:

$$r(r-1)(r-2)x^r + 2r(r-1)x^r - rx^r + x^r = 0,$$

$$r(r-1)(r-2) + 2r(r-1) - r + 1 = 0,$$

$$(r-1)^2(r+1) = 0 \Rightarrow r_{1,2} = 1,\ r_3 = -1,$$

ni topamiz. Bu ildizlar 3-ta xususiy yechimni beradi:

$$y_1 = x,\ \ y_2 = x \ln x,\ \ y_3 = x^{-1}.$$

Shunday qilib umumiy yechim ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y = C_1 x + C_2 x \ln x + C_3 x^{-1}.$$

Eyler bir jinsli bo‘lmagan tenglamasini o‘zgarmaslarni variasiyalash yordamida integrallash mumkin. O‘ng qismining ba’zi turlari ($q(x)$ – maxsus ko‘rinishda bo‘lganlari) uchun aniqmas koeffitsiyentlar usulini ham qo‘llanish mumkin, shu bilan birga buni o‘zgarmas koeffitsiyentli tenglamalarga o‘tgandan so‘ng ham, o‘tmasdan ham bajarish mumkin.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. O‘zgaruvchilarigi nisbatan bir jinsli va umumlashgan bir jinsli yuqori tartibli tenglamalarni integrallash.
2. Yechimning davomiyligi. Davomsiz yechimlar.

Glossariy

Yuqori tartibli differensianal tenglama - n tartibli differensianal tenglama umumiy ko‘rinishi $F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0$ kabi yoziladi.

Eyler tenglamasi – Eyler tenglamasi koeffitsientlari o‘zgaruvchan bo‘lgan differensial tenglama bo‘lib, uni koeffitsientlari o‘zgarmas bo‘lgan tenglamaga keltirish mumkin. Ushbu tenglama Eyler tenglamasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching:
$y'' - 5y' + 4y = 0;\ \ y(0) = 5;\ \ y'(0) = 8$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. O‘zgarmaslarni variatsialash usulida umumiy yechim qaysi ko‘rinishda izlanadi?
2. O‘zgarmaslarni variasiyalash usuli qaysi tenglama uchun qaralgan o‘zgarmasni variatsialash usuliga o‘xshaydi?
3. Eyler tenglamasi koeffitsentlari qanday bo‘ladi va uning ko‘rishiniayting?
4. Eyler tenglamasi uchun xarakteristik tenglamasi deb nimaga aytiladi va qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. Eyler tenglamasini umumiy yechimi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Amaliy mashg’ulot-17

1. $yy^1 = \sqrt{y^2+y^{12}}\,y''-y'y''$ j: $y = c_1\dfrac{1+c_2e^x}{1-c_2e^x}$; $y=c$
2. $yy^{11} = y^{12}+y^1\sqrt{y^2+y^{12}}$ j: $x = c_1+\ln\left|\dfrac{y-c_2}{y+c_2}\right|$
3. $y^{12}-yy^{11} = y^2y^1$ j: $x = c_1-\dfrac{1}{c_2}\ln\left|\dfrac{y}{y+c_2}\right|$
4. $yy^{11}+y^{12}-y^{13}\ln y = 0$ j: $x = c_1y^2-y\ln y+c_2$
5. $3y^1y^{11} = y+y^{13}+1;\quad y(0)=-2,\ y'(0)=0$ j: $x = -\dfrac{3}{2}(y+2)^{2/3}$
6. $y^2+y^{12}-2yy^{11}=0;\ \ y(0)=1,\ y^1(0)=1$ j: $y=e^x$
7. $yy^1+y^{12}+yy^{11}=0;\ \ y(0)=1,\ \ y(-1)=0$ j: $y^2=\dfrac{e}{e-1}+\dfrac{e^{-x}}{1-e}$

TEST

a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=1$, $y(0)=0,\ y(1)=0$ masala yechimga ega emas?	$*a=(2\pi-1)\pi^2$	$a=(2\pi-1)\ \pi$	$a=(2\pi-1)^2\pi$	$a=0$
a ning qanday qiymatlarida $y''+ay=f(x)$ $y(0)=0,\ y(1)=0$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasi mavjud bo‘ladi?	$*a\neq k^2\pi^2$	$a=k\pi$	$a=k^2\pi^2$	$a\neq k\pi$
$y''+4y'+3y=0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*\ y=c_1e^{-x}+c_2e^{-3x}$	$y=c_1e^{-x}+c_2e^{3x}$	$y=c_1e^{x}+c_2e^{-3x}$	$y=c_1e^{x}+c_2e^{3x}$
$y''+2y'+10y=0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	* $y=e^{-x}(C_1Cos3x+C_2Sin3x)$	$y=e^{3x}(C_1Cosx+C_2Sinx)$	$y=e^{x}(C_1Cos3x+C_2Sin3x)$	$y=e^{2x}(c_1Cos2x+c_2Sin2x$

$y'' - 2y' + y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$* \ y = (c_1 + c_2 x)e^x$	$y = (c_1 + c_2)e^x$	$y = (c_1 + c_2 x^2)e^x$	$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$
$y'' - 2y' - 3y = x^2 e^x$ tenglamaning bitta xususiy uchimi qanday ko‘rinishda izlanadi.	$* \ y = x(Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = (Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = x^2(Ax + B)e^x$	$y = Ax^2 e^x$
$y'' - 4y' + 8y = Sin2x$ tenglamaning bitta xususiy yechimi qaysi ko‘rinishda bo‘ladi?	$* \ y = ASin2x + BCos2x$	$y = (Ax + B)Sin2x + (cx + B)Cosx$	$y = Ax^2 Sin2x + BxCosx$	$y = x(ASin2x + BCos2x$
a va b ning qanday qiymatlarida $y'' + ay' + by = 0$ tenglamaning yechimlari $-\infty \prec x \prec \infty$ da chegaralangan bo‘ladi?	$*a = 0$ $b > 0$	$a = 0$ $b < 0$	$a > 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b < 0$
a va b ning qanday qiymatlarida $y'' + ay' + by = 0$ tenglamaning hamma yechimlari $x \to +\infty$ da nolga intiladi?	$*a > 0$ $b > 0$	$a = 0$ $b < 0$	$a = 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b < 0$
$x^3 y''' + xy' - y = 0$ Eyler tenglamasini yeching.	* $y = x(c_1 + c_2 \ln\|x\| + c_3 \ln^2\|x\|)$	$y = c_1 + c_2 \ln\|x\| + c_3 \ln^2\|x\|$	$y = x^2(c_1 + c_2 \ln\|x\| + c_3 \ln^2\|x\|)$	$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$

MA'RUZA № 22-23

Mavzu: Chegaraviy masalalarni qo’yilishi.

Grin funksiyasi, xossalari.

Mavzu: Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani sodda ko‘rinishga keltirish.

Chegaraviy masalalar. Grin funksiyasi.

Reja.

1. Chegaraviy masalalar haqida tushuncha.
2. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani sodda ko‘rinishga keltirish.
3. Grin funksyasi, xossalari.
4. Shturm–Liuvill masalasi.

Chegaraviy masalalar haqida tushuncha.

Avval ko‘rilgan diffrensial tenglamalar uchun Koshi masalasi bilan tanishganmiz. Sodda qilib aytganda, Koshi masalasi berilgan nuqtadan o‘tadigan integral egri chiziqni izlashdan iborat edi. Agar integral egri chiziqning berilgan ikki nuqtadan o‘tishi talab etilsa, bu masala Koshi masalasidan farq qilib, berilgan ikki nuqtaning har biri uchun alohida olingan Koshi masalasi yechimiga ega bo‘lsa ham, bu qo‘yilgan masala yechimga ega bo‘lmasligi mumkin.

Birinchi tartibli differensial tenglama uchun masala qisqacha

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1 \tag{1}$$

kabi yozilishi mumkin. Agar $y(x_0) = y_0$ shartni qanoatlantiradigan yechim mavjud bo‘lsa, u yechim $y(x_1) = y_1$ shartni ham qanoatlantiradimi yoki yo‘qmi degan savolga javob berish lozim bo‘ladi. Bu holda tegishli savolga bevosita tekshirish bilan javob berish mumkin. Masalan,

$$y' = \frac{1}{x}, \ y(e) = 1, \ y(1) = 1$$

masala yechimga ega emas. Haqiqatan, $y = \ln x + C$ berilgan tenglamaning umumiy yechimi, $y(e) = 1$ shartga ko‘ra $1 = \ln e + C \Rightarrow C = 0$. Demak, $y = \ln x$ yechim $y(e) = 1$ shartni qanoatlantiradi. Ammo bu funksiya $y(1) = 1$ shartni qanoatlantirmaydi, chunki $y(1) = \ln 1 = 0 \neq 1$. Shunga o‘xshash, ushbu

$$y' = \frac{1}{x}, \ y(e) = 1, \ y(1) = 0$$

masala yechimga ega. Bu yuqoridagi mulohazalardan ko‘rinib turibdi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar uchun

$$y'' = f(x, y, y'), \quad y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1$$

masala qo‘yilishi mumkin. Bu masalada integral egri chiziq (x_0, y_0) nuqtadan qanday y_0'-burchak koeffitsient bilan o‘tishi avvaldan berilgan emas. Misol sifatida ushbu

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \ y(x_1) = y_1$$

masalani tekshiraylik. Berilgan tenglama xarakterstik tenglamasining ildizlari $\pm i$ va umumiy yechim $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ dan iborat. Bundan, $y(0) = 0$ shartni qanoatlantiradigan yechim $y = C_2 \sin x, \ C_1 = 0$ ekani kelib chiqadi. Agar $x_1 = k\pi$ (k-berilgan ixtiyoriy butun son) bo‘lsa, $y(k\pi) = C_2 \sin k\pi = 0$ (C_2-ixtiyoriy bo‘lganda ham). Agar $x_1 \neq k\pi$ bo‘lsa, u holda $y_1 = C_2 \sin x_1$ dan $C_2 = \dfrac{y_1}{\sin x_1}, \ \sin x_1 \neq 0$ tegishli yechim $y = \dfrac{y_1}{\sin x_1} \sin x$ dan iborat. Ko‘rilayotgan masala yechimga ega. Ammo $y(0) = 0, \ y(\frac{\pi}{2}) = 0$ shartlarni qanoatlantiradigan trivial bo‘lmagan yechim esa mavjud emas. Buning isboti $C_2 \neq 0$ bo‘lganda $C_2 \sin \frac{\pi}{2} = C_2 \neq 0$ dan ko‘rinadi. Agar berilgan chiziqli tenglamaning trivial $y = 0$ yechimni olsak, bu yechim uchun $y(0) = 0, \ y(x_1) = 0$ (x_1- berilgan ixtiyoriy son) shartlar qanoatlantiriladi.

Yuqorida qo‘yilgan va Koshi masalasidan farq qiladigan masala ikki nuqtali chegaraviy yoki baribir, chetki masala deb yuritiladi. Masala bundan umumiyroq ko‘rinishda ham qo‘yilishi mumkin.

Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamani sodda ko‘rinishga keltirish.

Ushbu

$$y'' + p_1(x) y_1 + p_2(x) y = \varphi(x) \tag{2}$$

tenglamaning

$$y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1 \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiradigan yechimini topish masalasi (2) tenglama uchun ikki nuqtali chegaraviy masala deb yuritiladi. (2)-(3) masalani o‘zgaruvchini almashtirish bilan sodda ko‘rinishga keltirish mumkin. Chunonchi,

$$z = y - y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0), \ x \neq x_1$$

deb almashtirish bajarsak, $z(x_0) = 0, \ z(x_1) = 0$ ga ega bo‘lamiz. Bu almashtirish natijasida tenglama yana ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga o‘tadi. Bunga bevosita hisoblash bilan hosil qilish mumkin.

Ko‘pincha (2) tenglamani tekshirishga qulay bo‘lgan boshqa kurinishda yoziladi. Agar

(2) ning ikki tomonini $e^{\int p(x)dx}$ funksiyaga ko‘paytirsak,

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = f(x) \tag{4}$$

ko‘rinishdagi tenglamaga ega bo‘lamiz. Yuqoridagi mulohazani e'tiborga olib, (4) tenglama uchun

$$y(x_0) = 0, \quad y(x_1) = 0 \tag{5}$$

shartni qanoatlantiradigan yechimni topish masalasini qo‘yishimiz mumkin.

Agar $f(x) \neq 0$ bo‘lsa, (4)-(5) masala bir *jinsli bo‘lmagan*, $f(x) = 0$ bo‘lganda esa *bir jinsli* masala deb yuritiladi.

Grin funksyasi, xossalari.

(4)-(5) masala uchun Grin funksiyasi.

Ikki argumentli $G(x,s)$ funksiya quyidagi to‘rtta shartni qanoatlantirsin:

1^{o}. $G(x,s)$ funksiya x bo‘yicha $x_0 \le x \le x_1$ intervalda uzluksiz bo‘lib, s - tayinlangan va $x_0 < s < x_1$;

2^{o}. $G(x,s)$ funksiya $x_0 \le x \le x_1$ intervalda $x \neq s$ dan boshqa barcha nuqtalarda ushbu $\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0$ bir jinsli tenglamaning yechimidan iborat;

3^{o}. $G(x,s)$ funksiya $G(x_0,s) = G(x_1,s) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi;

4^{o}. $x = s$ nuqtada $G'_x(x,s)$ hosila birinchi tur uzilishga ega bo‘lib, uning sakrashi $\frac{1}{p(s)}$ ga teng, ya'ni $G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}$ yoki $G'_x(s,s+0) - G'_x(s,s-0) = -\frac{1}{p(s)}$;

u holda $G(x,s)$ funksiya qo‘yilgan (4)-(5) chegaraviy masalaning *Grin funksiyasi* deyiladi.

1-teorema. *(Gilbert teoreması) Agar (4)-(5) masalaning Grin funksiyasi ma'lum bo‘lsa, bu masalaning yechimi,*

$$y = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s) f(s) ds \tag{6}$$

formula bilan yoziladi, aksincha agar $y = y(x)$) funksiya qo‘yilgan masalaning yechimi bo‘lsa, uni (6) ko‘rinishda ıfodalash mumkin (bu yerda $f(x)$ - uzluksiz funksiya).

Endi qo‘yilgan masalaning Grin funksiyasini tuzish bilan shug‘ullanamiz. Bundan Grin funksiyasining mavjudligini ta'minlaydigan yetarli shartlar kelib chiqadi.

Ushbu

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0 \tag{7}$$

bir jinsli tenglamaning $y(x_0) = 0$, $y(x_1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan yechimi $y \equiv 0$ bo‘lsin.

(7) tenglamanig $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = y'_0 \neq 0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan yechimini $y_1(x)$ deb belgilaylik, bunday yechim mavjud, chunki, p, p' va q lar x_0 nuqta atrofida uzluksiz.

Bu yechim, umuman olganda, ikkinchi $y(x_1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantirmaydi. Ma'lumki, $y = C_1 y_1(x)$ (bu yerda C_1-ixtiyoriy o‘zgarmas son) funksiya $y(x_0) = 0$ chegaraviy shartni qanoatlantiradi. Xuddi shunga o‘xshash tenglamaning $y(x_1) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradigan trivial bo‘lmagan yechimi $y_2(x)$ ni topamiz. $C_2 y_2(x)$ ham $y(x_1) = 0$ chegaraviy shartni qanoatlantiradi (bu yerda C_2-ixtiyoriy o‘zgarmas son).

Grin funksiyasini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1 y_1(x), & x_0 \le x \le s, \\ C_2 y_2(x), & s \le x \le x_1. \end{cases}$$

Bu yerdagi C_1 va C_2 larni shunday topamizki, Grin funksiyasi 1^o va 4^o shartlarni qanoatlantirsin, ya'ni 1^o $G(x,s)$ funksiya tayinlangan s uchun x bo‘yicha uzluksiz bo‘lsin, xususiy holda $x=s$ da ham uzluksiz:

$$C_1 y_1(s) - C_2 y_2(s) = 0 \tag{8}$$

va 4^o $G(x,s)$ funksiya $x=s$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega bo‘lib, uning sakrashi $\dfrac{1}{p(s)}$ ga teng bo‘lsin, ya’ni

$$C_2 y_2(s) - C_1 y_1(s) = \frac{1}{p(s)} \tag{9}$$

Ravshanki $y_1(x)$ funksiya bilan chiziqli bog‘liq bo‘lgan funksiyalar $C_1 y_1(x)$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. $y_1(x_1) \ne 0$ bo‘lganidan $C_1 y_1(x_1) \ne 0, (C_1 \ne 0)$ bo‘ladi. Shu bilan birga $y_2(x_1)=0$ bulardan $y_1(x)$ va $y_2(x)$ larning chiziqli erkliligi kelib chiqadi. Demak, mos Vronskiy determenanti $W(x)=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$ tekshirilayotgan $x=s$ nuqtada noldan farqli bo‘ladi. Shuning uchun (8)-(9) sistemadan C_1 va C_2 larni topamiz.

$$C_1 = \frac{y_2(s)}{W(s)p(s)}, \quad C_2 = \frac{y_1(s)}{W(s)p(s)}.$$

Bularni etiborga olsak Grin funksiyasi

$$G(x,s)=\begin{cases} \dfrac{y_2(s)y_1(x)}{W(s)p(s)}, & x_0 \le x \le s, \\ \dfrac{y_1(s)y_2(x)}{W(s)p(s)}, & s \le x \le x_1. \end{cases}$$

ko‘rinishga ega bo‘ladi. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ xususiy yechimlarni shunday tanlash mumkinki, natijada $W(s)p(s)=1$ bo‘ladi. Bu holda qo‘yilgan masalaning Grin funksiyasi

$$G(x,s)=\begin{cases} y_2(s)y_1(x), & x_0 \le x \le s, \\ y_1(s)y_2(x), & s \le x \le x_1. \end{cases}$$

formula bilan beriladi. Bu formuladan qo‘yilgan masala uchun Grin funksiyasining simmetrikligi ko‘rinib turibdi.

Misol. Quyidagi

$$y'' + y = f(x), \qquad y(0)=0, \ y(\frac{\pi}{2})=0$$

chegaraviy masalaning Grin funksiyasini toping.

Yechish. Eng avval $y''+y=0$ tenglamaning $y(0)=0$ shartni qanoatlantiruvchi $y_1 = C_1 \sin x$ yechimini topamiz. So‘ngra shu bir jinsli tenglamaning $y(\frac{\pi}{2})=0$ shartni qanoatlantiruvchi $y_2 = C_2 \cos x$ yechimini topamiz. U holda Grin funksiyasini quyidagi ko‘rinishda izlaymiz:

$$G(x,s)=\begin{cases} C_1 \sin x, & 0 \le x \le s, \\ C_2 \cos x, & s \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Grin funksiyasi $x=s$ nuqtada uzluksiz bo‘lgani uchun

$$C_1 \sin s - C_2 \cos s = 0$$

munosabatga, hosilasi esa $x = s$ nuqtada uzilishga ega bo‘lgani uchun $p(x) = 1$ ni hisobga olsak,

$$-C_2 \sin s - C_1 \cos s = 1$$

munosabatga egamiz. Bu ikki tenglamalar sistemasidan $C_1 = \cos s,\ \ C_2 = \sin s$ larni hosil qilamiz. Demak, qo‘yilgan masalaning Grin funksiyasi,

$$G(x,s) = \begin{cases} -\cos s \sin x, & 0 \le x \le s, \\ -\sin s \cos x, & s \le x \le \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Eslatma. Biz

$$\left(p(x)y'\right)' + q(x)y = 0$$

tenglamaning $y(x_0) = 0,\ \ y(x_1) = 0$ shartlarni qanoatlantiruvchi trivial bo‘lmagan yechimi mavjud emas deb faraz qildik. Bu shart qo‘yilgan (4)-(5) masala yechimining mavjudligini va yagonaligini ta'minlash bilan birga, qo‘yilgan masala Grin funksiyasining yagonaligini ham ta'minlaydi.

Shturm-Liuvill masalasi.

Shturm-Liuvill masalasi quyidagicha qo‘yiladi:

Parametr λ ning shunday qiymatlari topilsinki, u qiymatlarda ushbu

$$L[y] = \lambda y, \qquad y(x_0) = y(x_1) = 0 \tag{10}$$

chegaraviy masala aynan nolga teng bo‘lmagan yechimga ega bo‘lsin.

Parametr λ ning tegishli qiymatlari mavjud bo‘lsa, uni (10) masalaning *xos sonlari*, unga mos yechimni esa *xos funksiyalari* deyiladi.

Shturm-Liuvill masalasiga bitta misol keltiramiz. Ushbu

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = y(1) = 0 \tag{11}$$

masala qo‘yilgan bo‘lsin.

a) $\lambda > 0$ bo‘lsin. Ma'lumki, $y'' + \lambda y = 0$ tenglamaning umumiy yechimi

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

bo‘ladi. $y(0) = 0$ chegaraviy shartdan $A = 0$ kelib chiqadi. $y(1) = 0$ chegarviy shartdan $\sin\sqrt{\lambda} = 0,\ \ \lambda_n = n^2\pi^2\,(n = 0,1,2,...)$ kelib chiqadi. Bu holda masalaning yechimi ($n \neq 0$ bo‘lganda yechim trivialmas) $y_n = B_n \sin \pi x,\ \ n = 1,2,...$ bo‘ladi.

b) $\lambda = 0$ bo‘lsin. (11) tenglamaning umumiy yechimi $y = Ax + B$ bo‘ladi. $y(0) = y(1) = 0$ chegaraviy shartlardan $A = B = 0$ kelib chiqadi. Demak, (11) tenglamaning tegishli shartlarni qanoatlantiradigan trivialmas yechimi mavjud emas.

c) $\lambda < 0$ bo‘lsin. (11) tenglamaning umumiy yechimi $y = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$ bo‘ladi. chegaraviy shartlardan $A + B = 0,\ \ Ae^{\sqrt{-\lambda}} + Be^{-\sqrt{-\lambda}} = 0$ kelib chiqadi. Bu sistemadan $A = B = 0$ ni topamiz.

Demak, yechim $y \equiv 0$. Yuqorida ko‘rilgan uchta holga ko‘ra quyidagi xulosaga kelamiz: $\lambda_n = n^2\pi^2\,(n = 0,1,2,...)$ bo‘lsa, (11) masala cheksiz ko‘p $y_n = B_n \sin \pi x,\ \ n = 1,2,...$ yechimlarga ega. Agar $\lambda_n \neq n^2\pi^2$ bo‘lsa, (11) masala faqat trivial yechimga ega. $\lambda_n = n^2\pi^2\,(n = 0,1,2,...)$ lar (11) masalaning xos qiymatlari, ularga mos keluvchi $y_n\ \ (n = 0,1,2,...)$ funksiyalar esa (11) masalaning xos funksiyalari bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. $n-$ tartibli chiziqli differensial tenglamalar va ularning umumiy xossalari.
2. Yechimni cheksiz davom ettirish haqida teorema.

Glossariy

Ikki nuqtali chegaraviy masala **-** Ushbu

$$y'' + p_1(x)y_1 + p_2(x)y = \varphi(x) \tag{2}$$

tenglamaning

$$y(x_0) = y_0, \;\; y(x_1) = y_1 \tag{3}$$

shartlarni qanoatlantiradigan yechimini topish masalasi (2) tenglama uchun ikki nuqtali chegaraviy masala deb yuritiladi.

Grin funksiyasi **-** Ikki argumentli $G(x,s)$ funksiya quyidagi to‘rtta shartni qanoatlantirsin.

1°. $G(x,s)$ funksiya x bo‘yicha $x_0 \le x \le x_1$ intervalda uzluksiz bo‘lib, s - tayinlangan va $x_0 < s < x_1$

2°. $G(x,s)$ funksiya $x_0 \le x \le x_1$ intervalda $x \ne s$ dan boshqa barcha nuqtalarda ushbu $(py')' + qy = 0$ bir jinsli tenglamaning yechimidan iborat.

3°. $G(x,s)$ funksiya $G(x_0,s) = G(x_1,s) = 0$ chegaraviy shartlarni qanoatlantiradi.

4°. $x = s$ nuqtada $G'_x(x,s)$ xosila birinchi tur uzilishga ega bo‘lib, uning sakrashi $\frac{1}{p(s)}$ ga teng, ya'ni $G'_x(s+0,s) - G'_x(s-0,s) = \frac{1}{p(s)}$ yoki $G'_x(s,s+0) - G'_x(s,s-0) = -\frac{1}{p(s)}$ bu xolda $G(x,s)$ funksiya qo‘yilgan (4)-(5) chegaraviy masalaning Grin funksiyasi deb ataladi.

Gilbert teoremasi - Agar (4)-(5) masalaning Grin funksiyasi ma'lum bo‘lsa, bu masalaning yechimi,

$$y = \int_{x_0}^{x_1} G(x,s)f(s)ds \tag{6}$$

formula bilan yoziladi, aksincha agar $y = y(x)$) funksiya qo‘yilgan masalaning yechimi bo‘lsa, uni (6) ko‘rinishda ifodalash mumkin. (bu yerda $f(x)$ - uzluksiz funksiya)

Shturm-Liuvill masalasi – masala quyidagicha qo‘yiladi:
Parametr λ ning shunday qiymatlari topilsinki, u qiymatlarda ushbu

$$L[y] = \lambda y, \;\; y(x_0) = y(x_1) = 0$$

chegaraviy masala aynan nolga teng bo‘lmagan yechimga ega bo‘lsin.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Birinchi tartibli differensial tenglama uchun masala qanday ko'rinishda yoziladi?
2. Ikki nuqtali chegaraviy masala deb nimaga aytiladi va u qanday ko'rinishda yoziladi?
3. Bir jinsli masala deb nimaga aytiladi?
4. Grin funksiyasi uchun ikki argumentli G(x,c) funksiya qanoatlantiruvchi shartlarni ayting?
5. (Grin fu) Shturli-Liuvil masalasi qanday qo'yiladi?

Amaliy mashg'ulot-18

1. $2y^1+(y^{12}-6x)y^{11}=0;\quad y(2)=0,\ y^1(2)=2$ j: $y=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}x^{\frac{3}{2}}-\dfrac{8}{3}$
2. $y^1y^2+yy^{11}-y^{12}=0;\quad y(0)=1;\ y^1(0)=2$ j: $y=\dfrac{3e^{3x}}{2+e^{3x}}$
3. $y^1=xy''^2+y''^2$ j: $y=\dfrac{(x+c_1^2+1)^2}{2}+\dfrac{4}{3}c_1(x+1)^{\frac{3}{2}}+c_2;\ y=c$
4. $y'=xy''+y''-y''^2$ j: $y=c_1\dfrac{x^2}{2}+(c_1-c_1^2)x+c_2;\ y=\dfrac{(x+1)^3}{12}+c$
5. $y'y'''=3(y'')^2$ j: $x=c_1y^2+c_2y+c_3$
6. $y'''\left[1+y^{12}\right]=3y'(y'')^2$ j: $(x+c_2)^2+(y+c_3)^2=c_1^2$
7. $(y'')^2-y'y'''=\left(\dfrac{y'}{x}\right)^2$ j: $y=c_2\left(xe^{c_1x}-\dfrac{1}{c_1}e^{c_1x}\right)+c_3$

TEST

$(2x+1)y''+4xy'-4y=0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.	$*e^{-2x}$	e^{-2x^2}	e^{x}	x^3
Ushbu $(x-a)^2+by^2=1$ chiziqlar oilasi qaysi diffirensial tenglamaning yechimi?	$*(yy''+y'^2)^2=-y^3y''$	$2yy''+y'^2=\sqrt{yy''}$	$yy''+y'^2=0$	Hech birining yechimi emas
$y=a(x)z$ almashtrish yordamida $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$ tenglamada birinchi tartibli yoqotib soddalashtring.	$*z''+z=0$	$z''-z=0$	$z''+4z=0$	$z''-4z=0$
Yechimni $y_1=ax+b$ ko'rinishda izlab,	$*\ y_1=x$	$y_1=2x+1$	$y_1=2x-1$	$y_1=x+2$

$x^2y''\ln x - xy' + y = 0$ tenglamaning bitta xususiy yechimini toping.				
a ning qanday qiymatlarida $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ masala yechimga ega emas?	$*a = (2\pi - 1)\pi^2$	$a = (2\pi - 1)\ \pi$	$a = (2\pi - 1)^2\pi$	$a = 0$
a ning qanday qiymatlarida $y'' + ay = f(x)$ $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasi mavjud bo‘ladi?	$*a \neq k^2\pi^2$	$a = k\pi$	$a = k^2\pi^2$	$a \neq k\pi$
$y'' + 4y' + 3y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*\ y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$	$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$	$y = c_1e^{x} + c_2e^{-3x}$	$y = c_1e^{x} + c_2e^{3x}$
$y'' + 2y' + 10y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*$ $y = e^{-x}(C_1Cos3x + C_2Sin3x)$	$y = e^{3x}(C_1Cosx + C_2Sinx)$	$y = e^{x}(C_1Cos3x + C_2Sin3x)$	$y = e^{2x}(c_1Cos2x + c_2Sin2x$
$y'' - 2y' + y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*\ y = (c_1 + c_2x)e^x$	$y = (c_1 + c_2)e^x$	$y = (c_1 + c_2x^2)e^x$	$y = c_1e^x + c_2e^{-x}$
$y'' - 2y' - 3y = x^2e^x$ tenglamaning bitta xususiy uchimi qanday ko‘rinishda izlanadi.	$*\ y = x(Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = (Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = x^2(Ax + B)e^x$	$y = Ax^2e^x$
$y'' - 4y' + 8y = Sin2x$ tenglamaning bitta xususiy yechimi qaysi ko‘rinishda bo‘ladi?	$*\ y = ASin2x + BCos2x$	$y = (Ax + B)Sin2x + (cx + B)Cosx$	$y = Ax^2Sin2x + BxCosx$	$y = x(ASin2x + BCos2x$

MA'RUZA: № 24

Mavzu: Differensial tenglamalarning normal sistemalari.

Reja:

1.Normal sistema.
2.Yechim, xususiy yechim va umumiy yechim tushunchalari.
3.Mavjudlik va yagonalik teoremasi.
4.Normal sistemalarni yechish haqida lemma.
5.Misollar.

Tayanch so’z va iboralar: *normal sistemasi, normal sistemasini yechimi, xususiy yechimi va umumiy yechimi tushunchasi, normal sistemalar uchun Koshi masalasi yechimining mavjudligi va yagonaligik haqida teorema, normal sistemalar yechimi haqidagi lemma.*

Ba'zi jarayonlar yoki hodisalarni tavsiflash uchun ko‘pincha bir necha funksiya talab etiladi. Bu funksiyalarni izlash sistema tashkil etadigan bir nechta differensial tenglamaga olib kelishi mumkin. Birinchi tartibli differensial tenglamalar sistemasini yuqori tartibli bitta differensial tenglamadan yordamchi funksiyalar kiritish yo‘li bilan ham hosil qilish mumkin.

Haqiqatan ham,

$$y^{(n)} = f(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{1}$$

tenglama yuqori hosilaga nisbatan yechilgan $n-$tartibli differensial tenglama bo‘lsin.

Quyidagicha belgilaylik:

$$y = y_1$$
$$y' = y_1' = y_2$$
$$y'' = y_2' = y_3$$
$$..................$$
$$y^{(n-1)} = y_{n-1}' = y_n$$
$$y^{(n)} = y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n)$$

Shunday qilib, $n-$tartibli 1 ta tenglamadan quyidagi birinchi tartibli $n-$ta differensial tenglamalar sistemasi hosil bo‘ldi:

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ .... \\ y_{n-1}' = y_n \\ y_n' = f(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{2}$$

Hosil qilingan tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_2' = f_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ .... \\ y_{n-1}' = f_{n-1}(x, y_1, y_2, ..., y_n) \\ y_n' = f_n(x, y_1, y_2, ..., y_n) \end{cases} \tag{3}$$

sistemaning xususiy holidan iborat. Bunday sistema (3) differensial tenglamalarning *normal sistemasi* deyiladi. Bunda tenglamalar soni noma’lum funksiyalar soniga teng deb faraz qilinadi.

(3) sistemani *yechimi* deb, sistemaning hamma tenglamalarini qanoatlantiradigan $n-$ta $y_1, y_2, ..., y_n$ funksiyalar to‘plamiga aytiladi.

(3) sistemaning *xususiy yechimi* deb ushbu $x = x_0$ da

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ ...,\ y_n(x_0) = y_{n0}, \tag{4}$$

(bu yerda $x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$ $-$berilgan sonlar) boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiradigan yechimga aytiladi.

$y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$ $-$sonlarni ixtiyoriy $C_1, C_2, ..., C_n$ o‘zgarmaslar bilan almashtirib, (3) sistemaning $n-$ta ixtiyoriy o‘zgarmasga bog‘liq bo‘lgan umumiy uchimini hosil qilamiz.

(3) normal sistema uchun Koshi masalasining mavjudligi va yagonaligi to‘g‘risidaga teorema o‘rinlidir.

TEOREMA (Mavjudlik va yagonalik teoremasi). *Agar (3) normal sistema tenglamalarining o‘ng tomonlari o‘zlarining xususiy hosilalari, ya’ni* $f_1, f_2, ..., f_n, \frac{\partial f_i}{\partial y_j}, i, j = \overline{1, n}$ *bilan birgalikda* $x_0, y_{10}, y_{20}, ..., y_{n0}$ *$-$qiymatlarning atroflarida uzluksiz bo‘lsa, u holda*

$$y_1(x_0) = y_{10},\ y_2(x_0) = y_{20},\ ...,\ y_n(x_0) = y_{n0}$$

shartlarni qanoatlantiruvchi yagona $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ *yechim mavjuddir.*

Oldin keltirilgan $n-$tartibli differensial tenglama yechimining mavjudlik va yagonalik teoremasi bu teoremaning xususiy holidir.

$n-$tartibli 1 ta differensial tenglama tenglamalarning normal sistemasiga keltirilishi mumkinligi yuqorida ko‘rsatilgan edi. Umuman aytganda, buning aksi ham o‘rinli, ya'ni

Lemma. *Birinchi tartibli* $n-$*ta differensial tenglamaning normal sistemasi* $n-$*tartibli 1-ta differensial tenglamaga ekvivalentdir.*

Isbot. Haqiqatan ham, (3) sistema tenglamalaridan ixtiyoriy birini olamiz va uning ikkala qismini x bo‘yicha differensiallaymiz. Natijada (misol uchun 1-tenglamani olamiz)

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx}+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}\frac{dy_2}{dx}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\frac{dy_n}{dx}$$

va $\frac{dy_i}{dx}=y_i'$ $(i=\overline{1,n})$ hosilalarni ularning $f_i(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)$ ifodalari bilan almashtirsak,

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_1}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial f_1}{\partial y_2}f_2+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial y_n}f_n,$$

ya'ni

$$\frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \tag{5}$$

ko‘rinishdagi tenglikni hosil qilamiz. (5) tenglikni (3) sistemani e’tiborga o‘lib differensiallash natijasida quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=\frac{\partial F_2}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y_1}f_1+\frac{\partial F_2}{\partial y_2}f_2+\ldots+\frac{\partial F_2}{\partial y_n}f_n,$$

yoki

$$\frac{d^3y_1}{dx^3}=F_3(x,y_1,y_2,\ldots,y_n). \tag{6}$$

Xuddi shunday davom ettirib quyidagini hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{d^4y_1}{dx^4}=F_4(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}=F_{n-1}(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ \frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\end{array}\right\}. \tag{7}$$

Hosil bo‘lgan tenglamalarni (3) sistemaning birinchi tenglamasi bilan qo‘shib yozamiz, natijada ushbu yangi sistemani hosil qilamiz:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{dy_1}{dx}=f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ \frac{d^2y_1}{dx^2}=F_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \frac{d^ny_1}{dx^n}=F_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n)\end{array}\right\} \tag{8}$$

(8)-chi sistemaning birinchi $n-1$ ta tenglamasidan, umuman aytganda, $(n-1)$ ta noma'lum $y_2,y_3,\ldots,y_n$ funksiyalarni y_1 funksiya va uning $n-1$ gacha (u ham kiradi) hosilalari orqali ifodalash mumkin, ya'ni

$$\begin{cases}y_2=g_2(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n-1)})\\ y_3=g_3(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n-1)})\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n=g_n(x,y_1,y_1',\ldots,y_1^{(n-1)})\end{cases} \tag{*}$$

Bu ifodalarni (8) tenglamalarning oxirgisiga qo‘yib, noma'lum y_1 funksiyaga nisbatan $n-$chi tartibli bo‘lgan bitta

$$\frac{d^n y_1}{dx^n} = \Phi\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}\right) \tag{9}$$

differensial tenglamaga kelamiz.

Agar (9) sistemaning umumiy yechimini $y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ ko‘rinishda yozsak, qolgan funksiyalarni topish mumkin, buning uchun (8) sistemaning dastlabki $(n-1)$ ta tenglamasidan topilgan $y_2, y_3, \ldots, y_n$ larning hosilalari uchun topilgan (10) ifodani qo‘yish kerak. Shunday qilib, ushbu funksiyalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} y_1 = \varphi_1(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ y_2 = \varphi_2(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = \varphi_n(x, C_1, C_2, \ldots, C_n) \end{cases} \tag{11}$$

Bu (11) funksiyalar sistemasi (3) differensial tenglamalar sistemasining umumiy yechimi bo‘ladi.

Misollar.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^2}{z} \\ \dfrac{dz}{dx} = y \end{cases}$$

differensial tenglamalar sistemasini yeching.

Yechish. Sistemaning 2-chi tenglamasini differensiallab quyidagini hosil qilamiz:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{dy}{dx}.$$

$\frac{dy}{dx}-$ni uning birinchi tenglamadagi ifodasi bilan almashtiramiz, ya'ni $\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{z}$. U holda

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{y^2}{z}.$$

Nixoyat, 2-chi tenglamaga ko‘ra $y-$ni $\frac{dz}{dx}$ bilan almashtirib, bir noma'lumli 2-chi tartibli tenglamaga ega bo‘lamiz:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = \frac{\left(\frac{dz}{dx}\right)^2}{z},$$

ya’ni

$$z'' = \frac{z'^2}{z}.$$

Bu tenglamada erkli o‘zgaruvchi x oshkor qatnashmaydi, shuning uchun uni tartibini pasaytirish mumkin ($z' = p(z)$ almashtirish bajarib(3-tur)). Biroq uni $zz'' - z'^2 = 0$ ko‘rinishda yozib olib va tenglikning ikkala qismini z^2 ga bo‘lib, chap tomon aniq hosiladan iboratligini ko‘ramiz. Haqiqatan ham,

$$\left(\frac{z'}{z}\right)' = \frac{zz'' - z'^2}{z^2}$$

va bu tenglamamiz $\left(\dfrac{z'}{z}\right)' = 0$ ko‘rinishga ega bo‘ladi, bu yerdan

$$\frac{z'}{z} = C_1 \Rightarrow z' = C_1 z .$$

Topilgan oraliq integraldan o‘zgaruvchilarni ajratib va integrallab, z – ni hosil qilish oson, bu bizga z funksiyaning x va 2 ta ixtiyoriy o‘zgarmas qatnashgan ifodasini beradi:

$$\frac{dz}{z} = C_1 dx \Rightarrow \ln|z| = C_1 x + \ln C_2 \Rightarrow z = C_2 e^{C_1 x} .$$

$y = \dfrac{dz}{dx}$ bo‘lgani uchun z ning ifodasini differensiallab

$$y = C_1 C_2 e^{C_1 x}$$

ni hosil qilamiz. Shunday qilib, sistemaning umumiy yechimi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y = C_1 C_2 e^{C_1 x}, \quad z = C_2 e^{C_1 x} .$$

2-misol. Ushbu differensial tenglamalar sistemasini

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = 2y - z \end{cases}$$

$$y|_{x=0} = 2\sqrt{3}, \quad z|_{x=0} = 0$$

boshlang‘ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini toping.

Yechish. Sistemaning 2-tenglamasini x bo‘yicha differensiallaymiz:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 2\frac{dy}{dx} - \frac{dz}{dx} .$$

$\dfrac{dy}{dx}$ – ni 1-tenglamaga ko‘ra $y + z$ bilan almashtiramiz:

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 2(y + z) - \frac{dz}{dx},$$

yoki

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = 2y + 2z - z' .$$

2-chi tenglamaga ko‘ra $2y$ – ni $\dfrac{dz}{dx} + z$ ga almashtiramiz: $\dfrac{d^2 z}{dx^2} = 3z$. Natijada chiziqli bir jinsli differensial tenglamani hosil qilamiz: $\dfrac{d^2 z}{dx^2} - 3z = 0$. Uning xarakteristik tenglamasi $r^2 - 3 = 0$ bo‘lib, u $r_1 = \sqrt{3}$, $r_2 = -\sqrt{3}$ ildizlarga ega. U holda umumiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$z = C_1 e^{\sqrt{3}x} + C_2 e^{-\sqrt{3}x} .$$

Uni x bo‘yicha differensiallab, $\dfrac{dz}{dx} = C_1\sqrt{3}e^{\sqrt{3}x} - C_2\sqrt{3}e^{-\sqrt{3}x}$ ni hosil qilamiz. Sistemaning 2-chi tenglamasiga ko‘ra $y = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{dz}{dx} + z\right)$ bo‘lgani uchun

$$y = \frac{C_1}{2}(1 + \sqrt{3})e^{\sqrt{3}x} + \frac{C_2}{2}(1 - \sqrt{3})e^{-\sqrt{3}x}$$

ni hosil qilamiz.

Shunday qilib, sistemaning umumiy yechimi topildi:

$$y=\frac{C_1}{2}(1+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}x}+\frac{C_2}{2}(1-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}x},\quad z=C_1e^{\sqrt{3}x}+C_2e^{-\sqrt{3}x}.$$

Xususiy yechimni topish uchun C_1 va C_2 larning ularga mos qiymatlarini boshlang'ich shartlardan foydalanib topamiz:

$$\begin{cases} C_1\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}+C_2\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3} \\ C_1+C_2=0 \end{cases}.$$

Bu yerdan $C_1=2,\ C_2=-2$. Demak, berilgan sistemaning xususiy yechimini quyidagi funksiyalar sistemasidan iborat bo'ladi:

$$y=(1+\sqrt{3})e^{\sqrt{3}x}-(1-\sqrt{3})e^{-\sqrt{3}x}=2sh\sqrt{3}x+2\sqrt{3}ch\sqrt{3}x,$$
$$z=2e^{\sqrt{3}x}-2e^{-\sqrt{3}x}=4sh\sqrt{3}x.$$

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние диффeрциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Umumiy yechimning xossalari. Mavjudlik va yagonalik teoremasi.
2. yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bog'liqligi haqida teorema.

Glossariy

Normal sistema - $\begin{cases} y_1^1=f_1(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \\ y_2^1=f_2(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \\ -------------- \\ y_n^1=f_n(x,y_1,y_2,\ldots,y_n) \end{cases}$ sistemaning xususiy xolidan iborat. Bunday sistema (3) differensial tenglamalarning normal sistemasi deyiladi.

Normal Sistema umumiy yechimi - (3) sistemani uchimi deb, sistema ning xamma tenglamasini qanoatlantiradigan n-ta $y_1,y_2,\ldots,y_n$ funksiya to'plamiga aytiladi.

Normal sistema xususiy yechimi - sistemaning xususiy yechimi deb ushbu $x=x_o$ da

$$y_1=y_{10},\ y_2=y_{20},\ldots,y_n=y_{no}$$

(bu yerda x_0, y_{10} , $y_2,y_{20},\ldots,y_n,y_{no}$-berilgan sonlar)
Boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan yechimga aytiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $(3x+2)y''+7y'=0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglamalarning normal sistemasi deb nimaga aytiladi?

2. $\left\{\begin{array}{l} y_1^1 = f_1(x_1 y_1 y_2, \ldots yn) \\ y_2^1 = f_2(x_1 y_1 y_2, \ldots, yn) \\ y_n^1 = f_n(x_1 y_1 y_2, \ldots, y_n) \end{array}\right\}$ sistemaning yechimi deb nimaga aytiladi?
3. Mavjudlik va yagonalik haqidagi teoremani ayting?
4. Normal sistemalarning yechish haqidagi immani ayting?
5. $\dfrac{d^2 g'}{dx^2} = 2\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{dg'}{dx}$ ni x bo‘yicha differensiallang?

Amaliy mashg’ulot-19

1. $x^2(y^{12} - 2yy'') = y^2$ j: $y = c_2 x(\ln c_1 x)^2;\ \ y = cx$
2. $xyy'' = y'(y + y')$ j: $\ln|y| = \ln|x^2 - 2x + c_1| + \int \dfrac{2dx}{(x-1)^2 + q - 1} + c_2;\ y = c$
3. $4x^2 y^3 y'' = x^2 - y^4$ j: $4c_1 y^2 = 4x + x(c_1 \ln c_2 x)^2$
4. $x^3 y'' = (y - xy')(y - xy' - x)$ j: $y = -x\ln(c_2 \ln c_1 x);\ \ y = cx$
5. $\dfrac{y^2}{x^2} + y^{1^2} = 3xy'' + \dfrac{2yy''}{x}$ j: $\dfrac{y}{x} = c_2 - 3\ln\left|\dfrac{1}{x} - c_1\right|;\ \ y = cx$

TEST

$y'' + 2y' + 10y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	* $y = e^{-x}(C_1 Cos3x + C_2 Sin3x)$	$y = e^{3x}(C_1 Cosx + C_2 Sinx)$	$y = e^{x}(C_1 Cos3x + C_2 Sin3x)$	$y = e^{2x}(c_1 Cos2x + c_2 Sin2x$
$y'' - 2y' + y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	* $y = (c_1 + c_2 x)e^x$	$y = (c_1 + c_2)e^x$	$y = (c_1 + c_2 x^2)e^x$	$y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$
$y'' - 2y' - 3y = x^2 e^x$ tenglamaning bitta xususiy uchimi qanday ko‘rinishda izlanadi.	* $y = x(Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = (Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = x^2(Ax + B)e^x$	$y = Ax^2 e^x$
$y'' - 4y' + 8y = Sin2x$ tenglamaning bitta xususiy yechimi qaysi ko‘rinishda bo‘ladi?	* $y = ASin2x + BCos2x$	$y = (Ax + B)Sin2x + (cx + B)Cosx$	$y = Ax^2 Sin2x + BxCosx$	$y = x(ASin2x + BCos2x$
a va b ning qanday qiymatlarida $y'' + ay' + by = 0$ tenglamaning yechimlari $-\infty \prec x \prec \infty$ da chegaralangan bo‘ladi?	*$a = 0$ $b > 0$	$a = 0$ $b < 0$	$a > 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b < 0$
a va b ning qanday qiymatlarida $y'' + ay' + by = 0$ tenglamaning hamma yechimlari $x \to +\infty$ da nolga intiladi?	*$a > 0$ $b > 0$	$a = 0$ $b < 0$	$a = 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b < 0$
$x^3 y''' + xy' - y = 0$ Eyler	*	$y = c_1 + c_2 \ln\|x\| + c_3 \ln^2\|x\|$	$y = x^2(c_1 + c_2 \ln\|x\| + c_3 \ln^2\|x\|)$	$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$

tenglamasini yeching.	$y = x(c_1 + c_2 \ln\lvert x\rvert + c_3 \ln^2\lvert x\rvert)$			
$y''' - y' = 3(2 - x^2)$ tenglamani bitta xususiy yechimi qanday ko‘rinishda izlanadi?	* $y = (Ax^2 + Bx + c)x$	$y = (Ax^2 + Bx + c)x^2$	$y = (Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = (Ax + B)e^x$
Quyidagi tenglamalardan qaysi biri Eyler tenglamasi hisoblanadi?	* $x^2 y'' - 9xy' + 21y = 0$	$xy'' + y' + y = 0$	$x^2 y'' + xy' + \frac{1}{x} y = 0$	$xy'' - 9y' + 21xy = 0$
y_1 va $y_2 = c_1 y_1 \int e^{-\int p(x)dx} \frac{dx}{y_1^2}$ funksiyalar qaysi tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimlari bo‘ladi?	* $y'' + y' \cdot p(x) + yQ(x) = 0$	$y'' - y' \cdot p(x) + y^2 Q(x) = 0$	$y'' - y' p(x) + yQ(x) = 0$	$y'' + y' p^2(x) + yQ(x)$

MA'RUZA № 25

]Mavzu: Chiziqli va bir jinsli sistemalar

Reja:

1. Chiziqli operator va uning xossalari.
2. Vektor funksiyalarning chiziqli bog‘liqligi va erkliligi.
3. Yechimlarning fundamental sistemasi.
4. Vronskiy determinanti.

Tayanch so’z va iboralar: *chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasi, chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasini vektor-matrisali ko‘rinishi, chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasi umumiy yechimi xaqida teorema*

1.Keyingi mulohazalarning qulayligi uchun L operatorni

$$L[y] = \frac{dy}{dx} - A(x)y \qquad (1)$$

tenglik yordamida kiritamiz. Agar $p = \frac{d}{dx}$ va E – birlik $n \times n$ matrisa bo‘lsa, (1) ni yana ushbu

$$L[y] = (pE - A(x))y$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Xossalari.

1°. Agar C – ixtiyoriy o‘zgarmas son bo‘lsa, $L[Cy] = CL[y]$ ayniyat o‘rinli.

2°. Agar $C_1, C_2, ..., C_n$ ixtiyoriy o‘zgarmas sonlar bo‘lsa,

$$L[\sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[y^{(i)}]$$

ayniyat o‘rinli, bunda $y^{(1)}, y^{(2)}, ..., y^{(m)}$ -biror vektor funksiyalar.

Bu xossadan foydalanib, quyidagi teoremani isbotlaymiz.

TEOREMA. *Agar $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), ..., \varphi^{(m)}(x)$ vektor funksiyalarning har biri biror I intervalda*

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \qquad (2)$$

tenglamaning yechimi bo'lsa, u holda bu funksiyalarning chiziqli kombinatsiyasi ham yechim bo'ladi.

Isbot. Teoremani shartiga ko'ra $L[\varphi^{(i)}(x)] = 0,\ x \in I,\ i = \overline{1,m}$. Shuning uchun 2-xossadan foydalansak, $L[\sum_{i=1}^{m} C_i y^{(i)}] = \sum_{i=1}^{m} C_i L[y^{(i)}] = 0$.

TA'RIF. Agar bir vaqtda nolga teng bo'magan shunday $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k$ o'zgarmas sonlar mavjud bo'lsaki, ya'ni $\sum_{i=1}^{k} \alpha_i^2 \neq 0$, ular uchun biror I intervalda ushbu

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + ... + \alpha_k \varphi^{(k)}(x) \equiv 0$$

ayniyat o'rinli bo'lsa, u holda

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), ..., \varphi^{(k)}(x); \qquad \varphi^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(x) \\ \varphi_2^{(i)}(x) \\ .... \\ \varphi_k^{(i)}(x) \end{pmatrix} \qquad (3)$$

vektor funksiyalar I intervalda *chiziqli bog'liq* deyiladi. Agar yuqoridagi ayniyat faqat $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_k = 0$ bo'lgandagina o'rinli bo'lsa, u holda $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), ..., \varphi^{(k)}(x)$ vektor funksiyalar I intervalda *chiziqli erkli* deyiladi.

TEOREMA. *Agar x ning I intervaldan olingan kamida bitta $x_0, x_0 \in I$ qiymati uchun $\varphi^{(1)}(x_0), \varphi^{(2)}(x_0), ..., \varphi^{(m)}(x_0)$ vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda (3) yechimlar I intervalda chiziqli bog'liq bo'ladi, boshqacha aytganda, agar (3) yechimlar I intervalda chiziqli erkli bo'lsa, u holda x ning I intervaldan olingan bironta ham qiymatida (3) yechimlar chiziqli bog'liq bo'lmaydi.*

Isboti: (3) vektorlar chiziqli bog'liq bo'lsin, ya'ni $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i^2 \neq 0$ sonlar uchun

$$\alpha_1 \varphi^{(1)}(x_0) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x_0) + ... + \alpha_m \varphi^{(m)}(x_0) \equiv 0$$

tenglik o'rinli. Endi

$$\varphi(x) = \alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + ... + \alpha_k \varphi^{(k)}(x)$$

deb belgilaylik 1- teoremaga ko'ra shu $\varphi(x)$ vektor funksiya ham $\frac{dy}{dx} = A(x)y$ tenglamaning yechimi bo'ladi. Ammo $\varphi(x)$ funksiya teoremaning shartiga ko'ra $x = x_0$ nuqtada nolga teng. Shuning uchun $\varphi(x) \equiv 0,\ x \in I$ ya'ni $\alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + ... + \alpha_m \varphi^{(m)}(x) \equiv 0,\ x \in I$ teorema isbot bo'ldi.

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} = A(x)y \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

bu Koshi masalasini yechimi ikkita ya'ni, $y \equiv 0$ va $y = \varphi(x) = \alpha_1 \varphi^{(1)}(x) + \alpha_2 \varphi^{(2)}(x) + ... + \alpha_m \varphi^{(m)}(x)$ funksiya bo'layapti. Mavjudlik va yagonalik teoremasiga ko'ra $\varphi(x) \equiv 0,\ x \in I$ bo'ladi.

TA'RIF: Agar biror I intervalda aniqlangan

$$\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), ..., \varphi^{(m)}(x); \qquad \varphi^{(i)}(x) = \begin{pmatrix} \varphi_1^{(i)}(x) \\ \varphi_2^{(i)}(x) \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_n^{(i)}(x) \end{pmatrix}, \ i = \overline{1, n} \qquad (4)$$

vektor–funksiyalar sistemasi (1) tenglamaning chiziqli erkli vektor–yechimlari sistemasini tashkil etsa, u holda bu sistema *yechimlarning fundamental sistemasi*, yoki qisqacha, *fundamental sistema* deyiladi.

TEOREMA. *Differensial tenglamalarning chiziqli bir jinsli sistemasi uchun fundamental sistema mavjud.*

Isbot. Chiziqli bir jinsli (1) sistemani olamiz. Yana biror $a^{(1)}, a^{(2)}, ..., a^{(n)}$ o'zgarmas vektorlar sistemasi chiziqli erkli bo'lsin. O'zgarmas vektorlarning bunday sistemasi mavjud. Buni ko'rsatish uchun

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}, \ a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ .. \\ 0 \end{pmatrix}, \ ..., \ a^{(n)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ .. \\ 1 \end{pmatrix}$$

deb tanlash yetarli, chunki bu vektorlardan tuzilgan matrisa determinanti noldan farqli(1-ga teng). Endi ushbu $\varphi^{(1)}(x_0) = a^{(1)}, \ \varphi^{(2)}(x_0) = a^{(2)}, \ ..., \ \varphi^{(n)}(x_0) = a^{(n)}$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiradigan (4) yechimlar sistemani ko'ramiz, tanlashga ko'ra $\varphi^{(1)}(x_0), \ \varphi^{(2)}(x_0), \ ..., \ \varphi^{(n)}(x_0)$ vektorlar chiziqli erkli, demak, (4) yechimlar sistemasi fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi.

TEOREMA *(Umumiy yechim haqida). Agar (4) yechimlar fundamental sistemani tashkil etsa, u holda barcha yechimlar ushbu*

$$\varphi(x) = C_1\varphi^{(1)}(x) + C_2\varphi^{(2)}(x) + ... + C_n\varphi^{(n)}(x) \qquad (5)$$

formula bilan topiladi, bunda $C_1, C_2, ..., C_n$ ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Isbot. Biror $\varphi^{(*)}(x)$ funksiya I intervalda aniqlangan bo'lib, (1) tenglamaning $\varphi^{(*)}(x_0) = \varphi_0^{(*)} = y^{(0)}, x \in I$ boshlang'ich shartni qanoatlantiradigan yechimi bo'lsin. Ushbu

$$C_1\varphi^{(1)}(x_0) + C_2\varphi^{(2)}(x_0) + ... + C_n\varphi^{(n)}(x_0) = y^{(0)} \qquad (6)$$

vektor tenglamani ko'raylik bu $C_1, C_2, ..., C_n$ larga nisbatan chiziqli algebraik tenglama sistemadan iborat. Agar $y^{(0)} = 0$ bo'lsa, (6)dan $\varphi^{(1)}(x_0), \ \varphi^{(2)}(x_0), \ ..., \ \varphi^{(n)}(x_0)$ vektorlar chiziqli erkli bo'lgani uchun $C_1 = C_2 = ... = C_n = 0$ kelib chiqadi. Bunda $\varphi^{(*)}(x)$-trivial yechim bo'ladi. Endi $y^{(0)} \neq 0$ bo'lsin. U holda (6) sistema bir jinsli emas. Uning determinanti $\varphi^{(1)}(x_0), \ \varphi^{(2)}(x_0), \ ..., \ \varphi^{(n)}(x_0)$ vektordan tuzilgan bo'lib, teoremaning shartiga ko'ra ular chiziqli erkli va demak, ulardan tuzilgan determinant noldan farqli. Shuning uchun (6) dan yagona $C_1^\circ, C_2^\circ, ..., C_n^\circ$ larni topamiz. Demak, $\varphi^{(*)}(x)$ yechimni bunday yozishimiz mumkin:

$$\varphi^{(*)}(x) = C_1^\circ\varphi^{(1)}(x) + C_2^\circ\varphi^{(2)}(x) + ... + C_n^\circ\varphi^{(n)}(x)$$

Shunday qilib (2) tenglamaning ixtiyoriy yechimi uchun tegishli $C_1^\circ, C_2^\circ, ..., C_n^\circ$ o'zgarmaslarning (ixtiyoriy yechimi uchun tegishli) yagona usul bilan tanlash mumkin.

Bu ta'rifga ko'ra (5) formula (2) tenglamaning umumiy yechimi ekanini isbotlaydi. Teorema isbot bo'ldi.

4.(2) tenglamaning I intervalda aniqlangan $n-$ta yechimi $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), ..., \varphi^{(n)}(x)$ berilgan bo'lsin. Bu vektor funksiyadan ushbu matrisani tuzamiz.

$$Z(x)=\begin{pmatrix}\varphi_1^{(1)}\ldots\varphi_1^{(k)}\ldots\varphi_1^{(n)}\\ \varphi_2^{(1)}\ldots\varphi_2^{(k)}\ldots\varphi_2^{(n)}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \varphi_n^{(1)}\ldots\varphi_n^{(k)}\ldots\varphi_n^{(n)}\end{pmatrix} \tag{7}$$

Unda 1-ustunda $\varphi^{(1)}(x)$ vektorning koordinatalari, $k-$ustunda $\varphi^{(k)}(x),\ k=\overline{2,n}$ vektorning koordinatalari joylashgan. Shu matrisaning determinanti (2) sistema uchun *Vronskiy determinanti* deyiladi va $W(x)$ yoki $W[\varphi^{(1)},\varphi^{(2)},...,\varphi^{(n)}]$ deb belgilanadi, ya'ni $\det Z(x)=W(x)$.

Ravshanki, agar $\varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x),...,\varphi^{(n)}(x)$ yechimlar chiziqli erkli bo‘lsa, u holda Vronskiy determinanti x ning I dan olingan bironta ham qiymatida nolga aylanmaydi. Haqiqatan ham, $\varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x),...,\varphi^{(n)}(x),\ x\in I$ vektor funksiyalar chiziqli erkli bo‘lgani uchun ushbu

$$\alpha_1\varphi^{(1)}(x)+\alpha_2\varphi^{(2)}(x)+\ldots+\alpha_n\varphi^{(n)}(x)\equiv 0,\ x\in I$$

ayniyat faqat $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ bo‘lgandagina o‘rinli. I intervaldan olingan ixtiyoriy tayinlangan x uchun $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_j^{(i)}(x)=0,\ j=\overline{1,n}$ sistemani ($\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n$ larga nisbatan) ko‘raylik. U bir jinsli bo‘lib, faqat trivial $\alpha_1=\alpha_2=\ldots=\alpha_n=0$ yechimga ega. Demak, bu sistemaning determinanti uchun $W(x)\neq 0,\ x\in I$ munosabat o‘rnli. Bu mulohazalardan yuqoridagi yechimlar chiziqli bog‘liq bo‘lsa, $W(x)\equiv 0,\ x\in I$ ayniyat o‘rinli bo‘lishi kelib chiqadi. Yechimlar fundamental sistemani tashkil etsa, tegishli (7) matrisa *integral matrisa* yoki *fundamental matrisa* deb yuritiladi. Endi $Z(x)$ matrisaning ustunlari (2) tenglamaning yechimlari bo‘lgani uchun $Z(x)$ matrisa ushbu

$$\frac{dZ}{dx}=A(x)Z \tag{8}$$

matrisali tenglamani yechimi bo‘ladi.

Lemma. *Agar $Z^*(x)$ matrisa (8) tenglamaning I intervalda aniqlangan biror matrisali yechimi bo‘lsa, u holda tartibi n bo‘lgan ixtiyoriy o‘zgarmas C matrisa uchun $Z^*(x)C$ matrisa ham yechim bo‘ladi.*

Isbot. Haqiqatdan (8) tenglamaning ikki tomonini o‘ngdan C matrisaga ko‘paytiramiz.

$$\frac{dZ^*(x)}{dx}C\equiv A(x)Z^*(x)C$$

yoki $C=const$ bo‘lgani uchun

$$\frac{dZ^*(x)}{dx}C\equiv A(x)(Z^*(x)C).$$

Bundan lemmani isboti kelib chiqadi.

TEOREMA. *Agar $Z(x)$ matrisa I intervalda aniqlangan uzluksiz va uzluksiz differensiallanadigan ixtiyoriy $\varphi^{(j)}(x),\ j=1,...,n$ vektor yechimlardan tuzilgan bo‘lib, determinanti I da noldan farqli bo‘lsa, u holda bu $Z(x)$ matrisa (2) tenglamaning I intervalda aniqlangan fundamental sistemasi bo‘ladi.*

Isbot. Avvalo $\det Z(x)\neq 0,\ x\in I$. Shuning uchun $Z(x)$ matrisa fundamental bo‘ladi. $Z(x)$ matrisa yechim bo‘lgani uchun ushbu

$$\frac{dZ(x)}{dx}\equiv A(x)Z(x),\ \ x\in I \tag{9}$$

ayniyatga egamiz. Bunda $Z(x)$ matrisaning determinanti shart bo‘yicha noldan farqli. Shuning uchun bu matrisaga teskari $Z^{-1}(x)$ matrisa mavjud, ya'ni ushbu

$$Z(x)Z^{-1}(x) = Z^{-1}(x)Z(x) = E$$

(E – birlik matrisa) tenglikni qanoatlantiradigan $Z^{-1}(x)$ matrisa mavjud. Bunda $Z^{-1}(x)$ matrisa, masalan

$$Z^{-1}(x) = \frac{1}{\det Z(x)} \begin{pmatrix} Z_{11}(x) & \ldots & Z_{n1}(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ Z_{1n}(x) & \ldots & Z_{nn}(x) \end{pmatrix} \tag{10}$$

formula bilan topilishi mumkin, bunda $Z_{ii}(x) - Z(x)$ matrisaning $\varphi_i^j(x)$, $i, j = \overline{1, n}$ elementining *algebraik to'ldiruvchisi*. Endi (9) ayniyatning ikki tomonini o'ngdan $Z^{-1}(x)$ ga ko'paytiramiz:

$$\frac{dZ(x)}{dx} Z^{-1}(x) \equiv A(x). \tag{11}$$

Bu ayniyatdan $A(x)$ matrisaning $a_{ij}(x)$ elementlari yagona usul bilan aniqlanadi. $\frac{dZ(x)}{dx}$ va $Z^{-1}(x)$ matrisalarning elementlari I intervalda uzluksiz bo'lgani uchun $A(x)$ matrisaning elementlari ham shu intervalda uzluksiz. Teorema isbot qilindi.

Misol. Ushbu

$$y_1' = -y_2, \quad y_2' = y_1$$

sistema uchun

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad y^{(2)}(x) = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

vektor-funksiyalar $-\infty < x < +\infty$ intervalda yechim bo'ladi. Buni bevosita tekshirib ko'rish mumkin, $y^{(1)}(x)$ va $y^{(2)}(x)$ yechimlar fundamental sistema tashkil etadi. Bu yechimlardan Vronskiy determinanti tuzamiz.

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1 \neq 0.$$

Demak, $W(x) \neq 0$, $-\infty < x < +\infty$. $y^{(1)}(x)$ va $y^{(2)}(x)$ yechimlar fundamental sistema tashkil etadi. Berilgan sistemada $A(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Shunday qilib, $\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$ matrisa

$$\frac{dZ}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} Z$$

matrisali tenglamaning fundamental matrisasi bo'ladi. Endi fundamental matrisasi

$$Z(x) = \begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}$$

bo'lgan chiziqli bir jinsli sistemani tuzaylik.

$$\frac{dZ(x)}{dx} = \begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}.$$

Endi $Z^{-1}(x)$ matrisani topamiz. Avvalo $\det Z(x) = \begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \sin^2 x = 1$, algebraik to'ldiruvchilar.

$$A_{11} = \cos x, \quad A_{21} = \sin x, \quad A_{12} = -\sin x, \quad A_{22} = \cos x.$$

Shuning uchun $Z^{-1}(x) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}$. Bundan

$$A(x)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}=\frac{dZ(x)}{dx}Z^{-1}(x)=\begin{pmatrix} -\sin x & -\cos x \\ \cos x & -\sin x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Shunday qilib, berilgan fundamental matrisaga yagona matrisali differensial tenglama mos keladi. (1) matrisali tenglamanin umumiy yechimi $Z(x)=\begin{pmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{pmatrix}\cdot C$ ko‘rinishda, berilgan normal sistemaning umumiy yechimi esa,

$$\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}=y(x)=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\cdot C=\begin{pmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1\cos x-C_2\sin x \\ C_1\sin x+C_2\cos x \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda yoziladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar. Yechimning asosiy xossalari.
2. yechimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo‘yicha differensiallanuvchanligi haqida teorema.

Glossariy

Chiziqli bog’liq sistema - Agar bir vaqtda nolga teng bo‘lsa hunday $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ o‘zgarmas sonlar mavjud bo‘lsaki, ular uchun biror J intervalda ushbu $\alpha_1\varphi^{(1)}(x)+\alpha_2\varphi^{(2)}(x)+....+\alpha_k\varphi^{(k)}(x)\equiv 0$ ayniyat o‘rinli bo‘lsa, u xolda

$$\varphi^{(1)}(x);_2\,\varphi^{(2)}(x),....\varphi^{(k)}(x)\varphi^{(i)}(x)=\begin{bmatrix} \varphi_1^{(i)}(x) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_n^{(i)}(x) \end{bmatrix} \tag{2}$$

vektor funksiyalar I intervalda chiziqli bog‘liq deyiladi.

Fundamental sistema - Agar biror I intervalda aniqlangan

$$\varphi^{(1)}(x),\varphi^{(2)}(x),\varphi^{(m)}(x),\varphi^{(i)}(x)=\begin{bmatrix} \varphi_1^{(1)}(x) \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ \varphi_n^{(1)}(x) \end{bmatrix} \quad i=\overline{1,n} \tag{4}$$

vektor –funksiyalar sistemasi (1) tenglamaning chiziqli erkli vektor –echimlari sistemasini tashkil etsa, u xolda bu sistema yechim larning fundamuntal sistemasi, yoki qisqacha, fundamental sistema deyiladi.

Umumiy yechim xaqida teorema - Agar (4) yechim lar fundamental sistemani tashkil etsa, u xodlda barcha yechim lar ushbu

$$\varphi(x) = C_1\varphi^{(1)}(x) + C_2\varphi^{(2)}(x) + ... + C_n\varphi^{(n)}(x) \tag{5}$$

formula bilan topiladi, bunda $C_1, C_2, ..., C_n$ ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = 0$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Chiziqli operator va uning xossalarini ayting?
2. Vektor funksiyalarning chiziqli bog'liqligi deb nimaga aytiladi va u qanday ko'rinishda bo'ladi?
3. Fundamental matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
4. Vranskiy diterminanti qanday tuziladi.
5. Qanday matritsa fundamental matritsa bo'ladi?

Amaliy mashg'ulot-20

1. $y'' = \left(2xy - \frac{5}{x}\right)y' + 4y^2 - \frac{4y}{x^2}$

j: $x^2y = c_1 tg(c_1 \ln c_2 x),\ c_2(x^2y + c_1)\,|x|^{2c_1} = x^2 + x^2y - c_1;\ x^2y\ln cx = -1$

2. $x^2(2yy'' - y'^2) = 1 - 2xyy'$ j: $4(c_1y - 1) = c_1^2 \ln^2 c_2 x$.
3. $x^2(yy'' - y'^2) + xyy' = (2xy' - 3y)\sqrt{x^3}$ j: $cy = x^{3/2};\ y = -2x^{3/2}\ln cx$
4. $x^4(y'^2 - 2yy'') = 4x^3yy' + 1$ j: $2c_2x^2y = (c_2x - c_1)^2 - 1;\ xy = \pm 1$
5. $yy' + xyy'' - xy'^2 = x^3$ j: $2c_1c_2y = c_2^2\,|x|^{2+c_1} + |x|^{2-c_1}$

TEST

Quyidagi tenglamalardan qaysi biri Eyler tenglamasi hisoblanadi?	* $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$	$xy'' + y' + y = 0$	$x^2y'' + xy' + \frac{1}{x}y = 0$	$xy'' - 9y' + 21xy = 0$
y_1 va $y_2 = c_1y_1\int e^{-\int p(x)dx}\frac{dx}{y_1^2}$ funksiyalar qaysi tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimlari bo'ladi?	* $y'' + y'\cdot p(x) + yQ(x) = 0$	$y'' - y'\cdot p(x) + y^2Q(x) = 0$	$y'' - y'p(x) + yQ(x) = 0$	$y'' + y'p^2(x) + yQ(x)$
$y'' + 9y = 0$ tenglamaning $M(\pi, -1)$ nuqtadagi o'tuvchi va shu nuqtada $y + 1 = x - \pi$ to'g'ri chiziqka urinuvchi integral egri chziqni toping.	* $y = Cos3x - \frac{1}{3}Sin3x$	$y = Cos3x + \frac{1}{3}Sin3x$	$y = Cos3x + Sin3x$	$y = Cos3x - Sin3x$
$y'' + 16y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	* $y = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$	$y = ce^{-16x}$	$y = c_1e^{4x} + c_2e^{-4x}$	$y = c_1e^{-4x}\cos 4x + c_2e^{-4x}\sin$

$y'' + 4y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	$*y = c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x$	$y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$	$y = ce^{-4x}$	$y = c_1 \cos 2x + c_2 x \cos 2x$
Berilgan differensial tenglamaning xususiy yechimini aniqlang: $y''' - y'' = 5x^2 + 4$	* $y_1 = \frac{5}{12}x^4 - \frac{5x^3}{3} + 7x^2$	$y_1 = 5x^4 + 4x^2$	$y_1 = 5x^2 + 4$	$y_1 = ax^2 + bx + c$
Berilgan tenglamaning tipini aniqlang: $(x + 3x^2)y' + xy = 0$	* o‘zgaruvchilari ajraladigan	to‘la differensial	Bernulli	y ga nisbatan chiziqli
Xususiy yechimi $y_1 = xe^x$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko‘rsating.	$* y'' - 2y' + y = 0$	$y'' - 2y' - 3y = 0$	$y' - y = 0$	$y'' + 2y' + y = 0$
Xususiy yechimi $y_1 = x^2 e^{-x}$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko‘rsating.	$* y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$	$y''' - y' = 0$	$y'' - y = 0$	$y''' + 3y'' = 0$
Xususiy yechimni aniqmas koeffitsientlar usuli bilan toping $y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$	$* y = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$	$y = x(ax^2 + bx + c)e^{2x}$	$y = x(ax + b)e^{2x}$	$y = ax^2 e^{2x}$

MA'RUZA № 26
Mavzu: Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan sistemalar
Reja

1. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan sistemaning umumiy yechimi xaqidagi teorema.
2. O‘zgarmasni variatsialash usuli. Koshi formulasi.
3. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan sistemaning yechimini yuqoridan baxolash.

Tayanch so’z va iboralar: *o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli chiziqli differensial tenglamalar sistemasi, chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasini xarakteristik tenglamasi, chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasini xarakteristik tenglamasini ildizlari xaqiqiy va xar xil bo‘lgan holda sistemaning umumiy yechimi.*

Ushbu

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + b(x) \tag{1}$$

sistema berilgan bo‘lsin. Bunda $A(x)$ kvadrat matritsa va $b(x) \neq 0$ ustun vektor I intervalda aniqlangan va uzluksiz. Chiziqli L operator yordamida birinchi sistema

$$L[y] = b(x) \tag{1’}$$

ko‘rinishda yoziladi.

1-TEOREMA. *Agar $\psi(x),\ x \in I$ vektor funksiya unga mos bir jinsli bo‘lmagan (1) tenglamaning biror yechimi bo‘lib, $\varphi(x),\ x \in I$ vektor funksiya unga mos bir jinsli*

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y \tag{2}$$

tenglamaning yechimi bo‘lsa, u holda shu vektor funksiyalar yig‘indisi $\varphi(x) + \psi(x)$ bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Isbot. Bevosita $L[\varphi(x) + \psi(x)]$-ni hisoblaymiz. $L[\varphi(x)] \equiv 0$, $L[\psi(x)] \equiv b(x)$ ekanligini hisobga olsak, ushbu $L[\varphi(x) + \psi(x)] = L[\varphi(x)] + L[\psi(x)] \equiv 0 + b(x) \equiv b(x)$ ayniyat teoremani isbot etadi.

2-TEOREMA(umumiy yechim haqida). *Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan sistemaning umumiy yechimi uning biror xususiy yechimi bilan mos bir jinsli sistema umumiy yechimining yig‘indisidan iborat.*

Isbot. Agar bir jinsli (2) sistemaning fundamental matritsasini $Z(x)$, bir jinsli bo‘lmagan sistemaning xususiy yechimini $\psi(x)$ desak, teoremaning tasdig‘i bo‘yicha bir jinsli bo‘lmagan sistemaning umumiy yechimi $y(x) = Z(x)C + \psi(x)$ ($C -$ixtiyoriy o‘zgarmas ustun vektor) ko‘rinishida yoziladi. $Z(x)C + \psi(x)$ vektor-funksiya (1) tenglamaning yechimi. Endi bu yechim umumiy ekanini isbotlaymiz. $y = y^0(x),\ x \in I$ vektor-funksiya (1) tenglamaning $\psi(x)$ dan farqli ixtiyoriy yechimi bo‘lsin. U holda yagona $C^0 -$o‘zgarmas vektor uchun I intervalda $y^0(x) = Z(x)C^0 + \psi(x)$ ayniyat o‘rinli ekanini ko‘rsatish mumkin. Haqiqatdan, $y^0(x)$ funksiya $y^0(x_0) = y^0$, $\psi(x)$ funksiya $\psi(x_0) = \psi^0$ boshlang‘ich shartni qanoatlantirsin. Ushbu $y^0 = Z(x_0)C + \psi^0$ yoki

$$Z(x_0)C = y^0 - \psi^0,\ \sum_{i=1}^{n}(y_i^0 - \psi_i^0)^2 \neq 0$$

vektor tenglamani ko‘ramiz. Bundan $Z(x_0)$ matritsaga teskari matritsa mavjudligi uchun (chunki $\det Z(x_0) = W(x_0) \neq 0$) yagona C^0 –ni topamiz:

$$C^0 = Z^{-1}(x_0)(y^0 - \psi^0).$$

Shunday qilib, $y^0(x)$ funksiya uchun

$$y^0(x) \equiv Z(x)Z^{-1}(x_0)(y^0 - \psi^0) + \psi(x)$$

formulaga ega bo‘lamiz. Teorema isbot bo‘ldi.

2. O‘zgarmasni variatsiyalash usuli. Koshi formulasi. O‘zgarmasni variatsiyalash usulini J.Lagranj nomi bilan ataladi. Uning mazmuni quyidagicha.

Ushbu

$$\varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x),\ \dots,\varphi^{(n)}(x)$$

funksiyalar I intervalda (2) tenglamaning fundamental sistemasi bo‘lsin. (1) tenglamaning yechimini quyidagi

$$y=\sigma_1(x)\varphi^{(1)}(x)+\sigma_2(x)\varphi^{(2)}(x)+\dots+\sigma_n(x)\varphi^{(n)}(x) \tag{3}$$

($\sigma_i(x),\ x\in I,\ i=1,2,\dots,n-$ biror noma'lum skalyar funksiyalar) ko‘rinishida izlaymiz. Bu (3) funksiya uchun avvalo $\sigma_i(x),\ i=1,2,\dots,n$ funksiyalar I intervalda differensiallanuvchi bo‘lishi zarur. Qolgan shartlarni (3) funksiya yechim bo‘lishi shartidan chiqaramiz. Shuningt uchun (3) funksiyani (1) tenglamaga qo‘yamiz:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\sigma_i(x)}{dx}\varphi^{(i)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\sigma_i(x)L(\varphi^{(i)}(x))=b(x)$$

Ammo $L(\varphi^{(i)}(x))\equiv 0$ bo‘lganidan quyidagiga egamiz:

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{d\sigma_i(x)}{dx}\varphi^{(i)}(x)=b(x) \tag{4}$$

Topilgan venktor tenglama skalyar funksiyalar $\dfrac{d\sigma_1(x)}{dx},\ \dots,\dfrac{d\sigma_n(x)}{dx}$ uchun chiziqli bir jinsli bo‘lmagan tenglamalardir. Uning determinanti vronskiandan iborat. $\varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x),\dots,\varphi^{(n)}(x)-$ vektor- funksiyalar I da fundamental sistemani tashkil etgani uchun bu vronskian noldan farqli. Demak, (4) vektor-tenglamadan $\dfrac{d\sigma_i(x)}{dx},i=1,2,\dots,n$ funksiyalarning yagona ifodasini topamiz:

$$\frac{d\sigma_i(x)}{dx}=\delta_i(x),i=1,2,\ \dots,n,\ x\in I\ .$$

Bundan

$$\sigma_i(x)=\int_{x_0}^{x}\delta_i(\tau)d\tau+\overline{C}_i,\ x\in I,\ i=1,2,\dots,n$$

($\overline{C}_1,\overline{C}_2,\dots,\overline{C}_n$ – ixtiyoriy o‘zgarmaslar) topilgan ifodalarni (3) ga qo‘yamiz:

$$y=\sum_{i=1}^{n}\overline{C}_i\varphi^{(i)}(x)+\sum_{i=1}^{n}\varphi^{(i)}(x)\int_{x_0}^{x}\delta_i(\tau)d\tau\ . \tag{5}$$

Topilgan ifodadan $\overline{C}_1,\overline{C}_2,\dots,\overline{C}_n$ –lar ixtiyoriy o‘zgarmas bo‘lgani uchun $\sum_{i=1}^{n}\overline{C}_i\varphi^{(i)}(x)=\varphi(x)$ vektor-funksiya (2) tenglamaning umumiy yechimi bo‘ladi. $\psi(x)=\sum_{i=1}^{n}\varphi^{(i)}(x)\int_{x_0}^{x}\delta_i(\tau)d\tau$ vektor funksiya esa bir jinsli bo‘lmagan sistemaning xususiy yechimidir.

Shunday qilib, umumiy yechim haqidagi teoremaga asosan (5) formula (1) tenglamaning umumiy yechimini ifodalaydi.

O‘zgarmasni variatsialash usulidan bir jinsli bo‘lmagan tenglama uchun Koshi masalasini hal qilishda ham foydalanish mumkin. Haqiqatdan, bizga ushbu

$$\frac{dy}{dx}=A(x)y+b(x),\ x\in I,\ \ y(x_0)=y^0 \tag{6}$$

masala berilgan bo‘lsin. (2) tenglamaning $x=x_0$ bo‘lganda birlik matritsaga aylanuvchi fundamental matritsasini $Z(x,x_0)$ deylik. Demak, $Z(x_0,x_0)=E$. Bunday matritsa (2) tenglamaning *normal fundamental matritsasi* deyiladi. Agar uzluksiz differensiallanuvchi noma'lum $\sigma(x)$ vector-funksiya uchun $\sigma(x_0)=y^0$ tenglik bajarilsin desak, (6) masalaning yechimini

$$y=Z(x,x_0)\sigma(x) \tag{7}$$

ko‘rinishda izlash mumkin. Avvalo $y(x_0)=Z(x_0,x_0)\sigma(x_0)=Ey^0=y^0$. Endi (7) vector-funksiyadan hosila olib, (6) ga qo‘yamiz:

$$\frac{dZ(x,x_0)}{dx}\sigma(x)+Z(x,x_0)\frac{d\sigma(x)}{dx}=A(x)Z(x,x_0)\sigma(x)+b(x)$$

Bundan,

$$\frac{dZ(x,x_0)}{dx}\equiv A(x)Z(x,x_0)$$

ayniyatga ko‘ra quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$Z(x,x_0)\frac{d\sigma(x)}{dx}=b(x).$$

Bu tenglamaning ikki tomonini chapdan $Z^{-1}(x,x_0)$ matritsaga ko‘paytiramiz:

$$\frac{d\sigma(x)}{dx}=Z^{-1}(x,x_0)b(x).$$

Endi x_0 dan x gacha ($x\in I,\ x_0\in I$) integrallab topamiz:

$$\sigma(x)=\sigma(x_0)+\int_{x_0}^{x}Z^{-1}(\tau,x_0)b(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Topilgan ifodani (7) ga qo‘ysak, quyidagi formulaga kelamiz:

$$y(x)=Z(x,x_0)\left(y^0+\int_{x_0}^{x}Z^{-1}(\tau,x_0)b(\tau)d\tau\right)$$

yoki

$$y(x)=Z(x,x_0)y^0+\int_{x_0}^{x}Z(x,x_0)Z^{-1}(\tau,x_0)b(\tau)d\tau. \tag{9}$$

Bu (9) formula (6)masalaning yechimini beradi va *Koshi formulasi* deb ataladi.

Agar (9) formulada y^0 vektor ixtiyoriy bo‘lsa, bu formula chiziqli tenglamaning umumiy yechimini beradi.

Koshi formulasining yana sodda ko‘rinishda yozish mumkin. Buning uchun ushbu

$$Z(x,\tau)\equiv Z(x,x_0)Z^{-1}(\tau,x_0),\ x\in I,\ x_0\in I,\ \tau\in I,\ \tau\le x \tag{10}$$

ayniyatni isbot etamiz. Quyidagi

$$\Phi^{(1)}(x)=Z(x,\tau),\ \Phi^{(2)}(x)=Z(x,x_0)Z^{-1}(\tau,x_0)$$

belgilashlarni kiritamiz. Ravshanki,

$$\Phi^{(1)}(\tau)=Z(\tau,\tau)=E,\ \Phi^{(2)}(\tau)=Z(\tau,x_0)Z^{-1}(\tau,x_0)=E,$$

demak,

$$\Phi^{(1)}(\tau)=\Phi^{(2)}(\tau). \tag{11}$$

Shubhasiz, $\Phi^{(1)}(x)$ matritsa $\frac{dZ}{dx}=A(x)Z$ (*) tenglamaning yechimi, $\Phi^{(2)}(x)$ matritsa ham shu tenglamaning yechimi bo‘ladi.

(10) ayniyatdan foydalanib (9) formulani

$$y(x)=Z(x,x_0)y^0+\int_{x_0}^{x}Z(x,\tau)b(\tau)d\tau \tag{12}$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

Ba’zi tabiiy shartlar bajarilganda chiziqli bir jinsli bo‘lmagan sistemaning yechimini yuqoridan baholaymiz. (1) tenglamada $A(x)$ matritsaning normasini bunday aniqlaymiz.

$$\|A(x)\| = \sup|A(x)|, |A(x)| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)|, q_1 \le x \le q_2$$

Lemma. *Agar ushbu* $y = y(x)$ *vector-funksiya* $q_1 \le x \le q_2$ *oraliqda (1) tenglamaning* $y(x_0) = y^0$, $q_1 \le x_0 \le q_2$ *boshlang‘ich shartni qanoatlantiradigan yechim bo‘lsa, u holda* $q_1 \le x \le q_2$ *oraliqda ushbu*

$$|y(x)| \le \left\{ |y^0| + \left| \int_{x_0}^{x} b(\tau) e^{-\int_{x_0}^{\tau} \|A(s)\| ds} d\tau \right| \right\} e^{\int_{x_0}^{x} \|\alpha(\tau)\| d\tau} \qquad (13)$$

tengsizlik o‘rinli.

Misol. Ushbu chiziqli bir jinsli bo‘lmagan

$$\begin{cases} y_1' = -y_2 - 2 \\ y_2' = y_1 + \sin x, \; b(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin x \end{pmatrix} \end{cases}$$

sistemaning umumiy yechimi topilsin.

Mos bir jinsli sistemaning fundamental sistemasi topilgan edi

$$y^{(1)}(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, y^{(2)} = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

Endi bir jinsli bo‘lmagan sistemaning xususiy yechimini izlaymiz. Buning uchun o‘zgarmasini variatsiyalash usulini qo‘llaymiz, ya'ni yechimni (8) ko‘rinishda yozamiz. Unda $y^{(1)}(x) = \varphi^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x) = \varphi^{(2)}(x)$ bo‘lib, $\frac{d\sigma_i(x)}{dx}, i = 1,2$ funksiyalar uchun (9) sistemadan foydalanamiz.

$$\begin{cases} \cos x \frac{d\sigma_1}{dx} - \sin x \frac{d\sigma_2}{dx} = 1, \\ \sin x \frac{d\sigma_1}{dx} + \cos x \frac{d\sigma_2}{dx} = \sin x. \end{cases}$$

Yozilgan sistemaning determinanti 1ga teng. Shuning uchun

$$\frac{d\sigma_1}{dx} = \begin{vmatrix} 1 & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix} = \cos x + \sin^2 x,$$

$$\frac{d\sigma_2}{dx} = \begin{vmatrix} \cos x & 1 \\ \sin x & \sin x \end{vmatrix} = \sin x \cos x - \sin x;$$

$$\sigma_1(x) = \int (\cos x + \sin^2 x) dx = \int (\cos x + \frac{1 - \cos 2x}{2}) dx =$$

$$= \sin x + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \sin 2x + C_1$$

$$\sigma_2(x) = \int (\sin x \cos x - \sin x) dx = \int (\frac{1}{2} \sin 2x - \sin x) dx =$$

$$-\frac{1}{4} \cos 2x + \cos x + C_2.$$

Endi berilgan sistemaning umumiy yechimini yozish mumkin:

$$y(x)=(\sin x+\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x)\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}+(-\frac{1}{4}\cos 2x+\cos x)\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}+$$
$$+C_1\begin{pmatrix}\cos x\\ \sin x\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}-\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}.$$

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, " Ўзбекистон", 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Chiziqli bogliq va chiziqli erkli funksiyalar.
2. Yechimning Lyapunov ma'nosida turg'unligi.

Glossariy

Umumiy yechim xaqida teorema - Chiziqli bir jinsli bo'lmagan sistema ning umumiy yechimi uning biror xususiy yechimi bilan mos bir jinsli sistema umumiy yechimining yig'indisidan iborat.

Norma fundamental matritsa - (2) tenglamaning xqx$_0$ bo'lganda birlik matritsaga aylanuvchi fundamental matritsasini z(x,x$_0$) deylik. Demak, z(x,x$_0$)qE. Bunday matritsa (2) tenglamaning normal fundamental matritsasi deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $x^2y''-4xy'+6y=x$.
Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Bir jinsli bo'lmagan tenglamaning yechimi qanday ko'rinishda bo'ladi?
2. Chiziqli bir jinsli bo'lmagan sistemaning umumiy yechimi haqidagi teoremani ayting?
3. O'zgarmaslarni variatsiyalash usulini mazmunini ayting?
4. Bir jinsli bo'lmagan sistemaning xususiy yechimi qanday ko'rinishda bo'ladi?
5. Koshi formulasi deb qanday masalaga aytiladi?

Amaliy mashg'ulot-26
O'zgaruvchi koeffitsentli chiziqli tenglamalar

1. Bu paragrafning ko'pgina masalalari chiziqli differensial tenglamalar nazariyasining umumiy usullari yordamida yechiladi yoki ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning sifat nazariyasi asosida yechiladi.

2. Agar *n*- tartibli chiziqli bir jinsli differensial tenglamaning u$_1$ xususiy yechimi ma'lum bo'lsa, tenglamani tenglamani chiziqliligini saqlab, tartibini pasaytirish mumkin. Buning uchun tanglamada $y=y_1z$ almashtirish bajarish kerak va $z'=u$ deb tartibini pasaytirish kerak.

Bir jinsli chiziqli

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)=0$$

teglamani tartibini pasaytirish uchun yuqoridagi usulni qo‘llash mumkin, faqat uning biror u_1 xususiy yechimi ma'lum bo‘lishi kerak. Lekin, osoni Ostogradskiy Luivill formulasi:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = ce^{-\int p(x)dx}, \quad p(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)}.$$

dan foydalanish yaxshi, bu yerda y_1, y_2- ikkita ixtiyoriy xususiy yechimlar.

Misol-1: $(x^2+1)y''-2xy'+2y=0$ (1)

tenglamaning bita yechimi $y_1=x_1$. Ostogradskiy Luivill formulasiga asosan,

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y'_1 & y'_2 \end{vmatrix} = ce^{-\int\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)dx}, \quad y_1y'_2-y'_1y_2=C(x^2+1)$$

ma'lum ekanligidan u_2 uchun chiziqli tenglama oldik. Soddaroq, u quyidagicha yechiladi. Tenglamani ikkala tomonini y_1^2 ga bo‘lamiz va chap tomonda $\frac{y_2}{y_1}$ ning hosilasini olamiz:

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)' = \frac{y_1\cdot y_2 - y'_1 y_2}{y_1^2} = \frac{c(x^2+1)}{y_1^2}$$

$y_1=x$ ligidan topamiz:

$$\frac{y_2}{y_1} = \int C\cdot\frac{x^2+1}{x^2}dx + C_2 = C\left(x-\frac{1}{x}\right)+C_2,$$

$$y=C(x^2-1)+C_2x.$$

bu (1) tenglamaning umumiy yechimi.

2. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaning xususiy yechimini topish uchun umumiy usul yo‘q. Ba'zan, oddiy tanlov asosida xususiy yechimni topish mumkin.

Misol: $(1-2x^2)y''+2y'+4y=0$ (2)

tanglamani algebraik ko‘pxad ko‘rinishdagi yechimi topilsin.

Avvalo ko‘phad darajasini topamiz, tenglamaga $y=x^n+...,$ ko‘phadni qo‘yamiz: $-2x^2n(n-1)x^{n-2}+...+4x^n+...=0.$ Eng katta daraja oldidagi koeffitsientni 0 ga tenglaymiz: $-2n(n-1)+4=0, \quad n^2-n-2=0$.

Bu yerdan $n_1=2$ ($n_2=-1$ yaramaydi, $n>0$ bo‘lishi kerak). Demak ko‘phad 2-tartibli.

Xususiy yechimni $y=x^2+ax+b$ ko‘rinishda izlaymiz. Uni tenglamaga qo‘yamiz:

$$(4a+4)x+2+2a+4b=0.$$

Demak, $4a+4=0, 2+2a+4b=0$. Bu yerdan $a=-1, \ b=0$ ya'ni xususiy yechim $y=x^2-x$ ko‘rinishga ega.

3. Ba'zi misollarni yechishda quyidagi usuldan foydalanish mumkin.

1) $u''+(1+f(t))=0$ tenglama $|f(t)|\le\frac{c}{t^{1+\alpha}}, t_0\le t\le\infty, c,\alpha=const, \ \alpha>0$ holda $t\to\infty$ da $U_1(t)=const+0\left(\frac{1}{t^\alpha}\right), \ U_2(t)=\sin t+0\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)$ ko‘rinishdagi chiziqli erkli 2 ta yechimga ega.

2) $u''-(1-f(t))U=0$ tenglama $t\to\infty$ da quyidagicha yechimlarga ega:

$$U_1(t) = e^t\left(1 + 0\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right), \qquad U_2(t) = e^{-t}\left(1 + 0\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right).$$

1. $y''' + 9y' = 0$ j: $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + c_3$
2. $y^{(IV)} - 13y'' + 36y = 0$ j: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3e^{3x} + c_1e^{-3x}$
3. $y^{IV} = 8y'' - 16y$ j: $y = (c_1 + c_2x)e^{2x} + (c_3 + c_4x)e^{-2x}$
4. $y^{IV} = 16y$ j: $y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\sin 2x$
5. $y''' - 13y' - 12y = 0$ j: $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + c_3e^{4x}$
6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$ j: $y = c_1e^{x} + c_2xe^{x} + c_3x^2e^{x}$

TEST

Quyidagi tenglamalardan qaysi biri Eyler tenglamasi hisoblanadi?	* $x^2y'' - 9xy' + 21y = 0$	$xy'' + y' + y = 0$	$x^2y'' + xy' + \frac{1}{x}y = 0$	$xy'' - 9y' + 21xy = 0$
y_1 va $y_2 = c_1y_1\int e^{-\int p(x)dx}\frac{dx}{y_1^2}$ funksiyalar qaysi tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimlari bo'ladi?	* $y'' + y'\cdot p(x) + yQ(x) = 0$	$y'' - y'\cdot p(x) + y^2Q(x) = 0$	$y'' - y'p(x) + yQ(x) = 0$	$y'' + y'p^2(x) + yQ(x)$
$y'' + 9y = 0$ tenglamaning $M(\pi, -1)$ nuqtadagi o'tuvchi va shu nuqtada $y + 1 = x - \pi$ to'g'ri chiziqka urinuvchi integral egri chziqni toping.	* $y = Cos3x - \frac{1}{3}Sin3x$	$y = Cos3x + \frac{1}{3}Sin3x$	$y = Cos3x + Sin3x$	$y = Cos3x - Sin3x$
$y'' + 16y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	* $y = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$	$y = ce^{-16x}$	$y = c_1e^{4x} + c_2e^{-4x}$	$y = c_1e^{-4x}\cos 4x + c_2e^{-4x}\sin$
$y'' + 4y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	* $y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$	$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$	$y = ce^{-4x}$	$y = c_1\cos 2x + c_2x\cos 2x$
Berilgan differensial tenglamaning xususiy yechimini aniqlang: $y''' - y'' = 5x^2 + 4$	* $y_1 = \frac{5}{12}x^4 - \frac{5x^3}{3} + 7x^2$	$y_1 = 5x^4 + 4x^2$	$y_1 = 5x^2 + 4$	$y_1 = ax^2 + bx + c$
Berilgan tenglamaning tipini aniqlang: $(x + 3x^2)y' + xy = 0$	* o'zgaruvchilari ajraladigan	to'la differensial	Bernulli	y ga nisbatan chiziqli
Xususiy yechimi $y_1 = xe^x$ bo'lgan chiziqli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko'rsating.	* $y'' - 2y' + y = 0$	$y'' - 2y' - 3y = 0$	$y' - y = 0$	$y'' + 2y' + y = 0$
Xususiy yechimi $y_1 = x^2e^{-x}$ bo'lgan chiziqli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko'rsating.	* $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$	$y''' - y' = 0$	$y'' - y = 0$	$y''' + 3y'' = 0$

Xususiy yechimni aniqmas koeffitsientlar usuli bilan toping $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$	* $y = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$	$y = x\left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$	$y = x\left(ax + b\right)e^{2x}$	$y = ax^2e^{2x}$

MA'RUZA №27

Mavzu: O‘zgarmas koeffitsentli chiziqli diferensial tenglamalar sitemasi

Reja

1. Chiziqli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsientli tenglama
2. Chiziqli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsientli tenglama
3. Xarakteristik tenglama
4. Misollar

Tayanch so’z va iboralar: c*hiziqli tenglama, normal sistema, chiziqli sistema matritsa, vektor-matritsa, bir jinsli tenglama, trival yechim, xarakteristik tenglama.*

1.Agar normal (dinamik) sistemada $f_1, f_2, ..., f_n$ funksiyalar izlanayotgan funksiyalarga nisbatan chiziqli bo‘lsa, u holda bunday tenglamalar sistemasi *chiziqli sistema* deyiladi, ya'ni normal sistemadan

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x_1, x_2, ..., x_n) \\ y_2' = f_2(x_1, x_2, ..., x_n) \\ .... \\ y_n' = f_n(x_1, x_2, ..., x_n) \end{cases} \qquad (1)$$

bu ta’rifga ko‘ra chiziqli sistema uchun ushbu ko‘rinishda bo‘lishi kelib chiqadi:

$$\begin{cases} y_1' = \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + ...a_{1n}y_n + b_1 \\ y_2' = \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + ...a_{2n}y_n + b_2 \\ .... \\ y_n' = \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + ...a_{nn}y_n + b_n \end{cases}, \qquad (2)$$

bu yerda barcha a_{ik} koeffitsientlar va b_k $(i, k = 1, 2, ..., n)$ ozod hadlar, umuman aytganda, x ning ixtiyoriy funksiyalaridir. Agar vektor-matritsa belgilaridan foydalansak, (2) chiziqli sistemani oddiy va qisqacha yozish mumkin. Komponentalari $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$ bo‘lgan $y(x)$ vektorni kiritamiz va uni ustun matritsa shaklida, ya'ni n ta satrli va 1 ta ustunli matritsa shaklida yozamiz:

$$\vec{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ .... \\ y_n(x) \end{pmatrix}$$

Bunday vektorning hosilasi elementlari dastlabki vektor elementlarining hosilalaridaan iborat bo‘lgan yangi ustun matritsadan iborat deb aytishimiz tabiiydir:

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx} = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ ... \\ y_n' \end{pmatrix}$$

U holda komponentlari (2) sistemani ozod hadlaridan iborat vektorni $b(x)$ orqali, sistema koeffitsientlari matritsasini esa $A(x)$ orqali belgilasak:

$$A(x)=\begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12}\ \dots\ a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22}\ \dots\ a_{2n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\ a_{n2}\ \dots\ a_{nn} \end{pmatrix}.$$

U holda (2) sistemani vektorlar qatnashgan

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx}=A(x)\vec{y}(x)+\vec{b}(x) \tag{3}$$

ko‘rinishda yozish mumkin. Bu tenglik differensial tenglamalar chiziqli sistemasining *vektor-matritsa shaklidagi yozuvi* deyiladi:

Agar (1) da $A(x)=const$ bo‘lsa, u holda bu tenglamani (o‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglama)

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx}=A\vec{y}(x)+\vec{b}(x) \tag{4}$$

tenglamani *chiziqli bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsentli* tenglamalar sistemasi deyiladi.

Agar (4) da $\vec{b}(x)=\vec{0}$ bo‘lsa, u holda

$$\frac{d\vec{y}(x)}{dx}=A\vec{y}(x) \tag{5}$$

chiziqli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsentli tenglamalar sistemasi deyiladi.

Biz quyida (4) ko‘rinishida vektor-matritsali tenglamalarni integrallash (yechish) bilan shug‘ullanamiz. Avval (5)-chi bir jinsli tenglamalar sistemasini yechimini

$$\vec{y}=\vec{\alpha}e^{kx} \tag{6}$$

ko‘rinishida izlaymiz, bunda

$$\vec{\alpha}=\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \dots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

biror haqiqiy yoki kompleks son. (6) koordinatalar ko‘rinishida

$$y_1=\alpha_1 e^{kx}, y_2=\alpha_2 e^{kx}, \dots, y_n=\alpha_n e^{kx} \tag{6'}$$

bo‘ladi.

Bu funksiyalardan hosila olib (5) ga qo‘yamiz:

$$\frac{d\vec{y}}{dx}=\vec{\alpha}ke^{kx}, \quad \vec{\alpha}ke^{kx}=e^{kx}A\vec{\alpha}$$

yoki $\vec{\alpha}k=A\vec{\alpha}$. Bundan

$$(A-kE)\vec{\alpha}=\vec{0} \tag{7}$$

bo‘ladi, $E-$birlik matritsa. (7) vektor-matritsa tenglama koordinatalar ko‘rinishida quyidagicha bo‘ladi:

$$\begin{cases} (a_{11}-k)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+\dots+a_{1n}\alpha_n=0 \\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-k)\alpha_2+\dots+a_{2n}\alpha_n=0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+\dots+(a_{nn}-k)\alpha_n=0 \end{cases} \tag{7'}$$

(5) bir jinsli tenglamaning $\vec{y}=\vec{0}$ trival yechimi bor ekani ravshan. Shuning uchun bu tenglamaning trivial ($\vec{y}\neq\vec{0}$) bo‘lmagan yechimini izlaymiz, ya'ni (6) da $\vec{\alpha}\neq\vec{0}$(yoki $\alpha_1^2+\alpha_2^2+\dots+\alpha_n^2\neq 0$) bo‘lsin.

Shunday qilib, (7) yoki (7’) $\alpha_1,\alpha_2,\dots,\alpha_n$ larga nibatan chiziqli bir jinsli algebraik tenglamalar sistemasidan iborat. Bu sistema trivial bo‘lmagan ($\vec{\alpha} \neq \vec{0}$) yechimlarga ega bo‘lishi uchun bu sistemaning determinanti 0 ga teng bo‘lish zarur va yetarlidir (bu chiziqli algebra fanidan bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimi to‘g‘risidagi teoremaga ko‘ra). Bu shart quyidagidan iborat:

$$|A-kE|=0. \tag{8}$$

$|A-kE|$ - bu, $A-kE$ matritsaning determinanti yoki koordinatalar ko‘rinishida

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k \ a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} \ a_{22}-k \dots a_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1} \ a_{n2} \dots a_{nn}-k \end{vmatrix} = 0 \tag{8'}$$

xarakteristik tenglama.

Bu k-ga nisbatan n-chi tartibli algebraik tenglama bo‘lib, uni (5) tenglamaga mos xarakteristik tenglama deyiladi. (8’) tenglama algebraning asosiy teoremasiga ko‘ra n ta ildizga ega. Biz a_{ij} elementlar haqiqiy bo‘lgan holni ko‘ramiz. Bunda ildizlar ichida komplekslari bo‘lsa, ularga qo‘shma bo‘lgan kompleks sonlar ham ildiz bo‘ladi. Har bir ildizga mos (6)((6’)) yechimni topish lozim. (8’) tenglama o‘zaro farqli ildizlari n ta bo‘lishi ham mumkin. Shu hollarni alohida ko‘ramiz.

1) Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va har xil.

Bu holda har bir $k=k_j, j=\overline{1,n}$ ni (7) tenglamaga qo‘yib mos $\vec{\alpha}^{(j)}$ vektorni topamiz. Shu bilan n ta

$$\vec{y}^{(j)} = \vec{\alpha}^{(j)} e^{k_j x}, \ j=\overline{1,n},$$

yechimni topamiz. Bu yechimlar chiziqli erkli, chunki

$$D_1(\vec{\alpha}^{(1)} e^{k_1 x}) + D_2(\vec{\alpha}^{(2)} e^{k_2 x}) + \dots + D_n(\vec{\alpha}^{(n)} e^{k_n x}) \equiv 0 \tag{*}$$

ayniyat faqat $D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$, bo‘lgandagina o‘rinli bo‘ladi. Demak, topilgan vektorlar yechimlarning fundamental sistemasini tashkil etadi. Shuning uchun umumiy yechimni yozish mumkin bo‘ladi, ya'ni

$$y = C_1(\vec{\alpha}^{(1)} e^{k_1 x}) + C_2(\vec{\alpha}^{(2)} e^{k_2 x}) + \dots + C_n(\vec{\alpha}^{(n)} e^{k_n x})$$

Izoh: (*) ayniyatni birinchi tenglamasini olamiz. $\alpha^{(1)} e^{k_1 x}, \alpha^{(2)} e^{k_2 x}, \dots, \alpha^{(n)} e^{k_n x}$, $k_i \neq k_j$, $i \neq j$ funksiyalar $a \le x \le b$ da chiziqli erkli, ya'ni

$$D_1(\alpha^{(1)} e^{k_1 x}) + D_2(\alpha^{(2)} e^{k_2 x}) + \dots + D_n(\alpha^{(n)} e^{k_n x}) \equiv 0$$

ayniyat faqat $D_1 = D_2 = \dots = D_n = 0$ bo‘lgandagina bajariladi. Avval $D_n = 0$ ligini ko‘rsataylik. Buning uchun ayniyatning ikkala tomonini $\vec{\alpha}^{(1)} e^{k_1 x}$ ga bo‘lamiz va hosila olamiz:

$$D_2(k_2-k_1)\alpha^{(2)} e^{(k_2-k_1)x} + \dots + D_n(k_n-k_1)\alpha^{(n)} e^{(k_n-k_1)x}) \equiv 0$$

Bu ayniyatning har ikkala tomoninng $\alpha^{(2)} e^{(k_2-k_1)x}$ ga bo‘lib, yana hosila olamiz. Bu protsessni $(n-1)$ marta takrorlab

$$D_n(k_n-k_1)(k_n-k_2)\dots(k_n-k_{n-1})\alpha^{(n)} e^{(k_n-k_{n-1})x}) \equiv 0$$

ayniyatni hosil qilamiz. Bundan $D_n = 0$ kelib chiqadi. $D_n = 0$ ni boshlang‘ich ayniyatga qo‘yib, yana yuqoridagi jarayonni takrorlasak, $D_{n-1} = 0$ ni topamiz. Shu usulni ketma-ket qo‘llab, $D_{n-2} = D_{n-3} = \dots = D_2 = D_1 = 0$ larni hosil qilamiz.

1-Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 \\ y_2' = 2y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

sistemani integrallang.

Yechish. Bu holda $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ bo'lib, xarakteristik tenglama $\begin{vmatrix}1-k & 2\\ 2 & 1-k\end{vmatrix}=0$ yoki $(1-k)^2-4=0$ ko'rinishga ega. Tenglamani yechib $k_1=-1,\ k_2=3$ ildizlarni topamiz. Ildizlar haqiqiy va har xil. Avval $k_1=-1$ ga mos yechimni ko'ramiz:

$$\vec{y}^{(1)}=\vec{\alpha}^{(1)}e^{-x}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{(1)}\\ \alpha_2^{(1)}\end{pmatrix}e^{-x}.$$

Bunda $\alpha_1^{(1)}$ va $\alpha_2^{(1)}$ larni topish uchun

$$\begin{cases}(1-(-1))\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\\ 2\alpha_1^{(1)}+(1-(-1))\alpha_2^{(1)}=0\end{cases}$$

sistemaga ega bo'lamiz. Uni soddaroq

$$\begin{cases}2\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\\ 2\alpha_1^{(1)}+2\alpha_2^{(1)}=0\end{cases}$$

yoki $\alpha_1^{(1)}+\alpha_2^{(1)}=0$ ko'rinishida yozish mumkin. Bundan $\alpha_1^{(1)}=1$ desak, $\alpha_2^{(1)}=-1$ bo'ladi. Shunday qilib, $\vec{y}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-x}$.

Agar $k_2=3$ bo'lsa, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\vec{y}^{(2)}=\vec{\alpha}^{(2)}e^{3x}=\begin{pmatrix}\alpha_1^{(2)}\\ \alpha_2^{(2)}\end{pmatrix}e^{3x}$$

va

$$\begin{cases}(1-3)\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0\\ 2\alpha_1^{(2)}+(1-3)\alpha_2^{(2)}=0\end{cases}$$

yoki

$$\begin{cases}-2\alpha_1^{(2)}+2\alpha_2^{(2)}=0\\ 2\alpha_1^{(2)}-2\alpha_2^{(2)}=0\end{cases}$$

sistemadan $\alpha_1^{(2)}=\alpha_2^{(2)}=1$ deb tanlansa bo'ladi. Demak,

$$\vec{y}^{(2)}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{3x}.$$

Shunday qilib, bo'rilgan sistemaning umumiy yechimi

$$\vec{y}=C_1\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}e^{-x}+C_2\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}e^{3x}$$

ko'rinishda yoki koordinatalar bo'yicha

$$\begin{cases}y_1=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}\\ y_2=-C_1e^{-x}+C_2e^{3x}\end{cases}$$

ko'rinishida yozish mumkin.

2). Xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va ularning ichida karrali ildizlar ham bor.

Karrali bo'lmagan oddiy ildizlarga mos yechimlarni avvalgi holdagi kabi topiladi. Endi $k=k_s$ ildiz γ karrali bo'lsin deylik. Bu holda mos yechim

$$\vec{y}^{(s)}=(\vec{\alpha}_0^{(s)}+\vec{\alpha}_1^{(s)}x+\ldots+\vec{\alpha}_{\gamma-1}^{(s)}x^{\gamma-1})e^{k_sx}$$

ko'rinishda izlanadi, bu yerda

$$\vec{\alpha}_j^{(s)} = \begin{pmatrix} \vec{\alpha}_{1j}^{(s)} \\ \vec{\alpha}_{2j}^{(s)} \\ \ldots\ldots \\ \vec{\alpha}_{nj}^{(s)} \end{pmatrix}, \quad j = \overline{0, \gamma - 1}.$$

Karraliga doir misol ko‘raylik.

2-Misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 - 4y_2 \\ y_2' = y_1 - y_2 \end{cases}$$

sistemani integrallang.

Yechish. Bu holda $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ bo‘lib, xarakteristik tenglama $\begin{vmatrix} 3-k & -4 \\ 1 & -1-k \end{vmatrix} = 0$ yoki $-(1+k)(3+k)+4=0$ ko‘rinishga ega.

Bundan $k^2 - 2k + 1 = 0 \Rightarrow (k-1)^2 = 0$ bu tenglamaning ildizlari o‘zaro teng va $k_{1,2} = 1$. Demak, $k = 1$ ildiz haqiqiy va ikki karrali. Mos yechimni

$$y_1 = (a_1 + b_1 x)e^x$$
$$y_2 = (a_2 + b_2 x)e^x$$

ko‘rinishda izlaymiz. Bundan,

$$y_1' = b_1 e^x + (a_1 + b_1 x)e^x = (a_1 + b_1 + b_1 x)e^x$$
$$y_2' = b_2 e^x + (a_2 + b_2 x)e^x = (a_2 + b_2 + b_2 x)e^x$$

Endi bu ifodalarni berilgan sistemaga qo‘ysak

$$\begin{cases} (a_1 + b_1 + b_1 x)e^x = 3(a_1 + b_1 x)e^x - 4(a_2 + b_2 x)e^x \; / : e^x \\ (a_2 + b_2 + b_2 x)e^x = (a_1 + b_1 x)e^x - (a_2 + b_2 x)e^x \; / : e^x \end{cases}$$

Bu yerdan:

$$\begin{cases} a_1 + b_1 + b_1 x = 3a_1 - 4a_2 + (3b_1 - 4b_2)x \\ a_2 + b_2 + b_2 x = a_1 - a_2 + (b_1 - b_2)x \end{cases}$$

mos koeffitsientlarni taqqoslab topamiz:

$$x^0 : a_1 + b_1 = 3a_1 - 4a_2; \quad a_2 + b_2 = a_1 - a_2; \quad b_1 - 3b_2 = -4b_2 + 3b_2$$

$$x^1 : b_1 = 3b_1 4b_2; \; b_2 = b_1 - b_2;$$

Oxirgi ikkita tenglamada $b_1 = 2b_2$ kelib chiqadi. Shuning uchun $b_2 = C_2$ ni ixtiyoriy o‘zgarmas deb olsak, $b_1 = 2C_2$, $b_2 = C_2$ bo‘ladi. Birinchi ikki tenglamadan $a_1 = 2a_2 + b_2$ kelib chiqadi. Bunda a_2 ixtiyoriy bo‘lib qoladi. Agar $a_2 = C_1$ desak, $a_1 = 2C_1 + C_2$ ga ega bo‘lamiz. Shunday qilib, yechimni

$$y_1 = (2C_1 + C_2 + 2C_2 x)e^x$$
$$y_2 = (C_1 + C_2 x)e^x$$

ko‘rinishda yozish mumkin.

3). Xarakteristik teng ildizlari ichida oddiy va karrali kompleks ildizlar ham bor. Masalan, $k = a \pm ib$ ildizlar oddiy ildiz bo‘lsin. Bu holda mos yechimlar

$$\vec{y}^{(1)} = \vec{\alpha}^{(1)} e^{ax} \cos bx, \quad \vec{y}^{(2)} = \vec{\alpha}^{(2)} e^{ax} \sin bx$$

$$\vec{\alpha}^{(1)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(1)} \\ \alpha_2^{(1)} \\ --- \\ \alpha_n^{(1)} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha}^{(2)} = \begin{pmatrix} \alpha_1^{(2)} \\ \alpha_2^{(2)} \\ --- \\ \alpha_n^{(2)} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishida izlanadi.

Agar $k = a \pm ib$ son γ karrali kompleks ildiz bo‘lsa, yechim

$$\vec{y}^{(1)} = (\vec{\alpha}_0^{(1)} + \vec{\alpha}_1^{(1)} x + ... + \vec{\alpha}_{\gamma-1}^{(1)} x^{\gamma-1}) e^{ax} \cos bx$$

$$\vec{y}^{(2)} = (\vec{\alpha}_0^{(2)} + \vec{\alpha}_1^{(2)} x + ... + \vec{\alpha}_{\gamma-1}^{(2)} x^{\gamma-1}) e^{ax} \sin bx$$

ko‘rinishda izlanadi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Vronskiy determinanti va uning xossalari.
2. Chiziqli tenglamalar sistemasi muvozanat holatining turlari.

Glossariy

Chiziqli sistema - Agar normal (dinamik) sistemada $f_1, f_2, \ldots f_m$ funksiyalar izlanayotgan funksiyalarga nisbatan chiziqli bo‘lsa, u holda bunday tenglamalar sistemasi chiziqli sistema deyiladi

Chiziqli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsentli tenglama - Agar (4) da b(_)*(x)*q0(_) bo‘lsa, u holda $\frac{d\vec{y}}{dx}$ q *A*y(_) chiziqli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsentli tenglama deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching:

$$(1+x)^2 y'' - 3(1+x)y' + 4y = (1+x)^3.$$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Qanday tenglamalar sistemasi chiziqli sistema deyiladi?
2. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsientli tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
3. Chiziqli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsientli tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi?
4. Harakteristik tenglama qanday qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

5. O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamaning yechimi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Amaliy mashg’ulot-27

1. $y^{IV} + 2y''' + y'' = 0$ j: $y = c_1 + c_2x + c_3e^{-x} + c_4xe^{-x}$

2. $y^{(n)} = y^{(n-2)}$ j: $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3x^{n-3} + c_4x^{n-4} + \ldots + c_{n-1}x + c_n$

3. $y^{IV} + y = 0$

j: $y = e^{\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_1\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_2\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + e^{-\frac{x}{\sqrt{2}}}\left(c_3\cos\frac{x}{\sqrt{2}} + c_4\sin\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$

$64y^{VIII} + 48y^{VI} + 12y^{IV} + y'' = 0$

j: $y = (c_1 + c_2x + c_3x^z)\cos\frac{x}{2} + (c_4 + c_5x + c_6x^2)\sin\frac{x}{2} + c_7x + c_8$

4. $y^{(n)} + \frac{n}{1}y^{(n-1)} + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}y^{(n-2)} + \ldots + \frac{n}{1}y' + y = 0$ j: $y = e^{-x}(c_1 + c_2x + c_3x^2 + \ldots + c_nx^{n-1})$

5. $y''' = -y;\ \ y(0) = 2;\ \ y'(0) = 0;\ \ y''(0) = -1$ j: $y = 1 + \cos x$.

6. $y^{V} = y';\ \ y(0) = 0;\ \ y'(0) = 1;\ \ y''(0) = 0$ j: $y'''(0) = 1,\ \ y^{IV}(0) = 2$

7. $y'' - 5y' + 4y = 0;\ \ y(0) = 5;\ \ y'(0) = 8$ j: $y = 4e^{x} + e^{4x}$

TEST

Xususiy yechimi $y_1 = xe^{x}$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko‘rsating.	$* y'' - 2y' + y = 0$	$y'' - 2y' - 3y = 0$	$y' - y = 0$	$y'' + 2y' + y = 0$
Xususiy yechimi $y_1 = x^2e^{-x}$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko‘rsating.	$* y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$	$y''' - y' = 0$	$y'' - y = 0$	$y''' + 3y'' = 0$
Xususiy yechimni aniqmas koeffitsientlar usuli bilan toping $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$	$* y = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$	$y = x\left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$	$y = x\left(ax + b\right)e^{2x}$	$y = ax^2e^{2x}$
$x = e^{t}, y = -e^{t}$ funksiya quyidagi tenglamalar sistemalaridan qaysi birining yechimi bo‘ladi?	$* \begin{matrix} \dot{x} = 2x + y \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{matrix}$	$\begin{matrix} \dot{x} = x + y \\ \dot{y} = 3y - 2x \end{matrix}$	$\begin{matrix} \dot{x} = x - y \\ \dot{y} = y - 4x \end{matrix}$	$\begin{matrix} \dot{x} = x - 3y \\ \dot{y} = 3x + y \end{matrix}$
$\begin{cases} y' = \frac{x}{z} \\ z' = -\frac{x}{z} \end{cases}$ nochiziqli sistemaning umumiy yechimini ko‘rsating.	$* y = c_2e^{c_1x^2}$, $z = \frac{1}{2c_1c_2}e^{-c_1x^2}$	$y = c_2e^{c_1x}$, $z = \frac{1}{2c_1c_2}e^{-c_1x^2}$	$y = c_1c_2e^{x^2}$, $z = \frac{1}{2c_1c_2}e^{-c_1x^2}$	$y = c_2e^{x^2}$, $z = \frac{1}{2c_1c_2}e^{c_1x^2}$
$\begin{cases} \dot{x} = y + 2x \\ \dot{y} = 3x + 4y \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechimini ko‘rsating.	$* \begin{matrix} x = c_1e^{t} + c_2e^{5t} \\ y = -c_1e^{t} + 3c_2e^{5t} \end{matrix}$	$\begin{matrix} x = c_1e^{-t} + c_2e^{5t} \\ y = -c_1e^{-t} + 3c_2e^{-5t} \end{matrix}$	$\begin{matrix} x = c_1e^{t} + c_2e^{5t} \\ y = c_1e^{t} + 3c_2e^{5t} \end{matrix}$	$\begin{matrix} x = c_1e^{t} + 2c_2e^{5t} \\ y = -c_1e^{t} + 3c_2e^{5t} \end{matrix}$
$\begin{cases} \ddot{x} = y \\ \ddot{y} = x \end{cases}$ tenglamalar	*4 ta	3 ta	2 ta	1 ta

sistemasining nechta chiziqli bog'liqsiz yechimlari bor?				
A matritsaning e^A ko'rsatkichli funksiyani ko'rsating.	* $e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$	$e^A = E + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \ldots$	$e^A = A + \frac{E}{1!} + \frac{E}{2!} + \frac{E}{3!} + \ldots$	$e^A = E - \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$
e^A ko'rsatkichli funksiya uchun $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ tenglik qaysi shartda o'rinli?	* $AB = BA$	$AB \neq BA$	$AB = E$	$A = B + E$
$\frac{dX}{dt} = AX$ matritsali tenglamaning $X(0) = E$ shartni qanoatlantruvchi yechimini toping.	* $X(t) = e^{tA}$	$X(t) = te^A$	$X(t) = Ae^{ET}$	$X(t) = e^{-tA}$

MA'RUZA №28

Mavzu: Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsentli tenglamalar sistemasi

Reja:

1. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan sistema
2. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsientli sistemani yechish usuli
3. Misollar

Tayanch so’z va iboralar: *chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasi, chiziqli bir jinsli differensial tenglamalar sistemasi umumiy yechimi haqidagi teorema, chiziqli bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsientli sistemani yechish usuli.*

Avvalo eslatamizki, biz

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A\vec{y} + \vec{b}(x) \tag{1}$$

ko‘rinishidagi vektor-matritsali tenglamaga yoki

$$\begin{cases} \dfrac{dy_1}{dx} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n + b_1 \\ \dfrac{dy_2}{dx} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n + b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dfrac{dy_n}{dx} = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n + b_n \end{cases} \tag{2}$$

tenglamalar sistemasiga egamiz va uning umumiy yechimini mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi bo‘yicha o‘zgarmasni variatsialash usuli (Lagranj usuli) yordamida topishimiz mumkin.

Ba'zi hollarda $\vec{b}(x)$ vektor-funksiya maxsus ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu maxsus ko‘rinishdagi funksiya kvazi ko‘phaddan iborat bo‘lib, bunday funksiya $\vec{g}_m(x)e^{kx}$ ko‘rinishga ega va

$$\vec{g}_m(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \ldots\ldots\ldots \\ g_n(x) \end{pmatrix}$$

($g_i(x) - m_i$ chi tartibli ko‘phad ($m = \max\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$)) m-chi tartibli ko‘phad k-haqiqiy yoki kompleks son bo‘ladi.

Agar k-kompleks son bo‘lsa, $e^{kx} = e^{(k_1+ik_2)x} = e^{k_1x}e^{ik_2x} = e^{k_1x}(\cos k_2x + i\sin k_2x)$ formulaga ko‘ra vektor-matritsali tenglamaning o‘ng tomoni o‘rnida $\vec{g}_m(x)e^{k_1x}\cos k_2x$ va $\vec{g}_m(x)e^{k_1x}\sin k_2x$ vektor-funksiyalar olinadi. (Bu xuddi aniqmas koeffitsientlar usuli bilan bir xil).

1.Agar k son xarakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmasa, unga mos xususiy yechim

$$\vec{h}_m(x)e^{kx}$$

ko‘rinishda izlanadi, bunda $\vec{h}_m(x)$-koeffitsientlari noma'lum bo‘lgan, tartibi esa $\vec{g}_m(x)$ vektor-ko‘phadning tartibi bilan bir xil bo‘lgan m-chi darajali vektor-ko‘phaddir.

2.Agar k-son xarakteristik tenglamaning $\gamma \geq 1$ - karrali ildizi bo‘lsa, u holda unga mos xususiy yechim

$$\vec{h}_{m+\gamma}(x)e^{kx}$$

ko‘rinishda izlanadi.

1-misol. Ushbu

$$\begin{cases} y_1' = y_1 + 2y_2 + e^x \\ y_2' = y_1 + y_2 + e^{3x} \end{cases}$$

sistemani integrallang.

Yechish. Avval xarakteristik tenglamani tuzamiz va yechamiz. U tenglama $\begin{vmatrix} 1-k & 2 \\ 2 & 1-k \end{vmatrix} = 0$ yoki $(1-k)^2 - 4 = 0$ ko‘rinishga ega. Bundan $k^2 - 2k - 3 = 0$. Uning ildizlari $k_1 = 3,\ k_2 = -1$. Berilgan sistemada $b_1(x) = e^x,\ b_2(x) = e^{3x}$ bo‘lib, bunda $k_1 = 3$ xarakteristik tenglamaning 1 karrali ildizidir. Buni hisobga olgan holda xususiy yechimni

$$y_1 = b_1e^x + (b_2 + b_3x)e^{3x}$$

$$y_2 = a_1e^x + (a_2 + a_3x)e^{3x}$$

ko‘rnishda izlaymiz. Tegishli hosilalar olib, ularni berilgan sistemaga qo‘yamiz va so‘ngra o‘zgartirishlar bajaramiz:

$$y\square\square_1 q b_1 e^x Q(b_3 Q 3b_2 Q 3b_3 x)e^{3x}$$

$$y\square\square_2 q a_1 ex Q(a_{3Q} 3a_2 Q 3a_3 x)e^{3x}$$

$$\begin{cases} b_1l^x + (b_3 + 3b_2 + 3b_3x)l^{3x} = b_1l^x + (b_2 + b_3x)l^{3x} + 2a_1l^x + 2(a_2 + b_3x)l^{3x} + l^x \\ a_1l^x + (a_3 + 3a_2 + 3a_3x)l^{3x} = 2b_1l^x + 2(b_2 + b_3x)l^{3x} + a_1l^x + (a_2 + a_3x)l^{3x} + l^{3x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1l^x + (b_3 + 3b_2 + 3b_3x)l^{3x} = (b_1 + 2a_1 + 1)l^x + (b_2 + 2a_2 + (b_3 + 2a_3)x)l^{3x} \\ a_1l^x + (a_3 + 3a_2 + 3a_3x)l^{3x} = (2b_1 + a_1)l^x + (2b_2 + a_2 + 1 + (2b_3 + a_3)x)l^{3x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b_1 = b_1 + 2a_1 + 1, b_3 + 3b_2 + 3b_3x = b_2 + b_3x + 2a_2 + 2a_3x \\ a_1 = 2b_1 + a_1, a_3 + 3a_2 + 3a_3x = 2b_2 + 2b_3x + a_2 + a_3x + 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 1 = 0, b_3 + 3b_2 = b_2 + 2a_2, 3b_3 = b_3 + 2a_3 \\ 2b_1 = 0, a_3 + 3a_2 = 2b_2 + a_2 + 1, 3a_3 = 2b_3 + a_3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = -\dfrac{1}{2}; b_1 = 0 \\ b_3 + 2b_2 = 2a_2 \\ 2b_3 = 2a_3 \\ 2b_2 = a_3 + 2a_2 - 1 \end{cases}$$

oxirgi tenglamalarda $a_3 = b_3 = \dfrac{1}{2}, a_2 = \dfrac{1}{4}, b_2 = 0$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, berilgan sistemaning xususiy yechimi $y_1 = \dfrac{1}{2}xl^{3x}, y_2 = -\dfrac{1}{2}l^x + (\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2}x)l^{3x}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi.

Mos bir jinsli sistemaning umumiy yechimni ham topish qiyin emas (oldingi mavzuda bor). Ushbu

$$\begin{cases} y_1 = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} \\ y_2 = c_1e^{3x} - c_2e^{-x} \end{cases}$$

vektor-funksiya tegishli umumiy yechim ekanligini bevosita tekshirib ko‘rish mumkin. Shunday qilib berilgan bir jinsli bo‘lmagan sistemaning umumiy yechimi

$$y_1 = c_1e^{3x} + c_2e^{-x} + \frac{1}{2}xe^{3x}$$

$$y_2 = c_2e^{3x} - c_2e^{-x} - \frac{1}{2}e^{x} + (\frac{1}{4} + \frac{x}{2})e^{3x}$$

vektor-funksiyadan iborat.
o'zgarmas variatsiyalash usuli. Agar

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} + \vec{b}(x) \tag{3}$$

tenglamaga mos bir jinsli

$$\frac{d\vec{y}}{dx} = A(x)\vec{y} \tag{4}$$

tenglamaning umumiy yechimi ma'lum bo'lsa, u holda bir jinsli bo'lmagan tenglamanineg umumiy yechimini topish mumkin. Bu o'zgarmasni variatsiyalash usulining mohiyati bilan amalga oshiriladi. quyida shu usulning mohiyati bilan tanishamiz.

Aytaylik, $y = \sum_{j=1}^{n} c_j\varphi^{(j)}(x)$ funksiya (4) tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. bu formulada $s_1, s_2, \ldots, s_n$ lar ixtiyoriy o'zgarmaslari ekani ma'lum. Endi (3) tenglamaning yechimini shunga o'xshash

$$y = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\varphi^{(j)}(x), g_j(x) \in c^1(I) \tag{5}$$

Ko'rinishda izlaymiz. (5)funksiya (3) tenglamaning yechimi bo'lsin deylik. u holda quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y^1 = \sum_{j=1}^{n} g_j'(x)\varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\frac{d}{dx}(\varphi^{(j)}(x))$$

Topilgan ifodani (3) ga qo'yamiz:

$$\sum_{j=1}^{n} g_j^1(x)\varphi j(x) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x)\frac{d}{dx}(\varphi^{(j)}(x)) = A(x)[\sum_{j=1}^{n} g_j(x)\varphi^{(j)}(x)] + b(x)$$

Bundan $\frac{d}{dx}(\varphi^{(j)}(x)) = A(x)\varphi^{(j)}(x)$ ekanini hisobga olib quyidagiga ega bo'lamiz:

$$\sum_{j=1}^{n} g_j'(x)\varphi j(x) + \sum_{j=1}^{n} g_j(x)[A(x)\varphi^{(j)}(x)] = \sum_{j=1}^{n} g_j(x)[A(x)\varphi^{(j)}(x)] + b(x)$$

yoki

$$\sum_{j=1}^{n} g_j'(x)\varphi^{(j)}(x) = b(x) \tag{6}$$

Topilgan (6) sistema uchun *b(x)*□0 bo'lganidan *u* $g_j^1(x)$-larga nisbatan chiziqli bir jinsli bo'lmagan sistemadan iborat. Uning determinanti:
Wq[□*$^{(1)}$, ..., *□*$^{(n)}$]*□*0, x* □ *I*. Demak, (6) dan $g_j^1(x)$ larning yagona ifodalarini topamiz: $g_j^1(x) = h_j(x)$

Bundan $g_j^1(x) = \int h_j(x)dx + \bar{c}_j$. Bu ifodani (5) ga qo'yamiz:

$$y = \sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j\varphi^{(j)}(x) + \sum_{j=1}^{n} \varphi^{(j)}(x) = \int h_j(x)dx \tag{7}$$

bu yerda $\overline{c_j}$ lar ixtiyoriy o'zgarmaslar.

O‘zgarmasni variatsiyalash usulining mohiyati ana shundan iborat. Topilgan (7) formulaga diqqat bilan e'tibor qilsak, bu formula mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y=\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_j\varphi^{(j)}(x)$$

lar bilan bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning yechimi (xususiy yechim)

$$\sum_{j=1}^{n}\varphi^{(j)}(x)=\int h_j(x)dx$$

lar yig‘indisidan iborat. 2-misol. Ushbu $\begin{cases} y_1^1=y_2+\dfrac{1}{\cos x}\\ y_2^1=-y_1\end{cases}$ sistemani integrallang. Xarakteristik tenglama ildizlari $k_{1,2}=\pm i \quad k_1=i$:

$$\alpha^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\Rightarrow\alpha^{(1)}e^{ix}=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}e^{ix}=\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}(\cos x+i\sin x)=\begin{pmatrix}\cos x+i\sin x\\ -\sin x+i\cos x\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$ erkli yechimlari.

yechish: mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$\begin{cases} y_1^1=y_2\\ y_2^1=-y_1\end{cases}\Rightarrow y_1''=y_2'=-y'\Rightarrow_1 y_1''+y_1'=0\Rightarrow r_2+1=0\Rightarrow r_{1,2}=\pm i\Rightarrow$$

$$y_1=c_1\cos x+c_2\sin x$$

$$y_2=y_1'=-c_1\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

yoki umumiy yechimni

$$y=c_1\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$ ko‘rinishda yozish mumkin.

Sistemani o‘zgarmasni variatsiyalash usuli bilan integrallaymiz. yechimni

$$y=g_1(x)\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+g_2(x)\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$ lar ko‘rinishda izlaymiz. $g_1^1(x)$ va $g_2^1(x)$ larni topish uchun

ushbu $\begin{cases} g_1^1(x)\cos x+g_2^1(x)\sin x=\dfrac{1}{\cos x}\\ -g_1^1(x)\sin x+g_2^1(x)\cos x=0\end{cases}$ sistemaga egamiz. Undan Wq1, $g_1^1(x)$ qtgx va $g_2^1(x)$

$$g_1(x)=x+\bar{c}_1,\ g_2(x)=-\ln|cosx|+\bar{c}_2$$ kelib chiqadi. Shunday qilib umumiy yechimni yozamiz:

$$y=\bar{c}_1\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}+\bar{c}_2\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}\cos x\\ -\sin x\end{pmatrix}-\ln|\cos x|\begin{pmatrix}\sin x\\ \cos x\end{pmatrix}$$

Aniqmas koeffitsientlar usuli

1) $\begin{cases} y_1^1=y_2\\ y_2^1=y_1+e^x\end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1^1=-y_2\cos x\\ y_2^1=-y_1+\sin x\end{cases}$

O‘zgarmasni variatsiyalash usuli

1) $\begin{cases} y_1^1=y_2+1\\ y_2^1=y_1+\dfrac{1}{\sin x}\end{cases}$ 2) $\begin{cases} y_1^1=y_2+\cos x\\ y_2^1=-y_1+1\end{cases}$

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Yechimning fundamental sistemasi. Ostrogradskiy -Liuvill formulasi
2. Bir jinsli bo‘lmagan $n-$ tartibli chizikli differensial tenglamalar va ularning umumiy va xususiy yechimlarini topish. yechimning xossalari.

Glossariy

Normal chiziqli sistema - Agar normal (dinamik) sistemada $f_1, f_2, \ldots, f_m$ funksiyalar izlanayotgan funksiyalarga nisbatan chiziqli bo‘lsa, u holda bunday tenglamalar sistemasi chiziqli sistema deyiladi.

Chiziqli differensianal tenglamalar – Agar birinchi tartibli differensianal tenglamani $\dfrac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$ (1) ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $x^2y'' - 6y = 12\ln x$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Logranj metodini izohlang?
2. Agar k son harakteristik tenglamaning ildizi bo‘lmasa, unga mos xususiy yechim qanday ko‘rinishda izlanadi?
3. Bir jinsli sistemaning umumiy yechimi qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
4. Chiziqli bir jinsli bo‘lmagan sistemaning determinanti qanday ko‘rinishda bo‘ladi?

Amaliy mashg’ulot-28

1. $y'' + 3y' + 2y = 0; \quad y(0) = 1; \quad y'(0) = -1$ j: $y = e^{-x}$
2. $y'' + 4y = 0; \; y(0) = 0; \; y'(0) = 2$ j: $y = \sin 2x$
3. $y'' + 2y' = 0; \; y(0) = 1; \; y'(0) = 0$ j: $y = 1$
4. $y'' = \dfrac{y}{a^2}; \quad y(0) = a; \quad y'(0) = 0$ j: $y = ach\dfrac{x}{a}$
5. $y'' + 3y' = 0; \; y(0) = 0; \; y(3) = 0$ j: $y = 0$
6. $y'' + \pi^2 y = 0; \quad y(0) = 0; \quad y(1) = 0$ j: $y = c\sin \pi x$

TEST

Xususiy yechimi $y_1 = xe^x$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko‘rsating.	* $y''-2y'+y=0$	$y''-2y'-3y=0$	$y'-y=0$	$y''+2y'+y=0$
Xususiy yechimi $y_1=x^2e^{-x}$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko‘rsating.	* $y'''+3y''+3y'+y=0$	$y'''-y'=0$	$y''-y=0$	$y'''+3y''=0$
Xususiy yechimni aniqmas koeffitsientlar usuli bilan toping $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$	* $y=(ax^2+bx+c)e^{2x}$	$y=x(ax^2+bx+c)e^{2x}$	$y=x(ax+b)e^{2x}$	$y=ax^2e^{2x}$
$x=e^t, y=-e^t$ funksiya quyidagi tenglamalar sistemalaridan qaysi birining yechimi bo‘ladi?	* $\dot{x}=2x+y$ $\dot{y}=3x+4y$	$\dot{x}=x+y$ $\dot{y}=3y-2x$	$\dot{x}=x-y$ $\dot{y}=y-4x$	$\dot{x}=x-3y$ $\dot{y}=3x+y$
$\begin{cases} y'=\dfrac{x}{z} \\ z'=-\dfrac{x}{z} \end{cases}$ nochiziqli sistemaning umumiy yechimini ko‘rsating.	* $y=c_2e^{c_1x^2}$, $z=\dfrac{1}{2c_1c_2}e^{-c_1x^2}$	$y=c_2e^{c_1x}$, $z=\dfrac{1}{2c_1c_2}e^{-c_1x^2}$	$y=c_1c_2e^{x^2}$, $z=\dfrac{1}{2c_1c_2}e^{-c_1x^2}$	$y=c_2e^{x^2}$, $z=\dfrac{1}{2c_1c_2}e^{c_1x^2}$
$\begin{cases} \dot{x}=y+2x \\ \dot{y}=3x+4y \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechimini ko‘rsating.	* $x=c_1e^t+c_2e^{5t}$ $y=-c_1e^t+3c_2e^{5t}$	$x=c_1e^{-t}+c_2e^{5t}$ $y=-c_1e^{-t}+3c_2e^{-5}$	$x=c_1e^t+c_2e^{5t}$ $y=c_1e^t+3c_2e^{5t}$	$x=c_1e^t+2c_2e^{5t}$ $y=-c_1e^t+3c_2e^{5t}$
$\begin{cases} \ddot{x}=y \\ \ddot{y}=x \end{cases}$ tenglamalar sistemasining nechta chiziqli bog‘liqsiz yechimlari bor?	*4 ta	3 ta	2 ta	1 ta
A matritsaning e^A ko‘rsatkichli funksiyani ko‘rsating.	* $e^A=E+\dfrac{A}{1!}+\dfrac{A^2}{2!}+\dfrac{A^3}{3!}+\ldots$	$e^A=E+\dfrac{A}{1}+\dfrac{A^2}{2}+\dfrac{A^3}{3}+\ldots$	$e^A=A+\dfrac{E}{1!}+\dfrac{E}{2!}+\dfrac{E}{3!}+\ldots$	$e^A=E-\dfrac{A}{1!}+\dfrac{A^2}{2!}+\dfrac{A^3}{3!}+\ldots$
e^A ko‘rsatkichli funksiya uchun $e^{A+B}=e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A$ tenglik qaysi shartda o‘rinli?	* $AB=BA$	$AB\neq BA$	$AB=E$	$A=B+E$
$\dfrac{dX}{dt}=AX$ matritsali tenglamaning $X(0)=E$ shartni qanoatlantruvchi yechimini toping.	* $X(t)=e^{tA}$	$X(t)=te^A$	$X(t)=Ae^{ET}$	$X(t)=e^{-tA}$

MA'RUZA 29

Mavzu: Chiziqli differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun chegaraviy masalalar.

Reja:

1. Masalaning qo‘yilishi
2. Bir jinsli chegaraviy masala.

Tayanch so’z va iboralar: *chiziqli differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun chegaraviy masalalar, bir jinsli chegaraviy masala.*

Chiziqli normal sistemalar uchun xam n-tartibli chiziqli differensial tenglamalar uchun qo‘yilgan chegaraviy masalalarni ko‘rish mumkin.
Ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dx} = f_1(x, y, . . y_n), \\ ------------ \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y, . . . y_n) \end{cases} \tag{1}$$

normal sistema berilgan bo‘lib, $f_1,...f_n$ funksiyalar (nQ1) o‘lchovli fazoning biror D_{nQ1} soxasida aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. D_{nQ1} soxadan ikki nuqta olamiz.

$$(x_0,y_1(x_0),\ldots,y_n(x_0))€D_{nQ1} \quad (x_1y_1x_1,\ldots,y_n(x_1)€D_{nQ1}$$

Chegaraviy masalani qo‘yilishi: agar (1) normal sistema uchun

$$g_i(x_0,y_1(x_0),\ldots,y_n(x_0));\ y(x_1),\ldots,y_n(x_1)q0;\ iq1,..n \tag{2}$$

munosabatlar berilgan bo‘lib, sistemaning (2) shartni qanoatlantiradigan yechimini izlash talab etilsa, u xolda normal sitema uchun chegaraviy masala qo‘yilgan deyiladi.
Agar $g_iqyi(x_0)$-y_1, iq1,n bo‘lsa, (2) cheraviy shart koshi masalasining shartiga aylanadi.
2.Endi (2) munosabatlarda g_i funksiyalar quyidagi ko‘rinihda bo‘lsin.

$$\left.\begin{array}{l} g_i(y) = \{= (a_1^{(1)}, y(x_0)) + (a_2^{(1)}, y(x_1)) - A_1 = g_0^1(y) - A_1 \\ ------------------------ \\ g_n(y) = (a_1^{(1)}, y(x_0)) + (a_2^{((n)}, y(x_1)) - A = g_n^1(y) - A_n \end{array}\right] \tag{3}$$

bunda $a_i^{(j)} = (a_i^{(j)}, a_i^{(j)}, ... a_{in}^{(j)}), i = 1,2; j = 1,n$ o‘zgarmas vektorlar, A,….A_n - o‘zgarmas sonlar (a,u) qavslar skalyar ko‘paytmani bildiradi. Agar $A_1 \equiv \ldots \equiv A_n \equiv 0$ bo‘lsa, masala bir jinsli chegaraviy masala deyiladi.
Aks xolda biz bir jinsli bo‘lmagan chegaraviy masalaga egamiz.
Keyingi muloxazalarni chiziqli tenglamalarning normal sistemasi uchun yuritamiz. Bizga ushbu L(p)yq0 bir jinsli normal sistema berilgan bo‘lib, chegaraviy shart

$$g_3^0(y) = 0; S = 1,2,...n \tag{4}$$

ko‘rinishda bo‘lsin. Boshqacha aytganda, bir jinsli normal sistema uchun bir jinsli chegaraviy masala qo‘yilgan bo‘lsin. Muxim teoremani keltiraylik.

TEOREMA. Agar $Y^{(i)}(x), y^{(2)}(x), \ldots y^{(n)}(x)$ vektor funksiyalar biror J intervalda $\frac{dy}{dx} A(x) \cdot y$ tenglamaning chiziqli erkli yechimlari bo‘lsa, u xolda L(p)yq0, $g_3^0(y) = 0; S = 1,2,...n$

chegaraviy masala trivialmas yechimga ega bo‘lishi uchun ushbu

$$D = \begin{vmatrix} g_1^0(y^{(1)}), g_1^0(y^{(2)}) .. g_1^0(y^{(n)}) \\ g_2^0(y^{(1)}), g_2^0(y^{(2)}) .. g_2^0(y^{(n)}) \\ ---------------- \\ g_n^0(y^{(1)}), g_n^0(y^{(2)}) .. g_n^0(y^{(n)}) \end{vmatrix}$$

determinantning nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

Bir jinsli chegaraviy masala uchun Grin funksiya kiritish mumkin. Bir jinsli bo‘lmagan sistemaning xususiy yechimini shu Grin funksiya orqali yozish xam mumkin. Shunga o‘xshash, chiziqli vektor-differensial operator L uchun xos sonlar va xos vektor-funsiyalar tushunchasini kiritish, qolaversa, chegaraviy masalalarni xam o‘rganishimiz mumkin.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Umumiy yechim haqida teorema. O‘zgarmasni variatsiyalash metodi. Koshi formulasi.

2. O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli differensial tenglamalar, Eyler tenglamasi.

Glossariy

$$\begin{cases} \dfrac{dy^1}{dx} = f_1(x, y, ..y_n), \\ ------------ \\ \dfrac{dy_n}{dx} = f_n(x, y, ..y_n) \end{cases}$$

Chegaraviy masala qo’yilishi - normal sistema berilgan bo‘lib, $f_1,...f_n$ funksiyalar (nQ1) o‘lchovli fazoning biror D_{nQ1} soxasida aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. D_{nQ1} soxadan ikki nuqta olamiz.

$(x_0,y_1(x_0),\ldots,y_n(x_0))€D_{nQ1}$ $(x_1y_1x_1,\ldots,y_n(x_1)€D_{nQ1}$

Chegaraviy masalani qo‘yilishi: agar (1) normal sistema uchun

$g_i(x_0,y_1(x_0),\ldots,y_n(x_0)); y(x_1),\ldots,y_n(x_1)q0;$ iq1,..n

munosabatlar berilgan bo‘lib, sistemaning (2) shartni qanoatlantiradigan yechimini izlash talab etilsa, u xolda normal sitema uchun chegaraviy masala qo‘yilgan deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $y^{(5)} - 2y^{(4)} - 16y' + 32y = 0$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Chegaraviy differensial tenglamalarning normal sistema uchun chegaraviy masala qanday

qo‘yiladi?
2. Bir jinsli chegaraviy masala qanday bo‘ladi?
3. Normal sistema uchun chegaraviy masala trivial yechimga ega bo‘lishning zaruriy va yetarli shartini ayting?

Amaliy mashg’ulot-29

1. $y''-y'+y=x^3+6$ j: $y=e^{\frac{x}{2}}\left(c_1\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}+c_2\sin\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)+x^3+3x^2$

2. $y''+y'-6y=xe^{2x}$ j: $c_1e^{2x}+c_2e^{-3x}+c\left(\frac{x}{10}-\frac{1}{25}\right)e^{2x}$

3. $y''-2y'+y=\sin x+shx$ j: $y=(c_1+c_2x)e^x+\frac{1}{2}\cos x+\frac{x^2}{4}e^x-\frac{1}{8}e^{-x}$

4. $y''+y'=\sin^2 x$ j: $y=c_1+c_2e^{-x}+\frac{1}{2}x+\frac{1}{20}(2\cos x-\sin 2x)$

5. $y''-2y'+5y=e^x\sin 2x$ j: $y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)+\frac{x}{4}e^x\sin 2x$

6. $y''-2y'-8y=e^x-8\cos 2x$ j: $y=c_1e^{-2x}+c_2e^{4x}-\frac{1}{9}e^x+\frac{1}{5}(3\cos 2x+\sin 2x)$

7. $y''-y'=2x-1-3e^x$ j: $y=c_1+c_2e^x-3xe^x-x-x^2$

8. $y''+2y'+y=e^x+e^{-x}$ j: $y=\left(c_1+c_2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{-x}+\frac{1}{4}e^x$

9. $y''-2y'+10y=\sin 3x+e^x$ j: $y=(c_1\cos 3x+c_2\sin 3x)e^x+\frac{1}{37}(\sin 3x+6\cos 3x)+\frac{e^x}{9}$

10. $y''-4y'+4y=2e^{2x}+\frac{x}{2}$ j: $y=(c_1+c_2x+x^2)e^{2x}+\frac{x+1}{8}$

TEST

e^A ko‘rsatkichli funksiya uchun $e^{A+B}=e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A$ tenglik qaysi shartda o‘rinli?	* $AB=BA$	$AB\neq BA$	$AB=E$	$A=B+E$
$\frac{dX}{dt}=AX$ matritsali tenglamaning $X(0)=E$ shartni qanoatlantruvchi yechimini toping.	* $X(t)=e^{tA}$	$X(t)=te^A$	$X(t)=Ae^{ET}$	$X(t)=e^{-tA}$
Agar chiziqli bir jinsli sistemaning har bir yechimi $t\to+\infty$ da nolga intilsa, u holda nol yechim...	*Asimptotik turg‘un	Turg‘un, lekin asimptotik turg‘un emas	Turg‘un emas	Bunday yechim mavjud emas
Agar chiziqli bir jinsli sistemaning har bir yechimi $t\to+\infty$ da chegaralangan bo‘lsa u holda yechim...	*Turg‘un, lekin asimptotik turg‘un emas	Turg‘un emas	Asimptotik turg‘un	Bunday yechim mavjud emas
Agar chiziqli bir jinsli sistema	*Turg‘un emas	Turg‘un, lekin	Asimptotik turg‘un	Bunday yechim

hech bo‘lmaganda bitta chegaralanmagan ($t \to +\infty$ da) yechimga ega bo‘lsa, u holda nol yechim...		asimptotik turg‘un emas		mavjud emas
Agar sistmaning birorta yechimi Lyapunov ma’nosida turg‘un bo‘lsa, u holda bu sistemaning	*Hamma yechimlari turg‘un	Qolgan yechimlari turg‘un emas	Hamma yechimlari asimptotik turg‘un	Ba’zi yechim turg‘un
Nochiziqli sistemalarni yechishda integrallanuvchi kombinatsiyalarni topiladi. Bunda teng kasrlar hossasidan foydalaniladi. Agar $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\dots=\frac{a_n}{b_n}=t$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $k_1, k_2, \dots k_n$ larda	* $\frac{k_1a_1+k_2a_2+\dots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\dots k_nb_n}=t$	$\frac{k_1b_1+k_2b_2+\dots k_nb_n}{k_1a_1+k_2a_2+\dots+k_na_n}=t$	$\frac{k_1a_1+k_2a_2+\dots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\dots k_nb_n}=(t+1)^2$	$k_1\frac{a_1}{b_1}+k_2\frac{a_2}{b_2}+\dots+k_n\frac{a_n}{b_n}=$
Ushbu $x^2-y^2=c$, va $x+y=c_2z$ birinchi integral qaysi sistemani qanoatlantiradi?	* $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}$	$\frac{dx}{2y-z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$	$\frac{dx}{z}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{y}$	$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy+z}$
$y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dx}=0$ birinchi tartibli xususiy hosilali tenglamaning umumiy yechimini ko‘rsating.	* $z=\varphi(x^2+y^2)$	$z=\varphi(x+y)$	$z=\varphi(x^2-y^2)$	$z=\varphi(x+y^2)$
$y\frac{dz}{dx}-x\frac{dz}{dx}=0$ tenglamaning $y=1$ da $z=2x$ bo‘lgan yechimini toping.	* $z=2xy$	$z=2xy^3$	$z=2xy^2$	$z=2x\sqrt{y}$

MA'RUZA № 30, 31

Mavzu: Avtonom (muxtor) sistemalar.Xossalari.

Reja:

1. Normal avtonom sistema.
2. Avtonom sistema
3. Avtonom sistemaning xossalari
4. Avtonom sistemaning traektoriyasi.

Tayanch so'z va iboralar: *avtonom sistema, normal avtonom sistema, dinamik sistema , xarakat traektoriyasi, mavjudlik, yagonalik traektoriyalari, muvozanat xolat, yopiq traektoriya, muzonat nuqta, tinchlanish nuqtasi, sikl.*

Differensial tenglamalarni normal sistemasini quyidagicha yozamiz:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, \ldots x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(t, x_1, \ldots x_n) \\ ------------ \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, \ldots x_n) \end{cases} \quad \dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt} \tag{1}$$

yoki vektor ko‘rinishda xqf(t,x) (2) (1) da t- erkli o‘zgaruvchi, x_1,...x_n lar no'malum funksiyalar va

$$\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}, \quad iq1,n \tag{2}$$

TA’RIF: Agar (1)sistemada $f_1(x_1,x_2,\ldots x_n)$, $f_2(x_1,x_2,\ldots x_n)$, $f_n(x_1,x_2,\ldots x_n)$ funksiyalar t ga oshkor bog‘liq bo‘lmasa, u xolda bunday normal sistemani birinchi tartibli differensial tenglamalarning normal avtonom sistemasi deyiladi. Shunday qilib, normal avtonom sistema ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \ldots x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, \ldots x_n) \\ ------------ \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \ldots x_n) \end{cases} \tag{3}$$

ko‘rinishda yoki xqf(x) vektorli ko‘rinishda yoziladi. Qayd qilib o‘tamizki, ixtiyoriy normal sistemani tenlamalarni sonini bittaga oshirish xisobiga avtonom sistemaga keltirish mumkin. Xaqiqatdan, (1) sistemada tqX_{nQ1} deb, X_{nQ1}q1 tenglamani xosil qilish mumkin. Bunda (1) sistema o‘rniga

$$\begin{cases} \dot{x}1 = f_1(x_{n+1}, x_1, x_2 \dots, x_n) \\ \dot{x}2 = f_2(x_{n+1}, x_1, x_2 \dots, x_n) \\ \text{------------------} \\ \dot{x}_n = f_n(x_{n+1}, x_1, x_2 \dots, x_n) \\ \dot{x}_{n+1} = 1 \end{cases} \tag{5}$$

avtonom sisemaga ega bo‘lamiz.
Avtonom sistemalarning fizika va texnika masalalaridan kelib chiziqliqish ma'nosiga qarab, erkli o‘zgaruvchi sifatida t vaqt olindi. Bundan keyin biz shu belgilashni qabul qilamiz. Ta’rifdan ko‘rinadiki, avtonom sistemalar bilan tasvirlanadigan noma'lum funksiyalarning o‘zgarish qonuni vaqt o‘tishi bilan o‘zgarmaydi. Fizikaviy qonunlarda odatda shunday bo‘ladi.

Agar (3) sistemada erkli o‘zgaruvchi t sifatida vaqtni tushunilsa, bu sistema dinamik sistema deyiladi.

Endi avtonom sistema xossalarini ko‘ramiz. Bundan keyingi muloxazalarimizda (4) vektor tenglamadagi f(x) vektor funksiya biror Dn€R^n soxada Aniqlangan va birinchi tartibli xususiy xosilalari bilan uzluksiz deb faraz qilamiz.

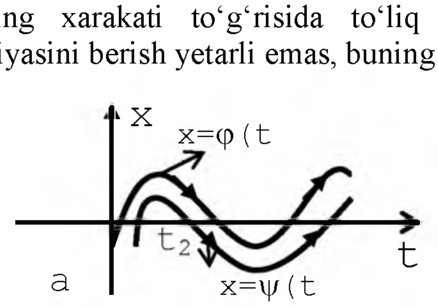
1-**TEOREMA**. Agar $x = \varphi(t)$ vektor funksiya (4) vektor tenglamasining biror yechimi bo‘lsa, u xolda ixtiyoriy o‘zgarmas S lar uchun $x = \varphi_*(t) = \varphi(t+c)$ vektor funksiya (4) tenglamaning yechimi bo‘ladi.
Isbot. Murakkab funksiyani differensiallash qoidasi bo‘yicha sodda xisoblashlar yordamida quyidagini topimiz:

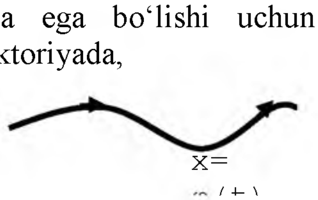
$$\dot{\varphi}_{\bullet}(t) = \frac{d}{dt}.\varphi_*(t) = \frac{d}{dt}\varphi(t+c) = \frac{d}{d(t+c)}\varphi\ (t+c)\frac{d(t+c)}{dt} = \dot{\varphi}\ (t+c)\cdot 1 =$$

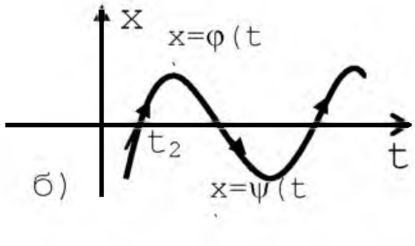
$$= \dot{\varphi}(t+c)$$

Endi $\varphi_{\bullet}(t)$ funksiya (4) tenglamaning yechimi ekanini isbotlaymiz. Teoremaning shartiga ko‘ra xq φ(t) funksiya (4) tenglamaning biror yechimi, demak ushbu φ(t)qf(φ(t)) ayniyat ixtiyoriy t da o‘rinli. Bunda t ni tQc ga almashtirsak, φ(tQc)qf(φ(tQc)) ga ega bo‘lamiz.

Topilgan munosabatdan (t)qφ(tQc)q f(φ(tQc))qf(φ_*(t))
Shu bilan teorema isbot bo‘ldi.
(3) avtonom sistemaning xar bir xqφ(t) vektor yechimiga n o‘lchovli fazoda (x_1,...x_n)qx nuqtaning xarakatini mos keltiramiz. Xarakat davomida x nuqta o‘sha fazoda biror chiziq chizadi. Shu chiziqni x nuqtaning xarakat traektoriyasi deb ataymiz. Avtonom sistemalarda no‘qtaning xarakati to‘g‘risida to‘liq ma'lumotga ega bo‘lishi uchun nuqtaning faqat traektoriyasini berish yetarli emas, buning uchun traektoriyada,







xech bo‘lmasa, xarakat yo‘nalishini xam berish lozim. (chizma)

2-**TEOREMA**. Agar $xq\varphi(x)$ va $xq\psi(t)$ vektor funksiyalar (4) tenglamaning 2 ta ixtiyoriy yechim bo‘lsa, u xolda bu yechimlar yo birota nuqtada xam kesishmaydi, yo butunlay ustma-ust tushadi. Boshqacha aytganda, agar $t_1 \neq t_2$ bo‘lib, $\varphi(t_1)q\psi(t_2)$ bo‘lsa, u xolda $\psi(t)q\varphi(tQc)$, $cqt_1\text{-}t_2$ munosabat o‘rinli bo‘ladi. **(a, b -chizma)**

Isbot. teoremani isbotlash uchun $\varphi(t)$ yechim bilan birga $\varphi_*(t)q\varphi(tQc)$,

$cqt_1\text{-}t_2$ yechimni xam ko‘ramiz. (1-teoremaga ko‘ra). Bundan $\varphi_*(t_2)q\varphi(t_2Qc)q\varphi(t_2Qt_1\text{-}t_2)q\varphi(t_1)q\psi(t_2)$ ya'ni $\varphi_*(t_2)q\psi(t_2)$

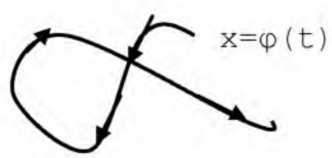
Shunday qilib, (4) tenglamaning ikkita $xq\varphi_*(t)$ va $xq\psi(t)$ yechimlari boshlang‘ich qiymatlarga ega. (t_1qt_2 da). Demak, mavjudlik va yagonalik teoremasining shartlari bajariladi va yagonalik o‘rinli, ya'ni $xq\varphi(t)$ $xq\psi(t)$ yechimlar ustma-ust tushadi.
(Aniqlanish intervallarining umumiy qismida). Bu esa teoremani isbot etadi.

Agar t_1qt_2 bo‘lsa, u xolda $\varphi(t_1)q\psi(t_1)qx$ bo‘ladi. Bundan yana □ va : teoremasiga ko‘ra $\varphi(t)q\psi(t)$ bo‘ladi.

$$\psi(t)q\varphi(\,tQs),\ sq\ t_1qt_2$$

tenglikda ikkita $\varphi(t)$ va $\psi(t)$ yechimlar traektoriyalari ustma-ust tushadi, lekin bu yechimlar quyidagi ma'noni anglatadi: 1-yechimga tegishli nuqta traektoriya bo‘ylab ma'lum masofani (s) tqc vaqtda bosim o‘tgan bo‘lsa, u xolda 2-chi yechimga tegishli nuqta traektoriya bo‘ylab bu masofani (s) t vaqtda bosib o‘tadi.

Endi avtonom sistemaning aloxida olingan bitta $xq\varphi(t)$ traektoriyasi o‘z-o‘zini kesa oladimi yoki yo‘qmi degan savol qo‘yaylik, ya'ni quyidagi xol bo‘ladimi:



Bu savolga javob avtonom sistemaning 3- muxim xossasini ochib beradi.

3-**TEOREMA**. $xq\varphi(t)$ funksiya (4) tenglamaning $r_1<t<r_2$ intervalda aniqlangan biror yechimi bo‘lsin. Agar $\varphi(t_1)q\varphi(t_2)$, $t_1\neq t_2$ va $r_1<t_1,t_2<r_2$ bo‘lsa, u xolda shu $xq\varphi(t)$ yechimni $-\infty<t<Q\infty$ intervalga davom ettirish mumkin.
Isbot. 2-teoremasiga ko‘ra $\varphi(t_1)q\varphi(t_2)$ bo‘lgani uchun $xq\varphi(tQc)$, $cqt_1\text{-}t_2$ funksiya xam yechim bo‘ladi, ushbu $\varphi(t)\equiv\varphi(tQc)$, $r_1<t<r_2$ ayniyat o‘rinli. Bu ayniyatdan $\varphi(t)$ funksiya $r_1<t<r_2$ intervalda aniqlangani uchun $\varphi(tQc)$ funksiya
$r_1\text{-}[c]<t<r_2Q[c]$ intervalda aniqlangan bo‘ladi. Xaqiqatdan, $r_1<tQc<r_2$ tengsizlikdan $C>0$ bo‘lganda $r_1\text{-}c<t<r_2$ va demak, yechimni r_1 dan chapga s miqdorga davom ettirish mumukin; shunga o‘xshash $C<0$ bo‘lganda $r_1<t<r_2\text{-}c$ ya'ni yechimni r_2 dan o‘ngga $-cq[c]$ miqdorga davom ettirish mumkin bo‘ladi. Xar ikki xolni birlashtirib, yechimni $r_1\text{-}[c]<t<r_2Q[c]$ intervalga davom ettirish mumkinligini qayd qilamiz. Shu intervalda aniqlangan $\varphi(t)$ yechim uchun (bu yechim uchun $\varphi(t_1)q\varphi(t_2)$, $t_1\neq t_2$) baribir $\varphi^{(1)}(t)\equiv\varphi^{(1)}(tQc)$ ayniyat o‘rinli.

$\varphi^{(1)}(tQc)q\ \varphi_*^{(1)}(tQc)$ desak,

$\varphi_*^{(1)}(t_1)q\ \varphi^{(1)}(\,t_1Qc)q\ \varphi(t_1)q\ \varphi(t_2)$,

ya'ni $\varphi_*^{(1)}((t_1)q\ \varphi(t_2)$ bundan avvalgidek $\varphi_*^{(1)}(tQc)\equiv\ \varphi_*^{(1)}(t)$ ekani kelib chiqadi. $\varphi_*^{(1)}(t)$funksiya $r_1\text{-}[c]<t<r_2Q[c]$intervalda aniqlangani uchun oxirgi ayniyatdan foydalanib mavjudlik intervalini yanada kegaytirish mumkin. Boshqacha aytganda, $r_1\text{-}2[c]<t<r_2Q2[c]$ intervalda aniqlangan

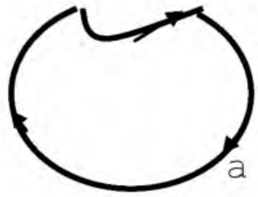
yechimni qurish mumkin. Tegishli yechimni $\varphi^{(k)}(t)$ deb belgilaymiz. Shunga o'xshash, mavjudlik intervali r_1-k[c]<t<r_2Qk[c] dan iborat bo'lgan $\varphi^{(k)}(t)$ yechimni qurish mumkin. Yuqoridagi tengsizlikda k→∞ da limitga o'tsak, -∞<t<Q∞ interval xosil bo'ladi. ((r_1 va r_2) qanday bo'lishidan qat'iy nazar)

Shu intervalda aniqlangan yechimni $\varphi^{o}(t)$ deymiz. Shunday qilib teorema isbot bo'ldi.

4-**TEOREMA**. (muvozanat xolat va yopiq traektoriya xaqida.)

Agar (4) tenglamaning biror φ(t) yechimi uchun $\varphi(t_1)$q$\varphi(t_2)$, t_1 t_2 tenglik bajarilsa, quyidagi biri ikkinchisini inkor etadigan ikki xol yuz berish mumkin:

1. Barcha t lar uchun φ(t)qa, aqconst, a D_n
2. Shunday musbat son T mavjudki, t uchun φ(tQT)q φ(t) tenglik bajarilib, 0<[τ_1-τ_2]<T bo'lganda $\varphi(\tau_1)\neq\varphi(\tau_2)$ tengsizlik o'rinli.



1) xolda vaqtenglama o'tishi bilan φ(t) nuqta xarakat qilmaydi, u doim D_n to'plamning a no'qtasida bo'ladi. Shu φ(t) yechim va a nuqta (4) tenglamaning, ya'ni normal avtonom sistemaning muvozanat xolati yoki muvozanat nuqtasi deb xam ataladi. **(b-chizma)**

2) xolda xqφ(t) yechim davriy yechim, uning grafigi yopiq traektoriya yoki sikl (davra) deb ataladi. **(a-chizma.)**

TA'RIF. Ushbu φ(t)≡φ(tQc) (6) ayniyat o'rinli bo'ladigan xar bir s≠0 son xqφ(t) yechimining davri deyiladi.

xqφ(t) yechimning barcha davrlaridan tuzilgan to'plamni F bilan belgilaymiz. Xozir F sonli to'plamni ba'zi xosalarini tekshiramiz.

1^0 . Agar SF bo'lsa, u xolda -SF bo'ladi. Xaqiqatdan xam, (6) da, ya'ni φ(t)φ(tQC) ayniyatda t ni t-c ga almashtiramiz: φ(t-C)q φ(t). Bundan –CF kelib chiqadi.

2^0. Agar φ(t)qφ(tQC_i), iq1,2,3,…k, ya'ni C_iF bo'lsa, u xolda φ(t)qφ(tQ $\sum_{i=1}^{k} C_i)$, ya'ni $\sum_{i=1}^{k} C_i \in F$, bo'ladi. Xaqiqatan φ(t)qφ(tQC_1)

(t ni tQS_2, bilan almashtiramiz.)

φ(t)≡φ(tQc_2)≡φ(tQc_1Qc_2) va xakozo.

$$\varphi(t)\equiv\varphi(tQc_{k-1})\equiv\varphi(tQc_{k-2}QC_{k-1})\equiv\ldots\equiv\varphi(tQ\sum_{i=1}^{k} C_i) ,$$

$$\varphi(t)\equiv\varphi(tQc_k)\equiv\ldots\equiv\varphi(tQ\sum_{i=1}^{k} C_i)$$

3^0 . F to'plam yoyiq.

Xaqiqatdan ushbu C_1,C_2,…C_k, ketma-ketlik F to'plam elementlaridan tuzilgan bo'lib biror, C_0 ga yaqinlashuvchi bo'lsin. C_o€F ekanini ko'rsatamiz. Ravshanki, φ(t)qφ(tQC_k). Shuning uchun φ(t) funksiya ning uzluksizligiga ko'ra argumentda limitga o'tish mumkin, ya'ni quyidagi amallar o'rinli:

$$\varphi(t) = \lim_{k\to\infty} = \varphi(t) = \lim_{k\to\infty} \varphi(t + c_k) = \varphi(t + \lim_{k\to\infty} c_k) = \varphi(t + c_0)$$

Demak, C_0€F va F –yopiq to'plam.

4^0. F to'plam 0 dan farqli sonlarni o'z ichiga oladi, chunki (6) da S≠0 (t_1≠t_2)

Endi teoremani isbotiga o'taylik. F to'plam uchun quyidagi ikki xol bo'lishi mumkin:

1) F to'plam barcha xaqiqiy solar to'plamidan iborat.
2) F to'plamda shunday kichik musbat T son mavjudki, u to'plam shu butun T songa butun karrali sonlardan iborat.

Boshqa xollar bo'la olmaydi. Buni isbotlaymiz. F to'plamda musbat sonlar bor, chunki aF bo'lib, C-C lar uning elementi.

1-xol. F to'plamda eng kichik musbat son bo'lmasin, ya'ni E>0 uchun shunday C davr topiladiki, S< bo'ladi. 2-xossaga ko'ra m–butun bo'lsa, mc xam davr bo'ladi. S< bo'lgani uchun xaqiqiy S_0 uchun shunday butun m topiladiki, [C_0-mc]< tengsizlik bajariladi. Bundan S_0 con F to'plamning limit nuqtasi ekani kelib chiqadi. Shu bilan birga F to'plam yopiq bo'lgani uchun S_0□F va y lar barcha xaqiqiy sonlar to‘plami bilan ustma-ust tushadi.

Endi F to‘plam barcha xaqiqiy sonlar to‘plami bilan ustma-ust tushmasin, deylik. Yuqorida isbotlanganiga ko‘ra bu xolda F to‘plamda eng kichik musbat son T mavjud S- davr bo‘lsin. U xolda shunday butun m sonni tanlash mumkinki, ushbu [C-mT]<T tengsizlik bajariladi. Bunda S–mT≠0 deylik. Ammo S va mT lar davr bo‘lgani uchun C-mT xam davr bo‘ladi. Demak, [C-mT] xam davr bo‘ladi. Shuning uchun [C-mT]>0 va [C-mT]<T tengsizliklardan F to‘plamning T dan kichik bo‘lgan musbat son davri mavjud. Bu bo‘lishi mumkin emas, chunki T son F to‘plamda eng kichik musbat davr edi.

Ziddiyat SqmT bo‘lishi kerakligini isbotlaydi. Demak, SqmT. Shunday qilib, ko‘rilayotgan xolda F to‘plam T ga karrali sonlardan iborat.

Natija qilib aytganda, davrlardan tuzilagna F to‘plam yo barcha xaqiqiy sonlardan iborat yoki unda eng kichik T>0 mavjud va F to‘plam shu T ga karrali sonlardan tashkil topgan.

Birinchi xolda φ(t) yechim uchun xaqiqiy son davr bo‘ladi, bu faqat φ(t) vektor funksiya o‘zgarmas vektordan iborat bo‘lgandagina mumkin, ya'ni agar φ(t)qa a□D_n bo‘lsa, xam φ(tQc)qa tenglik bajarilaveradi. Biz muvozanat xolatiga egamiz.

Ikkinchi xolda eng kichik musbat davr T soni φ(t) yechimning davri (eng kichik musbat davri) bo‘ladi. Biz davriy yechimga egamiz. Shunday qilib, teorema to‘liq isbotlandi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Bir jinsli bo‘lmagan o‘zgarmas koeffitsienti chiziqli differensial tenglamalar va ularning xususiy yechimlarini topish usullari.
2. Differensiallar tenglamalar sistemasi. Differensial tenglamalar sistemasini normal ko‘rinishga keltirish.

Glossariy

Normal avtonom sistema - Agar (1)sistemada $f_1(x_1,x_2,\dots x_n)$, $f_2(x_1,x_2,\dots x_n)$, $f_n(x_1,x_2,\dots x_n)$ funksiyalar t ga oshkor bog‘liq bo‘lmasa, u xolda bunday normal sistemani birinchi tartibli differensial tenglamalarning normal avtonom sistemasi deyiladi. Shunday qilib, normal avtonom sistema ushbu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1,\dots x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1,\dots x_n) \\ \text{------------} \\ \dot{x}_n = f_n(x_1,\dots x_n) \end{cases}$$

ko‘rinishda yoki xqf(x) vektorli ko‘rinishda yoziladi.

Normal avtonom sistema xossalari –

Agar $x = \varphi(t)$ vektor funksiya (4) vektor tenglamasining biror yechimi bo‘lsa, u xolda ixtiyoriy o‘zgarmas S lar uchun $x = \varphi_*(t) = \varphi(t+c)$ vektor funksiya (4) tenglamaning yechimi bo‘ladi.

Agar xqφ(x) va xqψ(t) vektor funksiyalar (4) tenglamaning 2 ta ixtiyoriy yechim bo‘lsa, u xolda bu yechimlar yo birota nuqtada xam kesishmaydi, yo butunlay ustma-ust tushadi. Boshqacha aytganda, agar $t_1 \neq t_2$ bo‘lib, φ(t_1)qψ(t_2) bo‘lsa, u xolda ψ(t)qφ(tQc), cqt_1-t_2 munosabat o‘rinli bo‘ladi.

xqφ(t) funksiya (4) tenglamaning r_1<t<r_2 intervalda aniqlangan biror yechimi bo‘lsin. Agar φ(t_1)qφ(t_2), $t_1 \neq t_2$ va r_1<t_1,t_2<r_2 bo‘lsa, u xolda shu xqφ(t) yechimni -∞<t<Q∞ intervalga davom ettirish mumkin.

Davr - Ushbu φ(t)≡φ(tQc) (6) ayniyat o‘rinli bo‘ladigan xar bir s≠0 son xqφ(t) yechimining davri deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = x + y + z \end{cases}$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglamalarni normal sistemasini qanday ko‘rinishda yozish mumkin?
2. Birinchi tartibli differensial tenglamalarning normal avtonom sistemasi deb nimaga aytiladi va u qanday ko‘rinishda yoziladi?
3. Dinamik sistema deb nimaga aytiladi?
4. x nuqtaning harakat treaktoriyasi deb qanday chiziqqa aytiladi?
5. Normal avtonom sistemasining muvozanat holati yoki muvozanat nuqtasi deb nimaga aytiladi?

Amaliy mashg’ulot-25

1. $y''-3y' = x+\cos x$ j: $y = c_1 + c_2 e^{3x} - \dfrac{1}{10}(\cos x + 3\sin x) - \dfrac{x^2}{6} - \dfrac{x}{9}$

2. $y''-y = 2x\sin x$ j: $y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-x} - x\sin x - \cos x$

3. $y''-4y = e^{2x}\sin 2x$ j: $y = c_1 e^{-2x} + c_2 e^{2x} - \dfrac{e^{2x}}{20}(\sin 2x + 2\cos 2x)$

4. $y''+4y = 2\sin 2x - 3\cos 2x + 1$ j: $y = c_1\cos 2x + c_2 \sin 2x - \dfrac{x}{4}(3\sin 2x + 2\cos 2x) + \dfrac{1}{4}$

5. $y''-2y'+2y = 4e^{x}\sin x$ j: $y = e^{x}(c_1\cos x + c_2\sin x - 2x\cos x)$

6. $y''+9y = 2x\sin x + xe^{3x}$

j: $y = c_1\cos 3x + c_2\sin 3x + \dfrac{1}{4}x\sin x - \dfrac{1}{16}\cos x + \dfrac{1}{54}(3x-1)e^{3x}$

7. $y''-2y'-3y = x(1+e^{3x})$ j: $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-x} + \dfrac{1}{9}(2-3x) + \dfrac{1}{16}(2x^2 - x)e^{3x}$

8. $y''-2y' = 3x + 2xe^{x}$ j: $y = c_1 + c_2 e^{2x} - 2xe^{x} - \dfrac{3}{4}x - \dfrac{3}{4}x^2$

9. $y''-4y'+4y=xe^{2x}$ j: $y=\left(c_1+c_2x+\dfrac{x^3}{6}\right)e^{2x}$

10. $y''+2y'-3y=2xe^{-3x}+(x+1)e^{x}$ j: $y=c_1e^{-3x}+c_2e^{x}-\dfrac{1}{8}(2x^2+x)e^{-3x}+\dfrac{1}{16}(2x^2+3x)e^{x}$

TEST

Agar chiziqli bir jinsli sistema hech bo‘lmaganda bitta chegaralanmagan ($t\to+\infty$ da) yechimga ega bo‘lsa, u holda nol yechim...	*Turg‘un emas	Turg‘un, lekin asimptotik turg‘un emas	Asimptotik turg‘un	Bunday yechim mavjud emas
Agar sistmaning birorta yechimi Lyapunov ma’nosida turg‘un bo‘lsa, u holda bu sistemaning	*Hamma yechimlari turg‘un	Qolgan yechimlari turg‘un emas	Hamma yechimlari asimptotik turg‘un	Ba’zi yechim turg‘un
Nochiziqli sistemalarni yechishda integrallanuvchi kombinatsiyalarni topiladi. Bunda teng kasrlar hossasidan foydalaniladi. Agar $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\ldots=\dfrac{a_n}{b_n}=t$ bo‘lsa, u holda ixtiyoriy $k_1,k_2,\ldots k_n$ larda	* $\dfrac{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots k_nb_n}=t$	$\dfrac{k_1b_1+k_2b_2+\ldots k_nb_n}{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n}=t$	$\dfrac{k_1a_1+k_2a_2+\ldots+k_na_n}{k_1b_1+k_2b_2+\ldots k_nb_n}=(t+1)^2$	$k_1\dfrac{a_1}{b_1}+k_2\dfrac{a_2}{b_2}+\ldots+k_n\dfrac{a_n}{b_n}=$
Ushbu $x^2-y^2=c$, va $x+y=c_2z$ birinchi integral qaysi sistemani qanoatlantiradi?	* $\dfrac{dx}{y}=\dfrac{dy}{x}=\dfrac{dz}{z}$	$\dfrac{dx}{2y-z}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{z}$	$\dfrac{dx}{z}=\dfrac{dy}{xz}=\dfrac{dz}{y}$	$\dfrac{dx}{x}=\dfrac{dy}{y}=\dfrac{dz}{xy+z}$
$y\dfrac{dz}{dx}-x\dfrac{dz}{dx}=0$ birinchi tartibli xususiy hosilali tenglamaning umumiy yechimini ko‘rsating.	* $z=\varphi(x^2+y^2)$	$z=\varphi(x+y)$	$z=\varphi(x^2-y^2)$	$z=\varphi(x+y^2)$
$y\dfrac{dz}{dx}-x\dfrac{dz}{dx}=0$ tenglamaning $y=1$ da $z=2x$ bo‘lgan yechimini toping.	* $z=2xy$	$z=2xy^3$	$z=2xy^2$	$z=2x\sqrt{y}$

MA'RUZA № 32
Mavzu: Avtonom sistemaning xolatlar fazosi.
Reja:

1. Holatlar fazosi.
2. Avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari.
3. Skalyar avtonom tenglamaning xolatlar tugri chizig‘i va muvozanat holati.
4. Misollar.

Tayanch so’z va iboralar: *Avtonom sistema, holatlar fazosi, holat traektoriyalari, holat tezliklari, muvozanat nuqta, limit nuqta ta’rifi, turg‘un, noturg‘un, yarim noturg‘un.*

1. Xolatlar fazosi.

Avtonom sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \\ ------------ \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{cases} \qquad (3)$$

(3) ning o‘ng tomonidagi n-o‘lchovli fazoning biror ochiq Δ to‘plamda aniqlangan. Shu to‘plamning xar bir $(x^0{}_1, x^0{}_2, \ldots, x^0{}_n) = x^0$ nuqtasiga ushbu

$$f_1(x^0), f_2(x^0), \ldots, f_n(x^0) \qquad f(x_0{}^0), (f_1(x^0)), \ldots, f_n(x^0))$$

n ta sonlar ketma-ketligini mos keltirish mumkin. Bu sonlarni n o‘lchovli fazonin x^0 nuqtasidan chiqarilgan $f(x^0)$ vektorning koordinatalari deb qarash mumkin. Bundan ko‘rinadiki, avtonom sistemaga ochiq to‘plamda aniqlangan vektor maydon mos keladi. Avtonom sistema → vektor, → f(x)→ maydon.

X^0 nuqta to‘plamning nuqtasi bo‘lsin. Avtonom sistemaning geometrik ma'nosi nuqtai–nazaridan shu x^0 nuqtaga undan chiqadigan $f(x^0)$ vektor mos keltirilgan. Mavjudlik va yagonalik teoremasiga ko‘ra (3) sistemaning $\varphi(t^0)$qx^0 shartni qanoatlantiradigan xqφ(t) yechimi mavjud. Bu yechimga tqt₀ da traektoriya x^0 nuqtadan o‘tadigan nuqtaning xarakati mos keladi. Xarakat davomida xqφ(t) yechimni belgilaydigan nuqtaning t_0 momentidagi tezligi $f(x^0)$ vektor bilan ifodalanadi, ya'ni

$$\left(\frac{d\varphi(t)}{dt}\right)\Big|_{t=t_0} = f(x_0)$$

Endi xolatlar fazoni tushunchasini kiritamiz.

TA’RIF: (3) avtonom sistemaning xolatlar fazosi deb shunday n o‘lchovli fazoga aytiladiki, unda shu sistemaning yechimlari traektoriyalar bilan, sistemaning o‘zi esa vektor maydon bilan tavsiflansa. Traektoriyalar holat traektoriyalari deyiladi. Vektorlar xolat tezliklari deyiladi.

5-**TEOREMA**. Agar $a = (a_1, \ldots, a_n) \in D_n (D_n = \Delta)$ nuqta (3) sistemaning muvozanat nuqtasi bo‘lishi uchun, ya'ni shu sistemaning φ(t)□a, aqconst ayniyat o‘rinli bo‘ladigan xqφ(t) yechimi mavjud bo‘lishi uchun D_n soxaning a nuqtasida xolat tezligi nolga teng bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot: (zarurligi) a€D_n nuqta muvozanat nuqta bo‘lsin. U xolda (3) sistemaning □(t)qa ayniyat o‘rinli bo‘ladigan xqφ(t) yechimi mavjud.

Shuning uchun $$f(a) = \frac{d}{dt}\varphi(t) = \frac{d}{dt}a \equiv 0$$

Demak, f(x) funksiya xolat tezligi xqa nuqtada nolga aylanadi.

(yetarliligi) a□D_n nuqtada f(a)q0. Bu xolda φ(t) □a funksiya (3) sistemaning yechimi bo‘ladi.

Xaqiqatdan, $\varphi(t) \equiv a \in c^1, a \in D_n, \quad \dot{\varphi}(t) = \dfrac{d\varphi(t)}{dt} = \dfrac{da}{dt} = 0$ va $f(a) = 0 \Rightarrow \dfrac{da}{dt} = f(a) \Rightarrow \varphi(t) \equiv a$ yechim ekan.

Natija. (3) avtonom sistemaning muvozanat nuqtalari ushbu

$$\begin{cases} f_1(a_1,..a_n) = 0 \\ ---------- \\ f_n(a_1,..a_n) = 0 \end{cases} \quad (7)$$

chekli tenglamalar sistemasining yechimlaridan iborat.

Muvozanat nuqtaga misollar.

1). $\dfrac{dx}{dt} = (x-1)^3$ tenglamaning muvozanat nuqtasi xq1 nuqtadan iborat, chunki $(x\text{-}1)^3$ tenglama shu xq1 yechimga ega.

2). $\dfrac{dx}{dt} = (x-1)^3(x+2)$ tenglama 2 ta xq1, xq-2 muvozanat nuqtasiga ega.

3). $\begin{cases} \dot{x}_1 = \lambda_1 x_1 \\ \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2 \end{cases}$ $(\lambda_1 \neq \lambda_2, \lambda_1, \lambda_2)$-xaqiqiy, $\lambda_1 \neq 0, \lambda_2 \neq 0$ sistemaning muvozanat nuqtasi koordinata boshidan iborat. Chunki bu sistema uchun (7) tenglama $\begin{cases} \lambda_1 x_1 = 0 \\ \lambda_2 x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$ kelib chiqadi.

4). $\begin{cases} \dot{x}_1 = a x_1 - b x_2 \\ \dot{x}_2 = b x_1 + a x_2 \end{cases}$ (b≠0,a–xaqiqiy son) sistemaning muvozanat nuqtasi (xolati) xam koordinata boshidan iborat, chunki $\begin{cases} a x_1 - b x_2 = 0 \\ b x_1 + a x_2 = 0 \end{cases}$ sistema faqat trivial yechimga ega (chunki bir jinsli tenglamani determinanti kelib a_2Qb_2≠0→ x_1q0, x_2q0 chiqadi)

Muvozanat nuqtalari sanoqli yoki sanoqsiz bo‘lishi mumkin, xususan, $\dot{x}$qsinx uchun xqkP,(k- butun son) nuqtalar muvozanat nuqtalari bo‘lib, sanoqli to‘plamni tashkil qiladi.

5) $\begin{cases} \dot{x}_1 = 0 \\ \dot{x}_2 = x_1 \end{cases}$ sistema uchun x_1q0 chiziq muvozanat xolatini beradi. Bu sanoqsiz to‘plam. Agar x_1q0, iq1,n cistema berilgan bo‘lsa, muvozanat nuqtalari n o‘lchovli fazodan iborat.

Agar $\begin{cases} \dot{x}_i = 0, i = 1, n \\ \dot{x}_k = a_k \neq 0, k = 1, n \end{cases}$ sistema berilgan bo‘lsa, uning muvozanat nuqtasi mavjud emas, chunki f≠0.

2. Skalyar avtonom tenglamaning xolatlar tug‘ri chizig‘i va muvozanat xolati (nuqtasi).

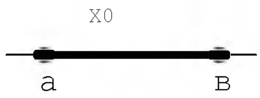
Ushbu $\dot{x}$ qf(x) (8) skalyar avtonom tenglamani ko‘ramiz. Bunda f(x) butun son, R to‘gri chiziqda uzluksiz va uzluksiz differensial lanuvchi funksiya. Yana qo‘shimcha faraz qilamizki, f(x) funksiyaning nollari ular berilgan avtonom tenglamaning muvozanat nuqtalaridir, limit nuqtaga ega bo‘lmasin.

Limit nuqta ta’rifi: a € R_n nuqta x € R_n tuplamni limit nuqtasi deyiladi, agarda a nuqtaning $\forall V(a)$ atrofida x to‘plamni a dan farqli kamida 1 ta nuqta bo‘lsa, $x = \{a\}$ bo‘lsa □□a limit nuqta bo‘lmaydi.

$x=\{1,2,3,\}$ bo‘lsa □□1,2,3, limit nuqta bo‘lmaydi.

Bu farazga ko‘ra f(x) ning nollari butun tugri chiziqli chekli yoki sanoqli sondagi intervallarga bo‘ladi. Eng chap intervalning chap oxiri -∞, Eng o‘ng intervalning o‘ng oxiri Q∞ bo‘ladi. Shu intervallar sistemasini $\sum$ bilan belgilaymiz.

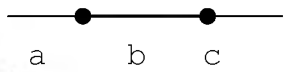
Agar f(x) funksiya R^1 to‘gri chiziqda bitta xam 0 ga ega bo‘lmasa, $\sum$ sistema bitta (-∞;Q∞) interval dan iborat bo‘lib, f(x) –bitta x_0 nolga ega bo‘lgan $\sum$ sistema 2 ta (-∞, x_0) (x_0,Q∞) intervaldan iborat bo‘ladi, ya'ni $\sum\{(-\infty,x_0),(x_0,+\infty)\}$



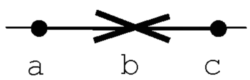
6-**TEOREMA**. $\sum$ sistemaning biror intervalini (a,b) deylik, ya'ni(a,b)€E va x_0€(a,b) bo‘lsin. Agar xqφ(t),r_1<t<r_2 berilgan tenglamaning (t_0, x_0), r_1<t<r_2 boshlang‘ich qiymatlariga ega bo‘lgan yechimi bo‘lsa, u xolda F(x)>0 bo‘lganda ushbu a<φ(t)<b, r_1<t<r_2 $\lim\limits_{t=r_1}\varphi(t)=a, \lim\limits_{t=r_2}\varphi(t)=b$ munosabatlar o‘rinli. Shunday qilib, xar bir(a,b) interval 1 ta xolat traektoriyasidan iborat.

Teoremani isbotsiz beramiz. Keltirilgan teorema (8) tenglama yechimlarining muxim xossasini beradi. Navbatdagi xossani bayon etishdan avval ba'zi tushunchalarni kiritamiz.

Berilgan (8) tenglamaning biror muvozanat nuqtaqtasini v, undan chap va o‘ng tomondagi eng yaqinterval muvozanat nuqtalarini a va s deylik, ya'ni



Demak, (a,b)€ $\sum(b,c)\in\sum$ xar bir (a,b) yoki (b,s) intervalda f(x)≠0. Shu f(x) funksiya ning musbat yoki manfiyligiga qarab (a,b) va (b,s) intervallarda xolat nuqta t ortishi bilan b ga yaqinlashadi, yo undan uzoqlashadi.

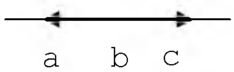


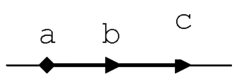
TA’RIF. 1) Agar xar ikki (a,b) va (b,s) intervallarda xam xolat nuqtasi t ortishi bilan b ga yaqinlashsa, u xolda b muvozanat nuqta turg‘un deyiladi.

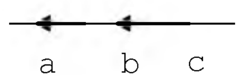
2) Agar t ortishi bilan xar ikki intervalda xam xolat nuqtasi b nuqta dan uzoqlashsa, u xolda b nuqta noturg‘un (turg‘unmas) deyiladi.

3) Agar t ortishi bilan xolat nuqta bir interval da b ga yaqinlashib, ikkinchi interval da undan uzoqlashsa, u xolda b nuqta yarim turg‘un deyiladi.

Misollar.







$\dot{x}$qx tenglamaning bitta xq0 muvozanat nuqtasi bor. Demak, bq0, va $\sum$ q{(-∞,0),(0,Q∞)} iborat. Ravshanki, (-∞,0) intervalda xolat nuqtasi b dan uzoqlashadi, ya'ni x<0 bo‘lgani uchun xarakat o‘ngdan chapga bo‘ladi. (0,∞) intervalda esa xarakat chapdan ungga bo‘ladi. (chunki x>0),ya'ni xolat nuqtasi vat o‘tishi bilan b nuqtadan yana uzoqlashadi. Shunday qilib, $\dot{x}$qx tenglama uchun bq0 nuqta turg‘unmas muvozanat nuqtadir. Shunga o‘xshash, agar xq-x tenglama ko‘rilsa, xq0 nuqta turg‘un muvozanat nuqta ekanini ko‘rsatish mumkin.

Shunday qilib, (8) tenglama uchun b muvozanat nuqta atrofida , aniqrog‘i (a, b) va (b, s) intervallarda xolat nuqtasining xarakati tug‘risida quyidagi teorema o‘rinli.

7-**TEOREMA**. 1) (8) tenglamaning muvozanat nuqtaqtasi b turg‘un bo‘lishi uchun (a, b) interval da f(x)>0 va (b,s) f(x)<0 bo‘lishi zarur va yetarli;

a. Muvozanat nuqta b turg‘unmas bo‘lishi uchun (a,b) da f(x)<0, (b, s) da f(x)>0 bo‘lishi zarur va yetarli;

b. Muvozanat nuqta b yarim turg‘un bo‘lishi uchun f(x) funksiyaning ishorasi (a,b) va (b, s) intervallarda bir xil bo‘liish zarur va yetarli, ya'ni

1). f(x)>0 , x€(a,b), x€(b,c)

2). f(x)<0 , x€(a,b), x€(b,c)

Bu teoremaning isboti yuqoridagi muloxazalar va ta’riflarga asosan ravshan.

8-**TEOREMA**. (8) tenglama uchun b muvozanat nuqta bo‘lib, f(x) funksiya shu nuqta da 2SQ1 (S-natural son)- tartibgacha uzluksiz xosilalarga ega bo‘lsin.

1) Agar ushbu f□□(b)q…qf$^{(2S-1)}$(b)q0, f$^{(2S)}$(b)q0 (9) munosabatlar bajarilsa, b nuqta yarim turqun muvozanat nuqta bo‘ladi.

2) Agar ushbu f□□(b)q…qf$^{(2S-1)}$(b)q0, f$^{(2S)}$(b)q0 (10) munosabatlar bajarilib,

a) f$^{(2SQ1)}$(b)<0, bo‘lsa, b -turg‘un (10□□)

b) f$^{(2SQ1)}$(b)>0, bo‘lsa, v- turg‘unmas (10□□□□) muvozanat nuqta bo‘ladi.

Isbot. (8) tenglamada f(x) funksiya biror k- tartibgacha uzluksiz xosilalarga ega bo‘lsin. U xolda f (x) funksiya uchun xqb nuqta ning atrofida Teylor formulasini yozamiz:

$$f(x) = f(b) + \frac{f^{1}(b)}{1!}(x-b) + f(b) + \frac{f^{ii}(b)}{2!}(x-b)^2 + \ldots + \frac{f^{(k)}(b)}{k!}(x-b)^k + 0((k-b)^k),$$

$0(\alpha) - \alpha$ ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik miqdor.

Bunda $\lim\limits_{y\to 0}\frac{0(y)}{y} = 0$. Endi kq2S bo‘lsin. U xolda (9) munosabatlardan foydalansak, $f(x) = \frac{f^{(2S)}(b)}{(2S)!}(x-b)^{2S} + 0((x-b)^{2S}),$ formulaga ega bo‘lamiz. x€(a,b) deylik. Bu xolda x<b→x-b<0 shuningdek, x€(b,c) bo‘lsa, x-b>0 , x>b. Ammo (x-b)^{2S}>0 bo‘ladi. Shuning uchun formulaning o‘ng tomonidagi 0((x-b)^{2S})>0 ifoda $f(x) = \frac{f^{(2S)}(b)}{(2S)}(x-b)^{2S}$ xadning ishorasiga ta'sir eta olmaganidan $sign f(x) = sign\frac{f^{(2S)}(b)}{(2S)!}, x\in(a,b), x\in(b,c)$ munosabat o‘rinli. Lekin f$^{(2S)}$(b)≠0. Shuning uchun f(x) funksiya (a,b) va (b,c) intervallarda bil xil ishoraga ega. Demak, (9) munosabatlar bajarilganda b nuqta yarimta turg‘un bo‘ladi, ya'ni

f$^{(2S)}$(b)>0→f(x)>0,x€(a,b), x€(b,c)

f$^{(2S)}$(b)<0→f(x)<0,x€(a,b), x€(b,c)

Oldingi teoremaga ko‘ra b yarim turg‘un .

Endi (10) munosabatlar o‘rinli bo‘lsin deylik. U xolda Teylor formulasida kq2SQ1, Sq0,1,2, .. deb topamiz:

$$f(x) = \frac{f^{(2S+1)}(b)}{(2S+1)}(x-b)^{2S+1} + 0((x-b)^{2S+1}),$$

Bu formulada o‘ng tomonning ishorasi birinchi xad bilan aniqlanadi, ishoraga $0((x-b)^{2S+1}),$ xad ta'sir eta olmaydi.

Avval (a,b) interval ni ko‘raylik. Unda x-b<0, demak, $0((x-b)^{2S+1})$ >0. Bundan (a,b) da f(x) ning ishorasi $0((x-b)^{2S+1}),$ ning ishorasiga teskari bo‘lib chiqadi, ya'ni (a,b) intervalda

$$sign f(x) = -sign\frac{f^{(2S+1)}(b)}{(2S+1)!}, x\in(a,b), \tag{11}$$

(b, s) interval uchun x-b>0, $(x-b)^{2SQ1}>0$ va (b,c) da

$$signf(x) = sign\frac{f^{(2S+1)}(b)}{(2S+1)}, x \in (b,c) \quad (12)$$

Topilgan (11) va (12) munosabatlardan $f^{(2SQ1)}(b)>0$ bo‘lsa, f(x)>0, x€(a,b), f(x)<0, x€(b,c). Bu xolda ta’rif bo‘yicha b nuqta turg‘un bo‘ladi.

Agar $f^{(2SQ1)}(b)>0$ bo‘lsa, ushbu f(x)<0, x€(a,b), f(x)>0, x€(b,c) tengsizliklarga egamiz. Bu xolda esa b nuqta turg‘unmas bo‘ladi. Teorema isbot bo‘ldi.

1. Ushbu $\dot{x}$qsinx tenglama uchun muvozanat nuqtalari sinxq0 tenglamaning ildizlaridan iborat.

Ildizlar xqnP (n- butun son) ko‘rinishda yoziladi. Bu xolda $f^1(x)q(sinx)^1$qcosx bo‘lib, cosx>0 bo‘ladi, agar xq2kP, k-butun son.

cosx<0 bo‘ladi , agar xq(kQ1)P, k-butun son.

4-teoremaga ko‘ra, xq2kP ko‘rinishdagi nuqta turg‘unmas, xq(2kQ1)P ko‘rinishdagi nuqtaqtalar esa turg‘un bo‘ladi.

Qayd qilib o‘tamizki, berilgan tenglamaning muvozanat nuqtalari sanoqli bo‘lib, limit nuqtaga ega emas.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Differensial tenglamalarning normal sistemasi uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi. Gronuolla-Belman lemmasi.

2. Chiziqli differensial tenglamalar sistemasi. $y' = A(x)Y + F(x)$ sistema uchun mavjudlik va yagonalik teoremasi.

Glossariy

Avtonom sistemaning xolatlar fazosi - avtonom sistemaning xolatlar fazosi deb shunday n o‘lchovli fazoga aytiladiki, unda shu sistemaning yechimlari traektoriyalar bilan, sistemaning o‘zi esa vektor maydon bilan tavsiflansa. Traektoriyalar holat traektoriyalari deyiladi. Vektorlar xolat tezliklari deyiladi. (3) avtonom sistemaning xolatlar fazosi deb shunday n o‘lchovli fazoga aytiladiki, unda shu sistemaning yechimlari traektoriyalar bilan, sistemaning o‘zi esa vektor maydon bilan tavsiflansa. Traektoriyalar holat traektoriyalari deyiladi. Vektorlar xolat tezliklari deyiladi.

Turg’un nuqta - Agar xar ikki (a,b) va (b,s) intervallarda xam xolat nuqtasi t ortishi bilan b ga yaqinlashsa, u xolda b muvozanat nuqta turg‘un deyiladi.

Noturg’un nuqta - Agar t ortishi bilan xar ikki intervalda xam xolat nuqtasi b nuqta dan uzoqlashsa, u xolda b nuqta noturg‘un (turg‘unmas) deyiladi.

Yarim turg’un nuqta - Agar t ortishi bilan xolat nuqta bir interval da b ga yaqinlashib, ikkinchi interval da undan uzoqlashsa, u xolda b nuqta yarim turg‘un deyiladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = z \\ \dfrac{dz}{dx} = -y \end{cases}$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Avtonom sistema qanday ko'rinishdagi sistemdan iborat bo'ladi?
2. Avtonom sistemaning xolatlar fozosi deb qanday fazoga aytiladi?
3. Muvozanat nuqtalari qanday to'plamni tashkil etadi?
4. Limit nuqta ta'rifini ta'riflang?
5. Qanday vaziyatda muvozanat nuqta turg'un deyiladi?

Amaliy mashg'ulot-32

1. $y'' + y = 2x\cos x\cos 2x$

j: $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \dfrac{x}{4}\cos x + \dfrac{x^2}{4}\sin x - \dfrac{x}{8}\cos 3x + \dfrac{3}{32}\sin 3x$

2. $y'' - 2y = 2xe^x(\cos x - \sin x)$ j: $y = c_1e^{-x\sqrt{2}} + c_2e^{x\sqrt{2}} + xe^x\sin x + e^x\cos x$

3. $y'' + y = tgx$ j: $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \cos x\ln\left|ctg\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right)\right|$

4. $y'' + y = ctgx$ j: $y = c_1\cos x + c_2\sin x + \sin x\cdot\ln\left|ctg\dfrac{x}{2}\right|$

5. $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ j: $y = (c_1 + c_2x)e^x + xe^x\ln|x|$

6. $y'' + 2y' + y = \dfrac{e^{-x}}{x}$ j: $y = (c_1 + c_2x)e^{-x} + xe^{-x}\ln|x|$

7. $y'' + y = \dfrac{1}{\cos x}$ j: $y = c_1\cos x + c_2\sin x + x\sin x + \cos x\ln|\cos x|$

8. $y'' + y = \dfrac{1}{\sin x}$ j: $y = c_1\cos x + c_2\sin x - x\cos x + \sin x\ln(\sin x)$

9. $y'' - y = thx$ j: $y = c_1e^x + c_2e^{-x} + (e^x + e^{-x})arctge^x$

10. $y'' - 2y = 4x^2e^{x^2}$ j: $y = c_1e^{x\sqrt{2}} + c_2e^{-x\sqrt{2}} + e^{x^2}$

TEST

$\begin{cases}\dot{x} = y + 2x \\ \dot{y} = 3x + 4y\end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechimini ko'rsating.	* $x = c_1e^t + c_2e^{5t}$ $y = -c_1e^t + 3c_2e^{5t}$	$x = c_1e^{-t} + c_2e^{5t}$ $y = -c_1e^{-t} + 3c_2e^{-5}$	$x = c_1e^t + c_2e^{5t}$ $y = c_1e^t + 3c_2e^{5t}$	$x = c_1e^t + 2c_2e^{5t}$ $y = -c_1e^t + 3c_2e^{5t}$
$\begin{cases}\ddot{x} = y \\ \ddot{y} = x\end{cases}$ tenglamalar	*4 ta	3 ta	2 ta	1 ta

sistemasining nechta chiziqli bog‘liqsiz yechimlari bor?				
A matritsaning e^A ko‘rsatkichli funksiyani ko‘rsating.	* $e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$	$e^A = E + \frac{A}{1} + \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} + \ldots$	$e^A = A + \frac{E}{1!} + \frac{E}{2!} + \frac{E}{3!} + \ldots$	$e^A = E - \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \frac{A^3}{3!} + \ldots$
e^A ko‘rsatkichli funksiya uchun $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$ tenglik qaysi shartda o‘rinli?	* $AB = BA$	$AB \neq BA$	$AB = E$	$A = B + E$
$\frac{dX}{dt} = AX$ matritsali tenglamaning $X(0) = E$ shartni qanoatlantruvchi yechimini toping.	* $X(t) = e^{tA}$	$X(t) = te^A$	$X(t) = Ae^{ET}$	$X(t) = e^{-tA}$
Agar chiziqli bir jinsli sistemaning har bir yechimi $t \to +\infty$ da nolga intilsa, u holda nol yechim...	*Asimptotik turg‘un	Turg‘un, lekin asimptotik turg‘un emas	Turg‘un emas	Bunday yechim mavjud emas
Agar chiziqli bir jinsli sistemaning har bir yechimi $t \to +\infty$ da chegaralangan bo‘lsa u holda yechim...	*Turg‘un, lekin asimptotik turg‘un emas	Turg‘un emas	Asimptotik turg‘un	Bunday yechim mavjud emas
Agar chiziqli bir jinsli sistema hech bo‘lmaganda bitta chegaralanmagan ($t \to +\infty$ da) yechimga ega bo‘lsa, u holda nol yechim...	*Turg‘un emas	Turg‘un, lekin asimptotik turg‘un emas	Asimptotik turg‘un	Bunday yechim mavjud emas
Agar sistmaning birorta yechimi Lyapunov ma’nosida turg‘un bo‘lsa, u holda bu sistemaning	*Hamma yechimlari turg‘un	Qolgan yechimlari turg‘un emas	Hamma yechimlari asimptotik turg‘un	Ba’zi yechim turg‘un

MA'RUZA №33-34

Mavzu: Chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi

Reja

1. A matritsaning xos sonlari haqiqiy, har xil va 0dan farqli
2. A matritsaning xos sonlar qo‘shma kompleks
3. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi
4. Misollar

Tayanch so’z va iboralar: c*hiziqli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli sistema, sistemani kanonik ko‘rinishi, turg‘un tugun, noturg‘un tugun, turg‘un fokus, turg‘un fokus, markaz.*

1.Sistemaning kanonik ko‘rinishi

Bizga ushbu

$$x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$$
$$x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \qquad (13)$$

Chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli sistema berilgan bo‘lsin. Bu sistemaning determinanti $D = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix}$ (AXq□,□-xos son, X-xos vektor, A-o‘zgarmas matritsa)bo‘lib,(13)sistema uchun koordinata boshi (0,0)muvozanat nuqta bo‘ladi. Ammo undan boshqa muvozanat nuqtalar ham bo‘lishi mumkin. Agar D□0 bo‘lsa, (13)sistemaning koordinata boshidan boshqa muvozanat nuqtasi bo‘la olmaydi. Agar D□0 bo‘lsa, ravshanki, A($a_{i,j}$), i,jq1,2 matritsaning har ikki xos sonlari 0dan farqli bo‘ladi.

Hozir biz A matritsa xos sonlariga qarab, (13)sistemaning ko‘rinishini soddalashtirish bilan shug‘ullanamiz.

A) A matritsaning xos sonlari haqiqiy, har xil va 0dan farqli.(□₁, □₂□R; □₁□□₂, □₁□0, □₂□0)

Ularni (xos sonlarni) □₁va □₂ deylik. Bu holda (13) sistemani maxsusmas almashtirish

yordamida $\begin{cases} y_1 = \lambda_1 y_1 \\ y_2 = \lambda_2 y_2 \end{cases}$ (14)ko‘rinishga keltirish mumkin.

Buni ko‘rsataylik. Quyidagicha almashtirish bajaramiz:

$$\begin{cases} y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 \\ y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 \end{cases}; \quad \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0 \quad \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \frac{\partial y_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial y_2}{\partial x_1} & \frac{\partial y_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha\beta \\ \gamma\delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$$

Hosilalarni hisoblab, (13)dan foydalanamiz:

$$y_1 = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \beta(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = (a_{11} + \alpha_{21}\beta)x_1 + (a_{12}\alpha + a_{22}\beta)x_2$$
$$y_2 = \gamma x_1 + \delta x_2 = \alpha(a_{11}x_1 + a_{12}x_2) + \delta(a_{21}x_1 + a_{22}x_2) = (a_{11}\gamma + \alpha_{21}\delta)x_1 + (a_{12}\gamma + a_{22}\delta)x_2$$

Bu ifodalarni mos ravishda $\lambda_1 y_1$ va $\lambda_2 y_2$ larga tenglashtiramiz:

$$(a_{11}\alpha + a_{21}\beta)x_1 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)x_2 = \lambda_1(\alpha x_1 + \beta x_2)$$
$$(a_{11}\gamma + a_{21}\delta)x_1 + (a_{12}\gamma + a_{22}\delta)x_2 = \lambda_2(\gamma x_1 + \delta x_2)$$

Endi x_1 va x_2 lar oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirsak, ushbu

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\alpha + a_{21}\beta = 0 & x_1 \\ a_{12}\alpha + (a_{22} - \lambda_1)\beta = 0 & x_2 \end{cases} \qquad (16)$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda_1)\gamma + a_{21}\delta = 0 \\ a_{12}\gamma + (a_{22} - \lambda_2)\delta = 0 & x_1 \end{cases} \qquad (17)$$

x_2

sistemalarni hosil qilamiz. Ravshanki $\lambda_1\lambda_2$-xos sonlar bo‘lgani uchun

$$\Delta(\lambda_j)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_j a_{12} \\ a_{21}a_{22}-\lambda_j \end{vmatrix}=0, \qquad j=1,2$$

Shuning uchun $\Delta^*(\lambda_j)=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda_j a_{21} \\ a_{12}a_{22}-\lambda_j \end{vmatrix}=0$ .Bu tenglikka asosan (16) va (17) sistemalar α,β va γ,δ larga nisbatan trivial bo‘lmagan (0dan farqli) yechimlarga ham ega (algebradan ma'lumki, bir jinsli tenglamalar sistemasi 0dan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun bu sistemaning determinanti $\Delta=0$ bo‘lishi zarur va yetarli) xususan

$$\alpha=a_{11}^{\pm 0},\ \beta=-(a_{11}-\lambda_1);\ \gamma=a_{21},\ \delta=-(a_{11}-\lambda_2) \tag{18}$$

deb tanlasa bo‘ladi. Agar (18) tengliklardan foydalansak, (15) almashtirish maxsusmas (bir qiymatlik) almashtirish bo‘la oladimi? Shuni tekshiraylik. Quyidagiga egamiz:

$$\alpha\delta-\beta\gamma=-a_{21}(a_{11}-\lambda_2)+a_{21}(a_{11}-\lambda_1)=a_{21}(a_{11}-\lambda_1-a_{11}+\lambda_2)=a_{21}(\lambda_2-\lambda_1)$$

Bundan $a_{21}\neq 0$ bo‘lganda $\alpha\delta-\beta\gamma\neq 0$ ekani kelib chiqadi, ya'ni (15) almashtirish maxsusmas. Shunday qilib, (13) sistemani uning matritsasi haqiqiy har xil va 0dan farqli xos sonlarga ega bo‘lganda (14) ko‘rinishida yozish mumkin. Bu (14) sistema ko‘rilayotgan holda (13) sistemaning kanonik ko‘rinishi deyiladi.

B) A matritsaning xos sonlari qo‘shma kompleks.

Ularni $\lambda_1=\mu+i\nu,\lambda_2=\mu-i\nu,\nu\neq 0$ deylik. Avvalo (18) qiymatlardan foydalansak, (15) almashtirishni bunday yozish mumkin:

$$\begin{cases} y_1=a_{21}x_1-(a_{11}-\lambda_1)x_2 \\ y_2=a_{21}x_1-(a_{11}-\lambda_2)x_2 \end{cases}$$

Shu almashtirish formulalari $\lambda_1\lambda_2$ lar kompleks bo‘lganda ham o‘rinli, λ_1 va λ_2 lar o‘rniga o‘zgarmas ifodalarini qo‘yamiz:

$$\begin{cases} y_1=a_{21}x_1-(a_{11}-\mu-i\nu)x_2 \\ y_2=a_{21}x_1-(a_{11}-\mu+i\nu)x_2 \end{cases} \tag{19}$$

Bundan agar $\begin{cases} y_1=U_1+iV_2 \\ y_2=U_1-iV_2 \end{cases}$ deb belgilasak, u xolda (19) dan, ya'ni

$$\begin{cases} y_1=a_{21}x_1-(a_{11}-\mu)x_2+i\nu x_2 \\ y_2=a_{21}x_1-(a_{11}-\mu)x_1-i\nu x_2 \end{cases} \tag{19'}$$

Shundan

$$\begin{cases} U_1=a_{21}x_1-(a_{11}-\mu)x_2 \\ U_2=\nu x_2 \end{cases} \tag{20}$$

Kelib chiqadi. Sodda hisoblashlar yordamida (14),(19)va (20)larga ko‘ra quyidagiga egamiz:

$$\frac{dy_1}{dt}=\frac{dU_1}{dt}+i\frac{dU_2}{dt}=(\mu+i\nu)y_1 \quad (y_1=\lambda_1 y_1 \text{ dan})$$

$$\frac{\partial U_1}{\partial t}+i\frac{\partial V_2}{\partial t}=(\mu+i\nu)[a_{21}x_1-(a_{11}-\mu-i\nu)x_2]=(\mu+i\nu)[a_{21}x_1-(a_{11}-\mu)x_2+i\nu)x_2]=$$
$$(\mu+i)(U_1+U_2)=\mu U_1-\nu U_2+i(\nu U_1+\mu U_2)$$

shunday qilib, ushbu

$$\frac{dU_1}{dt}+i\frac{dU_2}{dt}=\mu U_1+\nu U_2+i(\nu U_1+\mu U_2) \quad x+iy=0\Leftrightarrow x=0,y=0.$$ tenglikdan

$$\begin{cases} \dfrac{dU_1}{dt} = \mu U_1 - \nu U_2 \\ \dfrac{dU_2}{dt} = \nu U_1 + \mu U_2 \end{cases} \qquad (21)$$

munosabatni hosil qilamiz. Shu (21)sistema berilgan sistemaning xos sonlari kompleks bo‘lgan holda kanonik ko‘rinishdan iborat.
2. Ikkinchi tartibli chiziqli bir jinsli sistemaning holatlar tekisligi.
Xos sonlar haqiqiy va kompleks bo‘lgan hollarni alohida tekshiramiz.
A) A matritsaning xos sonlari haqiqiy, har xil va 0dan farqli.

Xos sonlarni λ_1 va λ_2 desak, ularga mos kelgan chiziqli erkli xos vektorlarni topish mumkin. (ya'ni yechish ($A-\lambda E$)xq0 dan $x_1^{(1)}$,$x_1^{(2)}$ va $x_2^{(1)}$,$x_2^{(2)}$ topiladi, yechimni $x_i = h^{(i)}e^{\lambda i t}$ $i=1,2$ ko‘rinishida qidiriladi). Shuning uchun (13)sistemaning umumiy yechimi

$$x = c_1 h^{(1)} e^{\lambda_1 t} + c_2 h^{(2)} e^{\lambda_2 t} \qquad (24)$$

ko‘rinishda yoziladi. Uni yana

$$x = \varsigma_1 h^{(1)} + \varsigma_2 h^{(2)} \qquad (25)$$

bunda

$$\varsigma_1 = c_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \varsigma_2 = c_2 e^{\lambda_2 t} \qquad (26)$$

ko‘rinishda $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$vektorlar bo‘yicha yoyib yozish mumkin. $\varsigma_1$va ς_2 sonlar holat tekisligida to‘g‘ri burchakli Dekart koordinatalaridan iborat bo‘lishi shart emas, bu $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ vektorlar bo‘yicha yo‘nalgan o‘qlarga bog‘liq.

Holatlar tekisligini R deylik. Unda $\varsigma_1$va ς_2 o‘qlar $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$
vektorlar bo‘yicha yo‘nalgan bo‘ladi.
Affin almashtirish yordamida R holat tekisligini shunday R* tekislikka akslantirish mumkinki, unda $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$
vektorlar o‘zaro perpendikulyar $\ell_1$va ℓ_2 birlik vektorlarga o‘tadi.
R tekislikning (ς_1, ς_2) nuqtasi R* tekislikning to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalariga o‘tadi, ya'ni $X = \varsigma_1 h^{(1)} + h^{(2)}\varsigma_2$ bo‘lsa, R* da $X = \varsigma_1\ell_1 + \varsigma_2\ell_2, \ell_1 \perp \ell_2$bo‘ladi. Ko‘rilayotgan holda (13) sistemani (14)kanonik ko‘rinishda yozish mumkin. (14)sistemaning traektoriyalari R* tekislikda chiziladi, chunki unig xos vektorlari (1,0) va (0,1)dan iborat. Endi (14)sistemaning traektoriyalarini tasvirlashga o‘tamiz. Avval $|\lambda_1| < |\lambda_2|$ va $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ yoki $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lsin. (26) dan ko‘rinib turibdiki, birinchi chorakda chizilgan traektoriyalarni ham yozish mumkin. Undan tashqari, $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$bo‘lgan holda S₁□0, S₂q0 bo‘lsa, $\varsigma_1 = C_1 \ell^{\lambda_1} t, \varsigma_2 = 0$, ya'ni ς_1 o‘qiga egamiz. Unda $S_1>0$ bo‘lganda harakat o‘ngdan chapga, $C_1<0$ bo‘lganda esa chapdan o‘ngga bo‘ladi. Boshqacha aytganda, $t \to +\infty$da Sning ishorasidan qat'iy nazar, $\lim\limits_{t\to+\infty} \varsigma_1 = \lim\limits_{t\to+\infty} C_1 e^{\lambda_1 t} = 0$ va koordinata boshidan ikki tomonda harakat shu nuqtaga ((0,0)nuqta) yo‘nalgan bo‘ladi. Xuddi shu xususiyat ς_2o‘qiga ham tegishli. Endi $S_1<0$, $C_2>0$ bo‘lganda, ya'ni I chorakda traektoriyalarning qavariqligini tekshiraylik. Ravshanki,

$$\begin{matrix} f''(x) < 0 \\ \textit{кавapик} \end{matrix} \quad \frac{d\varsigma_2}{d\varsigma_1} = \frac{C_2}{C_1}(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t}$$

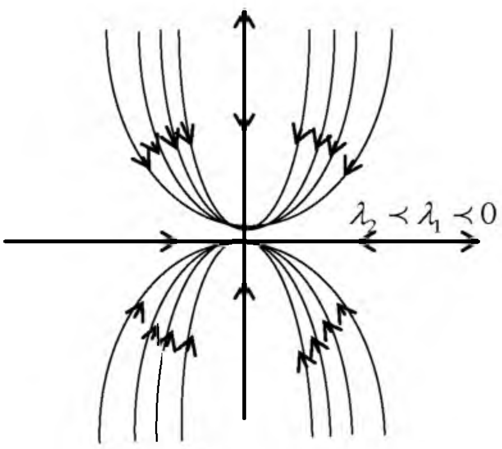
$$f''(x) > 0 \quad \frac{d^2\varsigma_2}{d\varsigma_1} = \frac{C_2}{C_1}(\lambda_2 - \lambda_1)e^{(\lambda_2-\lambda_1)t} > 0$$
ботик

Bundan I chorakda traektoriyalarning qavariqligi pastga qaraganligi (ya'ni botiqligi) kelib chiqadi. Ushbu

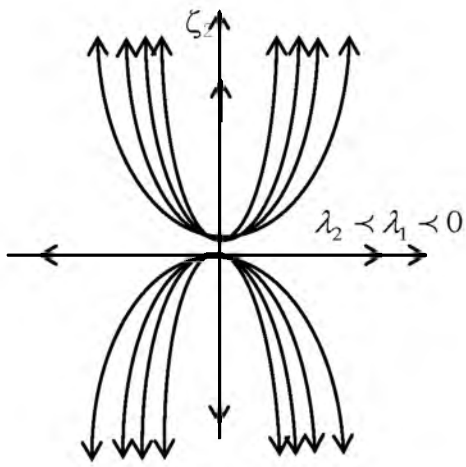
$$\lim_{t\to+\infty}\frac{d\varsigma_2}{d\varsigma_1} = \lim_{t\to+\infty}\frac{C_1}{C_2}(\lambda_2 - \lambda_1)_1 e^{\lambda_1 t} = 0$$

munosabatdan $t \to +\infty$da trektoriyalar absissa o‘qiga urinish chiqadi. I chorakda $\frac{d\varsigma_1}{dt} = C_1\lambda_1 e^{\lambda_1 t} < 0, \frac{d\varsigma_2}{dt} = C_2\lambda_2 e^{\lambda_2 t} < 0$ bo‘lgani uchun $\varsigma_1$va$\varsigma_2$lar t ortirish bilan kamayadi va demak, harakat yuqoridan pastga hamda o‘ngdan chapga yo‘nalgan bo‘ladi. (1-chizma) Traektoriyalar chekli vaqtda koordinata boshiga kela olmaydi. Koordinata boshi berilgan sistema uchun yagona muvozanat nuqtasidan iborat bo‘lib, u mustaqil yechimdir.

Qolgan choraklardagi traektoriyalarni shu chizilgan traektoriyalardan ularni ς_2 va ς_1o‘qlarga nisbatan simmetrik aylantirish yordamida hosil qilamiz. Shunday qilib, butun tekislikda traektoriyalar chizildi deyish mumkin. (1-chizma) $\lambda_2 > \lambda_1 > 0$ bo‘lganda ham xuddi shu usul bilan traektoriyalar chiziladi. Traektoriyalar avvalgisidan farq qilmasada, ularda yo‘nalish teskari bo‘ladi. (2-chizma) ζ_2

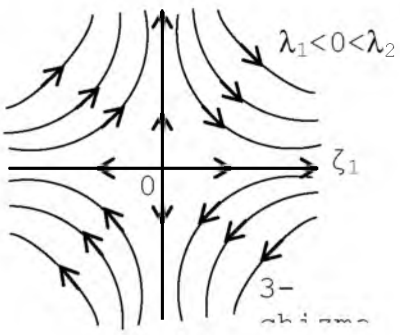


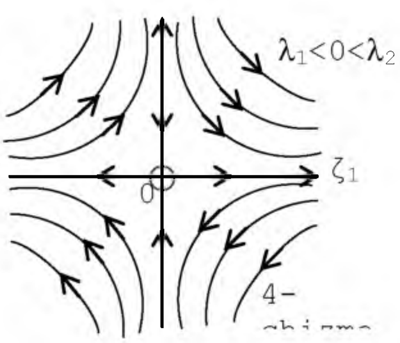
1-



2-

Xos sonlarning $\square_2>\square_1>0$ qiymatlariga mos manzara (1-chizma) turg‘un tugun deyiladi. $\square_2<\square_1<0$ qiymatlarga mos manzara esa (2-chizma)noturg‘un tugun deyiladi.
Xos sonlar uchun $\square_1<0$, $\square_2>0$ va $\square_2<0$, $\square_1>0$ tengsizliklar o‘rinli bo‘lgan holda ham xuddi yuqoridagiga o‘xshash mulohazalar yuritib butun tekislikda traektoriyalarni chizish mumkin. Ularni chizmalari quyidagicha bo‘ladi:(3,4-chizma)





Har ikki holda ham hosil bo‘lgan manzara egar deyiladi. Misollar. 1-misol.

$$\begin{cases} x_1 = x_1 + x_2 \\ x_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} -3,1 \\ 4,-3 \end{vmatrix} = 9 - 4 = 5 \neq 0$$

sistemaning traektoriyalari chizilsin va muvozanat nuqtasi atrofidagi manzara aniqlansin.

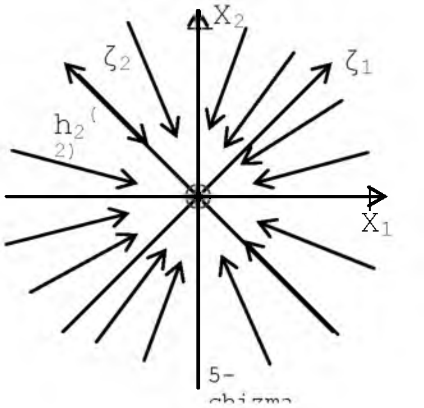
A matritsani yozamiz: $A = \begin{pmatrix} -3,1 \\ 4,-3 \end{pmatrix}$ Bu matritsani xos sonlarini topamiz: $\begin{vmatrix} -3-\lambda & 1 \\ 4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$ yoki $(3Q□)^2$-4q0. Bundan 3Q□q12q>□1q -1, □2q -5. Ravshanki, $\lambda_2<\lambda_1$,/λ_2/>/λ_1/ xos sonlar har xil va manfiy bo‘lgani uchun biz turg‘un tugunga egamiz. Endi shu manzarani chizaylik. Buning uchun

$$h^{(1)} = \begin{pmatrix} h_1^{(1)} \\ h_2^{(1)} \end{pmatrix}$$

xos vektorlarni topish kerak. □1q-1 ga mos vektor ushbu

$Ah^{(1)}$q(-1)$h^{(1)}$ yoki $\begin{pmatrix} -3h_1^{(1)} + h_2^{(1)} \\ 4h_1^{(1)} - 3h_2^{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -h_1^{(1)} \\ -h_2^{(1)} \end{pmatrix}$ sistemadan topiladi. Ravshanki, biz -2$h_1^{(1)}$Q$h_2^{(1)}$q0 tenglamaga egamiz va undan $h_1^{(1)}$q1, $h_2^{(1)}$q2 deb olish mumkin. Agar $h_1^{(1)}$q1, $h_1^{(1)}$q2 desak ham o‘sha yo‘nalish chiqariladi. Shunga o‘xshash □2q5 xos songa mos xos vektor topiladi.

$$h^{(2)} = \begin{pmatrix} h_1^{(2)} \\ h_2^{(2)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$



Endi tekislikda koordinata boshidan shu vektorlar yo‘nalishida to‘g‘ri chiziqlar o‘tkazamiz. Absalyut qiymati bo‘yicha kichik xos son □1q-1 bo‘lgani uchun traektoriyalar shu xos songa mos $h^{(1)}$ vektor yo‘nalishiga t□Q□ da urinadi (5-chizma).

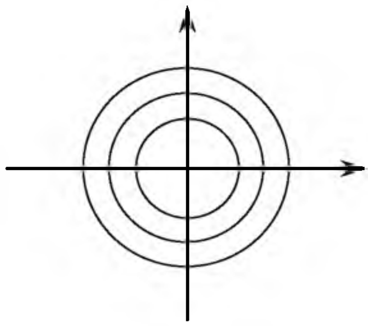
B) A matritsaning xos sonlari kompleks .

Bu holda xos sonlar qo‘shma kompleks bo‘lib, ularni $\lambda = \mu + i\gamma, \bar{\lambda} = \mu - i\gamma, \gamma \neq 0$ deb belgilaymiz. γ ni doim γ <0 deb qarash mumkin. Agar $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ lar haqiqiy vektor bo‘lsa, mos xos vektorlarni h va $\bar{h}$ deb belgilanadi va bunday aniqlanadi: $h = \frac{1}{2}\left(h^{(1)} - ih^{(2)}\right)$ bunda $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$lar chiziqli erkli aks xolda h va $\bar{h}$ lar chiziqli bog‘liq bo‘lar edi. Shuning uchun $h^{(1)}$ va $h^{(2)}$ haqiqiy vektorlarni R tekislikda (ζ_1 va ζ_2 larni) xos yo‘nalishlar deb qarash mumkin. Endi R* tekislikda traektoriyalarlarni quramiz. Ko‘rilayotgan holda berilagan sistemaning kanonik shakli ma'lum.

Uni yozaylik : ((21) da U_1q ζ_1, U_2qζ_2 desak) $\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \mu\xi_1 - \gamma\xi_2 \\ \dot{\xi}_2 = \gamma\xi_1 - \mu\xi_2 \end{cases}$ (21) bu sistemaning umumiy yechimi $\begin{cases} \xi_1(t) = Ce^{\mu t}cos(\gamma t + \nu) \\ \xi_2(t) = Ce^{\mu t}\sin(\gamma t + \nu) \end{cases}$ ko‘rinishda yoziladi. Unda t ni parametr deb qarasak biz traektoriyalarning parametrik tenglamasiga egamiz. Ularni qurish uchun qutb koordinatalariga o‘tish qulaylik tug‘diradi. Shu maq sadda ς_1qρcosφ,ς_2qρsinφ(ρ,φ qutb koordinatalari) deylik. Shuning uchun yuqorida yozilgan umumiy yechim $\rho = Ce^{\mu t}(c \succ 0), \varphi = \gamma t + \nu\ (\nu \succ 0)$ ko‘rinishini oladi. Bu munosabatlarga ko‘ra t o‘sishi bilan burchak ham o‘sadi. (chunki γ<0deb qrayapmiz). Boshqacha aytganda koordinata boshidan chiqadigan nur (ς_1(t),ς_2(t)) nuqtadan o‘tib sekundiga γ radian tezlik bilan soat stelkasiga qarshi yo‘nalishda buriladi. (ya'ni uning grafigi logorifimik spiraldan iborat).(27) dan t ni chiqaramiz: $\varphi = \gamma t + \nu \rightarrow \gamma t = \varphi - \nu \rightarrow t = \varphi - \nu / \gamma$

$\rho = Ce^{\mu t} = Ce^{\frac{\mu}{\gamma}(\phi - \gamma)} Ce^{-\frac{\mu}{\gamma}\gamma} \cdot e^{\frac{\mu}{\gamma}\phi} = Ke^{\frac{\mu}{\gamma}\phi}, K = Ce^{-\frac{\mu}{\gamma}\gamma} = const$ ya'ni $\rho = Ke^{\frac{\mu}{\gamma}\phi}$ traektoriyalarning ko‘rinishi μ>0, μ<0, μq0 qiymatlarga qarab har xil bo‘ladi. μ<0 bo‘lsin. $\gamma \succ 0$ bo‘lgani uchun $\lim\limits_{t \to +\infty} \rho = 0$, chunki, $\frac{\mu}{\gamma}$ <0 va $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi = +\infty$,

Demak, t→Q∞ da holat nuqtasi koordinata boshiga yaqinlashadi.(6-chizma) hosil bo‘lgan manzara turg‘un fokus deyiladi. Agar μ>0 bo‘lsa, yuqoridagi kabi mulohazalar yordamida noto‘g‘ri fokus manzarasini qurish mumkin. (7-chizma). Agar μq0 bo‘lsa, (28)formulada ρqK(Kqconst) kelib chiqadi. Bu esa, markaziy koordinata boshida bo‘lgan konsentrik aylanalardan iborat(8-chizma) hosil bo‘lgan manzara markaz deyiladi.



Misollar. 1-misol.

Ushbu $\begin{cases} x_1 = 3x_1 - x_2 \\ x_2 = 4x_1 + 3x_2 \end{cases}$ sistema uchun $A = \begin{pmatrix} 31 \\ 43 \end{pmatrix}$ va $\begin{vmatrix} 3-\lambda 1 \\ 43-\lambda \end{vmatrix} = 0$ tenglamadan □q3□2i. Demak, □q3, □q2. □q3Q2i xos son uchun xos vektorni izlaymiz.

$\begin{pmatrix} 3-1 \\ 43 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = (3+2i)\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ yoki $\begin{pmatrix} 3h_1 - h_2 \\ 4h_1 + 3h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (3+2i)h_1 \\ (3+2i)h_2 \end{pmatrix}$.

Bundan $\begin{cases} 3h_1 - h_2 = 3h_1 + 2ih_1 \\ 4h_1 + 3h_2 = 3h_2 + 2ih_2 \end{cases}$ yoki $\begin{cases} -h_2 = 2ih_1 \\ 4h_1 = 2ih_2 \end{cases}$. Oxirgi 2 tenglamaning biri 2-sidan hosil qilinishi mumkin. Shuning uchun h_1q1, h_2q-2i deb tanlansa bo‘ladi. Endi $h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$ vektorni bunday tasvirlaymiz.

$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2i \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\left[\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} - i\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}\right]$ ko‘rinadiki, $h^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, h^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ vektorlar izlangan bo‘lib, ular absissa va ordinata o‘qlari bo‘yicha yo‘nalgandir. Ko‘rilayotgan holda □q3>0 bo‘lgani uchun biz noturg‘un fokus manzaraga egamiz.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasi yechimlarining xossalari. Ostrogradskiy–Liuvill formulasi.

2. Chiziqli bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechim haqida teorema. Chiziqli bir jinsli bo‘lgan tenglamalar sistemasi. Yechimlarning xossalari.

Glossariy

Chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli sistema - $\begin{matrix} x_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{matrix}$ ko’rinishdagi sistema.

Chiziqli bir jinsli differensianal tenglamalar – yuqoridagi (1) da $Q(x) \equiv 0$ bo‘lsa.

Yuqori tartibli differensianal tenglama - n tartibli differensianal tenglama umumiy ko‘rinishi $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)} = 0$ kabi yoziladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t \\ y = 2x - y \end{cases}$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli bir jinsli sistemaning determinanti qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
2. Berilgan sistemaning xos sonlari qanday kononik ko‘rinishdan iborat bo‘ladi?

Amaliy mashg’ulot-33-34

1. $x^3y''' - 3xy' + 3y = 0$ j: $y = c_1x + c_2x^{-1} + c_3x^3$
2. $x^2y'' - 2y = 0$ j: $y = \frac{c_1}{x} + c_2x^2$
3. $x^2y'' + 2xy' - n(n+1)y = 0$ j: $y = c_1x^n + c_2x^{-(n+1)}$
4. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$ j: $y = x^{-2}(c_1 + c_2\ln x)$
5. $x^2y'' + xy' + y = 0$ j: $y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$
6. $x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + y = 0$ j: $y = (c_1 + c_2\ln x)\frac{1}{x}$
7. $x^2y'' - xy' - 3y = 0$ j: $y = c_1x^3 + \frac{c_2}{x}$
8. $x^2y'' + xy' + 4y = 0$ j: $y = c_1\cos(2\ln x) + c_2\sin(2\ln x)$
9. $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$ j: $y = c_1x + c_2x^2 + c_3x^3$
10. $(3x+2)y'' + 7y' = 0$ j: $y = c_1 + c_2(3x+2) - \frac{4}{3}$

TEST

Xususiy yechimni aniqmas koeffitsientlar usuli bilan toping $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$	* $y=(ax^2+bx+c)e^{2x}$	$y=x(ax^2+bx+c)e^{2x}$	$y=x(ax+b)e^{2x}$	$y=ax^2e^{2x}$
$x=e^t, y=-e^t$ funksiya quyidagi tenglamalar sistemalaridan qaysi birining yechimi bo‘ladi?	* $\dot{x}=2x+y$ $\dot{y}=3x+4y$	$\dot{x}=x+y$ $\dot{y}=3y-2x$	$\dot{x}=x-y$ $\dot{y}=y-4x$	$\dot{x}=x-3y$ $\dot{y}=3x+y$
$\begin{cases} y'=\frac{x}{z} \\ z'=-\frac{x}{z} \end{cases}$ nochiziqli sistemaning umumiy yechimini ko‘rsating.	* $y=c_2e^{c_1x^2}$, $z=\frac{1}{2c_1c_2}e^{-c_1x^2}$	$y=c_2e^{c_1x}$, $z=\frac{1}{2c_1c_2}e^{-c_1x^2}$	$y=c_1c_2e^{x^2}$, $z=\frac{1}{2c_1c_2}e^{-c_1x^2}$	$y=c_2e^{x^2}$, $z=\frac{1}{2c_1c_2}e^{c_1x^2}$
$\begin{cases} \dot{x}=y+2x \\ \dot{y}=3x+4y \end{cases}$ tenglamalar sistemasini yechimini ko‘rsating.	* $x=c_1e^t+c_2e^{5t}$ $y=-c_1e^t+3c_2e^{5t}$	$x=c_1e^{-t}+c_2e^{5t}$ $y=-c_1e^{-t}+3c_2e^{-5t}$	$x=c_1e^t+c_2e^{5t}$ $y=c_1e^t+3c_2e^{5t}$	$x=c_1e^t+2c_2e^{5t}$ $y=-c_1e^t+3c_2e^{5t}$
$\begin{cases} \ddot{x}=y \\ \ddot{y}=x \end{cases}$ tenglamalar sistemasining nechta chiziqli bog‘liqsiz yechimlari bor?	*4 ta	3 ta	2 ta	1 ta
A matritsaning e^A ko‘rsatkichli funksiyani ko‘rsating.	* $e^A=E+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\dots$	$e^A=E+\frac{A}{1}+\frac{A^2}{2}+\frac{A^3}{3}+\dots$	$e^A=A+\frac{E}{1!}+\frac{E}{2!}+\frac{E}{3!}+\dots$	$e^A=E-\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+$
e^A ko‘rsatkichli funksiya uchun $e^{A+B}=e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A$ tenglik qaysi shartda o‘rinli?	* $AB=BA$	$AB\neq BA$	$AB=E$	$A=B+E$
$\frac{dX}{dt}=AX$ matritsali tenglamaning $X(0)=E$ shartni qanoatlantruvchi yechimini toping.	* $X(t)=e^{tA}$	$X(t)=te^A$	$X(t)=Ae^{ET}$	$X(t)=e^{-tA}$
Agar chiziqli bir jinsli sistemaning har bir yechimi $t\to+\infty$ da nolga intilsa, u holda nol yechim...	*Asimptotik turg‘un	Turg‘un, lekin asimptotik turg‘un emas	Turg‘un emas	Bunday yechim mavjud emas
Agar chiziqli bir jinsli sistemaning har bir yechimi $t\to+\infty$ da chegaralangan bo‘lsa u holda yechim...	*Turg‘un, lekin asimptotik turg‘un emas	Turg‘un emas	Asimptotik turg‘un	Bunday yechim mavjud emas

MA'RUZA № 35

Mavzu: Turg‘unlik nazariyasi . Turg‘un ko‘pxadlar.

Reja:

1. Turg‘un ko‘phad.
2. Raus-Gurvits belgisi.

Tayanch so’z va iboralar: *turg‘un ko‘phad, koeffitsientlari xaqiqiy bo‘lgan turg‘un ko‘phad, ko‘phadli turg‘un bo‘lish sharti, Raus-Gurvits belgisi.*

1- **TA’RIF**: Agar koeffitsientlari xaqiqiy

$$L(P)qa_0P^h{}_nQa_1P^{n-1}Q\ldots Qa_{n-1}PQa_n \qquad (1)$$

ko‘phadning barcha ildizlari (nollari) xaqiqiy qismi manfiy bo‘lsa, u xolda (1) ko‘phad turg‘un ko‘phad deyiladi.

Turg‘un ko‘phad larning ildizlari kompleks o‘zgaruvchining tekisligida mavxum o‘qdan chapda joylashgan bo‘ladi . umumiy xolni ko‘rishdan avval nq1,2,3 bo‘lgan xollarda ko‘phad turg‘un ligini tekshiramiz.

nq1 bo‘lganda (1) ko‘phad $a_0pQa_1qL(p)$ ko‘rinishini oladi. Bu ikki xad yagona $Pq\text{-}a_1/a_0$, $a_0\neq0$ ildizga ega. $-a_1/a_0<0$ bo‘lishi uchun a_0 va $a_1(a_1\neq0)$ koeffitsientlar bir xil ishorali bo‘lishi zarur va yetarli. Demak, birinchi tartibli chiziqli tenglamaning ildizi manfiy bo‘lishi uchun uning koeffitsientlari bir xil ishorali bo‘lishi zarur va yetarli.

Agar $a_0>0$ deyilsa, $a_1>0$ bo‘lganda 1- chi tartibli ko‘phad turg‘un bo‘ladi. Endi nq2 bo‘lsin. Bunda biz 2-chi tartibli $L(p)qa_0p^2Qa_1pQa_2$, $a_0>0$ ko‘phadga egamiz.

Yuqorida $a_0>0$ deb oldik. Agar $a_0<0$ bo‘lganda $-L(p)qL_*(p)$ deb belgilasak, $L_*(p)$ uchun P^2 oldidagi koeffitsient musbat bo‘ladi. $L(p)$ va $L_X(p)$ ko‘phadlar ekvivalent bo‘lgani uchun $L_*(p)$ bilan ish ko‘rish mumkin. Bu muloxazada n-tartibli ko‘phadlar uchun xam aytishi mumkin. Shuning uchun doim $a_0>0$ deb olinsa bo‘ladi. Yuqoridagi kvadrat uchxadning ildizlari ushbu

$$P_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{a_1^2-4a_0a_2}}{2a_0}=-\frac{a_1}{2a_0}\pm\sqrt{\left(\frac{a_1}{2a_0}\right)^2-\frac{a_2}{a_0}}$$

formulalar bilan xisoblanadi. Bundan diskeriminant

$Dqa^2\text{-}4a_0a_2<0$ noldan kichik bo‘lganda ildizlarning xaqiqiy qismi $-\frac{a_1}{2a_0}$ dan iborat bo‘ladi.

$a_1\succ0$ bo‘lganda $-\frac{a_1}{2a_0}<0$ ($a_0<0$) va ko‘phad turg‘un bo‘ladi. Agar $a_1\prec0$ bo‘lsa, $-\frac{a_1}{2a_0}<0$ bo‘ladi. Bu xolda ko‘phad turg‘un bo‘la olmaydi. Agar diskriminant nolga teng (Dq0) yoki noldan katta (D>0) bo‘lsa, a>0, $a_2>0$ bo‘lganda $P_{1,2}<0$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, ya'ni

$Dq0qP_{1,2}q\ -\frac{a_1}{2a_0}<0$ bo‘ladi. (D>0) bo‘lganda

$$D=a^2-4a_0a_2\succ0\rightarrow a_1\succ2\sqrt{a_0a_2}$$

$$P_{1,2}=\frac{-a_1\pm\sqrt{D}}{2a_0},\ P_1=\frac{-a_1-\sqrt{D}}{2a_0}=-\frac{a_1+\sqrt{D}}{2a_0>0}<0$$

$$P_{,2}=\frac{-a_1+\sqrt{D}}{2a_0}=-\frac{a_1-\sqrt{D}}{2a_0>0}<0$$

bo‘lishi uchun $a_1-\sqrt{D}>0q>\ a^2{}_1\text{-}(a_1{}^2\text{-}4a_0a_2<0q>\ a_1{}^2\text{-}a_1{}^2\text{-}4a_0a_2>0q>a_0a_2$, $a_0>0,a_2>0$ bo‘lganda $a_0a_2>0q>p_2<0$ ekan.

Bu xolda ko‘phad yana turg‘un bo‘ladi. Boshqa xollarda ko‘phad turg‘un bo‘la olmaydi. Agar ko‘phad turg‘un bo‘lsa, ildizlar formulasidan $a_1>0$, $a_2>0$ kelib chiqadi. Shunday qilib, kvadrat uchxad turg‘un bo‘lishi uchun uning koeffitsientlari musbat bo‘lishi zarur va yetarli.

1-**TEOREMA**. Ushbu $L(p)qP_nQa_1P_{n-1}Q..,Qa_{n-1}PQa_n$ ko‘phad turg‘un bilishi uchun uning

koeffitsient lari musbat bo‘lishi zarur.
Isbot. L(p) ko‘pxadning koeffitsient lari xaqiqiy bo‘lgani uchun uning ildizlari soni (karrali ildizlarining karrasi xam xisobga olinganda) n ta bo‘ladi. shu bilan birga ko‘phad ning k ta ildizi kompleks bo‘lsa, unda uning yana k ta ildizi mos ravishda qo‘shma kompleks bo‘ladi. Ularni $\mu_j \pm i\gamma j, j = 1,2,..k,$ va $\lambda\rho, \rho = 1,2,..n-2k$ deb belgilaymiz. Shartga ko‘ra ko‘phad turg‘un. Shuning uchun $\mu_j < 0 j = 1,2,..k, \lambda p < 0, \rho = 1,2,..., n-2k$. Endi L(p) ni quyidagicha yozish mumkin.

$$L(P) = \mathop{\Pi}_{j=1}^{k}\left[P-(\mu_j+i\gamma\rho)\right]\left[P-(\mu_j-i\gamma j)\right]\cdot \mathop{\Pi}_{j=1}^{k}(P-\lambda\rho)=$$
$$=\mathop{\Pi}_{j-1}^{k}\left[\ P^2 - P(\mu_j - i\gamma) - P(\mu_j+i\gamma)+(\mu^2{}_j + i^2\gamma_j{}^2)\ \right]\cdot \mathop{\Pi}_{j=1}^{n-2k}(P-\lambda p)=$$
$$=\mathop{\Pi}_{j-1}^{k}(P^2-2p\mu j+(\mu^2{}_j+i^2\gamma_j{}^2)).\mathop{\Pi}_{j-1}^{k}(P-\lambda p)=\mathop{\Pi}_{j-1}^{k}(P^2+a_1^{(j)}p+a_2^{(s)})\cdot\mathop{\Pi}_{j-1}^{k}(P+в^{(p)}),$$

bunda $a_1^j = -2\mu_j > 0, a_2^{(j)} = \mu_j^2 + \gamma_j^2 > 0, в\rho = -\lambda_p^0 > 0$

Demak, L(p) ko‘phad koeffitsientlari musbat bo‘lgan $P^2Qa_1pQa_2$ va PQb ko‘rinishdagi ko‘phadlarning ko‘paytmasi shaklida yoziladi. Bunday ko‘phadlarni ko‘paytirib chiqsak, koeffitsientlari musbat bo‘lgan ko‘phad chiqishi ravshan. Bu musbat koeffitsient ta’rif bo‘yicha $a_1, a_2, \ldots a_n$ larga teng bo‘ladi. Bundan $a_1>0$, $a_2>0, \ldots, a_n>0$. Teorema isbot bo‘ldi.

2-**TEOREMA**. Koeffitsientlari xaqiqiy bo‘lgan $L(p)qa_0p^3Qa_1p^2.Qa_2pQa_3$, $a_0>0$ ko‘phad turg‘un bilishi uchun a_1, a_2, a_3, koeffitsientlar musbat va $a_1 * a_2 > a_0 * a3$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarli.

Umumiy xolda ko‘phadning turg‘unligi shartini bayon etamiz. Eslatib o‘tamizki, biror matrsa berilgan bo‘lsin, uning k –tartibli bosh minori deb, ushbu

$$P=\begin{pmatrix} P_{11}P_{12}\cdot\cdot P_{1n} \\ P_{21}P_{22}\cdot\cdot P_{2n} \\ ——————— \\ P_{n1}P_{n2}\cdot\cdot P_{nn} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} P_{11}\ P_{12}\cdot\cdot P_{1k} \\ P_{21}\ P_{22}\cdot\cdot P_{2k} \\ ——————— \\ P_{k1}\ P_{k2}\cdot\cdot P_{kk} \end{pmatrix}$$ (qP_k) $(\det P_k q \Delta_k(P))$

matritsaning determinantiga aytiladi. O‘sha minorni $\Delta_k(P)$ deb belgilaymiz.

3-**TEOREMA**. (Raus-Gurvits belgisi) Ushbu $L(p)qa_0p^nQa_1p^{n-1}Q\ldots Qa_{n-1}PQa_n$, $a_0>0$ koeffitsientlari xaqiqiy bo‘lgan n- tartibli ko‘phad berilgan bo‘lsin. quyida ko‘phadning $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koeffitsientlaridan n- tartibli matritsa tuzamiz:

$$Q=\begin{pmatrix} a_1, a_3, a_5 \ldots 0 \\ a_0, a_2, a_4 \ldots 0 \\ 0, a_1, a_5 \ldots\ldots 0 \\ ——————— \\ 0 \ldots\ldots a_{n-2}, a_n \end{pmatrix}$$

2) ko‘phad turg‘un bo‘lishi uchun Q matritsaning xamma bosh minorlari $\Delta_1(Q), \Delta_2(Q), \ldots \Delta_n(Q)$ musbat bo‘lishi zarur va yetarli.

3-teoremadan 2-teorema xususan kelib chiqadi. Xaqiqatdan, 2- teoremada nq3 edi.

Shuning uchun 3 – tartibli Q matritsani tuzamiz:

$$Q=\begin{pmatrix} a_1, a_3 \dots 0 \\ a_0, a_2 \dots 0 \\ 0, a_1 \dots a_3 \end{pmatrix} = a_1, a_2 - a_0, a_3$$

Bundan $\Delta_1(Q)$qa_1

$$\Delta_2(Q)=\begin{vmatrix} a_1, a_3 \\ a_0, a_2 \end{vmatrix}=a_1a_2-a_0a_3,\qquad \Delta_3(Q)=\begin{pmatrix} a_1, a_3 \dots 0 \\ a_0, a_2 \dots 0 \\ 0, a_1 \dots a_3 \end{pmatrix}=a_3, \Delta_2(Q)$$

3-teoremaga ko‘ra $a_0>0$, $a_1>0$, $a_3>0$, $a_1a_2-a_0a_3>0$. Oxirgi tengsizlikdan $a_2>\frac{a_0a_3}{a_1}>0$ kelib chiqadi.

Endi nq4 bo‘lganda

$$Q=\begin{pmatrix} a_1, a_3, 0, 0 \\ a_0, a_2, a_4\, 0 \\ 0, a_1, a_3, 0 \\ 0, a_0, a_2, a_4 \end{pmatrix}$$

matritsaga ko‘ra: Δ_1Qqa_1;$\Delta_2(Q)a_1a_2-a_0a_3$;

$$\Delta_3(Q)=\begin{pmatrix} a_1, a_3, 0 \\ a_0, a_2, 0 \\ 0, a_1, a_3 \end{pmatrix}=a_1a_2a_3-a_1^2a_4-a_0a_3^2=a_3(a_1a_2-a_0a_3)-$$

$$-a_1^2a_4=a_3, \Delta_2(Q)-a_1^2a_4$$

$$\Delta_4(Q)=\begin{vmatrix} a_1, & a_3, & 0, & 0 \\ a_0, & a_2, & a_4, & 0 \\ 0, & a_1, & a_3, & 0 \\ 0, & a_0, & a_2, & a_4 \\ 0, & a_0, & a_2, & a_4 \end{vmatrix}=a_4\Delta_3(Q)$$

Bu minorlarning musbatligi shartidan

$a_0>0$, $a_1>0$, $a_3>0$,$a_4>0$

$\Delta_3(Q)$q$a_1a_2a_3$,-a_0,a_3^2,-a_1^2,$a_4>0$ tengsizlik kelib chiqadi. nq5 bo‘lganda Q matritsa quyidagicha bo‘ladi:

$$Q=\begin{pmatrix} a_1, a_3, a_5, 0, 0 \\ a_0, a_2, a_4, 0, 0 \\ 0, a_1, a_3, a_5, 0 \\ 0, a_0, a_2, a_4, 0 \\ 0, 0, a_1, a_3, a_5 \end{pmatrix}$$

va xakozo.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.

3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta'lim mavzulari

1. Yechimning mavjudligi va yagonaligi haqida teorema. O'ng tamoni maxsus ko'rinishda bo'lgan chiziqli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar sistemasi.
2. Matritsa ko'rinishdagi chiziqli tenglamalar sistemasi. Koshi integral formulasi. Eksponensial matritsa. Matritsali differensial tenglamalarni integrallash.

Glossariy

Turg'un ko'phad - Agar koeffitsientlari xaqiqiy

$$L(P)qa_0P^h{}_nQa_1P^{n-1}Q\ldots Qa_{n-1}PQa_n \qquad (1)$$

ko'phadning barcha ildizlari (nollari) xaqiqiy qismi manfiy bo'lsa, u xolda (1) ko'phad turg'un ko'phad deyiladi.

Raus-Gurvits belgisi - Ushbu $L(p)qa_0p^nQa_1p^{n-1}Q\ldots Qa_{n-1}PQa_n$, $a_0>0$ koeffitsientlari xaqiqiy bo'lgan n- tartibli ko'phad berilgan bo'lsin. quyida ko'phadning $a_0, a_1, \ldots, a_n$ koeffitsientlaridan n- tartibli matritsa tuzamiz:

$$Q=\begin{pmatrix} a_1, a_3, a_5 \ldots 0 \\ a_0, a_2, a_4 \ldots 0 \\ 0, a_1, a_5 \ldots 0 \\ \text{———————} \\ 0 \ldots a_{n-2}, a_n \end{pmatrix}$$

Keyslar banki

Keys: Masala o'rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2e^t \end{cases}$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma'lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

2) ko'phad turg'un bo'lishi uchun Q matritsaning xamma bosh minorlari $\Delta_1(Q), \Delta_2(Q), \ldots \Delta_n(Q)$ musbat bo'lishi zarur va yetarli.

Nazorat uchun savollar

1. Qanday ko'rinishdagi ko'phad turg'un ko'phad deyiladi?
2. Turg'un ko'phadning ildizlari qanday o'qda joylashgan bo'ladi?
3. Birinchi tartibli chiziqli tenglamani ildizi qanday bo'lishi zarur va yetarli7
4. Kvadrat uch hadning ildizlari qanday formulalar bilan hisoblanadi?
5. Qanday shart bajarilganda ko'phad turg'un bo'ladi?

Amaliy mashg'ulot-35

1. $y'' = \dfrac{2y}{x^2}$ j: $y = c_1x^2 + \dfrac{c_2}{x}$

2. $y'' + \dfrac{y'}{x} + \dfrac{y}{x^2} = 0$ j: $y = c_1\cos(\ln x) + c_2\sin(\ln x)$

3. $x^2y''-4xy'+6y=x$ j: $y=(x+1)^2\left[c_1+c_2\ln(x+1)\right]+(x+1)^3$

4. $(1+x)^2y''-3(1+x)y'+4y=(1+x)^3$ j: $y=(x+1)^2\left[c_1+c_2\ln(x+1)\right]+(x+1)^3$

5. $xy''+2y'=10x$ j: $y=\dfrac{5x^2}{3}+c_1x^{-1}+c_2$

6. $x^2y''-6y=12\ln x$ j: $y=c_1x^3+\dfrac{c_2}{x^2}-2\ln x+\dfrac{1}{3}$

7. $x^2y''-2xy'+2y=4x$ j: $y=c_1x+c_2x^2-4x\ln x$

8. $x^3y''+3x^2y'+xy=6\ln x$ j: $y=\dfrac{c_1+c_2\ln x+\ln^3 x}{x}$

9. $x^2y''-4xy'+6y=x^5$ j: $y=\left(\dfrac{x^3}{6}+c_1x+c_2\right)x^2$

10. $x^2y''+xy'+y=x$ j: $y=\dfrac{x}{2}+c_1\cos(\ln x)+c_2\sin(\ln x)$

TEST

$y''+9y=0$ tenglamaning $M(\pi,-1)$ nuqtadagi o‘tuvchi va shu nuqtada $y+1=x-\pi$ to‘g‘ri chiziqka urinuvchi integral egri chziqni toping.	* $y=Cos3x-\frac{1}{3}Sin3x$	$y=Cos3x+\frac{1}{3}Sin3x$	$y=Cos3x+Sin3x$	$y=Cos3x-Sin3x$
$y''+16y=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	* $y=c_1\cos 4x+c_2\sin 4x$	$y=ce^{-16x}$	$y=c_1e^{4x}+c_2e^{-4x}$	$y=c_1e^{-4x}\cos 4x+c_2e^{-4x}\sin$
$y''+4y=0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	* $y=c_1\cos 2x+c_2\sin 2x$	$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}$	$y=ce^{-4x}$	$y=c_1\cos 2x+c_2x\cos 2x$
Berilgan differensial tenglamaning xususiy yechimini aniqlang: $y'''-y''=5x^2+4$	* $y_1=\frac{5}{12}x^4-\frac{5x^3}{3}+7x^2$	$y_1=5x^4+4x^2$	$y_1=5x^2+4$	$y_1=ax^2+bx+c$
Berilgan tenglamaning tipini aniqlang: $\left(x+3x^2\right)y'+xy=0$	* o‘zgaruvchilari ajraladigan	to‘la differensial	Bernulli	y ga nisbatan chiziqli
Xususiy yechimi $y_1=xe^x$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko‘rsating.	* $y''-2y'+y=0$	$y''-2y'-3y=0$	$y'-y=0$	$y''+2y'+y=0$
Xususiy yechimi $y_1=x^2e^{-x}$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas	* $y'''+3y''+3y'+y=0$	$y'''-y'=0$	$y''-y=0$	$y'''+3y''=0$

koeffitsientli differensial tenglamani ko'rsating.				
Xususiy yechimni aniqmas koeffitsientlar usuli bilan toping $y'' - 5y' + 4y = 4x^2e^{2x}$	* $y = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$	$y = x(ax^2 + bx + c)e^{2x}$	$y = x(ax + b)e^{2x}$	$y = ax^2e^{2x}$
$x = e^t, y = -e^t$ funksiya quyidagi tenglamalar sistemalaridan qaysi birining yechimi bo'ladi?	* $\dot{x} = 2x + y$ $\dot{y} = 3x + 4y$	$\dot{x} = x + y$ $\dot{y} = 3y - 2x$	$\dot{x} = x - y$ $\dot{y} = y - 4x$	$\dot{x} = x - 3y$ $\dot{y} = 3x + y$

MA'RUZA № 36
Mavzu: Lyapunov ma'nosida turg‘unlik.

Reja:

1. Muvozanat nuqtasining turg‘unligi.
2. Asimptotik ut nuqta.
3. Lyapunov ma'nosida noturg‘un yechim.
4. Lyapunov-Puonkare terremasi.

Tayanch so’z va iboralar: *muvozanat nuqta, turg‘unlik, vektor funksiya, vektor yechim, avtonom sistema, asimptotik turg‘unlik, noturg‘unlik, 1-chi yaqinlashishi sistemasi.*
Muvozanat nuqtasining turg‘unligi.

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_1 .. x_n) \\ x_2 = f_2(x_1 ... x_n) \\ ---------- \\ x_n = f_n(x_1 - x_n) \end{cases} \tag{3}$$

$$xqf(x) \tag{4}$$

(3) avtonom sistemada $x_1 = f_1(x_1 ... x_n)$,... $x_n = f_n(x_1 ... x_n)$ funksiyalar xolatlar fazosining D_n soxasida aniqlangan va birinchi tartibli xususiy xosilalari bilan uzluksiz deb qaraymiz. Turg‘un lik belgilarini bayon etishda esa xatto 2-tartibli xususiy xosilalarning uzluksizligi xam talab etiladi, ya'ni $f_i(x_1,..x_n) \in (D_n)$ D_n soxadan olingan aq(a_1,…a_n) nuqta (3) sistemaning muvozanat nuqtasi bo‘lsin, demak, f(a)q0 vektor tenglik o‘rinli.

Shu a nuqtaning turg‘unligini so‘z bilan tushuntiraylik: agar tq0 momentda (3) sistemaning a(a€D_n) nuqtaga yetarli yaqin interval nuqtadan chiqadigan yechimi o‘zining butun keyingi o‘zgarishi davomida, ya'ni t ning barcha t>0 qiymatlarida shu a nuqta ga yaqinligicha qolsa, u xolda muvozanat nuqta a ni turg‘un deb ataladi.

Keyingi muloxazalarimizda $0, \varsigma(\varsigma = (\varsigma_1,..\varsigma_n))$, $\varphi(0,\varsigma) = \varsigma$ boshlang‘ich qiymatlarga ega bo‘lagn yechimni φ(t,ς) deb belgilaymiz. Albatta muvozanat nuqtasi A ning atrofidagi yechimlar tekshirilishi turg‘un likning aniq ta’rifi uchun kerak. Shuning uchun shubhasiz, ς≠0 deb tanlanadi. Demak, φ(t,ς) vektor funksiya uchun ushbu

$$\frac{d\varphi(t\varsigma)}{dt} \equiv f(\varphi(t\varsigma)), \tag{5}$$

φ(0,ς)qς→(0,ς-boshlang‘ich shart bajarilishi) munosabatlar o‘rinli.

2- **TA’RIF**: 1) Agar shunday p>0 muvjud bo‘lsinki, [ς-a]<p bo‘lganda (4) vektor tenglamaning φ(t_1,ς) yechimi t ning barcha musbat(t>0) qiymatlarida aniqlangan bo‘lsa;
2) xar bir musbat son ye>0 uchun shunday musbat δ>0, δ<0 topilsinki,[ζ-a]<δ t ning barcha musbat qiymatlari uchun [φ(t,ζ)-a]<0 $\forall$ t>0 tengsizlik bajarilsa, u xolda (4) vektor tenglamaning muvozanat nuqtasi a Lyapunov ma'nosida turg‘un deyiladi.

3- **TA’RIF**:Agar Lyapunov ma'nosida turg‘un bo‘lgan nuqta a uchun
3) shunday musbat son G>0,G<p,J-g bo‘lsaki, [ζ-a]<G bo‘lganda ushbu $\lim_{t\to+\infty} |\varphi(t,\zeta) - a| = 0$ munosabat bajarilsa, u xolda (4) vektor-tenglamaning muvozanat nuqtasi **a** asimptotik turg‘un deyiladi.

[φ(t,ζ)-a]<E tengsizlikni koordinatalar bilan yozsak, $|\varphi(t,\xi) - a| = \sqrt{(\varphi_1(t,\xi) - a_1)^2 + ..(\varphi_n(t,\xi) - a_n)^2} < E$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. Bunga ekvivalent n ta $|(\varphi_1(t,\xi) - a_1)| < \frac{K_1 E}{\sqrt{n}}, ...(\varphi_n(t,\xi) - a_n) < \frac{K_1 E}{\sqrt{n}},$

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^2 = n, k_i > 0, i = 1, n$$

tengsizlikni yozishimiz mumkin. Agar shu tengsizliklardan kamida bittasi o‘rinli bo‘lmasa, tegishli φ(t,ζ) vektor –echim Lyapunov ma'nosida noturg‘un deyiladi. Bunga misol qilib, xolat tekisligidagi egar manzarasini keltirish mumkin.

Endi n- tartibli chiziqli bir jinsli avtonom sistemani olaylik. Bular uchun quyidagicha teorema o‘rinli.

4- **TEOREMA**: Bizga chiziqli bir jinsli o‘zgarmas koeffitsientli sistema xqAx berilgan bo‘lib, φ(t,ζ) vektor funksiya tenglamaning boshlang‘ich qiymatlariga ega bo‘lgan yechimi bo‘lsin. Agar A matritsaning barcha xos sonlari manfiy xaqiqiy qismlarga ega bo‘lsa, u xolda shunday musbat τ va α sonlar topiladiki, ushbu

$$|\varphi(t,\xi)| \le \tau |\xi| e^{-\alpha t}, t \ge 0 \tag{6}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bundan ma'lumki, agar A matritsaning xos sonlari manfiy xaqiqiy qismlarga ega bo‘lsa, u xolda φ(t,ζ) yechim uchun (6) tengsizlik o‘rinli ekan. Chiziqli bir jinsli sistemada aq0 bo‘ladi. Shuning uchun ye-biror musbat son bo‘lsa, δqye/τ deb olish mumkin. Bu xolda (2- ta’rifni tekshiramiz) [ζ]<E/τ bo‘lganda $|\varphi(t,\xi)| \le \tau|\xi| e^{-\alpha t}, \tau \cdot \frac{E}{\tau} e^{-\alpha t} < E,$ chunki $e^{-\alpha t} < 1, \alpha > 0, t > 0$

Demak, chiziqli bir jinsli avtonom sistema uchun aq0 nuqta Lyapunov ma'nosida turg‘un . Bundan tashqari, (6) tengsizlikka ko‘ra τ deb ixtiyoriy kichik musbat sonni olinsa xam $\lim_{t\to\infty} |\varphi(t,\xi)| = 0$ tenglikka egamiz.

Demak, aq0 nuqta Lyapunov ma'nosida asimptotik turg‘un bo‘lar ekan.

Agar A matritsaning biror xos sonining xaqiqiy qismi 0 ga teng bo‘lib, qolganlariniki manfiy bo‘lsa, u xolda muvozanat nuqta Lyapunov ma'nosida turg‘un bo‘ladi. Ammo u asimptotik turg‘un bo‘lmaydi.(chunki (6) tengsizlik o‘rinli bo‘lmaydi).

Agar biror xos sonning xaqiqiy qismi musbat bo‘lsa, muvozanat xolat turg‘un bo‘la olmaydi. Shu munosabat bilan noturg‘un muvozanat xolatining (nuqtasining) ta’rifini keltiramiz.

4- **TA’RIF**: agarda shunday musbat son M mavjud bo‘lsaki, (4) tenglamaning xar bir φ(t,ζ) yechimiga mos traektoriyasi ushbu [ζ-a]<μ sharning ζ, ζ≠a nuqtasidan boshlanib, shu shardan albatta chiqsa va unga boshqa qaytib kelmasa, (boshqacha aytganda , shunday musbat son TqT(ζ) topilsaki, tqT(ζ) bo‘lganda φ(t,ζ) yechim aniqlangan va t ning shu yechim aniqlangan t>T qiymatlarida [φ(t,ζ)-a] > μ tengsizlikni qanoatlantrsa, u xolda (4) vektor tenglamanin muvozanat nuqtasi a butunlay noturg‘un deyiladi.

Noturg‘un muvozanat nuqtasi umuman aytganda butunlay noturg‘un bo‘la olmaydi.

Butunlay no turg‘un muvozanat nuqta siga misol qilib, no turg‘un tugun nuqtasi, no turg‘un fokus nuqtani (no turg‘un tugilma tugun va fokus nuqtalarni) keltirish mumkin.

Lyapunov-Puankare TEOREMAsi.

Biz quyida keltiradigan teorema muvozanat nuqta sining asimptotik turg‘un bo‘lishi xaqida bo‘lib, u yetarli shartni beradi. Ko‘pincha bu teoremada tavsiya etiladigan metodni birinchi yaqinlashishi bo‘yicha turg‘un lik yoki Lyapunov-Pauankarening birinchi usuli deb yuritiladi. Mazkur usul avtonom sistemalar uchun bayon etiladi. Bizga (3) avtonom sistema berilgan bo‘lib, aq(a_1,…a_n) uning muvozanat nuqtasi bo‘lsin. Ushbu

$$x_i q a_i Q y_i,\ iq1,2\ldots n \tag{7}$$

almashtirish yordamida yangi $y_1, y_2, \ldots y_n$ noma'lum funksiyalarni kiritamiz. Ravshanki, $x_i q y_i$. Endi (3) tenglamaning o‘ng tomonida xam (7) almashtirish bajarib, xar bir $f_i(x_1,..x_n)$ funksiyani a nuqta atrofida Teylor qatoriga yoysak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$f_i(x) = f_i(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}(x_j - a_j) + R_i, i = 1,2.n \tag{8^1}$$

yoki (7) ni almashtirishdan $y_i q x_i - a_i$

$$f_i(a+y)=f_i(a)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}y_j+R_i, i=1,n \tag{8}$$

bunda R-yangi $y_1,..y_n$ noma'lumlarga nisbatan 2- tartibli kichik miqdorlar. Farazga ko'ra, a nuqta muvozanat nuqtasi bo'lgani uchun $f_i(a)q0$. Shuning uchun $x_iqy_iqf_i(aQy)$ ekanini xisobga olib (3) sistemani quyidagi ko'rinishda yozamiz: (yangi no'malum funksiyalar bilan):

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}y_j+R_i, i=1,n$$

Agar $a_iq\ \frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}$ (9) deb belgilasak, oxirgi sistemani bunday yozish mumkin:

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+R_i, i=1,n \tag{10}$$

Agar(10) sistemada qoldiq xadlarni tushirib qoldirsak, xosil bo'lgan ushbu

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j\ , i=1,n \tag{11}$$

sistema birinchi yaqinlashish sistemasi deyiladi.

5-**TEOREMA**: (Lyapunov-Penkare teoremasi)

Agar $A=(a_{ij})=\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)$ matritsaning barcha xos sonlari manfiy xaqiqiy qismlarga ega bo'lsa, u xolda (3) sistemaning muvozanat nuqtasi a asimptotik turg'un bo'ladi. To'laroq aytganda, shunday son τ>0, J-ni, [ζ-a]<τ bo'lganda ushbu

$$|\varphi(t,\xi)-a|\le\tau|\xi-a|e^{-\alpha t} \tag{12}$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

6-**TEOREMA**: Agar $A=\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)$ matritsaning barcha xos sonlari musbat xaqiqiy qismlarga ega bo'lsa, u xolda (3) sistema ning muvozanat nuqtasi a butunlay turg'un mas bo'ladi.

7-**TEOREMA**: Agar $A=\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)$ matritsa xos sonlari ichida kamida bittasi musbat xaqiqiy qismga ega bo'lsa, u xolda muvozanat nuqtasi noturg'un buladi.

Misol 1.

Matematik mayatnik tenglamasini, ya'ni ushbu lφQgsinφq0 tenglamani ko'raylik yoki kanonik o'zgaruvchilarda ($\varphi q\varphi_1,\varphi q\varphi_2$ da) $\varphi 2q\varphi q$-g/e sin φq-g/e sin φ_1

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_2\\ \varphi_2=-\frac{g}{n}\sin\varphi_1\end{cases} \tag{13}$$

sistemani ko'raylik. Bu avtonom sistemaning muvozanat nuqta lari(0,0), (kP,0) nuqtalardan iborat bo'lib, sanoqli to'plamni tashkil qiladi. Bu nuqta larni turg'un yoki no turg'unligini tekshirish uchun faqat 2 tasini, ya'ni $a^{(1)}q(0,0)$ va $a^{(2)}q(P,0)$ nuqtalarni tekshirish yetarli. Avval $a^{(1)}q(0,0)$ nuqta ni olaylik. Mos 1-chi yaqinlashish sistemasi.

$F_1(\varphi_1,\varphi_2)q\varphi_2,\varphi_2(\varphi_1,\varphi_2)q$-g/e sin φ_1

$$\begin{cases}\frac{\partial f_1}{\partial\varphi_1}=0\Rightarrow\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial\varphi_1}=0\\ \frac{\partial f_1}{\partial\varphi_2}=1\Rightarrow\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial\varphi_2}=1\\ \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_2}=-\frac{g}{e}\cos\varphi_1\Rightarrow\frac{\partial f_1(0,0)}{\partial\varphi_1}=-\frac{g}{e}\cos 0=-\frac{g}{e}\\ \frac{\partial f_2}{\partial\varphi_2}=0\Rightarrow\frac{\partial f_2(0,0)}{\partial\varphi_2}=0\end{cases}$$

Bulardan $\varphi_i = \sum_{j=1}^{2} \frac{\partial f_i(0,0)}{\partial \varphi_j}\varphi_j \quad ,i=1,2$ bo‘ladi. Ya'ni $\varphi_i = \frac{\partial f_i(0,0)}{\partial \varphi_j}\varphi_1 + \frac{\partial f_i(0,0)}{\partial \varphi_j}\varphi_2$

$\varphi_2 = \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial \varphi_1}\varphi_1 + \frac{\partial f_2(0,0)}{\partial \varphi_j}\varphi_2$ yoki $\begin{cases}\varphi_1 = \varphi_2 \\ \varphi_2 = -\frac{g}{e}\varphi_1\end{cases}$ ko‘rinishda bo‘lib, Aq(a_{ij})q($-\frac{g}{e}$) . Bu matritsaning xos sonlarini topamiz : [AqλE]q0 ya'ni

$$\begin{vmatrix} -\lambda,1 \\ -\frac{g}{e},-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{g}{e} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{g^0}{e}, g>0, l>0, \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{g}{e}} \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-\frac{g}{e}}$$

$$\lambda_{1,} = i\sqrt{-\frac{g}{e}} \quad \lambda_2 = i\sqrt{-\frac{g}{e}}$$

Bundan ko‘rinadiki, xos sonlarning xaqiqiy qismlari 0 ga teng. Bundan (0, 0) nuqta berilgan(13) sistema uchun Lyapunov ma'nosida asimptotik turg‘un emas. (5-teoremadan). Ammo mayatnikning kichik tebranishlari uchun sin φ_1-φ_2 va bu xolda (0,0) turg‘un bo‘ladi.

Shunga o‘xshash $a^{(2)}$q(P,0) ga mos birinchi yaqinlashish sistemasini xisoblash kerak.

$\begin{cases}\varphi_1 = \varphi_2 \\ \varphi_2 = -\frac{g}{e}\varphi_1\end{cases}$ bo‘lib, $A = \begin{vmatrix} 0,1 \\ \frac{g}{e},0 \end{vmatrix}$ xos sonlari ya'ni $\lambda_1 = \sqrt{\frac{g}{e}}, \lambda_2 = -\sqrt{\frac{g}{e}}$

$\begin{vmatrix} -\lambda,1 \\ -\frac{g}{e},-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{g}{e} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \frac{g^0}{e}, \mu_{1,2} = t\sqrt{\frac{g}{e}}$ xos sonlardan biri musbat bo‘lgani uchun (P,0) nuqta da (13) sistema uchun Lyapunov ma'nosida noturg‘un. (7-teoremadan).

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Yechimning davomiyligi. Yechimning boshlangich qiymatlarga va parametrlarga uzluksiz bogliqligi haqida teorema.

2. Yechimning boshlangich qiymatlar va parametrlar bo‘yicha differensiallanuvchanligi haqida teorema.

Glossariy

Turg’un nuqta - a nuqtaning turg‘unligini so‘z bilan tushuntiraylik: agar tq0 momentda (3) sistemaning a(a€D_n) nuqtaga yetarli yaqin interval nuqtadan chiqadigan yechimi o‘zining butun keyingi o‘zgarishi davomida, ya'ni t ning barcha t>0 qiymatlarida shu a nuqta ga yaqinligicha qolsa, u xolda muvozanat nuqta a ni turg‘un deb ataladi.

Lyapunov ma'nosida turg‘un nuqta - 1) Agar shunday p>0 muvjud bo‘lsinki, [ς-a]<p bo‘lganda (4) vektor tenglamaning φ(t_1,ς) yechimi t ning barcha musbat(t>0) qiymatlarida aniqlangan bo‘lsa;

2) xar bir musbat son ye>0 uchun shunday musbat δ>0, δ<0 topilsinki,[ζ-a]<δ t ning barcha musbat qiymatlari uchun [φ(t,ζ)-a]<0 ∀t>0 tengsizlik bajarilsa, u xolda (4) vektor tenglamaning muvozanat nuqtasi a Lyapunov ma'nosida turg‘un deyiladi.

Assimptotik turg’un nuqta - Agar Lyapunov ma'nosida turg‘un bo‘lgan nuqta a uchun

3) shunday musbat son G>0,G<p,J-g bo‘lsaki, [ζ-a]<G bo‘lganda ushbu $\lim_{t\to+\infty}|\varphi(t,\zeta)-a|=0$ munosabat bajarilsa, u xolda (4) vektor-tenglamaning muvozanat nuqtasi **a** asimptotik turg‘un deyiladi.

Butunlay noturg’un nuqta - agarda shunday musbat son M mavjud bo‘lsaki, (4) tenglamaning xar bir φ(t,ζ) yechimiga mos traektoriyasi ushbu [ζ-a]<μ sharning ζ, ζ≠a nuqtasidan boshlanib, shu shardan albatta chiqsa va unga boshqa qaytib kelmasa, (boshqacha aytganda , shunday musbat son TqT(ζ) topilsaki, tqT(ζ) bo‘lganda φ(t,ζ) yechim aniqlangan va t ning shu yechim aniqlangan t>T qiymatlarida [φ(t,ζ)-a] > μ tengsizlikni qanoatlantrsa, u xolda (4) vektor tenglamanin muvozanat nuqtasi a butunlay noturg‘un deyiladi.

Lyapunov-Penkare teoremasi - Agar $A=(a_{ij})=\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial x_j}\right)$ matritsaning barcha xos sonlari manfiy xaqiqiy qismlarga ega bo‘lsa, u xolda (3) sistemaning muvozanat nuqtasi a asimptotik turg‘un bo‘ladi. To‘laroq aytganda, shunday son τ>0, J-ni, [ζ-a]<τ bo‘lganda ushbu

$$|\varphi(t,\xi)-a|\le\tau|\xi-a|e^{-\alpha t}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $\begin{cases}\dot{x}=2x+y+2e^{t}\\ \dot{y}=x+2y-3e^{4t}\end{cases}$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni
- keltiring (individual va kichik guruhlarda);

to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Muvozanat nuqta turg‘un deb nimaga aytiladi?
2. Lyapunov ma'nosida turg‘un deganda nimani tushunasiz?
3. Asimtotik turg‘un deb nimaga aytiladi?
4. Butunlay turg‘un deb nimaga aytiladi?
5. Lyapunov – Puankare birinchi usuli deb nimaga aytiladi?

Amaliy mashg’ulot-36
O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli sistemalar

1. $a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-1}y'+a_ny=0$ (1)

ko‘rinishdagi chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli tenglamalarni yechish uchun xarakteristik tenglama

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\ldots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \qquad (2)$$

tuzish kerak va uning hadlari $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ larni topish kerak. U holda (1) ning umumiy yechimi $C_ie^{\lambda_ix}$ ko‘rinishdagi ($\lambda_i-(2)$ ning sodda yechimi) va $(C_{m+1}+C_{m+2}x+\ldots+C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x}$ ko‘rinishdagi ($\lambda-k$-karrali yechim) xususiy yechimlarning yig‘indisidan iborat. (1)-tenglama yechimi haqiqiy yoki kompleks bo‘lishi mumkin. Agar (1) tenglama koeffitsientlari haqiqiy bo‘lsa, uning yechimini λ ildizlar kompleks bo‘lganda ham, haqiqiy ko‘rinishda yozish mumkin. Har bir oddiy kompleks ildizlar $\lambda=\alpha+i\beta$ uchun (1)-tenglama umumiy yechimida

$$C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x+C_{m+2}e^{2x}\sin\beta x$$

ko‘rinishdagi xadlar ishtirok etadi. Agar $\lambda=\alpha\pm i\beta$ ildizlar *k*-karrali bo‘lsa (1) tenglama umumiy yechimida

$$P_{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x + Q_{k+1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

Qo‘shiluvchilar hosil bo‘ladi, bu yerda $P_{k-1}(x),\ Q_{k-1}(x)$ ixtiyoriy k-1 darajali ko‘phadlar.

Misol 1: $y^{(5)}-2y^{(4)}-16y'+32y=0$ tenglama yechilsin.

Xarakteristik tenglama tuzamiz.

$y=e^{\lambda x}$ deb olamiz:

$$\lambda^5-2\lambda^4-16\lambda+32=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)(\lambda^4-16)=0 \Leftrightarrow (\lambda-2)^2(\lambda+1)(\lambda^2+4)=0,$$

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \ \lambda_3=-2,\ \ \lambda_4=2,\ \ \lambda_5=-2i.$$

Bayon etilganiga muvofiq.

$y=(c_1+c_2x)e^{2x}+c_3e^{-2x}+c_4\cos 2x+c_5\sin 2x$

(c_1+c_2x ko‘phad darajasi $\lambda_{1,2}=2$ ildiz karrasidan past).

Misol-2: $y''-2y'+5y=0$ tenglama uchun $r^2-2r+5=0$ harakteristik tenglama $r_{1,2}=1\pm 2i$ ildizlarga ega. Differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$y=c_1e^x\cos 2x+c_2e^x\sin 2x$ yoki $y=e^x(c_1\cos 2x+c_2\sin 2x)$. Ushbu $y'''-8y=0$ tenglamaning harakteristik tenglamasi: $r^3-8=0$. Chap tomonni ko‘paytuvchilarga ajratib, $(r-2)(r^2+2r+4)=0$ ni hosil qilamiz, bu yerdan $r_1=2,\ r_{2,3}=-1\pm i\sqrt{3}$. Differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y=c_1e^{2x}+c_2e^{-x}\cos x\sqrt{3}+c_3e^{-x}\sin x\sqrt{3}.$$

yoki $y=c_1e^{2x}+e^{-x}(c_2\cos x\sqrt{3}+c_3\sin x\sqrt{3}).$

Nihoyat $y^{v}-13y'''+36y'=0$ tenglama uchun harakteristik tenglama: $r^5+13r^3+36r=0;$ uning ildizlari $r_1=0;\ r_{2,3}=\pm 2i,\ r_{3,4}=\pm 3i$ dan iborat. Differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x+c_4\cos 3x+c_5\sin 3x$$

2. Chiziqli, o‘zgarmas koeffitsientli, o‘ng tomoni $b_0+b_1x+\ldots+b_mx^m,\ e^{\alpha x},\ \cos\beta x,\ \sin\beta x$ funksiyalarning yig‘indisi, ko‘paytmasi ko‘rinishda bo‘lsa, xususiy yechim aniqmas koeffitsientlar usuli bilan topiladi. Aniqmas koeffitsientlar usuli o‘ng tomonga qarab yechimni tenglamaga qo‘yib topiladi. Xususiy yechim topish jadvalini keltiramiz.

№	O‘ng tomon ko‘rinishi	Xususiy yechim ko‘rinishi
1	$P_m(x)e^{\gamma x}$ (4)	$y_1=x^SQ_m(x)e^{\gamma x}$ a) $S=0,$ agar γ (1) ning yechimi emas. b) $S=k$, agar γ (1) ning k karrali ildizi bo‘lsa
2	$e^{\alpha x}\left(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x\right)$ (5)	$y_1=x^Se^{\alpha x}\left(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x\right)$ a) $S=0,$ agar $\alpha+i\beta$ (1) ning yechimi emas. b) $S=k$, agar $\alpha+i\beta$ (1) ning k karrali ildizi.

Bu yerda $P_m,\ T_m$ $P(x),\ Q(x)$ ko‘phadlarning tartibiga teng ko‘phadlar.

1) Agar o‘ng tomon $\cos\beta x,\ \sin\beta x$ larni o‘z ichiga olsa ularni Eyler formulalari

$$\cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2},\ \ \sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i} \qquad (6)$$

asosida o‘zgartirish zarur.

2) O‘ng tomoni (5) ko‘rinishlardagi tenglama yana quyidagicha yechilishi mumkin. Avval o‘ng tomon $p(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$ uchun (1) tenglama yechiladi. Bu yechimning haqiqiy qismi o‘ng tomon $p(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ uchun, mavhum qismi o‘ng tomon $p(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ uchun xususiy yechim bo‘ladi. Agar o‘ng tomon bunday $f_1+...+f_p$ funksiyalar yig‘indisi shaklida bo‘lsa, xususiy yechimlar har har bir tomon uchun alohida olinadi va qo‘shiladi.

Ixtiyoriy bir jinsli bo‘lmagan chiziqli differensial tenglama yechimi mos bir jinsli tenglama umumiy yechimi bilan bir jinsli bo‘lmagan tenglamaning bita xususiy yechimi yig‘indisiga teng.

Misol-1: $y'''-6y''+9y'=xe^{3x}\cos 2x$ (8) tenlama yechilsin. Xarakteristik tenglama yechilsin. Xarakteristik tenglama.

$$\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=0,\quad \lambda_{1,2}=3,\quad \lambda_3=0.$$

Shuning uchun bir jinsli tenglama umumiy yechimi $y_0=(c_1+c_2x)e^{3x}+c_3$ ga teng. O‘ng tomon ikki xad yig‘indisidan iborat. 1-had uchun $\gamma=\alpha+i\beta=3$ ikkinchi had uchun $\gamma=\alpha+i\beta=3+2i$. Bu sonlar har xil bo‘lganidan xususiy yechimlarni alohida izlash kerak:

$$y'''-6y^4+9y=xe^{3x}, \qquad (9)$$

$$y'''-6y''+9y=e^{3x}\cos 2x \qquad (10)$$

$\gamma=3$ ga ikki karrali $S=2$ ildiz mos keladi, shuning uchun uning xususiy yechimi $y_1=x^2(ax+b)e^{3x}$ ko‘rinishda olinadi. Uni (8) ga qo‘yib $a=\frac{1}{8},\quad b=-\frac{1}{18}$ ni topamiz.

So‘ng, $\alpha+i\beta=3+2i$ son xarakteristik tenglama yechimi emas. Shuning uchun (10) ning xususiy yechimini $y_2=e^{3x}(c\cos 2x+d\sin 2x)$ ko‘rinishda izlaymiz. Uni (10) ga qo‘yib topamiz: $c=-\frac{3}{52},\quad d=-\frac{1}{26}$. Tenglamani umumiy yechimi $y=y_0+y_1+y_2$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Misol-2: $y^v+8y'''+16y'=0$

tenglama $r^5-8r^3+16r=0$ harakteristik tenglamaga ega, uning ildizlari: $r_1=0,\ r_{2,3}=2i,\ r_{4,5}=-2i$. Umumiy yechim quyidagicha yoziladi:

$$y=c_1+c_2\cos 2x+c_3\sin 2x+c_4x\cos 2x+c_5x\sin 2x$$

3) Bir jinsli bo‘lmagan

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+...+a_ny=f(x) \qquad (11)$$

ixtiyoriy tenglama o‘zgarmaslarni variatsiyalash usuli bilan yechiladi. (11) da bir jinsli (f = 0) tenglamaning umumiy yechimi $y=c_1y_1+...+c_ny_n$ yechimi topilgan bo‘lsin. Bu holda (11) ning yechimi $y=c_1(x)y_1+...+c_n(x)y_n$ ko‘rinishda izlanadi. $c_i(x)$ funksiyalar quyidagi sistemadan topiladi:

$$\begin{aligned}
&c'_1y_1+c'_2y_2+...+c'_ny_n=0,\\
&c'_1y'_1+c'_2y'_2+...+c'_ny'_n=0,\\
&.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\\
&c'_1y_1^{(n-1)}+c'_2y_1^{(n-1)}+...+c'_ny_n^{(n-1)}=0,\\
&a_0(c'_1y_1^{(n-1)}+...+c'_ny_n^{(n-1)})=f(x).
\end{aligned}$$

Eyler tenglamasi

$$a_0x^ny^{(n)}+...+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+...+a_{n-1}xy=f(x) \qquad (12)$$

da $x=e^t \quad (x>0)$ yoki $x=-e^t \quad (x<0)$ deb o‘zgartirish bajarilsa chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli tenglamaga keladi. Hosil bo‘lgan o‘zgarmas koeffitsientli tenglama

$$a_0(\lambda)(\lambda-1)...(\lambda-n+1)+...+a_{n-2}\lambda(\lambda-1)+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

Xarakteristik tenglamaga ega bo‘ladi. Xarakteristik tenglama tuzishda har bir $x^ky^{(k)}$ ko‘paytma (12) da 1 ga kamayuvchi $\lambda(\lambda-1)...(\lambda-k+1)$ ko‘paytma bilan almashtiriladi.

Misol: $x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3 \qquad (13)$

Xarakteristik tenglama tuzamiz:

$$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-\lambda(\lambda-1)+2\lambda-2=0 \qquad (14)$$

$$(\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)=0, \quad \lambda_{1.2}=1, \quad \lambda_3=2.$$

bu holda bir jinsli tenglama $y_0=(c_1+c_2t)e^t+c_3e^{2t}$ umumiy yechimga ega. (13) ning xususiy yechimini topish uchun (14) ni ochib chiqamiz. $\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$. Bu harakteristik tenglama asosida o‘ng tomonli tenglama tuzamiz:

$$y_1'''-4y_1''+5y_1-2y_1=e^{3t} \qquad (x=e^t)$$

3 soni harakteristik tenglama yechimi emas, shuning uchun xususiy yechimni $y_1=ae^{3t}$ ko‘rinishda tuzamiz. Uni oxirgi tenglamaga qo‘yib $a=\frac{1}{4}$ ni topamiz.

Demak, umumiy yechim

$$y=y_0+y_1=(c_1+c_2t)e^t+c_3e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}=$$

$$=(c_1+c_2\ln x)x+c_3x^2+\frac{1}{4}x^3 \quad (x>0)$$

1. ko‘rinishda topiladi. $x<0$ da shunga o‘xshash yechim topiladi, faqat $\ln(x)$ o‘rniga $\ln|x|$ olinadi. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=z\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=-y\end{cases}$ j: $\begin{cases}y=c_1\cos x+c_2\sin x\\ z=c_2\cos x-c_1\sin x\end{cases}$

2. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y+5z\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}+y+3z\end{cases}$ j: $\begin{cases}y=e^{-x}(c_1\cos x+c_1\sin x)\\ z=\dfrac{1}{5}e^{-x}\left[(c_2-2c_1)\cos x-(c_1+2c_2)\sin x\right]\end{cases}$

3. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=-3y-z\\[2mm] \dfrac{dz}{dx}=y-z\end{cases}$ j: $\begin{cases}y=(c_1-c_2-c_1x)e^{-2x}\\ z=(c_1x+c_2)e^{-2x}\end{cases}$

4. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = z \\ \dfrac{dz}{dt} = x \end{cases}$ j: $\begin{cases} x = c_1 e^{t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(c_2 \cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + c_3 \sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ y = c_1 e^{t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(\dfrac{c_2\sqrt{3} - c_2}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t - \dfrac{c_2\sqrt{3} + c_3}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \\ z = c_1 e^{t} + e^{-\frac{t}{2}}\left(\dfrac{-c_3\sqrt{3} - c_2}{2}\cos\dfrac{\sqrt{3}}{2}t + \dfrac{c_2\sqrt{3} - c_3}{2}\sin\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right) \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y + z \\ \dfrac{dy}{dt} = x + z \\ \dfrac{dz}{dt} = x + y \end{cases}$ j: $\begin{cases} x = c_1 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ y = c_3 e^{-t} + c_2 e^{2t} \\ z = -(c_1 + c_3)e^{-t} + c_2 e^{2t} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y + z \\ \dfrac{dz}{dx} = x + y + z \end{cases}$ j: $\begin{cases} y = c_1 + c_2 e^{2x} - \dfrac{1}{4}(x^2 + x) \\ z = c_2 e^{2x} - c_1 + \dfrac{1}{4}(x^2 - x - 1) \end{cases}$

TEST

$y'' + 9y = 0$ tenglamaning $M(\pi, -1)$ nuqtadagi o‘tuvchi va shu nuqtada $y + 1 = x - \pi$ to‘g‘ri chiziqka urinuvchi integral egri chziqni toping.	* $y = Cos3x - \frac{1}{3}Sin3x$	$y = Cos3x + \frac{1}{3}Sin3x$	$y = Cos3x + Sin3x$	$y = Cos3x - Sin3x$
$y'' + 16y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	* $y = c_1\cos 4x + c_2\sin 4x$	$y = ce^{-16x}$	$y = c_1e^{4x} + c_2e^{-4x}$	$y = c_1e^{-4x}\cos 4x + c_2e^{-4x}\sin$
$y'' + 4y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	*$y = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x$	$y = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$	$y = ce^{-4x}$	$y = c_1\cos 2x + c_2 x\cos 2x$
Berilgan differensial tenglamaning xususiy yechimini aniqlang: $y''' - y'' = 5x^2 + 4$	* $y_1 = \frac{5}{12}x^4 - \frac{5x^3}{3} + 7x^2$	$y_1 = 5x^4 + 4x^2$	$y_1 = 5x^2 + 4$	$y_1 = ax^2 + bx + c$
Berilgan tenglamaning tipini aniqlang: $\left(x + 3x^2\right)y' + xy = 0$	* o‘zgaruvchilari ajraladigan	to‘la differensial	Bernulli	y ga nisbatan chiziqli
Xususiy yechimi $y_1 = xe^x$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko‘rsating.	* $y'' - 2y' + y = 0$	$y'' - 2y' - 3y = 0$	$y' - y = 0$	$y'' + 2y' + y = 0$
Xususiy yechimi $y_1 = x^2e^{-x}$ bo‘lgan chiziqli o‘zgarmas koeffitsientli differensial tenglamani ko‘rsating.	* $y''' + 3y'' + 3y' + y = 0$	$y''' - y' = 0$	$y'' - y = 0$	$y''' + 3y'' = 0$
Xususiy yechimni aniqmas koeffitsientlar usuli bilan toping	* $y = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$	$y = x\left(ax^2 + bx + c\right)e^{2x}$	$y = x\left(ax + b\right)e^{2x}$	$y = ax^2e^{2x}$

$y'' - 5y' + 4y = 4x^2 e^{2x}$				
$x = e^t,\ y = -e^t$ funksiya quyidagi tenglamalar sistemalaridan qaysi birining yechimi bo'ladi?	* $\dot{x} = 2x + y$ $\dot{y} = 3x + 4y$	$\dot{x} = x + y$ $\dot{y} = 3y - 2x$	$\dot{x} = x - y$ $\dot{y} = y - 4x$	$\dot{x} = x - 3y$ $\dot{y} = 3x + y$

MA'RUZA№ 37
Mavzu: Differensial tenglamalarni yechishni taqribiy usullari.

Reja

1. Eyler usullari.
2. Korreksiya usuli
3. Prognoz usuli.
4. Aniqlashtiradigan usul.

Tayanch so'z va iboralar: *differensial tenglamalarni yechishni taqribiy usullari, Eyler usullari, korreksiya usuli, prognoz usuli, aniqlashtiradigan usul.*

Bundan avvalgi paragraflarda chekli ko'rinishda integrallanadigan differensial tenglamalarning ayrim turlari qaralgan edi. Ular unchalik ko'p emas, bunga oliy texnika yurti kursining chegaralanganligi sabab emas. Gap shundaki, burday turdagi tenglama lar, umuman, kam. Biroq amaliy masalalalar ko'pincha turli-tuman differensial tenglamalarga olib keladiki, ularni yechish uchun taqribiy usullarga murojaat qilishga tugri keladi.

Differensial tenglamalarni taqribiy yechishning turli usullariga ko'pdan-ko'p kitoblar bag'ishlangan. Odatda ular xisoblash matematikasi usullariga maxsus bag'ishlangan bo'limda o'rganiladi. Shunday bo'lsada, o'quvchini differensial tenglamani tekshirishning ana shu tomonlari bilan tanishtirish mavsadida bu usullarning eng soddalari ustida qisqacha to'xtab o'tamiz.

Bu material bilan tanishishni ketma-ket yaqinlashish usulidan boshlaymiz. Bu usul boshlang'ich sharti $y|_{x=x_0} = y_0$ bo'lgan $y_1$qf(x,y) differensial tenglamaning yechimiga yaqinlashadigan funksiyalarning $\{y_n\}$ ketma-ketlikning istalgan funksiyasini masalamizning taqribiy yechimi deb deb qabul qilish mumkin. Bunday ketma-ketlikni tuzish bilan misol orqali tanishish maqsadga muvofiq.

Differensial tenglamaning yechimini grafik usul yordamida xam ishlash mumkin, buning uchun tenglama uchun aniqlaydigan yo'nalishlar maydonidan foydalaniladi.

Agar uzoq liniyalardan, ya'ni maydonning bir xil yo'nalishi nuqtalaridan tuzilgan chiziqlardan foydalanilsa, maydonni tuzish ancha yengillashadi. Birorta izoklinani kesib o'tuvchi barcha integral egri chiziqlar kesishish nuqtalarida O_X o'qqa bir xil burchak ostida og'gan.

Izoklinaning ta'rifidan uning tenglamasidan tuzish usuli kelib chiqadi: y^1qf(x,y) tenglamaning chap tomonini biror R kattalikka tenglash kerak, u xolda f(x,y)qR tenglama (R - parametr) izoklinalar oilasining tenglamasi bo'ladi. R parametrga turli $R_1, R_2, \ldots R_n$, qiymatlar berib, berilgan differensial tenglama ning turli izoklinalarni tashkil qilamiz

Masalan, izoklinalar yordamida $\dot{y} = \frac{x}{2}$ differensial tenglamaning izoklinalar oilasining tenglamasi: x/2qR yoki xq2R, OU bo'lgan o'qqa parallel tugri chiziqlar izoklinalar bo'ladi(1-rasm)

Rq0 deb xq0 izoklinani (OU o'qni) xosil qilamiz, uning barcha nuqtalarida maydon yo'nalishi OX o'qqa paralel. Rq1 da xq2 izoklina ni olamiz, uning barcha nuqta larida maydon OX o'q bilan 45^0 burchak tashkil qiladi;

Rq1 deb, xq-2 izoklinaning barcha nuqtalarida maydon yo'nalishi OX o'q bilan – 45^0 burchak tashkil etishini ko'ramiz va xakozo.

Agar birorta nuqta, masalan $M_0(-2, 3)$ nuqtani olsak, u xolda bu o'q orqali o'tuvchi integral egri chiziqli taqriban yasash mumkin, bunin uchun egri chiziqqa xar bir nuqta da o'tkzilgan urinma mmaydonning bu nuqta dagi yo'nalishi bilan bir xilda bo'lishidan foydalanish kerak. Chizmadan ko'rinib turibdiki, integral egri chiziq parabolani eslatadi. Bu tabiiydir: y^1qx/2 tenglamaning umumiy yechimi yq$(x^2/4)$Qc parabolalar oilasidan iborat, $y/_{xq\text{-}2}$q3 boshlang'ich shart esa bu parabolalardan birini aniqlaydi. Ikkinchi misol sifatida y^1qx^2Qy^2 differensial

tenglamaning yo‘nalishlar maydonini yasaymiz. Bu tenglamaning izoklinalari markazi koordinatalar boshida bo‘lgan konsentrik aylanalardan iborat bo‘ladi: x^2Qy^2qR (2-rasm)
Rq0 da nuqta ni koordinatalar boshi O (0,0) ni xosil qilamiz, bu nuqtada maydonning yunalishi OX o‘qqa paralel, Kq1 da x^2Qy^2q1 aylanaga egamiz, uning xar bir nuqta sida maydon yo‘nalishi OX o‘q bilan 45^0 burchak tashkil etadi va xakozo.
Agar tayin nuqta ni, masalan, koordinatalar boshi O(0,0) ni olinsa, undan o‘tuvchi integral egri chiziqni yasash mumkin. 2-rasmda bu egri chiziqdan tashqari yana 2 ta egri chiziq bilan tasvirlangan.
$y^1qf(x,y)$ differensial tenglamaning berilgan $M_0(x_0,y_0)$ nuqtadan o‘tadigan integral egri chizig‘ini yo‘nalishlar maydonini avvaldan yasab o‘tirmasdan, siniq chiziq ko‘rinishda taqribiy yasash mumkin. Buning uchun quyidagi usuldan foydalanish mumkin.
x_0u tekislikda Ou o‘qqa paralel va OX o‘q bilan obsissalari $x_0,x_1,x_2,\ldots$ bo‘lgan $A_0,A_1,A_2,\ldots$nuqta larda kesishadigan tugri chiziqlar o‘tkazamiz. (3-rasm.)
xqx_0 tugri chiziqda $M_0(x_0, u_0)$ nuqta olib, integral egri chiziqning o‘rnini bosadigan siniq chiziqni bu nuqtadan boshlab chiza boshlaymiz. Tenglamaning o‘ng tomoniga M_0 nuqtaning koordinatalarini qo‘yamiz va bu nuqtada integral egri chiziqqa o‘tkazilgan urinmaning burchak koeffitsientini xisoblaymiz: $tgx_0qy^1{}_0qf(x_0,y_0)$ Agar vertikal tugri chiziqlar bir-birlariga yetarlicha yaqinterval olingan bo‘lsa, u xolda egri chiziqning xqx_0 va xqx_1 to‘g‘ri chiziq orasiga joylashgan qismini unga M_0 nuqtada o‘tkazilgan urinma kesmasi bilan almashtirish mumkin. Uni yasash uchun M_0 nuqtadan $y^1{}_0qtg\alpha_0$ burchak koeffitsienti yuqorida xisoblangan nur o‘tkazamiz.
Bu yasashni birmuncha soddalashtirish mumkin. Bunin uchun OX o‘qning koordinatalar boshidan chap tomonida ROq1 masofa R qutb olish va Ou o‘qda $ON_0qf(x_0,y_0)$ kesma ajratish kerak. Agar N_0 nuqta ni qutb bilan to‘g‘ri chiziq yordamida tutashtirsak, $ON_0/POqf(x_0,y_0)q$ $tg\alpha_0$. Endi Mo(.) dan PN_o ga paralel to‘g‘ri chiziq o‘tkazsak, urinmaning M_0M_1 kesmasini xosil qilamiz, bu bilan egri chiziqni (x_0,x_1) oraliqda M_0, M_1 kesmaga almashtiramiz.
Bundan keyingi yasash xuddi shunday davom ettiriladi.
$M_1(x_1,y_1)$ nuqtani integral egri chiziqning nuqtasi uchun qabul qilamiz. U_1 ordinatani rasmdan topamiz, uning qiymatini x ning qiymati bilan birgalikda tenglamaga qo‘yamiz va $tg\alpha_1qy^1{}_1qf(x_1,y_1)$ ni xisoblaymiz. So‘ngra Ou o‘qda $ON_1qf(x_1,y_1)$ kesma ajratamiz, N_1 nuqtani R qutb bilan to‘g‘ri chiziq kesmasi yordamida tutashtiramiz va M_1 nuqta dan xqx_2 to‘g‘ri chiziq bilan $M_2(x_2,u_2)$ nuqta da kesishguncha $M_1M_2//RN_1$ to‘g‘ri chiziq kesmasi o‘tkazamiz. Shundan so‘ng xuddi shu yasashni M_2 nuqta uchun bajaramiz va xakozo.
Bu yasashlarni xam o‘suvchi, xam kamayuvchi absissalar yo‘nalishida bajarish mumkin. M_0M_1, $M_2M_3\ldots$ siniq chiziq $M_0(x_0, u_0)$ nuqta dan o‘tuvchi izlanayotgan integral egri chiziqni taqribiy tasvirlaydi. U Eyler siniq chizig‘i deyiladi.
OR kesmani va ON_0, ON_1,ON_2, kesmalarni yasashda koordinata o‘qlarida qabul qilingan masshtablardan boshqacha masshtabdan xam foydalanish mumkin, chunki RN_0, RN_1,RN_2, kesmalarnin yo‘nalishlari bu kesmalar uchun olingan masshtabning tanlanishiga bogliq emas. Birinchi tartibli differensial tenglamaning taqribiy yechimini grafik topishning ko‘rib chiqilgan usuli Eylerning siniq chiziqlar usuli deyiladi.
Bu usul amalda ko‘p o‘llaniladi, biroq tavsiflangan grafik shaklda emas, balki sonli shaklda ishlatilib, uni tatbiq qilish natijasida taqribiy yechimning qiymatlari jadvalini xosil qilamiz. Xaqiqatdan xam, birinchi nuqta ni yasashning yozidayoq uning ordinatasini ushbuga teng deb olamiz: $y_1qy_0Qy^1{}_0(x_1\text{-}x_0)qy_0Q(x_1\text{-}x_o)f(x_0,y_0)$
Agar $x_0,x_1,x_2,\ldots.$nuqtalar bir-biridan bir xil masofada bo‘ladigan qilib tanlangan deb faraz qilsak va ular orasidagi bu masofani $nqx_{R\text{-}1}\text{-}x_R$ deb belgilasak, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$y_1qy_0Qy^1{}_0hqy_0Qhf(x_0,y_0),$$
$$y_2qy_0Qy^1{}_0hqy_1Qhf(x_1,y_1),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_{RQ1}qy_RQy^1{}_Rhqy_RQhf(x_R,y_R)$$

Konkret amaliy masalalarni xal etishda sonli metodlar boshqa taqribiy metodlarga nisbatan ancha qulay, chunki u yechimni kelgusida xam foydalanish uchun yaroqli bo‘lgan shaklda topishga imkon beradi. Biroq Eyler usuli mazkur xol uchun xar xolda qo‘pol yaqinlishishni xam beradi.(xatto hq0,1 qadamda nisbiy xato bitta?)

Aniqlikni oshirishning imkoniyatlaridan biri egri chiziqni uning oraliq oxirida emas, balki uning o‘rtasida o‘tkazilgan urinmasidan almashtirishdan iborat. Buning uchun (X_R, X_{RQ1}) oraliq o‘rniga o‘rtasida Xr nuqta bo‘lgan (X_{R-1}, X_{RQ1}) oraliqni qaraymiz. Agar bu oraliqda integral egri chiziqni absissasi Xr bo‘lgan nuqtada o‘tkazilgan urinma bilan almashtirsak, uning burchak koeffitsienti $y'_R q f(x_R, y_R)$ ga teng bo‘ladi va oraliq uzunligi 2h ga teng bo‘lganligidan:

$$\Delta y_R q 2hy'_R q 2hf(x_R, y_R), \quad (2)$$

$$y_{RQ1} q y_{R-1} Q \Delta y q y_{R-1} Q 2hy^1{}_R q y_{R-1} Q 2hf(x_R, y_R) \quad (3)$$

Ancha aniqroq natija beradigan bu formulalar Eylerning aniqlashtrilgan usuli deyiladi. Uni qo‘llanishdagi kichik bir qiyimnchilik shundan iboratki, keltirilgan formulalarni faqat Rq1 dan boshlab tatbiq qilish mumkin, bu $y_2 q y_0 Q 2hy^1{}_R q y_0 Q 2hf(x_1, y_1)$ ni topishga imkon beradi. Bu yerda u_0 emas, balki u_1 xam ma'lum deb faraz qilinadi. u_1 ni topish uchun Eylerning odatdagi usulidan foydalanish mumkin. Yana xam yaxshirog‘i, Eyler usuli bo‘yicha dastlab $y_{½}$ ning qiymatini $x_{½} q x_0 Q h/2$ «yarim nuqtada» xisoblab olishdir.

Eylerning aniqlashtirilgan usuli ko‘rilgan usullar kabi mexnat talab qilsada, odatda, ko‘proq aniq natijalar beradi. Biroq u muxim bir kamchilikka – barqaror emas kamchiligiga ega: qadamlar soni katta bo‘lganda bu usul o‘rdamida topilagn taqribiy yechim qiymatlari aniq yechim atrfida o‘sib borish tartibida tebran boshlaydi. Bunday tebranishlarni sezganda bu usuldan voz kechish va boshqa aniqroq usullarga murojaat qilish kerak.

Differensial tenglamalarni taqribiy yechishning turli g‘oyalarga, ko‘pincha Eyler usuliga tayanadigan bunday sonli usullari burchak u orttirmani iloji boricha aniq xisoblashga keltiriladi. Natijada formulalarning murakkablashib, xisoblashlarning esa cho‘zilib ketishi tabiiydir. Xozirgi paytda prognoz va korreksiya usullari deb ataluvchi usullar keng qo‘llanilyapti. Biz bu sinfning eng sodda namoyondasiga to‘xtab o‘tamiz; nomning kelib chiqishi bayon qilish borasida ko‘rinadi.

Yana ixtiyoriy (X_R, X_{RQ1}) oraliqni olamiz va barcha X_R qiymat lar bir-biridan baravar uzoqlashgan deb faraz qilamiz. Quyidagini yoza olamiz:

$$\Delta y_R = y_{R+1} - y_R = \int_{X_R}^{X_{R+1}} y^1(x)dx \quad (4)$$

Bu integralni xisoblash uchun aniq integrallarni taqribiy xisoblash formulalaridan birini, masalan, trapetsiyalar formulasini qo‘llash mumkin. U xolda (4) formulani $\Delta Y_R q h/2(y^1{}_R Q Y^1{}_{RQ1})$ ko‘rinishda yozish mumkin.

(5) formulani izlanayotgan yechimning ΔY_R orttirmasini xisoblashda tatbiq etishda u^1 xosilasining qiymati faqat X_R nuqta da emas, balki X_{RQ1} nuqta da xam ma'lum deb faraz qilinadi. Uni $Y^1{}_{RQ1} q (x_{RQ1}, y_{RQ1})$ differensial tenglamadan xosil qilish mumkin: biroq buning uchun bizga o‘sha izlanayotgan y_{RQ1} kerak bo‘ladi. Murakkab axvolga tushib qoldik. Undan quyidagicha qutulish mumkin:

Dastlab biron-bir sodda usul yordamida y_{RQ1} ning qiymatni xisoblaymiz. Bu qiymatni differensial tenglamaga qo‘yib, u yerdan $y^1{}_{RQ1}$ xosilaning qiymatini xosil qilish mumkin. Natijada (5) formuladan va izlanayotgan funksiyaning tuzatilgan, yangi orttirmasini xisoblash imkoniyatiga ega bo‘lamiz. (korreksiya). Agar prognoz Eylerning aniqlashtirilgan usuli bo‘yicha qilinayotgan bo‘lsa, bayon etilayotgan prognoz va korreksiya usuli uchun qilinadigan amallar ktma-ketligi quyidagicha bo‘ladi:

$$Y_{RQ1} q\ Y_{R-1} Q 2hy^1{}_R \text{ (prognoz)}$$

$$Y^1{}_{RQ1} q\ f(X_R, Y_R)$$

$$Y_{RQ1} q\ Y_R Q h(y^1{}_R Q\ y_{RQ1})/2 \text{ (korreksiya)}$$

Prognoz va korreksiyaning boshqa usullari xuddi shunday g‘oyaga asoslangan bo‘lib, bayon etilgan usuldan shunisi bilan farq qiladiki, yechimning navbatdagi qiymat tini prognz qilishda xam, korreksiya qilishda xam boshqa, murakkabroq bo‘lsada, aniqroq formulalar qo‘llaniladi.

Masalan, (4) formula da integralni xisolashda korreksiya uchun trapetsiyalar formula sidan emas, balki aniqroq bo‘lgan parabolalar formulasidan foydalanish mumkin.
Funksiyaning navbatdagi nuqtada prognoz qilingan va korreksiyalangan qiymat lari orasidagi ayirma xosil bo‘lgan taqribiy yechimning xatolari tugrisida fikr yuritishga imkon beradi, bu esa aniq yechim noma'lum bo‘lib, baxolashning boshqa usullari mumkin bo‘lmagan yoki juda xam mashaqqatli bo‘lgan amaliy masalarda juda muximdir.
Endi differensial tenglamani sonli yechish zaruratiini keltirib chiqaradigan fizikaviy maslani ko‘rib chiqamiz.
Misol. Elektr zanjiriga temir o‘zakli g‘altak ulangan. (1-rasm) O‘zakning magnitlanish egri chizig‘i iq1/N(A_φQBφ^3) formula orqali berilgan, bu yerda i-amper xisobidagi tok, N -g‘altakdagi o‘lchamlar soni, φ-magnit oqimi.
Magnit oqimini toping. Magnitlanish egri chizig‘ining A vav V koeffitsientlari o‘zakning fizikaviy xossalari va o‘ramlarining konstruktiv xususiyatlari bilan belgilanadi.
yechilishi: Kirxgof qonuni bu zanjir uchun $E = Ri + L\frac{di}{dt}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. Bu yerga i ning yuqoridagi o‘zakning magnitlanish egri chizig‘i qonunidagi qiymatini keltirib qo‘ysak, ushbu differensial tenglamaga kelamiz:

$$E = \frac{R}{N}(A\varphi + B\varphi^3) + N\frac{d\varphi}{dt}$$

bu yerda vaqt sekund xisobida o‘lchanadi.
Oddiy elektrotexnikaviy po‘lat uchun Aq0.6$\cdot 10^5$ Bq0.33$\cdot 10^{13}$deb olish mumkin. Xususiy xolda yeq18V, Rq300 Om va Nq100 deb olib va magnit oqimini 10^{-5}Bb(φq10^{-5})da, vaqtni esa millisekundlarda (yeq10^{-3}) τ o‘lchab, tenglamani $\frac{D\Phi}{d\tau} + 1.8\Phi + 0{,}01\Phi^3 = 18$ ko‘rinishga keltiramiz. Agar S kalit τq0 momentda ulansa, differensial tenglamamiz uchun boshlang‘ich shart F(0)q0 bo‘ladi.
Biz xosil qilgan tenglama chekli ko‘rinishda yechimga ega emas. Sonli metodlarni qallash qulay bo‘lgani uchun bunday tenglamalar odatda o‘lchamsiz shaklga keltiriladi. Mazkur xolda bu quyidagicha amalga oshirilishi mumkin. Fizikaviy muloxazalardan τ cheksiz ortganda F oqim to‘yinishga intilishi kelib chiqadi. Oqimning to‘yinishga mos maksimal qiymati F_m endi o‘zgarishsiz qoladi, ya'ni uning uchun $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ bo‘ladi. Shuning uchun F_m qiymatni differensial tenglamadan, u yerda $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ deb, xosil qilish mumkin. Natijada ushbu sodda kub tenglamaga kelamiz: 0,01F^3_mQ1.8F_m –18q0
Bu tenglama yagona xaqiqiy ildizga ega: Fmq7,58023
Biz endi differensial tenglamani F(τ)qF_my(τ) deb olib, o‘lchamsiz shaklga keltirishimiz mumkin. U xolda u vaqt τ ning o‘lchamsiz funksiyasi bo‘ladi. Tenglama $F_m y^1$q18-1.8 F_my-0.01 $F^3 y^3$ yoki y^1q2.37460-1.8y-0.57460y^3 ko‘rinishga keltiriladi.
Boshlang‘ich shartdan esa u(0)q0 ekanligi kelib chiqadi.
Xosil qilingan tenglama ga (O, 0,5) oraliq uchun hq0.05 qadam bilan Eylerning aniqlashtirilgan usulini qo‘llash mumkin. Xisoblashlar jadvalda keltirilgan. φ ning veberlar xisobidagi yakuniy qiymatlari (6) usulda keltirilgan.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)
X	y	Δy	0.57460y^3	Y^1	**Φ**
0	0	0.0594	0	2.3746	0
0.025	0.594	0.1134	0.1204*10^{-3}	2,2676	
0,05	0,1134	0,2169	0,8379*10^{-3}	2,1697	0.8595*10^{-5}
0,10	0,2170	0,1978	0,5871*10^{-3}	1,9781	0,1645*10^{-5}
0,15	0,3112	0,1797	0,1731*10^{-1}	1,7971	0,2359*10^{-4}
0,20	0,3967	0,1625	0,3587*10^{-1}	1,6246	0,3007*10^{-4}
0,25	0,4737	0,1461	0,6108*10^{-1}	1,4608	0,3591*10^{-4}

0,30	0,5428	0,1306	$0{,}9189*10^{-1}$	1,3057	$0{,}4114*10^{-4}$
0,35	0,6043	0,1160	0,1268	1,1601	$0{,}4580*10^{-4}$
0,40	0,6588	0,1024	0,1643	0,0245	$0{,}4994*10^{-4}$
0,45	0,7067	0,0900	0,2028	0,8997	$0{,}5357*10^{-4}$
0,50	0,7488				$0{,}5676*10^{-4}$

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Avtonom sistemalar. Avtonom yechimining xossalari.
2. Chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli o‘zgarmas koeffitsientli avtonom sistemaning xolatlar teksligi.

Glossariy

Chiziqli dıfferensianal tenglamalar – Agar birinchi tartibli differensianal tenglamani $\frac{dy}{dx} = P(x)y + Q(x)$ ko‘rinishda yozish mumkin bo‘lsa.

Chiziqli bir jinsli dıfferensianal tenglamalar – yuqoridagi (1) da $Q(x) \equiv 0$ bo‘lsa.

Yuqori tartibli differensianal tenglama - n tartibli differensianal tenglama umumiy ko‘rinishi $F(x, y, y', y'',....., y^{(n)} = 0$ kabi yoziladi.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni
- keltiring (individual va kichik guruhlarda);

to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Differensial tenglamalarni taqribiy yechishda Eyler metodi qanday usul?
2. Shterler usulini aytib bering.
3. Differensial tenglamalarni taqribiy yechishda ketma-ket yaqinlashish usuli?

Amaliy mashg’ulot-30
Chegaraviy masalalar.

1. Chegaraviy masala

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y = f(x), \ \ x_0 \le x \le x_1 \qquad (1).$$

$\alpha y'(x_0)+\beta y(x_0)=0,\ \gamma y'(x_1)+\tau y(x_1)=0$ (2) ni yechish uchun, avvalo (1) masala umumiy yechimi topiladi, so‘ng u (2) chegaraviy shartlarga qo‘yilib o‘zgarmas koeffitsientlar aniqlanadi. Koshi masalasidan farqli o‘laroq chegaraviy masala har doim ham yechimga ega emas.

2. (1), (2)-masala uchun $G(x,s)$ Grin funksiyasi quyidagicha aniqlanadi:

$G(x,s),\ x_0=x\le x_1,\ x_0\le s\le x_1$ da aniqlangan va har bir s uchun quyidagi xossalarga ega.

1) $x\ne s$ uchun u

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2y=0 \quad (3)$$

tenglamani qanoatlantiradi;

2) $x=x_0,\ x=x_1$ da chegara shartlarni fanoatlantiradi;

3) $x=s$ da x bo‘yicha uzluksiz, uning x bo‘yicha hosilasi $\frac{1}{a_0(s)}$ ulushga ega:

$$G(s+0,s)=G(s-0,s)$$

$$G_x'/_{x=s+0}-G_x'/_{x=s-0}=\frac{1}{\alpha(s)'} \quad (4)$$

Grin funksiyasini topish uchun (3) ning 0 ga teng bo‘lmagan $y_1(x),\ y_2(x)$ xususiy yechimlarni topish kerak. Ular mos ravishda (2) dagi birinchi, ikkinchi chegaraviy shartlarni qanoatlantirishi kerak. Agar $y_1(x)$ (2) ikala shartni qanoatlantirmasa Grin funksiyasi mavjud va uni

$$G(x,s)=\begin{cases} a\ y_1(x), & x_0\le x\le s\\ b\ y_2(x), & s\le x\le x_2\end{cases} \quad (5)$$

ko‘rinishda izlash mumkin. a,v funksiyalar S ga bog‘liq va (4) ni qanoatlantirishi kerak:

$$by_2(s)=ay_1(s),\qquad by'_2(s)-ay'_1(s)=\frac{1}{\alpha_0(s)}.$$

3. Agar Grin funksiyasi mavjud bo‘lsa (1), (2) chegara masala yechimi

$$y(x)=\int_{x_0}^{x_1}G(x,s)f(s)ds$$

ko‘rinishda topiladi.

4. Masala $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=\lambda y$ (6)

$$\alpha y'(x_0)+\beta y(x_0)=0,\ \ \gamma y'(x_1)+\tau y(x_1)=0 \quad (7)$$

Differensial tenglamada xos sonlar masalasi deyiladi, bu yerda λ xos son uchun yechim $y(x)\ne 0$ bo‘lishi kerak. (6), (7) ning bunday yechimi xos funksiya deyiladi. Ya'ni (6), (7) da

$\lambda-$ son uchun $y(x)\ne 0$ yechim qidiriladi. $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2}{z}\\ \dfrac{dz}{dx}=\dfrac{1}{2}y\end{cases}$ j:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2c_1}{(c_2-x)^2}\\ z=\dfrac{c_1}{c_2-x}\end{cases}$$

1. $\begin{cases} \dot{x} = x - y - z \\ \dot{y} = x + y \\ \dot{z} = 3x + z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1; \quad \lambda_{2,3} = 1 \pm 2i)$

j: $\begin{cases} x = e^t(rc_2 \sin 2t + 2c_3 \cos 2t) \\ y = e^t(c_1 - c_2 \cos 2t + c_3 \sin 2t) \\ z = e^t(-c_1 - 3c_2 \cos 2t + 3c_3 \sin 2t) \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y - z \\ \dot{y} = 3x - 2y - 3z \\ \dot{z} = 3z - x + y \end{cases}$ $(\lambda_1 = 0, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 1)$

j: $\begin{cases} x = c_1 + c_2 e^t \\ y = 3c_1 + c_3 e^t \\ z = -c_1 + (c_2 - c_3)e^t \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 4y - 2z - 3x \\ \dot{y} = z + x \\ \dot{z} = 6x - 6y + 5z \end{cases}$ $(\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \lambda_3 = -1)$

j: $\begin{cases} x = c_1 e^t + c_3 e^{-t} \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{2t} \\ z = 2c_2 e^{2t} - c_3 e^{-t} \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - 3y \\ \dot{y} = x - 2y + 2\sin t \end{cases}$

j: $\begin{cases} x = 3c_1 e^t + c_2 e^{-t} + 3\sin t \\ y = c_1 e^t + c_2 e^{-t} - \cos t + 2\sin t \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 2\sin t \\ y = 2x - y \end{cases}$

j: $\begin{cases} x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t \sin t - t \cos t \\ y = c_1(\sin t + \cos t) + c_2(\sin t - \cos t) - 2t \cos t + \sin t + \cos t \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = x + 2e^t \end{cases}$

j: $\begin{cases} x = (c_1 + c_2 t - t^2)e^t \\ y = \left[c_1 + c_2 + (c_2 + 2)t - t^2\right]e^t \end{cases}$

7. $\begin{cases} \dot{x} = 4x - 3y + \sin t \\ \dot{y} = 2x - y - 2\cos t \end{cases}$

j: $\begin{cases} x = c_1 e^t + 3c_2 e^{2t} + \cos t - 2\sin t \\ y = c_1 e^t + 2c_2 e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t \end{cases}$

TEST

$y'' - 2y' - 3y = x^2 e^x$ tenglamaning bitta xususiy uchimi qanday ko‘rinishda izlanadi.	* $y = x(Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = (Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = x^2(Ax + B)e^x$	$y = Ax^2 e^x$
$y'' - 4y' + 8y = Sin2x$ tenglamaning bitta xususiy yechimi qaysi ko‘rinishda bo‘ladi?	* $y = ASin2x + BCos2x$	$y = (Ax + B)Sin2x + (cx + B)Cosx$	$y = Ax^2 Sin2x + BxCosx$	$y = x(ASin2x + BCos2x$
a va b ning qanday qiymatlarida $y'' + ay' + by = 0$ tenglamaning yechimlari $-\infty \prec x \prec \infty$ da chegaralangan bo‘ladi?	*$a = 0$ $b > 0$	$a = 0$ $b < 0$	$a > 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b < 0$
a va b ning qanday qiymatlarida $y'' + ay' + by = 0$ tenglamaning hamma yechimlari $x \to +\infty$ da nolga intiladi?	*$a > 0$ $b > 0$	$a = 0$ $b < 0$	$a = 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b < 0$
$x^3 y''' + xy' - y = 0$ Eyler tenglamasini yeching.	* $y = x(c_1 + c_2 \ln\lvert x\rvert + c_3 \ln^2\lvert x\rvert)$	$y = c_1 + c_2 \ln\lvert x\rvert + c_3 \ln^2\lvert x\rvert$	$y = x^2(c_1 + c_2 \ln\lvert x\rvert + c_3 \ln^2\lvert x\rvert)$	$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$

$y''' - y' = 3(2 - x^2)$ tenglamani bitta xususiy yechimi qanday ko‘rinishda izlanadi?	* $y = (Ax^2 + Bx + c)x$	$y = (Ax^2 + Bx + c)x^2$	$y = (Ax^2 + Bx + c)e^x$	$y = (Ax + B)e^x$
Quyidagi tenglamalardan qaysi biri Eyler tenglamasi hisoblanadi?	* $x^2 y'' - 9xy' + 21y = 0$	$xy'' + y' + y = 0$	$x^2 y'' + xy' + \frac{1}{x} y = 0$	$xy'' - 9y' + 21xy = 0$
y_1 va $y_2 = c_1 y_1 \int e^{-\int p(x)dx} \frac{dx}{y_1^2}$ funksiyalar qaysi tenglamaning ikkita chiziqli erkli yechimlari bo‘ladi?	* $y'' + y' \cdot p(x) + yQ(x) = 0$	$y'' - y' \cdot p(x) + y^2 Q(x) = 0$	$y'' - y' p(x) + yQ(x) = 0$	$y'' + y' p^2(x) + yQ(x)$
$y'' + 9y = 0$ tenglamaning $M(\pi, -1)$ nuqtadagi o‘tuvchi va shu nuqtada $y + 1 = x - \pi$ to‘g‘ri chiziqka urinuvchi integral egri chziqni toping.	* $y = Cos3x - \frac{1}{3} Sin3x$	$y = Cos3x + \frac{1}{3} Sin3x$	$y = Cos3x + Sin3x$	$y = Cos3x - Sin3x$
$y'' + 16y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini toping	* $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$	$y = ce^{-16x}$	$y = c_1 e^{4x} + c_2 e^{-4x}$	$y = c_1 e^{-4x} \cos 4x + c_2 e^{-4x}$ sin

MA'RUZA № 38
Mavzu: Xususiy xosilali differensial tenglamalar va uni yechish usullari

Reja:

1. Yechimning mavjudligi va yagonaligi.
2. Birinchi tartibli xususiy xosilali, chiziqli bir jinsli tenglamalar.
3. Chiziqli bir jinsli tenglama uchun Koshi masalasining yechilishi.

Tayanch so'z va iboralar: *birinchi yaqinlashish sistemasi, Lyapunov- Punkare teoremasi (5-teorema), butunlay noturgun bo'lishi, Lyapunov ma'nosida noturgun bo'lishi xaqidagi teorema (7-teorema).*

TA'RIF: agar tenglamada noma'lum funksiya ikki yoki undan ortiq o'zgaruvchiga bog'liq bo'lsa,, u xolda bu tenglama xususiy xosilali differensial tenglama deyiladi. zqz(x,.y) xususiy xosilali differensial tenglama.

$$F\left(U,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$$ tenglama 1-tartibli xususiy xosilali tenglamalardan.

$$\phi\left(U,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)=0$$ tenglama xam 2-tartibli xususiy xosilali differensial tenglamalardan biridir.

Xususiy xosilali differensial tenglamalardan erkli o'zgaruvchilarning soni bittadan ortiq bo'lgani uchun bunday tenglamalar cheksiz ko'p yechimga ega ekanligini kutish mumkin. Endi xususiy xosilali differensial tenglama yechimlarining mavjudligi va yagonaligi xaqidagi S.V. Kobalyovskaya teoremasini keltiramiz.

Kovalyovskaya teoremasi: Agar x_1qx^0 da

$$U=\varphi_0(x_2,\ldots x_n)\frac{\partial U}{\partial x}=\varphi_1(x_2..x_n)\ldots\frac{\partial^{m-1}U}{\partial x_1^{\,m-1}}=\varphi_{m-1}(x_2..x_n)\ldots\frac{\partial^{m-1}U}{\partial x_1^{\,m-1}}=\varphi_{m-1}(x_2..x_n) \tag{1}$$

boshlang'ich shartda berilgan $\varphi_0,\varphi_1,\ldots\varphi_{m-1}$ funksiyalar boshlang'ich $(x_2,\ldots x_n^0)$ nuqtaning atrofida analitik funksiya, f funksiya esa o'zgaruvchi argumentlarining ushbu boshlang'ich qiymatlari xq_1^0,x_2^0,x_n^0

$U_0q\varphi_0(x_2^0,\ldots x_n^0)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial x_n}\right)=\varphi_1(x_2,..x_n^0),\ldots,$

$$\left(\frac{\partial^m U}{\partial x_n^{\,m}}\right)_0=\left(\frac{\partial^m U}{\partial x_n^{\,m}}\right)\Bigg|\frac{x_1=x^{0}1}{x_nX_n^0}$$

atrofida

$$\left(\frac{\partial^m U}{\partial x_1^{\,m}}\right)=f(x_1,x_2,\ldots.x_n,U,\frac{\partial U}{\partial x_1},\ldots\frac{\partial^{m-1}U}{\partial X^{m-1}}$$

analitik bo'lsa, u xolda

$$\frac{\partial^1 U}{\partial x^2},\frac{\partial^1 U}{\partial x_1\partial x_2},\ldots,\frac{\partial^m U}{\partial x^m{}_n}) \quad ,$$

tenglamaning (x_1^0,x_2^0,x_n^0) nuqta atrofida analitik bo'lgan birdan-bir yagona yechim mavjud.

Shunday qilib, Kovalyovskaya teoremasiga asosan 1), 2) masalaning yechimi boshlang'ich $\varphi_0,\varphi_1,\ldots\varphi_{n-1}$ funksiya lar yordamida aniqlanadi.

Koshi masalasining geometrik talqini.

Erkli o'zgaruvchilarning soni 2 ta bo'lgan xolda 1-tartibli xususiy xosilali differensial tenglamani integrallash masalasi xamda Koshi masalasi juda sodda geometrik talqinga ega.

1-tartibli f(x,y,z,p,q,)q0 tenglamani yoki xususiy xosilalardan bittasiga nisbatan yechilgan ushbu Pqf(x,y,.z,q) tenglamani tekshiramiz. f(x,y,z,p,q,)q0 ga yoki Pqf(x,y,.z,q) tenglamaning yechimini topish zqf(x,y) funksiya topish demakdir.

Pqf(x,y,z,q,) tenglama uchun Koshi masalasi bunday qo‘yiladi:
Pqf(x,y,z,q,) tenglamaning shunday yechimi topilganki, u yechim x o‘zgaruvchi ning berilgan boshlang‘ich qiymatida u o‘zgaruvchi ning berilgan funksiya siga teng bo‘lsin, ya'ni xqx_0 da zqφ(y) tenglama fazoda egri chiziqni ifodalaydi. Demak, Koshi masalasi berilgan xqx_0 , zqφ(y) egri chiziqdan o‘tuvchi integral sirtni topishdan iborat.

xqx_0 , zqφ(y)

Egri chiziq maxsus ko‘rinishga egadir: y YOZ tekislikka parallel bo‘lgan xqx_0 tekislikda yotuvchi yassi egri chiziqdan iborat..
Xususiy xosilali bitta noma'lum funksiyali 1-tartibli tenglamalar ←2 ta←sodda ←xossaga←ega.
1^0. Ular bitta funksiyaga bog‘liq bo‘lgan umumiy yechimga egadir.
2^0. Xususiy xosilali 1-tartibli tenglamani integrallash masalasi oddiy differensial tenglamalar sistemani integrallashga keladi.
Ushbu $M_1(x_1,x_2,..x_n)(dU/dx_1)QX_2(x_1,..x_n)$

$$\frac{\partial u}{\partial x_2}+\ldots+X_n(x_1,x_2,\ldots x_n)\frac{\partial u}{\partial x_n}=0 \qquad (1)$$

tenglamani 1–tartibli xususiy xosilali va bir jinsli tenglama deyiladi. 1) tenglamaning $x_1,\ldots x_n$ koeffitsientlari berilgan($x_1^0,\ldots x_n^0$) nuqta biror atrofida aniqlangan, o‘zlarining 1-tartibli xosilalari bilan uzluksiz xamda bir vaqtda nolga aylanmaydi deb faraz qilamiz. Masalan: $X_n(x_1^0,\ldots x_n^0)\neq 0$ deb xisoblashimiz mumkin.

1-TEOREMA. $$\frac{dx_1}{x_1,(x_1,...x_n)}=\frac{dx_2}{x_2(x_1,...x_n)}=...=\frac{dx_n}{x_n(x_1,...x_n)}$$ sistema $\forall L-\varphi(x_1,....x_n)=c$ integralning chap qismi xusuciy xosilali $x_1\ (x_1,x_2,\ldots x_n)\frac{\partial U}{\partial x_1}+x_2\ (x_1,x_2,\ldots x_n)\frac{\partial U}{\partial x_2}+\ldots+x_n\ (x_1,x_2,\ldots x_n)\frac{\partial U}{\partial x_n}=0$ tenglamaning yechimidan iborat.

2- **TEOREMA**. 1) tenglamani qanoatlantiradigan ∀ φ(x_1,..x_n) funksiyaning o‘zgarmas songa tenglashtirilsa, $\frac{\partial x_1}{x_1(x_1\ldots x_n)}=\frac{\partial x_2}{x_2(x_1\ldots x_n)}=\ldots=\frac{\partial x_n}{x_n(x_1\ldots x_n)}$ sistemaning birinchi integrali xosil bo‘ladi.

3-**TEOREMA**. Ushbu UqF($\varphi_1(x_1,..x_n)$), $\varphi_2(x_1,..x_n),\ldots\varphi_{n-1}(x_1,..x_n)$ funksiyasi (bunda F-∀ funksiya) 1) tenglamaning umumiy yechimidan iborat, 1) tenglamaning barcha yechimlarini o‘zgaruvchi ichiga oladigan yechimdir.

Misol. Ushbu $x_1\frac{\partial U}{\partial x_1}+x_2\frac{\partial U}{\partial x_2}+...+x_n\frac{\partial U}{\partial x_1}=0$ tenglamaning umumiy yechimi topilsin. Bu tenglamaga mos oddiy differensial tenglamalar sistemasi quyidagidan iborat: $\frac{\partial x_1}{x_1}=\frac{\partial x_2}{x_2}=...=\frac{\partial x_n}{x_n}$

Bu sistemaning chiziqli erkli 1-integrali $\frac{x^1}{x_n}=c,\frac{x_2}{x_n}=c_2,\ldots,\frac{x_{n-1}}{x_n}=c_{n-1},(x_n\neq 0)$ berilgan tenglamaning umumiy yechimi $U=\phi(\frac{x}{x_n},\frac{x_2}{x_n},\ldots\frac{x_{n-1}}{x_n}),$ $U-\forall$ nolinchi darajali bir jinsli funksiyadir.

1) tenglama uchun Koshi masalasi quyidagicha qo‘yiladi:
1) tenglama ning shunday Uqf($x_1,\ldots x_n$) yechim topilsinki, u ushbu U_{xn}qx_n^0qφ($x_1,x_2,\ldots x_n$) boshlang‘ich shartni qanoatlantrsin, bunda x^0_n berilgan xaqiqiy son, φ($x_1,x_2,\ldots x_n$) berilgan uzluksiz differensiallanuvchi funksiya, 1) tenglamaning umumiy yechimi UqF($\varphi_1,\varphi_2\ldots,\varphi_{n-1}$) formula bilan aniqlanadi. Koshi masalasini yechish uchun U_{xn}qx_n^0qφ($x_1,x_2,\ldots x_n$) shartga ko‘ra funksiyani shunday aniqlashimiz kerakki, F ($\varphi_1,\varphi_2\ldots,\varphi_{n-1}$)$x_n$ qX_n qφ(x1,…x_{n-1})

2) tenglik bajarilsin. Ushbu

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, x_2, .. x_{n-1}, \overset{0}{x_n}) = \varphi_1 \\ \varphi_2(x_1, x_2, .. x_{n-1}, \overset{0}{x_n}) = \varphi_2 \\ -------------- \\ \varphi_{n-1}(x_1, x_2, .. x_{n-1}, \overset{0}{x_n}) = \varphi_{n-1} \end{array}\right\} \qquad (3)$$

3) belgilarni kiritib (2) tenglikni quyidagicha yozamiz.

$$Fq(\varphi_1,\varphi_2,\ldots\varphi_{n-1})q\varphi(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1}) \qquad (4)$$

4) Biz x_n funksiyani $(x_1,...x_n^0)$ nuqtada noldan farqli deb faraz qilamiz, ya'ni $Xn(x_1,x_2,\ldots,x_n^0)\neq 0$. U xolda (3) sistemani xech bo‘lmaganda $(x_1,...x_n^0)$ nuqtaning biror atroflicha $x_1,...x_{n-1}^0$ larga nisbatan yechish mumkin bo‘ladi.

$$\left.\begin{array}{l} X_1 = W_1(\varphi_1, \varphi_2, .. \varphi_{n-1}) \\ X_2 = W_2(\varphi_1, \varphi_2, .. \varphi_{n-1}) \\ -------------- \\ X_{n-1} = W_{n-1}(\varphi_1, \varphi_2, .. \varphi_{n-1}) \end{array}\right\} \qquad (5)$$

φ_i funksiyalar $\varphi_i q\varphi_i(x_1^0,\ldots x_n^0)$ qiymatlarni qayd qilganda ularga mos w_i funksiyalar x_i^0 $q(iq1,2,\ldots n-1)$ qiymatlarni qabul qiladi. Shu bilan birga φ_i funksiyalar xosilalarga ega bo‘lgani uchun w_i lar xali differensial lanuvchi bo‘ladi.

Endi F sifatida bo‘ladi.

$F_0(\varphi_1,\varphi_2,..\varphi_{n-1})q\varphi[W(\varphi_1,\varphi_2,..\varphi_{n-1}),W_2(\varphi_1,\varphi_2,..\varphi_{n-1}),..,W_{n-1}(\varphi_1,\varphi_2,..\varphi_{n-1})]$ (6) funksiya olsak, bu funksiya 1)tenglamani va $U_{xn}qx_n^0q\varphi(x1,\ldots x_{n-1})$ shartni qanoatlantiradi. Xaqiqatdan (6) ifoda xususiy yechimllarning funksiyasi bo‘lgani uchun, o‘zi xam 1) tenglamaning yechimidan iborat bo‘ladi.

Foydalanish uchun adabiyotlar

1. **Салохитдинов М.С., Насритдинов Г.Н.** *Оддий дифференциал тенгламалар.* Тошкент, “ Ўзбекистон”, 1994.
2. **Понтрягин Л.С.** *Обыкновенние дифферциальные уравнения.* М.:Наука, 1969.
3. **Степанов В.В.** *Курс дифференциальных уравнений.* М.: Гиз.Физ- мат. литература.1958
4. **Эльсгольц Л.Е.** *Дифференциальные уравнения и вариационное исчиление.* М.: Наука.. 1965.
5. **Филиппов А.Ф.** *Сборник задач по дифференциальным уравнениям.* М.: Наука, 1979 (5-е издание).

Mustaqil ta’lim mavzulari

1. Avtonom sistemaning muvozanat xolati. Xolatlar fazosi va traektoriyasi.
2. Turg‘unlik nazariyasi. Lyapunov ma'nosida turgunlik. yechimning turgunligi.

Glossariy

Xususiy hosilali differensial tenglama - agar tenglamada noma'lum funksiya ikki yoki undan ortiq o‘zgaruvchiga bog‘liq bo‘lsa,, u xolda bu tenglama xususiy xosilali differensial tenglama deyiladi. zqz(x,.y) xususiy xosilali differensial tenglama.

Kovalyovskaya teoremasi - Agar x_1qx^0 da

$$U = \varphi_0(x_2,\ldots x_n)\frac{\partial U}{\partial x} = \varphi_1(x_2..x_n)\ldots\frac{\partial^{m-1}U}{\partial x_1^{m-1}} = \varphi_{m-1}(x_2..x_n)\ldots\frac{\partial^{m-1}U}{\partial x_1^{m-1}} = \varphi_{m-1}(x_2..x_n) \qquad (1)$$

boshlang‘ich shartda berilgan $\varphi_0,\varphi_1,\ldots\varphi_{m-1}$ funksiyalar boshlang‘ich $(x_2,\ldots x_n^0)$ nuqtaning atrofida analitik funksiya, f funksiya esa o‘zgaruvchi argumentlarining ushbu boshlang‘ich qiymatlari xq_1^0,x_2^0,x_n^0

$U_0 q \varphi_0(x_2^0, \ldots x_n^0)$, $\left(\frac{\partial U}{\partial x_n}\right) = \varphi_1(x_2, \ldots x_n^0), \ldots,$

$$\left(\frac{\partial^m U}{\partial x_n^m}\right)_0 = \left(\frac{\partial^m U}{\partial x_n^m}\right)\Bigg|\frac{x_1 = x^0{}_1}{x_n X_n^0}$$

atrofida $\left(\frac{\partial^m U}{\partial x_1^m}\right) = f(x_1, x_2, \ldots x_n, U, \frac{\partial U}{\partial x_1}, \ldots \frac{\partial^{m-1} U}{\partial X^{m-1}}$ analitik bo‘lsa, u xolda $\frac{\partial^1 U}{\partial x^2}, \frac{\partial^1 U}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^m U}{\partial x^m{}_n})$, tenglamaning (x_1^0, x_2^0, x_n^0) nuqta atrofida analitik bo‘lgan birdan-bir yagona yechim mavjud.

Keyslar banki

Keys: Masala o’rtaga tashlanadi: Differensial tenglamani yeching: $\begin{cases} \dot{x} = y + tg^2 t - 1 \\ \dot{y} = -x + tgt \end{cases}$.

Keysni bajarish bosqichlari va topshiriqlar:

- keysdagi muammoni hal qilish mumkin bo`lgan asosiy formula, tushuncha va tasdiqlarni keltiring (individual va kichik guruhlarda);
- to`plangan ma’lumotlardan foydalanib, qo`yilgan masalani yeching (individual).

Nazorat uchun savollar

1. Xususiy xosilali differensial tenglama deb nimaga aytiladi?
2. Kovalevskaya teoremasini isbotlang?
3. Chiziqli bir jinsli tenglama uchun Koshi masalasi qanday yechiladi?
4. Xususiy hosilali, 1- tartibli va bir jinsli tenglama qanday ko‘rinishda bo‘ladi?
5. $F(u.\frac{du}{dx}, \frac{du}{dy}) = 0$ tenglama qanday tenglama turiga kiradi?

Amaliy mashg’ulot-31

O‘zgarmas koeffitsientli chiziqli sistemalar

1. Yuqori tartibli tenglamaga keltirish usuli. Soddaroq chiziqli sistemalar bitta yuqori tartibli tenglamaga noma'lumlarni yo‘qotish usuli bilan keltirish mumkin.

Misol $\dot{x} = y + 1, \ \dot{y} = 2e^t - x.$ y ni yo‘qotamiz. Birinchi tenglamadan $y = \dot{x} - 1$. Uni ikkinchi tenglamaga qo‘yamiz: $\ddot{x} + x = 2e^t$. Bu yerdan $x = c_1 \cos t + c_2 \sin t + e^t$. Demak, $y = -c_1 \sin t + c_2 \cos t + e^t - 1$

2. Umumiy ko‘rinishdagi sistema

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11} x_1 + \ldots\ldots + a_{1n} \ x_n, \\ ------------ \\ \dot{x}_n = a_{n1} x_1 + \ldots\ldots + a_{nn} \ x_n, \end{cases} \qquad (1)$$

Bu yerda $\dot{x}_i = \frac{dx}{dt}, \ i = 1, \ldots, n$ (1) ni vektor ko‘rinishda $\dot{x} = Ax$ deb yozish mumkin, bu yerda

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\dots\\x_n\end{pmatrix}\qquad A=[aij]=\begin{bmatrix}a_{11}\dots a_{1n}\\----\\a_{n1}\dots a_{nn}\end{bmatrix}$$

Bunday sistemani yechish uchun avval

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda\ \ a_{12}\dots a_{1n}\\a_{21}\ a_{22}-\lambda\dots a_{2n}\\--------\\a_{n1}a_{n2}\dots\dots a_{nn}-\lambda\end{vmatrix} \tag{2}$$

Xarakteristik tenglama ildizlari λ_i topiladi. Har bir λ_i ga $c_i v^i e^{\lambda_i t}$ xususiy yechim mos keladi. Bu yerda $c_i=const,\ v^i-A$ matritsaning λ_i xos soniga mos xos vektor.

Agar karrali λ ildiz uchun chiziqli erkli $v^1,\dots,v^k$ xos vektor mos kelsa, unga $c_1v^1e^{\lambda t}+c_kv^ke^{\lambda t}$ yechim mos keladi, bu yerda k λ xos sonning karraligi. Agarda *k* karrali xos son λ ga *m* < *k* chiziqli erkli xos vektorlar mos kelsa, unga mos keluvchi xususiy yechim $e^{\lambda t}$ ni *k*-*m*-chi darajali ko‘phadga ko‘paytirishdan hosil bo‘ladi, ya'ni

$$\begin{cases}x_1=(a+bt+\dots+dt^{k-m})e^{\lambda t},\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ x_n=(p+qt+\dots+st^{k-m})e^{\lambda t}\end{cases} \tag{3}$$

$a,b,\dots,d,p,q,\dots,s$ koeffitsientlar (3) ni (1) ga qo‘yib topiladi. O‘ng va chap tomonda *t* ning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlar tenglashtirib, *a*, *b*, …, *s* lar uchun chiziqli sistema topiladi va uning umumiy yechimi topiladi. Umumiy yechim k ta o‘zgarmaslarga bog‘liq bo‘lishi kerak, $k-\lambda$ ning karrasi.

Har bir λ uchun shunday yechimlar topilib, ular qo‘shilib, (1)-sistemaning umumiy yechimni topish mumkin.

Misol: Sistema yechilsin.

$$\dot{x}=2x+y+\cancel{z},\quad \dot{y}=-2x-\cancel{z},\quad \dot{\cancel{z}}=2x+y+2\cancel{z} \tag{4}$$

Xarakteristik tenglama tuzamiz va yechamiz:

$$\begin{vmatrix}2-\lambda & 1 & 1\\-2 & -\lambda & -1\\2 & 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{5}$$

$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0,\quad \lambda_1=2,\quad \lambda_{2,3}=1,\quad \lambda_2=2$ xos son uchun (α,β,γ) xos vektor tuzamiz va topamiz:

$$\begin{cases}\beta+\gamma=0\\-2\alpha-2\beta-\gamma=0\\2\alpha+\beta=0\end{cases} \tag{6}$$

Bu sistema elementlari (5) dan $\lambda=2$ da olinadi. Uni yechib (1, -2, 2) xos vektorni topamiz, chunki $2\alpha=-\beta=\gamma$. Demak, $\lambda=2$ ga

$$x=e^{2t},\quad y=-2e^{2t},\quad \cancel{z}=2e^{2t} \tag{7}$$

xususiy yechim mos keladi.

Ikki karrali ildiz $\lambda_{2,3}=1$ ga ushbu matritsani olamiz:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Uning tartibi $n = 3$ rangi $r = 2$. Chiziqli erkli xos vektorlar soni $m = n - 2 = 1$ ga teng. $\lambda = 1$ son ikki karrali xos son, $k > m$ bo‘lganligi uchun yechimni n-m-1 darajali ko‘phadni $e^{\lambda t}$ ga ko‘paytirib topamiz:

$$x = (a + bt)e^t, \quad y = (c + dt)e^t, \quad z = (f + gt)e^t \qquad (8)$$

a, …, g koeffitsientlarni topish uchun (8) ni (4) ga qo‘yamiz va ko‘phadda t ning mos darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglab ushbu sistemani olamiz:

$$\begin{aligned} &b + d + g = 0, && b = a + c + f, \\ &-2b - d - g = 0, && d = -2a - c - f, \\ &2b + d + g = 0, && g = 2a + c + f. \end{aligned} \qquad (9)$$

Bu sistemaning umumiy yechimini topamiz. Chap tomondagi 2 ta tenglamadan $b = 0,\ g = -d$ ni topamiz. Ularni qolgan tenglamalarga qo‘ysak,

$$0 = a + c + f, \quad d = -2a - c - f \qquad (10)$$

ni olamiz. Qolgan tenglamalar ularning natijalari bo‘ladi. (10) sistemani a, f ga (masalan) yechamiz $a = -d, \quad f = d - c$.

Shunday qilib barcha noma'lumlar c, d orqali ifodalandi. $c_1 = c, \quad c_2 = d$ deb $a = -c_2,\ b = 0,\ f = c_2 - c_1,\ g = -c_2$ ni topamiz. (9) ning umumiy yechimi topiladi. Topilgan a, v, ... , larni (8) ga qo‘yib va (7) xususiy yechimni qo‘yib ushbu umumiy yechimni topamiz:

$$\begin{aligned} x &= -c_2 e^t + c_3 e^{2t}, \\ y &= (c_1 + c_2 t)e^t - \alpha c_3 e^{2t}, \\ z &= (c_2 - c_1 - c_2 t)e^t + 2c_3 e^{2t} \end{aligned}$$

3. (1)-sistemani boshqacha yechish usuli.

Har qanday matritsa uchun shunday bazis borki, bu bazisda matritsa jardan forasi(ga) matritsaning kvazi diagonal ko‘rinishidan iborat, ya'ni diagonal bo‘ylab katakcha matritsalar joylashgan, qolgan elementlar 0 ga teng. Har bir jordan katakchasi $p \geq 0$ shartiga ega. $p \geq 1$ o‘lchovli katakchaga bazisdan olingan shunday $h_1 ... h_p$ vektorlar mos keladiki, ular quyidagi tengliklarni qanoatlantiradi:

$$Ah_1 = \lambda h_1, \ h_1 \neq 0, \qquad (\lambda\text{-xos son}).$$

$$\begin{aligned} Ah_2 &= \lambda h_2 + h_1, \\ Ah_3 &= \lambda h_3 + h_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Ah_p &= \lambda^h p + h_{p-1} \end{aligned} \qquad (11)$$

h_1 vektor λ xos songa mos xos vektor $h_1, \ldots, h_p$ vektorlar unga birikkan vektorlarga har bir seriya $h_1, \ldots, h_p$ vektorlarga $\dot{x} = Ax$ sistemaning shunday chiziqli erkli yechimlari mos keladi,

$$x^1 = e^{\lambda t} h_1 \qquad x^2 = e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h_1 + h_2\right)$$

$$x^3 = e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}h_1 + \frac{t}{1!}h_2 + h_3\right) \ldots \tag{12}$$

$$x^p = e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}h_1 + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}h_2 + \ldots + \frac{t}{1!}h_{p-1} + h_p\right)$$

Bu yerda x dagi yuqori indeks-yechim nomeri. Bunday yechimlarning umumiy soni matritsa tartibiga teng. Ular $\dot{x} = Ax$ sistemaning fundamental yechimlar sistemasini tashkil etadi.

4. Agar λ lar orasida kompleks sonlar bo'lsa, bayon etilgan usul kompleks yechimlarga olib keladi. Agar tenglama koeffitsientlari haqiqiy bo'lsa, bu yechimlarning haqiqiy va mavhum qismlari ham chiziqli erkli yechim bo'lishidan foydalanib, bu yechimlarni haqiqiy ko'rinishda yozish mumkin.

Misol: $\dot{x} = 4x - y, \ \dot{y} = 5x + 2y$ sistema yechilsin. Harakteristik tenglama tuzamiz va yechamiz.

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -1 \\ 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0, \qquad \lambda = 3 + 2i$$

$\lambda^2 - 6\lambda + 13 = 0; \quad \lambda = 3 + 2i -$ ildiz uchun (a, v) xos vektor topamiz:

$$\begin{cases} (1-2i)a - b = 0 & a = 1 \\ 5a - (1+2i)b = 0 & b = 1 - 2i \end{cases}$$

Xususiy yechim $x = e^{(2+3i)t}, \ y = (1-2i)e^{(2+3i)t}$ sistema koeffitsientlari haqiqiy bo'lganligidan $\lambda = 3 - 2i$ ga mos yechimni qidirmasligi mumkin. Topilgan yechimning haqiqiy va mavhum qismlari xususiy yechim bo'ladi.

$$e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + i\sin 2t)$$

Formuladan

$$x_1 = \mathrm{Re}\, e^{(3+2i)t} = e^{3t}\cos 2t, \quad y_1 = \mathrm{Re}(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\cos 2t + 2\sin 2t)$$

$$x_2 = I_m e^{(3+2i)t} = e^{3t}\sin 2t, \quad y_2 = I_m(1-2i)e^{(3+2i)t} = e^{3t}(\sin 2t - 2\cos 2t)$$

Umumiy yechim ularning kombinatsiyasi bo'ladi.

$$x = c_1x_1 + c_2x_2, \qquad y = c_1y_1 + c_2y_2$$

5. Ushbu sistemani yechish uchun (normal emas)

$$a_{10}x^{(n)} + a_n x^{(n-1)} + \ldots + a_{1n}x + b_{10}y^{(n)} + b_{11}y^{(n-1)} + \ldots + b_{1n}y = 0$$

$$a_{20}x^{(n)} + a_{21}x^{(n-1)} + \ldots + a_{2n}x + b_{20}y^{(n)} + b_{21}y^{(n-1)} + \ldots + b_{2n}y = 0.$$

xarakteristik tenglama tuziladi.

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n + a_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{1n} & b_{10}\lambda^n + b_{11}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n + a_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + a_{2n} & b_{20}\lambda^n + b_{21}\lambda^{n-1} + \ldots + b_{2n} \end{vmatrix} = 0$$

Uning ildizlari topilgach, xususiy yechimlar (12) kabi topiladi.

6. Bir jinsli bo'lmagan chiziqli sistema yechimi

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + f_i(t); \quad i = 1, \ldots, n \tag{13}$$

agar ozod had $f(t) \quad b_0 + b_1t + \ldots + b_mt^m, \ e^{\alpha t}, \ \cos\beta t, \ \sin\beta t$ funksiyalarni yig'indisi, ko'paytmasi shaklida bo'lsa aniqmas koeffitsientlar usulida yechish mumkin.

Agar $f_i(t) = p_{mi}(t)e^{\gamma t}\left(d^{m_i+1}p_{mi}(t)/dt^{m+1} = 0\right)$ bo'lsa xususiy yechim

$$x_i = Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t}, \ i = 1, \ldots, n \tag{14}$$

Ko'rinishda izlanish mumkin. Bu yerda $Q^i_{m+s}(t) - m+s-$ darajali ko'phad, $m = \max m_i$. Agar γ xarakteristik tenglama yechimi bo'lmasa, $s=0$, aks holda s ni γ ning karraligiga teng son. Ko'phadning noma'lum koeffitsientlari 0 ga tenglab sistemalardan topiladi.

Agar $f_i(t) = e^{\alpha t}\cdot\cos\beta t,\ \ e^{\alpha t}\sin\beta t$ lardan tuzilgan bo'lib, $\gamma = \alpha + i\beta$ bo'lsa ham shunday ish qilinadi.

Misol:

$$\dot{x} = 4x - y + e^{3t}(t+\sin t)$$
$$\dot{y} = x + 2y + te^{3t}\cos t \qquad (15)$$

Avval mos bir jinsli $\dot{x} = 4x - y,\ \ \dot{y} = 2y + x$ sistema umumiy yechimini topamiz. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ bo'lganligi uchun n.2 dan $x_0 = (c_1 t + c_2)e^{3t},\ \ y_0 = (c_1 t + c_2 - c_1)e^{3t}$ (15) sistemada $te^{3t}, e^{3t}\sin t,\ te^{3t}\cos t$ funksiyalar uchun $\alpha + \beta i$ sonlar mos ravishda $3, 3+i,\ 3+i$ teng. Shuning uchun ushbu sistemalar xususiy yechimlari alohida topiladi:

$$\dot{x} = 4x - y + te^{3t}, \qquad \dot{y} = x + 2y \qquad (16)$$
$$\dot{x} = 4x - y + e^{3t}\sin t, \quad \dot{y} = x + 2y + te^{3t}\cos t \qquad (17)$$

(16) uchun $\alpha + \beta i = 3 = \lambda_1 = \lambda_2,\quad s = 2,\ \ m = 1$ (14) ga asosan

$x_1 = (at^3 + bt^2 + ct + d)e^{3t}$

$y_1 = (\cancel{z}t^3 + gt^2 + ht + j)e^{3t}$

(17) sistema uchun $\alpha + \beta i = 3 + i \neq \lambda_{1,2},\quad s = 0,\ \ m = 1.$

Xususiy yechim $x_2 = (kt + e)e^{3t}\sin t + (mt + n)e^{3t}\cos t,$

$$y_2 = (pt + q)e^{3t}\sin t(r + s)e^{3t}\cos t.$$

noma'lumlar koeffitsientlarni topib ushbu umumiy yechimni olamiz:

$$x = x_0 + x_1 + x_2,\ \ y = y_0 + y_1 + y_2$$

7. Bir jinsli bo'lmagan ushbu sistema yechimi

$$\dot{x}_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n + fi(t),\ i = 2, \ldots, n$$

agar mos bir jinsli $(fi = 0)$ sistema yechimi topilgach o'zgarmaslarni variatsialash usuli bilan topilishi mumkin. Buning bir jinsli sistemaning umumiy yechimida o'zgarmas C_i koeffitsientlarni funksiya $C_i(t)$ deb olib, yechimni sistemaga qo'yib u yerda $C_i(t)$ larni topish zarur.

8. e^A funksiya quyidagicha kiritiladi:

$$e^A = E + \frac{A}{1!} + \frac{A^2}{2!} + \ldots, \quad (Ex = x) \qquad (18)$$

Qator ixtiyoriy matritsa uchun yaqinlashadi. Xossalarni sanab o'tamiz:

a) agar $A = CMC^{-1}$ bo'lsa, $e^A = Ce^M C^{-1}$

b) agar $AB = BA$ bo'lsa, $e^{A+B} = e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A = e^{B+A}$

v) $x = e^{tA}$ matritsa $\dfrac{dx}{dt} = Ax,\quad x(0) = E$ tenglamani qanoatlantiradi.

e^A ni topish usullari:

1) Tenglamalar sistemasini yechish usuli

v) xossaga asosan, e^{tA} ning i-ustuni $\dot{x} = Ax$ sistemaning $x_i = 1,\ x_k = 0,\ k \neq i$

boshlang‘ich shartidagi yechimidir, x_i x ning i- koordinatasi.

2) Matritsani jordan formulasiga keltirish usuli. Faraz qilaylik shunday s borki, $C^{-1}Ac$ jordan formasiga kelsin, ya'ni yk_i koordinatalardan iborat, ye matritsada diagonaldan yuqoridagi birinchi egri qator 0 ga teng. Shuning uchun $F^m = 0,\ m - F$ ning tartibi F va e^t ni (18) qator asosida topish mumkin.

$e^{\lambda B} = e^{\lambda E}$ bo‘lganidan

$e^x = e^{\lambda E + F} = e^{\lambda E} \cdot e^F = e^{\lambda} \cdot e^F$.

e^{ki} katakchalardan e^M matritsa tuzib, e^A ni

a) xossa asosida topamiz.

Misol. Ushbu $\dfrac{dy}{dx} = z, \dfrac{dy}{dx} = y$ differensial tenglamalar sistemasini yechamiz.

(2) xarakteristik ko‘pxad

$$\begin{vmatrix} -r & 1 \\ 1 & -r \end{vmatrix} = 0$$

ko‘rinishga ega, ya'ni $r^2 - 1 = 0$, bu yerdan $r_{1,2} = \pm 1$ $r = 1$ bo‘lganda k_1 va k_2 koeffitsientlarni topish uchun xizmat qiladigan ushbu

$$\begin{cases} (a_{11} - r)k_1 + a_{12}k_2 + a_{13}k_3 = 0, \\ a_{21}k_1 + (a_{22} - r)k_2 + a_{23}k_3 = 0, \\ a_{31}k_1 + a_{32}k_2 + (a_{33} - r)k_3 = 0. \end{cases}$$

sistema ko‘rinishda bo‘ladi:

$$\left.\begin{aligned} -k_1 + k_2 &= 0, \\ k_1 - k_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemadan $k_1^{(1)} = k_1^{(1)}$ ni hosil qilamiz. $r = -1$ uchun $\left.\begin{aligned} k_1 + k_2 &= 0, \\ k_1 + k_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$ bu yerdan $k_1^{(2)} = -k_1^{(2)}$. Shunday qilib yechimlarning ikkita sistemasini hosil qilamiz:

$$y^{(1)} = k_1^{(1)}e^x, \qquad z^{(1)} = k_1^{(1)}e^x,$$
$$y^{(2)} = k_1^{(2)}e^{-x}, \qquad z^{(2)} = -k_1^{(2)}e^{-x}.$$

$k_1^{(1)}$ va $k_1^{(2)}$ koeffitsientlarga ixtiyoriy sonli qiymatlar berish mumkin. $k_1^{(1)} = k_1^{(2)} = 1$ quyidagini hosil qilamiz:

$$y^{(1)} = e^x,\ z^{(1)} = e^x,$$
$$y^{(2)} = e^{-x},\ z^{(2)} = -e^{-x}.$$

demak, umumiy yechim quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x}, \quad z = c_1e^x - c_2e^{-x},$$

bu, c_1 ni $\dfrac{c_2}{2}$ ga almashtirsak $z = \dfrac{1}{2}c_1e - c_2e^{-x}$ yechim hosil bo‘ladi:

Ushbu differensial tenglamalar sistemasini yechamiz:

$$\left.\begin{aligned} \frac{dy_1}{dx} &= -7y_1 + y_2, \\ \frac{dy_2}{dx} &= -2y_1 - 5y_2 \end{aligned}\right\}$$

Bu sistemaning harakteristik tenglamasi:

$$\begin{vmatrix} -7-r & 1 \\ -2 & -5-r \end{vmatrix} = 0 \quad \text{yoki} \quad r^2+12r+37=0,$$

bu yerdan $r_{1,2} = -6 \pm i$. Agar $r_1 = -6+i$ bo‘lsa, k_1, k_2 koeffitsientlarni topish uchun

$$\left.\begin{aligned} (-1-i)k_1 + k_2 = 0, \\ -2k_1 + (1-i)k_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

Sistemaga ega bo‘lamiz. Bu yerdan $k_2 = (1+i)k_1;\ k_1 = 1$ deb ikkita xususiy yechimni hosil qilamiz:

$$y_1^{(1)} = e^{(-6+i)}x, \quad y_2^{(1)} = (1+i)e^{(-6+i)}x.$$

$r = -6-i$ bo‘lganda k_1 va k_2 koeffitsientlar ushbu algebraik tenglamalar sistemasidan topamiz.

$$\left.\begin{aligned} (-1+i)k_1 + k_2 = 0 \\ -2k_1 + (1+i)k_2 = 0, \end{aligned}\right\}$$

demak, $k_2 = (1-i)k_1$, bu yerda $k_1 = 1$ da

$$y_1^{(2)} = e^{(-6-i)}x, \quad y_2^{(2)} = (1-i)e^{(-6-i)}x$$

Xususiy yechimlarni beradi.

Hosil qilingan xususiy yechimlar o‘rniga ularning kombinatsiyalarini olish mumkin:

$$\tilde{y}_1^{(1)} = \frac{y_1^{(1)} + y_1^{(2)}}{2} = \frac{e^{(-6+i)x} + e^{(-6-i)x}}{2} = e^{-6x}\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} = e^{-6x}\cos x,$$

$$\tilde{y}_1^{(2)} = \frac{y_1^{(1)} - y_1^{(2)}}{2} = \frac{e^{(-6+i)x} - e^{(-6-i)x}}{2i} = e^{-6x}\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} = e^{-6x}\sin x,$$

$$\tilde{y}_2^{(1)} = \frac{y_2^{(1)} + y_2^{(1)}}{2} = \frac{(1+i)e^{(-6+i)x} + (1-i)e^{(-6-i)x}}{2} = \frac{e^{-6x}(1+i)e^{ix}}{2} +$$

$$+\frac{(1-i)e^{-ix}}{2} = e^{-6x}\left[\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2} + \frac{ie^{ix}-e^{-ix}}{2}\right] = e^{-6x}(\cos x - \sin x).$$

$$\tilde{y}_2^{(2)} = \frac{y_2^{(1)} - y_2^{(2)}}{2} = (1+i)e^{(-6+i)x} - (1-i)e^{(-6-i)x} = e^{-6x}\frac{(1+i)e^{ix} - (1-i)e^{-ix}}{2i} =$$

$$= e^{-6x}\left[\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i} + \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right] = e^{-6x}(\sin x + \cos x).$$

Bular haqiqiy funksiyalardir. Shunday qilib, sistemaning umumiy yechimi quydagicha ko‘rinishda bo‘ladi:

$$y_1 = c_1e^{-6x}\cos x + c_2e^{-6x}\sin x,$$

$$y_2 = c_1e^{-6x}(\cos x - \sin x) + c_2e^{-6x}(\cos x + \sin x).$$

yoki

$$y_1 = e^{-6x}(c_1\cos x + c_2\sin x),$$

$$y_2 = e^{-6x}\left[(c_1+c_2)\cos x - (c_1-c_2)\sin x\right].$$

1. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + y + 2e^t \\ \dot{y} = x + 2y - 3e^{4t} \end{cases}$ j: $\begin{cases} x = c_1e^t + c_2e^{3t} + te^t - e^{4t} \\ y = -c_1e^t + c_2e^{3t} - (t+1)e^t - 2e^{4t} \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = x - y + 8t \\ \dot{y} = 5x - y \end{cases}$ j: $\begin{cases} x = c_1\cos 2t - c_2\sin 2t + 2t + 2 \\ y = (c_1+2c_2)\cos 2t + (2c_1-c_2)\sin 2t + 10t \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = 2x - y \\ \dot{y} = 2y - x - 5e^{t}\sin t \end{cases}$ j: $\begin{cases} x = c_1e^{t} + c_2e^{3t} + e^{t}(3\cos t - \sin t) \\ y = c_1e^{t} - c_2e^{3t} + e^{t}(3\cos t + \sin t) \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot{x} = y + tg^{2}t - 1 \\ \dot{y} = -x + tgt \end{cases}$ j: $\begin{cases} x = c_1\cos t + c_2\sin t + tgt \\ y = -c_1\sin t + c_2\cos t + 2 \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot{x} = 2y - x \\ \dot{y} = 4y - 3x + \dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1} \end{cases}$ j: $\begin{cases} x = c_1e^{t} + 2c_2e^{2t} - e^{t}\ln(e^{2t}+1) + 2e^{2t}arctge^{t} \\ y = c_1e^{t} + 3c_2e^{2t} - e^{t}\ln(e^{2t}+1) + 3e^{2t}arctge^{t} \end{cases}$

6. $\begin{cases} \dot{x} = -4x - 2y + \dfrac{2}{e^{t}-1} \\ \dot{y} = 6x + 3y - \dfrac{3}{e^{t}-1} \end{cases}$ j: $\begin{cases} x = c_1 + 2c_2e^{-t} + 2e^{-t}\ln|e^{t}-1| \\ y = -2c_1 - 3c_2e^{-t} - 3e^{-t}\ln|e^{t}-1| \end{cases}$

TEST

a ning qanday qiymatlarida $y'' + ay = 1$, $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ masala yechimga ega emas?	$*\ a = (2\pi - 1)\pi^{2}$	$a = (2\pi - 1)\ \pi$	$a = (2\pi - 1)^{2}\ \pi$	$a = 0$
a ning qanday qiymatlarida $y'' + ay = f(x)$ $y(0) = 0,\ y(1) = 0$ chegaraviy masalaning Grin funksiyasi mavjud bo'ladi?	$*\ a \neq k^{2}\pi^{2}$	$a = k\pi$	$a = k^{2}\pi^{2}$	$a \neq k\pi$
$y'' + 4y' + 3y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*\ y = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x}$	$y = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$	$y = c_1e^{x} + c_2e^{-3x}$	$y = c_1e^{x} + c_2e^{3x}$
$y'' + 2y' + 10y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*$ $y = e^{-x}(C_1Cos3x + C_2Sin3x)$	$y = e^{3x}(C_1Cosx + C_2Sinx)$	$y = e^{x}(C_1Cos3x + C_2Sin3x)$	$y = e^{2x}(c_1Cos2x + c_2Sin2x$
$y^{//} - 2y^{/} + y = 0$ tenglamaning umumiy yechimini yozing.	$*\ y = (c_1 + c_2x)e^{x}$	$y = (c_1 + c_2)e^{x}$	$y = (c_1 + c_2x^{2})e^{x}$	$y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$
$y^{//} - 2y^{/} - 3y = x^{2}e^{x}$ tenglamaning bitta xususiy uchimi qanday ko'rinishda izlanadi.	$*\ y = x(Ax^{2} + Bx + c)e^{x}$	$y = (Ax^{2} + Bx + c)e^{x}$	$y = x^{2}(Ax + B)e^{x}$	$y = Ax^{2}e^{x}$
$y^{//} - 4y^{/} + 8y = Sin2x$ tenglamaning bitta xususiy yechimi qaysi ko'rinishda bo'ladi?	$*\ y = ASin2x + BCos2x$	$y = (Ax + B)Sin2x + (cx + B)Cosx$	$y = Ax^{2}Sin2x + BxCosx$	$y = x(ASin2x + BCos2x$
a va b ning qanday qiymatlarida $y^{//} + ay^{/} + by = 0$ tenglamaning yechimlari $-\infty \prec x \prec \infty$ da chegaralangan bo'ladi?	$*a = 0$ $b > 0$	$a = 0$ $b < 0$	$a > 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b < 0$
a va b ning qanday qiymatlarida $y^{//} + ay^{/} + by = 0$ tenglamaning hamma yechimlari $x \to +\infty$ da nolga	$*a > 0$ $b > 0$	$a = 0$ $b < 0$	$a = 0$ $b > 0$	$a < 0$ $b < 0$

intiladi?				
$x^3 y''' + xy' - y = 0$ Eyler tenglamasini yeching.	* $y = x\left(c_1 + c_2 \ln\lvert x\rvert + c_3 \ln^2\lvert x\rvert\right)$	$y = c_1 + c_2 \ln\lvert x\rvert + c_3 \ln^2\lvert x\rvert$	$y = x^2\left(c_1 + c_2 \ln\lvert x\rvert + c_3 \ln^2\lvert x\rvert\right)$	$y = c_1 + c_2 x + c_3 x^2$