МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ, НАУКИ И ИННОВАЦИЙ РЕСПУБЛИКИ УЗБЕКИСТАН

НАМАНГАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кафедры МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

Учебно-методической комплекс

По предмету

“ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА”

“ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА И ЕЕ ПРИМЕНЕНИЕ В НАЧАЛЬНОМ ОБРАЗОВАНИИ”

Область знаний: **500000 - Естественные науки, математика и статистика.**

Область образования: **510000 – Биологические и смежные науки**
530000 – Предметы относящийся к физике
140 000 – Естественные науки

Направление бакалавриата: **60510100-Биология**
60530100- Химия
60110500– Начальное образование.

Наманган-2023

Учебно-методический комплекс разработан на основе научной программы, утвержденной ____________________ в 2023 году приказом № 1.

Составил: Холмуродов М., доцент НамГУ

Рецензенты: Мирзаев Т. - ф-.м.ф.н.

Ю.Ташмирзаев - ф-.м.ф.н., доц.

Учебно-методический комплекс рассмотрен и рекомендован к использованию на 1-м заседании Совета математического факультета Наманганского государственного университета _____ августа 2023 года.

Председатель Совета: к.ф.-м.н., Мавлянов Х.А.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебно-методический комплекс (УМК) дисциплины «Высшая математика» предназначен для студентов специальностей: 1-25 01 07 «Экономика и управление на предприятии», 1-26 02 02 «Менеджмент» и высших учебных заведений.

УМК состоит из двух частей. В первой части данного комплекса содержится материал по линейной алгебре, системам линейных алгебраических уравнений и неравенств, векторной алгебре, аналитической геометрии, кривым второго порядка, функции одной переменной, дифференциальному исчислению функции одной переменной, функции нескольких переменных.

Во вторую часть УМК включён материал по интегральному исчислению, обыкновенным дифференциальным уравнениям, рядам, теории вероятностей и математической статистике, математическому программированию.

УМК составлен в соответствии с учебной программой по учебной дисциплине «Высшая математика», разработанной по модульной технологии обучения. Каждый модуль содержит теоретический материал, задачи для управляемой самостоятельной работы студентов, задания для контроля знаний по модулю.

В результате изучения дисциплины «Высшая математика» обучаемый должен

знать:

- методику применения методов матричной алгебры и аналитической геометрии при решении конкретных задач;
- методику применения аппарата функции одной переменной, методов дифференциального исчисления функции одной и нескольких переменных при решении математических и прикладных задач;
- прикладные аспекты интегрального исчисления и дифференциальных уравнений;
- основные определения, теоремы и соотношения теории вероятностей;
- основные законы распределения случайных величин и их практические приложения;
- методы обработки и анализа статистических данных;
- содержание практических задач, подлежащих экономико-математическому моделированию;
- методы и алгоритмы решения оптимизационных экономических и производственных задач;

уметь:

- решать формальные и прикладные задачи матричной алгебры, аналитической геометрии и математического анализа, строить математические модели и решать задачи с экономическим содержанием;

- применять вероятностные и статистические методы при решении задач прикладного характера, осуществлять сбор и обработку статистических данных, применять методы анализа полученных данных;

- моделировать простейшие экономические ситуации, связанные с оптимизацией исследуемых процессов;

- решать оптимизационные задачи методами математического программирования и с использованием пакетов прикладных программ на ПЭВМ;

- обосновывать оптимальное решение и проводить экономический анализ полученных результатов.

УЧЕБНАЯ ПРОГРАММА ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»

Модуль 1
Линейная алгебра

1. Определители и их свойства, вычисление. [6] гл.4, §4.3.
2. Матрицы и линейные операции над ними. Умножение матриц. [4] гл.13, §13.1.
3. Ранг матрицы. [4] гл.14, §14.1.
4. Обратная матрица и её нахождение. [4] гл.13, §13.2.
5.

Модуль 2
Система линейных алгебраических уравнений и неравенств

1. Теорема Кронекера-Капелли о совместности систем линейных уравнений. [4] гл.15, §15.1.
2. Правило Крамера решения систем. [6] гл.4, §4.8.
3. Матричный метод решения систем линейных уравнений. [4] гл.15, §15.1.
4. Метод Гаусса решения систем. [4] гл.15, §15.2.
5. Геометрический смысл системы линейных уравнений и системы неравенств с двумя, тремя, n переменными.

Модуль 3
Векторная алгебра

1. Векторы. Операции сложения и вычитания векторов, умножение вектора на число. Линейная зависимость, независимость векторов. [6] гл.5, §5.1, 5.2.
2. Линейное пространство, его размерность и базис. [6] гл.5, §5.5, 5.6.
3. Проекция вектора на ось. Свойства проекции. Системы координат на прямой, плоскости и в пространстве. Координаты вектора. [6] гл.5, §5.4.
4. Деление отрезка в данном отношении. [6] гл.5, §5.6.
5. Скалярное произведение двух векторов, его свойства. Длина вектора. Угол между векторами. Направляющие косинусы вектора. [6] гл.5, §5.7.
6. Полярные координаты точек на плоскости. [7] тема 2, §2.2.

Модуль 4

Аналитическая геометрия

1. Уравнения прямой на плоскости: общее уравнение, уравнение прямой в отрезках, уравнение прямой с угловым коэффициентом, уравнение прямой, проходящей через две точки. [6] гл.2, §2.1.
2. Угол между двумя прямыми. Условия параллельности и перпендикулярности прямых. Расстояние от точки до прямой. [6] гл.2, §2.1.
3. Прямая в пространстве. Её основные уравнения. [6] гл. 6, §6.5.
4. Взаимное расположение прямых в пространстве. [6] гл. 6, §6.6.
5. Плоскость, её основные уравнения. [6] гл. 6, §6.4.
6. Взаимное расположение плоскостей, прямой и плоскости. [6] гл. 6, §6.5.

Модуль 5

Кривые второго порядка

1. Общее уравнение кривой второго порядка. [6] гл. , §2.3.
2. Окружность [6] гл. 2, §2.4.
3. Эллипс. [6] гл. 2, §2.5.
4. Гипербола. [6] гл. 2, §2.6.
5. Парабола. [6] гл. 2, §2.7.

Модуль 6

Функция одной переменной. Непрерывность функции одной переменной

1. Функция, способы задания и классификация. Основные элементарные функции. [1] гл. 1, §1-10.
2. Предел функции в точке. Бесконечно малые величины и их свойства. Теоремы о пределах. [1] гл. 2, §1-3.
3. Два замечательных предела. [1] гл. 2, §6-8.
4. Сравнение бесконечно малых величин. [1] гл. 2, §4.
5. Непрерывность функции, точки разрыва. [1] гл. 2, §9, 10

Модуль 7

Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная функции, её геометрический, механический и экономический смысл. [1] гл. 3, §1-4.
2. Производная суммы, произведения, частного, сложной и обратной функций. [1] гл. 3, §1-7, 9, 13.
3. Таблица производных основных элементарных функций. [1] гл. 3, §15.
4. Уравнения касательной и нормали к кривой. [1] гл. 3, §26.
5. Производные высшего порядка. Механический смысл второй производной. [1] гл. 3, §22, 23.
6. Дифференциал функции и его нахождение. [1] гл. 3, §20-21.
7. Теоремы Ролля, Коши и Лагранжа. [1] гл. 4, §1-3.
8. Правило Лопиталя и его приложения к раскрытию неопределенностей. [1] гл. 4, §3.

9. Признаки возрастания и убывания функции. [1] гл. 5, §2.
10. Экстремум функции. Необходимый признак экстремума. [1] гл. 5, §3.
11. Первый достаточный признак экстремума функции. [1] гл. 5, §4.
12. Исследование функций на экстремум с помощью второй производной. [1] гл. 5, §5.
13. Выпуклость и вогнутость кривых. [1] гл. 5, §9.
14. Асимптоты кривых и их нахождение. [1] гл. 5, §10.
15. Общая схема исследования функций и построение графиков. [1] гл. 4, §11.

Модуль 8

Функции нескольких переменных

1. Определение функций двух и большего числа переменных. Геометрическое толкование функции двух переменных как поверхности в трёхмерном пространстве. Область определения функции нескольких переменных. [1] гл. 8, §1, 2.
2. Предел функции двух переменных в точке. Непрерывность функции в точке и области. [1] гл. 8, §4.
3. Частные производные функции нескольких переменных. [1] гл. 8, §3, 5, 6.
4. Дифференцируемость функции нескольких переменных, полный дифференциал, его связь с частными производными. Достаточное условие дифференцируемости. [1] гл. 8, §7, 8.
5. Производная от сложной функции. Инвариантность формы дифференциала первого порядка. [1] гл. 8, §10.
6. Неявные функции. Производные неявных функций. [1] гл. 8, §11.
7. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных. [1] гл. 9, §6.
8. Частные производные высших порядков. Теорема о независимости результата дифференцирования от порядка дифференцирования. [2] гл. 7, §2.
9. Экстремум функции двух переменных. Необходимое условие экстремума функции двух переменных. [2] гл. 7, §4.
10. Формулировка достаточного признака экстремума функции двух переменных. [2] гл. 7, §4.
11. Наибольшее и наименьшее значения функции в замкнутой области. [2] гл. 7, §4.
12. Производная функции многих переменных в заданном направлении. [2] гл. 8, §14.
13. Градиент функции и его свойства. [2] гл. 8, §15.
14. Функции многих переменных в экономических задачах. [4] гл. 8, §5, [7] тема 7, 8.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

Основная литература

1. Пискунов Н.С. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. 1985. Т.1.
2. Пискунов Н.С. Курс дифференциального и интегрального исчисления. М.: Наука. 1985. Т.2.
3. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика. Мн.: Высш. шк. 1985-1987, ч.2, ч.3.

4. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и её приложения в экономическом образовании. М.: «Дело», 2001.
5. Рябушко А.П., Бархатов В.В., Державец В.В., Юруть И.Е. Индивидуальные домашние задания по высшей математике. Мн.: Высш. шк. 2000, ч.1 и ч.2.
6. Гусак А.Н. Высшая математика. Мн.: Тетра Системс 2000, ч.1 и ч.2.
7. Малыхин В.И. Математика в экономике. М.: ИНФРА-М, 2001.

Дополнительная литература

8. Высшая математика. Общий курс. Под общей редакцией С.А. Самаля. М.: Высшая школа, - 2000.
9. Лихолетов И.И., Мицкевич И.П. Руководство к решению задач по высшей математике, теории вероятностей и математической статистике. Мн.: Вышэйшая школа, - 1976.

МОДУЛЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Определители

Определителем второго порядка называется величина, которая записывается в виде квадратной таблицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и задаётся равенством:

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}},$$

где a_{ij} — элементы определителя; индекс i обозначает номер строки, а индекс j — номер столбца, в котором находится элемент a_{ij}.

Пример 1.1.

Вычислите определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -4 \end{vmatrix} = 1\cdot(-4) - 2\cdot(-3) = -4 - (-6) = -4 + 6 = 2.$$

Минором элемента a_{ik} определителя называется определитель, обозначаемый символом M_{ik}, который получается из данного вычёркиванием строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} определителя, обозначаемым A_{ik}, называется его минор, взятый со знаком плюс, если сумма номеров строки и столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ik} чётная, и со знаком минус в противном случае, т.е.

$$\boxed{A_{ik} = (-1)^{i+k} M_{ik}}.$$

Пример 1.2.

А) Найдите минор и алгебраическое дополнение элемента a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Элемент $a_{23} = -6$. Вычеркнем вторую строку и третий столбец: $\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -7 & 1 & -6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Тогда минор $M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 - 1 \cdot 6 = 0 - 6 = -6$. Алгебраическое дополнение $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -1 \cdot (-6) = 6$.

Б) Вычислите минор и алгебраическое дополнение элемента a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Элемент $a_{21} = 1$. Вычеркнем вторую строку и первый столбец: $\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Тогда минор $M_{21}=|-2|=-2$. Алгебраическое дополнение $A_{21}=(-1)^{2+1}M_{21}=-1\cdot(-2)=2$.

В примере 1.2 был найден определитель первого порядка.

Определителем первого порядка называется величина, которая записывается в виде $|a_{11}|$ и которая равна значению a_{11}.

Определителем третьего порядка называется величина, которая записывается в виде квадратной таблицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и задаётся равенством («разложение по элементам первой строки»):

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}}$$ т.е.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot A_{11} + a_{12}\cdot A_{12} + a_{13}\cdot A_{13} = \sum_{k=1}^{3}\left(a_{1k}\cdot A_{1k}\right)}.$$

Замечание. В дальнейшем мы будем встречаться с кратким обозначением суммы: $\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

Пример 1.3.

Вычислите определитель третьего порядка $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 5\cdot\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 2\cdot\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} =$$

$= 5\cdot 0 - 3\cdot(-34) + 2(-17) = 68.$

Определителем n-го порядка называется величина, которая записывается в виде квадратной таблицы $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$ и задаётся равенством («разложение по элементам некоторой строки или столбца»): определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения.

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \left(a_{kj} \cdot A_{kj}\right)}$$

— разложение по элементам k-той строки

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left(a_{im} \cdot A_{im}\right)}$$

— разложение по элементам m-го столбца

Пример 1.4.

Вычислите определитель четвёртого порядка наиболее удобным способом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Разложим определитель по 4-ой строке:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&0&3&5\\0&0&3&2\\1&2&2&3\\0&0&0&4\end{vmatrix}=0+0+0+4\cdot(-1)^{4+4}\begin{vmatrix}1&0&3\\0&0&3\\1&2&2\end{vmatrix}=4\cdot\begin{vmatrix}1&0&3\\0&0&3\\1&2&2\end{vmatrix}=$$

$$\left|\begin{array}{c}\text{разложим}\\ \text{определитель III порядка}\\ \text{по II строке}\end{array}\right|=4\cdot\left(0+0+3\cdot(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}\right)=$$

$$=4\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix}1&0\\1&2\end{vmatrix}=-12\cdot(2-0)=-24.$$

Свойства определителей.

1. Определитель не изменится, если строки определителя заменить столбцами, а столбцы — соответствующими строками.

2. Общий множитель элементов любой строки (или столбца) может быть вынесен за знак определителя.

3. Если элементы одной строки (столбца) определителя соответственно равны элементам другой строки (столбца), то определитель равен нулю.

4. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак на противоположный.

5. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответственно элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

Пример 1.5.

Вычислите определитель $\Delta=\begin{vmatrix}1/3&2/3\\1/5&3/5\end{vmatrix}$.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1/3&2/3\\1/5&3/5\end{vmatrix}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}=\frac{1}{15}\cdot(3-2)=\frac{1}{15}.$$

§ 2. Матрицы

Матрицей называется прямоугольная таблица, составленная из элементов a_{ik} некоторого множества:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ или } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Первый индекс обозначает номер строки, второй — номер столбца, в которых стоит выбранный элемент.

Матрица имеет *размерность* $m \times n$, если у неё m строк и n столбцов.

Для обозначения матриц употребляются символы: $A_{n\times m}$, $B_{k\times l}$, (a_{ik}), $[a_{ik}]$, (b_{im}), $[b_{im}]$, $(a_{ik})_{m\times n}$ и т.д.

Квадратными порядка n называются матрицы, у которых число строк равно числу столбцов, т.е. $m = n$.

В частности, матрица порядка 1 отождествляется с её элементом, т.е. любое число — частный случай матрицы.

Главную диагональ квадратной матрицы составляют её элементы a_{11}, a_{22}, …, a_{nn}.

Диагональной называется квадратная матрица, у которой все недиагональные элементы равны нулю ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$).

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = diag(1, 2, 3)$ — диагональная квадратная матрица размерности 3 с элементами 1, 2, 3 по главной диагонали.

Ступенчатой называется матрица:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \dots & a_{3r} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \text{ где}$$

$a_{ii} \neq 0\,(i = 1,2,\dots, r), a_{ik} = 0$ при $i > r$.

Например, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ — не ступенчатая,

$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 7 \\ 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ — ступенчатая.

Единичной называется диагональная матрица, все элементы которой равны единице; единичная матрица обозначается E или E_n, где n — порядок матрицы.

$$E_1 = (1),\ E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = diag(1, 1, 1).$$

Верхней (нижней) треугольной матрицей называется квадратная матрица, все элементы которой, расположенные ниже (выше) диагонали равны нулю.

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — верхняя треугольная матрица;

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ — нижняя треугольная матрица.

Например, $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ — верхняя треугольная матрица, $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ — нижняя треугольная матрица.

Нуль-матрицей (нулевой матрицей) размерности $n \times m$, обозначаемой $0_{n\times m}$, называется матрица, все элементы которой равны нулю.

Равными, называются матрицы $A = (a_{ij})_{k\times l}$ и $B = (b_{ij})_{m\times n}$, если они имеют одинаковые размерности, т.е. $m = k$, $n = l$ и элементы этих матриц, занимающие одну и ту же позицию, равны, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$.

Например, если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, то $A = B$.

§ 3. Основные операции над матрицами

Сложение матриц. Суммой двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одной и той же размерности $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ той же размерности такая, что $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Итак, можно складывать только матрицы одной и той же размерности. При сложении матриц складываются соответствующие элементы.

Пример 1.6.

Найдите сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

$$C = A + B = \begin{pmatrix} 3-3 & 2-2 \\ -1+1 & 0+0 \\ 1-1 & 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$ — нуль-матрица размерности 3×2.

Из определения суммы следует, что сложение матриц подчинено:

а) коммутативному закону $A + B = B + A$;

б) ассоциативному закону

$$A + B + C = (A + B) + C = A + (B + C);$$

в) $A_{m\times n} + 0_{m\times n} = A_{m\times n}$ — закон поглощения нуля.

Умножение матрицы на число. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ на число λ (или λ на матрицу A) называется матрица $B = (b_{ij})$, где $b_{ij} = \lambda a_{ij}$, т.е. при умножении матрицы на число надо все элементы матрицы умножить на это число.

Пример 1.7.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Свойства операции умножения матрицы на число:

а) $(\lambda\mu)A = \lambda(\mu A)$ (ассоциативность);

б) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (дистрибутивность относительно сложения чисел);

в) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ (дистрибутивность относительно сложения матриц);

г) $1 \cdot A = A$.

Пример 1.8.

Найдите $2A + 3B$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2A + 3B = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 9 & 0 \\ 6 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-6 & 4+9 & 6+0 \\ 0+6 & 2+3 & -2+3 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} -4 & 13 & 6 \\ 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Умножение матриц. Произведением матрицы $A=(a_{ij})$ размерности $n\times m$ на матрицу $B=(b_{ij})$ размерности $m\times p$ называется матрица $C=(c_{ij})$ размерности $n\times p$ такая, что $c_{ij}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{im}\cdot b_{mj}=\sum_{k=1}^{m}a_{ik}b_{kj}$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,p$.

Умножать матрицы A и B можно лишь в том случае, когда <u>число столбцов первого сомножителя A</u> (число элементов в каждой строке матрицы A) <u>совпадает с числом строк второго сомножителя B</u> (число элементов в каждом столбце B). В частности для квадратных матриц одинакового порядка определены оба произведения AB и BA, и матрицы произведения являются матрицами того же порядка

Пример 1.9. Пусть $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$. Найдите произведения AB и BA (если это возможно).

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 6 & 0 & -2 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}=$$

$$=\left[\begin{array}{c} \text{выделяются 1-я строка матрицы } A \\ \text{и первый столбец матрицы } B, \\ \text{соответствующие элементы перемножаются,} \\ \text{а произведения складываются} \end{array}\right]=$$

$$=\begin{pmatrix} \boxed{1\cdot3+2\cdot6+3\cdot7} & 1\cdot4+2\cdot0+3\cdot1 & 1\cdot5+2\cdot(-2)+3\cdot8 \\ 1\cdot3+0\cdot6+(-1)\cdot7 & 1\cdot4+0\cdot0+(-1)\cdot1 & 1\cdot5+0\cdot(-2)+(-1)\cdot8 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 36 & 7 & 25 \\ -4 & 3 & -3 \end{pmatrix}.$$

Произведение BA не существует, так как число столбцов матрицы B не совпадает с числом строк матрицы A $(3 \neq 2)$.

Пример 1.10. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$. Найдите произведения AB и BA (если это возможно).

$$AB = 3 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 = -3 + 2 - 2 = -3.$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \cdot 3 & -1 \cdot 2 & -1 \cdot (-1) \\ 1 \cdot 3 & 1 \cdot 2 & 1 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Из приведенных выше примеров ясно, что в общем случае $AB \neq BA$..

Коммутирующими называют матрицы A и B, если для них выполнено условие $AB = BA$.

Свойства операции умножения матриц:

а) ассоциативность: если определено одно из произведений $(AB)C$ или $A(BC)$, то определено также и второе произведение, и имеет место выше приведённое равенство $(AB)C = A(BC) = A \cdot B \cdot C$;

б) дистрибутивность: если C — такая матрица, что определено произведение AC, то определены произведения BC и $(A+B)C$ и верно равенство $(A+B)C = AC + BC$ (A и B — матрицы одинаковых размеров);

в) дистрибутивность: если A — такая матрица, что определено произведение AB, то определены произведения AC и $A(B+C)$ и верно равенство $A(B+C) = AB + AC$ (B и C — матрицы одинаковых размеров);

г) $A_{m \times n} \cdot E_n = E_m \cdot A_{m \times n} = A_{m \times n}$.

§ 4. Транспонированная матрица

Транспонированием матрицы называется такое её преобразование, при котором строки этой матрицы становятся её столбцами с теми же номерами.

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},\quad A^T_{n\times m}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица обозначается A' или A^T.

Свойства операции транспонирования:

1. $B^T A^T = (AB)^T$;
2. $(A^T)^T = A$.

Если $A^T = A$, т.е. $a_{ij} = a_{ji}$, то матрица называется *симметрической*.

Пример1.11. Транспонируйте матрицу $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$.

$$A^T=\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

§ 5. Обратная матрица

Матрица A^{-1} называется *обратной* для квадратной матрицы A, если $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где E — единичная матрица.

Любой квадратной матрице A можно поставить в соответствие определитель, который обозначается $\det A$.

Невырожденной называется матрица A, если $\det A\neq 0$. Если матрица невырожденная, то существует единственная обратная ей матрица A^{-1}, причем,

$$\boxed{A^{-1}=\frac{\Pi}{\det A}},$$

где $\Pi=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ — присоединенная матрица, A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

> Для составления матрицы Π следует заменить элементы матрицы A соответствующими алгебраическими дополнениями и транспонировать полученную матрицу.

Свойства обратной матрицы:

1. $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.
2. $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$.
3. $\left(A^{T}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{T}$

Пример 1.12. Найдите матрицу, обратную к данной $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Выполним следующие шаги:

1) Найдём $\det A$: $\det A=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=(-1)\cdot 3-2\cdot 1=-3-2=-5\neq 0$.

Так как $\det A\neq 0$, то матрица A^{-1} существует.

2) Найдём алгебраические дополнения ко всем элементам матрицы A:

$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot|3|=3$; $A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot|1|=-1$;

$A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot|2|=-2$; $A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot|-1|=-1$.

3) Запишем матрицу Π:

$$\Pi=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}^{T}=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

4) Найдём матрицу A^{-1}:

$$A^{-1}=\frac{1}{-5}\begin{pmatrix}3 & -2\\ -1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3/5 & 2/5\\ 1/5 & 1/5\end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$

§ 6. Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы

Рассмотрим матрицу $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$.

Выделим в матрице k строк и k столбцов, где k — число меньшее или равное наименьшему из чисел m и n.

Определителем, порожденным матрицей A называется определитель порядка k, составленный из элементов, стоящих на пересечении k строк и k столбцов.

Например, пусть $k=2$, $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & -1\\ 3 & 5 & 0 & -2\\ 2 & 1 & -3 & 1\end{pmatrix}$. Тогда $\begin{vmatrix}3 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix}3 & 5\\ 2 & 1\end{vmatrix}$ — определители второго порядка, порожденные матрицей A.

Пусть $k=3$. Тогда $\begin{vmatrix}1 & 3 & -1\\ 3 & 5 & -2\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}$ — определитель третьего порядка, порожденный данной матрицей.

Рангом матрицы называется наибольший из порядков определителей, отличных от нуля, порожденных данной матрицей. Обозначается $r(A)$ или $rang(A)$.

Ясно, что если равны нулю все определители порядка k, порожденные данной матрицей, то ранг матрицы меньше k. Действительно, по определению, каждый из определителей $(k+1)$-го порядка выражается линейно через определители k-го порядка. Значит, все определители $(k+1)$-го порядка равны нулю. Аналогично доказывается, что равны нулю все определители $(k+2)$-го и более высоких порядков. Отсюда следует, что ранг матрицы меньше k.

Теорема. Ранг матрицы не изменится, если:

а) все строки заменить столбцами;

б) поменять местами две строки (два столбца);

в) умножить каждый элемент строки (столбца) на один и тот же множитель, отличный от нуля;

г) прибавить к элементам одной строки (столбца) соответствующие элементы другой строки (другого столбца), умноженные на один и тот же множитель.

Преобразования а) — г) называются *элементарными*.

Эквивалентными называются матрицы A и B, если одна из другой получаются с помощью элементарных преобразований. Эквивалентность матриц A и B обозначают следующим образом: $A \sim B$.

Пример 1.13. Определите ранг матрицы A: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & 4\\ 2 & -2 & 4 & 3\\ 3 & -3 & 3 & 2\end{pmatrix}$.

Приведём матрицу к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & 4\\ 2 & -2 & 4 & 3\\ 3 & -3 & 3 & 2\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ II-2\cdot I\\ III-3\cdot I\end{matrix} \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & 4\\ 0 & 0 & -6 & -5\\ 0 & 0 & -12 & -10\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ \\ III-2\cdot II\end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & -1 & 5 & 4\\ 0 & 0 & -6 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix}5 & 4\\ -6 & -5\end{vmatrix}=-25-(-24)=-25+24=-1\neq 0, \text{ т.е. } rang\,(A)=2.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1 Понятие определителя первого, второго, третьего порядков.

2. Определитель n-го порядка.
3. Правила нахождения определителей второго, третьего, n-го порядков.
4. Свойства определителей.
5. Понятие матрицы.
6. Виды матриц.
7. Операции сложения, умножения матрицы на число, умножения матриц.
8. Понятие транспонирования матрицы.
9. Понятие обратной матрицы и схема её нахождения.
10. Понятие ранга матрицы.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Элемент a_{31} определителя $\begin{vmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 \\ 7 & 1 & 6 \end{vmatrix}$ равен:

   а) 0; б) 3; в) 7; г) 1.

2. Минор элемента a_{12} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$ равен:

   а) 2; б) 4; в) 3; г) 1.

3. Определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix}$ равен:

   а) 10; б) 8; в) 0; г) 1.

4. Алгебраическое дополнение элемента a_{21} определителя $\begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ равно:

   а) 3; б) 7; в) 2; г) -7.

5. Определителем порядка n называется:

   а) таблица чисел; б) число; в) число, записанное в виде квадратной таблицы, в которой n строк и n столбцов; г) n чисел.

6. Единичной матрицей является:

   а) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

7. Сумма $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$ равна:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & -1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 0 & 20 \end{pmatrix}$.

8. Обратной матрицей к матрице $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ является:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

9. Если $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 6 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$, то k равно:

а) -1; б) 1; в) 0; г) 2.

10. Обратная матрица не обладает свойством:

а) $(A \cdot B)^{-1} = A^{-1} \cdot B^{-1}$; б) $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$; в) $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$; г) $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Определители квадратных матриц

Задача 1.1. Найдите минор M_{31} элемента a_{31} и алгебраическое дополнение A_{23} элемента a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$.

Ответ: $M_{31} = -7$; $A_{23} = -19$.

Задача 1.2. Вычислите определитель 2-го порядка: $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ -\cos\alpha & \sin\alpha \end{vmatrix}$.

Ответ: 1.

Задача 1.3. Вычислите определитель третьего порядка:

а) $\begin{vmatrix} 4 & 3 & -5 \\ 2 & 0 & -1 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; б) $\begin{vmatrix} 6 & 4 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 1 \end{vmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$; г) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 3 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Ответ: а) -12; б) 0; в) -15; г) -61.

Задача 1.4. Найдите неизвестное число x из уравнения: $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 \\ x & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$.

Ответ: $x = 2$ или $x = 3$.

Задача 1.5. Найдите определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 3 & 9 & 4 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & -3 & 1 \end{vmatrix}$.

Ответ: 549.

Матрицы. Основные операции над матрицами

Задача 1.6. Найдите $2A - B$, если $A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$.

Ответ: $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$.

Задача 1.7. Найдите произведение AB матриц

$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Ответ: $\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 12 & 16 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 1.8. Проверьте, выполняются ли равенства $AB = BA$, $(AB)C = A(BC)$ для матриц:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ответ: равенства верны.

Транспонирование матриц

Задача 1.9. Вычислите $AB+2C^T$, если

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 4\\ 2 & 1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 3 & 4\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}-2 & 4 & 6\\ 5 & 7 & 3\end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix}-2 & 16\\ 20 & 30\\ 17 & 6\end{pmatrix}$.

Обратная матрица

Задача 1.10. Проверьте, что матрица $B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -1 & -2\end{pmatrix}$ является обратной к матрице $A=\begin{pmatrix}2 & 5\\ -1 & -3\end{pmatrix}$.

Задача 1.11. Найдите A^{-1} для матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ -1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & 1 & -2\\ -2 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Ранг матрицы. Элементарные преобразования матрицы

Задача 1.12. Приведите к ступенчатому виду матрицы $A=\begin{pmatrix}-2 & 2 & 1\\ -7 & 3 & 3\\ 5 & 1 & -2\end{pmatrix}$,

$B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 9\\ 1 & 3 & 2 & 5\\ 1 & 9 & 2 & 6\end{pmatrix}$. Найдите их ранги.

Ответ: $rang\,(A)=3$; $rang\,(B)=2$.

МОДУЛЬ 2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

§ 1. Теорема Кронекера-Капелли

Пусть задана система из m линейных уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, ..., x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \qquad (1)$$

где числа a_{ij} называются *коэффициентами системы*,

а числа $b_1, ..., b_m$ — *свободными членами*.

Решением системы (1) называется такой набор чисел $(c_1, c_2, ..., c_n)$, что при его подстановке в систему вместо соответствующих неизвестных (c_1 вместо $x_1, \dots, c_n$ вместо x_n) каждое из уравнений системы обращается в тождество.

Совместной называется система, которая имеет хотя бы одно решение.

Несовместной называется система, которая не имеет ни одно го решения.

Определённой называется система, которая имеет единственное решение.

Неопределённой называется система, которая имеет более одного решения.

Однородной называется система, если $b_1 = b_2 = ... = b_m = 0$. В противном случае система называется *неоднородной*.

Матрицей системы называется матрица, составленная из коэффициентов системы:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Расширенной матрицей системы называется матрица

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы:

$$\boxed{rang(A)=rang(A\,|\,B)}$$

Исследовать систему линейных уравнений означает определить, совместна она или нет, а для совместной системы — выяснить, определённа она или нет. При этом возможны три варианта:

1) Если $rang(A)<rang(A\,|\,B)$, то система несовместна. **(*)**

2) Если $rang(A)=rang(A\,|\,B)=n$, где n — число неизвестных, то система совместна и определённа. **(**)**

3) Если $rang(A)=rang(A\,|\,B)<n$, то система совместна и неопределённа. **(***)**

§ 2. Решение систем линейных уравнений

<u>Метод Крамера</u>

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме: $\boxed{AX=B}$, где $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ — матрица системы,

$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ — столбец неизвестных, $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ — столбец свободных членов.

Пусть Δ — определитель матрицы A и пусть $\Delta \neq 0$, т.е.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

<u>Правило Крамера.</u> Если определитель системы (1) $\Delta \neq 0$, то эта система совместна и определённа, т.е. имеет единственное решение, получаемое по формулам:

$$\boxed{x_k = \frac{\Delta_k}{\Delta}}, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

где Δ_k — определитель, получаемый из определителя Δ заменой k-го столбца на столбец свободных членов.

Пример 2.1. Решите систему уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$$

Найдём определитель матрицы системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 = 3$.

Т.к. $\Delta \neq 0$, то решение системы существует и единственно.

Найдём определитель Δ_1. В определитель Δ вместо первого столбца $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ подставим столбец свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 - (-1) \cdot 7 = 6.$$

Определитель Δ_2 получается из Δ подстановкой столбца свободных членов $\begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ вместо второго столбца $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 1 \cdot 7 - (-1) \cdot 2 = 9.$$

Отсюда получим решение системы уравнений:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{6}{3} = 2; \quad y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{9}{3} = 3.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2, \\ y = 3. \end{cases}$

Матричный метод

Пусть система из n линейных уравнений с n неизвестными записана в матричной форме: $\boxed{AX = B}$, Тогда, если определитель $\Delta \neq 0$, то система совместна и определённа, её решение задаётся формулой:

$$\boxed{X = A^{-1} \cdot B}$$

Пример 2.2. Решите систему уравнений примера 2.1 с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} x - y = -1, \\ 2x + y = 7. \end{cases}$.

1) Т.к. $\det A = \Delta = 3 \neq 0$, то решение системы существует и единственно.

2) Найдём алгебраические дополнения к элементам матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$:

$$A_{11} = 1, \; A_{12} = -2, \; A_{21} = -(-1) = 1, \; A_{22} = 1.$$

3) Найдём присоединённую матрицу: $\Pi = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$.

4) Найдём матрицу A^{-1}: $A^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$.

5) Найдём решение системы уравнений:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 7 \\ -\frac{2}{3}\cdot(-1) + \frac{1}{3}\cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases}$.

Пример 2.3. Решите систему уравнений по формулам Крамера и с помощью обратной матрицы: $\begin{cases} 2x - 4y + z = 3, \\ x - 5y + 3z = -1, \\ x - y + z = 1. \end{cases}$

I способ, метод Крамера.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-5 + 3) + 4 \cdot (1 - 3) + 1 \cdot (-1 + 5) = -4 - 8 + 4 = -8 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot (-5 + 3) + 4 \cdot (-1 - 3) + 1 \cdot (1 + 5) = -6 - 16 + 6 = -16.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-1 - 3) - 3 \cdot (1 - 3) + 1 \cdot (1 + 1) = -8 + 6 + 2 = 0.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -5 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - (-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot (-5 - 1) + 4 \cdot (1 + 1) + 3 \cdot (-1 + 5) = -12 + 8 + 12 = 8.$$

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2, \; y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{0}{-8} = 0, \; z = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{8}{-8} = -1.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \\ z = -1. \end{cases}$

II способ, метод обратной матрицы.

1) $\det A = \Delta = -8 \neq 0$.

2) $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = -6.$$

3) Присоединенная матрица:

$$\Pi = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ -7 & -5 & -6 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix}.$$

4) Обратная матрица:

$$A^{-1} = \frac{1}{-8}\begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & -5 \\ 4 & -2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/8 & -3/8 & 7/8 \\ -2/8 & -1/8 & 5/8 \\ -4/8 & 2/8 & 6/8 \end{pmatrix}.$$

5) Решение системы:

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} 2/8 & -3/8 & 7/8 \\ -2/8 & -1/8 & 5/8 \\ -4/8 & 2/8 & 6/8 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6/8 + 3/8 + 7/8 \\ -6/8 + 1/8 + 5/8 \\ -12/8 - 2/8 + 6/8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \\ z = -1. \end{cases}$

Метод Гаусса решения систем линейных уравнений.

Процесс решения по методу Гаусса состоит из двух этапов.

На первом этапе система (1) приводится к одной из следующих систем:

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad a_{33}x_3 + \ldots + a_{3n}x_n = b_3, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2)$$

где $a_{ii} \neq 0$, $i = 1,\ldots, n$.

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1k}x_k + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2k}x_k + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \qquad (3)$$

где $k < n$.

- $$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad 0 \cdot x_n = b_k, \end{cases} \qquad (4)$$

где $k \leq n$.

На втором этапе:

- система (2) имеет единственное решение, значение x_n находится из последнего уравнения, значение x_{n-1} — из предпоследнего,…,значение x_1 — из первого;
- система (3) имеет бесконечное множество решений;
- система (4) несовместна, так как никакие значения неизвестных не могут удовлетворять её последнему уравнению.

Метод Гаусса. применим к любой (!) системе линейных уравнений.

шем метод Гаусса подробнее на примере.

Пример 2.4. Исследуйте систему линейных уравнений примера 2.1; и если она совместна, то найдите её решение: $\begin{cases} x-y=-1, \\ 2x+y=7. \end{cases}$

I. Исследуем систему на совместность. Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II-2\cdot I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 9 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $rang(A)=rang(A\,|\,B)=n=2$. Значит, согласно (**) (см. §1), система совместна и определённа, т.е. существует единственное решение.

II. Найдём решение системы. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице: $\begin{cases} x-y=-1, \\ 3y=9. \end{cases}$ Имеем систему вида (2). Из второго уравнения $y=3$. Подставляя это значение в первое уравнение, получим: $x-3=-1 \Rightarrow x=2$.

Ответ: $\begin{cases} x=2, \\ y=3. \end{cases}$

Пример 2.5. Исследуйте систему линейных уравнений примера 2.3, и если она совместна, то найдите её решение: $\begin{cases} 2x-4y+z=3, \\ x-5y+3z=-1, \\ x-y+z=1. \end{cases}$

I. Исследуем систему на совместность. Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II\cdot 2-I \\ III\cdot 2-I \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -5 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ \\ III\cdot 3+II \end{array} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -4 & 1 & 3 \\ 0 & -6 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 8 & -8 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $rang(A) = rang(A\,|\,B) = n = 3$. Значит, согласно (**) (см. §1), система совместна и определённа, т.е. существует единственное решение.

II. Найдём решение системы. Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице: $\begin{cases} 2x - 4y + \ \ z = 3, \\ \quad\ - 6y + 5z = -5, \\ \qquad\qquad\ \ 8z = -8. \end{cases}$

Имеем систему вида (2). Из третьего уравнения $z = -1$.

Подставляя это значение во второе уравнение, получим: $-6y + 5\cdot(-1) = -5 \Rightarrow -6y = 0 \Rightarrow y = 0$.

Подставляя найденные значения y, z в первое уравнение, получим: $2x - 4\cdot 0 - 1 = 3 \Rightarrow 2x = 4 \Rightarrow x = 2$.

Ответ: $\begin{cases} x = 2, \\ y = 0, \\ z = -1. \end{cases}$

Пример 2.6. Исследуйте систему линейных уравнений, и если она совместна, то найдите её решение: $\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$

I. Исследуем систему на совместность. Запишем расширенную матрицу системы и приведём её к ступенчатому виду с помощью элементарных преобразований:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 & 2 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ II-2\cdot I \\ III-3\cdot I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & -10 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ III-2\cdot II \end{array} \sim\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Очевидно, что $rang(A) = rang(A \mid B) = 2 < 3 = n$. Значит, согласно (***) (см. §1), система совместна и неопределённа, т.е. имеет бесконечно много решений.

<u>II. Найдём решение системы.</u> Запишем систему уравнений, соответствующую полученной расширенной матрице:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 0, \\ \qquad\quad\; -6x_3 - 5x_4 = 0. \end{cases}$$

Имеем систему вида (3). Выразим x_3 из второго уравнения и подставим полученное выражение в первое уравнение:

$$x_3 = -\frac{5}{6}x_4 \Rightarrow x_1 - x_2 + 5\cdot\left(-\frac{5}{6}\right)x_4 + 4x_4 = 0 \Rightarrow x_1 - x_2 - \frac{1}{6}x_4 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = x_2 + \frac{1}{6}x_4.$$

Следовательно, исходная система имеет решение $\begin{cases} x_3 = -\dfrac{5}{6}x_4, \\ x_1 = x_2 + \dfrac{1}{6}x_4, \end{cases}$ где x_2, x_4 могут принимать любые действительные значения.

Ответ: $\begin{cases} x_3 = -\dfrac{5}{6}x_4, \\ x_1 = x_2 + \dfrac{1}{6}x_4. \end{cases}$

Продукт	Сырье	
	I	II

Пример 2.7. Цех выпускает два вида продукции A_1 и A_2, полностью используя для их производства сырье вида I и вида II. В таблице указано число единиц сырья I и II, необходимых для производства одной единицы продукции A_1 и A_2, а также имеющиеся запасы сырья.

A_1	3	1,5
A_2	2	4
Запасы	60	75

Может ли цех удовлетворить заказ трёх торговых организаций:

Продукт	Заказ I организации	Заказ II организации	Заказ III организации
A_1	2	3	3
A_2	5	6	4

Пусть x_1 и x_2 — количество единиц продукции A_1 и A_2 соответственно, которое может выпустить цех при данных условиях производства. Тогда данные первой таблицы можно представить системой уравнений: $\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 60, \\ 1{,}5x_1 + 4x_2 = 75. \end{cases}$

Решим её методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 60 \\ 1{,}5 & 4 & 75 \end{array}\right) \begin{array}{c} \\ II \cdot 2 - I \end{array} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 2 & 60 \\ 0 & 6 & 90 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 60, \\ 6x_2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2 \cdot 15 = 60, \\ x_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 10, \\ x_2 = 15. \end{cases}$$

Т.е. цех произведёт 10 единиц продукта A_1, 15 единиц — продукта A_2.

Выясним, сможет ли цех выполнить заказ.

Для выполнения заказа нужно $2+3+3=8$ единиц продукта A_1 и $5+6+4=15$ единиц продукта A_2. Следовательно, цех может выполнить заказ.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие системы m линейных уравнений с n неизвестными.
2. Матричный способ решения системы уравнений (метод обратной матрицы).
3. Метод Крамера решения систем уравнений.

4. Метод Гаусса решения систем уравнений.
5. Понятие однородных систем уравнений.
6. Теорема Кронекера-Капелли.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. В какой системе линейных уравнений применим метод обратной матрицы:
   а) если в системе число уравнений равно числу неизвестных; б) к любой системе; в) если определитель матрицы системы равен нулю; г) если в системе число уравнений равно числу неизвестных и определитель матрицы системы не равен нулю.
2. К какой системе линейных уравнений применимо правило Крамера:
   а) если матрица системы не является квадратной; б) если матрица системы является квадратной и её определитель не равен нулю; в) к любой системе; г) если в системе число уравнений равно числу неизвестных.
3. При каких условиях однородная система линейных уравнений имеет нулевое решение:
   а) если определитель матрицы системы равен нулю; б) если определитель матрицы системы не равен нулю; в) если количество неизвестных больше числа уравнений в системе; г) любая однородная система линейных уравнений имеет нулевое решение.
4. Решением системы $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 = -1, \\ x_2 - x_3 = -1, \\ 2x_3 = 4 \end{cases}$ является:

   а) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \\ x_3 = 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 2; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x_1 = 1, \\ x_2 = 0, \\ x_3 = 2; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = -1, \\ x_3 = 2. \end{cases}$
5. В матричной форме система линейных уравнений $\begin{cases} 3x_1 + x_3 = 2, \\ x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases}$ имеет вид:

а) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Расширенной матрицей системы линейных уравнений $\begin{cases} x_1 \phantom{{}+2x_2} + x_3 = 2, \\ \phantom{x_1+2{}} x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$

является:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; б) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right)$; в) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 2 & 1 & x_3 \end{array}\right)$;

г) $\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 1 & x_1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & x_2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & x_3 & 4 \end{array}\right)$.

7. Матрицей системы линейных уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} = 3, \\ \phantom{2x_1+{}} x_2 - x_3 = 1, \\ x_1 \phantom{{}+x_2} + 4x_3 = 0 \end{cases}$ является матрица:

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & x_1 \\ 1 & -1 & x_2 \\ 1 & 4 & x_3 \end{pmatrix}$;

г) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

8. Система линейных уравнений $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 0, \\ 2x_3 + x_4 = 1, \\ 2x_4 = 4, \\ 0 \cdot x_4 = 8 \end{cases}$

а) имеет единственное решение; б) не имеет решения; в) имеет нулевое решение; г) имеет бесконечно много решений.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 2.1.. Решите систему $\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 8, \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 19, \\ 7x_1 + 8x_2 = 1 \end{cases}$ методом Крамера.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$.

Задача 2.2. Запишите систему линейных уравнений $AX = B$ в виде $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$ если $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -2 & 0 \\ 1 & 7 & 0 & 8 \\ 0 & -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Задача 2.3. Решите систему линейных уравнений, заданную расширенной матрицей $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 3 \end{array}\right)$. Ответ: $(-6;-3;4)$.

Задача 2.4. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - 7x_4 = 5, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 7, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 10. \end{cases}$$
Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2{,}5 - 5x_4, \\ x_2 = 8, \\ x_3 = 8 + 17x_4. \end{cases}$

Задача 2.5. Решите систему уравнений матричным методом и методом Гаусса.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2, \\ 2x_1 + 6x_2 + 4x_3 = -6, \\ 3x_1 + 10x_2 + 8x_3 = -8. \end{cases}$$
Ответ: $\begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 2. \end{cases}$

Задача 2.6. Для системы уравнений $\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3, \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7, \\ 10x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 16 \end{cases}$ найти общее и два частных решения.

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_3 = -8 - 4x_2 \\ x_4 = 1 \end{cases}$ — общее решение, $(3;0;-8;1)$, $(3;-1;-4;1)$ — частные решения.

МОДУЛЬ 3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Векторы. Операции над ними.

Вектором называется направленный отрезок. Вектор с началом в точке A и концом в точке B обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ (или одной буквой $\vec{a}$, $\vec{b}$, …).

Модулем (длиной) вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$, $|\vec{a}|$.

Единичным называется вектор, длина которого равна единице. Единичный вектор обозначают $\vec{e}$.

Нулевым называется вектор, длина которого равна нулю. Нулевой вектор обозначается $\vec{0}$.

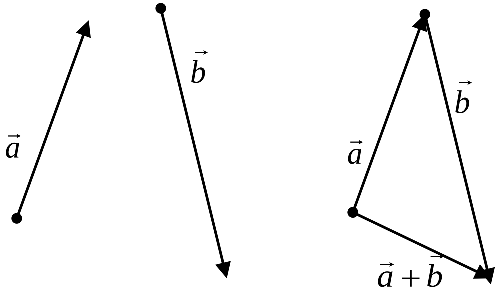
Коллинеарными называются векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых; записывают $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

Компланарными называются три (и более) вектора, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Равными называются два коллинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ ($\vec{a} = \vec{b}$), если они одинаково направлены и имеют равные длины.

Сложение векторов.

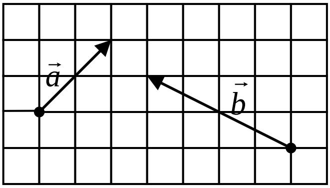
Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, соединяющий начало вектора $\vec{a}$ с концом вектора $\vec{b}$, отложенного от конца вектора $\vec{a}$.



Произведение вектора на число.

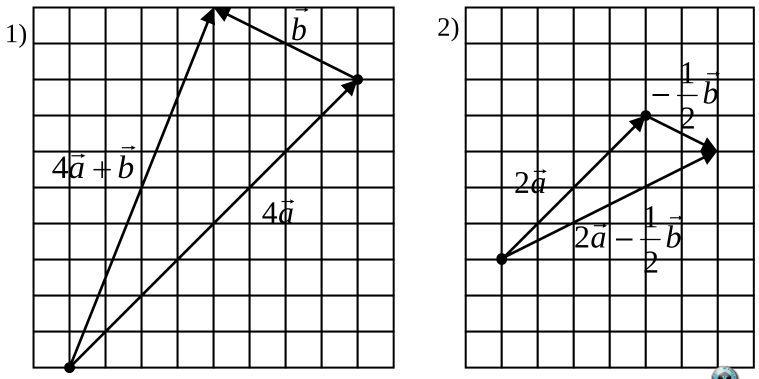
Произведением вектора $\vec{a} \neq 0$ *на число* $\lambda \neq 0$ называется вектор, который имеет длину $|\lambda| \cdot |\vec{a}|$ и который имеет направление вектора $\vec{a}$ в случае $\lambda > 0$ и противоположное направление в случае $\lambda < 0$.

Пример 3.1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



Постройте векторы: 1) $4\vec{a} + \vec{b}$;

2) $2\vec{a} - \dfrac{1}{2}\vec{b}$.



§ 2. Декартовы прямоугольные координаты вектора. Длина вектора.

Пусть вектор $\overrightarrow{AB}$ составляет угол φ с осью l.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось l называется число, равное длине вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ (рис.3.1), взятой со знаком «плюс», если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси и со знаком «минус» в противном случае.

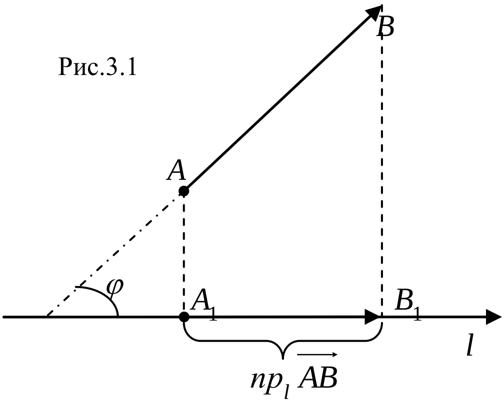


Рис.3.1

Проекцию вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось l можно вычислить по формуле:

$$\boxed{np_l\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi}.$$

Декартовыми прямоугольными координатами x, y, z вектора $\vec{a}$ называются его проекции на соответствующие координатные оси Ox, Oy, Oz.

Вектор $\vec{a}$ с координатами x, y, z записывают в виде $\vec{a} = (x; y; z)$ или $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, где $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ — единичные векторы координатных осей Ox, Oy, Oz соответственно. Длина вектора $\vec{a}$ определяется по формуле:

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Если вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ задан точками $A(x_1; y_1; z_1)$ и $B(x_2; y_2; z_2)$, то его координаты вычисляются по формулам:

$$\boxed{\vec{a} = \overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1)}.$$

Пример 3.2. Даны две точки $A_1(3;-4;1)$ и $A_2(4;6;-3)$. Найдите координаты и длину вектора $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2}$.

По условию задачи $x_1 = 3$, $y_1 = -4$, $z_1 = 1$, $x_2 = 4$, $y_2 = 6$, $z_2 = -3$. Значит, $\vec{a} = \overrightarrow{A_1A_2} = (4-3; 6-(-4); -3-1) = (1;10;-4)$.

$$|\vec{a}| = |\overrightarrow{A_1A_2}| = \sqrt{1^2 + 10^2 + (-4)^2} = \sqrt{1+100+16} = \sqrt{117}.$$

Пример 3.3. Даны два вектора $\vec{a} = (2;-1;4)$ и $\vec{b} = (0;-1;2)$. Найдите координаты и длину вектора $\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b}$.

$2\vec{a} = (4;-2;8)$; $-3\vec{b} = (0;3;-6)$;

$\vec{c} = 2\vec{a} - 3\vec{b} = (4+0; -2+3; 8-6) = (4;1;2)$;

$|\vec{c}| = \sqrt{4^2 + 1^2 + 2^2} = \sqrt{16+1+4} = \sqrt{21}$.

Совместим параллельным переносом начало некоторого вектора $\vec{u}$ с началом координат прямоугольной системы координат $Oxyz$. Пусть α, β, γ — углы, которые образует вектор $\vec{u} = (x, y, z)$ с осями координат Ox, Oy, Oz соответственно (рис.3.2). Направление вектора $\vec{u}$ определяется с помощью направляющих косинусов $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$, для которых справедливы равенства:

$$\boxed{\cos\alpha = \frac{x}{|\vec{u}|};\cos\beta = \frac{y}{|\vec{u}|};\cos\gamma = \frac{z}{|\vec{u}|}},$$

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}.$$

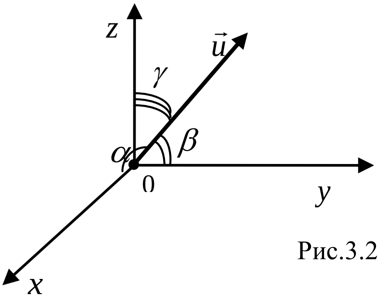


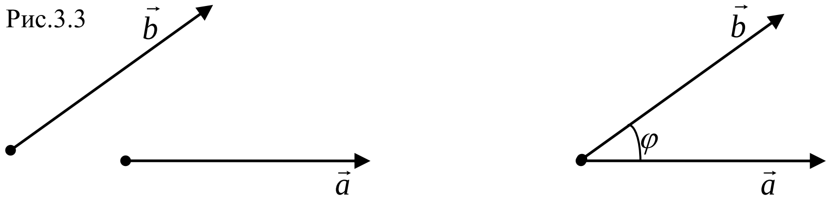
Рис.3.2

§ 3. Скалярное произведение векторов.

<u>Скалярным произведением</u> двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними (см. рис.3.3):

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\varphi}.$$

Рис.3.3



Из рис. 3.3 видно, что $|\vec{a}|\cos\varphi = np_{\vec{b}}\vec{a}$, $|\vec{b}|\cos\varphi = np_{\vec{a}}\vec{b}$.

Поэтому $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\cdot np_{\vec{a}}\vec{b}}$ или $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{b}|\cdot np_{\vec{b}}\vec{a}}$. (*)

Свойства скалярного произведения.

1. $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$ — переместительный закон.
2. $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}$ — распределительный закон.
3. Если $\vec{a}\parallel\vec{b}$ то $\vec{a}\cdot\vec{b} = \pm|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.

4. $\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos 90^0=0 \Leftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}}$ (или $\vec{a}=0$, или $\vec{b}=\vec{0}$).

В частности, скалярное произведение единичных векторов (ортов) удовлетворяет равенствам:

$$\vec{i}\cdot\vec{j}=0,\quad \vec{j}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{k}=0,\quad \vec{i}\cdot\vec{i}=1,\quad \vec{j}\cdot\vec{j}=1,\quad \vec{k}\cdot\vec{k}=1.$$

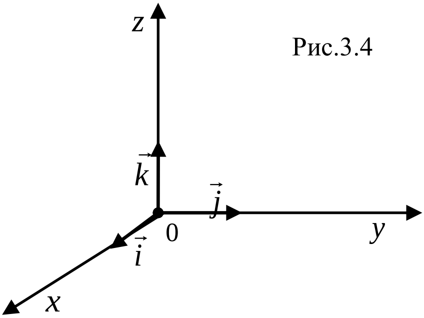


Рис.3.4

5. Если векторы заданы координатами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$ или $\vec{a}=x_1\vec{i}+y_1\vec{j}+z_1\vec{k}$, $\vec{b}=x_2\vec{i}+y_2\vec{j}+z_2\vec{k}$, то

$$\boxed{\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}.$$

6. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется по формуле:

$$\boxed{cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}=\frac{x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2}{\sqrt{x_1^{\;2}+y_1^{\;2}+z_1^{\;2}}\cdot\sqrt{x_2^{\;2}+y_2^{\;2}+z_2^{\;2}}}}.$$

7. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты пропорциональны, т.е.:

$$\boxed{\vec{a}\parallel\vec{b}\Leftrightarrow\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}}.$$

8. Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}\neq 0$ и $\vec{b}\neq 0$:

$$\boxed{\vec{a}\perp\vec{b}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0}.$$

Пример 3.4. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют угол $\varphi = \dfrac{2}{3}\pi$. Зная, что $|\vec{a}| = 10$ и $|\vec{b}| = 2$, вычислите $(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b})$.

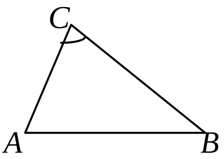
$$(\vec{a} + 2\vec{b}) \cdot (3\vec{a} - \vec{b}) = 3\vec{a}^{\,2} + 5\vec{a}\vec{b} - 2\vec{b}^{\,2} =$$

$$= 3|\vec{a}|^2 + 5|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|\cos\varphi - 2|\vec{b}|^2 =$$

$$= 3 \cdot 100 + 5 \cdot 10 \cdot 2\cos\frac{2}{3}\pi - 2 \cdot 4 = 300 - 50 - 8 = 242.$$

Пример 3.5. Даны вершины треугольника $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$ и $C(0;0;5)$. Найдите: 1) внутренний угол при вершине C;

2) $np_{\overrightarrow{CA}}\overrightarrow{CB}$.



Для нахождения угла C найдём векторы $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{CA}$.

$\overrightarrow{CB} = (1-0;1-0;1-5) = (1;1;-4)$;

$\overrightarrow{CA} = (2-0;-1-0;3-5) = (2;-1;-2)$.

Тогда

$$\cos\angle C = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CB}| \cdot |\overrightarrow{CA}|} = \frac{1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + (-4) \cdot (-2)}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-4)^2} \cdot \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} =$$

$$= \frac{2-1+8}{\sqrt{18} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} = \frac{9}{\sqrt{2} \cdot 9} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ Т.е. } \angle C = \frac{\pi}{4}.$$

Согласно формуле (*)

$$np_{\overrightarrow{CA}}\overrightarrow{CB} = \frac{\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{CA}}{|\overrightarrow{CA}|} = \frac{9}{\sqrt{9}} = \frac{9}{3} = 3.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

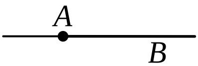
1. Понятие вектора.
2. Понятие единичного и нулевого вектора.
3. Модуль вектора, формула расстояния между двумя точками.

4. Понятие коллинеарности векторов.
5. Линейные операции над векторами.
6. Понятие проекции вектора на ось.
7. Скалярное произведение векторов.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

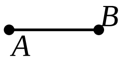
1. На каком рисунке изображён вектор $\overrightarrow{AB}$:

а) 

; б) 

; в) 

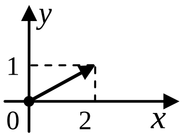
;

г) 

.

2. Два вектора называются коллинеарными, если:
а) они лежат в одной плоскости; б) они лежат в параллельных плоскостях; в) они лежат на параллельных прямых; г) они не лежат на параллельных прямых.

3. Укажите координату y вектора $\vec{a}$, изображённого на рисунке



а) 1; б) 2; в) $\sqrt{5}$; г) -1.

4. Какая формула задаёт длину вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$:

а) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1 + a_2 + a_3}$; б) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 - a_2{}^2 - a_3{}^2}$;

в) $|\vec{a}| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$; г) $|\vec{a}| = \sqrt{(a_2 - a_1)^2 + (a_3 - a_1)^2}$.

5. Найдите длину диагонали AC четырёхугольника $ABCD$, если $A(-1;2;4)$, $B(2;3;1)$, $C(-1;4;-1)$, $D(1;-1;0)$:

а) $\sqrt{30}$; б) $\sqrt{31}$; в) $\sqrt{29}$; г) $\sqrt{28}$.

6. Составьте вектор $\vec{c} = 2\vec{a} + \vec{b}$, если $\vec{a} = (1;0;3)$, $\vec{b} = (-1;4;0)$.

а) $\vec{c} = (0;8;6)$; б) $\vec{c} = (1;4;6)$; в) $\vec{c} = (3;0;6)$; г) $\vec{c} = (0;4;6)$.

7. Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется:

а) число $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$, где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины векторов; б) число $|\vec{a}|+|\vec{b}|$, где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины векторов $\vec{c}=(1;4;6)$; в) вектор $\vec{a}\cdot\vec{b}$; г) число $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\alpha$, где $|\vec{a}|$ и $|\vec{b}|$ — длины векторов, α — угол между векторами.

8. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{m}-\vec{n}$, если $\vec{m}=(1;3;-1)$, $\vec{n}=(2;-1;4)$.

   а) -12; б) 20; в) -10; г) 18.

9. Какими являются векторы $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{QP}$, если $M(-1;4;0)$, $N(1;2;2)$, $Q(-1;1;1)$, $P(-3;3;-1)$:

   а) ортогональными; б) коллинеарными; в) компланарными; г) равными.

10. Какие среди векторов $\vec{a}=(-1;4;5)$, $\vec{b}=(1;2;-1)$, $\vec{c}=(-1;1;4)$, $\vec{d}=(-1;1;1)$ ортогональны:

    а) $\vec{b}$ и $\vec{d}$; б) $\vec{a}$ и $\vec{b}$; в) $\vec{a}$ и $\vec{c}$; г) $\vec{a}$ и $\vec{d}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 3.1. Найдите координаты вектора $4\vec{a}-5\vec{b}+7\vec{c}$, если $\vec{a}=(-1;4;3)$, $\vec{b}=(3;7;10)$, $\vec{c}=(5;6;7)$.

Ответ: $(16;23;11)$.

Задача 3.2. Фирма продаёт изделия по ценам, которые характеризуются вектором $\vec{p}=(10;21;15;17)$ а объёмы продаж по регионам определяются вектором $\vec{q}=(300;150;100;180)$. Найдите прибыль фирмы, если издержки на реализацию составляют 1000 ден.ед.

Ответ: 9710.

Задача 3.3. Определите внутренний угол при вершине A в треугольнике ABC с вершинами $A(2;-1;3)$, $B(1;1;1)$, $C(0;0;5)$.

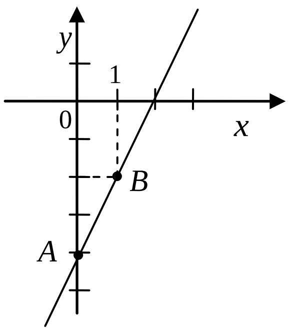
Ответ: 90°.

МОДУЛЬ 4.
АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

§ 1. Прямая на плоскости. Различные виды уравнения прямой.

Теорема. Каждая *прямая* на плоскости Oxy определяется линейным *уравнением первой степени с двумя неизвестными*. Обратно: каждое линейное уравнение первого порядка с двумя неизвестными определяет некоторую прямую на плоскости.

Пример 4.1. Постройте прямую, заданную уравнением $2x-y-4=0$.



Для построения прямой достаточно знать координаты двух её произвольных точек. Полагая в уравнении прямой, например, $x=0$, получим $y=-4$. Имеем точку $A(0;-4)$. Полагая $x=1$, получим $y=-2$. Отсюда вторая точка $B(1;-2)$. Результаты вычислений можно занести в таблицу:

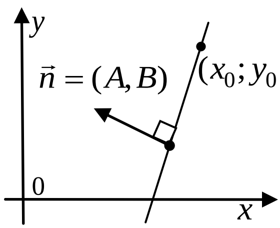
x	0	1
y	-4	-2

Осталось построить точки и провести через них прямую (см. рисунок).

1. *Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором*:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0}, \qquad (1)$$

где $\vec{n}=(A,B)$ — нормальный вектор прямой, $(x_0;y_0)$ — координаты данной точки.



Заметим, что $\vec{n}=(A,B)$ — нормальный вектор прямой ($\vec{n}$ перпендикулярен прямой).

2. ***Общее уравнение прямой:***

$$\boxed{Ax+By+C=0}, \qquad (2)$$

где A, B, C — постоянные коэффициенты, причём A и B одновременно не обращаются в нуль $A^2+B^2\neq 0$.

Частные случаи этого уравнения:

$Ax+By=0$ $(C=0)$ — прямая проходит через начало координат;

$Ax+C=0$ $(B=0)$ — прямая параллельна оси Oy;

$By+C=0$ $(A=0)$ — прямая параллельна оси Ox;

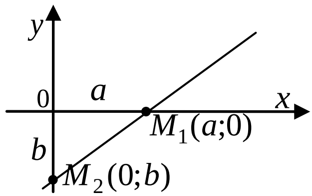
$Ax=0$ $(B=C=0)$ — прямая совпадает с осью Oy;

$By=0$ $(A=C=0)$ — прямая совпадает с осью Ox.

3. ***Уравнение прямой в отрезках:***

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}, \qquad (3)$$

где a и b — длины отрезков (с учётом знаков), отсекаемых прямой на осях Ox и Oy соответственно.

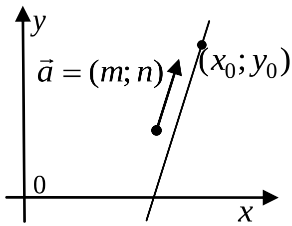


<u>*Направляющим вектором*</u> прямой называется всякий ненулевой вектор, параллельный этой прямой.

4. ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным направляющим вектором (каноническое уравнение прямой на плоскости)***:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}}, \qquad (4)$$

где $\vec{a}=(m;n)$ — направляющий вектор прямой, $(x_0;y_0)$ — координаты данной точки.

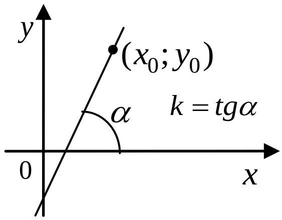


5. ***Параметрические уравнения прямой:***

$$\boxed{\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \end{cases}} \qquad (5)$$

где $\vec{a} = (m; n)$ — направляющий вектор прямой, $(x_0; y_0)$ — координаты точки, принадлежащей данной прямой.

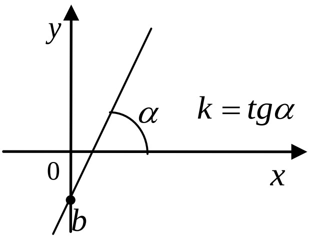
6. ***Уравнение прямой, проходящей через данную точку и с заданным угловым коэффициентом:***



$$\boxed{y - y_0 = k(x - x_0)}, \qquad (6)$$

где k — угловой коэффициент прямой, $(x_0; y_0)$ — координаты данной точки.

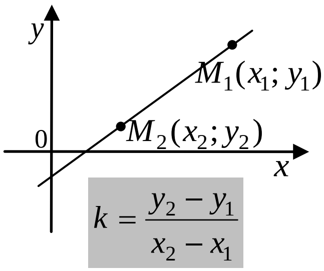
7. ***Уравнение прямой с угловым коэффициентом*** имеет вид:



$$\boxed{y = kx + b}, \qquad (7)$$

где k — угловой коэффициент прямой (т.е. тангенс угла α, который прямая образует с положительным направлением оси Ox), b — ордината точки пересечения прямой с осью Oy.

8. ***Уравнение прямой, проходящей через две данные точки*** $M_1(x_1; y_1)$ *и* $M_2(x_2; y_2)$, где $y_1 \neq y_2, x_1 \neq x_2$ имеет вид:



$$\boxed{\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}}. \qquad (8)$$

В случае $x_1 = x_2$ уравнение прямой примет вид $x = x_1$. В случае $y_1 = y_2$ уравнение прямой: $y = y_1$.

Пример 4.2. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $A(0;2)$, $B(-3;7)$; б) $A(2;1)$, $B(4;1)$.

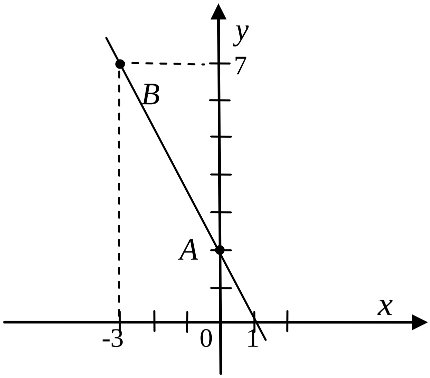
а) Используем уравнение (8). Полагая в нём $x_1 = 0$, $y_1 = 2$, $x_2 = -3$, $y_2 = 7$, получим

$$\frac{y-2}{7-2} = \frac{x-0}{-3-0} \Rightarrow \quad \frac{y-2}{5} = \frac{x}{-3} \Rightarrow \quad -3(y-2) = 5x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad -3y + 6 = 5x \Rightarrow \quad 5x + 3y - 6 = 0.$$

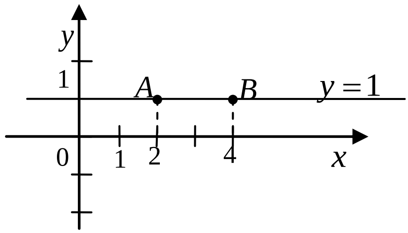
Построим эту прямую. Составим таблицу:

x	0	-3
y	2	7



Ответ: $5x + 3y - 6 = 0$ — уравнение прямой.

б) Решаем аналогично: $\dfrac{y-1}{1-1} = \dfrac{x-2}{4-2}$. Так как $y_1 = y_2$, то $y - 1 = 0 \Rightarrow \quad y = 1$ есть уравнение прямой (см.п.8 параграфа). Для наглядности построим точки и прямую в системе Oxy.



Ответ: $y = 1$ — уравнение прямой.

Пример 4.3. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(-2;3)$ параллельно прямой $x - 2y + 15 = 0$.

Из уравнения прямой $x - 2y + 15 = 0$ выпишем координаты нормального вектора: $\vec{n} = (1;-2)$. Так как прямые параллельны, то в качестве

нормального вектора для искомой прямой примем этот же вектор. Имеем,
$\left.\begin{array}{l}\vec{n}=(1;-2)\\ (x_0;y_0)=(-2;3)\end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l}A=1; B=-2\\ x_0=-2; y_0=3\end{array}$. Воспользуемся формулой (1):

$$1\cdot(x-(-2))+(-2)(y-3)=0 \Rightarrow \quad x+2-2y+6=0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x-2y+8=0$ — уравнение искомой прямой.

Ответ: $x-2y+8=0$ — уравнение искомой прямой.

§ 2. Взаимное расположение прямых на плоскости.

Под *угло́м между прямыми на плоскости* понимают наименьший (острый) из двух смежных углов, образованных этими прямыми.

Если прямые l_1 **и** l_2 **заданы уравнениями с угловыми коэффициентами** $y=k_1x+b_1$ и $y=k_2x+b_2$, то

- угол φ между ними вычисляется с помощью формулы

$$\boxed{tg\varphi=\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}} \qquad (8)$$

- условие параллельности прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$\boxed{k_1=k_2} \qquad (9)$$

- условие перпендикулярности прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$\boxed{k_1=-\frac{1}{k_2}} \qquad (10)$$

Если прямые l_1 **и** l_2 **заданы общими уравнениями** $A_1x+B_1y+C_1=0$ и $A_2x+B_2y+C_2=0$, то

- угол φ между ними вычисляется с помощью формулы

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}}{|\vec{n_1}||\vec{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}}, \qquad (11)$$

где $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ — нормальные векторы прямых l_1 и l_2.

- <u>условие параллельности</u> прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}} \qquad (12)$$

Это условие вытекает из того, что если прямые l_1 и l_2 параллельны, то их нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ коллинеарны, а это значит, что их соответствующие координаты пропорциональны.

- <u>условие перпендикулярности</u> прямых l_1 и l_2 имеет вид

$$\boxed{A_1A_2+B_1B_2=0} \qquad (13)$$

Это условие вытекает из того, что если прямые l_1 и l_2 перпендикулярны, то и их нормальные векторы $\vec{n}_1$ и $\vec{n}_2$ тоже перпендикулярны, а это значит, что скалярное произведение этих векторов равно нулю.

Пример4.4. Вычислите угол между прямыми

а) $y=-\frac{1}{5}x+\frac{3}{5}$ и $y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$;

б) $2x-3y+10=0$ и $5x-y+4=0$;

в) $y=\frac{3}{4}x-2$ и $8x+6y+5=0$.

а) Воспользуемся формулой (8). Подставляя в неё значения $k_1=-\frac{1}{5}$ и $k_2=\frac{2}{3}$, находим

$$tg\varphi=\frac{\frac{2}{3}-\left(-\frac{1}{5}\right)}{1+\left(-\frac{1}{5}\right)\cdot\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{2}{15}}=\frac{13}{15}:\frac{13}{15}=1\Rightarrow \quad \varphi=\frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\varphi=\frac{\pi}{4}$.

б) Подставим значения $A_1 = 2$, $B_1 = -3$, $A_2 = 5$, $B_2 = -1$ в формулу (11):

$$\cos\varphi = \frac{2\cdot 5 + (-3)\cdot(-1)}{\sqrt{2^2+(-3)^2}\cdot\sqrt{5^2+(-1)^2}} = \frac{10+3}{\sqrt{4+9}\cdot\sqrt{25+1}} = \frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{26}} =$$

$$= \frac{13}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{13}\cdot\sqrt{2}} = \frac{13}{13\cdot\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Ответ: $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

в) Здесь $k_1 = \dfrac{3}{4}$, найдём k_2.

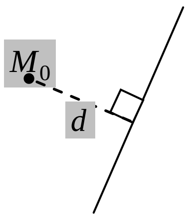
$$8x+6y+5=0 \Rightarrow \quad 6y = -8x-5 \Rightarrow \quad y = -\frac{8}{6}x - \frac{5}{6} \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = -\dfrac{4}{3}x - \dfrac{5}{6}$. Тогда $k_2 = -\dfrac{4}{3}$.

Так как $k_1\cdot k_2 = \dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right) = -1$, то данные прямые перпендикулярны. (По формуле (8) получаем: $tg\varphi = \dfrac{-\dfrac{4}{3}-\dfrac{3}{4}}{1+\dfrac{3}{4}\cdot\left(-\dfrac{4}{3}\right)} = \dfrac{-\dfrac{25}{12}}{1-1} = \infty \Rightarrow \ \varphi = \dfrac{\pi}{2}$).

Ответ: $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

Расстоянием d от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ называется длина перпендикуляра, опущенного из этой точки на прямую и вычисляется по формуле:



$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2+B^2}}} \qquad (14)$$

Пример 4.5. Найдите расстояние от точки $M_0(-2;3)$ до прямой $4x-3y-5=0$.

Подставляя в формулу (14) данные задачи, получим

$$d = \frac{|4\cdot(-2)+(-3)\cdot 3+(-5)|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} = \frac{|-8-9-5|}{\sqrt{16+9}} = \frac{22}{5} = 4{,}4.$$

Ответ: $d = 4{,}4$ лин. ед.

§ 3. Прямые в решениях экономических задач.

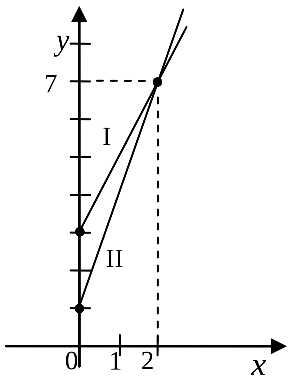
Известно, что стоимость перевозки груза состоит из расходов, не связанных с расстоянием перевозки (погрузка, выгрузка, доставка на пункт отправления и т.д.) и из расходов, пропорциональных расстоянию (расход топлива, оплата везущему грузы и т. д.). Пусть a — цена перевозки груза на единицу расстояния, а b — цена, не зависящая от расстояния x. Тогда общая стоимость перевозки груза составит $y = ax + b$.

Пример 4.6. Груз можно перевести железнодорожным или автотранспортом. Стоимость перевозки по железной дороге $y = 2x + 3$, а машиной — $y = 3x + 1$. Каким транспортом дешевле перевести груз?

Найдём точку пересечения прямых $y = 2x + 3$ (I) и $y = 3x + 1$ (II). Для этого решим систему:

$$\begin{cases} y = 2x+3 \\ y = 3x+1 \end{cases} \Rightarrow \quad 2x+3 = 3x+1 \Rightarrow \quad 2x-3x = 1-3 \Rightarrow \quad -x = -2 \Rightarrow$$

$\Rightarrow x = 2$. Подставим $x = 2$ в одно из уравнений системы, получим $y = 2\cdot 2 + 3 \Rightarrow \quad y = 7$. Итак, $(2;7)$ — точка пересечения прямых.



Построим прямые $y = 2x + 3$ (I) и $y = 3x + 1$ (II) в системе Oxy. Для построения каждой прямой достаточно взять две точки (см. пример 4.1):

(I)

x	0	2
y	3	7

(II)

x	0	2
y	1	7

Из чертежа ясно, что при $0 < x < 2$ выгоднее использовать автотранспорт, т.к. значения y прямой II меньше значений y прямой I, т.е. стоимость перевозки меньше. При $x > 2$ экономически выгоднее использовать железную дорогу.

Пример 4.7. При одном и том же способе производства, при производстве товара x_1 издержки производства составляют y_1, а при производстве товара x_2 издержки производства составляют y_2. Найдите переменные издержки a, приходящиеся на единицу продукции и постоянные издержки b производства. (Предполагается линейная зависимость издержек от производства товара).

Так как зависимость издержек от производства товара линейная, найдём её, воспользовавшись формулой (5) § 1:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Выразим y, т.е. перейдём к уравнению вида $y=ax+b$.

$$y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)+y_1 \Rightarrow \quad y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x_1+y_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x+\frac{-y_2x_1+y_1x_1+y_1x_2-y_1x_1}{x_2-x_1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}\cdot x+\frac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}$$

Таким образом, $a=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}, \quad b=\dfrac{y_1x_2-y_2x_1}{x_2-x_1}$.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Общее уравнение прямой.
2. Понятие направляющего и нормального вектора прямой.
3. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
4. Уравнение прямой в отрезках.
5. Уравнение прямой, проходящей через данную точку в данном направлении.
6. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным нормальным вектором.
7. Уравнение прямой, проходящей через две точки.
8. Уравнение прямой, проходящей через данную точку с заданным направляющим вектором.
9. Формула для нахождения угла между прямыми.
10. Условия параллельности и перпендикулярности прямых.
11. Расстояние от точки до прямой.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Уравнение вида $y = kx + b$ называется:

   а) уравнением прямой в отрезках; б) общим уравнением прямой; в) каноническим уравнением прямой; г) уравнением прямой с угловым коэффициентом.

2. Уравнение прямой на плоскости, параллельной оси Oy, имеет вид:

   а) $Ax + C = 0$, $A \neq 0, C \neq 0$; б) $By + C = 0$, $B \neq 0, C \neq 0$; в) $Ax + By = 0$, $A \neq 0, B \neq 0$; г) $Ax + By + C = 0$, $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$.

3. Прямая $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ отсекает на оси Ox отрезок, равный:

   а) 4; б) -3; в) 3; г) 1.

4. Прямая $y - 4 = 0$ на плоскости расположена:

   а) параллельно оси Oy; б) параллельно оси Ox;

   в) совпадает с осью Ox; г) совпадает с осью Oy.

5. Как расположены прямые $2x + y - 5 = 0$, $x + \frac{1}{2}y + 7 = 0$ на плоскости относительно друг друга:

   а) параллельны; б) перпендикулярны;
   в) пересекаются; г) совпадают.

6. Как расположена точка $M(2;-1)$ относительно прямой $x - 2y - 4 = 0$:

   а) точка M не принадлежит прямой; б) точка M принадлежит прямой; в) точка M лежит выше прямой; г) точка M лежит ниже прямой.

7. Расстояние от точки $M_0(x_0; y_0)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ вычисляется по формуле:

   а) $d = \left|Ax_0 + By_0 + C\right|$; б) $d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$;

   в) $d = \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A + B}}$; г) $d = \frac{\left|Ax_0 + By_0 + C\right|}{A^2 + B^2}$.

8. Условие перпендикулярности прямых $A_1x + B_1y + C_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2 = 0$:

   а) $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$; б) $A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$;

в) $\dfrac{A_1}{A_2}+\dfrac{B_1}{B_2}=0$; г) $A_1A_2+B_1B_2=0$.

9. Уравнение прямой на плоскости $3x+y+1=0$ имеет угловой коэффициент равный:

а) $k=1$; б) $k=3$; в) $k=\dfrac{1}{3}$; г) $k=-3$.

10. Прямая на плоскости, проходящая через две точки $M_1(0;1)$ и $M_2(2;4)$ имеет уравнение вида:

а) $\dfrac{x-2}{-2}=\dfrac{y-4}{3}$; б) $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y-1}{3}$; в) $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{2}$;

г) $\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-4}{4}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕШЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 4.1. Дана прямая $5y-3x-2=0$. Выпишите её вектор нормали, найдите угловой коэффициент, постройте прямую на плоскости.

Ответ: $\vec{n}=(5;-3)$, $k=\dfrac{3}{5}$.

Задача 4.2. Выберите из прямых I – V параллельные и перпендикулярные, определите угол между прямыми I и VI:

(I) $y-3x-2=0$; (II) $2x+6y=0$; (III) $3x-y=5$;

(IV) $x-3y+3=0$; (V) $x+3y-7=0$; (VI) $x+y=2$.

Ответ: прямые I и III, II и V параллельны;
прямые I и II, I и V, II и III, III и V перпендикулярны;
$\cos\varphi=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Задача 4.3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку $A(2;-\sqrt{3})$ и образующей с положительным направлением оси Ox угол 120^0.

Ответ: $\sqrt{3}x+y-\sqrt{3}=0$.

Задача 4.4. Составьте уравнения прямых, проходящих через точку $A(2;-3)$ параллельно и перпендикулярно прямой $2y+4x-5=0$.

Ответ: $2x+y-1=0$; $x-2y-8=0$.

Задача 4.5. Напишите уравнение прямой, проходящей через точки $A(3;3)$, $B(-1;5)$.

Ответ: $x+2y-9=0$.

Задача 4.6. В треугольнике с вершинами $O(0;0)$, $A(3;3)$, $B(-1;5)$ найдите уравнение стороны AB, медианы AE и высоты OK, а также длину высоты OK.

Ответ: AB: $x+2y-9=0$;

AE: $x-7y+18=0$;

OK: $y=2x$; $\left|\overrightarrow{OK}\right|=\dfrac{9}{\sqrt{5}}$.

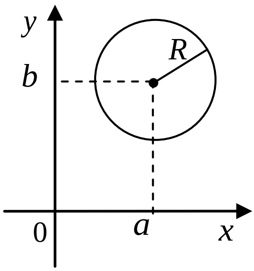
МОДУЛЬ 5. КРИВЫЕ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 1. Окружность

Окружностью называется множество всех точек плоскости, удаленных от заданной точки O этой же плоскости на одно и тоже расстояние $R>0$. Точка O называется *центром*, а R — *радиусом* окружности.

В прямоугольной системе координат **уравнение окружности** имеет вид

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2=R^2}, \qquad (1)$$



где $(a;b)$ — координаты её центра, R — радиус окружности.

В частности, если центр окружности совпадает с началом координат, т.е. $a=0$, $b=0$, то уравнение (1) примет вид:

$$\boxed{x^2+y^2=R^2} \qquad (2)$$

Пример 5.1. Найдите координаты центра и радиус окружности $2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$.

Разделив уравнение на 2, и сгруппировав члены уравнения, получим $x^2-4x+y^2+\frac{5}{2}y=2$. Дополним выражения x^2-4x и $y^2+\frac{5}{2}y$ до полных квадратов, прибавив к первому двучлену 4, а ко второму $\left(\frac{5}{4}\right)^2$ (одновременно к правой части прибавляется сумма этих чисел):

$$x^2-4x+4+y^2+\frac{5}{2}y+\left(\frac{5}{4}\right)^2=2+4+\frac{25}{16}\Rightarrow\Rightarrow(x-2)^2+\left(y+\frac{5}{4}\right)^2=\frac{121}{16}.$$

По формуле (1) имеем $a=2$, $b=\frac{5}{4}$, т.е. $\left(2;\frac{5}{4}\right)$ — координаты центра окружности; $R^2=\frac{121}{16}\Rightarrow R=\frac{11}{4}$ — радиус окружности.

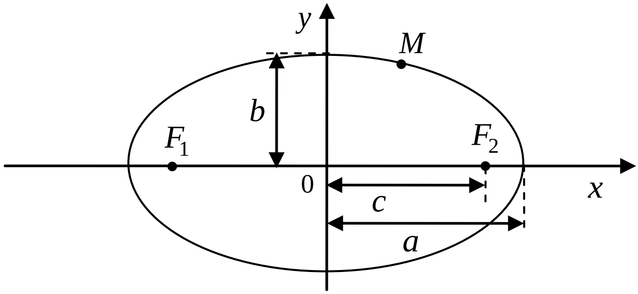
§ 2.Эллипс

Эллипсом называется множество всех точек плоскости, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек F_1 и F_2 этой же плоскости, называемых *фокусами* эллипса, есть величина постоянная и большая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение эллипса:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1}, \qquad (3)$$

где a — большая полуось, b — малая полуось эллипса.



❖ Если $a > b$, то:

1) координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где c — половина расстояния между фокусами (см. рис);
2) числа a, b и c связаны соотношением
$$c^2 = a^2 - b^2; \qquad (4)$$
3) расстояние между фокусами равно $|F_1F_2| = 2c$;

Форма эллипса характеризуется его эксцентриситетом.

Эксцентриситетом ε эллипса называется отношение фокусного расстояния $2c$ (расстояния между фокусами) к большой оси $2a$:

4) $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ ($\varepsilon < 1$, т.к. $c < a$); (5)

Директрисами эллипса называются прямые l_1 и l_2 параллельные малой оси эллипса и отстоящие от неё на расстоянии, равном $\dfrac{a}{\varepsilon}$;

5) $x = \dfrac{a}{\varepsilon}$ и $x = -\dfrac{a}{\varepsilon}$ — уравнения директрис.

❖ Если $a = b$, то уравнение (3) определяет окружность $x^2 + y^2 = a^2$.

Пример 5.2. Дано уравнение эллипса $24x^2 + 49y^2 = 1176$. Найдите длины его полуосей, координаты фокусов, эксцентриситет эллипса.

Запишем уравнение эллипса в виде (3), разделив обе его части на 1176:
$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{24} = 1.$$

Отсюда $a^2 = 49 \Rightarrow a = 7$, $b^2 = 24 \Rightarrow b = 2\sqrt{6}$.

Используя соотношение (4), находим $c^2 = 7^2 - (2\sqrt{6})^2 = 25$ и $c = 5$. Следовательно, $F_1(-5;0)$ и $F_2(5;0)$.

По формуле (5) находим $\varepsilon = \dfrac{5}{7}$.

§ 3. Гипербола

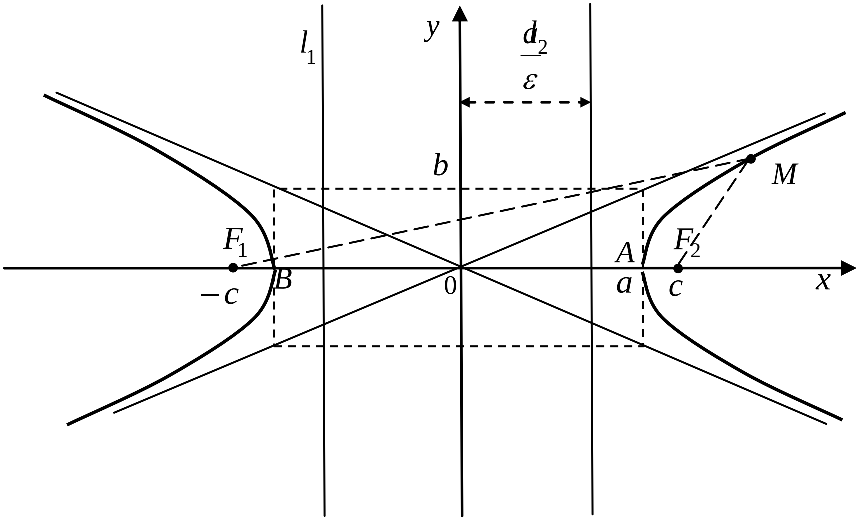
Гиперболой называется множество всех точек плоскости, модуль разности расстояний от каждой из которых до двух заданных точек F_1 и F_2 этой же плоскости, называемых *фокусами*, есть величина постоянная, меньшая, чем расстояние между фокусами.

Каноническое уравнение гиперболы:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}, \qquad (6)$$

где a — действительная, b — мнимая полуось гиперболы. Числа $2a$ и $2b$ — соответственно действительная и мнимая оси гиперболы. Для гиперболы (6):

1) координаты фокусов: $F_1(-c;0)$, $F_2(c;0)$, где c — половина расстояния между фокусами (см. рис);
2) числа a, b и c связаны соотношением
$$c^2 = a^2 + b^2; \qquad (7)$$
3) расстояние между фокусами равно $|F_1F_2| = 2c$;
4) точки A и B называются *вершинами* гиперболы , точка O — *центром* гиперболы;



Эксцентриситетом ε гиперболы называется число:

5) $\varepsilon = \dfrac{c}{a}$ ($\varepsilon > 1$, т.к. $c > a$). (8)

Прямоугольник, центр которого совпадает с точкой O, а стороны равны и параллельны осям гиперболы, называется *основным прямоугольником гиперболы*.

Диагонали основного прямоугольника гиперболы лежат на двух прямых, называемых *асимптотами гиперболы*; они определяются уравнениями

6) $y = \pm\dfrac{b}{a}x$ (9)

Две прямые l_1 и l_2 (см. рисунок), параллельные мнимой оси гиперболы и отстоящие от неё на расстоянии, равном $\dfrac{a}{\varepsilon}$, называются *директрисами гиперболы*; они определяются уравнениями

7) $x = \pm\dfrac{a}{\varepsilon}$. (10)

Уравнение $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ или $\dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{x^2}{a^2} = 1$ (11)

также является уравнением гиперболы, но действительной осью этой гиперболы служит отрезок оси Oy длины $2b$.

Гипербола, задаваемая уравнением (11), называется *сопряжённой* гиперболе (6)

Пример 5.3. Составьте уравнение гиперболы, если её фокусы лежат на оси Ox и расстояние между ними равно 10, а длина мнимой оси равна 8.

По условию, $2c = 10 \Rightarrow c = 5$; $2b = 8 \Rightarrow b = 4$. Тогда по формуле (7) получим:

$$5^2 = a^2 + 4^2 \Rightarrow 25 = a^2 + 16 \Rightarrow a^2 = 9.$$

Тогда уравнение гиперболы:

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$$

Уравнения $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$, $\dfrac{(x-x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y-y_0)^2}{b^2} = -1$ также задают гиперболу, координаты центра которой задаются точкой $(x_0; y_0)$.

§ 4. Парабола

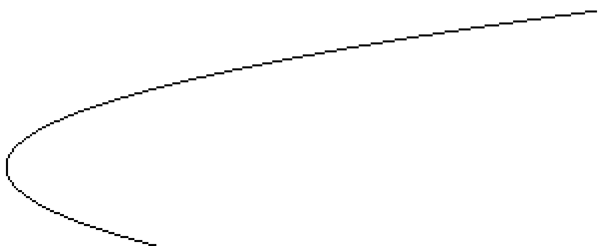
Параболой называется множество всех точек плоскости, каждая из которых равноудалена от заданной точки этой же плоскости, называемой *фокусом*, и заданной прямой, называемой *директрисой*.

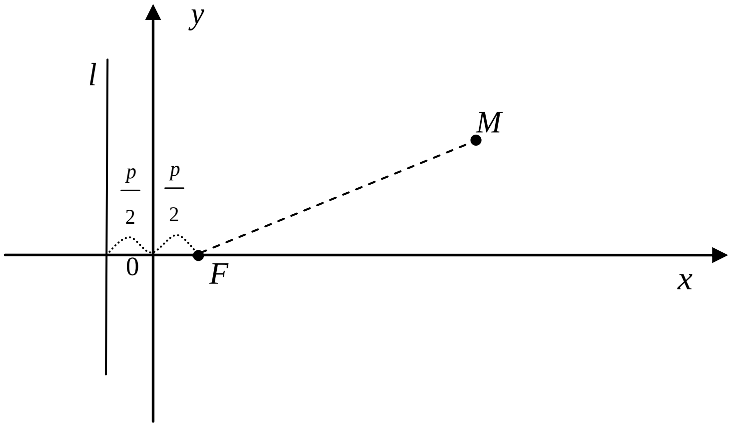
Каноническое уравнение параболы:

$$\boxed{y^2 = 2px}, \qquad (12)$$

где число $p > 0$, равное расстоянию от фокуса F до директрисы l, называется *параметром* параболы, точка $O(0;0)$ называется *вершиной* параболы, ось Ox — *ось симметрии* параболы, координаты фокуса $F(\frac{p}{2};0)$.

Уравнение директрисы l параболы имеет вид $x = -\dfrac{p}{2}$.





Уравнение $x^2 = 2py$ является уравнением параболы, симметричной относительно оси ординат.

Уравнения

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0),\ (x - x_0)^2 = 2p(y - y_0) \qquad (13)$$

также задают параболу, вершина которой задаются точкой $(x_0; y_0)$.

Пример 5.4. Уравнение линии приведите к каноническому виду и постройте её: $-2x^2 - y + 8x - 5 = 0$.

Преобразуем уравнение: $y = -2x^2 + 8x - 5$. Выделим в правой части полный квадрат (выделение полного квадрата подробно рассматривалось в примере 5.1):

$$y = -2(x^2 - 4x) - 5;$$

$$y = -2(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4 - 4) - 5;$$

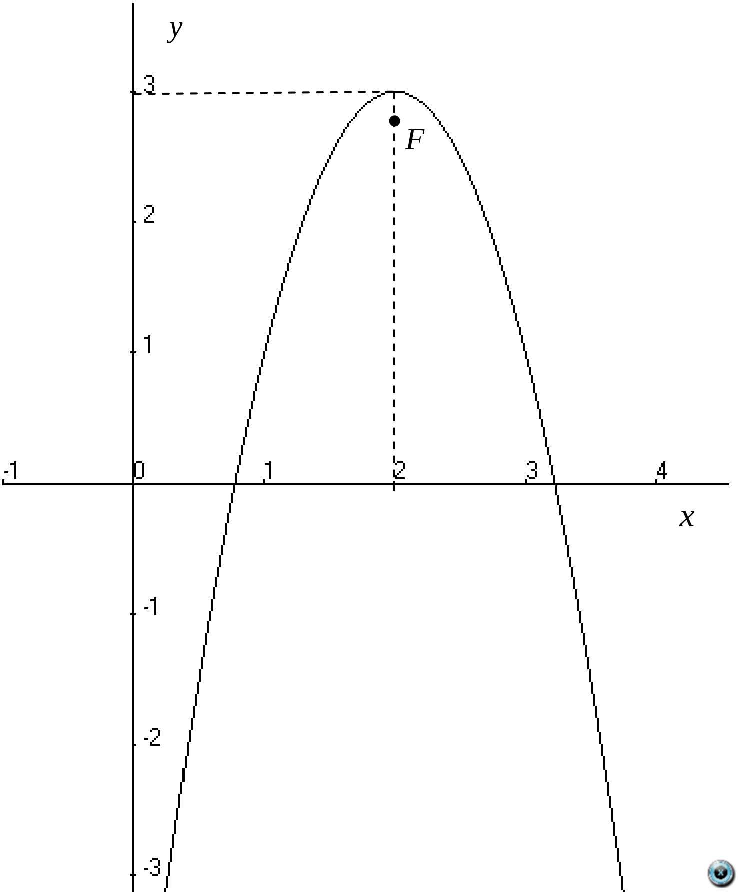
$$y = -2(x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4) + 8 - 5;$$

$$y = -2(x - 2)^2 + 3;$$

$$y - 3 = -2(x - 2)^2;$$

$$(x - 2)^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)(y - 3).$$

Получили уравнение параболы (см. (13)) с вершиной в точке (2;3); $2p=\frac{1}{2}\Rightarrow p=\frac{1}{4}$. Прямая $x=2$ является осью симметрии параболы. Координаты фокуса $x=2$, $y=3-\frac{1}{8}=2\frac{7}{8}$, т.е. $F\left(2;2\frac{7}{8}\right)$.



ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие линии второго порядка.
2. Каноническое уравнение окружности.
3. Каноническое уравнение эллипса, характеристики эллипса.
4. Каноническое уравнение гиперболы, характеристики гиперболы.

5. Каноническое уравнение параболы, характеристики параболы.
6. Метод выделения полного квадрата.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Уравнением $(y-8)^2=-10x$ задается парабола, ветви которой направлены:
   а) вверх; б) вниз; в) вправо; г) влево.
2. Каноническое уравнение гиперболы с мнимой полуосью 3 имеет вид:
   а) $-\frac{x^2}{9}=6(y-2)$; б) $-\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{100}=1$; в) $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{9}=1$;
   г) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{25}=-1$.
3. Уравнение $3(x+2)^2+7(y-1)^2=36$ задает:
   а) эллипс; б) гиперболу; в) окружность; г) параболу.
4. Уравнение параболы с вершиной в точке $(x_0;y_0)$ и осью симметрии, параллельной оси OY, имеет вид:
   а) $(x+x_0)^2=2p(y+y_0)$; б) $(y+y_0)^2=2q(x+x_0)$;
   в) $(y-y_0)^2=2q(x-x_0)$; г) $(x-x_0)^2=2p(y-y_0)$.
5. Уравнение гиперболы, не пересекающей ось OY, имеет вид:
   а) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$; б) $-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$; в) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$;
   г) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.
6. Уравнение $\frac{(x-4)^2}{49}+\frac{(y-2)^2}{16}=1$ определяет:
   а) эллипс с полуосями 49 и 16; б) параболу с центром (-4; -2);
   в) гиперболу с полуосями 7 и 4; г) эллипс с центром (4; 2).
7. Для любой точки гиперболы постоянной величиной является:
   а) модуль разности расстояний до фокусов;
   б) сумма расстояний до фокусов;
   в) частное расстояний до фокусов; г) расстояние до её центра.
8. Уравнение параболы, ветви которой направлены вниз, имеет вид:

а) $x^2 = 2py,\ \ p > 0$; б) $y^2 = 2qx,\ \ q > 0$;

в) $x^2 = 2py,\ \ p < 0$; г) $y^2 = 2qx,\ \ q < 0$.

9. Радиус окружности, заданной уравнением $x^2 + 2x + y^2 - 24 = 0$, равен:

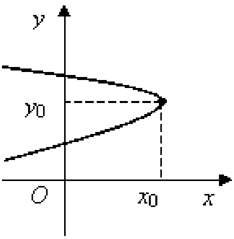
а) 5; б) $\sqrt{23}$; в) 2; г) 25.

10. Уравнением $3(x+5)^2 - 2(y-2)^2 = 6$ задается:

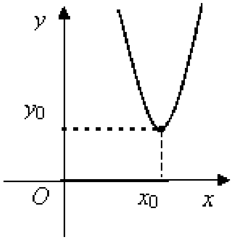
а) гипербола с полуосями $\sqrt{3}$; $\sqrt{2}$ и центром (5; -2);
б) парабола с вершиной (-5; 2);
в) гипербола с полуосями $\sqrt{2}$; $\sqrt{3}$ и центром (-5; 2);
г) эллипс с центром (5; -2).

11. Выберите линию, которая задается уравнением

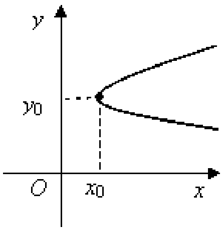
$$(x - x_0)^2 = 2p(y - y_0),\ p > 0$$



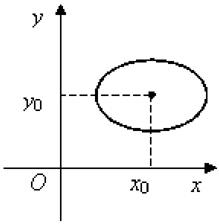
а) ;



б) ;



в) ;



г) .

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 5.1. Определите тип и расположение на плоскости линии, заданной уравнением $9x^2 + 4y^2 - 54x - 32y + 109 = 0$ и схематически постройте её.

Ответ: $\dfrac{(x-3)^2}{4}+\dfrac{(y-4)^2}{9}=1$ — эллипс.

Задача 5.2. Определите тип и расположение на плоскости линии, заданной уравнением $4x^2-y^2-8x+4y-4=0$ и схематически постройте её.

Ответ: $\dfrac{(x-1)^2}{1}-\dfrac{(y-2)^2}{4}=1$ — гипербола.

Задача 5.3. Определите тип и расположение на плоскости линии, заданной уравнением $3y^2+x-6y-3=0$ и схематически постройте её.

Ответ: $(y-1)^2=-\dfrac{1}{3}(x-6)$ — парабола.

Задача 5.3. Исследуйте график кривой $y=x^2-2x+3$ и постройте её.

МОДУЛЬ 6.
ФУНКЦИЯ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

§ 1. Определение функции и способы её задания.

Если каждому числу x из некоторого множества X соответствует одно и только одно число y, то говорят, что на множестве X задана *функция*.

Переменная x при этом называется *независимой* переменной (или *аргументом*), а переменная y — *зависимой*.

Способ (правило), с помощью которого устанавливается соответствие, определяющее данную функцию, обозначают той или иной буквой: $f, g, h, \varphi \ldots$. Т.е. то обстоятельство, что y есть функция аргумента x, кратко выражают записью: $y=f(x)$ или $y=\varphi(x)$ и т.п.

Множество X называется *областью определения* функции и обозначается $D(f)$, а множество всех чисел y, соответствующих различным числам $x\in X$ — *областью значений* этой функции и обозначается $E(f)$.

Эти области могут представлять собою отдельные точки числовой прямой, отрезки, интервалы этой прямой, множество всех действительных чисел.

Различают следующие способы задания функции : табличный, графический, аналитический (с помощью формул).

Пусть заданы прямоугольная система координат Oxy и функция $y = f(x)$.

Графиком функции $f(x)$ называют множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где $x \in D(f)$.

Для функции, заданной аналитически, т.е. уравнением $y = f(x)$, под графиком понимают множество точек $M(x; y)$ плоскости, координаты которых удовлетворяют уравнению $y = f(x)$.

График функции есть некоторая линия на плоскости. Например, уравнение $y = x^2$ задаёт функцию, графиком которой является парабола.

Функция, заданная аналитически уравнением $y = f(x)$, определена в точке $x = x_0$, если возможно вычислить $y_0 = f(x_0)$. Множество таких точек образует область определения функции.

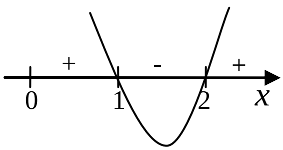
Пример 6.1. Найдите область определения функции:

а) $f(x) = \dfrac{x-7}{x-3}$; б) $f(x) = \sqrt{5-3x}$; в) $f(x) = \lg(x^2 - 3x + 2)$.

а) Дробь $\dfrac{x-7}{x-3}$ определена, если её знаменатель не равен нулю. Область определения данной функции можно найти из условия $x - 3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$. Таким образом, $D(f) = (-\infty;3) \cup (3;+\infty)$.

б) Функция $f(x) = \sqrt{5-3x}$ определена, если подкоренное выражение неотрицательно, т.е. $5 - 3x \geq 0 \Rightarrow -3x \geq -5 \Rightarrow x \leq \dfrac{5}{3}$. Значит, $D(f) = (-\infty; \dfrac{5}{3}]$.

в) Логарифм определён, когда
$x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x-1)\cdot(x-2) > 0$.
Значит, $D(y) = (-\infty;1) \cup (2;+\infty)$.



Основными (или *простейшими*) *элементарными функциями* называются:

постоянная функция	$y = c$;
степенная функция	$y = x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbf{R}$;
показательная функция	$y = a^{x}$, $a > 0$;
логарифмическая функция	$y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
тригонометрические функции	$y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = tgx$; $y = ctgx$;
обратные тригонометрические функции	$y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = arctgx$; $y = arcctgx$.

Функция, аргумент которой в свою очередь есть функция ($y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$), называется *сложной функцией* (или композицией функций).

Пример 6.2. Функция $y = \sin x$ — простейшая,

$y = \sin 3x$ — сложная

($y = \sin u$, $u = 3x$).

Пример 6.3. Функция $y = \lg^3(2^{x^3})$ сложная, которая может быть представлена следующей цепью основных элементарных функций: $y = z^3$, $z = \lg u$, $u = 2^v, v = x^3$.

Элементарными функциями называются функции, которые получаются из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических операций $(+,-,\cdot,\div)$ и композиций (т.е. образования сложных функций). Все остальные функции называются *неэлементарными*.

Пример 6.4. Примером неэлементарной функции может служить функция вида: $y = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$

Формула $y = f(x)$ определяет явный способ задания функции. Однако во многих случаях приходится использовать неявный способ задания функции.

Неявной называют функцию, которая задана уравнением вида $F(x;y) = 0$, неразрешенным относительно функции y.

Пример 6.5. Уравнение $2y + x^2 - 4 = 0$ задает неявно функцию $y = -\frac{1}{2}x^2 + 2$.

Пусть для любых различных значений $x_1, x_2 \in D(f)$ справедливо, что $f(x_1) \neq f(x_2)$. Тогда для любого $y \in E(f)$ найдётся только одно значение $x = g(y) \in D(f)$, такое, что $y = f(x)$.

Функция $x = g(y)$, определённая на $E(f)$, называется *обратной* для функции $f(x)$.

Пример 6.6. Найдите обратную функцию для данной:

а) $y = x - 1$; б) $y = \dfrac{2}{x+3}$; в) $y = 2^x$.

а) Для функции $y = x - 1$ обратной функцией является функция $x = y + 1$, или в стандартной форме $y = x + 1$.

б) Разрешим уравнение $y = \dfrac{2}{x+3}$ относительно x: $x + 3 = \dfrac{2}{y} \Rightarrow x = \dfrac{2}{y} - 3$. Обратной функцией является функция $y = \dfrac{2}{x} - 3$.

в) Для функции $y = 2^x$ обратной функцией является функция $x = \log_2 y$, или в стандартной форме $y = \log_2 x$.

Графики взаимно обратных функций симметричны относительно биссектрисы первого и третьего координатных углов.

§ 2. Использование элементарных функций в экономике

1. Простые проценты.

$$\boxed{k_n = k(1+ni)},$$

k – начальная сумма,

k_n – конечная (накопленная за n лет) сумма,

$i = \frac{p}{100}$ – удельная процентная ставка,

p – процентная ставка.

Пример 6.7. Начальная сумма вклада составила 5000 ден.ед. Сколько составит накопленная сумма через три года при процентной ставке 4%?

По условию задачи $k = 5000$, $p = 4$, $n = 3$, $i = \frac{p}{100} = 0{,}04$. Тогда $k_3 = 5000(1+3\cdot 0{,}04) = 5000\cdot 1{,}12 = 5600$ (ден.ед.).

2. Сложные проценты.

$$\boxed{k_n = k(1+i)^n} \text{ или } \boxed{k_n = kr^n},$$

где $r = 1+i$ – коэффициент сложного процента.

Пример 6.8. За период выполнения пятилетнего плана объём продукции должен возрасти на 85%. Каким должен быть средний темп роста?

Пусть начальный объём продукции составлял k единиц. Через 5 лет он должен составить $1{,}85k$ единиц (по условию задачи). С другой стороны, по формуле сложных процентов $k_5 = kr^5$. Следовательно, $1{,}85k = kr^5 \Rightarrow r^5 = 1{,}85 \Rightarrow r = \sqrt[5]{1{,}85} = 1{,}131$.

Тогда $1{,}131 = 1+i \Rightarrow i = 1{,}131-1 \Rightarrow i = 0{,}131$. Известно, что $i = \frac{p}{100} \Rightarrow 0{,}131 = \frac{p}{100} \Rightarrow p = 0{,}131\cdot 100 \Rightarrow p = 13{,}1$.

Значит для того, чтобы объём продукции за 5 лет вырос на 85%, средний темп роста должен составлять 13,1%.

3. Начисление процентов m раз в году.

$$\boxed{k_n = k\left(1+\frac{i}{m}\right)^{mn}}.$$

4. Периодический взнос.

В банк через определенное время (год) вносится постоянная сумма k (периодический взнос) под сложные проценты при норме p %. Через n лет накопится сумма:

$$\boxed{k_n = \frac{kr(r^n - 1)}{r - 1}}.$$

Пример 6.9. Какая сумма накопится через 10 лет, если ежегодный взнос составляет 3000 ден.ед., а ставка сложного процента 5% годовых?

По условию задачи $k = 3000$, $p = 5$, $n = 10$, $i = \frac{p}{100} = 0{,}05$, $r = 1 + i = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$.

Тогда $k_{10} \frac{3000 \cdot 1{,}05(1{,}05^{10} - 1)}{0{,}05} \approx 39620$ (ден.ед.).

5. Функция спроса.

При определенных условиях спрос на некоторый товар есть функция цены. Эта так называемая функция спроса. Пусть q – спрос на товар, p – цена товара. Зависимость между спросом и ценой – функция спроса – выражается формулой

$$\boxed{q = f(p)}.$$

Пример 6.10. Функция спроса может иметь разный вид, например

а) $q = \frac{500}{p + 4}$. В этом случае находим следующие соответствия:

цена $p = 1$ – спрос $q = 100$,

цена $p = 2$ – спрос $q = 83{,}3$.

б) $q = 5e^{-2p}$. В этом случае находим следующие соответствия:

цена $p = 1$ – спрос $q = \frac{5}{e^2}$,

цена $p = 2$ – спрос $q = \frac{5}{e^4}$.

Зависимость между спросом и ценой можно поставить двояко:

1) как зависимость спроса от цены;

2) как зависимость цены от спроса.

В первом случае говорят о функции спроса, во втором о функции цен спроса; в этом случае функция есть p, а независимая переменная есть q.

6. Суммарная выручка.

Если количество q проданного товара умножить на его цену p, получим суммарную выручку продавца или же суммарные расходы покупателя. Следовательно, суммарная выручка

$$\boxed{R = q \cdot p = q \cdot f(q)}.$$

Суммарная выручка есть функция спроса. Функцией суммарной выручки называется закономерность, определяющая зависимость между суммарной выручкой и количеством проданного товара.

Пример 6.11. Если функция цен спроса определяется посредством формулы $p = \dfrac{500}{q+6}$ то функция суммарной выручки имеет следующий вид: $R = \dfrac{500q}{q+6}$.

Если $q = 0$, то $R = 0$;

$$q = 1,\ \text{то}\ R = 71{,}4;$$
$$q = 2,\ \text{то}\ R = 125{,}9.$$

7. Функция предложения.

При прочих равных условиях предложение какого-либо товара зависит от цены. Если через p обозначить цену, а через s – предложение, то эту зависимость можно выразить функцией

$$\boxed{s = f(p)}.$$

Это так называемая функция предложения.

И наоборот, каждому предложению s соответствует определенная цена p. Это можно выразить посредством зависимости

$$\boxed{p = q(s)}.$$

Это так называемая функция цен предложения.

8. Функция средних издержек.

Закономерность, определяющая зависимость между издержками производства определенного товара и объёмом производства, называется функцией издержек. Если через K обозначить суммарные издержки производства x единиц продукта, то функцию суммарных издержек можно выразить в виде

$$\boxed{K = f(x)}.$$

Функция $\boxed{\Pi = \dfrac{K}{x} = \dfrac{f(x)}{x}}$ называется функцией средних или удельных издержек.

Пример 6.12. Пусть зависимость между издержками производства данного продукта и количеством произведенных единиц этого продукта имеет вид: $K = -0{,}1x^3 + 300x$. Тогда если

$$x = 1\text{, то } K(1) = -0{,}1 + 300 = 299{,}9;$$
$$x = 2\text{, то } K(2) = -0{,}8 + 600 = 599{,}2;$$
$$x = 3\text{, то } K(3) = -2{,}7 + 900 = 897{,}3.$$

Для данного случая функции средних издержек есть

$$\Pi = \frac{K}{x} = \frac{-0{,}1x^3 + 300x}{x} = -0{,}1x^2 + 300.$$

Тогда если $x = 1$, то $\Pi(1) = 299{,}9$;

$$x = 2\text{, то } \Pi(2) = 299{,}6;$$
$$x = 3\text{, то } \Pi(3) = 299{,}1.$$

9. Распределение доходов. Итальянский экономист Парето сформулировал теорему о распределении доходов в капиталистическом обществе. Если через y обозначить число лиц, имеющих доход, не меньше x, то $\boxed{y = \frac{a}{x^m}}$, где a и m – постоянные.

Закон Парето достаточно точно описывает распределение более высоких доходов; в то же время для низких доходов он не оправдывается.

Пример 6.13. Пусть в каком-либо капиталистическом обществе распределение доходов определяется уравнением $y = \dfrac{2000000000}{x^{1,5}}$.

Найдите:

а) число лиц, которые обладают доходом, превышающим 100000;

б) самый низкий доход среди 100 самых богатых лиц.

а) Имеем: $x = 100000$, откуда $y = \dfrac{2000000000}{100000^{1,5}} = 63{,}2$.

Таким образом, 63 человека имеют доход, превышающий 100000.

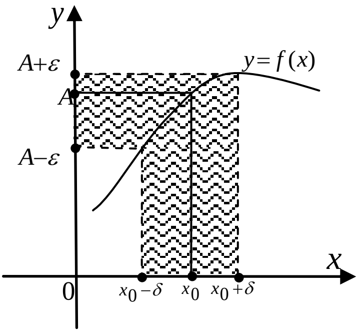
б) Имеем: $100 = \dfrac{2000000000}{x^{1,5}} \Rightarrow 100x^{1,5} = 2000000000 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^{1,5} = 20000000 \Rightarrow x = 73700.$$

Таким образом, самый низкий доход среди 100 богатейших лиц составляет 73700.

§ 3. Предел числовой последовательности. Предел функции.

Число A называется *пределом последовательности* $a_1, a_2, ..., a_n, ...$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N = N(\varepsilon)$ такое, что $|a_n - A| < \varepsilon$ при $n \geq N$.



В случае, если последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ имеет своим пределом число A, говорят также, что последовательность $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ *сходится* (или стремится) к числу A, и обозначают этот факт так: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Если последовательность не имеет предела, то говорят, что она *расходится*.

Пример 6.14. Используя определение предела, докажите, что последовательность $\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{4}, \frac{7}{5}, ..., \frac{2n-1}{n+1}, ...$ сходится к числу 2.

Обозначив $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$, выберем произвольное число $\varepsilon > 0$. Тогда $|a_n - 2| = \left|\frac{2n-1}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2n-1-2n-2}{n+1}\right| = \frac{3}{n+1}$ и неравенство $|a_n - 2| < \varepsilon$ будет выполнено тогда, когда $\frac{3}{n+1} < \varepsilon$, т.е. $n > \frac{3}{\varepsilon} - 1$. Положив $N = \left[\frac{3}{\varepsilon} - 1\right] + 1$ (где $[\alpha]$ означает целую часть α), получим, что для всех $n \geq N$ справедливо неравенство $|a_n - 2| < \varepsilon$. В соответствии с определением предела это и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2$.

Число A называется *предел функции* $y = f(x)$ *в точке* $x = x_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$. Это кратко записывается в виде $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

Если A есть предел $f(x)$ в точке x_0, то на графике это иллюстрируется следующим образом. Так как из неравенства $|x - x_0| < \delta$ следует неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$, то это значит, что для всех x, отстоящих от x_0 не далее чем δ, точка $M(x; y)$ графика функции $y = f(x)$ лежит внутри полосы шириной 2ε, ограниченной прямыми $y = A - \varepsilon$ и $y = A + \varepsilon$. Очевидно, что с уменьшением ε величина δ также уменьшается.

Односторонние пределы

Предел $\lim\limits_{x \to x_0 (x < x_0)} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0 - 0)$ называется *пределом слева* данной функции в точке $x = x_0$.

Предел $\lim\limits_{x \to x_0 (x > x_0)} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0 + 0)$ называется *пределом справа* данной функции.

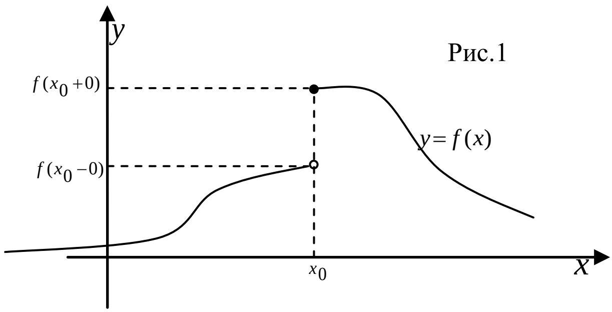
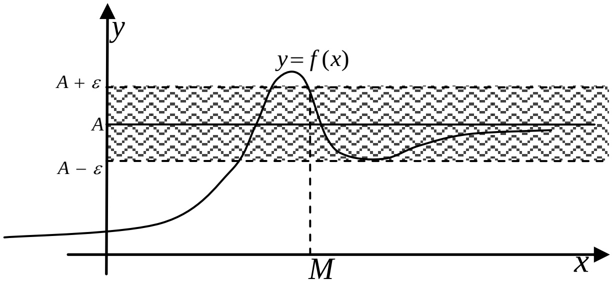


Рис.1

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ *в точке* $x = \pm\infty$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $M > 0$, что при всех $|x| > M$ выполняется неравенство $|f(x) - A| < \varepsilon$.



Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной в области* D, если существует постоянное число $M > 0$ такое, что для всех $x \in D$ $|f(x)| \le M$.

Пример 6.15. функция $y = \dfrac{2}{1+x^2}$ ограничена для всех $x \in \mathbf{R}$, так как в этой области $|f(x)| \le 2$.

§ 4. Теоремы о пределах.

1. Предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций, т.е.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0}(u(x) + v(x)) = \lim_{x \to x_0} u(x) + \lim_{x \to x_0} v(x)}$$

2. Предел произведения конечного числа функций равен произведению их пределов, т.е.

$$\boxed{\lim_{x \to x_0}(u(x) \cdot v(x)) = \lim_{x \to x_0} u(x) \cdot \lim_{x \to x_0} v(x)}$$

Следствие. Если $c = const$, то $\boxed{\lim_{x \to x_0} cu(x) = c \cdot \lim_{x \to x_0} u(x)}$.

3. Предел частного равен частному пределов

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} u(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} v(x)}},$$

если предел знаменателя не равен нулю $\lim\limits_{x\to x_0} v(x) \neq 0$.

Пример 6.16. Используя теоремы о пределах, найдите

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{2x^2-4x+1}.$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{2x^2-4x+1}=\frac{3\cdot 2-1}{2\cdot 2^2-4\cdot 2+1}=\frac{5}{1}=5.$$

Пример 6.17. Используя теоремы о пределах, найдите

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}.$$

$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Имеем неопределённость. «Раскроем» эту неопределённость (т.е. избавимся от неё), разложив числитель и знаменатель на множители и сократив их далее на общий множитель $x-2$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+2}{x-3}=\frac{4}{-1}=-4.$$

Пример 6.18. Используя теоремы о пределах, найдите

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}.$$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Имеем неопределённость. Домножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряжённое к числителю:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+8}-3}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}-3\right)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt{x+8}\right)^2-3^2}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x+8-9}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+8}+3\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+8}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}.$$

Замечательные пределы

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1} \qquad (6.1)$$

$$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e}, \qquad (6.2)$$

где e — иррациональное число, $e\approx 2{,}71828\ldots$

Пример 6.19. Найдите $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}$.

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Имеем неопределённость. Поделим числитель и знаменатель дроби под знаком предела на x и воспользуемся первым замечательным пределом (формула (6.1)):

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{x}}{\dfrac{\sin 3x}{x}}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{\sin 5x}{5x}\cdot 5}{\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot 3}=\frac{1\cdot 5}{1\cdot 3}=\frac{5}{3}.$$

Пример 6.20. В п.3 §2 была приведена формула вычисления конечной величины начальной суммы k через n лет в случае, если удельная процентная ставка есть i, а проценты начисляются m раз в году. Вычислим сумму k_n, если начисление процентов происходит непрерывно, т.е. $m\to\infty$.

$$k_n=\lim_{m\to\infty}k\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}=k\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{i}{m}\right)^{m\cdot n}=k\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m/i}\right)^{m\cdot n}=$$

$$=k\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{1}{m/i}\right)^{\frac{m}{i}\cdot ni}=\left|\begin{array}{l} m/i=x \\ \left(1+\dfrac{1}{m/i}\right)^{\frac{m}{i}}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x} \\ \text{т.к. } m\to\infty, \text{то и } x\to\infty \end{array}\right|=$$

$$=k\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot ni}=(\text{в силу (6.2)})=k_n=ke^{ni}.$$

§ 3. Непрерывность функции.

Функция $y = f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x = x_0$, если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Данное определение требует выполнения следующих условий:

- Функция $f(x)$ определена в точке x_0 и некоторой её окрестности;
- Пределы слева и справа существуют и равны между собой $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$;
- $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$.

Если в точке x_0 не выполняется хотя бы одно из указанных условий, то эта точка x_0 называется *точкой разрыва функции*.

В случае, когда $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, но эти пределы конечные, то точку x_0 называют *точкой разрыва первого рода*. (См., например, рис.1 §3).

Если хотя бы один из пределов $f(x_0 - 0)$ или $f(x_0 + 0)$ не существует или равен бесконечности, то x_0 называется точкой разрыва второго рода.

Величина $d = f(x_0 + 0) - f(x_0 - 0)$ называется *скачком функции* в точке разрыва x_0.

Если функция непрерывна во всех точках отрезка $[a;b]$, то она называется *непрерывной на этом отрезке*.

Из определения непрерывности функции и теорем о пределах следуют **теоремы**:

Сумма конечного числа непрерывных функций в точке x_0 непрерывна в этой точке.

Произведение конечного числа непрерывных функций в точке x_0 непрерывно в этой точке.

Частное двух непрерывных функций непрерывно в тех точках x_0, в которых знаменатель отличен от нуля.

Сложная функция, составленная из непрерывных функций, непрерывна в соответствующей точке.

Всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие функции, графика функции, области определения и значений функции.
2. Понятие четности, нечетности и периодичности функции.
3. Понятие возрастающей и убывающей функции.
4. Понятие сложной и обратной функции.
5. Элементарные функции и их свойства.
6. Функции в экономике (функция спроса, предложения и др.).
7. Понятие предела числовой последовательности.
8. Понятие предела функции в точке и в бесконечности.
9. Бесконечно большие и бесконечно малые функции и их свойства.
10. Первый и второй замечательные пределы.
11. Правила раскрытия неопределенностей.
12. Понятие непрерывности функции, классификация точек разрыва.
13. Свойства непрерывных функций.
14. Задача о непрерывном начислении процентов.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

9. Областью определения функции $\frac{x^3}{x^2-3}$ является промежуток:

а) $\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$; б) $(-3;3)$; в) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(-\sqrt{3};\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$;
г) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right)\cup\left(\sqrt{3};\infty\right)$.

2. Предел функции $\lim\limits_{x\to 3}(4x-7)$ равен:

а) 0; б) 10; в) 5; г) другой ответ.

3. Предел функции $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x+5}{5x}$ равен:

а) $\frac{1}{5}$; б) 1; в) $\frac{4}{5}$; г) 0.

4. Предел функции $\lim\limits_{x\to 5}\frac{x^2-25}{2-\sqrt{x-1}}$ равен:

а) $\frac{1}{5}$; б) 40; в) $\frac{4}{5}$; г) -40.

5. Предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3-8x+12}{x^2-7x+6}$ равен:

а) $-\dfrac{1}{5}$; б) $\dfrac{4}{5}$; в) 2; г) -1.

6. Предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tgx}{x}$ равен:

а) $-\dfrac{1}{5}$; б) 1; в) 0; г) -1.

7. Предел функции $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2\frac{x}{3}}{x^2}$ равен:

а) $\dfrac{1}{5}$; б) 1; в) $\dfrac{1}{9}$; г) -1.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 6.1. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt[4]{x^2-4}$.

Ответ: $D(f)=(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$.

Задача 6.2. Вычислите $\lim\limits_{x\to -1}(4x+3)$.

Ответ: -1.

Задача 6.3. Вычислите $\lim\limits_{x\to -1+0}\dfrac{x^2+5}{x^2-1}$.

Ответ: $-\infty$.

Задача 6.4. Вычислите предел функции $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}$.

Ответ: $\dfrac{9}{5}$.

Задача 6.5. Вычислите предел функции $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{\sqrt{5-x}-2}$.

Ответ: 2.

Задача 6.6. Вычислите предел функции $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^2-3x-9}{x^2-x-6}$.

Ответ: 2.

МОДУЛЬ 7. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИИ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.

§ 1. Производная функции, её геометрический, механический и экономический смысл.

Любое изменение независимой переменной x, равное разности $x_2 - x_1 = \Delta x$, называется *приращением* этой *переменной*.

Разность $f(x_2) - f(x_1) = \Delta y$ называется *приращением функции* на отрезке $[x_1; x_2]$ или $\Delta y = f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)$, где $x_2 = x_1 + \Delta x$.

Производной функции $y = f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при условии, что приращение аргумента стремится к нулю, т.е.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

Функция, имеющая в данной точке конечную производную, называется *дифференцируемой* в этой точке.

Пример 7.1. Пользуясь определением, найдите производную функции $y = x^2$.

Придадим аргументу x приращение Δx. Тогда соответствующее приращение Δy функции будет иметь вид

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = (x + \Delta x)^2 - x^2 = x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - x^2 =$$

$$= 2x\Delta x + (\Delta x)^2 = \Delta x(2x + \Delta x).$$

Отсюда находим предел отношения $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ в точке x при $\Delta x \to 0$:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x.$$

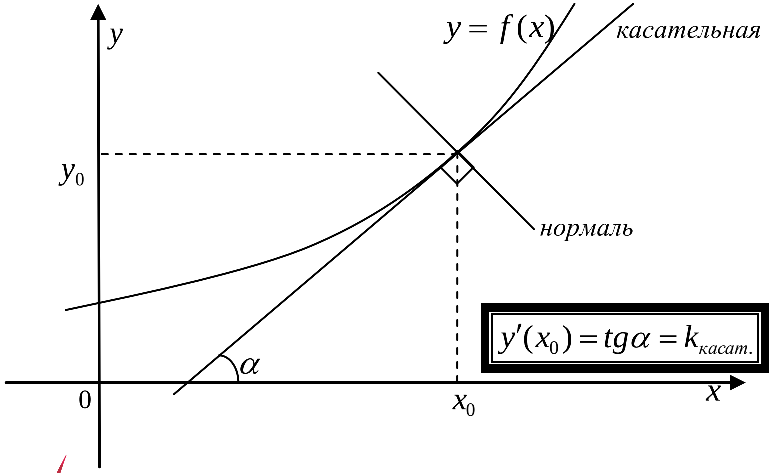
Таким образом, $y' = \left(x^2\right)' = 2x$.

Теорема. Если функция дифференцируема в некоторой точке $x = x_0$, то она непрерывна в этой точке.

Однако, обратное утверждение вообще говоря не верно. Существуют непрерывные, но не дифференцируемые функции. Например, $y = |x|$ при $x = 0$.

Геометрический смысл производной

Производная функции в точке x равна *угловому коэффициенту касательной*, проведенной к кривой $y = f(x)$ в точке с абсциссой x.



$$\boxed{y'(x_0) = tg\alpha = k_{касат.}}$$

Механический смысл производной

Скорость прямолинейного движения материальной точки в момент времени t есть производная от пути s по времени t.

$$\boxed{v = s_t'}$$

Физический смысл производной

Обобщая, можно сказать, что если функция $y = f(x)$ описывает какой-либо физический процесс, то производная y' есть *скорость* протекания этого процесса.

Экономический смысл производной

Всякая хозяйственная (экономическая) деятельность человека осуществляется им для достижения некоторого результата y и требует определённых усилий x. Если функция $y = f(x)$ описывает некоторый экономический процесс, то её производная характеризует *предельную эффективность* этого процесса.

Пример 7.2. Пусть x — объём выпущенной продукции, а y — затраты на её производство.

Предположим, что количество продукции увеличивается на Δx. Количеству продукции $x + \Delta x$ соответствуют издержки производства $y(x + \Delta x)$. Следовательно, приращению количества продукции соответствует приращение издержек производства продукции $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$. Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ представляет собой среднее приращение издержек производства (т.е. приращение издержек производства на единицу приращения количества продукции). Тогда производная $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ описывает предельные издержки производства при заданном объёме x выпускаемой продукции.

Пример 7.3. Пусть x — объём продаж, а y — общая выручка от них. Тогда производная y' характеризует предельную выручку на заданном уровне продаж x.

При анализе экономических явлений часто предпочитают использовать не производную функции, а особое понятие — эластичность функции.

Эластичностью функции $E_x(y)$ называют предел отношения относительного приращения функции к относительному приращению аргумента при $\Delta x \to 0$, т.е.

$$E_x(y)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(\dfrac{\Delta y}{y}\right)}{\left(\dfrac{\Delta x}{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{y}\cdot\frac{x}{\Delta x}\right)=\frac{x}{y}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{x}{y}f'(x).$$

Эластичность относительно x есть приближенный процентный прирост функции (повышение или понижение), соответствующий приращению независимой переменной на 1%. В этом заключается **экономический смысл эластичности функции**.

§ 2. Таблица производных.

Приведём в таблице производные как простых, так и сложных функций, которые подробнее рассмотрим в следующем параграфе.

	Простая функция	*Сложная функция*
1.	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbf{R}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u',\ n \in \mathbf{R}$
2.	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
3.	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
4.	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$(\ln u)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
5.	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$(\log_a u)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
6.	$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$
7.	$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$
8.	$(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$(tgu)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9.	$(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$(ctgu)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10.	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11.	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12.	$(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$(arctgu)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13.	$(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$(arcctgu)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

§ 3. Основные правила дифференцирования. Производная сложной функции.

Если функции u, v дифференцируемы, то

$$\boxed{c' = 0, \text{ где } c - const}$$

$$x' = 1$$
$$(cu)' = cu'$$
$$(u+v)' = u' + v'$$
$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2},\ v \neq 0$$

Пример 7.4. Найдите производную функции $y = x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 2x - 4$.

Воспользуемся формулой 1 таблицы производных и правилами дифференцирования.

$$y' = \left(x^3 - \frac{1}{5}x^2 + 2x - 4\right)' = \left(x^3\right)' - \frac{1}{5}\left(x^2\right)' + 2(x)' + 0 = 3x^2 - \frac{1}{5} \cdot 2x + 2.$$

Пример 7.5. Найдите производную функции

$$y = 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{x^2}{7} + \frac{7}{x^2} - \frac{6}{\sqrt{x}} - 3x + 10.$$

Преобразуем функцию с помощью следующих правил:

Действия со степенями

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$
$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$
$$\left(a^m\right)^n = a^{mn}$$
$$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Таким образом, имеем:

$$y = 5x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{7}x^2 + 7x^{-2} - 6x^{-\frac{1}{2}} - 3x + 10.$$

Воспользуемся формулой 1 таблицы производных и правилами дифференцирования.

$$y' = \left(5x^{\frac{2}{3}} + \frac{1}{7}x^2 + 7x^{-2} - 6x^{-\frac{1}{2}} - 3x + 10\right)' =$$

$$= 5\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' + \frac{1}{7}\left(x^2\right)' + 7\left(x^{-2}\right)' - 6\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' - 3(x)' + 0 =$$

$$= 5 \cdot \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} + \frac{1}{7} \cdot 2x + 7 \cdot (-2)x^{-3} - 6\left(-\frac{1}{2}\right)x^{-\frac{1}{2}-1} - 3 =$$

$$= \frac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{7}x - 14x^{-3} + 3x^{-\frac{3}{2}} - 3.$$

Производная сложной функции.

Если $y = f(u)$, где $u = \varphi(x)$, т.е. $y = f(\varphi(x))$ – сложная функция, то

$$\boxed{y'_x = f'_u \cdot u'_x}$$

или в других обозначениях $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$.

Это правило легко распространить на цепочку из любого конечного числа дифференцируемых функций.

Пример 7.6. Найдите производную функции $y = \sin(5x)$.

Воспользуемся формулой 6 таблицы производных сложных функций: $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$

$$y' = (\sin(5x))' = \cos(5x) \cdot (5x)' = \cos(5x) \cdot 5 = 5\cos(5x).$$

Пример 7.7. Найдите производную функции

$$y = \ln(\sin(5x^3 - 7x + 1)).$$

$$y' = \left(\ln(\sin(5x^3 - 7x + 1))\right)' =$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{формула 4}\\ (\ln u)'=\frac{1}{u}\cdot u'\end{array}\right|=\frac{1}{\sin(5x^3-7x+1)}\cdot\left(\sin(5x^3-7x+1)\right)'=$$

$$=\left|\begin{array}{c}\text{формула 6}\\ (\sin u)'=\cos u\cdot u'\end{array}\right|=\frac{1}{\sin(5x^3-7x+1)}\cdot\cos(5x^3-7x+1)\left(5x^3-7x+1\right)'=$$

$$=\frac{1}{\sin(5x^3-7x+1)}\cdot\cos(5x^3-7x+1)\left(15x^2-7\right).$$

Производная обратной функции.

Если для функции $y=f(x)$ существует обратная функция $x=\varphi(y)$, имеющая производную $\varphi'(y)\neq 0$, то справедлива формула

$$\boxed{f'(x)=\frac{1}{\varphi'(y)}}.$$

§ 4. Правило Лопиталя и его применение к раскрытию неопределённостей.

Теорема. Пусть функции $y=f(x)$ и $y=\varphi(x)$ на некотором отрезке $[x_0;b]$ удовлетворяют условиям теоремы Коши и в точке $x=x_0$ одновременно обращаются в нуль или равны бесконечности. Тогда, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$, то выполняется равенство

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}}\qquad(7.1)$$

Правило применимо и в случае, когда $x_0=\pm\infty$.

Пример 7.8. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{x^3-3x-2}$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^3+x-10}{x^3-3x-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{matrix}\text{применим}\\ \text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to 2}\frac{\left(x^3+x-10\right)'}{\left(x^3-3x-2\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{3x^2+1}{3x^2-3}=\frac{3\cdot 4+1}{3\cdot 4-3}=\frac{13}{9}.$$

Пример 7.9. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{(\sin 5x)'}{(3x)'}=\lim_{x\to 0}\frac{5\cos 5x}{3}=\frac{5\cdot\cos 0}{3}=\frac{5\cdot 1}{3}=\frac{5}{3}.$$

Пример 7.10. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+1}{2e^{2x}-1}$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{e^{2x}+1}{2e^{2x}-1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(e^{2x}+1\right)'}{\left(2e^{2x}-1\right)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2e^{2x}}{4e^{2x}}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

Правило Лопиталя применяется и для раскрытия неопределенностей вида: $0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 0^0; 1^∞; ∞^0.

Пример 7.11. Найдите предел $\lim\limits_{x\to\infty}x^2\cdot e^{-x}$.

$$\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=(\infty\cdot 0)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{e^x}=0.$$

Неопределенности вида 0^0; 1^∞; ∞^0 можно раскрыть, предварительно вычислив предел от логарифма функции.

Пример 7.12. Найдите предел $\lim\limits_{x\to 0}x^x$.

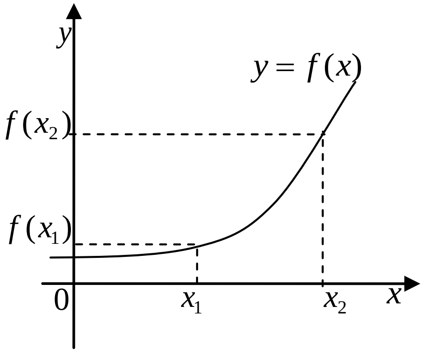
$\lim\limits_{x\to 0} x^x = (0^0)$. Обозначим $y = x^x$. Тогда

$$\lim_{x\to 0}\ln y = \lim_{x\to 0}\ln(x^x) = \lim_{x\to 0} x\ln x = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} =$$

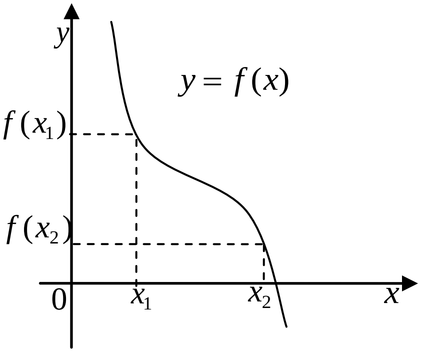
$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\left(-\frac{x^2}{x}\right) = -\lim_{x\to 0} x = 0.$$

§ 5. Признаки возрастания и убывания функций. Интервалы монотонности функций.

Если для всех точек отрезка $[a;b]$ при $x_1 < x_2$ выполняется равенство $f(x_1) < f(x_2)$, то функция $f(x)$ называется *возрастающей* на $[a;b]$.



При выполнении условий $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$ функция $f(x)$ называется *убывающей* на $[a;b]$.



Интервалы, в которых функция $f(x)$ только возрастает или только убывает, называются *интервалами монотонности* функции.

Признак возрастания. Дифференцируемая функция $f(x)$ возрастает на отрезке $[a;b]$ тогда и только тогда, когда её производная $f'(x)>0$.

Признак убывания. Дифференцируемая функция $f(x)$ убывает на отрезке $[a;b]$ тогда и только тогда, когда её производная $f'(x)<0$.

В точках, отделяющих интервалы монотонности функции, производная функции обращается в нуль или не существует. Эти точки называются *критическими*.

Для нахождения интервалов монотонности функции $f(x)$ необходимо найти все её критические точки и установить знак производной в каждом из интервалов, на которые критические точки разбивают область существования функции.

Пример 7.13. Найдите интервалы монотонности функции $f(x)=x^3-6x^2+5$.

Функция определена на всей числовой оси. Найдём её производную.

$$f'(x)=\left(x^3-6x^2+5\right)'=3x^2-12x=3x(x-4).$$

Найдём критические точки, приравняв производную к нулю.

$3x(x-4)=0 \Rightarrow x=0,\ x=4$ – критические. Результаты исследования занесём в таблицу:

	$(-\infty;0)$	0	$(0;4)$	4	$(4;+\infty)$
f'	+	0	–	0	+

f	↗	5	↘	-27	↗

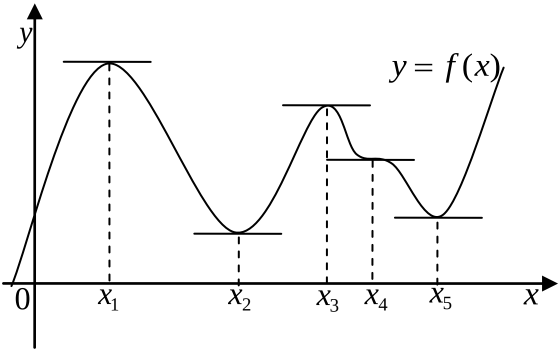
Таким образом, функция $f(x)$ возрастает а интервалах $(-\infty;0)$ и $(4;+\infty)$, а убывает на интервале $(0;4)$.

§ 6. Экстремум функции. Необходимый признак.

Точка x_1 называется *точкой максимума* (*maximum*) функции $f(x)$, если значение функции в этой точке больше её значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_1, т.е. $f(x_1+\Delta x) < f(x_1)$ для любого Δx (Δx – мало по величине).

Точка x_2 называется *точкой минимума* (*minimum*) функции $f(x)$, если значение функции в этой точке меньше её значений во всех точках некоторого интервала, содержащего точку x_2, т.е. $f(x_2+\Delta x) > f(x_2)$.

Точки, в которых функция достигает максимума или минимума, называются *точками экстремума* функции, а значения функции в этих точках называют *экстремальными*.



Функция, заданная кривой на рисунке выше, в точках x_1 и x_3 достигает максимума, в точках x_2 и x_5 – минимума, в точке x_4 – экстремума нет. Очевидно, что функция имеет производную, равную нулю в критических точках. Касательная к кривой в этих точках параллельна оси Ox.

Необходимый признак экстремума. Если дифференцируемая функция достигает в некоторой точке экстремума, то её производная в этой точке равна нулю или не существует.

§ 7. Достаточные признаки экстремума функции.

Первый достаточный признак. Пусть функция $f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку x_0 и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, быть может самой точки x_0). Тогда, если:

а) $f'(x)>0$ при $x<x_0$, $f'(x)<0$ при $x>x_0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ достигает максимума;

б) $f'(x)<0$ при $x<x_0$, $f'(x)>0$ при $x>x_0$, то в точке x_0 функция $f(x)$ достигает минимума.

Второй достаточный признак экстремума. Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке x_0 производную $f'(x_0)=0$ и непрерывную вторую производную $f''(x)$. Тогда, если $f''(x_0)<0$ в точке x_0 будет максимум, а если $f''(x_0)>0$ в точке x_0 будет минимум.

Пример 7.14. В примере 7.13 точки $x=0,\ x=4$ являются точками экстремума. В точке $x=0$ функция достигает максимума, в точке $x=4$ функция достигает минимума.

Пример 7.15. Издержки предприятия выражаются формулой $k(x)=x^3-6x^2+15x$, где x – объём производства. При каком объёме производства средние издержки будут минимальными?

Средние издержки выражаются формулой $\dfrac{k(x)}{x}=\dfrac{x^3-6x^2+15x}{x}=x^2-6x+15$. Найдем минимум этой функции.

$$\left(\frac{k(x)}{x}\right)'=\left(x^2-6x+15\right)'=2x-6.$$

$$2x-6=0\Rightarrow 2x=6\Rightarrow x=3.$$

Найдем вторую производную функции.

$\left(\frac{K(x)}{x}\right)'' = (2x-6)' = 2 > 0$, значит, по второму достаточному признаку экстремума при $x=3$ средние издержки достигают минимума.

§ 8. Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.

Всякая функция может принимать на отрезке наибольшее и наименьшее значения в критических точках, лежащих внутри отрезка или на его концах.

Пример 7.16. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 6$ на отрезке $[-2;2]$.

Находим критические точки данной функции.

$$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 6)' = 3x^2 - 6x - 9.$$

$$y' = 0 \Rightarrow 3x^2 - 6x - 9 = 0;$$

$$x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$D = (-2)^2 - 4\cdot 1\cdot(-3) = 4 + 12 = 16;$$

$$x_1 = \frac{-(-2) - \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{-2}{2} = -1;$$

$$x_2 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2\cdot 1} = \frac{6}{2} = 3$$

Отрезку $[-2;2]$ принадлежит только одна критическая точка $x_1 = -1$. Вычисляем значения функции в этой точке и на концах отрезка:

$$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 6 = -1 - 3 + 9 + 6 = 11;$$

$$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 6 = -8 - 12 + 18 + 6 = 4;$$

$$y(2) = 2^3 - 3\cdot 2^2 - 9\cdot 2 + 6 = 8 - 12 - 18 + 6 = -16.$$

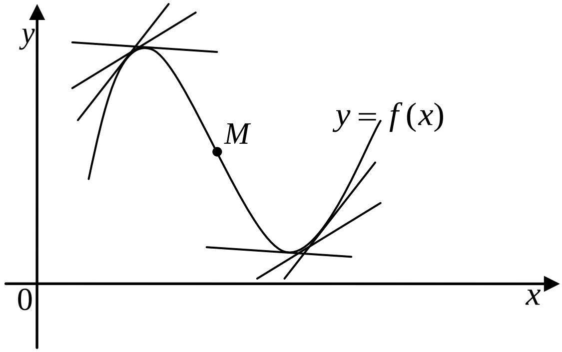
Сравнивая полученные значения, найдем, что $y(-1) = 11$ есть наибольшее значение функции, а $y(2) = -16$ – наименьшее значение функции на отрезке $[-2;2]$.

§ 9. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба.

Кривая, определяемая данной функцией, называется выпуклой вверх или просто *выпуклой* на интервале $(a;b)$, если график расположен ниже любой касательной, проведенной к графику функции в точках интервала $(a;b)$.

Кривая называется выпуклой вниз или *вогнутой* на интервале $(a;b)$, если график расположен выше любой касательной, проведённой к графику функции в точках интервала $(a;b)$.

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба*. В точках перегиба вторая производная обращается в нуль или не существует. На рисунке M – точка перегиба.

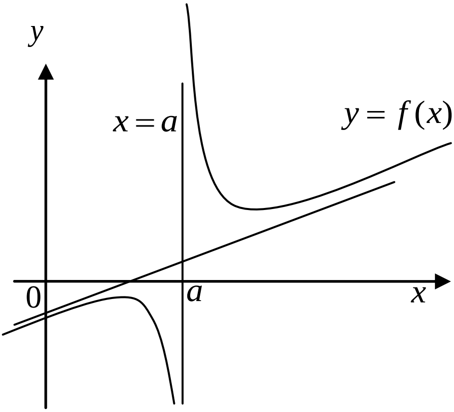


Для нахождения интервалов выпуклости и вогнутости и точек перегиба кривой, определяемой функцией $y = f(x)$ находят все точки x, где $f''(x) = 0$ или не существует и исследуют знак второй производной в интервалах, расположенных между этими точками.

Точки перегиба будут в тех точках x, где $f''(x) = 0$, при переходе через которые вторая производная изменяет знак.

§ 10. Асимптоты графика функции.

Вертикальные асимптоты. Если существует число a такое, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\pm\infty$, то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой кривой $y=f(x)$.



Наклонные асимптоты. Уравнение наклонных асимптот графика функции $y=f(x)$ ищется в виде $y=kx+b$, где

$$\boxed{k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}\quad,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)}.$$

Если хотя бы один из пределов не существует, то кривая $y=f(x)$ не имеет наклонных асимптот. Если $k=0$,то асимптота параллельна оси Ox.

§ 11. Общая схема исследования функции и построение её графика.

С целью изучения процесса, описываемого заданной функцией, проводится её исследование по следующей схеме.

1. Находится область определения функции, точки пересечения с осями координат, точки разрыва функции.
2. Устанавливается чётность или нечётность функции, её периодичность.
3. Находятся точки экстремума функции, вычисляются её экстремальные значения, находятся интервалы монотонности функции.
4. Находятся точки перегиба графика функции, интервалы выпуклости и вогнутости кривой.
5. Находятся асимптоты функций.

6. На координатную плоскость наносятся все найденные характерные точки, и по результатам исследования строится график функции.

Пример 7.17. Исследуйте функцию $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ и постройте её график.

1. Функция определена для всех $x\neq -1$, т.е. область определения $D(y)=(-\infty;-1)\cup(-1;+\infty)$.

   В точке $x=-1$ функция терпит разрыв второго рода, т.к.

   $$\lim_{x\to -1+0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty,\quad \lim_{x\to -1-0}\frac{x^3}{2(x+1)^2}=-\infty.$$

   Если $x=0$, то $y=0$, значит, кривая проходит через начало координат.

2. $y(-x)=-\dfrac{x^3}{2(-x+1)^2}$, значит, функция не является ни чётной, ни нечётной.

   Очевидно, что данная функция и непериодическая.

3. $y'=\dfrac{3x^2(x+1)^2-2(x+1)x^3}{2(x+1)^4}=\dfrac{3x^2(x+1)-2x^3}{2(x+1)^3}=\dfrac{x^3+3x^2}{2(x+1)^3}$.

   $y'=0$ при $x=-3$ и $x=0$.

	$(-\infty;-3)$	-3	$(-3;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y'	$+$	0	$-$	$+$	0	$+$
y	$\nearrow$	$-\dfrac{27}{8}$	$\searrow$	$\nearrow$	0	$\nearrow$

   Поэтому функция возрастает в интервалах $(-\infty;-3)$ и $(-1;+\infty)$, убывает в интервале $(-3;-1)$. Точка $x=-3$ является точкой максимума и $y_{\max}=y(-3)=-\dfrac{27}{8}\approx-3{,}4$.

4. $y''=\dfrac{(3x^2+6x)(x+1)^3-3(x+1)^2(x^3+3x^2)}{2(x+1)^6}=$

$$= \frac{(3x^2+6x)(x+1)-3(x^3+3x^2)}{2(x+1)^4} = \frac{6x}{2(x+1)^4}.$$

$y''=0$ при $x=0$.

	$(-\infty;-1)$	$(-1;0)$	0	$(0;+\infty)$
y''	$-$	$-$	0	$+$
y	$\frown$	$\frown$	0	$\smile$

Точка $(0;0)$ является точкой перегиба.

5. $x=-1$ – вертикальная асимптота. Наклонные асимптоты ищем в виде $y=kx+b$.

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2}{2(x+1)^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{c}\text{применим}\\ \text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right|=$$

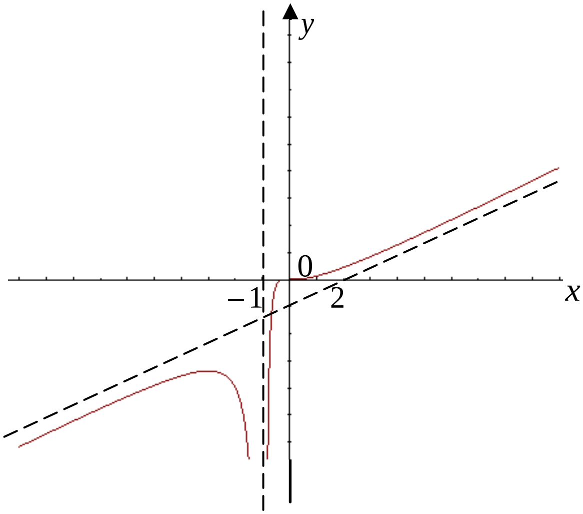
$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x}{2\cdot 2(x+1)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{array}{c}\text{применим}\\ \text{правило}\\ \text{Лопиталя}\end{array}\right|=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}.$$

$$b=\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{2(x+1)^2}-\frac{1}{2}x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3-x^3-2x^2-x}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2x^2-x}{2(x+1)^2}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-2-1/x}{2(1+1/x)^2}=-1.$$

Следовательно, прямая $y=\frac{1}{2}x-1$ является асимптотой графика функции.

6. По результатам исследования строим график функции.



Пример 7.18. Открытый чан имеет форму цилиндра. Объём чана равен V. Каковы должны быть радиус основания и высота чана, чтобы его поверхность была наименьшей?

Площадь поверхности открытого цилиндрического чана $S = \pi r^2 + 2\pi r h$, где r – радиус основания, h – высота цилиндра. Объём цилиндра $V = \pi r^2 h$, откуда $h = \dfrac{V}{\pi r^2}$. Это значит, что

$$S = \pi r^2 + 2\pi r \cdot \frac{V}{\pi r^2} = \pi r^2 + \frac{2V}{r}.$$

Найдем значение радиуса r, при котором функция $S = \pi r^2 + \dfrac{2V}{r}$ достигает минимума:

$$S' = 2\pi r - \frac{2V}{r^2},\ S' = 0 \Rightarrow 2\pi r - \frac{2V}{r^2} = 0,$$

$$\pi r - \frac{V}{r^2} = 0,$$

$$\frac{\pi r^3 - V}{r^2} = 0,$$

$$\pi r^3 - V = 0,$$

$$r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Так как $S''=2\pi+\frac{4V}{r^3}>0$ при $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$, то функция $S(r)$ достигает при $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ минимума. $h=\frac{V}{\pi r^2}=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$.

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Определение производной.
2. Основные правила дифференцирования.
3. Производная сложной и неявной функции.
4. Основные формулы дифференцирования.
5. Производные высших порядков.
6. Экономический смысл производной.
7. Понятие дифференциала функции и его свойства.
8. Правило Лопиталя и его использование для раскрытия неопределенностей.
9. Признаки возрастания и убывания функции.
10. Экстремумы функции. Необходимое и достаточное условия экстремума.
11. Выпуклость, вогнутость графика функции. Точка перегиба.
12. Асимптоты графика функции.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Найдите производную функции $y=12x-x^2+x^4$:

 а) $y=12-x+x^3$; б) $y=-x-x^3$;

 в) $y=12-2x+4x^3$; г) другой ответ.

2. Среди приведенных функций укажите те, производная которых равна $8x$:

 а) $y=(2x-4)^4$; б) $y=8x+5$;

 в) $y=4x^2+10$; г) $y=4(x-5)(x+10)$.

3. Найдите производную функции $y=4\cos 2x$ в точке $x_0=-\frac{3}{4}\pi$ **:**

 а) 8; б) $4\sqrt{2}$; в) -8; г) другой ответ.

4. Найдите производную функции $y=tg^2 2x+1$:

а) $\frac{-2\sin 2x}{\cos^3 2x}$; б) $\frac{\sin 2x}{\cos^3 2x}$; в) $\frac{-2\sin 2x}{\cos^2 2x}$; г) $\frac{4tg 2x}{\cos^2 2x}$.

5. Найдите производную функции $y=\frac{1}{3}x^3+x^2+2$:

а) $y=x^2+2x+2$; б) $y=x^2+x$;

в) $y=x^2+2x$; г) другой ответ.

6. Найдите производную функции $y=\sin\frac{x}{2}$:

а) $2\cos\frac{x}{2}$; б) $\frac{1}{2}\cos\frac{x}{2}$; в) $2\sin\frac{x}{2}$; г) $\cos\frac{x}{2}$.

7. Функция $y=x^2-4x+4$:

а) убывает в интервале $(-\infty;2)$ и возрастает в интервале $(2;\infty)$;

б) убывает в интервале $(-\infty;-2)\cup(-2;2)$ и возрастает в интервале $(2;\infty)$;

в) убывает в интервале $(-\infty;-2)$ и возрастает в интервале $(-2;\infty)$;

г) убывает в интервале $(-\infty;2)$, не возрастает.

8. Значение минимума функции $y=x^3-12x$:

а) $y(-2)=16$; б) $y(2)=-16$; в) $y(\sqrt{2})=1$; г) имеет бесконечно много решений.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 7.1. Найдите производную функции $f(x)=2x^2+1$ в точке $x_0=1$.

Ответ: $f'(1)=4$.

Задача 7.2. Найдите производную функции $y=\frac{\sqrt{x}}{x^2-1}$.

Ответ: $f'(x)=\frac{-3x^2-1}{2\sqrt{x}(x^4-2x^2+1)}$.

Задача 7.3. Найдите производную функции $y=3^x\cdot(x^4-3x+10)$.

Ответ: $f'(x)=3^x(x^4\ln 3-3x\ln 3+10\ln 3+4x^3-3)$.

Задача 7.4. Найдите производную функции $y=\sin(3x^2+6x-2)$.

Ответ: $f'(x)=\cos(3x^2+6x-2)\cdot(6x+6)$.

Задача 7.5. Найдите производную функции $y=\ln(\frac{5}{x^3}-3\sqrt[4]{x^5}-x+7)$.

Ответ: $f'(x)=\dfrac{-\dfrac{15}{x^4}-\dfrac{15}{4}\sqrt[4]{x}-1}{\dfrac{5}{x^3}-3\sqrt[4]{x^5}-x+7}$.

Задача 7.3. Найдите производную функции $y=\ln\arcsin 6x$.

Ответ: $f'(x)=\dfrac{6}{\arcsin 6x\sqrt{1-36x^2}}$.

Задача 7.4. Найдите в точке $x=0$ производную функции $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3e^{4x}+5}}$ и дифференциал функции в этой точке.

Задача 7.5. Найдите производную функции $f(x)=\dfrac{\cos 7x}{\sqrt{1-3x^4}}$.

Задача 7.6. Найдите производную функции $y=3^{tgx}\cdot\sin 5x$.

Задача 7.7. Найдите производную функции $y=5^{arctgx}$.

Задача 7.8. Составьте уравнения касательной и нормали к кривой $y=\sqrt[3]{x}-1$ в точке с абсциссой $x_0=8$.

Задача 7.9. Для производственной функции $y=x\ln\left(x^3+1\right)$ определите предельную эффективность ресурса при $x=1$.

Задача 7.10. Для производственной функции $y=x\ln\left(x^3+1\right)$ найдите эластичность $E_x(y)$ при $x=1$.

Задача 7.11. Найдите темп роста объема выпуска для производственной функции $y=x\ln\left(x^3+1\right)$ при $x=1$.

Задача 7.12. Найдите производную $\dfrac{dy}{dx}$ функции $x^3y+y^4-x-7=0$ в точке $M_0(2;1)$.

Задача 7.13. Найдите дифференциал функции $y = x\cos(3x)$.

Задача 7.14. Найдите дифференциал функции $y = 2arctg\sqrt{\sin x}$ в точке $x_0 = \dfrac{\pi}{6}$.

Задача 7.15. Для $f(x) = \sqrt{3x-2}$ найдите вторую производную $f''(x)$.

Задача 7.16. Точка движется прямолинейно по закону $S(t) = \dfrac{t^3}{3} - 4t^2 + 5t - 2$. В какой момент времени ускорение равно нулю?

Задача 7.17. Вычислите пределы, используя правило Лопиталя:

а) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x^2+2}{x^2-1+\ln x}$; б) $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{3e^{2x}+1}{4e^{5x}-x}$.

Задача 7.18. Найдите экстремумы функции $f(x) = 3x - x^3$.

Задача 7.19. Найдите экстремумы функции $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$.

Задача 7.20. С помощью производной первого порядка найдите интервалы монотонности и точки экстремума функции $y = \dfrac{3}{4}x^4 - x^3 - 9x^2 + 7$.

Задача 7.21. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \dfrac{4}{3}x^3 - 3x^2$ на отрезке $[1;4]$.

Задача 7.22. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 120x + 1$ на отрезке $[1;9]$.

Задача 7.23. Предприятие выпускает некий товар в объёме, превосходящем 1 экземпляр. Издержки производства (в у.е.) зависят от объёма выпущенного товара (x) и определяются формулой $f(x) = 4 + 15x$. Спрос (цена на товар) также зависит от объёма производства и определяется формулой $g(x) = -x^2 + 20x + 2$. Найдите объём производства товара, при котором прибыль будет максимальной.

МОДУЛЬ 8. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

§ 1. Определение функции

нескольких переменных

Функция, определенная на некотором множестве X n-мерного векторного пространства, называется *функцией n аргументов*:

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты точки $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ данного множества.

Переменная величина z называется *функцией двух переменных* величин x и y на множестве D, если каждой паре значений $(x, y) \in D$ соответствует единственное значение величины z.

Символически функция двух переменных обозначается так: $z = f(x, y),\ z = F(x, y),\ z = z(x, y)$ и т.д.

Переменные x и y называются *независимыми переменными* или *аргументами функции*, а множество D — *областью определения функции*.

Например, $z = f(x, y) = 2x^3 + 3x^2 y + 6xy - y^3$ — функция двух переменных.

§ 2.Некоторые многомерные функции, используемые в экономике.

Многомерная функция полезности $u(X) = u(x_1, x_2, \ldots x_n)$ — субъективная числовая оценка данным индивидом полезности u набора $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ товаров. Она неубывающая, т.е. $u(X_1) \le u(X_2)$, *если* $X_1 \le X_2$.

Типичная функция полезности двух переменных $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$..

$I(Y) = I(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ — *функция издержек* —зависимость издержек в стоимостной форме от объёмов $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ выпускаемой продукции. Она также неубывающая.

Многофакторная производственная функция $y = R(X) = R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — зависимость объёма или стоимости y выпускаемой продукции от объёма $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ перерабатываемых ресурсов. Она также неубывающая.

Функция Кобба-Дугласа. Наиболее известной производственной функцией является функция Кобба-Дугласа $y = AK^{\alpha} L^{\beta}$, где A, α, β — неотрицательные константы и $\alpha + \beta \le 1$, а K — объём фондов либо в стоимостном, либо в натуральном выражении (скажем, число станков); L — объём трудовых ресурсов (число рабочих, число человеко-дней и т.п.) и, наконец, y — выпуск продукции в стоимостном или натуральном выражении.

Приведём ещё два примера функции многих переменных с экономическим содержанием.

Пример 8.1. Предприятие имеет участок производства и склад. Склад обеспечивает ритмичность работы – если продукцию не удаётся сбыть сразу, то её можно хранить на складе. Наличие склада приводит к издержкам хранения. В простейшем случае эти издержки за единицу времени пропорциональны числу изделий i, хранящихся на складе, т.е. они равны hi, где h — издержки хранения одного изделия в течение одной единицы времени. Издержки производства за единицу времени в простейшем случае также равны cu, где u — число произведённых за единицу времени изделий, а c — себестоимость производства одного изделия. К этим издержкам добавляются ещё накладные расходы K — это расходы в единицу времени на поддержание рабочего состояния предприятия, они практически не зависят от интенсивности работы и включают расходы на охрану, дежурных рабочих и т.д. Все издержки I за единицу времени получаются равными $I = K + cu + hi$.

Пример 8.2. Пусть M — это общее количество денег, V — скорость их обращения (сколько раз каждый рубль, доллар участвуют в расчётах в среднем за год), Y — национальный продукт или доход (*национальный продукт* – это все готовые товары и услуги, произведённые в экономической системе в стоимостном выражении; *национальный доход* – это все выплаты, получаемые домашними хозяйствами: заработная плата, рента, прибыль; национальный продукт и национальный доход численно равны). Пусть P — это уровень цен (среднее взвешенное значение цен готовых товаров и услуг, выраженное относительно базового показателя, принятого за единицу). Связывая все эти величины, получим уравнение денежного обращения — основное уравнение классической количественной теории денег, так называемое *уравнение обмена Фишера*: $MV = PY$. Любая из переменных M, V, P, Y может рассматриваться как функция трёх остальных.

Например, $P = \dfrac{MV}{Y}$ и видим, что если государство увеличит число денег M в обращении в 2 раза (т.е. просто деньги напечатают), то и цены возрастут в два раза (при условии, что остальные величины, т.е. V, Y, останутся неизменными). Такие действия чаще всего и есть причина инфляции.

§ 3. Частные производные функции нескольких переменных.

Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных. Нададим независимой переменной x приращение Δx, оставляя при этом переменную y неизменной. Тогда z получит приращение

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y),$$

которое называется частным приращением z по x.

Аналогично, если независимой переменной y нададим приращение Δy, оставляя при этом неизменной переменную x, то z получит приращение

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y),$$

называемое частным приращением z по y.

Частной производной по x от функции z называется предел отношения частного приращения $\Delta_x z$ к приращению Δx при стремлении Δx к нулю.

Таким образом по определению,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Эта производная обозначается одним из символов

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial x}, \quad z'_x, \quad \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f'_x(x,y)}.$$

Аналогично определяется частная производная от функции $z = f(x,y)$ по переменной y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}.$$

Она обозначается одним из символов

$$\boxed{\frac{\partial z}{\partial y}, \quad z'_y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}, \quad f'_y(x,y)}.$$

Пример 8.3. Найдите значения частных производных функции $z = 2x^3 + 3x^2y + 6xy - y^3$ в точке $M_0(-1{,}2)$.

Считая y постоянной и дифференцируя z, как функцию переменной x, находим частную производную по x:

$$z'_x = (2x^3)'_x + (3x^2y)'_x + (6xy)'_x - (y^3)'_x = 6x^2 + 6xy + 6y - 0 =$$

$$= 6x^2 + 6xy + 6y.$$

Вычислим значение этой производной в точке M_0:

$$z'_x(-1{,}2) = 6(-1)^2 + 6\cdot(-1)\cdot 2 + 6\cdot 2 = 6.$$

Считая x постоянной и дифференцируя z, как функцию y, находим частную производную по y:

$$z'_x = (2x^3)'_x + (3x^2y)'_x + (6xy)'_x - (y^3)'_x = 6x^2 + 6xy + 6y - 0 =$$

$$= 3x^2 + 6x - 3y^2.$$

Вычислим значение производной в точке M_0:

$$z'_y(-1{,}2) = 3(-1)^2 + 6(-1) - 3\cdot 2^2 = -15.$$

§ 4. Экономический смысл частных производных

Рассмотрим в качестве примера производственную функцию Кобба-Дугласа: $y = AK^{\alpha}L^{\beta}$, где A, α, β — неотрицательные константы и $\alpha + \beta \le 1,$; а K — объём фондов либо в стоимостном выражении, либо в натуральном количестве, скажем число станков; L — объём трудовых ресурсов, например число рабочих; y — выпуск продукции в стоимостном выражении.

Величину $\boxed{l = y/L}$ естественно назвать *средней производительностью труда* – ведь это количество продукции (в стоимостном выражении), произведенное одним рабочим.

Величину $\boxed{k = y/K}$ естественно назвать *средней фондоотдачей* – ведь это количество продукции (в стоимостном выражении), приходящееся на один станок (на одну единицу фондов).

Величину $\boxed{f = K/L}$ естественно назвать *средней фондовооруженностью* или просто *фондовооруженностью* — ведь это стоимость фондов, приходящаяся в среднем на единицу трудовых ресурсов, например на одного рабочего.

Зафиксируем текущее состояние предприятия, т.е. объём фондов и число рабочих L. Им соответствует выпуск продукции $y = y(K,L)$. Если нанять ещё одного рабочего, то приращение выпуска составит $\Delta_L y = y(K, L+1) - y(K,L)$. Это частное приращение и поэтому $\Delta_L y \approx y'_L(K,L) \cdot \Delta L$, а так как $\Delta L = 1$, то $\Delta_L y \approx y'_L(K,L)$.

Вывод: Частная производная от производственной функции по объёму трудовых ресурсов (кратко: производная выпуска по труду) приблизительно равна добавочной стоимости продукции, произведенной ещё одним дополнительным рабочим. По этой причине эта частная производная $y'_L = \beta AK^{\alpha}L^{\beta-1}$ называется *предельной производительностью труда.*

Если же увеличить фонды ещё на единицу — купить ещё один станок, то добавочная стоимость продукции, произведенной на нём, окажется приблизительно равной частной производной от производственной функции по объёму фондов (кратко: производной выпуска по фондам). Эта частная производная $y'_K = \alpha A K^{\alpha-1} L^{\beta}$ называется *предельной фондоотдачей.*

И предельная производительность труда, и предельная фондоотдача – это абсолютные величины. Но в экономике чрезвычайно удобно задавать такие вопросы: на сколько процентов изменится выпуск продукции, если число рабочих увеличится на 1%, или если фонды возрастут на 1% ? и т.д. Такие вопросы и ответы на них используют понятие *«эластичность функции по аргументу» или «относительная производная»*.

В случае функции одной переменной $y = f(x)$ *эластичностью функции* по аргументу называется величина

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta y / y)/(\Delta x / x) = y' \;/(y / x).$$

Для функции многих переменных обычная производная заме-
няется частной производной.

Продолжим рассмотрение производственной функции Кобба-Дугласа. Найдём эластичность выпуска продукции по труду

$E_L(y) = y'_L \;/(y / L)$. Подставляя найденную выше частную производную y'_L и выражение y через K, L, получим

$$E_L(y) = \beta A K^{\alpha} L^{\beta-1} /(A K^{\alpha} L^{\beta} \;/ L) = \beta.$$

Итак, параметр β имеет ясный экономический смысл – это *эластичность выпуска по труду*.

Аналогичный смысл имеет и параметр α – это *эластичность выпуска по фондам*, т.е $E_K(y) = \alpha$.

Пример 8.4. Пусть производственная функция есть функция Кобба-Дугласа. Чтобы увеличить выпуск продукции на 3%, надо увеличить фонды на 6% или численность рабочих на 9%. В 1997 г. один работник за месяц производил продукции на 1 млн руб., а всего работников 1000. Основные фонды оценивались в 10 млрд руб. Написать производственную функцию и величину средней фондоотдачи.

Видим, что эластичность выпуска по труду β = 1/3, а по фондам α = 1/2, следовательно, функция Кобба-Дугласа имеет вид: $y = AK^{1/2}L^{1/3}$. Подставляя остальные данные, получим : $10^6 \cdot 1000 = A(10^{10})^{1/2}(1000)^{1/3}$, т.е. A = 1000.

Окончательно: функция Кобба-Дугласа есть $y = 1000K^{1/2}L^{1/3}$, а средняя фондоотдача равна $k = y/K = 10^6 \cdot 1000/10^{10} = 0{,}1$.

§ 5. Полный дифференциал функции нескольких переменных

Полное приращение функции двух переменных. $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ определяется формулой

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

$x, y, x + \Delta x, y + \Delta y$ принадлежат области определения функции.

Предположим, что $f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ имеет непрерывные частные производные.

Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная часть полного приращения Δz, линейная относительно приращений аргументов Δx и Δy. Обозначается символом dz или df и вычисляется по формуле

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}\Delta y. \tag{8.1}$$

Так как дифференциалы независимых переменных совпадают с их приращениями, т.е. $dx = \Delta x$, $dy = \Delta y$, то формулу (8.1) можно записать в виде:

$$\boxed{dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy}. \tag{8.2}$$

Пример 8.5. Найти полный дифференциал функции

$$z = e^{x^2 - y^2}.$$

Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2 - y^2} \cdot 2x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2 - y^2} \cdot (-2y)$$

Тогда, в соответствии с формулой (8.2), полный дифференциал запишем в виде $dz = \left(e^{x^2 - y^2} \cdot 2x\right)dx + \left(e^{x^2 - y^2} \cdot (-2y)\right)dy$.

Пример 8.6 Найти полный дифференциал функции

$$z = e^{xy} + \frac{\sqrt{x}}{y}.$$

Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} y + \frac{1}{2\sqrt{xy}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{xy} y - \frac{\sqrt{x}}{y^2}$$

Тогда полный дифференциал запишем в виде

$$dz = \left(e^{xy} y + \frac{1}{2\sqrt{xy}} \right) dx + \left(e^{xy} x - \frac{\sqrt{x}}{y^2} \right) dy.$$

§ 6. Частные производные и дифференциалы высших порядков

Частные производные функций нескольких переменных называют также частными производными первого порядка или первыми частными производными.

Частными производными второго порядка от функции $f(x, y)$ называются соответствующие частные производные от ее частных производных первого порядка, если они существуют.

Для функции $z = f(x, y)$ по определению имеем

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x(x, y)\right)'_x = f''_{xx}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y(x, y)\right)'_y = f''_{yy}(x, y).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \left(f'_x(x, y)\right)'_y = f''_{xy}(x, y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \left(f'_y(x, y)\right)'_x = f''_{yx}(x, y).$$

Частные производные второго порядка, взятые по различным переменным называются смешанными.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ и ее смешанные производные f''_{xy}, f''_{yx} определены в некоторой окрестности точки $M(x, y)$ и непрерывны в этой точке, то

$$f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y).$$

Дифференцируя частные производные второго порядка как по x, так и по y, получим частные производные третьего порядка.

Пример 8.7. Дана функция $z = x^3 + 2x^2 y - 8xy^2 + y^3$. Найти ее частные производные второго порядка.

Находим частные производные функции z:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 + 4xy - 8y^2, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 16xy + 3y^2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[3x^2 + 4xy - 8y^2\right]'_x = 6x + 4y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left[2x^2 - 16xy + 3y^2\right]'_y = -16x + 6y,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[3x^2 + 4xy - 8y^2\right]'_y = 4x - 16y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left[2x^2 - 16xy + 3y^2\right]'_x = 4x - 16y.$$

Пример 8.8. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^3 y^2 + \sin(xy + 1)$.

Последовательно находим

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 y^2 + y\cos(xy+1); \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3 y + x\cos(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \left[3x^2 y^2 + y\cos(xy+1)\right]'_x = 6xy^2 - y^2\sin(xy+1);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \left[3x^2 y^2 + y\cos(xy+1)\right]'_y = 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1).$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \left[2x^3 y + x\cos(xy+1)\right]'_x = 6x^2 y + \cos(xy+1) - yx\sin(xy+1)$$

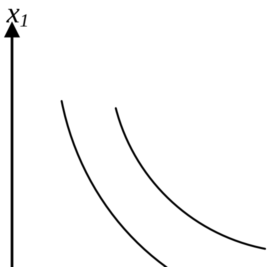
$$\frac{\partial^2 x}{\partial y^2} = \left[2x^2 y + x\cos(xy+1)\right]'_y = 2x^3 - x^2 \sin(xy+1).$$

§ 7. Функция полезности

Многомерная функция полезности $u(x_1, \ldots, x_n)$ – субъективная числовая оценка данным индивидом полезности *u* набора $X = (x_1, \ldots x_n)$ товаров. Она неубывающая, т.е. $u(X_1) \le u(X_2)$, если $X_1 \le X_2$ и выпуклая. Кроме того, будем предполагать, что каждый товар желателен, т.е. если $X > Y$ *и* $x_i > y_i$ для какого-то i = 1,2,…,n, то $u(X) > u(Y)$. Предположим также, что функция *u* дифференцируема и имеет необходимые производные 2-го порядка.

Частная производная $\partial u/\partial x_i$ называется *предельной полезностью i-го товара***.** Вектор, составленный из частных производных функции полезности $\partial u/\partial X = (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$, естественно назвать *вектором предельных полезностей***.** Напомним, что такой вектор называется также *градиентом.* Он показывает направление наибольшего роста значений функции.Свойство неубывания функции полезности и желательности каждого товара заменим более сильным требованием положительности всех частных производных.

Использование предельных соотношений для анализа экономических закономерностей, для анализа поведения субъетов экономики является сущностью «маржинализма» – течения в экономической теории, зародившегося в середине XIX в.. Одним из основоположников этого течения был немец К. Госсен. Он первый сформулировал основополагающее свойство функции полезности: *с увеличением потребления товара его полезность уменьшается* – это и есть так называемый *1-й закон Госсена.* То есть, если вы голодны, то первый гамбургер съедите с большой охотой, второй уже не так понравится и т.д.. На дифференциальном языке это означает, что предельные полезности убывают при возрастании аргументов – количеств потребляемых товаров, т.е. вторые частные производные должны быть отрицательны.



Пример 8.9. Для функции

полезности $u(x_1, x_2) = \sqrt{x_1}\sqrt{x_2}$ начертить кривые безразличия (линии постоянства полезности). Найти вектор предельных полезностей, проверить выполнение 1-го закона Госсена.

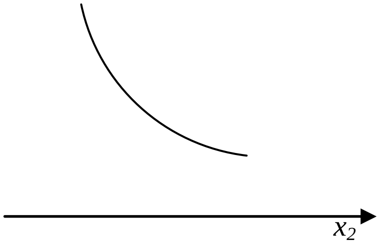


Рис. 8.1

Построим кривые постоянства полезности

$U_c = \{(x_1, x_2) : \sqrt{x_1}\sqrt{x_2} = c\}$

Найдем частные производные :

$\partial u/\partial x_1 = \sqrt{x_2}/(2\sqrt{x_1})$, $\partial u/\partial x_2 = \sqrt{x_1}/(2\sqrt{x_2})$. Следовательно, вектор предельных полезностей есть $\nabla u = (\sqrt{x_2}/(2\sqrt{x_1}), \sqrt{x_1}/(2\sqrt{x_2}))$. Для проверки 1-го закона Госсена находим вторые частные производные: $u''_{x_1x_1} = -(1/4)x_1^{-3/2}x_2^{1/2}$, $u''_{x_2x_2} = -(1/4)x_1^{1/2}x_2^{-3/2}$, они отрицательны, что и свидетельствует о выполнении 1-го закона Госсена.

К функциям полезности относятся, например: функция стоимости $u(x_1, x_2) = c_1x_1 + c_2x_2$; неоклассическая функция $u(x_1, x_2) = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_1}$, где α_1, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_1 + \alpha_2 \leq 1$.

§ 8. Экстремум функции двух переменных

Максимумом (*минимумом*) функции $z = f(x, y)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ называется такое ее значение $f(x_0, y_0)$, которое больше (меньше) всех других ее значений, принимаемых в точках $M(x, y)$, достаточно близких к точке M_0 и отличных от нее.

Точки максимума и минимума называют точками *экстремума*, а значения функции в этих точках называются *экстремальными*.

Необходимые условия экстремума. Если дифференцируемая функция $z = f(x, y)$ имеет экстремум в точке $M_0(x_0, y_0)$, то ее частные производные в этой точке равны нулю, т.е.

$$\left[\frac{\partial z}{\partial x}\right]_{M_0} = 0, \quad \left[\frac{\partial z}{\partial y}\right]_{M_0} = 0.$$

Точки, в которых $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 0$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, называются *стационарными* точками функции $z = f(x, y)$.

Достаточные условия экстремума. *Пусть* $M_0(x_0, y_0)$ *является стационарной точкой функции* $z = f(x, y)$ *и пусть* $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{M_0} = A$, $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_{M_0} = B$, $\left[\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{M_0} = C$. *Составим определитель* $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$. *Тогда:*

если $\Delta < 0$, *то в стационарной точке* M_0 *нет экстремума;*

если $\Delta > 0$, *то в точке* M_0 *есть экстремум, причем максимум, если A <* 0, *минимум, если* $A > 0$;

если $\Delta = 0$, *то требуется дополнительное исследование.*

Пример 8.10. Исследовать на экстремум функцию $z = x^3 + y^3 - 3xy$.

Находим частные производные первого порядка: $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 3y$; $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 3x$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} 3x^2 - 3y = 0, \\ 3y^2 - 3x = 0, \end{cases}$$

получаем две стационарные точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -3, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Исследуем каждую стационарную точку.

1) В точке $M_1(0;0)$ имеем: $A = 0$, $B = -3$, $C = 0$. Тогда $\Delta = AC - B^2 = -9 < 0$. Так как $\Delta < 0$, то в этой точке нет экстремума.

2) В точке $M_2(1;1)$ имеем: $A = 6$, $B = -3$, $C = 6$. В этом случае $\Delta = 36 - 9 = 27 > 0$. Так как $\Delta > 0$ и $A > 0$, то в этой точке функция имеет минимум

$$z_{\min} = z(1;1) = 1 + 1 - 3 = -1.$$

ЧТО ДОЛЖЕН ЗНАТЬ СТУДЕНТ

1. Понятие функции нескольких переменных.
2. Область определения и множество значений функции нескольких переменных.
3. Понятие линии уровня.
4. Частные производные функции нескольких переменных.
5. Частные производные высших порядков функции нескольких переменных.
6. Экономический смысл частных производных на примере функции Кобба-Дугласа.
7. Понятие дифференциала функции нескольких переменных.
8. Экстремум функции нескольких переменных.

КОНТРОЛЬНЫЙ ТЕСТ

1. Какая из приведенных функций, является функцией зависящей от двух переменных:

а) $z = e^{x^2-4}$; б) $z = e^x \cdot \cos(5x - 11)$; в) $z = e^x \cdot \cos(5y - 7)$; г) $z = e^{y^2+11}$.

2. Для функции $z=x^2-xy+y^2$ частная производная по переменной x равна:

а) x^2-y+2y; б) $2x-y$; в) $-x+2y$; г) $2x-y+2y$.

3. Для функции $z=e^{2x-y^2}$ частная производная по переменной y равна:

а) $\frac{1}{2}e^{2x-y^2}$; б) $2e^{2x-y^2}$; в) $e^{2x-y^2}(-2y)$; г) $e^{2x-y^2}(2-2y)$.

4. Значение частной производной функции $z=x^3-xy-y^3$ по переменной x в точке $M_0(2,1)$ равно:

а) -5; б) 10; в) 11; г) 4.

5. Полный дифференциал функции $z=\frac{x}{y^2}$ равен:

а) $dz=\frac{1}{y^2}dx-\frac{2x}{y^2}dy$; б) $dz=\frac{1}{y^2}dx+\frac{2x}{y^3}dy$;

в) $dz=-\frac{2x}{y^3}dx+\frac{1}{y^2}dy$; г) $dz=\frac{1}{y^2}dx-\frac{2x}{y^3}dy$.

6. Если $z=f(x,y)$, f''_{xy}, f''_{yx}, определены в некоторой окрестности точки $M(x,y)$ и непрерывны в этой точке, то верно:

а) $f''_{xx}(x,y)=f''_{yy}(x,y)$; б) $f'_x(x,y)=f'_y(x,y)$; в) $f''_{xy}(x,y)=f''_{yx}(x,y)$; г) $f''_{xy}(x,x)=f''_{yx}(y,y)$.

7.Для функции $z=3-2x^2-xy-y^2$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$ равна:

а) $-4x-y$; б) $-x-2y$; в) -1; г) 1.

8. Для функции $z=\ln(x^2+y)$ $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ равна:

а) $\frac{2y-2x^2}{(x^2+y)^2}$; б) $\frac{2y+2x^2}{(x^2+y)^2}$; в) $\frac{2y-2x^2}{(x^2+y)}$; г) $\frac{2(y-x^2)}{(x^2-y)^2}$.

9. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+y^2-4x+6y+17$:

а) функция имеет минимум; б) функция имеет максимум;
в) функция не имеет точек экстремума.

10. Стационарной точкой функции $z=x^2+y^2-4x-6y+17$ является точка:

а) $M(2,3)$; б) $M(1,2)$; в) $M(3,4)$; г) $M(1,3)$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 8.1. Найти частные производные функции:

а) $z = xy + 5y^2 + 6x^3$**;**

б) $z = x^2 y^3 - 15y^2 - 26x$ **;**

в) $z = \sqrt{x^3 + y^5} \cdot \left(x^2 - y^3\right)^2$**;**

г) $z = \dfrac{e^{x^3} + y}{x^8}$**.**

Задача 8.2. Найти полный дифференциал функции:

а) $z = \sin^3\left(x + 6y^2\right)$**;**

б) $z = \dfrac{xy^2 + 9}{x^2 + y}$**.**

Задача 8.3. Найти экстремумы функций:

а) $z = x^2 + 2xy + 2y^2 + 5x - 6y + 1$;

б) $z = 3x^2 - y^2 + 4x + 2y + 5$.

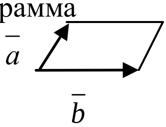
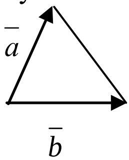
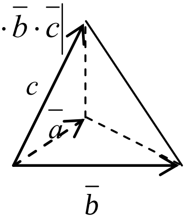
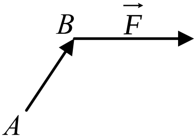
КРАТКИЙ СПРАВОЧНИК

Скалярное, векторное и смешанное произведения векторов

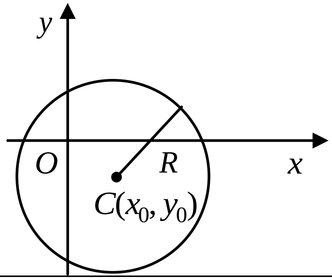
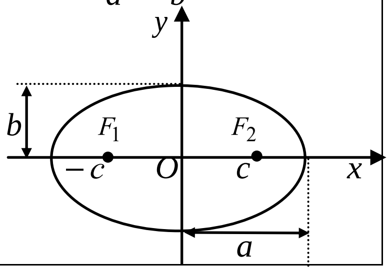
Скалярное произведение		
1.	Определение	Число $\overline{a} \cdot \overline{b} = \left|\overline{a}\right| \cdot \left|\overline{b}\right| \cos\left(\widehat{\overline{a}, \overline{b}}\right)$
2.	Основное геометрическое свойство	Признак ортогональности векторов $\overline{a} \cdot \overline{b} = 0 \Leftrightarrow \overline{a} \perp \overline{b}$

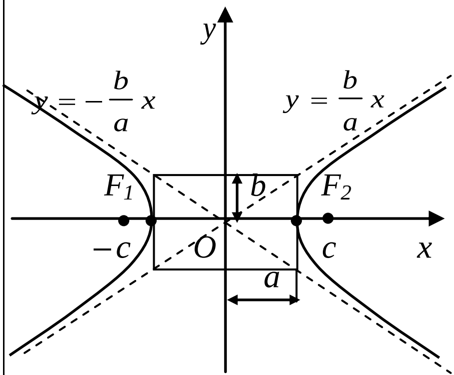
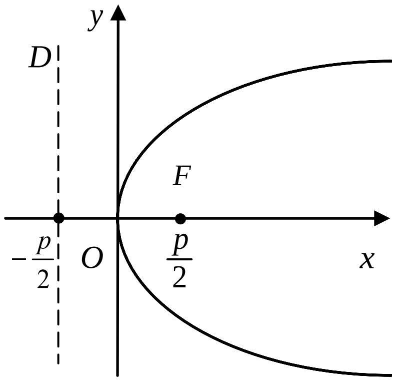
3.	Формула для вычисления через координаты сомножителей, где $\overline{a}=(x_1,y_1,z_1), \quad \overline{b}=(x_2,y_2,z_2)$	$\overline{a}\cdot\overline{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$
4.	Приложение к задачам геометрии	Угол между векторами $\cos\left(\overline{a}\,\hat{}\,,\overline{b}\right)=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert}$ Проекция вектора на вектор $np_{\overline{b}}\vec{a}=\dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{\lvert\overline{b}\rvert}$
5.	Приложения к задачам механики	Работа силы $A=\vec{F}\cdot\vec{s}$

Векторное произведение	*Смешанное произведение*
Вектор $\overline{c}=\overline{a}\times\overline{b}$ 1) $\lvert\overline{c}\rvert=\lvert\overline{a}\rvert\cdot\lvert\overline{b}\rvert\sin\left(\overline{a}\,\hat{}\,,\overline{b}\right)$, 2) $\overline{c}\perp\overline{a},\ \overline{c}\perp\overline{b}$, 3) $\overline{a},\overline{b},\overline{c}$ – правая тройка	Число $\overline{a}\overline{b}\overline{c}=(\overline{a}\times\overline{b})\cdot\overline{c}$
Признак коллинеарности векторов	Признак компланарности век-

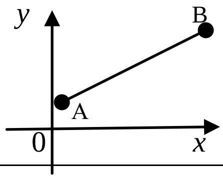
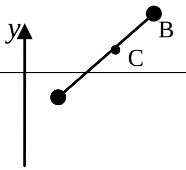
$\overline{a}\times\overline{b}=0 \Leftrightarrow \overline{a}\parallel\overline{b}$	торов $\overline{abc}=0 \Leftrightarrow \overline{a},\overline{b},\overline{c}$ - компланарны
$\overline{a}\times\overline{b}=\begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}$	$\overline{abc}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}$
Площадь параллелограмма $S=\lvert\overline{a}\times\overline{b}\rvert$  Площадь треугольника $S_\Delta=\frac{1}{2}\lvert\overline{a}\times\overline{b}\rvert$ 	Объём параллелепипеда $V=\lvert\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\rvert$ Объём пирамиды $V=\frac{1}{6}\lvert\overline{a}\cdot\overline{b}\cdot\overline{c}\rvert$ 
Момент силы $\overrightarrow{M}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{F}$ 	

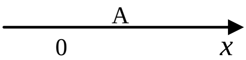
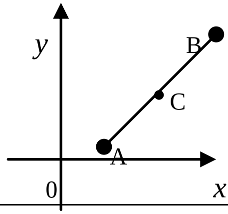
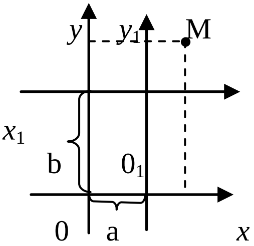
Некоторые кривые второго порядка

Окружность	**Эллипс**
$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$ 	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 

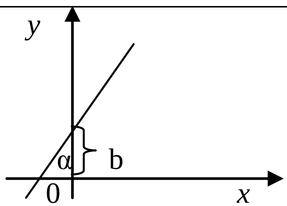
	a - большая полуось b - малая полуось $F_1(-c,0), F_2(c,0)$ - фокусы $c^2 = a^2 - b^2$
Гипербола $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$  a - действительная полуось b - мнимая полуось $F_1(-c, 0), F_2(c, 0)$ - фокусы $c^2 = a^2 + b^2$	**Парабола** $y^2 = 2px \, (p > 0)$  $D: x = -\dfrac{p}{2}$ - директриса $F(\dfrac{p}{2},0)$ - фокус

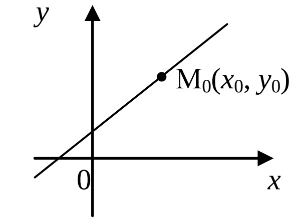
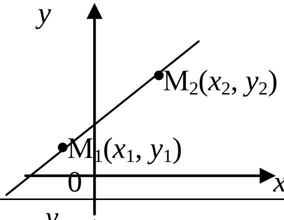
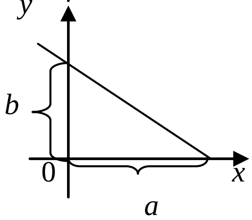
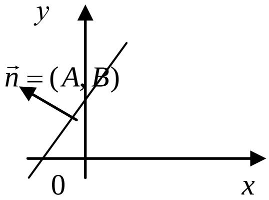
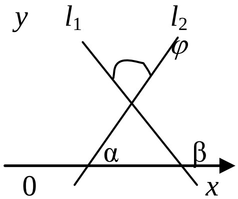
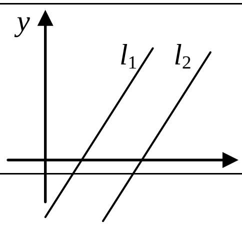
Простейшие формулы аналитической геометрии.

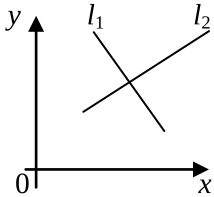
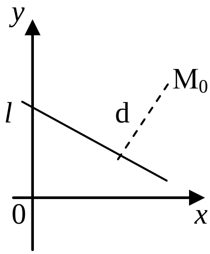
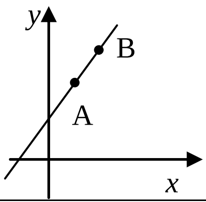
№ п/п	Схематический чертеж	Формулы	Комментарии
1.	 	$\mid AB \mid = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$	Расстояние между двумя точками A(x_A,y_A) и B(x_B,y_B)
2.	 	$x_C = \dfrac{x_A + \lambda x_B}{1 + \lambda}$,	Деление отрез-ка в заданном

		$y_C = \dfrac{y_A + \lambda y_B}{1+\lambda}$	отношении (λ = AC/CB)
3.		$x_C = \dfrac{x_A + x_B}{2}$, $y_C = \dfrac{y_A + y_B}{2}$	Деление отрезка пополам (λ = 1)
4.		$x = x_1 + a$ $y = y_1 + b$	Преобразования координат при параллельном переносе

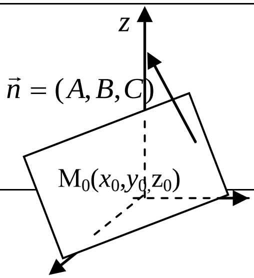
Прямая на плоскости

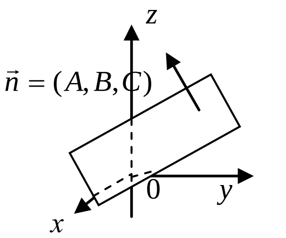
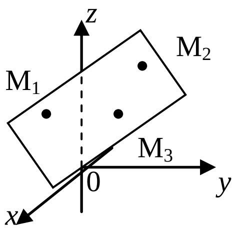
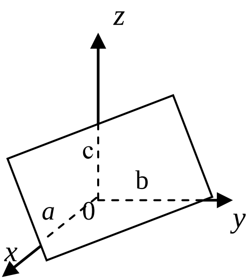
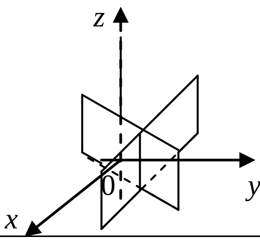
№ п/п	Схематический чертеж	Формулы	Комментарии
1	2	3	4
1		$y = kx + b$ $(k = \mathrm{tg}\,\alpha)$	Уравнение прямой с угловым коэффициентом (k)

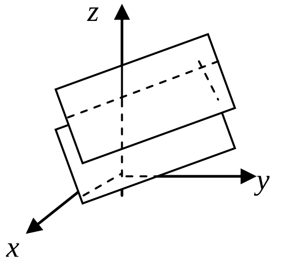
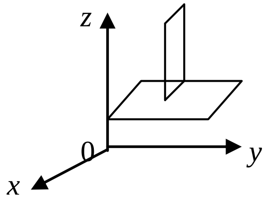
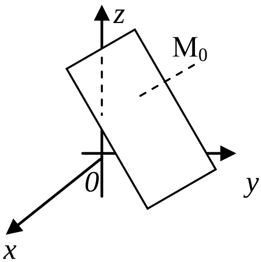
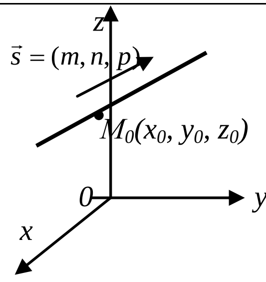
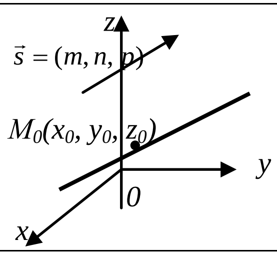
2		$y - y_0 = k(x - x_0)$	Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$ в заданном направлении (k)
3		$\dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1}$	Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки M_1 и M_2.
4		$\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$	Уравнение прямой в отрезках на осях
5		$Ax + By + C = 0$ $(A^2 + B^2 \neq 0)$	Общее уравнение прямой
6		$\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}$	Угол между двумя прямыми l_1: $y = k_1 x + b_1$, l_2: $y = k_2 x + b_2$.
7		$k_1 = k_2$	Условие параллельности двух прямых

	0 x		
8		$k_1 = -\dfrac{1}{k_2}$	Условие перпендикулярности двух прямых
9		$d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + C\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2}}$	Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0)$ до прямой l: $Ax + By + C = 0$
10		$k = \mathrm{tg}\,\alpha$ $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$	Угловой коэффициент прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

Плоскость и прямая в пространстве

№ п/п	Схематический чертеж	Формулы и комментарии
1	2	3
1		Уравнение плоскости, проходящей через заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ – перпендикулярно вектору нормали $\vec{n} = (A, B, C)$: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$

	0 y x	
2		Общее уравнение плоскости $Ax+By+Cz+D=0$ $(A^2+B^2+C^2\neq 0)$
3		Уравнение плоскости, проходящей через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3,y_3, z_3)$ $$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0$$
4		Уравнение плоскости в отрезках $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1,$ где a, b, c – величины направленных отрезков, отсекаемых плоскостью на координатных осях
5		Угол между двумя плоскостями $P_1: A_1x+B_1y+C_1z++D_1=0,$ $P_2: A_2x+B_2y+C_2z++D_2=0$ $$\cos\varphi=\frac{A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}$$

6		Условие параллельности двух плоскостей $P_1 \parallel P_2 \Leftrightarrow \quad \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2}$
7		Условие перпендикулярности двух плоскостей $P_1 \perp P_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0$
8		Расстояние от точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ $d = \dfrac{\lvert Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D\rvert}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
9		Канонические уравнения прямой в пространстве: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, где $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор прямой
10		Параметрические уравнения прямой в пространстве: $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ где t– параметр

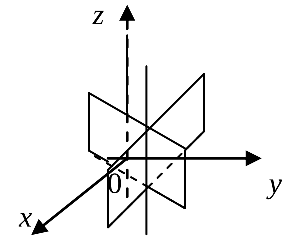
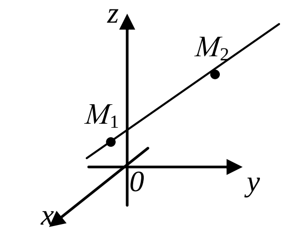
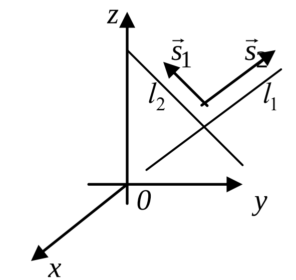
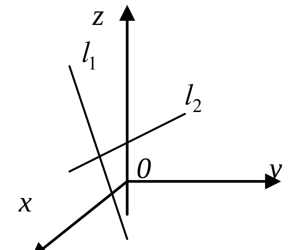
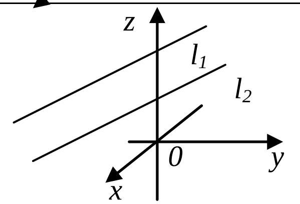
11		Общие уравнения прямой в пространстве: $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases}$ $\vec{S} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{vmatrix}$
12		Уравнения прямой, проходящей через две данные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$ $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$
13		Угол между двумя прямыми $l_1 : \dfrac{x - x_1}{m_1} = \dfrac{y - y_1}{n_1} = \dfrac{z - z_1}{p_1}$, $l_2 : \dfrac{x - x_2}{m_2} = \dfrac{y - y_2}{n_2} = \dfrac{z - z_2}{p_2}$, $\cos\varphi = \dfrac{m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}$
14		Условие перпендикулярности двух прямых $l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \quad m_1m_2 + n_1n_2 + p_1p_2 = 0$
15		Условие параллельности двух прямых $l_1 \parallel l_2 \quad \Leftrightarrow \quad \dfrac{m_1}{m_2} = \dfrac{n_1}{n_2} = \dfrac{p_1}{p_2}$

Таблица производных

	Простая функция	*Сложная функция*
1.	$\left(x^n\right)' = nx^{n-1},\ n \in \mathbf{R}$	$\left(u^n\right)' = nu^{n-1} \cdot u',\ n \in \mathbf{R}$
2.	$\left(e^x\right)' = e^x$	$\left(e^u\right)' = e^u \cdot u'$
3.	$\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	$\left(a^u\right)' = a^u \ln a \cdot u'$
4.	$\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$	$\left(\ln u\right)' = \dfrac{1}{u} \cdot u'$
5.	$\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	$\left(\log_a u\right)' = \dfrac{1}{u \ln a} \cdot u'$
6.	$\left(\sin x\right)' = \cos x$	$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$
7.	$\left(\cos x\right)' = -\sin x$	$\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$
8.	$\left(tgx\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\left(tgu\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$
9.	$\left(ctgx\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$\left(ctgu\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$
10.	$\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
11.	$\left(\arccos x\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$
12.	$\left(arctgx\right)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arctgu\right)' = \dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$
13.	$\left(arcctgx\right)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$	$\left(arcctgu\right)' = -\dfrac{1}{1+u^2} \cdot u'$

СОДЕРЖАНИЕ

Учебное издание

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
ЧАСТЬ 1

Учебно-методический комплекс
для студентов заочной формы обучения
экономических специальностей

Авторы: **Жур** Татьяна Антоновна,
Морозова Инна Михайловна,
Кветко Оксана Михайловна,
Рыкова Ольга Васильевна

Ответственный за выпуск Жур Т. А.

Издано в редакции авторов

Подготовлено к изданию в Белорусском государственном аграрном техническом университете. ЛВ № 412 от 29.11.99.
Подписано в печать Формат 60x84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. Уч.-изд. л. . Тираж 500 экз. Заказ
Отпечатано в типографии БГАТУ. ЛП № от
220023, г. Минск, пр. Независимости, 99, к. 2