O‘ZBEKISTONRESPUBLIKASI
OLIY TA’LIM, FAN VA INNOVATSIYALARVAZIRLIGI

NAMANGAN DAVLATUNIVERSITETI

MATEMATIK ANALIZ KAFEDRASI

“ DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ”

fanidan

O‘QUV – USLUBIY
MAJMUA

Bilimsohasi: **500 000 - Tabiiy fanlar, matematika va statistika**

Ta’limsohasi: **540 000 - Matematika va statistika**

Ta’limyo‘nalishi: **60540100–Matematika**

Namangan-2023

O`quv uslubiy majmua 2023 yil O`zR OTFIV tomonidan №60540100 raqami bilan 2023 yil __avgustdagi __- sonli buyrug'i bilan tasdiqlangan fanning o`quv dasturi asosida ishlab chiqilgan.

Tuzuvchilar: **O'.Mamadaliyev -** Algebra va matematika o'qitish metodikasi kafedrasi dotsenti

X.Yo. Najmiddinova - Algebra va matematika o'qitish metodikasi kafedrasi mudiri

Taqrizchilar: **R.R.Polvanov** - "Algebra va MO'M" kafedrasi dotsenti

M.Xolmurodov - NamDU , f.-m.f.n.,dotsent

O'quvuslubiymajmuaNamangandavlatuniversitetiKengashininig 2023-yil "___" avgustdagi "___" – son yig'ilishida ko'rib chiqilgan va foydalanishga tavsiya etilgan.

Kafedra mudiri: **X.Yo. Najmiddinova**

O'quv uslubiy majmua "Matematik fakultet kengashida muhokama etilgan va foydalanishga tavsiya qilingan (2023-yil __.08 dagi __-sonli bayonnoma).

Fakultet dekani: **X.Mavlyanov**

MUNDARIJA

SO‘Z BOSHI

Mazkur o‘quv uslubiy majmua “Diskret matematika va matematik mantiq” fanidan “60540100–matematika” ta’lim yo‘nalishi uchun mo‘ljallangan bo‘lib, Matematika fakul’tetining “Algebra va matematika o‘qitish metodikasi” kafedrasi professor-o‘qituvchilari tomonidan ishlab chiqilgan. “Diskret matematika va matematik mantiq” fani o‘quv uslubiy majmuasini yaratishda yetakchi xorijiy OTMlari o‘quv dasturlariga asosiy adabiyotlar ro‘yxatiga kiritilgan Kennyeth H. Rosen, Diccrete mathyematics and its applications, 7-yedition, Thye McGraw-Hill Companiyes, adabiyotidan foylalanildi.

Ushbu o‘quv uslubiy majmua beshta qismdan iborat bo‘lib, ular sillabus, ishchi o‘quv reja, namunaviy va ishchi o‘quv dastur, modulni o‘qitishda foydalaniladigan interfaol ta’lim metodlari, ma’ruza materiallari (ma’ruza matni, adabiyotlar ro‘yxati, mustaqil ta’lim mavzulari, glossariy, keyslar banki, nazorat savollari va test savollari) va amaliy mashg‘ulotlar materiallari (amaliy topshiriqlar, namuna, adabiyotlar ro‘yxati, tarqatma materiallar, keyslar banki, test savollari)dan tashkil topgan. Ma’ruza va amaliy mashg‘ulotlar materiallari semestrlarga ajratilgan holda berilgan.

«Diskret matematika va matematik mantiq» fanidan ta’lim texnologiyasi «Diskret matematika va matematik mantiq oliy ta’lim muassasalarida ma’ruza va seminarlarni o‘qitish texnologiyasi» o‘quv qo‘llanmasida bayon etilgan dars mashg‘ulotlarida yangi texnologiyalarni qo‘llash qonun-qoidalariga tayangan holda ishlab chiqilgan.

Majmuada keltirilgan ta’lim texnologiyalarining har biri o‘zida o‘quv mashg‘ulotini o‘tkazish shart-sharoiti to‘g‘risida axborot materiallarini, pedagogik maqsad, vazifa va ko‘zlangan natijalarni, o‘quv mashg‘ulotning rejasi, o‘qitishning usul va vositalarini mujassamlashtirgan. Shuningdek, bu o‘quv mashg‘ulotining texnologik kartasini, ya’ni o‘qituvchi va o‘quvchining mazkur o‘quv mashg‘ulotida erishadigan maqsadi bo‘yicha hamkorlikdagi faoliyatning bosqichma-bosqich ta’riflanishini ham o‘z ichiga oladi.

Majmuaning konseptual asoslari qismida dastlab «Diskret matematika va matematik mantiq» fanining dolzarbligi va ahamiyati, mazkur o‘quv fanining tarkibiy tuzilishi, o‘qitishning usul va vositalarini tanlashda tayanilgan konseptual fikrlar, kommunikatsiyalar, axborotlar berilib, so‘ngra loyihalashtirilgan, o‘qitish texnologiyalari taqdim qilingan.

Hozirgi kunda jahon tajribasidan ko‘rinib turibdiki, ta’lim jarayoniga o‘qitishning yangi, zamonaviy usul va vositalari kirib kelmoqda va samarali foydalanilmoqda. Jumladan, O‘zbekiston Milliy universitetida ham innovasion va zamonaviy pedagogik g‘oyalar amalga oshirilmoqda: o‘qituvchi bilim olishning yagona manbai bo‘lib qolishi kerak emas, balki talabalar mustaqil ishlash jarayonining tashkilotchisi, maslahatchisi, o‘quv jarayonining menejeri bo‘lishi lozim. Ta’lim texnologiyasini ishlab chiqish asosida aynan shu g‘oyalar yotadi.

1-2-mavu. To‘plamlar va ular ustida amallar (4 soat)

Reja:

1. To‘plam tushunchasi.
2. To‘plamlar ustida amallar.
3. To‘plamlar algebrasi.

To‘plamlar nazariyasiga matematik fan sifatida nemis matematigi G.Kantor (1845-1918) tomonidan asos solingan.

Matematikada doimo turli to‘plamlar bilan uchrashishga to‘g‘ri keladi. Masalan, to‘g‘ri burchakli uchburchaklar to‘plami, natural sonlar to‘plami, to‘g‘ri chiziqda yotuvchi nuqtalar to‘plami va hokazo. Umuman to‘plam tushunchasi ayrim narsalar, buyumlar, ob’yektlarni birgalikda, ya’ni bir butun deb qarash natijasida vujudga keladi.

1-ta’rif. To‘plamni tashkil etuvchi narsalar, buyumlar, ob’yektlar bu to‘plamning elementlari deb aytiladi.
To‘plamlar, odatda, lotin yoki grek alfavitining katta harflari bilan belgilanadi.

A to‘plam $a,b,c,d...$ elementlardan tuzilganligi $A=\{a,b,c,d,...\}$ ko‘rinishda yoziladi. To‘plamni tashkil etuvchi elementlar soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin. Birinchi holda chekli to‘plamga, ikkinchi holda esa cheksiz to‘plamga ega bo‘lamiz.

Masalan:

1) $A=\{a\}$, $B=\{a,b\}$, $C=\{a,b,c\}$;

2) $A=\{1, 2, 3,..., n\}$ - chekli to‘plamlar;

3) $B=\{2, 4, 6,..., 2n,...\}$;

4) $C=\{1, 4, 9, 16,..., n^2,...\}$;

5) $D=\{2, 3, 5, 7,..., P,...\}$ - cheksiz to‘plamlar.

a narsa A to‘plamning elementi ekanligi $a\in A$ yoki $A\ni a$ ko‘rinishda belgilanadi. Birorta b narsa A to‘plamning elementi emasligi $b\overline{\in} A$ yoki $A\overline{\ni} b$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan: $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ da $2, 4, 6,..., 10\in A$, $12,14..\overline{\in} A$.

A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin. Agar A to‘plamning a elementi B to‘plamning b elementiga teng deb olsak, ya’ni $a=b$, bundan bitta element ikkala to‘plamda ham mavjudligi kelib chiqadi.

Masalan, $A=\{2, 4, 6, 8, 10\}$ va $B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ to‘plamlarda $2, 4, 6, 8$ elementlar ikkala to‘plamda ham mavjuddir.

2-ta’rif. A to‘plamning har bir elementi B to‘plamda mavjud, aksincha, B to‘plamning har bir elementi A to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, A va B to‘plamlarni teng (tengkuchli) deb atab, buni $A=B$ yoki $B=A$ belgi bilan ifodalaymiz.

Demak, ikkala A va B to‘plamlar aslida bir to‘plamdir.

3-ta’rif. Agar B to‘plamning har bir elementi A to‘plamda ham mavjud bo‘lsa, u vaqtda B A ning qism to‘plami deb aytiladi va quyidagicha belgilanadi.

$$B\subseteq A \quad \text{yoki} \quad A\supseteq B \qquad (1)$$

Masalan: 1) butun sonlar $\{1, 2, 3,...\}$ haqiqiy sonlar to‘plamining qism to‘plamini tashkil etadi;

2) viloyatlar respublika to‘plamining qism to‘plamini tashkil etadi;

3) toq sonlar butun sonlar to‘plamining qism to‘plamidir va hokazo.

4-ta’rif. B to‘plamning hamma elementlari A to‘plamda mavjud bo‘lib, shu bilan birga A to‘plamda B ga kirmagan elementlar ham bor bo‘lsa, u vaqtda B - A ning xos qism to‘plami deyiladi va

$$B\subset A \text{ yoki } A\supset B \qquad (2)$$

kabi belgilanadi.t

Demak, $A \subset B$ va $B \subset A$ bo‘lsa, u vaqtda

$$A = B. \qquad (3)$$

(3) tenglik A ning o‘zi o‘zining qism to‘plami bo‘lishini ko‘rsatadi va bu holatni ifodalash uchun “o‘zining xosmas qismi” degan iboradan foydalanamiz.

Masalan: $A = \{a,b,c,e,d,f,g,h\}$ to‘plam uchun $B = \{a\}$, $C = \{a,b\}$, $D = \{d,e,f\}$ to‘plamlarning har qaysi xos qismdir.

Odatda, to‘plamlar nazariyasida bitta ham elementi bo‘lmagan to‘plamlar bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi.

Masalan: $x^2 + 4 = 0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari bo‘sh to‘plamni tashkil qiladi, chunki $x_{i,2} = \pm 2i$, ya’ni tenglamaning haqiqiy ildizlari mavjud emas.

5-ta’rif. Bitta ham elementga ega bo‘lmagan to‘plam bo‘sh to‘plam deb ataladi va $\varnothing$ simvol bilan belgilanadi. $\varnothing$ bo‘sh to‘plam har qanday A to‘plamning qism to‘plami bo‘ladi va u ham A ning xosmas qismi deyiladi.

To‘plamlar ustida amallar

A va B to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

6-ta’rif. Berilgan A, B to‘plamlarning yig‘indisi yoki birlashmasi deb, shu to‘plamlarning takrorlanmasdan olinadigan hamma elementlaridan tuzilgan va $A \bigcup B$ kabi belgilanadigan to‘plamga aytiladi.

Agar $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ to‘plamlarberilgan bo‘lsa, u holda ularning $A \bigcup B$ yig‘indisi quyidagicha yoziladi:

$$\bigcup_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = A_1 \bigcup A_2 \bigcup A_3 \bigcup ... \bigcup A_n \quad \textbf{(1)}$$

Masalan: $A = \{a,b\}$**,** $B = \{a,c,b\}$**,** $C = \{e,f,k\}$ **bo‘lsa, u vaqtda** $A \bigcup B \bigcup C = \{a,b,c,d,e,f,k\}$**.**

7-ta’rif. Berilgan A, B to‘plamlarning hamma umumiy elementlaridan tuzilgan C to‘plamga A, B to‘plamlarning ko‘paytmasi (kesishmasi yoki umumiy qismi) deyiladi va $C = A \bigcap B$ ko‘rinishida belgilanadi.

Agar $A_1, A_2, A_3, ..., A_n$ to‘plamlar berilgan bo‘lsa, u holda ularning $C = A \bigcap B$ ko‘paytmasi quyidagicha yoziladi:

$$\bigcap_{\alpha=1}^{n} A_\alpha = A_1 \bigcap A_2 \bigcap A_3 \bigcap ... \bigcap A_n. \quad (2)$$

Masalan: $A = \{1,2,3,4,5\}$, $B = \{2,4,6,8\}$ bo‘lsa, u vaqtda $C = \{2,4\}$.

Bitta ham umumiy elementga ega bo‘lmagan to‘plamlarning kesishmasi $\varnothing$ bo‘sh to‘plamga teng bo‘ladi. Masalan, toq sonlar to‘plami bilan juft sonlar to‘plamining kesishmasi bo‘sh to‘plamdir.

8-ta’rif. A va B to‘plamlarning ayirmasi deb, A ning B da mavjud bo‘lmagan hamma elementlaridan tuziladigan va $C = A - B$ yoki $C = A \setminus B$ ko‘rinishida yoziladigan C to‘plamga aytiladi. $C = A \setminus B$

$A = \{1,2,3,4\}$ va $B = \{3,4,5,6\}$ bo‘lsa,uvaqtda $C = \{1,2\}$.

9-ta’rif. A to‘plamdagi uning B qism to‘plamiga kirmay qolgan hamma elementlaridan tuzilgan qism to‘plamga B ning A to‘plamigacha to‘ldiruvchisi deb aytiladi va $\overline{B}$ (B') ko‘rinishda belgilanadi.

$A = \{1,2,3,4,5,6...\}$ natural sonlar to‘plami va $B = \{2,4,6,8...\}$ juft sonlar to‘plami bo‘lsa, u vaqtda $\overline{B} = \{1,3,5,7...\}$ bo‘ladi, ya’ni $B \bigcup \overline{B} = A$. $\overline{B}$ to‘plam B ni A gacha to‘ldiradi.Ushbu tengliklarni keltirib chiqarish mumkin.

$$\overline{B}\cap B=\varnothing,\quad B\cup\overline{B}=A.\quad B-\overline{B}=B,\ \overline{B}-B=\overline{B}.$$

10-ta'rif. Biror to'plamning xos qismi deb qaralmagan har bir to'plamni universal to'plam deb atab, uni $\bigcup$ harfi bilan belgilaymiz.

Ta'rifga binoan, $\bigcup$ ning hamma qismlari orasida ikkita xosmas qismi bor: bittasi $\bigcup$ ning o'zi, ikkinchisi $\varnothing$ bo'sh to'plam, qolganlari xos qismlardan iborat.

$\bigcup$ universal to'plamning qismlari orasidagi munosabatlarni ifodalovchi asosiy tengliklar quyidagilardan iborat:

1. $\overline{\overline{A}}=A$ To'plamlar nazariyasida tengliklarni isbotlashning umumiy metodi tenglikning bir tomonidagi to'plamga tegishli har bir element ikkinchi tomonidagi to'plamda ham mavjud va, aksincha, ekanligini ko'rsatishdan iboratdir.

Isbot. $\overline{\overline{A}}$ to'plam $\overline{A}$ ning to'ldiruvchisi. Shuning uchun $\overline{\overline{A}}$ ning har bir elementi $\overline{x}\in\overline{A}$, demak, $x\in A$. Aksincha, A ning har bir elementi $\overline{x}\in\overline{A}$ bo'lgani uchun $x\in\overline{\overline{A}}$. Demak, $\overline{\overline{A}}=A$.

2. $A\cap B=B\cap A$ - ko'paytmaga nisbatan kommutativlik qonuni.

Isbot. $A\cap B$ ning har bir elementi A va B da mavjud, chunki $A\cap B$ to'plam A va B larning umumiy elemertlaridan tuzilgan. Demak, $A\cap B$ ning elementlari $B\cap A$ da ham mavjud. Xuddi shunday $B\cap A$ ning har bir elementi B va A da mavjud, chunki $B\cap A$ to'plam B va A larning umumiy elementlaridan tuzilgan. Shuning uchun $B\cap A$ to'plamning har bir elementi $A\cap B$ to'plamning ham elementi bo'ladi. Demak, $A\cap B=B\cap A$.

3. $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$ - ko'paytmaga nisbatan assosiativlik qonuni.

Isbot. $x\in(A\cap B)\cap C$ bo'lsin. Demak, $x\in(A\cap B)$ va $x\in C$. Bu yerdan $x\in A,\ \ x\in B$ va $x\in C$ ekanligi kelib chiqadi. Shuning uchun $x\in A$ va $x\in B\cap C$ dir. Bu yerdan o'z navbatida $x\in A\cap(B\cap C)$ ekanligi kelib chiqadi. Isbotning ikkinchi qismini o'quvchiga havola etamiz.

4. $A\cup B=B\cup A$ - yig'indiga nisbatan kommutativlik qonuni.

5. $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$-yig'indiga nisbatan assosiativlik qonuni.

4 va 5 -tengliklarning isbotlari xuddi 2 va 3 - tengliklarni isbotlashga o'xshash amalga oshiriladi.

6. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ - ko'paytmaga nisbatan distributivlik qonuni.

7. $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$ - yig'indiga nisbatan distributivlik qonuni.

6-tenglikning isboti: $x\in A\cap(B\cup C)$ bo'lsin, u vaqtda $x\in A$ va $x\in B\cup C$ bo'ladi. Bu yerdan $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in A$ va $x\in C$ kelib chiqadi. Demak, $x\in A\cap B$ yoki $x\in(A\cap C)$. Shuning uchun $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Endi $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$ bo'lsin, u holda $x\in(A\cap B)$ yoki $x\in(A\cap C)$ bo'ladi. Bu yerdan $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in A$ va $x\in C$ kelib chiqadi. Demak, $x\in A\cap(B\cup C)$.

8. $\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$. 9. $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$. 10. $A\cap A=A$.

11. $A\cap U=A$. 12. $\overline{A\cup A}=\overline{A}$. 13. $A\cup\varnothing=A$.

To'plamlar algebrasida $\cap$, $\cup$, $-$, $\subseteq$belgilar o'rtasidagi o'zaro munosabatlar ko'rib chiqiladi. To'plamlar algebrasida umuman oddiy algebradagiday ayniyatlar - tengliklar ko'riladi. Bu ayniyatlar universal to'plamning va uning xos qism to'plamlarining qanday bo'lishidan qat'iy nazar o'z kuchini saqlaydilar.

1-teorema. $\bigcup$ universal to'plamning istalgan A,B,C qismlari orasidagi munosabatlarni ifodalovchi quyidagi tengliklar ayniyatdir:

1. $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$ $1'$. $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

2. $A\bigcup B = B\bigcup A$ 2′. $A\bigcap B = B\bigcap A$

3. $A\bigcup (B\bigcap C) = (A\bigcup B)\bigcap (A\bigcup C)$ 3′. $A\bigcap (B\bigcup C) = (A\bigcap B)\bigcup (A\bigcap C)$

4. $A\bigcup \varnothing = A$ 4′. $A\bigcap U = A$

5. $A\bigcup \overline{A} = U$ 5′ $A\bigcap \overline{A} = \varnothing$

Agar $A \subseteq B$ va $B \subseteq A$ bo‘lsa, u vaqtda $A = B$. Ana shu xossadan foydalanib yuqorida keltirilgan ayniyatlar isbot etiladi, ya’ni tenglikning chap tomonidagi har bir element uning o‘ng tomonida ham mavjud va aksincha ekanligini ko‘rsatish kerak. Biz yuqoridagi ayniyatlarning ayrimlarini isbot etgan edik.

1 va 1′ - ayniyatlarni mos ravishda yig‘indi va ko‘paytma amallari uchun assosiativlik qonunlari deyiladi. 2 va 2′ - ayniyatlari esa - kommutativlik qonuni va 3, 3′ -ayniyatlari bo‘l-sa, shu amallar uchun distributivlik qonuni deyiladi.

Assosiativlik qonuniga asosan A, B, C qism to‘plamlardan ma’lum tartibda yig‘indi amali bilan hosil etilgan ikki to‘plam tengdir.

Bu to‘plamni $A\bigcup B\bigcup C$ shaklda belgilaymiz.

Assosiativ qonuniga ko‘ra qavs belgisi qayerda turishi hech qanday rol o‘ynamaydi. Matematik induksiya metodiga asosan

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup .... \cup A_n = A_{1'} \cup A_{2'} \cup .... \cup A_{n'},$$

bu yerda $1', 2, ..., n'$, belgilashlar $1, 2, ..., n$ conlarning istalgan tartibda olinganidan hosil etilgan sonlarni bildiradi.

Shu tariqa quyidagi tengliklarni ham keltirib chiqarish mumkin:

$$A_1 \bigcap A_2 \bigcap .... \bigcap A_n = A_{1'} \bigcap A_{2'} \bigcap .... \bigcap A_{n'},$$

$$A\bigcup (B_1 \bigcap B_2 \bigcap .... \bigcap B_n) = (A\bigcup B_1)\bigcap (A\bigcup B_2)\bigcap .... \bigcap (A\bigcup B_n),$$

$$A\bigcap (B_1 \bigcup B_2 \bigcup .... \bigcup B_n) = (A\bigcap B_1) \bigcup (A\bigcup B_2) \bigcup .... \bigcup (A\bigcap B_n).$$

Ko‘rsatilgan 1-5 va 1′-5′ tengliklardan quyidagi xulosani hosil qilamiz:
1-teoremadagi ayniyatlar juft-juft tarzda shunday joylashtirilganki, biri-ikkinchisidan $\bigcup$ va $\bigcap$ hamda $\varnothing$ va $\bigcup$ belgilarni bir vaqtda o‘zaro joylarini almashtirish natijasida kelib chiqadi.

2-teorema. $\bigcup$ universal to‘plamning istalgan A va B to‘plamlari uchun quyidagilar haqlidir:

6. Agar hamma A lar uchun $A\bigcup B = A$ bo‘lsa, u vaqtda $B = U$. 6′. Agar istalgan A uchun $A\bigcap B = A$ bo‘lsa, u vaqtda $B = \varnothing$.

7.7′. Agar $A\bigcup B = U$ va $A\bigcap B = \varnothing$ bo‘lsa, u vaqtda $B = \overline{A}$.

8.8′. $\overline{\overline{A}} = A$.

9. $\overline{\varnothing} = U$ 9′. $\overline{U} = \varnothing$

10. $A\bigcup A = A$ 10′. $A\bigcap A = A$

11. $A\bigcup U = U$ 11′. $A\bigcap \varnothing = \varnothing$

12. $A\bigcup (A\bigcap B) = A$ 12′. $A\bigcap (A\bigcup B) = A$

13. $\overline{A\bigcup B} = \overline{A}\bigcap \overline{B}$ 13′. $\overline{A\bigcap B} = \overline{A}\bigcup \overline{B}$

2-teoremaning ayrim tengliklari adabiyotda maxsus nomga egadir. Masalan,10 va 10′ tengliklar idempotentlik qonuni deyiladi,12 va 12′-yutish qonuni,13 va 13′-de Morgan qonuni deb ataladi.

To‘plamlar algebrasida biror tenglikdan shu tenglikka kirgan $\bigcup$ ni $\bigcap$ ga, $\bigcap$ ni $\bigcup$ ga, $\varnothing$ ni $\bigcup$ ga, $\bigcup$ ni $\varnothing$ ga birdaniga almashtirish natijasida hosil etilgan ikkinchi tenglikni birinchi tenglikka va, aksincha, birinchi tenglik ikkinchi tenglikka nisbatan ikkitaraflama tenglik deb aytiladi.

3-teorema. *Istalgan A va B to‘plamlar uchun quyidagi mulohazalar juft-juft ekvivalentdir*:

(I) $A \subseteq B$; (II) $A \cap B = A$; (III) $A \cup B = B$. (1)

$R_1, R_2, ..., R_n$ mulohazalar juft-juft ekvivalentdir degan tasdiq quyidagini bildiradi: istalgan i va j uchun R_i R_j ga ekvivalentdir. Bu mulohaza o‘z navbatida faqatgina R_1 R_2 ning, R_2 R_3 ning, ..., R_{n-1} R_n ning to‘g‘riligini keltirib chiqargandagina to‘g‘ridir.

Isbot: (I) (II) ning to‘g‘riligini keltirib chiqaradi.

$A \subseteq B$ bo‘lsin. Istalgan A va B uchun $A \cap B = A$ ekanligini ko‘rsatish kerak.

a) $\overline{x \in A \cap B}$ bo‘lsa, u vaqtda $x \in A$ va $x \in B$ dir. Demak, $A \cap B \subseteq A$.

b) $x \in A$ bo‘lsin. U vaqtda (I.I) ga asosan $x \in B$ hamdir. Shuning uchun $A \subseteq A \cap B$, ya’ni (I) (II) ning to‘g‘riligini keltirib chiqaradi.

Endi $A \cap B = A$ bo‘lsin, u vaqtda $A \cup B = B$ ekanligini isbot qilamiz.

$$A \cup B = (A \cap B) \cup B = (A \cup B) \cap (B \cup B) = (A \cup B) \cap B = B.$$

Demak, $A \cup B = B$.

(III) (I) ning to‘g‘riligini keltirib chiqaradi.

Rostdan ham $A \cup B = B$ va $A \subseteq A \cup B$ bo‘lishidan $A \subseteq B$. Bu bilan isbot yakunlanadi.

Muammoli masala va topshiriqlar:

1. a) $\overline{A \cap \overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup \overline{\overline{B}} \cup B = \overline{A} \cup B \cup B = \overline{A} \cup B$,

b) $(A \cap B \cap C \cap \overline{X}) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (\overline{B} \cap C) \cup (C \cap X) = C$

ekanligi isbot etilsin.

2. Ushbu to‘plamlarning har ikkitasi va hamda uchtasining kesishmalari va birlashmalarini toping: $A = \{a, b, c\}$, $B = \{d, e, f, g\}$, $C = \{a, f, g, k, c\}$.

3. $A = \{1, 2, ..., n\}$ to‘plam uchun $B = \{3, 6, 9, 12, ..., 3n, ...\}$ qismdir. $\overline{B}$ ni toping.

4. $(A \cap B \cap X) \cup (A \cap B \cap C \cap X \cap Y) \cup (A \cap X \cap \overline{A}) = A \cap B$ tenglikni isbotlang.

5. 7-13 asosiy tengkuchliliklarni isbotlang.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1.To‘plamlarnazariyasiningasosiytushunchalarinimadaniborat?

2.To‘plamlar ustida qanday amallar bajariladi?

3.Asosiy tengkuchliliklarni yozing.

4.Qanday to‘plamga to‘plamlar algebrasi deb aytiladi?

5.Mulohazalarning juft-juft ekvivalentligining shartlari.

3-mavzu. Binar munosabatlar.

Reja.

1. Munosabatlar.

2. Binar munosabat.
3. Ekvivalent munosabatlar.

Diskretmatematikadafundamentaltushunchalardanbiribo‘lgan**munosabatlar**tushunchasipredmetlarvatushunchalarorasidagialoqaniifodalaydi. Quyidagito‘liqsizgaplarmunosabatlargamisolbo‘laoladi:

............kichik ....dan, ...teng ....ga,

............bo‘linadi ....gavahokazo.

Bundankeyinmunosabatlartushunchasito‘plamlarnazariyasinuqtainazaridanturibo‘rganiladi.

Munosabatlartushunchasinianiqlashuchun**tartiblanganjuftlik**tushunchasigaaniqlikkiritaylik. Ma’lumtartibdajoylashganikkipredmetdantuzilganelementgatartiblanganjuftlikdeyiladi. Matematikadatartiblanganjuftlikquyidagixususiyatlargaegabo‘ladidebfarzqilinadi:

1) Harqanday (istalgan) x va y predmetlaruchunma’lumob’yektmavjud, qaysikim $< x, y >$ kabibelgilanadi, x va y larningtartiblanganjuftligidebo‘qiladi. Har bir x va y predmetlarga yagona tartiblangan $< x, y >$ juftlik mos keladi.

2)Ikkita $< x, y >$ va $< u, v >$ tartiblangan juftliklar berilgan bo‘lsin. Agar $x = u$ va $y = v$ bo‘lsa, u vaqtda $< x, y > = < u, v >$ bo‘ladi.

Tartiblangan juftlik $< x, y >$ quyidagi to‘plamdir

$$< x, y > = \{\{x\}, \{x, y\}\},$$

ya’ni shunday ikki elementli to‘plamdirki, uning bitta elementi $\{x, y\}$ tartibsiz juftlikdan iborat, ikkinchisi esa $\{x\}$ shu tartibsiz juftlikning qaysi a’zosi birinchi hisoblanishi kerakligini ko‘rsatadi.

Tartiblangan juftlik $< x, y >$ ning x predmeti birinchi koordinatasi, y predmeti bo‘lsa, ikkinchi koordinatasi deb aytiladi.

Tartiblangan juftliklar terminida tartiblangan n-liklarni aniqlash mumkin. x, y va z predmetlarning tartiblangan uchligi $< x, y, z >$ quyidagi tartiblangan juftliklar shaklida aniqlanadi: $<< x, y >, z >$. Xuddi shunday $x_1, x_2, ...$ va x_n predmetlarning tartiblangan n-ligi $< x_1, x_2, ..., x_n >$, ta’rifga asosan, $<< x_1, x_2, ..., x_{n-1} >, x_n >$ tarzda aniqlanadi.

Elementlari tartiblangan juftliklardan iborat bo‘lgan to‘plamga tartiblangan juftliklar to‘plami deb aytiladi.

Binar munosabatni tartiblangan juftliklar to‘plami sifatida aniqlaymiz. Agar ρ biror munosabatni ifodalasa, u vaqtda $< x, y > \in \rho$ va $x \rho y$ ifodalarni o‘zaro almashuvchi ifodalar deb hisoblaymiz. $x \rho y$ ifodani “predmet x predmet y ga nisbatan ρ munosabatda” deb o‘qiladi.

Quyidagi $x = y$, $x < y$, $x \equiv y$ belgilar xudi $x \rho y$ ifodadan kelib chiqqan.

n-ar munosabati tartiblangan n-liklar to'plami sifatida aniqlanadi. 3-ar munosabatni ko'pincha adabiyotda ternar munosabat deb ham yuritiladi.

Misollar. 1. $\{<2,4>, \ <5,6>, \ <7,6>, \ <8,8>\}$ } tartiblangan juftliklar to'plami binar munosabatga misol bo'la oladi.

2.Agar ρ ayniyat munosabatini bildirsa, u vaqtda $<x, y> \in \rho$ degani $x \equiv y$ ni bildiradi.

3.Agar ρ onalik munosabatini bildirsa, u vaqtda <Xursheda, Iroda>$\in \rho$ simvol Xursheda Irodaning onasi ekanligini bildiradi.

4.Ternar munosabatiga butun sonlar to'plamidagi qo'shish amali misol bo'la oladi. $5 = 2 + 3$ yozuvini $<5, 2, 3> \in +$ shaklida ham yozish mumkin.

Bundan keyin binar munosabat termini o'rniga qisqalik uchun munosabat terminini ishlatamiz.

$\{x / x \in A\}$ cimvolini quyidagicha tushunish kerak: { Shunday x lar to'plamiki, $x \in A$ }.

{ x / ayrim y uchun $<x, y> \in \rho$ } to'plami ρ munosabatning aniqlanish sohasi deyiladi va D_ρ cimvoli bilan belgilanadi. { y / ayrim x uchun $<x, y> \in \rho$ } to'plami ρ munosabatning qiymatlar sohasi deyiladi va R_ρ simvoli bilan belgilanadi. Boshqacha qilib aytganda, ρ munosabatning aniqlanish sohasi shu ρ munosabatning birinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plamga aytiladi, ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plamga esa, qiymatlar sohasi deb aytiladi.

Misol: $\{<2,4>, \ <3,3>, \ <6,7>\} \rho$ munosabat berilgan bo'lsin. U vaqtda $D_\rho = \{2,3,6\}$, $R_\rho = \{4,3,7\}$.

Biror C to'plam $<x, y>$ tartiblangan juftliklar to'plami bo'lsin. Agarda x biror X to'plamning elementi va y boshqa Y to'plamning elementi bo'lsa, u vaqtda C to'plam X va Y to'plamlarning to'g'ri (dekart) ko'paytmasidan tuzilgan to'plam deyiladi va

$$C = X \times Y = \{<x, y> / x \in X \ \text{ i } \ y \in Y\}$$

shaklida belgilanadi.

Har bir ρ munosabat ayrim olingan $X \times Y$ to'g'ri ko'paytmaning qism to'plami bo'ladi va $X \supseteq D_\rho$, $Y \supseteq R_\rho$. Agar $\rho \subseteq X \times Y$ bo'lsa, u vaqtda ρ X dan Y ga bo'lgan munosabat deb aytiladi. Agar $\rho \subseteq X \times Y$ va $Z \supseteq X \bigcup Y$ bo'lsa, u vaqtda ρ dan Z ga bo'lgan munosabat deb aytiladi. Z dan Z ga bo'lgan munosabatni Z ichidagi munosabat deb aytiladi.

X qandaydir to'plam bo'lsin. U vaqtda X ichidagi $X \times X$ munosabatni X ichidagi universal munosabat deb aytiladi.

$\{<x, x> / x \in X\}$ munosabat X ichidagi ayniyat munosabati deb aytiladi va i_x yoki i simvoli bilan belgilanadi. Har qanday X to'plamining x va y elementlari uchun $x \, i_x \, y$ ifoda $x = y$ bilan teng kuchlidir.

A to‘plam va ρ munosabat berilgan bo‘lsin. U vaqtda $\rho[A]=\{y/A$ ning ayrim x lari uchun $x\ \rho\ y\ \}$. Bu to‘plamga A to‘plam elementlarining ρ - obrazlari to‘plami deb aytiladi.

Misollar. $y=2x+1$ to‘g‘ri chiziqni $\{<x,y>\in R\times R/\ y=2x+1\ \}$ va $y<x$ munosabatini $\{<x,y>\in R\times R/\ y<x\ \}$ shakllarda yozish mumkin.

1-ta’rif. Agarda X to‘plamningistalgan x elementiuchun $x\,\rho\,x$ bo‘lsa, uvaqtda ρ munosabatiga X to‘plamidagirefleksivmunosabatdebaytiladi; agarda $x\,\rho\,y$ dan $y\,\rho\,x$ kelibchiqsa, uholda ρ - simmetrikmunosabatdebaytiladi; agarda $x\,\rho\,y$ va $y\,\rho\,z$ dan $x\,\rho\,z$ kelibchiqsa, uvaqtda ρ - tranzitivmunosabatdebaytiladi.

Shuko‘rsatilganuchalaxossagaegabo‘lganmunosabatlarmatematikadako‘puchraganiuchun, ulargamaxsusnomqo‘yilgan.

2-ta’rif. Agardabirorto‘plamdagimunosabatrefleksiv, simmetrikvatranzitivxossalargaegabo‘lsa, uvaqtdabundaymunosabatgashuto‘plamdagiekvivalentlikmunosabatideyiladi.

Agarda ρ munosabati X to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsa, u vaqtda $D_\rho = X$.

Misollar. Quyidagi har bir munosabat ma’lum to‘plamdagi ekvivaletlik munosabatiga misol bo‘la oladi:

1.Istalgan to‘plamdagi tenglik munosabati.

2.Yevklid tekisligining hamma uchburchaklar to‘plamidagi o‘xshashlik munosabati.

3.Butun sonlar to‘plamidagi n moduli bo‘yicha taqqoslama munosabati.

4.O‘zbekistonda yashovchi odamlar to‘plamidagi “bir uyda yashovchilar” munosabati.

Ekvivalentlik munosabati shunday asosiy xususiyatga egaki, u to‘plamni kesishmaydigan qism to‘plamlarga bo‘ladi. Keyingi misolga, masalan, “bir uyda yashovchilar” munosabati O‘zbekistonni bir-biri bilan kesishmaydigan “bir uyda yashovchilar” qism to‘plamlariga bo‘ladi. Bu aytilganlarni quyidagicha umumlashtirish mumkin.

$\rho\ X$ to‘plamdagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsin. U vaqtda X to‘plamining A qism to‘plami faqat shundagina ekvivalentlik sinfi yoki ekvivalentlik ρ - sinfi deb aytiladi, qachonki A to‘plamining shunday x elementi topilib, $A=\{y/x\,\rho\,y\}$ bo‘lsa.

Shunday qilib, X to‘plamning shunday x elementi mavjud bo‘lsaki, $A=\rho[\{x\}]$ tenglik bajarilsa, u vaqtda A to‘plam ekvivalentlik sinfi bo‘la oladi.

Agarda ρ munosabati to‘g‘risida hyech qanday anglashmovchilik tug‘ilmaydigan bo‘lsa, u vaqtda X to‘plami $[x]$ shaklida belgilanadi, ya’ni $\rho[\{x\}]=[x]$ va x yuzaga keltirgan ekvivalentlik sinfi deb aytiladi.

Ekvivalentlik sinfi quyidagi ikki xususiyatga egadir:

1. $x\in[x]$ - bir sinfning hamma elementlari o‘zaro ekvivalentdir.

2. Agar $x \rho y$ bo‘lsa, u vaqtda $[x]=[y]$.

1-xossa ekvivalentlik munosabatining refleksivlik xususiyatidan kelib chiqadi.

2-xossaning isboti: $x \rho y$ bo‘lsin, ya’ni x y ga ekvivalent bo‘lsin, u vaqtda $[y] \subseteq [x]$. Haqiqatan ham, $z \in [y]$ ($y \rho z$ ni bildiradi) dan va $x \rho z$ bo‘lganligi uchun ρ munosabatining tranzitiv xususiyatiga asosan $x \rho z$ kelib chiqadi, ya’ni $z \in [x]$. Ekvivalentlik munosabatining simmetriklik xossasidan foydalanib, $[x] \subseteq [y]$ ni isbot etish mumkin. Demak, $[x]=[y]$.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

Funksiya. Tartiblanganjuftlik. Funksiyalartengligi. Bir qiymatli funksiya. Superpozisiya. Funksiyalarning funksiyasi. Teskari funksiya.

4-mavzu.Mantiqiy bog‘lovchilar. (2 soat)

Reja:

1.Mulohaza tushunchasi.
2.Mulohazalar ustida amallar.
3.Chinlik jadvali.

Matematik mantiqning ushbu mulohazalar algebrasi deb atalgan bo‘limida asosiy tekshirish ob’yektlari bo‘lib gaplar xizmat qiladi. Matematik mantiq har bir gapning ma’nosiga qarab, uning chin, haqqoniy, to‘g‘ri yoki yolg‘on, noto‘g‘ri bo‘lishi bilangina qiziqadi.

Masalan: 1. “Toshkent - O‘zbekistonning poytaxti”, “Oy yer atrofida aylanadi” degan gaplar - chindir.

2.“Yer oydan kichik”, “3 >5” degan gaplarning har biri yolg‘ondir.

Shuni ham aytish kerakki, ko‘pgina gaplarning chin yoki yolg‘onligini darhol aniqlash qiyin. Masalan, “Bugungi tun kechagidan qorong‘iroq”, degan gap qaysi vaqtda va qaysi joyda aytilishiga qarab chin ham, yolg‘on ham bo‘lishi mumkin.

1. Oldimga kel. 2. Uyda bo‘ldingmi? 3. Yangi yil bilan. 4. Agar oldin bilsam edim - gaplar chin yoki yolg‘on qiymat qabul qilmaydilar.

Shunday qilib, matematik mantiq: “Har bir gap chin yoki yolg‘on bo‘lish xossasiga ega” deb qabul qiladi.

1-ta’rif. Faqat chin yoki yolg‘on qiymat qabul qila oladigan darak gaplarga mulohazalar deb aytamiz.

Demak, har bir mulohaza ma’lum holatda chin yoki yolg‘on qiymatga ega. Bundan keyin, chin qiymatni qisqacha “**ch**” va yolg‘on qiymatni “**yo**” bilan belgilaymiz.

Mulohazalarni belgilash uchun, asosan, lotin alfavitining kichik harflari ishlatiladi: $a, b, c, ..., u, v, ..., x, y, z$

Ma’lum mulohazalar borki, hamma mumkin bo‘lgan holatlarda (vaziyatlarda) chin qiymatni (yolg‘on) qabul qiladilar. Bunday mulohazalarga absolyut chin (yolg‘on) mulohazalar deb aytiladi.

Mulohazalar algebrasida odatda, konkret mulohazalar bilangina emas, balki har qanday istalgan mulohazalar bilan shug‘ullanadilar. Bu esa o‘zgaruvchi mulohaza tushunchasiga olib keladi. Agar o‘zgaruvchi mulohazani x deb belgilasak, u holda x konkret mulohazalarning istalganini ifodalaydi. Shuning uchun x ikki: “**ch**” va “**yo**” qiymatli o‘zgaruvchini ifodalaydi.

$x_1, x_2, ..., x_n$ ta o‘zgaruvchi mulohaza berilgan bo‘lsin. Bularning har qaysisi chin va yolg‘on qiymatlarni qabul qiladi. Shuning uchun quyidagi qiymatlar satrini tuzish mumkin:

yo, yo, ..., yo,
ch, yo, ..., yo,
yo, ch, ..., yo,
....
ch, ch, ..., ch.

Demak, o‘zgaruvchilar soni n ta bo‘lsa, u vaqtda $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + ... + C_n^n = 2^n$ ta qiymatlar satriga ega bo‘lamiz.

$x_1, x_2 : 2^2 = 4$ ta qiymatlar satri.

$x_1, x_2, x_3 : 2^3 = 8$ ta qiymatlar satri.

Matematik mantiqda “emas”, “yoki”, “va”, “agar..., u vaqtda”, “shunda va faqat shundagina...., qachon....” so‘zlar (bog‘lovchilar) mulohazalar orasidagi mantiqiy amallar deyiladi. Bu amallar yordamida elementar mulohazalardan murakkab mulohaza quriladi. Mulohazalar ustidagi bu amallar matematik mantiqning elementar qismi bo‘lgan mulohazalar mantiqi yoki mulohazalar algebrasi deb ataluvchi qismida o‘rganiladi. Har ikkala termin (“mulohazalar mantiqi” va “mulohazalar algebrasi”) sinonim sifatida ishlatiladi, chunki ular mantiqning ma’lum qismini ikki nuqtai nazardan ifodalaydi: bu ham mantiq (o‘z predmetiga ko‘ra), ham algebra (o‘z metodiga ko‘ra).

Mantiqiy amallar asosan 5 ta bo‘lib, ularning ta’riflari quyidagichadir.

1.Inkor amali. Istalgan x o‘zgaruvchili mulohaza bilan birga $\bar{x}$ ko‘rinishida belgilangan ikkinchi o‘zgaruvchili mulohaza berilgan bo‘lsin.

2-ta’rif. x mulohazaning inkori deb atalgan $\bar{x}$ mulohaza shu bilan xarakterlanadiki, x mulohaza “**ch**” qiymatni qabul qilganda, $\bar{x}$ mulohaza “**yo**” qiymatni qabul qiladi va aksincha.

Demak, mulohazalar mantiqining eng sodda amali bu inkor amali bo‘lib, oddiy tildagi manfiy sifatdosh “emas” ga to‘g‘ri keladi. Bu amal “¯” simvol bilan belgilanadi. Agar x biror mulohaza, masalan, “bugun havo sovuq” bo‘lsa, u holda $\bar{x}$ - yangi murakkab “bugun havo sovuq emas” mulohazadan iboratdir. $\bar{x}$ mulohaza “x emas” deb o‘qiladi.

Shuning uchun, agar x chin mulohaza bo‘lsa, u vaqtda $\bar{x}$ yolg‘on mulohaza bo‘ladi, va aksincha, x yolg‘on bo‘lsa $\bar{x}$ chindir.

Inkor amalining ta’sirini quyidagi chinlik jadvali ko‘rinishida tasvirlaymiz:

x	$\bar{x}$
ch	yo
yo	ch

Xuddi shu jadvalni inkor amalining ta’rifi sifatida qabul qilamiz va boshqa mantiqiy amallar uchun ham shunga o‘xshash jadvallardan foydalanamiz. Ular **chinlik jadvali** deyiladi. Bu jadvallardan foydalanish qulay bo‘lib, ular matematik mantiqning ko‘p bo‘limlarida ishlatiladi.

2.Kon'yunksiya (mantiqiy ko'paytma) amali. x va y o'zgaruvchi mulohazalar ustida bajariladigan kon'yunksiya (lotincha conjunctio - bog'layman so'zidan) amalini $\wedge$ ko'rinishda va bu amal natijasida hosil bo'lgan yangi murakkab mulohazani $x \wedge y$ ko'rinishda belgilaymiz.

3-ta'rif. "Va" bog'lovchisiga mos keluvchi mantiqiy amalga kon'yunksiya amali deb aytamiz. x va y mulohazalarning kon'yunksiyasi x va y mulohazalar chin bo'lgandagina chin qiymatni qabul qilib, qolgan hollarda esa, yolg'on qiymatni qabul qiladi.

$x \wedge y$ ko'rinishdagi mulohaza «x va y» deb o'qiladi. Ko'rinib turibdiki, bu ta'rif "va" bog'lovchining ma'nosiga to'liq to'g'ri keladi. Haqiqatan ham "5 soni toq va tub" mulohaza chin, chunki uni tashkil etuvchi "5 soni toq" va "5 soni tub" har ikkala mulohaza ham chin. "10 soni 5 ga bo'linadi va 7>9" mulohaza yolg'on, chunki murakkab mulohazani tashkil etuvchilaridan biri, chunonchi "7>9" yolg'ondir. Kon'yunksiya ta'rifini quyidagi chinlik jadvali ko'rinishida yozish mumkin:

x	y	$x \wedge y$
ch	Ch	Ch
ch	Yo	Yo
yo	Ch	Yo
yo	Yo	Yo

3.Diz'yunksiya (mantiqiy yig'indi) amali. Mulohaza mantiqida ishlatiladigan uchinchi amal "yoki" bog'lovchiga to'g'ri keladi. Shuni ta'kidlash kerakki, "yoki" bog'lovchisi o'zbek tilida ikki xil ma'noda ishlatiladi. Birinchi holda rad etuvchi "yoki", ikkinchi holda rad etmaydigan "yoki" ma'nosida ishlatiladi. Buning farqi quyidagilardan iborat. Agar x va y mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on bo'lsa, u holda "x yoki y" mulohaza shubhasiz yolg'on bo'ladi. Agar x chin va y yolg'on (yoki x yolg'on va y chin) bo'lsa, u holda "x yoki y" ni chin deb qarash kerak, bu esa o'zbek tilidagi "yoki" so'zining ma'nosiga to'g'ri keladi. Ammo har ikkala x va y mulohazalar chin bo'lganda "x yoki y" mulohazalar chin bo'ladi. Bu vaqtda "x yoki y" mulohazaga qanday qarash kerak?

Masalan, "Bugun yakshanba yoki men kinoga boraman" mulohazani olaylik. Agar bugun yakshanba va men kinoga borsam, u holda bu mulohaza chin yoki yolg'onmi? O'zbek tilida "yoki" bog'lovchisi bir ma'noda, ba'zan esa boshqa ma'noda ishlatiladi. Agar yuqoridagi mulohazani chin deb qarasak, u holda "yoki" ni rad etmaydigan ma'noda, ikkinchi holda "yoki" ni rad etuvchi ma'noda ishlatilayapti deymiz.

4-ta'rif. Rad etmaydigan ma'noda ishlatiladigan "yoki" mantiqiy amal diz'yunksiya (lotincha disjunctio - farq qilaman so'zidan) deyiladi. Ikkita x va y mulohazaning diz'yunksiyasi "$x \vee y$" kabi yoziladi va "x yoki y" deb o'qiladi.

Ikki x va y mulohazaning diz'yunksiyasi $x \vee y$ murakkab mulohaza bo'lib, u faqat x va y yolg'on bo'lgandagina yolg'on qiymat qabul qilib, qolgan hollarda chin qiymatni qabul qiladi.Diz'yunksiya amalini quyidagi chinlik jadvali orqali ham ifodalash mumkin:

x	y	$x \vee y$
ch	Ch	Ch
ch	Yo	Ch
yo	Ch	Ch
yo	Yo	Yo

4. Implikatsiya amali. Quyidagi murakkab mulohazalarni ko'raylik:

1) "Agar 2×5 = 10 bo'lsa, u holda 6×7=42 bo'ladi", 2) "Agar 30 soni 5 ga bo'linsa, u holda 5 juftdir", 3) "Agar 3=5 bo'lsa, u holda 15=17", 4) "Agar 4×3=13 bo'lsa, u holda

9+3=12”. Bu mulohazalarning hammasi ham 2 ta elementar mulohazalardan “agar....., u holda......” bog‘lovchi yordamida tuzilgan. Bu bog‘lovchi mulohazalar mantiqining **implikatsiya** (lotincha implicatio - zich bog‘layman so‘zidan) amaliga to‘g‘ri keladi. Implikatsiya amalini $\rightarrow$ ko‘rinishida belgilaymiz.

5-ta’rif. Ikki x va y mulohazalarning implikatsiyasi deb shunday mulohazaga aytiladiki, u faqat x chin va y yolg‘on bo‘lgandagina yolg‘on bo‘lib, qolgan hamma hollarda chindir.

“$x \rightarrow y$” mulohaza “agar x, u holda y” deb o‘qiladi. Implikatsiya ta’rifini quyidagi chinlik jadvali ko‘rinishida yozish mumkin:

x	y	$x \rightarrow y$
ch	Ch	Ch
ch	Yo	Yo
yo	Ch	Ch
yo	Yo	Ch

Chinlik jadvalidan ko‘rinadiki, yuqoridagi mulohazalarning ikkinchisi yolg‘on bo‘lib, qolganlari chindir. “$x \rightarrow y$” implikatsiya x mulohaza asos (shart, gipoteza, dalil) va u mulohaza esa bu asosning oqibati deb ataladi. Implikatsiya chinlik jadvalining oxirgi ikkita satri shuni ko‘rsatadiki, yolg‘on asosdan chin xulosa ham, yolg‘on xulosa ham kelib chiqar ekan, boshqacha qilib aytganda “yolg‘ondan har bir narsani kutish mumkin”.

Implikatsiya mulohazalar mantiqining muhim amallaridan biri hisoblanadi. So‘zlashuv tilida “agar x, u holda y ” ning har xil sinonimlari bor: “x bo‘lsa, y bo‘ladi”, “agar x bo‘lsa, u vaqtda y bo‘ladi”, “x dan y hosil bo‘ladi”, “x dan y kelib chiqadi”, “ y , agar x bo‘lsa”, “x y uchun yetarli shart” va hokazo.

5. Ekvivalentlik (tengkuchlilik) amali. Ko‘p murakkab mulohazalar elementar mulohazalardan “zarur va kifoya”, “faqat va faqat”, “shunda va faqat shundagina, qachonki”, “.......bajarilishi yetarli va zarurdir” kabi bog‘lovchilari yordamida tuziladi. Bunday bog‘lovchilarga mos keladigan mulohazalar mantiqining amali ekvivalentlik deyiladi va “$\leftrightarrow$“ kabi belgilanadi. $x \leftrightarrow y$ murakkab mulohaza “**x** ekvivalent **u**”deb o‘qiladi.

6-ta’rif. Murakkab mulohaza $x \leftrightarrow y$ chin bo‘ladi, agar x va y lar chin yoki x va y lar yolg‘on bo‘lsa, boshqa hollarda u yolg‘ondir. Boshqacha qilib aytganda faqat va faqat x va y mulohazalar bir xil qiymat qabul qilgandagina $x \leftrightarrow y$ chin bo‘ladi.

Bu ta’rifni quyidagi chinlik jadvali bilan ifodalash mumkin:

x	y	$x \leftrightarrow y$
ch	Ch	Ch
ch	Yo	Yo
yo	Ch	Yo
yo	Yo	Ch

$x \leftrightarrow y$ ekvivalentlikka “x bo‘lsa (bajarilsa), y bo‘ladi (bajariladi) va y bo‘lsa, x bo‘ladi” yoki “x dan y kelib chiqadi va y dan x kelib chiqadi” degan mulohaza mos keladi, ya’ni $x \leftrightarrow y$ ekvivalentlikka matematikada zaruriy va yetarli shart haqida aytilgan teoremalar mos keladi.

Demak,

$$x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) \qquad (1)$$

bo‘ladi. (1) ga binoan, $x \leftrightarrow y$ ekvivaletlikni ikki tomonli implikatsiya deb atash mumkin.

6. Sheffer amali (shtrixi). Nihoyat, yana bir mantiqiy amalni keltiramiz. U Sheffer amali yoki Sheffer shtrixi deyiladi va u " | " kabi belgilanadi. Murakkab mulohaza "$x|y$" "x Sheffer shtrixi y " deb o'qiladi. Bu amal quyidagicha ta'riflanadi:

7-ta'rif. Faqat x va y mulohazalar chin bo'lgandagina, $x|y$ mulohaza yolg'ondir.

Bu ta'rifni quyidagi chinlik jadvali yordamida ifodalasa ham bo'ladi:

x	y	$x\|y$
yo	Yo	Ch
yo	Ch	Ch
ch	Yo	Ch
ch	Ch	Yo

Asosiy chinlik jadvallari. Yuqorida keltirilgan chinlik jadvallari, mos ravishda, inkor qilish, kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya, ekvivalentlik va Sheffer amallarining asosiy chinlik jadvallari deb aytiladi:

x	y	$x \wedge y$	$x \vee y$	$x \rightarrow y$	$x \leftrightarrow y$	$x\|y$
ch	ch	ch	ch	ch	ch	Yo
ch	yo	yo	ch	yo	yo	Ch
yo	ch	yo	ch	ch	yo	Ch
yo	yo	yo	yo	ch	ch	Ch

Asosiy darslik va qo'llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o'quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1. Pris strelkasi.
2. Sheffer shtrixi.

5-6-mavzu. Formula va uning turlari. Formulalarning tengkuchliligi. (4 soat)

Reja:

1. **Tengkuchli formulalar.**
2. **Mulohazalar algebrasida formula tushunchasi.**
3. **Formulalarning turlari.**

Oldingi mavzuda biz asosan mantiqiy amallarni o'rganib chiqdik. Endi bu amallar orasida bog'lanishlar mavjudligini ko'rsatamiz. Buning uchun tengkuchli mulohazalar tushunchasini kiritamiz.

$$x_1, x_2, x_3, ..., x_n \qquad (1)$$

n ta mulohaza berilgan bo'lsin.

1-ta’rif. (1) mulohazalarni inkor, diz’yunksiya, kon’yunksiya, implikatsiya va ekvivalensiya mantiqiy amallar vositasi bilan ma’lum tartibda birlashtirib hosil etilgan murakkab mulohazaga formula deb aytamiz.

Masalan: $[x_1 \vee (x_2 \wedge x_3)] \to x_4$; $[x_1 \wedge (x_2 \to x_3)] \vee (x_4 \leftrightarrow x_5)$; $(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)$;

$(x \to y) \wedge (y \to z) \to (z \to x)$ murakkab mulohazalar formulalar bo‘ladilar. Qavslar mulohazalar ustida mantiqiy amallarning qay tartibda bajarilishini ko‘rsatadi.

Endi formula tushunchasiga matematik ta’rif beraylik. Bu tushuncha quyidagicha aniqlanadi.

2-ta’rif. 1) har qanday $x_1, x_2, ..., x_n$ mulohazalarning istalgan biri formuladir;

2) agar A va B larning har biri formula bo‘lsa, u holda ($A \wedge B$), ($A \vee B$), ($A \to B$), ($A \leftrightarrow B$) va $\overline{A}$ lar ham formulalardir.

3) 1 va 2-bandlarda ko‘rsatilgan ifodalardan tashqari boshqa hech qanday ifoda formula bo‘la olmaydi.

$x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarni elementar formulalar deb ataymiz.

Keyinchalik formulani lozim bo‘lgandagina $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiya shaklida belgilashdan foydalanamiz.

Har qanday formula uchun chinlik jadvali tuzish mumkin. Buning uchun asosiy chinlik jadvallaridan ketma-ket foydalanish kerak.

Masalan, $(x \wedge y) \to (\overline{\overline{x} \vee y})$ formulaning chinlik jadvali quyidagicha bo‘ladi:

x	y	$\overline{x}$	$x \wedge y$	$\overline{x} \vee y$	$\overline{\overline{x} \vee y}$	$(x \wedge y) \to (\overline{\overline{x} \vee y})$
ch	ch	yo	ch	ch	yo	yo
ch	yo	yo	yo	yo	ch	ch
yo	ch	ch	yo	ch	yo	ch
yo	yo	ch	yo	ch	yo	ch

Shunday qilib, har qanday formulaga {ch, yo} to‘plamining bir elementi mos qilib qo‘yiladi.

3-ta’rif. A va B formulalar berilgan bo‘lsin. (1) elementar mulohazalarning har bir qiymatlari satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil bo‘lsa, A va B formulalarga tengkuchli formulalar deb aytiladi va bu $A = B$ tarzda belgilanadi. (1) qatorning kamida bitta qiyatlari satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil bo‘lmasa, u holda A va B formulalarga tengkuchlimas formulalar deb aytiladi va $A \neq B$ ko‘rinishda belgilanadi.

A va B formulalarning tengkuchli bo‘lish-bo‘lmasligi ular uchun tuzilgan chinlik jadvallari yordamida aniqlanadi.

Misollar. 1. $\overline{x} \vee y = A$ va $B = x \to y$ formulalar berilgan bo‘lsin.

x	y	$\overline{x}$	$\overline{x} \vee y$	$x \to y$
ch	ch	yo	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo
yo	ch	ch	ch	ch
yo	yo	ch	ch	ch

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, to‘rtala qiymatlar satri uchun A va B formulalarning mos qiymatlari bir xil. Demak, ta’rifga asosan $A = B$.

2. $x \vee x = x$ tengligi isbot etilsin. $A = x \vee x$, $B = x$.

x	$x \vee x$
ch	ch
yo	yo

Demak, jadvalga asosan $A = B$.

3. $A = (x \vee \bar{x}) \wedge y$, $B = y$.

x	y	$\bar{x}$	$x \vee \bar{x}$	$(x \vee \bar{x}) \wedge y$
ch	ch	yo	ch	ch
ch	yo	yo	ch	yo
yo	ch	ch	ch	ch
yo	yo	ch	ch	yo

Demak, $(x \vee \bar{x}) \wedge y = y$.

Xuddi shunday quyidagi tengkuchliliklarni isbotlash mumkin:

4. $x \vee \bar{x} = y \vee \bar{y}$,   5. $x \vee (x \wedge y) = x$,

6. $(x \vee \bar{x}) \rightarrow y = (x \wedge \bar{x}) \vee y$, 7. $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Ekvivalentlik bilan tengkuchlilik orasidagi farqni tushunish uchun ularni algebraik tenglama va ayniyat bilan solishtiramiz. Tenglama (masalan, $2x + y = 10$) deb shunday harflarning ayrim qiymatlari (masalan, $x = 4$, $y = 2$) uchun bajarib, boshqa qiymatlar (masalan, $x = 1$, $y = 2$) uchun bajarilmaydi. Shunga o‘xshash ekvivalentlik $A \leftrightarrow B$ deb, shunday (masalan, $x_1 \leftrightarrow (x_2 \wedge x_3)$) mulohazaga aytiladiki, unga $x_1, x_2, ..., x_n$ harflarning o‘rinlariga bir xil konkret mulohazalar qo‘yganda u chin qiymat qabul qilib, boshqa konkret qiymatlar qo‘yganda yolg‘on qiymatni qabul qiladi. Ayniyat deb, shunday tenglikka (masalan, $a^2 - b^2 = (a-b)\,(a+b)$) aytiladiki, unda qatnashadigan barcha harflar uchun bajariladi. Shunga o‘xshash, $A \equiv B$ mulohazada qatnashadigan barcha $x_1, x_2, ..., x_n$ harflarning o‘rniga ixtiyoriy konkret mulohazalarni qo‘yganda u chin qiymat qabul qilsa, bunday mulohaza tengkuchlilik deyiladi.

Algebrada ayniy ifodalarni bir-biri bilan almashtirish mumkin bo‘lganidek, mantiq algebrasida tengkuchli mulohazalarni (formulalarni) ham bir-biri bilan almashtirish mumkin. Bu esa murakkab formulalarni (mulohazalarni) soddalashtirish imkonini beradi.Biz tenglama va ayniyat bilan ekvivalentlik va tengkuchlilik orasidagi o‘xshashlikni keltirdik. Endi esa ular orasidagi farqni ko‘rsatamiz. Ma’lumki, algebrada hech qanday almashtirish yordamida tenglikni amallar (qo‘shish, ayirish, darajaga ko‘tarish, bo‘lish va hokazo) bilan almashtirib bo‘lmaydi. Mantiq algebrasida esa ekvivalentlikni implikatsiya $(\rightarrow)$ yoki kon’yunksiya $(\wedge)$, diz’yunksiya $(\vee)$ va inkor $(-)$ amallari orqali ifodalash mumkinligini biz yuqorida ko‘rsatgan edik. $x \leftrightarrow y = (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$ formulaning to‘g‘riligini chinlik jadvali orqali ko‘rsatamiz.

x	y	$x \rightarrow y$	$y \rightarrow x$	$x \leftrightarrow y$	$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x)$
ch	ch	ch	ch	ch	ch
yo	ch	ch	yo	yo	yo
ch	yo	yo	ch	yo	yo

yo	yo	ch	ch	ch	ch

Jadvaldan ko‘rinadiki, oxirgi ikki ustunning chinlik qiymati ustma-ust tushadi. Shu bilan formula isbotlanadi.

Oddiy algebrada tenglik belgisi «=» quyidagi aksiomalarni qanoatlantiradi: 1) ixtiyoriy a son uchun $a = a$ (refleksivlik); 2) agar $a = b$ bo‘lsa, u holda $b = a$ (simmetriklik); 3) agar $a = b$, $b = c$ bo‘lsa, u holda $a = c$ (tranzitivlik) bo‘ladi.

Shunga o‘xshash, mulohazalar algebrasida, ekvivalentlik ta’rifidan osonlik bilan ko‘rish mumkinki, u refleksiv, simmetrik va tranzitiv, ya’ni

1) ixtiyoriy x mulohaza uchun $x \equiv x$;

2) ixtiyoriy ikki x va y mulohazalar uchun, agar $x \equiv y$ bo‘lsa, u holda $y \equiv x$;

3) ixtiyoriy x, y, z uchta mulohazalar uchun $x \equiv y$ va $y \equiv z$ bo‘lsa, u holda $x \equiv z$.

4-ta’rif. Elementar mulohazalarning hamma qiymatlar satrlarida faqat chin qiymatni qabul qiluvchi formula aynan chin (doimo chin) formula yoki tavtologiya deb ataladi va J bilan belgilanadi.

A formulaning tavtologiya ekanligi yoki emasligi qiymatlar jadvalini tuzish orqali bilinadi.

Misollar:

1. $J = x \wedge (x \to y) \to y$ formula tavtologiyadir. Haqiqatan:

x	y	$x \to y$	$x \wedge (x \to y)$	$x \wedge (x \to y) \to y$
ch	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	ch
yo	ch	ch	yo	ch
yo	yo	ch	yo	ch

2. $J = (\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$ formula ham tavtalogiyadir:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \to y$	$(\bar{x} \vee y) \to (x \to y)$
ch	ch	yo	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	yo	ch
yo	ch	ch	ch	ch	ch
yo	yo	ch	ch	ch	ch

5-ta’rif. Elementar mulohazalarning hamma qiymatlar satrlarida faqat yolg‘on qiymatni qabul qiluvchi formulalar aynan yolg‘on (doimo yolg‘on) yoki bajarilmaydigan formulalar deyiladi va $\bar{J}$ bilan belgilanadi.

Masalan, $\bar{J} = (\bar{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$ aynan yolg‘on formuladir:

x	y	$\bar{x}$	$\bar{x} \vee y$	$x \to y$	$\overline{x \to y}$	$(\bar{x} \vee y) \wedge (\overline{x \to y})$
ch	ch	yo	ch	ch	yo	yo
ch	yo	yo	yo	yo	ch	yo
yo	ch	ch	ch	ch	yo	yo
yo	yo	ch	ch	ch	yo	yo

Ma’lumki, aynan chin formulaning inkori aynan yolg‘on formula bo‘ladi va aksincha. Aynan chin va aynan yolg‘on formulalar unga kiradigan o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lmay, faqat bitta qiymat qabul qiladi.

6-ta’rif. Agar $(A \leftrightarrow B)$ tavtologiya bo‘lsa, u holda A va B lar mantiqiy ekvivalent deb aytiladi. Agar $(A \to B)$ tavtologiya bo‘lsa, u holda B A ning mantiqiy xulosasi deb aytiladi.

Endi E.Mendelsonning kitobida bayon etilgan tavtologiyalarga tegishli ayrim teoremalarni keltiramiz:

1-teorema. Agar A va $A \to B$ aynan chin formulalar (tavtologiyalar) bo‘lsa, u holda B formula ham tavtologiya bo‘ladi.

Isbot. A va $A \to B$ tavtalogiyalar bo‘lsin. A va B formulalarning tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning biror qiymatlar satrida B formula yolg‘on qiymat qabul qilsin. A formula tavtologiya bo‘lganligi uchun o‘zgaruvchilarning o‘sha qiymatlar satrida A chin qiymat qabul qiladi. U vaqtda ($A \to B$) formula yolg‘on qiymat qabul qiladi. Bu natija ($A \to B$) ning tavtologiya degan farazimizga qarama-qarshidir. Demak, B tavtologiyadir.

2-teorema. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lgan A formula tavtologiya va B formula A formuladan $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar o‘rniga mos ravishda $A_1, A_2, ..., A_n$ formulalarni qo‘yish natijasida hosil etilgan bo‘lsa, u holda B formula tavtologiya bo‘ladi, ya’ni tavtologiyada o‘rniga qo‘yish yana tavtologiyani keltiradi.

Isbot. A tavtologiya bo‘lsin va B formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchi mulohazalarning ixtiyoriy qiymatlar satri berilgan bo‘lsin. U vaqtda $A_1, A_2, ..., A_n$ formulalar $y_1, y_2, ..., y_n$ (har bir x_i **ch** yoki **yo** qiymat qabul qiladi) qiymatlar qabul qiladilar. Agar $x_1, x_2, ..., x_n$ larga mos ravishda $y_1, y_2, ..., y_n$ qiymatlarni bersak, u holda A ning natijaviy qiymati B ning chinlik qiymatiga mos keladi. A tavtologiya bo‘lganligi uchun B formula tarkibiga kirgan o‘zgaruvchilarning berilgan ixtiyoriy qiymatlar satrida **ch** qiymat qabul qiladi. Shunday qilib, B doimo **ch** qiymat qabul qiladi va u tavtologiya bo‘ladi.

3-teorema. Agar A_1 formula tarkibiga bir yoki ko‘p marta kirgan A formula o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida B_1 formula hosil etilsa, u holda $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ tavtologiya bo‘ladi. Demak, A va B lar mantiqiy ekvivalent bo‘lsa, u holda A_1 va B_1 ham mantiqiy ekvivalent bo‘ladi.

Isbot. Agar A va B formulalar o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlar satrida qarama-qarshi chinlik qiymatlariga ega bo‘lsa, u holda $(A \leftrightarrow B)$ ning chinlik qiymati **yo** bo‘ladi va natijada $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ formula **ch** qiymat qabul qiladi. Agar A va B lar o‘zgaruvchilarning ixtiyoriy qiymatlar satrida bir xil chinlik qiymati qabul qilsalar, u holda A_1 va B_1 formulalar ham bir xil chinlik qiymati qabul qiladilar, chunki teoremaning shartiga asosan B_1 formula A_1 formuladan A ning o‘rniga B ni qo‘yish natijasida hosil etilgan. Demak, bu holda $(A \leftrightarrow B)$ ham, $(A_1 \leftrightarrow B_1)$ ham **ch** qiymat qabul qiladi. Shuning uchun $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ formula ham **ch** qiymat qabul qiladi.

Demak, $((A \leftrightarrow B) \to (A_1 \leftrightarrow B_1))$ formula tavtologiya bo‘ladi.

7-ta’rif. Elementar mulohazalarning kamida bitta qiymatlar satrida chin qiymat qabul qiluvchi va aynan chin bo‘lmagan formulaga bajariluvchi formula deb aytiladi.

Masalan. 1. $\overline{(x \wedge \bar{y})} \leftrightarrow (\bar{x} \wedge y)$; 2. $[(x \leftrightarrow y) \wedge (x \vee y)] \to \bar{z}$; 3. $x \vee y$; 4. $x \to y \leftrightarrow z$ formulalar bajariluvchi formulalar hisoblanadi.

Aynan chin formulalar katta ahamiyatga ega bo‘lib, ular mantiq qonunlarini ifodalaydi. Shu munosabat bilan quyidagi masala tug‘iladi: shunday metodni topish kerakki, u chekli miqdordagi amal yordamida mantiq algebrasining ixtiyoriy muayan formulasini aynan chin yoki aynan chin emasligini aniqlasin. Bunday metod yechiluvchi metod yoki algoritm, yoki yechiluvchi prosedura deyiladi. Qo‘yilgan masalaning o‘zi esa **“yechilish muammosi”** deyiladi. Bu muammo faqatgina mulohazalar algebrasi uchungina emas, balki boshqa mantiqiy sistemalar uchun ham qo‘yiladi. U mulohazalar algebrasi uchun ijobiy ravishda yechiladi. Bu yerda yechiluvchi prosedura sifatida chinlik jadvalini olishimiz mumkin, chunki bunday jadval har bir muayan formula uchun qo‘yilgan savolga javob beradi. Agar berilgan formulaga mos keladigan jadvalning oxirgi ustunida faqat “chin” bo‘lsa, u holda bu formula aynan “chin”, agar oxirgi ustunda hech bo‘lmaganda bitta “yolg‘on” bo‘lsa, u holda formula aynan chin emas bo‘ladi. Tabiiyki, amalda bu usulni har doim bajarib bo‘lmaydi (chunki formulada n ta o‘zgaruvchi qatnashsa, bunday jadval 2^n ta satrga ega bo‘ladi). Lekin har doim chekli miqdordagi amal bajarib, prinsip jihatdan qo‘yilgan savolga javob berish mumkin.

Asosiy mantiqiy tengkuchliklarni yeltiramiz. Avvalo, oddiy algebrada ma’lum bo‘lgan ayniyatlarga o‘xshashlarini keltiramiz. Ma’lumki, qo‘shish va ko‘paytirish amali quyidagi qonuniyatlarga bo‘ysunadi:

1) $x+y=y+x$ (qo‘shishning kommutativlik qonuni);
2) $(x+y)+z=x+(y+z)$ (qo‘shishning assosiativlik qonuni);
3) $xy=yx$ (ko‘paytirishning kommutativlik qonuni);
4) $(xy)z=x(yz)$ (ko‘paytirishning assosiativlik qonuni);
5) $x(y+z)=xy+xz$ (ko‘paytirishning yig‘indiga nisbatan distributivlik qonuni).

Shu ayniyatlarga o‘xshash mantiq algebrasida quyidagi tengkuchliliklar o‘rinlidir:

$$x \wedge y = y \wedge x \qquad (3)$$

$$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z) \qquad (4)$$

$$x \vee y = y \vee x \qquad (5)$$

$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z) \qquad (6)$$

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \qquad (7)$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \qquad (8)$$

Bu tengkuchliliklarni tekshirish uchun chinlik jadvalidan foydalansa bo‘ladi. Bu yerda biz (8)ni tekshiradigan jadvalni keltirishimiz bilan kifoyalanamiz:

x	y	z	$y \wedge z$	$x \vee y$	$x \vee z$	$x \vee (y \wedge z)$	$(x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x \vee (y \wedge z) \equiv (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo	yo	ch
yo	yo	ch	yo	yo	ch	yo	yo	ch
yo	ch	yo	yo	ch	yo	yo	yo	ch
yo	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch
ch	yo	yo	yo	ch	ch	ch	ch	ch
ch	yo	ch	yo	ch	ch	ch	ch	ch
ch	ch	yo	yo	ch	ch	ch	ch	ch
ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch	ch

Diz’yunksiya $(\vee)$ amali kommutativlik va assosiativlik xossasiga egadir. (7)-(8) tengkuchliliklar esa $\wedge$ va $\vee$ amallarning bir-biriga nisbatan distributiv xossasiga ega ekanligini ko‘rsatadi. Shuni ham ta’kidlash kerakki, (8) tengkuchlilikka o‘xshash oddiy algebrada ayniyat yo‘q (chunki $x+yz=(x+y)\,(x+z)$ ayniyat emas). Yuqoridagi o‘xshashlik asosida $x \vee y$ ni mantiqiy yig‘indi, $x \wedge y$ ni esa mantiqiy ko‘paytma deb olishimiz mumkin. Bu o‘xshashlikni kuchaytirish uchun, algebraik ko‘paytmada nuqta $(\cdot)$ yozilmaganidek (masalan, $x\cdot$

$y = xy$), mantiqiy ko‘paytirish belgisi $(\wedge)$ ni yozmaymiz, ya’ni $x\wedge y$ ning o‘rniga xy ni yozamiz. Bundan keyin mantiqiy ifodalarni soddalashtirish, ularda qavslarni kamaytirish maqsadida quyidagicha shartlashamiz:

1) biror mantiqiy ifoda inkor ishorasi ostida bo‘lsa, uni qavssiz yozamiz, ya’ni $\overline{(x\vee y)}\wedge z$ ning o‘rniga $\overline{x\vee y}\wedge z$ ni, yoki $\overline{x\vee y}\, z$ ni yozamiz.

2) kon’yunksiya belgisi diz’yunksiya, implikatsiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(xy)\vee z$ o‘rniga $xy\vee z$, $x\to(yz)$ o‘rniga $x\to yz$, $(xy)\leftrightarrow(zu)$ o‘rniga $xy\leftrightarrow zu$ yozamiz.

3) diz’yunksiya belgisi implikatsiya va ekvivalentlik belgilariga nisbatan mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(x\vee y)\to z$ o‘rniga $x\vee y\to z$ va $(x\vee y)\leftrightarrow z$ o‘rniga $x\vee y\leftrightarrow z$ yozamiz.

4) implikatsiya belgisi ekvivalentlik belgisiga nisbatan mustahkamroq bog‘laydi deb hisoblaymiz, ya’ni $(x\to y)\leftrightarrow z$ o‘rniga $x\to y\leftrightarrow z$ bu kelishuvlar mantiqiy ifodalarni yozishni soddalashtiradi, masalan,

$(((x\leftrightarrow y)\to(x\wedge z))\leftrightarrow(((\overline{x\wedge\overline{y}})\vee(\bar{x}\wedge y))\vee(x\to z)))$ o‘rniga

$(x\leftrightarrow y)\to\overline{xz}\leftrightarrow x\,\bar{y}\vee\bar{x}y\vee(x\to z)$ ni yozamiz.

Yuqoridagi (1)-tengkuchlilik yordamida $\leftrightarrow$ belgisini $\to$ va $\wedge$ belgilari orqali ifodalashimiz mumkin. Endi $x\to y$ implikatsiyani ko‘raylik. Faqatgina x chin va y yolg‘on bo‘lgandagina $\bar{x}\vee y$ mulohaza yolg‘on, bundan esa faqatgina x chin (ya’ni $\bar{x}$ yolg‘on) va y yolg‘on bo‘lgandagina $\bar{x}\vee y$ mulohaza yolg‘on bo‘lishi kelib chiqadi. Shunday qilib, yana bir tengkuchlilikka ega bo‘lamiz:

$$x\to y\equiv\bar{x}\vee y. \qquad (9)$$

Demak, $\to,\leftrightarrow,\vee,\wedge,-$ belgilarni o‘z ichiga olgan ixtiyoriy murakkab mulohazani unga tengkuchli bo‘lgan shunday mulohaza bilan almashtirish mumkinki, natijada faqat $\vee,\wedge,-$ belgilar qatnashgan mulohazalarga ega bo‘lamiz. Bunday almashtirish mantiq algebrasining elektrotexnikadagi tadbiqi uchun katta ahamiyatga ega, chunki u yerda ishlatiladigan ifodalarda faqat uchta $\vee,\wedge,-$belgilar qatnashadi. Endi, $\vee$ belgini $\wedge$ va $-$belgilar orqali ifodalaymiz. Buni ikki karra inkorni o‘chirish qonuni deb ataluvchi $\overline{\overline{x}}=x$ tengkuchlilikdan va

$$\overline{x\vee y}\equiv\bar{x}\wedge\bar{y}, \qquad (10)$$

$$\overline{x\wedge y}\equiv\bar{x}\vee\bar{y}. \qquad (11)$$

de Morgan qonunlari deb ataluvchi hamda chinlik jadvali yordamida osongina tekshiriladigan tengkuchliliklar yordamida bajarish mumkin.

Haqiqatan ham,

$$x\vee y\equiv\overline{\overline{x\vee y}}\equiv\overline{\bar{x}\wedge\bar{y}} \qquad (12)$$

va shunga o‘xshash

$$x\wedge y\equiv\overline{\bar{x}\vee\bar{y}} \qquad (13)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Shunday qilib, mantiq algebrasining ixtiyoriy ifodasini unga tengkuchli bo‘lgan shunday ifoda bilan almashtirish mumkinki, oxirgi ifodada faqat $\wedge$ va $-$yoki $\vee$ va $-$belgilar qatnashadi. Shunga o‘xshash barcha mantiq amallarni $\to$ va$-$amallar bilan almashtirish mumkin.

Shuni ham aytish kerakki, barcha amallarni faqatgina Sheffer shtrixi bilan almashtirish ham mumkin:

$$\bar{x}\equiv x|x,\quad x\wedge y\equiv(x|y)|(x|y),\quad \overline{x\wedge y}\equiv x|y,\quad x\vee y\equiv\bar{x}|\bar{y},\quad x\to y\equiv x|\bar{y}.$$

Bu tengkuchliliklarni, Sheffer amali ta’rifidan foydalanib, chinlik jadvali yordamida osongina ko‘rsatish mumkin.

Endi misol sifatida $(x \to y)\,(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \overline{y})$ ifodani shunday almashtiramizki, natijada faqat $\wedge$, $\vee$ va –belgilar qatnashsin. Buning uchun avvalo (9), (2) va (3) tengkuchliliklardan foydalanamiz:

$$(x \to y)\,(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \overline{y}) \equiv (x \to y)\cdot(y \to x) \to (\bar{x} \to \bar{y})\cdot(\bar{y} \to \bar{x}) \equiv$$
$$\equiv (\bar{x} \vee y)\,(\bar{y} \vee x) \to (\bar{\bar{x}} \vee \bar{y})\,(\bar{\bar{y}} \vee \bar{x}) \equiv \overline{(x \vee \bar{y})\,(y \vee \bar{x})} \vee (\bar{x} \vee y)\cdot(\bar{y} \vee x).$$

Kommutativlik va distributivlik qonunlaridan foydalanib, bu ifodani quyidagi ko‘rinishda yozishimiz mumkin:

$$(x \to y)\cdot(y \to x) \to (\bar{x} \leftrightarrow \bar{y}) \equiv (\bar{x}\cdot y \vee \bar{y}\cdot x \vee \bar{x}\cdot\bar{y} \vee x\cdot y \vee x\bar{y} \vee \bar{x}y.$$

Endi shunday savol tug‘iladi: agar hamma mantiqiy amallar ikkita (–, $\wedge$) yoki hatto bitta $\overline{\overline{x}} = x$ ga keltirishning hojati bormi? Sabab shundaki, faqat ikkita yoki bitta belgi orqali almashtirganda mantiqiy ifodalar juda cho‘zilib ketadi va uni ko‘zdan kechirish qiyinlashadi.

Ikkinchi tomondan, mantiqiy xulosalarning qonuniyatlarini bayon etayotganda, yuqorida kiritilgan $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$amallar katta ahamiyatga ega. Bu xususan $\to$amaliga tegishlidir. Yana bir nechta muhim tengkuchliliklarni keltiramiz:

$x \cdot \bar{x} \equiv$ yo (qarama-qarshilik qonuni) (14)

$x \vee \bar{x} \equiv$ yo (uchinchisi istisno qonuni) (15)

$x \cdot x \equiv x, \quad x \vee x \equiv x$ (idempotentlik qonuni)(16)

$x \cdot (x \vee y) \equiv x, \quad x \vee x \cdot y \equiv x$ (yutish qonunlari) (17)

$x \vee$ yo $\equiv x$, $x \vee$ ch $\equiv$ ch, $x \cdot$ ch $\equiv x$, $x \cdot$ yo $\equiv$ yo (18)

Keltirilgan tengkuchliliklar ixtiyoriy mantiqiy ifodalarni kerakli ko‘rinishga keltirishga imkon beradi.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1. Tavtalogiyaga oid teoremalar.
2. Inkor etuvchi formulalar.
3. Bajariluvchi formula.

7-mavzu. Mulohazalar algebrasi formulasining normal shakllari. (2 soat)

Reja:

1.KNSH.

2.DNSH.

3.MKNSH va MDNSH.

Tengkuchli almashtirishlar bajarib, mulohazalar algebrasining formulalarini har xil ko‘rinishlarda yozish mumkin.

Masalan, $\overline{A} \rightarrow$VS formulani $A \vee BC$ yoki $(A \vee B)$ $(A \vee C)$ ko‘rinishlarda yoza olamiz.

Mantiq algebrasining kontakt va rele-kontaktli sxemalar, diskret texnikadagi tatbiqlarida va matematik mantiqning boshqa masalalarida formulalarning normal shakllari katta ahamiyatga ega.

Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$x^{\sigma} = \begin{cases} x, & агар \quad \sigma = ч, \\ \overline{x}, & агар \quad \sigma = ё. \end{cases} \qquad \sigma^{\sigma} = \text{ch} \ \text{ekanligi aniq.}$$

1-ta’rif.

$$x_1^{\sigma_1} \cdot x_2^{\sigma_2} \cdots x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

ko‘rinishdagi formulaga elementar kon’yunksiya deb aytamiz. Bu yerda $\sigma = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ ixtiyoriy qiymatlar satri va x_i o‘zgaruvchilar orasida bir xillari bo‘lishi mumkin.

2-ta’rif.

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \qquad (2)$$

ko‘rinishdagi formulaga elementar diz’yunksiya deb aytamiz. Bu yerda ham $\sigma_1 = \{\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_n\}$ ixtiyoriy qiymatlar satri va x_i o‘zgaruvchilar orasida bir xillari bo‘lishi mumkin.

3-ta’rif. Elementar diz’yunksiyalarning kon’yunksiyasiga formulaning kon’yunktiv normal shakli (KNSH) va elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyasiga formulaning diz’yunktiv normal shakli (DNSH) deb aytiladi.

KNSHga $(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee z) \wedge (x \vee \overline{y} \vee z)$ formula va DNSHga $x\,y \vee \overline{x}z \vee x\overline{y}z$ formula misol bo‘la oladi.

1-teorema. Elementar mulohazalarning har bir P formulasiga tengkuchli kon’yunktiv normal shakldagi Q formula mavjud.

Bu teoremani isbotlashda ushbu tengkuchliliklardan foydalanamiz:

1. $\overline{A \wedge B} = \overline{A} \vee \overline{B}$; 2. $\overline{A \vee B} = \overline{A} \wedge \overline{B}$;

3. $A \rightarrow B = \overline{A} \vee B$; 4. $\overline{A \rightarrow B} = A \wedge \overline{B}$; (3)

5. $A \leftrightarrow B = (\overline{A} \vee B) \wedge (A \vee \overline{B})$; 6. $\overline{A \leftrightarrow B} = (A \wedge \overline{B}) \vee (\overline{A} \wedge B)$.

Isbot. P formula normal kon’yunktiv shaklda bo‘lmasa, quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:

a) P dagi elementar mulohazalar $\wedge$ va $\vee$ amallari bilangina birlashtirilgan bo‘lsa ham, lekin $\wedge$ so‘nggi amalni ifodalamaydi. Bu holda $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee B)$ distributivlik qonunidan foydalanib, so‘nggi amali $\wedge$ dan iborat tengkuchli Q formulaga keltiramiz.

b) P formula $-$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow, \leftrightarrow$mantiqiy amallar vositasida tuzilgan qandaydir formulani ifodalasin. U holda P ga (3) tengkuchliliklarni tatbiq etib P bilan tengkuchli va $-$, $\vee$, $\wedge$ bilan ifodalangan P^1 formulani hosil qilamiz. Agar P^1KNSH ko‘rinishida bo‘lmasa, unga $A \vee (B \wedge C) = (A \vee B) \wedge (A \vee B)$ distributivlik qonunini tatbiq etib, chekli qadamlardan keyin P bilan tengkuchli Q kon’yunktiv normal shakldagi formulaga kelamiz. **Izoh.** P formulani kon’yunktiv normal shaklga keltirish jarayonida

$A \wedge A = A$, $A \vee A = A$, $A \wedge J = A$, $A \wedge J = J$,

$A \wedge \overline{J} = \overline{J}$, $A \vee \overline{J} = A$, $A \vee \overline{A} = J$ (4)

tengkuchliliklardan foydalanib, uni soddalashtirish mumkin.

Misollar. 1. $P = [(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})] \vee [x \wedge (\overline{x} \vee y)]$

$P = \{[(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})] \vee x\} \wedge \{[(x \vee y) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y})] \vee (\overline{x} \vee y)\} =$

$= [(x \vee y) \vee x] \wedge [(\bar x \vee \bar y) \vee x] \wedge [(x \vee y) \vee (\bar x \vee y)] \wedge [(\bar x \vee \bar y) \vee (\bar x \vee y)] =$

$= (x \vee y) \wedge [J \vee \bar y] \wedge (J \vee y) \wedge (\bar x \vee J) = (x \vee y) \wedge J \wedge J \wedge J = x \vee y$;

$P = x \vee y$.

Shunday qilib, P formulaning KNSH bittagina diz'yunktiv $(x \vee y)$ haddan iborat ekan.

2. $P = \overline{x \vee y} \leftrightarrow x \wedge y$

$P = \bar x \wedge \bar y \leftrightarrow x \wedge y = \overline{x \vee y} \leftrightarrow (x \wedge y) = [\overline{\overline{x \vee y}} \vee (x \wedge y)] \wedge [(\overline{x \vee y}) \vee (\overline{x \wedge y})] =$

$= [(x \vee y) \vee (x \wedge y)] \wedge [(\bar x \wedge \bar y) \vee (\bar x \vee \bar y)] = [(x \vee y) \vee (x \wedge y)] \wedge [(\bar x \wedge \bar y) \vee (\bar x \vee \bar y)] =$

$= [(x \vee y \vee x) \wedge (x \vee y \vee y)] \wedge [(\bar x \vee \bar y \vee \bar x) \wedge (\bar x \vee \bar y \wedge \bar y)] =$

$= (x \vee y) \wedge (x \vee y) \wedge (\bar x \vee \bar y) \wedge (\bar x \vee \bar y) = (x \vee y) \wedge (\bar x \vee \bar y)$: $P = (x \vee y) \wedge (\bar x \vee \bar y)$.

P formulasi tavtologiya ekanligini chinlik jadvaliga murojaat qilmay turib aniqlash mumkinmi degan savolga quyidagi **chinlik alomati** deb atalgan teorema ijobiy javob beradi.

2-teorema. P formula doimo chin bo'lishi uchun uning KNSH dagi har bir elementar diz'yunktiv hadida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot: a) P formulaning

$$P = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \qquad (5)$$

KNSH dagi har bir A_i hadida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo'lsin, ya'ni $A_i = x \vee \bar x \vee y \vee \ldots\ldots \vee u$ shaklida bo'lsin, u holda $x \vee \bar x = J$ va $J \vee A = J$ larga asosan $A_i = J \vee (y \vee \ldots \vee u \vee V) = J$ bo'ladi.

Demak, $P = J \wedge J \wedge \ldots \wedge J = J$ bo'ladi, ya'ni aynan chin formula bo'ladi.

b) Endi P - tavtologiya bo'lsin va A_i uning KNSH dagi shunday elementar diz'yunktiv hadi bo'lsinki, unda birorta elementar mulohaza bilan birga uning inkori qatnashmagan bo'lsin. Masalan, $A_i = x \vee \bar y \vee \ldots\ldots \vee u$ shaklida bo'lsin. Endi, elementar mulohazalarning shunday qiymatlar satrini olaylikki, bu satrda x ning qiymati yo, y ning qiymati ch, z ning qiymati yo,......, u ning qiymati yo bo'lsin. U vaqtda

$A_i = x \vee \bar y \vee \ldots\ldots \vee u =$ yo $\vee$ ch $\vee \ldots\ldots \vee$ yo = yo $\vee \ldots\ldots \vee$ yo = yo.

Demak, $P = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n$ ning qiymati ham yolg'on bo'ladi. Ammo, teoremaning shartiga asosan P ning qiymati aynan chindir. Natijada qarama-qarshilikka keldik. Demak, elementar diz'yunksiyalarning har bir hadida birorta mulohaza o'zi va o'zining inkori bilan qatnashishi shart.

Misol. $P = x \wedge \bar x \to \overline{y \wedge \bar y} = \overline{x \wedge \bar x} \vee \overline{y \wedge \bar y} = \bar x \vee x \vee \bar y \vee y$. $P = \bar x \vee x \vee \bar y \vee y$ - aynan chindir.

2. $\overline{x \wedge \bar x} \wedge (y \wedge \bar y \to z) = (\bar x \vee x) \wedge (\bar y \vee y) \vee z = P(\bar x \vee x) \wedge (\bar y \vee y \vee z)$ - aynan chin formuladir.

Eslatib o'tamizki, elementar kon'yunksiyalarning diz'yunksiyasiga formulaning diz'yunktiv normal shakli (DNSH) deb aytiladi.

3-teorema. Elementar mulohazalarning istalgan P formulasini DNSHga keltirish mumkin.

Isbot. Buning uchun $\bar P$ formulani KNSHga keltiramiz:

$$\bar P = A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_m$$

va so'ngra $\bar P$ ning inkorini topganimizda formula DNSH ko'rinishiga keladi:

$$\bar{\bar P} = P = \overline{A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots\ldots \wedge A_m} = \bar A_1 \vee \bar A_2 \vee \ldots\ldots \vee \bar A_m.$$

Endi **yolg‘onlik alomati** deb atalgan teoremani isbotlaymiz.

4-teorema. P formula aynan yolg‘on bo‘lishi uchun, uning diz’yunktiv normal shaklidagi har bir elementar kon’yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga bu mulohazaning inkori ham mavjud bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. a) P -doimo yolg‘on bo‘lsa, u holda $\overline{P}$ - aynan chin bo‘ladi. Demak, $\overline{P}$ ning KNSH dagi har bir elementar diz’yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza bilan birga uning inkori ham mavjud bo‘ladi. Shuning uchun $\overline{\overline{P}} = P$ ning DNSH dagi har bir kon’yunktiv hadida kamida bitta elementar mulohaza va uning inkori mavjud bo‘ladi.

b) Endi har bir elementar kon’yunksiya ifodasida kamida bitta elementar mulohaza va uning inkori mavjud bo‘lsin, ya’ni

$A_i = x_i \wedge \overline{x_i} \wedge y_i \wedge ..... \wedge z_i$ bo‘lsin, u vaqtda $A_i = 0$ va

$$P = 0 \vee 0 \vee ... \vee 0 = 0.$$

Demak, P doimo yolg‘on formuladir.

Misol. $P = \overline{\overline{(\overline{x} \wedge x) \to \overline{y} \wedge y}} = \overline{(\overline{x} \wedge x)} \vee \overline{\overline{y} \wedge y} = (\overline{\overline{x}} \vee \overline{x}) \vee \overline{\overline{y}} \vee \overline{y} = (x \vee \overline{x}) \vee (y \vee \overline{y})$

$\overline{P} = (x \vee \overline{x}) \vee (y \vee \overline{y})$ - aynan chin.

$P = (\overline{x} \wedge x) \wedge (\overline{y} \wedge y)$ - aynan yolg‘on.

5-teorema. Elementar mulohazalarning har bir P formulasi uchun yechilish muammosi yechiladigandir.

Isbot. 1. P ni KNSHga keltirgandan keyin, aynan chin bo‘lish - bo‘lmasligi darhol aniqlanadi.

2. P aynan chin bo‘lmasa, uni DNSH ga keltirib, aynan yolg‘on bo‘lish - bo‘lmasligini aniqlaymiz.

3. P doimo chin va doimo yolg‘on bo‘lish shartlarini qanoatlantirmasa, u holda bu formula bajariluvchi bo‘ladi.

Demak, elementar mulohazalar formulasining aynan chin, aynan yolg‘on yoki bajariluvchi formula bo‘lishini chekli qadamlar prosessida aniqlash mumkin. Shuning uchun yechilish muammosi doimo ijobiy hal bo‘ladi.

Mantiq algebrasining bitta formulasi uchun bir nechta DNSH (KNSH) mavjud bo‘lishi mumkin. Masalan, $(x \vee y)\ (x \vee z)$ formulani quyidagi $x \vee yz$, $x \vee xy \vee xz$ DNSHlarga keltirish mumkin. Bular distributivlik va idempotentlik qonunlarini qo‘llash natijasida hosil qilingan.

Formulalarni bir qiymatli ravishda normal shaklda tasvirlash uchun mukammal diz’yunktiv normal shakl va mukammal kon’yunktiv normal shakl (MDNSH va MKNSH) deb ataluvchi ko‘rinishlari ishlatiladi.

n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ elementar mulohazalarning

$$x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \cdots \vee x_n^{\sigma_n} \qquad (1)$$

elementar diz’yunksiyalari va

$$x_1^{\sigma_1} \wedge x_2^{\sigma_2} \wedge \cdots \wedge x_n^{\sigma_n} \qquad (2)$$

elementar kon’yunksiyalari berilgan bo‘lsin.

4-ta’rif. (1) elementar diz’yunksiya ((2) elementar kon’yunksiya) to‘g‘ri elementar diz’yunksiya (elementar kon’yunksiya) deb aytiladi, shunda va faqat shundagina, qachonki (1)ning ((2)ning) ifodasida har bir elementar mulohaza x_i bir marta qatnashgan bo‘lsa.

Masalan, $x_1 \vee x_2 \vee x_3$ va $\overline{x_1} \vee x_4 \vee x_6$ elementar diz’yunksiyalar va $x_1\ x_2\ x_3$ va $x_1\ \overline{x_3}\ x_6$ elementar kon’yunksiyalar mos ravishda to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalar va elementar kon’yunksiyalar deb aytiladi.

5-ta’rif. (1) elementar diz’yunksiya ((2) elementar kon’yunksiya) $x_1, x_2, ..., x_n$ mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar diz’yunksiya (elementar kon’yunksiya) deb aytiladi, qachonki ularning ifodasida $x_1, x_2, ..., x_n$ mulohazalarning har bittasi bir matragina qatnashgan bo‘lsa.

Masalan, $x_1 \vee \overline{x_2} \vee x_3$ va $\overline{x_1} \vee \overline{x_2} \vee x_3$ elementar diz’yunksiyalar va $\overline{x_1}\ \overline{x_2}\ \overline{x_3}$, $x_1 x_2 \overline{x_3}$ elementar kn’yunksiyalar x_1, x_2, x_3 mulohazalarga nisbatan to‘liq elementar diz’yunksiyalar va elementar kon’yunksiyalar bo‘ladi.

6-ta’rif. Diz’yunktiv normal shakl (kon’yunktiv normal shakl) MDNSH (MKNSH) deb aytiladi, agar DNSH (KNSH) ifodasida bir xil elementar kon’yunksiyalar (elementar diz’yunksiyalar) bo‘lmasa va hamma elementar kon’yunksiyalar (elementar diz’yunksiyalar) to‘g‘ri va to‘liq bo‘lsa.

Masalan, $xyz \vee xy\overline{z} \vee \overline{x}yz \vee x\overline{y}z$ DNSH x, y, z mulohazalarga nisbatan MDNSH bo‘ladi. $(x \vee y)\,(x \vee \overline{y})\,(\overline{x} \vee y)$ KNSH x, y mulohazalarga nisbatan MKNSH bo‘ladi.

Asosiy mantiqiy amallarning MDNSH va MKNSH ko‘rinishlari quyidagicha bo‘ladi: a) MDNSH: $\overline{x} = \overline{x}$; $xy = xy$; $x \vee y = xy \vee \overline{x}\, y \vee x\, \overline{y}$; $x \to y = xy \vee \overline{x}\, y \vee \overline{x}\, \overline{y}$; $x \to y = xy \vee \overline{x}\, \overline{y}$.

b) MKNSH: $\overline{x} = \overline{x}$; $xy = (\overline{x} \vee y)\,(x \vee \overline{y})\,(x \vee y)$;

$x \vee y = x \vee y$; $x \to y = \overline{x} \vee y$; $x \to y = (\overline{x} \vee y)\,(x \vee \overline{y})$.

6-teorema. n ta elementar mulohazaning aynan chin formulasidan farqli har bir A formulani mukammal kon’yunktiv normal shaklga (MKNSH) keltirish mumkin.

Isbot. Quyidagi isbot tavtologiyadan farq qiluvchi har qanday A formulani MKNSH ga keltirish algoritmi bo‘ladi.

1.Avvalo A formulani kon’yunktiv normal shaklga keltiramiz. Buning uchun A formulani kon’yunksiya, diz’yunksiya va inkor mantiqiy amallar orqali ifodalaymiz (inkor amaldi faqatgina o‘zgaruvchilar ustida bo‘lishi kerak). So‘ngra distributivlik qonunlaridan foydalanib, A formulani KNSHga keltiramiz va hamma lozim bo‘lgan soddalashtirishlarni bajaramiz.

2.Agar KNSH ifodasida bir nechta bir xil elementar diz’yunksiyalar mavjud bo‘lsa, u holda $X \wedge X = X$ tengkuchlilik formulasidan foydalanib ulardan bittasini A ifodasida qoldiramiz.

3.Quyidagi ikki usul orqali hamma elementar diz’yunksiyalarni to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalarga aylantiramiz:

a) agar biror elementar diz’yunksiya ifodasida birorta o‘zgaruvchi o‘zining inkori bilan qatnashgan bo‘lsa, u holda $X \vee \overline{x}$=ch, ch$\vee X$=ch, $X \wedge X = X$ tengkuchlilik formulalarga asosan biz bu elementar kon’yunksiyani KNSH ifodasidan olib tashlaymiz;

b) agar birorta o‘zgaruvchi elementar diz’yunksiya ifodasida bir necha marta qatnashgan bo‘lsa (yoki hamma holda inkor ishorasi ostida emas, yoki hamma holda inkor ishorasi ostida), u vaqtda $X \vee X$ formulasiga asosan biz ulardan faqatgina bittasini KNSH ifodasida qoldiramiz.

Natijada, hamma elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri elementar diz’yunksiyalarga aylanadi.

4. Agar ba’zi elementar diz’yunksiyalar to‘liq elementar diz’yunksiyalar bo‘lmasa, ya’ni diz’yunktiv hadlarda elementar mulohazalarning ba’zilari (yoki ularning inkorlari) mavjud bo‘lmasa, u holda bunday elementar diz’yunksiyalarni to‘liq elementar diz’yunksiyalar holatiga keltirish kerak.

Masalan, biror elementar diz’yunksiya ifodasida

$$x_1 \vee \overline{x_2} \vee ... \vee x_{i-1} \vee x_{i+1} \vee ... \vee x_n$$

x_i yoki $\overline{x_i}$ yo‘q deb faraz qilaylik. U holda uni $x_i \wedge \overline{x_i} = 0$ va $D \vee 0 = D$ formulalardan foydalanib quyidagi

$$(x_1 \vee \overline{x_2} \vee ... \vee x_{i-1} \vee \overline{x}_{i+1} \vee ... \vee x_n) \vee (x_i \wedge \overline{x_i}) =$$

$$=(x_1 \vee \overline{x_2} \vee ... \vee x_{i-1} \vee x_i \vee \overline{x}_{i+1} \vee ... \vee x_n) \wedge$$

$$\wedge (x_1 \vee \overline{x_2} \vee ... \vee x_{i-1} \vee \overline{x_i} \vee x_{i+1} \vee ... \vee x_n)$$

ikki to‘liq elementar diz’yunksiyalar kon’yunksiyasiga keltira olamiz.

Agarda elementar diz’yunksiya ifodasida bir nechta $y_1, y_2, ..., y_m$ o‘zgaruvchilar qatnashmayotgan bo‘lsa, u holda uning ifodasiga ($y_i \wedge \overline{y_i}$) $(i = \overline{1,m})$ kon’yunksiyalarni mantiqiy qo‘shib, distributivlik qonunini qo‘llaymiz. Natijada, bitta to‘liq emas elementar diz’yunksiya o‘rniga $2m$ ta to‘liq elementar diz’yunksiyalarga ega bo‘lamiz5)To‘rtinchi qadam bajarilishi natijasida KNSH ifodasida bir xil elementar diz’yunksiyalar paydo bo‘ladi. Shuning uchun yana 2) qadamni ishlatamiz.

Demak, 1) - 5) qadamlar natijasida KNSH ifodasida bir xil elementar diz’yunksiyalar mavjud bo‘lmaydi va hamma elementar diz’yunksiyalar to‘g‘ri va to‘liq bo‘ladi. Ta’rifga asosan, bunday KNSH mukammal kon’yunktiv normal shakl bo‘ladi.

Misol. 1. $A = (\overline{x} \to x) \wedge (y \to \overline{y}) \vee (z \leftrightarrow u)$ formula quyidagi MKNSH ga ega bo‘ladi.

$$A = (x \vee \overline{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \overline{u}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z} \vee u) \wedge (\overline{y} \vee z \vee \overline{u})$$

2. $A = (\overline{x \vee z}) \wedge (x \to y) = (\overline{x} \wedge \overline{y}) \wedge (\overline{x} \vee y)$

$$A = [\overline{x} \vee (y \wedge \overline{y}) \vee (z \wedge \overline{z})] \wedge [(x \wedge \overline{x}) \vee (y \wedge \overline{y}) \vee \overline{z}] \wedge$$

$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee (z \wedge \overline{z}))] = [(\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge$$

$$(\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})] \wedge [(x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge$$

$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z})] \wedge [(\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z})]$$

$$A = (\overline{x} \vee y \vee z) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z) \wedge (\overline{x} \vee y \vee \overline{z}) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) \wedge$$

$$\wedge (x \vee y \vee \overline{z}) \wedge (x \vee \overline{y} \vee \overline{z})$$

3. $A = (x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee t)$

$$A = [z \vee y \vee (z \wedge \overline{z}) \vee (t \wedge \overline{t})] \wedge [(x \wedge \overline{x}) \vee y \vee z \vee (t \wedge \overline{t})] \wedge$$

$$\wedge [(x \wedge \overline{x}) \vee (y \wedge \overline{y}) \vee z \vee t) = [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee t) \wedge$$

$$\wedge (x \vee y \vee z \vee \overline{t}) \wedge (x \vee y \vee \overline{z} \vee \overline{t})] \wedge [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge$$

$$(\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (x \vee y \vee z \vee \overline{t}) \wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee \overline{t})] \wedge$$

$$\wedge [(x \vee y \vee z \vee t) \wedge x \vee \overline{y} \vee z \vee t) \wedge$$

$$\wedge (\overline{x} \vee y \vee z \vee t) \wedge (\overline{x} \vee \overline{y} \vee z \vee t)]$$

n mulohazali mukammal kon’yunktiv normal shakl

$$\wedge \left(x_1^1 \vee x_2^1 \vee ... \vee x_n^1\right)$$

ifodasida $\wedge$ o‘rniga $\vee$ ni va aksincha, $\vee$ o‘rniga $\wedge$ ni qo‘yganimizda

$$\vee \left(x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge ... \wedge x_n^1\right)$$

biz n mulohazali mukammal diz’yunktiv normal shaklga ega bo‘lamiz.

Mukammal diz’yunktiv normal shaklning har bir $x_1^1 \wedge x_2^1 \wedge ... \wedge x_n^1$ hadi **kon’yunktiv konstituyent** deb ataladi.

7-teorema. n ta elementar mulohazalarning aynan yolg‘on formulasidan farqli har bir A formulasini mukammal diz’yunktiv normal shaklga keltirish mumkin.

Isbot. Berilgan formulani A bilan belgilab, avvalo $\overline{A}$ ni mukammal kon’yunktiv normal shaklga keltiramiz

$$\overline{A} = \wedge\left(x_1^1 \vee x_2^1 \vee \ldots \vee x_n^1\right)$$

Bundan $\overline{\overline{A}} = A$ ning MDNSH ni topamiz

$$A = \wedge\left(\overline{x_1^1 \vee x_2^1 \vee \ldots\ldots \vee x_n^1}\right) = \vee\left(\overline{x}_1^1 \wedge x_2^1 \wedge \ldots\ldots \wedge \overline{x}_n\right)$$

Misol. $A = [(\overline{x} \to x) \wedge (y \to \overline{y})] \vee (z \leftrightarrow u)$

$$A = (x \vee \overline{z} \vee u) \wedge (x \vee z \vee \overline{u}) \wedge (\overline{y} \vee \overline{z} \vee u) \wedge (\overline{y} \vee z \vee \overline{u}) \wedge$$
$$\wedge (x \vee \overline{z} \vee u) \vee (y \wedge \overline{y}) = (x \vee \overline{z} \vee u \vee y) \wedge (x \vee \overline{z} \vee u \vee \overline{y})$$

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1. Elementar kon’yunksiya.
2. Elementar diz’yunksiya.
3. To‘g‘ri va to‘liq elementar konyunksiya va diz’yunksiyalar.

8-mavzu. Bul funksiyalarining berilish usullari. (2 soat)

Reja:

1. Bul algebrasi.

2. Ikki taraflama qonun.

1-ta’rif. Kon’yunksiya $(x \wedge y)$, diz’yunksiya $x \vee y$, $\overline{x}$ inkor amallari va $0,1 \in M$ elementlari aniqlangan M to‘plamda shu mantiqiy amallar va $0,1$ elementlar uchun quyidagi aksiomalar

$$\overline{\overline{x}} = x; \qquad (1)$$
$$xy = yx; \qquad (2)$$
$$(xy)z = x(yz); \qquad (3)$$
$$x \vee y = y \vee x; \qquad (4)$$
$$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z); \qquad (5)$$
$$x(y \vee z) = xy \vee xz; \qquad (6)$$
$$x \vee yz = (x \vee y)(x \vee z); \qquad (7)$$
$$\overline{x \vee y} = \overline{x}\,\overline{y}; \qquad (8)$$
$$\overline{xy} = \overline{x} \vee \overline{y}; \qquad (9)$$
$$x \vee x = x; \qquad (10)$$

$xx = x$; (11)

$$Ix = x; \quad (12)$$

$$0 \vee x = x; \quad (13)$$

bajarilsa, bunday M to‘plamga Bul algebrasi deb aytiladi.

Bul algebrasiga quyidagi to‘plamlar misol bo‘la oladi:

1. M -qandaydir to‘plam (masalan, to‘g‘ri chiziqda yotgan nuqtalar to‘plami yoki natural sonlar to‘plami) va $\mu_M - M$ ning hamma qism to‘plamlardan iborat to‘plam bo‘lsin. $xy(x, y \in \mu_M)$ orqali x va y to‘plamlarning $x \cap y$ kesishmasini, $x \vee y$ orqali x va y to‘plamlarining $x \cup y$ birlashmasini, $\bar{x}$ orqali x to‘plamning M to‘plamigacha $\bar{x}$ to‘ldiruvchisini, 0 orqali $\varnothing$ bo‘sh to‘plamni va 1 orqali M to‘plamni belgilab olamiz. U vaqtda μ_M to‘plam Bul algebrasi bo‘ladi, chunki yuqorida ko‘rsatilgan 13 aksioma bajariladi.

2. Mulohazalar to‘plami uchun $\wedge, \vee$ va $-$ amallari hamda 0 va 1 elementlari aniqlanganligi uchun bu to‘plamni Bul algebrasi deb taxmin qilishimiz turgan gap. Lekin buning uchun quyidagi aniqlikni kiritish kerak. A va B mulohazalar aynan teng bo‘lishi uchun $A \leftrightarrow B$ ekvivalentlik absolyut chin bo‘lishi kerak. Ana shunday tushuncha kiritilgan mulohazalar to‘plami Bul algebrasiga misol bo‘la oladi.

Endi ikkitaraflama (qo‘shma) funksiya tushunchasini kiritamiz. $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaga ikkitaraflama bo‘lgan funksiyani topish uchun f funksiyaning chinlik jadvalida hamma o‘zgaruvchilarni ularning inkoriga almashtirish kerak, ya’ni hamma joyda 1 ni 0 ga va 0 ni 1 ga almashtirish kerak.

2-ta’rif. Quyidagicha aniqlangan

$$f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

funksiyaga $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ funksiyaning ikkitaraflama funksiyasi deb aytiladi.

3-ta’rif. Agar

$$f\ (x_1, x_2, ..., x_n) = f^*(x_1, x_2, ..., x_n) = \overline{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$$

munosabat bajarilsa, u holda $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ga o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya deb aytiladi.

Ta’rifga asosan, $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ikkitaraflama funksiya $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ va $((\overline{\alpha_1}, ..., \overline{\alpha_n})$ qiymatlar satrida qarama-qarshi qiymatlar qabul qiladi.

Misollar. 1. Mulohazalar algebrasining asosiy elementar funksiyalariga ikkitaraflama bo‘lgan funksiyalarni toping.

1. $f_1(x) = x$ ga ikkitaraflama funksiya $f_1^*(x) = x$ bo‘ladi.
2. $f_2(x) = \bar{x}$ ga ikkitaraflama funksiya $f_2^*(x) = \bar{x}$ bo‘ladi.
3. $f_3(x, y) = xy$ ga ikkitaraflama funksiya $f_3^* = x \vee y$ bo‘ladi.
4. $f_4(x, y) = x \vee y$ ga ikkitaraflama funksiya $f_4^* = xy$ bo‘ladi.
5. $f_5(x, y) = x \to y$ ga ikkitaraflama funksiya $f_5^* = \overline{y \to x}$ bo‘ladi.
6. $f_6(x, y) = x \leftrightarrow y$ ga ikkitaraflama funksiya $f_6^* = \overline{x \leftrightarrow y}$ bo‘ladi.
7. $f_7=1$ ga $f_7^*=0$ va $f_8=0$ ga $f_8^*=1$ bo‘ladi.

Keltirilgan misolning yechimidan ko‘rinib turibdiki, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyalar, ta’rifga asosan, o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya bo‘ladi.

2. $f(x, y, z) = xy \vee yz \vee xz$ funksiyaning o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya ekanligini isbot qiling.

$$f^*(x,y,z)=\overline{\bar{x}\,\bar{y}\vee\bar{y}\,\bar{z}\vee\bar{x}\,\bar{z}}=\overline{\bar{x}\,\bar{y}}\wedge\overline{\bar{y}\,\bar{z}}\wedge\overline{\bar{x}\,\bar{z}}=(x\vee y)\,(y\vee z)\,(x\vee z)=$$
$$=[(x\vee y)\,y\vee(x\vee y)\,z]\,(x\vee z)=[y\vee yz\vee xz]\,(x\vee z)=(y\vee xz)\,(x\vee z)=$$
$$=x\,y\vee yz\vee x\,(x\vee z)\,z=x\,y\vee yz\vee xz\,.$$

Demak, $f(x,y,z)=f^*(x,y,z)$ ekanligi uchun f o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyadir.

1-tyeorema. Agar $\Phi(x_1,.....,x_n)=f(f_1(x_{11},......,x_{1p_1}),......,f_m(x_{m1},......,x_{mp_m}))$ bo‘lsa, u holda
$\Phi^*(x_1,......,x_n)=f^*(f_1^*(x_{11},......,x_{1p_1}),......,f_m^*(x_{m1},......,x_{mp_m}))$ bo‘ladi.

Isbot.

$$\Phi^*(x_1,......,x_n)=\overline{\Phi}(\overline{x_1},......,\bar{x}_n)=\overline{f}(f_1(\bar{x}_{11},.....,\bar{x}_{1p_1}),.....,f_m(\bar{x}_{m1},......,\bar{x}_{mp_m}))=$$
$$=\overline{f}(\overline{\overline{f}}_1(\bar{x}_{11},......,\bar{x}_{1p_1}),......,\overline{\overline{f}}_m(\bar{x}_{m1},......,\bar{x}_{mp_m}))=\overline{f}(\overline{f}^*_1(x_{11},......,x_{1p_1}),......,$$

$\overline{f}^*_m(x_{m1},......,x_{mp_m}))=f^*(f_1^*(x_{11},......,x_{1p_1}),......,f_m^*(x_{m1},......,x_{mp_m}))$. Teoremaning isbotidan ikkitaraflama qonun kelib chiqadi.

Ikkitaraflama qonun. $\varphi_1,\varphi_2,......,\varphi_m$ funksiyalarning superpozisiyasiga ikkitaraflama bo‘lgan funksiya mos ravishda $\overset{*}{\varphi}_1,\overset{*}{\varphi}_2,......,\overset{*}{\varphi}_m$ ikkitaraflama funksiyalar superpo-zisiyasiga tengkuchlidir, ya’ni agar $A=C[\varphi_1,\varphi_2,......,\varphi_m]$ formula $f(x_1,...,x_n)$ funksiyani realizatsiya etsa, u vaqtda $C[\overset{*}{\varphi}_1,\overset{*}{\varphi}_2,...,\overset{*}{\varphi}_m]$ formula $f^*(x_1,...,x_n)$ funksiyani realizatsiya etadi.

Bu formula A formulaga ikkitaraflama bo‘lgan formula deb aytiladi va uni A^* deb belgilaymiz. Demak,

$$A^*=C[\overset{*}{\varphi}_1,\overset{*}{\varphi}_2,...,\overset{*}{\varphi}_m].$$

Ushbu qonundan o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘lgan funksiyalarning superpozisiyasi yana o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya bo‘lishligi kelib chiqadi, ya’ni agar $\varphi_1,\varphi_2,......,\varphi_m$ o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya bo‘lsa, u holda $\Phi^*=\varphi^*(\overset{*}{\varphi}_1,...,\overset{*}{\varphi}_m)$ funksiya ham o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘ladi. Haqiqatan ham,

$$\Phi^*=\varphi^*(\overset{*}{\varphi}_1,...,\overset{*}{\varphi}_m)=\varphi(\varphi_1,......,\varphi_m)=\Phi\,.$$

Agar funksiya formula orqali ifodalangan va bu formula o‘z navbatida $\wedge$, $\vee$, – mantiq amallari orqali ifodalangan bo‘lsa, u holda bu funksiyaga (formulaga) ikkitaraflama bo‘lgan funksiyani (formulani) topish uchun $\vee$ ni $\wedge$ ga, $\wedge$ ni $\vee$ ga, 1 ni 0 ga va 0 ni 1 ga almashtirish kifoya. Bu prinsipni tengkuchli formulalarga ishlatganda, yana tengkuchli formulalar hosil qilamiz, ya’ni $A(x_1,...,x_n)=B(x_1,...,x_n)$ bo‘lsa, u holda

$$A^*(x_1,...,x_n)=B^*(x_1,...,x_n)\,.$$

Ushbu prinsip orqali mantiq algebrasining bir formulasidan ikkinchi formulasiga, bir teoremasidan ikkinchi teoremasiga, bir ta’rifidan ikkinchi ta’rifiga kelamiz.

Masalan, yuqorida keltirilgan (2), (3), (6), (8), (10), (12) tengkuchli formulalarga ushbu prinsipni ishlatsak, (4), (5), (7), (9), (11), (13) - tengkuchli formulalar kelib chiqadi.

Mantiq algebrasida elementlari n argumentli o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalardan iborat bo‘lgan to‘plamni S bilan belgilaymiz, uning elementlarining soni 2^{2^n-1} ga tengdir. Endi o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘lmagan funksiyalar haqidagi lemmani ko‘rib chiqaylik.

Lemma. Agar $\varphi(x_1,...,x_n)\notin S$ bo‘lsa, u holda undan argumentlarining o‘rniga x va $\bar{x}$ funksiyalarni qo‘yish usuli bilan bir argumentli o‘z-o‘ziga ikkitaraflama bo‘lmagan funksiya, ya’ni konstantani hosil qilish mumkin.

Isbot. $\varphi(x_1,...,x_n) \notin S$ bo‘lganligi uchun, shunday $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ qiymatlar satri topiladiki, $\varphi(\overline{\alpha}_1,....,\overline{\alpha}_n) = \varphi(\alpha_1,...,\alpha_n)$ bo‘ladi.

$\varphi_i(x) = x^{\alpha_i}$ $(i = 1,...n)$ funksiyani kiritamiz va $\varphi_i(x) = \varphi(\varphi_1(x),...,\varphi_n(x))$ deb belgilab olamiz. U vaqtda quyidagi natijaga ega bo‘lamiz:

$$\varphi(0) = \varphi(\varphi_1(0),...,\varphi_n(0)) = \varphi(0^{\alpha_1},...,0^{\alpha_n}) = \varphi(\overline{\alpha}_1,...,\overline{\alpha}_n) =$$
$$= \varphi(\alpha_1,...,\alpha_n) = \varphi(I^{\alpha_1},...,I^{\alpha_n}) = \varphi(\varphi_1(I),...,\varphi_n(I)) = \varphi(I).$$

Lemma isbot bo‘ldi.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor &Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1. Bir va nolni o‘zida saqlovchi Bul funksiyalari.
2. O‘zi-o‘ziga ikki taraflama qo‘shma funksiyalar.
3. Chiziqli funksiya.

9-mavzu. Elementar Bul funksiyalari.

Reja.

1. **Bir argumentli Bul funksiyalari.**
2. **Ikki argumentli Bul funksiyalari.**
3. **n –argumentli Bul funksiyalari.**

Ta’rif: Bir argumentli Bul funksiyasi deb, ikki elementli $\{0;1\}$ to‘plamda aniqlanib, yana shu $\{0;1\}$ to‘plamda qiymatga erishuvchi f: $\{0;1\}\rightarrow\{0;1\}$ funksiyaga aytiladi. Barcha bir argumentli Bul funksiyalarini sanab chiqish qiyin emas. Buni quyidagi jadvalda qursatamiz.

x	$f_0(x)$	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
0	0	0	1	1
1	0	1	0	1

Bir argumentli Bul funksiyalar quyidagicha belgilanadi va nomlanadi: $f_0(x)$=0-aynan 0 ga teng funksiya;

f_1 (x)=x- ayniyat funksiyasi;

f_2 (x)=x-inkor funksiyasi ;

f_3 (x)=1-aynan 1 ga teng funksiya.

Ta’rif. Ikki argumentli Bul funksiyasi deb $\{0;1\}\times\{0;1\}$ to‘plamda aniqlanib $\{0;1\}$ to‘plamda qiymatga erishuvchi g: $\{0;1\}\times\{0;1\}\rightarrow\{0;1\}$ funksiyaga aytiladi.

Barcha ikki argumentli Bul funksiyalarini sanab chiqish mumkin. Buni quyidagi jadval orqali ko‘rsatishimiz mumkin

arg		0	,	˥→	X	˥←	U	+	∨
x	u	g_0	g_1	g_2	g_3	g_4	g_5	g_6	g_7
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1
arg		↓	↔	˥y	←	˥x	→	|	1
X	u	g_8	g_9	g_{10}	g_{11}	g_{12}	g_{13}	g_{14}	g_{15}
0	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	0	0	1	1
1	1	0	1	0	1	0	1	0	1

Bujadvaldanko‘rinibturibdiki, barchaikkiargumentliBulfunksiyalari 16 tabo‘ladi.

$$\begin{cases} g_0(xy)=0 \text{ айнан ноль} \\ g_{15}(xy)=1 \text{ айнан бир} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_2(x,y)=(x\to y)'\text{–импликация инкори} \\ g_{13}(x,y)=x\to y-\text{импликация} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(x,y)=xy \quad \text{конюкция} \\ g_{14}(x,y)=x|y \text{ шеффер штрихи} \end{cases} \quad \begin{cases} g_3(x,y)=x-\text{айнан } x \text{ га тенг функция} \\ g_{12}(x,y)=x'-x \text{ нинг инкори} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_4(x,y)=(x\leftarrow y)'=(y\to x)' \\ g_{11}(x,y)=x\leftarrow y=y\to x-\text{антиинпликация} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_5(x,y)=y \ -\text{айнан } y \text{ га тенг функция} \\ g_{10}(x,y)=y' \ -y \text{ нинг инкори} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_6(x,y)=x+y \text{ жегалкин йигиндиси} \\ g_9(x,y)=x\leftrightarrow y-\text{эквивалент} \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_7(x,y)=x\vee y-\text{дизюнкция} \\ g_8(x,y)=x\downarrow y-\text{пирс стрелкаси} \end{cases}$$

Muammolivaziyat, savolyokitopshir
BirargumentlifunksiyauchunBulfunksiyas
«4taholatini», ikkiargumentlifunksiyauch
«16 holatini» keltiribchiqaring.

$\{0,1\}$daqiymatqaBulqiluvchio‘zgaruvchilarniBulo‘zgaruvchilarideymizvaularnikichiklotinharflaribilanbelgilaymiz.

EndibizyuqoridakiritilganBulfunksiyalarningmuhimhossalariniko‘rsatibo‘tamiz.

f(x,y) va g(x,y) Bulьfunksiyalaritengdeyiladi, agarargumentlarix,ularningihtiyoriytanlanmasidaBulьfunksiyalarbirxilqiymatgaerishsa,ya’ni$\forall$(a, v) $\in\{0,1\}$uchunf(a,v) =g(a,v) bo‘lsa.

<u>*Misol :*</u> f_1(x,u)=x∨u va f_2(x,u)=u∨x u holda f_1(x,u)= f_2(x,u)

Yuqorida kiritilgan sodda Bul funksiyalar orqali supperpazisiya yordamida murakkab Bulь funksiyalarini hosil qilishimiz mumkin.

Quyida keltirilgan Bul funksiyalarning tengligi yordamida Bul funksiyalarning ba’zi bir hossalari ko‘rsatiladi.

1. Diz’yunksiya, kon’yuksiya va inkorning hossalari.

a) x∨x=x, x·x=x (diz’yunksiya va kon’yuksiyaning idemponentligi).

b) x∨u=u∨x ,x·u=u·x(diz'yunksiya va kon'yuksiyaning kommutativligi).
v) (x∨u)∨z= x∨(u∨z), (x·u)·z= x·(u·z)(diz'yunksiya va kon'yuksiyaning assosativligi)
g) x∨1=1, x·1=x
d) x∨0=x, x·0=0
e*)* x∨(y·z)=(x∨y)·(x∨z), x·(y∨z)=(x·y) ∨ (x·z) (diz'yunksiyaning kon'yunksiyaga nisbatan distributivlik va aksi).
j) x∨(u ·x)=x, x·(u∨x)=x (yutilish qonuni)
z)˥(x∨u)=˥x·˥y, ˥(x·y)=˥x∨˥y (De Morgan qonuni)
i) x∨˥x=1, x·˥x=0
k)˥˥x=x

2. Ekvivalent, implikatsiya va inkorning hossalari.

a) x↔x=1 x↔˥x=0
b) x↔u=u↔x (ekvivalentning komutativligi)
v) (x↔u)↔z=x↔(y↔z) (ekvivalentning assosativligi)
g) 1↔x=x, 0↔x=˥x
d)˥x↔˥y=x↔y
e*)*˥x→˥y=x→y
j) x→x=1
z) x→˥x=1
i)˥x→x=x
k) 1→x=x
l) 0→x=1
*m)*x→1=1
*n)*x→0=x

3. Bir Bul funksiyalarni boshqalari orqali ifodalash hossalari.

a) x·u=˥(˥x∨˥y)
b) x∨u=˥(˥x·˥y)
v) x∨u=(x→u)→u
g) x∨u= ˥x→u
d) x→u= ˥x∨u
e*)* x→u= (x→u)·(u→x)
j)˥x=x│x
z) x│u=˥(x·u)
i) x∨u= ˥x│˥u=(x(x)│(y│y)
k)˥x=x↓x
l) x↓u= ˥(x∨u)
m) x·u= ˥x↓˥u= (x↓x)↓(y↓y)

Ma'lumki, mantiqiy amallar mulohazalar algebrasi nuqtai nazaridan chinlik jadvallari bilan to'liq xarakterlanadi. Agarda funksiyaning jadval shaklida berilishini esga olsak, u vaqtda mulohazalar algebrasida ham funksiya tushunchasi mavjudligini bilamiz.

1-ta'rif. Mulohazalar algebrasining $x_1,...,x_n$ argumentli $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasi deb, 0 va 1 qiymat qabul qiluvchi funksiyaga aytiladi va uning $x_1,...,x_n$ argumentlari ham 0 va 1 qiymat qabul qiladi. Funksiya $f(x_1,...,x_n)$ o'zining chinlik jadvali bilan beriladi.

x_1	x_2	x_3	$\cdots$	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,...,x_n)$

0	0	0	...	0	0	f(0,0,...,0,0)
1	0	0	...	0	0	f(1,0,...,0,0)
...	...	...	...	...	...	....
1	1	1	...	1	0	f(1,1,...,1,0)
1	1	1	...	1	0	f(1,1,...,1,1)

Bujadvalningharbirsatridaavvalo‘zgaruvchilarning $(\alpha_1,...,\alpha_{n)}$ qiymatlarivashuqiymatlarsatrida f funksiyaning $f(\alpha_1,...,\alpha_{n)}$ qiymatiberiladi. Oldingiparagraflardaisbotqilganedikki, n tao‘zgaruvchiuchunqiymatlarsatrlariningsoni 2^nvafunksiyalarningsoni 2^{2^n} gatengbo‘ladi.

Mulohazalar algebrasida asosiy elementar funksiyalar quyidagilardan iborat:

$$f_1(x) = x, \quad f_2(x) = \bar{x}, \quad f_3(x,y) = x\,y, \quad f_4(x,y) = x \vee y,$$

$$f_5(x,y) = x \to y, \quad f_6(x,y) = x \leftrightarrow y,$$

$$f_7(x_1,.....,x_n) = 1, \quad f_8(x_1,......,x_n) = 0.$$

Agar f(0,0,.....,0)=0 bo‘lsa, u holda $f(x_1,x_2,.....,x_n)$ funksiyaga 0 saqlovchi funksiya deb aytiladi. Agar $f(1,1,...,1) = 1$ bo‘lsa, u vaqtda $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaga 1 saqlovchi funksiya deb aytamiz.

n argumentli 0 saqlovchi funksiyalarning soni 2^{2^n-1} ga va 1 saqlovchi funksiyalarning soni ham 2^{2^n-1} ga teng bo‘ladi (isbot qilishni o‘quvchiga havola etamiz).

Mulohazalar algebrasidagi n argumentli 0 saqlovchi funksiyalar to‘plamini P_0 va 1 saqlovchi funksiyalar to‘plamini P_1 bilan belgilaymiz.

2-ta’rif. f va g mulohazalar algebrasining funksiyasi va $x_1,..., x_n$ lar hyech bo‘lmaganda ularning bittasining argumentlari bo‘lsin. Agar $x_1,..., x_n$ argumentlarning hamma qiymatlari satri uchun f va g funksiyalarning mos qiymatlari bir xil bo‘lsa, u holda f va g funksiyalar tengkuchli funksiyalar deb aytiladi va $f = g$ shaklida yoziladi.

3-ta’rif. Agarda quyidagi munosabat

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n),$$

bajarilsa, u vaqtda x_i argumentga $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaning soxta argumenti deb aytiladi.

Agarda $f(x_1, x_2,...., x_{i-1}, 1, x_{i+1},...., x_n) \neq f(x_1, x_2,...., x_{i-1}, 0, x_{i+1},...., x_n)$ bo‘lsa, u holda x_i argumentga $f(x_1, x_2,..., x_n)$ funksiyaning soxta emas (muhim) argumenti deb aytiladi.

Misol. $f(x, y) = x \vee (xy)$ funksiya uchun u argumenti soxta argument bo‘ladi, chunki $f(1,0) = f(0,1)$.

Funksiyaning argumentlari qatoriga istalgancha soxta argumentlarni yozish mumkin va u qatordan hamma soxta argumentlarni olib tashlash mumkin.

Endi mulohazalar algebrasi funksiyalarining superpozisiyasi tushunchasini ko‘raylik.

4-ta’rif. $\Phi = \left\{\varphi_1\left(x_{11},....,x_{1k_1}\right),....,\varphi_m\left(x_{m1},....,x_{mk_m}\right)\right\}$ mulohazalar algebrasi funksiyalarining chekli sistemasi bo‘lsin.

Quyidagi ikki usulning bittasi bilan hosil etiladigan ψ funksiyaga Φ sistemadagi $\varphi_1,...,\varphi_m$ funksiyalarning elementar superpozisiyasi yoki bir rangli superpozisiyasi deb aytiladi:

a) qandaydir $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning x_{ji} argumentini qayta nomlash usuli, ya’ni

$$\varphi_j(x_{j1}, x_{j2},.....,x_{ji-1}, y, x_{ji+1},....., x_{jk_j}),$$

bu yerda u, x_{jk_j} o‘zgaruvchilarning birortasi bilan mos tushishi mumkin.

b) Qandaydir $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning biror x_{ji} argumenti o‘rniga ikkinchi bir $\varphi_e(x_{e1},...,x_{ek}) \in \Phi$ funksiyani qo‘yish usuli, ya’ni

$$\varphi_j(x_{j1},....,x_{ji-1}),\ \varphi_e(x_{e1},....,x_{ek}),\ (x_{ji+1},....,x_{jk_j}).$$

Agar Φ sistema funksiyalarning k rangli superpozisiyalari sinfi $\Phi^{(k)}$ berilgan bo‘lsa, u vaqtda $\Phi^{(k+1)} = (\Phi^{(k)})^{(1)}$ bo‘ladi.

1-izoh. 4-ta’rifning a) qismiga asosan bir xil chinlik jadvaliga ega bo‘lib, lekin o‘zgaruvchilarning belgilanishi bilan farqqiladigan funksiyalar bir-birining superpozisiyasi bo‘ladi.

2-izoh. 4-ta’rifning a) qismiga asosan biror x_{ji} o‘zgaruvchini x_{jk} $(i \neq k)$ bilan qayta nomlasak, natijada kam o‘zgaruvchili funksiyaga ega bo‘lamiz. Bu holda x_{ji} va x_{jk} o‘zgaruvchilar aynan tenglashtirildi deb aytamiz. Masalan, $x \vee y$ va $x \wedge \overline{y}$ funksiyalardagi y ni x bilan qayta nomlasak, u vaqtda $x \vee x = x$ va $x \wedge \overline{x} = 0$ funksiyalarni hosil qilamiz.

3-izoh. 4-ta’rifning a) qismiga asosan agar $\Phi \subset \Phi^{(1)}$ bo‘lsa, u holda $\Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)}$ va umuman $r \leq s$ bo‘lganda $\Phi^{(r)} \subseteq \Phi^{(s)}$.

5-ta’rif. $\overline{x}$, xy, $x \vee y$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$ asosiy elementar funksiyalarning superpozisiyasiga formula deb aytamiz.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor &Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.

6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1. Bir va nolni o‘zida saqlovchi Bul funksiyalari.
2. O‘zi-o‘ziga ikki taraflama qo‘shma funksiyalar.
3. Chiziqli funksiya.

10-11-mavzu. Funksiyalarni formula ko‘rinishida ifodalash. Formulalarning ekvivalentligi. (4 soat)

Reja:

1.Chinlik jadvali bo‘yicha formulani tiklash.

2. Formulani o‘zgaruvchilar bo‘yicha qatorga yoyish.

3. Chinlik jadvali bo‘yicha formulani MKNSH (MDNSH) ko‘rinishda yozish.

1. Chinlik jadvali bo‘yicha formulani tiklash. Ma’lumki, berilgan formula uchun chinlik jadvali tuzish mumkin. Formulaning chinlik jadvalini tuzishni bilamiz.

Endi teskari masala bilan shug‘ullanaylik, ya’ni berilgan chinlik jadvali bo‘yicha formulani topishni maqsad qilib qo‘yaylik. Masalan, x va y elementar mulohazalarning quyidagi chinlik jadvallariga ega bo‘lgan A, B, C, D formulalarni topaylik:

1-jadval

x	y	A	B	C	D	AVB	AVC	AVD	BVD	**AVBVC**	AVBVCVD
1	1	1	0	0	0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1	1
0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1	1	0	1

Bundankeyinbirormulohazaning “chin” qiymatini “1”va “yolg‘on” qiymatini “0”debbelgilaymiz. Ma’lumki,

$$A = x \wedge y; \quad B = x \wedge \bar{y}; \quad C = \bar{x} \wedge y; \quad D = \bar{x} \wedge \bar{y} \qquad (1)$$

(1) formulalarninghar qaysisiuchunjadvalning, mosravishda, 1,2,3,4, satrida “1” qiymatva qolgansatrlarida “0” qiymatturadi.

(1) formulalar ikki mulohazali kon’yunktiv konstituyentlardan iborat.

Endi shunday formulalarni topaylikki, ular uchun jadvalning 2 satrida “1” qiymat va ikki satrida “0” qiymat turgan bo‘lsin. Bu talabga quyidagi formulalar javob beradi

$$A \vee B = (x \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}); \quad A \vee C = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y);$$

$$A \vee D = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}); \quad B \vee D = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}) \text{ va h.k.}$$

Shunday qilib, ushbu qoida o‘rinli: 2 va 4 - satrda “1”, 1 va 3 - satrlarda “0” qiymatga ega bo‘lgan formulani hosil qilish uchun, bittasining “1” qiymati xuddi 2-satrda va ikkinchisining “1” qiymati xuddi 4-satrda turgan ikki kon’yunktiv konstituyent diz’yunksiyasini olamiz.

$$B \vee D = (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Xuddi shunday, 1-jadvaldagi uchta kon’yunktiv konstituyent diz’yunksiyasi uchta satrda “1” qiymatga va bitta satrda “0” qiymatga ega bo‘lgan formulani tasvirlaydi. Masalan,

$$A \vee B \vee C = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge y).$$

Shunday qilib, to‘rtala A, B, C, D kon’yunktiv konstituyent diz’yunksiyasi to‘rttala satrda ham “1” qiymatga ega, ya’ni aynan chin

$$E = A \vee B \vee C \vee D = (x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y}).$$

Bu formula - ikki mulohazali to‘liq mukammal diz’yunktiv normal shakldan iborat:
Demak, Ye ning inkori

$$\bar{E} = \overline{(x \wedge y) \vee (\bar{x} \wedge y) \vee (x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y)} = \overline{x \wedge y} \wedge \overline{\bar{x} \wedge y} \wedge \overline{x \wedge \bar{y}} \wedge \overline{\bar{x} \vee \bar{y}} \quad \text{yoki}$$

$$\bar{E} = (\bar{x} \vee \bar{y}) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee y)$$

aynan yolg‘on formulani ifodalaydi. Bu esa ikki mulohazali to‘liq mukammal kon’yunktiv normal shakldir.

Shunday qilib, ikki x va y elementar mulohazalar uchun chinlik jadvallariga qarab mos formulalarni tiklash masalasi hal qilindi.

Endi berilgan chinlik jadvallariga qarab uchta x, y, z elementar mulohazalarning formulalarini topish masalasiga o‘tamiz. Bu uch mulohaza uchun 2^3=8 ta qiymatlar satrlari tuziladi.

2-jadval

x	y	z	$\bar{x}$	$\bar{y}$	$\bar{z}$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
1	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0
0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0

2-jadvalningsatrlaridanbiridagina “1”qiymatga, qolganlarida “0”qiymatgaegabo‘lishtalabigajavobberuvchiformulalarushbuuchmulohazalihamma 2^3=8 takon’yunktivkonstituyentlardaniboratdir:

1. $x \wedge y \wedge z = A_1$ 4. $x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} = A_4$ 7. $\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z = A_7$

2. $x \wedge y \wedge \bar{z} = A_2$ 5. $\bar{x} \wedge y \wedge z = A_5$ 8. $\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} = A_8$

3. $x \wedge \bar{y} \wedge z = A_3$ 6. $\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} = A_6$ (2)

Bu (2) kon’yunktivkonstituyentlardanharikkitasiningdiz’yunksiyasiniolib, qiymatlariikkisatrda “1”, qolganlarida “0”bo‘lganformulalarni; haruchtasiningdiz’yunksiyasiniolib, qiymatlari uchsatrda “1”, qolgansatrlarda “0”bo‘lganformulalarnihosil qilamizvah.k.

Masalan:

$$B_1 = A_1 \vee A_2; \quad B_2 = A_1 \vee A_3; \quad B_3 = A_1 \vee A_4;$$

$$B_4 = A_1 \vee A_5; \quad B_6 = A_1 \vee A_7; \quad B_7 = A_1 \vee A_8;$$

$$C_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 = B_1 \vee A_3; \quad C_2 = B_1 \vee A_4; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$D_1 = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 = C_1 \vee A_4; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$E = A_1 \vee A_2 \vee A_3 \vee A_4 \vee A_5 \vee A_6 \vee A_7 \vee A_8$ - MDNSH (3)

$\bar{E} = \bar{A_1} \wedge \bar{A_2} \wedge \bar{A_3} \wedge \bar{A_4} \wedge \bar{A_5} \wedge \bar{A_6} \wedge \bar{A_7} \wedge \bar{A_8}$-MKNSH (4)

Bundasakkiztasiningdiz’yunksiyasi (3) aynanchinformulanivauninginkori (4) aynanyolg‘onformulaniifodalaydi.

n ta $x_1, x_2, ..., x_n$ elementar mulohazalar uchun ham masala xuddi shu usul bilan yechiladi.

Yuqorida keltirilgan mulohazalardan kelib chiqadiki, har bir aynan yolg‘on bo‘lmagan n argumentli A formulani quyidagi mukammal diz’yunktiv normal shaklda yozish mumkin:

$$A\ (x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{A(\sigma_1,...,\sigma_n)=1} x_1^{\sigma_1} .... x_n^{\sigma_n}, \quad (5)$$

ya’ni qiymatlar satrida chin qiymatga ega bo‘lgan elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyasi shaklida yoziladi. (5)- formulani quyidagicha ham yozish mumkin:

$$A\ (x_1, x_2, ..., x_n) = \bigvee_{(\sigma_1,...,\sigma_n)} A(\sigma_1, ..., \sigma_n)\ x_1^{\sigma_1} .... x_n^{\sigma_n} \quad (6)$$

Bu yerda $x_1^{\sigma_1} .... x_n^{\sigma_n}$ elementar kon’yunksiyalarning diz’yunksiyasi hamma 2^n qiymatlar satri bo‘yicha olinadi.

Xuddi shunday aynan chindan farq qiluvchi istalgan A formulani quyidagi mukammal kon’yunktiv normal shaklda keltirish mumkin:

$$A\ (x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{A(\overline{\sigma_1}, ..., \overline{\sigma_n}) = 0} x_1^{\sigma_1} \vee ..... \vee x_n^{\sigma_n} \quad (7)$$

yoki

$$A\ (x_1, x_2, ..., x_n) = \bigwedge_{(\sigma_1,...,\sigma_n)} A\,(\overline{\sigma_1}, ..., \overline{\sigma_n}) \vee x_1^{\sigma_1} \vee ..... \vee x_n^{\sigma_n}, \quad (8)$$

ya’ni $x_1^{\sigma_1} \vee ..... \vee x_n^{\sigma_n}$ elementar diz’yunksiyalarning kon’yunksiyasi hamma 2^n qiymatlar satri bo‘yicha olinadi.

Shunday qilib, (7) va (8) - formulalar orqali istalgan funksiyaning chinlik jadvalidan foydalanib uni MDNSH va MKNSH ko‘rinishida yozish mumkin.

Misol. 1.Berilgan chinlik jadvaliga asosan $A_1, ..., A_5$ formulalarni MDNSH ko‘rinishida yozish talab etilsin:

3-jadval

x	y	z	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	1	1	0	1	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	0	1	1
1	0	0	1	1	0	0	0
1	1	0	0	0	1	1	1
1	0	1	1	1	0	0	1
0	1	1	0	0	1	1	0
0	0	0	1	1	0	0	1

$$A_1\ (x, y, z) = xy\bar{z} \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z},$$

$$A_2\ (x, y, z) = xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}yz \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z},$$

$$A_3\ (x, y, z) = xyz \vee xy\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z},$$

$$A_4\ (x, y, z) = xy\bar{z} \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z \vee x\bar{y}\bar{z},$$

$$A_5\ (x, y, z) = xyz \vee x\bar{y}z \vee \bar{x}\bar{y}z \vee \bar{x}y\bar{z} \vee \bar{x}\bar{y}\bar{z}.$$

n ta elementar

$$x_1, x_2, ..., x_n \qquad (9)$$

mulohazalarning nechta o‘zaro tengkuchlimas, ya’ni har xil formulalari mavjud degan masalani qo‘yamiz.

Ikki x va y elementar mulohazalar uchun nechta tengkuchlimas formulalar borligini ko‘raylik.

x va y ning $2^2 = 4$ qiymatlar satri uchun:
4 ta A, B, C, D formulalardan har qaysisining qiymatlaridan bittasi “1” va uchtasi “0” dan iborat ustuni mavjud. Bunday ustunlar soni 4 ta, ya’ni $C_4^1 = 4$.

Undan keyin, oltita $A \vee B$, $A \vee C$, ..., $C \vee D$ formulalardan har qaysisining qiymatlari ikkita “1” va ikkita “0” dan iborat ustunni hosil qiladi. Bunday ustunlar soni $C_4^2 = 6$ ga teng. Yana to‘rtta

$$A \vee B \vee C, \quad A \vee C \vee D, \quad A \vee B \vee D, \quad B \vee C \vee D$$

formulalardan har qaysisining qiymatlari uchta “1” va bitaa “0” dan tashkil etilgan ustunni beradi. Bunday ustunlar $C_4^3 = 4$ tadir. Nihoyat, Ye formulaning qiymatlari faqat “1” dan tuzilgan $C_4^4 = 1$ ta ustunni tashkil etadi.

Shunday qilib, 1-jadvalda

$$C_4^0 + C_4^1 + C_4^2 + C_4^3 + C_4^4 = 2^4 = 2^{2^2}$$

ustun mavjud bo‘ladi. Bundan esa xuddi shuncha formula borligi kelib chiqadi. Ustunlarning hech qaysi ikkitasi bir xil bo‘lmaganligidan, hech qaysi ikkita formula ham o‘zaro tengkuchli emasdir.

Demak, ikki x va u mulohazaning shu 16 ta formulasidan tashqari, ularni ifodalaydigan boshqa tengkuchli formula yo‘q.

Bundan, x va y ning istalgan $A(x, y)$ formulasi jadvalda keltirilgan formulalarning biri bilan tengkuchli degan xulosaga kelamiz.

Masalan, $(x \leftrightarrow y) \wedge \bar{y}$ formulani olsak, ushbu chinlik jadvalidan

x	$\bar{y}$	y	$x \leftrightarrow y$	$(x \leftrightarrow \bar{y} \wedge y)$
1	1	0	1	0
1	0	1	0	0
0	1	0	0	0
0	0	1	1	1

$(x \leftrightarrow y) \wedge \bar{y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$ ekanligi ma’lum bo‘ladi.

Yuqorida hosil etilgan formulalardan 15 tasi MDNSH va 1 tasi MKNSH ko‘rinishiga ega.

Xuddi shunday fikr yurgizish yo‘li bilan x, y, z elementar mulohazalarning tengkuchlimas formulalar soni

$$C_8^0 + C_8^1 + C_8^2 + C_8^3 + C_8^4 + ... + C_8^8 = 2^8 = 2^{2^3}$$

ga tengligi kelib chiqadi. To‘rtta x, y, z, f mulohazalarning har xil formulalar soni 2^{2^4} ga va, umuman, n ta mulohazaning har xil teng kuchlimas formulalar soni

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + C_{2^n}^2 + ... + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n}.$$

ya’ni $N = 2^{2^n}$ ga teng.

Shunday qilib, tengkuchlimas n argumentli formulalardan 2^{2^n}-1 tasi MDNSH va bittasi MKNSH ko‘rinishiga ega.

Ma'lumki, n elementar

$$x_1, x_2, ..., x_n$$

mulohazaning qiymatlari 2^n ta qiymatlar satrini tashkil etadi. Bu mulohazalarning har bir A formulasi ba'zi qiymatlar satrlarida "1" qiymatni va ba'zilarida "0" qiymatni qabul qiladi.

1-ta'rif. A formula "1" qiymat qabul qiluvchi elementar mulohazalarning hamma qiymatlar satrlaridan tuzilgan to'plam A formulaning chinlik to'plami deyiladi.

O'tgan paragraflarda ko'rganimizdek, elementar mulohazalarning (A) formulalaridan $C_{2^n}^1 = 2^n$ tasi bitta qiymatlar satrida "1" qiymatni qabul qiladi. Demak, bunday har bir formula bir elementli chinlik to'plamiga ega.

Xuddi shuningdek, (A) formulalarning $C_{2^n}^2$ tasidan har qaysisi ikki elementli chinlik to'plamiga, $C_{2^n}^3$ tasidan har biri uch elementli chinlik to'plamiga ,........, $C_{2^n}^{2^n}$ formula bo'lsa, 2^n elementli chinlik to'plamiga egadir. $\overline{E}$ aynan yolg'on formulaning chinlik to'plami esa $\varnothing$ bo'sh to'plamdan iborat.

$x_1, ..., x_n$ mulohazalarning aynan chin formulasiga tegishli chinlik to'plamini U universal to'plam deb olsak, shu mulohazalarning hamma formulalarga tegishli chinlik to'plamlari U ning qismlarini tashkil etadi va bu universal to'plam

$$C_{2^n}^0 + C_{2^n}^1 + ... + C_{2^n}^{2^n-1} + C_{2^n}^{2^n} = 2^{2^n} \text{ ta}$$

qismlarga ega bo'ladi.

Shunday qilib, n ta elementar mulohazalarning hamma A formulalari bilan ularning chinlik to'plamlari orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi.

Hamma o'zaro tengkuchli formulalarga bitta chinlik to'plami mos keladi.

Misollar. 1.Uch elementar x, y, z mulohazaning $A = x \wedge \overline{y} \wedge z$ formulasi faqat bitta (1,0,1) qiymatlar satrida "1" qiymatni qabul qiladi. Shu sababli, bu formulaning chinlik to'plami ushbu bir elementli $P = \{(1, 0, 1)\}$ to'plamdir.

2. $A = (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z)$ formula uch elementli $Q = \{(1, 1, 1)\}$, $(0, 1, 0)$, $(1, 0, 1)\}$ chinlik to'plamiga egadir.

3. Ushbu $A = \overline{x \vee y} \overline{\leftrightarrow} \overline{x} \wedge \overline{y}$ formula aynan chindir. Shuning uchun uning chinlik to'plami universal $U = \{(1, 1), (1, 0), (0, 1), (0, 0)\}$ to'plamdan iborat.

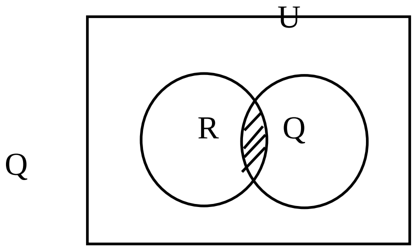
A formula P to'plamda chin bo'lsa, u holda P ning to'ldiruvchisi bo'lgan $\overline{P}$ to'plamda yolg'on bo'ladi. Lekin A ning $\overline{A}$ inkori $\overline{P}$ da chin va P da yolg'on bo'ladi. Xuddi shunday, aynan chin J formula U da chin, lekin $\overline{U} = \Phi$ da yolg'on. Aynan yolg'on $\overline{J}$ formula esa, aksincha, Φ da chin va $\overline{\Phi} = U$ da yolg'ondir.

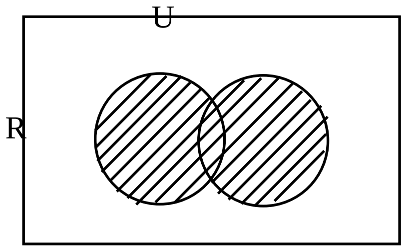
n ta elementar mulohazalar formulalari bilan chinlik to'plamlari orasidagi bunday bog'lanish mulohazalar mantiqidagi masalani to'plamlar nazariyasidagi masalaga va, aksincha, to'plamlar nazariyasidagi masalani mulohazalar mantiqidagi masalaga ko'chirish imkoniyatini beradi.

Haqiqatan ham:

1. A formula P to'plamda chin va B formula Q to'plamda chin bo'lsa, $A \wedge B$ formula qanday to'plamda chin bo'ladi? Ma'lumki (kon'yunksiya ta'rifiga asosan), bu formula A va B ning ikkalasi ham chin bo'lgan to'plamda chindir. Demak, $P \cap Q$ kesishmada chindir.

Masalan, $A = x \wedge \overline{y} \wedge z$ va $B = (x \wedge y \wedge z) \vee (\overline{x} \wedge y \wedge \overline{z}) \vee (x \wedge \overline{y} \wedge z)$ formulalarning $(A \wedge B)$ kon'yunksiyasi $P \cap Q = \{(1, 0, 1)\}$ to'plamda chindir. Shunday qilib, mulohazalar mantiqidagi $\wedge$ amaliga to'plamlar nazariyasidagi $\cap$ amali mos keladi. (1-shakl).





1-shakl. 2-shakl.

2. $A \vee B$ formula qanday to'plamda chin bo'ladi?

Diz'yunksiya ta'rifiga asosan $A \vee B$ formula A va B formulalarning kamida bittasi chin bo'lgan to'plamda chindir. Demak, $P \bigcup Q$ to'plamda $A \vee B$ formula chindir. Shunday qilib, mulohazalar mantiqidagi $\vee$ amaliga to'plamlar nazariyasidagi $\bigcup$ amalining mos kelishini ko'ramiz (2-shakl). Yuqorida keltirilgan A va B formulalar uchun

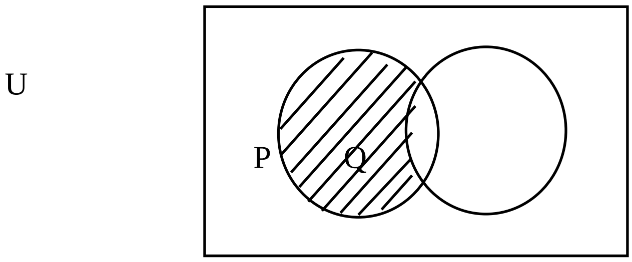
$$P \bigcup Q = \{(1,1,1), (0,1,0), (1,0,1)\}$$

3. $A \to B$ implikatsiyaning chinlik to'plamini topaylik.

Implikatsiya ta'rifiga asosan $A \to B$ formula faqat A chin bo'lib, B yolg'on bo'lgan to'plamda yolg'ondir.

Demak, $P - Q = \{(1,1,1), (0,1,0)\}$ ayirmada $A \to B$ formula yolg'ondir.

Shunday qilib, $A \to B$ formula U ning shtrixlangan bo'lagida yolg'on bo'lib, qolgan bo'lagida chindir (3-shakl). U ning qolgan bo'lagi esa $\overline{P} \bigcup Q$ ga teng. Demak, $A \to B$ formula $\overline{P} \bigcup Q$ to'plamda chindir.



3-shakl.

Ikkinchi tomondan, $\overline{A}$ formula $\overline{P}$ da va B formula Q da chin bo'lgani uchun, $\overline{A} \vee B$ formula $\overline{P} \bigcup Q$ da chindir.

Demak, bizga ma'lum bo'lgan $A \to B = \overline{A} \vee B$ tengkuchlilikni boshqa yo'l bilan isbotladik.

4. (1) mulohazalarning istalgan A va B formulalarini olib, $A \vee \overline{A} \vee B = J$ tengkuchlilikni isbotlaylik. $\overline{A}$ formula $\overline{P}$ da chin, A formula P da va B formula Q da chin bo'lsin. Shunday qilib, $\overline{A} \vee A \vee B$ formula $\overline{P} \bigcup P \bigcup Q = U \bigcup Q = U$ to'plamda chin. Shu sababli, $\overline{A} \vee A \vee B$ aynan chin formula bo'lib, $\overline{A} \vee A \vee B = J$ dir.

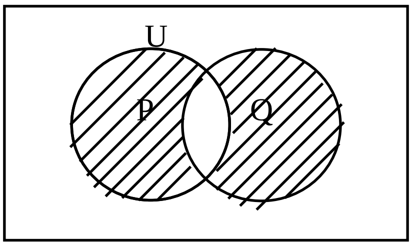
5. Qanday shartda $A \to B = J$ tengkuchlilik bajariladi?

Ma'lumki, $A \to B$ formula U ning $P - Q$ dan boshqa bo'lagida, demak, $\overline{P - Q}$ da chin. $A \to B = J$ shart bo'yicha $\overline{P - Q} = U$ bo'lishi kerak. Bundan $\overline{\overline{P - Q}} = \overline{U}$ yoki $P - Q = \phi$ kelib chiqadi. Bu esa $P \subseteq Q$ ekanini bildiradi.

6. $A \to B$ formulaning chinlik to'plamini aniqlaylik.

Bu formula A chin va B yolg‘on, shuningdek, B chin va A yolg‘on bo‘lgan to‘plamda, ya’ni $(P-Q)\bigcup(Q-P)$ dagina yolg‘on bo‘lib, U ning qolgan bo‘lagida, ya’ni $\overline{(P-Q)\bigcup(Q-P)}$ da chindir.

Shunday qilib, $A\leftrightarrow B$ ning chinlik to‘plami U ning shtrixlangan bo‘lagidan boshqa qismi bilan tasvirlanadi (4-shakl):



4-shakl.

Boshqa qismiga mos keluvchi to‘plamni topamiz. $P-Q=P\bigcap\overline{Q}$ va $Q-P=Q\bigcap\overline{P}=\overline{P}\bigcap Q$. Bundan $\overline{P-Q}=\overline{P}\bigcup Q$ va $\overline{Q-P}=P\bigcup\overline{Q}$ kelib chiqadi. Shunday qilib,

$$\overline{(P-Q)\bigcup(Q-P)}=\overline{P-Q}\bigcap\overline{Q-P}=(\overline{P}\bigcup Q)\bigcap(P\bigcup\overline{Q})$$

Demak, $A\leftrightarrow B$ formula $(\overline{P}\bigcup Q)\bigcap(P\bigcup\overline{Q})$ to‘plamda chindir.

Ikkinchi tomondan, $(\overline{P}\bigcup Q)\bigcap(P\bigcup\overline{Q})$ to‘plam $(\overline{A}\vee B)\wedge(A\vee\overline{B})$ formulaning chinlik to‘plami bo‘lgani uchun, ushbu ma’lum tengkuchlilikka ega bo‘lamiz.

$$A\leftrightarrow B=(\overline{A}\vee B)\wedge(A\vee\overline{B})$$

Quyidagi formulalarga $\overline{A}\vee B=A\to B$, $\overline{B}\vee A=B\to A$ asosan

$$A\leftrightarrow B=(A\to B)\wedge(B\to A)$$

7. Formulalar bilan to‘plamlar orasidagi bog‘lanishga suyanib, quyidagi teoremani isbotlaylik:

1-tyeorema: A va B formulalar tengkuchli bo‘lishi uchun $A\leftrightarrow B$ formula tavtologiya bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. a) $A=B$ bo‘lsin. Demak, $P=Q$. $A\leftrightarrow B$ ning chinlik to‘plami $(\overline{P}\bigcup Q)\bigcap(P\bigcup\overline{Q})=(\overline{P}\bigcup P)\bigcap(P\bigcup\overline{P})=U\bigcap U=U$.

Bundan $A\leftrightarrow B=J$ kelib chiqadi, ya’ni $A\leftrightarrow B$ tavtologiyadir.

b) $(\overline{P}\bigcup Q)\bigcap(P\bigcup\overline{Q})=J$ bo‘lsin, u vaqtda $A\leftrightarrow B=J$ bo‘ladi.

Demak, $A\leftrightarrow B=(A\to B)\wedge(B\to A)=J$. Bundan, kon’yunksiya ta’rifiga asosan $A\to B=J$ va $B\to A=J$.

Bu yerdan, 5-punktga binoan $P\subseteq Q$ va $Q\subseteq P$. Demak, $Q=P$ kelib chiqadi. Bu o‘z navbatida $A=B$ bo‘lishini ko‘rsatadi.

Shunday qilib, mulohazalar algebrasidagi $\wedge$, $\vee$ - mantiqiy amallarga mos ravishda to‘plamlar algebrasidagi $\bigcap$, $\bigcup$-(ko‘paytma, birlashma, to‘ldiruvchi) amallari mos keladi. Mulohazalar algebrasidagi “1”, “0” konstantalarga to‘plamlar algebrasidagi U va ϕ (universal va bo‘sh) to‘plamlar mos keladi. Demak, mulohazalar algebrasidagi biror ifodada $\wedge$ ni $\bigcap$ ga, $\vee$ ni $\bigcup$ ga, inkorni (-) to‘ldiruvchiga, “1” ni universal U to‘plamga “0” ni bo‘sh ϕ to‘plamga almashtirsa, to‘plamlar algebrasidagi ifoda hosil bo‘ladi va aksincha.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor &Francis Group, LLC, 2010

2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o'quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1.Formulalarningnormalshakllaridebnimaga aytamiz?
2.Formulalarning asosiy xossalarini keltiring.
3.Tengkuchlimas formulalar soni nimaga teng?

12-mavzu. Jegalkin ko‘pxadi

Reja.

1. **Ikki modul bo‘yicha qo‘shish amali.**
2. **Jegalkin ko‘pxadi tushunchasi.**

{0,1} Bul algebrasidagi xu kon’yunksiya amali oddiy arifmetikadagi 0 va 1 sonlar ustidagi ko‘paytma amaliga mos keladi. Ammo 0 va 1 sonlarni qo‘shish natijasi {0,1} to‘plam doirasidan chetga chiqadi. Shuning uchun I.I.Jegalkin (3.VIII 1869-28.III 1947) 2 moduliga asosan qo‘shish amalini kiritadi (I.I.Jegalkin 30-yillarning boshida Moskva davlat universitetida birinchi bo‘lib matematik mantiq bo‘yicha ilmiy seminar tashkil etgan). x va y mulohazalarning 2 moduli bo‘yicha qo‘shishni $x+y$ sifatida belgilaymiz va u quyidagi chinlik jadvali bilan beriladi:

x	y	$x+y$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Chinlik jadvalidan ko‘rinib turibdiki, $x+y=\overline{x\leftrightarrow y}$. Mantiq algebrasidagi ko‘paytma va 2 moduli bo‘yicha qo‘shish mantiq amallari uchun kommutativ, assosiativ va distributiv arifmetik qonunlar o‘z kuchini saqlaydi.

Bul algebrasidagi asosiy mantiqiy amallarni kiritilgan arifmetik amallar orqali quyidagicha ifodalash mumkin:

1. $\bar{x}=x+1$; 2. $x\wedge y=xy$; 3. $x\vee y=xy+x+y$;
4. $x\to y=xy+x+1$; 5. $x\leftrightarrow y=x+y+1$.

2 moduli bo‘yicha qo‘shish amalining ta’rifiga asosan $x+x=0$ va $xx=x\ (x^n=x)$.

Mantiq algebrasidagi istalgan funksiyani yagona arifmetik ko‘phad shakliga keltirish mumkin. Haqiqatan ham, biz oldingi paragraflarda istalgan funksiyani kon’yunksiya va inkor mantiqiy amallar orqali ifodalash mumkinligini ko‘rgan edik. Yuqorida kon’yunksiya, diz’yunksiya va inkor mantiqiy amallarni arifmetik amallar orqali ifodaladik. Demak, istalgan funksiyani arifmetik ko‘phad shakliga keltirish mumkin.

4-ta’rif. $\sum x_{i_1}x_{i_2}.....x_{i_k}+a$ ko‘rinishidagi ko‘phadga Jegalkin ko‘phadi deb aytiladi. Bu yerda hamma x_{i_j} o‘zgaruvchilar birinchi darajada qatnashadi, $(i_1,...,i_k)$ qiymatlar satrida hamma i_j lar har xil bo‘ladi, $a\in E_2=\{0,1\}$.

5-ta'rif. $x_{i_1} + x_{i_2} + ... + x_{i_k} + a$ ko‘rinishidagi funksiya chiziqli funksiya deb aytiladi. Bu yerda $a \in E_2 = \{0,1\}$.

Chiziqli funksiyaning ifodasidan ko‘rinib turibdiki, n argumentli chiziqli funksiyalar soni 2^{n+1} ga teng va bir argumentli funksiyalar doimo chiziqli funksiya bo‘ladi.

Jegalkin ko‘phadi ko‘rinishidagi har bir funksiyaning argumentlari soxta emas argumentlar bo‘ladi. Haqiqatan ham, x_1 shunday argument bo‘lsin. U vaqtda ixtiyoriy $f(x_1,...,x_n)$ funksiyani quyidagi ko‘rinishda yozish mumkin:

$$f(x_1,...,x_n) = x_1\varphi(x_2,...,x_n) + \psi(x_2,...,x_n).$$

Bu yerda φ funksiyasi aynan 0 ga teng emas, aks holda x_1 argument f funksiyaning (ko‘phadning) argumentlari safiga qo‘shilmasdi.

Endi $x_2,...,x_n$ argumentlarning shunday qiymatlarini olamizki, $\varphi = 1$ bo‘lsin. U vaqtda f funksiyaning qiymati x_1 argumentning qiymatiga bog‘liq bo‘ladi. Demak, x_1 soxta argument emas.

Mantiq algebrasidagi hamma n argumentli chiziqli funksiyalar to‘plamini L harfi bilan belgilaymiz. Uning elementlarining soni 2^{n-1} ga teng bo‘ladi.

2-tyeorema. Agar $f(x_1,...,x_n) \notin L$ bo‘lsa, u holda undan argumentlari o‘rniga 0 va 1 konstantalarni hamda x va $\bar{x}$ funksiyalarni, ayrim holda f ustiga “–“ inkor amalini qo‘yish usuli bilan $x_1\ x_2$ funksiyani hosil etish mumkin.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor &Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1. Bir va nolni o‘zida saqlovchi Bul funksiyalari.
2. O‘zi-o‘ziga ikki taraflama qo‘shma funksiyalar.
3. Chiziqli funksiya.

13-mavzu. Funksiyalar sistemasining to‘liqligi va yopiqligi. (2-soat)

Reja:

1.Teng kuchli funksiya.
2.Monoton funksiya.
3. Funksional yopiq sinf.
4.Post teoremasi.

Ma’lumki, mantiqiy amallar mulohazalar algebrasi nuqtai nazaridan chinlik jadvallari bilan to‘liq xarakterlanadi. Agarda funksiyaning jadval shaklida berilishini esga olsak, u vaqtda mulohazalar algebrasida ham funksiya tushunchasi mavjudligini bilamiz.

1-ta'rif. Mulohazalar algebrasining $x_1,...,x_n$ argumentli $f(x_1,...,x_n)$ funksiyasi deb, 0 va 1 qiymat qabul qiluvchi funksiyaga aytiladi va uning $x_1,...,x_n$ argumentlari ham 0 va 1 qiymat qabul qiladi. Funksiya $f(x_1,...,x_n)$ o'zining chinlik jadvali bilan beriladi.

x_1	x_2	x_3	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1,...,x_n)$
0	0	0	...	0	0	f(0,0,...,0,0)
1	0	0	...	0	0	f(1,0,...,0,0)
...	...	...	...	...	...	....
1	1	1	...	1	0	f(1,1,...,1,0)
1	1	1	...	1	0	f(1,1,...,1,1)

Bujadvalningharbirsatridaavvalo'zgaruvchilarning $(\alpha_1,...,\alpha_n)$ qiymatlarivashu qiymatlarsatrida f funksiyaning $f(\alpha_1,...,\alpha_n)$ qiymatiberiladi. Oldingiparagraflardaisbot qilganedikki, n tao'zgaruvchiuchun qiymatlarsatrlariningsoni 2^nvafunksiyalarningsoni 2^{2^n} gatengbo'ladi.

Mulohazalar algebrasida asosiy elementar funksiyalar quyidagilardan iborat:

$$f_1(x)=x,\quad f_2(x)=\bar{x},\quad f_3(x,y)=xy,\quad f_4(x,y)=x\vee y,$$

$$f_5(x,y)=x\to y,\quad f_6(x,y)=x\leftrightarrow y,$$

$$f_7(x_1,.....,x_n)=1,\quad f_8(x_1,......,x_n)=0.$$

Agar f(0,0,.....,0)=0 bo'lsa, u holda f(x_1,x_2,.....,x_n) funksiyaga 0 saqlovchi funksiya deb aytiladi. Agar $f(1,1,...,1)=1$ bo'lsa, u vaqtda $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaga 1 saqlovchi funksiya deb aytamiz.

n argumentli 0 saqlovchi funksiyalarning soni 2^{2^n-1} ga va 1 saqlovchi funksiyalarning soni ham 2^{2^n-1} ga teng bo'ladi (isbot qilishni o'quvchiga havola etamiz).

Mulohazalar algebrasidagi n argumentli 0 saqlovchi funksiyalar to'plamini P_0 va 1 saqlovchi funksiyalar to'plamini P_1 bilan belgilaymiz.

2-ta'rif. f va g mulohazalar algebrasining funksiyasi va $x_1,...,x_n$ lar hech bo'lmaganda ularning bittasining argumentlari bo'lsin. Agar $x_1,...,x_n$ argumentlarning hamma qiymatlari satri uchun f va g funksiyalarning mos qiymatlari bir xil bo'lsa, u holda f va g funksiyalar tengkuchli funksiyalar deb aytiladi va $f=g$ shaklida yoziladi.

3-ta'rif. Agarda quyidagi munosabat

$$f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},1,x_{i+1},\ldots,x_n)=f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},0,x_{i+1},\ldots,x_n),$$

bajarilsa, u vaqtda x_i argumentga $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning soxta argumenti deb aytiladi.

Agarda $f(x_1,x_2,....,x_{i-1},1,x_{i+1},....,x_n)\neq f(x_1,x_2,....,x_{i-1},0,x_{i+1},....,x_n)$ bo'lsa, u holda x_i argumentga $f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning soxta emas (muhim) argumenti deb aytiladi.

Misol. $f(x,y)=x\vee(xy)$ funksiya uchun u argumenti soxta argument bo'ladi, chunki $f(1,0)=f(0,1)$.

Funksiyaning argumentlari qatoriga istalgancha soxta argumentlarni yozish mumkin va u qatordan hamma soxta argumentlarni olib tashlash mumkin.

Endi mulohazalar algebrasi funksiyalarining superpozisiyasi tushunchasini ko'raylik.

4-ta'rif. $\Phi=\{\varphi_1(x_{11},....,x_{1k_1}),....,\varphi_m(x_{m1},....,x_{mk_m})\}$ mulohazalar algebrasi funksiyalarining chekli sistemasi bo'lsin.

Quyidagi ikki usulning bittasi bilan hosil etiladigan ψ funksiyaga Φ sistemadagi $\varphi_1,...,\varphi_m$ funksiyalarning elementar superpozisiyasi yoki bir rangli superpozisiyasi deb aytiladi:

a) qandaydir $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning x_{ji} argumentini qayta nomlash usuli, ya'ni

$$\varphi_j(x_{j1}, x_{j2},.....,x_{ji-1}, y, x_{ji+1},....., x_{jk_j}),$$

bu yerda u, x_{jk_j} o'zgaruvchilarning birortasi bilan mos tushishi mumkin.

b) Qandaydir $\varphi_j \in \Phi$ funksiyaning biror x_{ji} argu-menti o'rniga ikkinchi bir $\varphi_e(x_{e1},..., x_{ek}) \in \Phi$ funksiyani qo'yish usuli, ya'ni

$$\varphi_j(x_{j1},....,x_{ji-1}),\ \varphi_e(x_{e1},....,x_{ek}),\ (x_{ji+1},....,x_{jk_j}).$$

Agar Φ sistema funksiyalarning k rangli superpozisiyalari sinfi $\Phi^{(k)}$ berilgan bo'lsa, u vaqtda $\Phi^{(k+1)} = (\Phi^{(k)})^{(1)}$ bo'ladi.

1-izoh. 4-ta'rifning a) qismiga asosan bir xil chinlik jadvaliga ega bo'lib, lekin o'zgaruvchilarning belgilanishi bilan farq qiladigan funksiyalar bir-birining superpozisiyasi bo'ladi.

2-izoh. 4-ta'rifning a) qismiga asosan biror x_{ji} o'zgaruvchini x_{jk} $(i \neq k)$ bilan qayta nomlasak, natijada kam o'zgaruvchili funksiyaga ega bo'lamiz. Bu holda x_{ji} va x_{jk} o'zgaruvchilar aynan tenglashtirildi deb aytamiz. Masalan, $x \vee y$ va $x \wedge \bar{y}$ funksiyalardagi y ni x bilan qayta nomlasak, u vaqtda $x \vee x = x$ va $x \wedge \bar{x} = 0$ funksiyalarni hosil qilamiz.

3-izoh. 4-ta'rifning a) qismiga asosan agar $\Phi \subset \Phi^{(1)}$ bo'lsa, u holda $\Phi^{(r)} \subset \Phi^{(r+1)}$ va umuman $r \leq s$ bo'lganda $\Phi^{(r)} \subseteq \Phi^{(s)}$.

5-ta'rif. $\bar{x}$, xy, $x \vee y$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$ asosiy elementar funksiyalarning superpozisiyasiga formula deb aytamiz.

0<1 munosabati orqali $\{0,1\}$ to'plamini tartiblashtiramiz.

6-ta'rif. $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ va $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$ qiymatlar satri bo'lsin. α qiymatlar satri β qiymatlar satridan shunda va faqat shundagina oldin keladi deb aytamiz, qachon $\alpha \prec \beta$ yoki α va β qiymatlar satri ustma-ust tushsa, u holda $\alpha \prec \beta$ shaklida yozamiz.

7-ta'rif. $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n)$ va $\beta = (\beta_1,...,\beta_n)$ ixtiyoriy qiymatlar satri bo'lsin. $\alpha \prec \beta$ dan $f = (\alpha_1,...,\alpha_n) \leq f = (\beta_1,...,\beta_n)$ bajarilishi kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ funksiya monoton funksiya deb aytiladi.

8-ta'rif. $\alpha \prec \beta$ dan $f = (\alpha_1,...,\alpha_n) > f = (\beta_1,...,\beta_n)$ munosabat kelib chiqsa, u holda $f(x_1,...,x_n)$ nomonoton funksiya deb aytiladi.

Asosiy elementar mantiqiy funksiyalardan 0, 1, x, xy, $x \vee y$ funksiyalar monoton funksiyalar bo'lib, $\bar{x}$, $x \to y$, $x \leftrightarrow y$, $x + y$ funksiyalar nomonoton funksiyalardir.

1-teorema. Monoton funksiyalarning superpozisiyasidan hosil qilingan funksiya yana monoton funksiya bo'ladi.

Isbot. Φ monoton funksiyalar sistemasi va shu sistemadagi funksiyalar superpozisiyasidan hosil etilgan funksiya monoton ekanligini isbot qilish kerak bo'lsin. 0 rangli superpozisiya uchun bu tasdiqning to'g'riligi aniq, chunki Φ sistemadagi hamma funksiyalar monoton funksiyalardir. k rangli superpozisiya uchun teoremadagi tasdiq to'g'ri bo'lsin. Uning $k+1$ rangli superpozisiya uchun ham to'g'riligini isbotlaymiz.

$$\varphi(x_1,...,x_n),\quad \psi(y_1,...,y_l) \in \Phi^{(k)} \text{ bo'lsin.}$$

$$\varphi(x_1,...,x_{i-1},\ y, x_{i+1},...,x_k)\ ;$$

$$F(x_1,...,x_{i-1},\ x_{i+1},...,x_n,\ y_1,...,y_l) = \varphi(x_1,...,x_{i-1},\ \psi(y_1,...,y_l),\ x_{i+1},...,x_n)$$

funksiyalarning monoton ekanligini isbotlash lozim. Bu yerda y va y_i lar x_j o'zgaruvchilarning birortasi bilan mos kelishi mumkin. φ funksiyaning monotonligidan $\varphi(x_1,...,x_{i-1},\ y, x_{i+1},...,x_k)$ ning monoton funksiya ekanligi kelib chiqadi. F funksiyaning monotonligini isbotlaymiz. Buning uchun F funksiyaning ikkita γ' va γ'' taqqoslanadigan qiymatlar satrini ko'rib chiqamiz:

$$\gamma'=(\alpha_1',.....,\alpha_{i-1}',.....,\alpha_{i+1}',.....,\alpha_n',\quad \beta_1',.....,\beta_l')\ ;$$

$$\gamma''=(\alpha_1'',.....,\alpha_{i-1}'',.....,\alpha_{i+1}'',.....,\alpha_n'',\quad \beta_1'',.....,\beta_l'')\ .$$

$\gamma' \prec \gamma''$ bo'lsin. U vaqtda $F(\gamma') \le F(\gamma'')$ ekanligini ko'rsatishimiz kerak. Quyidagilar ma'lum:

$F(\gamma') = \varphi(\delta')$, bu yerda $j = i$ bo'lganda $\delta_j' = \alpha_j',\quad \delta_i' = \psi(\beta')$;

$F(\gamma'') = \varphi(\delta'')$, bu yerda $j = i$ bo'lganda $\delta_j'' = \alpha_j'',\quad \delta_i'' = \psi(\beta'')$.

ψ monoton funksiya va $\gamma' \prec \gamma''$ dan $\beta' \prec \beta''$ kelib chiqqanligidan $\delta'' \prec \delta''$ bo'ladi. Ya'ni $\varphi(\delta') = F(\gamma') \le \varphi(\delta'') = F(\gamma'')$, chunki φ monoton funksiyadir.

$$\varphi(x_1,...,x_{i-1},\ y, x_{i+1},...,x_k)\ F(x_1,...,x_{i-1},\ x_{i+1},...,x_n, y_1,...,y_l) \in \Phi^{(k+1)}$$

ekanligidan $(k+1)$ rangli superpozisiya uchun teorema isbot bo'ldi.

Demak, monoton funksiyalarning superpozisiyasidan hosil qilingan funksiya yana monoton funksiyadir.

Kon'yunksiya va diz'yunksiyalar monoton funksiya bo'lganligi uchun, teoremaga asosan, ularning superpozisiyasidan hosil etilgan funksiya ham monoton bo'ladi.

2-teorema. Agar $f(x_1,...,x_n) \in M$ bo'lsa, u holda undan argumentlari o'rniga 0, 1 va x funksiyani qo'yish usuli bilan $\bar{x}$ funksiyani hosil qilish mumkin.

Mantiq algebrasining $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi berilgan bo'lsin.

9-ta'rif. Agar mantiq algebrasining istalgan funksiyasini $\Phi = \{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistemadagi funksiyalar superpozisiyasi orqali ifodalash mumkin bo'lsa, u holda F ga to'liq funksiyalar sistemasi deb aytiladi.

Istalgan funksiyani MKNSH yoki MDNSH ko'rinishida ifodalash mumkinligidan $\{xy, x \vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasining to'liqligi kelib chiqadi. $\{xy, x+y, 1\}$ funksiyalar sistemasi ham to'liq bo'ladi, chunki istalgan funksiyani Jegalkin ko'phadi ko'rinishiga keltirish mumkin.

Quyidagi funksiyalar sistemasining to'liqligini isbotlang:

a) $xy, \bar{x}$; b) $x \vee y, \bar{x}$; v) $xy, x+y, 1$;

g) $\overline{x \vee y}$; d) $\bar{x}\bar{y}$; i) $x+y, x \vee y, 1$;

j) $x+y+z, xy, 0, 1$; z) $x \to y, \bar{x}$; ye) $x \to y, 0$.

Isbot. a). $x \vee y = \overline{\bar{x}\bar{y}}$, ya'ni diz'yunksiya amalini kon'yunksiya va inkor amallari orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{xy, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to'liq bo'ladi.

b). $xy = \overline{\bar{x}\,\bar{y}} = \overline{\bar{x} \vee \bar{y}}$ ekanligi ma'lum. Demak, istalgan mantiqiy funksiyani diz'yunksiya va inkor amallari orqali ifodalasa bo'ladi. Shuning uchun $\{x \vee y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to'liqdir.

v). Ixtiyoriy mantiq algebrasining funksiyasini yagona Jegalkin ko'phadi ko'rinishiga keltirish mumkinligidan $\{xy, x+y, 1\}$ funksiyalar sistemasining to'liqligi kelib chiqadi.

g) va d). Mantiq algebrasidagi istalgan funksiyani $\psi(x,y)=\overline{xy}$ va $\varphi(x,y)=\overline{x\vee y}$ Sheffer funksiyalari orqali ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, $\bar{x}=\varphi(x,x)$

$$x\vee y=\overline{\overline{x\vee y}}=\overline{\varphi(x,y)}=\varphi(\varphi(x,y),\varphi(x,y))$$

va

$$xy=\varphi(\bar{x},\bar{y})=\varphi(\varphi(x,x),\varphi(y,y))$$

asosiy mantiqiy amallarni Sheffer funksiyasi orqali ifodalash mumkin. Demak, $\{\overline{xy}\}$ va $\{\overline{x\vee y}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘ladi.

i). $x\vee y=xy+x+y$ bo‘lganligi uchun $x\vee y+(x+y)=xy$ bo‘ladi. $\{xy, x+y, 1\}$ to‘liq sistema ekanligi v) punktida isbot qilingan edi, demak, $\{x+y, x\vee y, 1\}$ cistema to‘liqdir.

Xuddi shunday boshqa funksiyalar sistemasining to‘liqli-gini isbot qilish mumkin.

3-teorema. Agar $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lsa, u holda unga ikkitaraflama bo‘lgan $\Phi^*=\{\varphi_1^*,...,\varphi_n^*\}$ funksiyalar sistemasi ham to‘liq bo‘ladi.

Isbot. Φ^* sistemaning to‘liqligini isbotlash uchun istalgan $f(x_1,...,x_n)$ funksiyani Φ^* sistemasidagi funksiyalar superpozisiyasi orqali ifodalash mumkinligini ko‘rsatishimiz kerak. Buning uchun avval f^* funksiyani $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ cistemasidagi funksiyalar orqali ifodalaymiz (Φ sistema to‘liq bo‘lganligi uchun bu prosedurani bajarish mumkin). Keyin ikkitaraflama qonunga asosan ikkitaraflama funksiyalar superpozisiyasi orqali f funksiyani hosil qilamiz.

Misol. Quyidagi funksiyalar sistemasining to‘liq emasligini isbotlaylik:

a) $\bar{x}, 1$; b) $xy, x\vee y$; v) $x+y, \bar{x}$;

g) $xy\vee yz\vee xz, \bar{x}$; d) $xy\vee yz\vee xz,\ 0, 1$.

a). $\bar{x}=x+1$ ga teng. Demak, $\{\bar{x},1\}$ sistemasidagi funksiyalar bir argumentli funksiyalar bo‘ladi. Bizga ma’lumki, bir argumentli funksiyalarning superpozisiyasi natijasida hosil qilingan funksiya yana bir argumentli funksiya bo‘ladi. Natijada, bu sistemadagi funksiyalar orqali ko‘p argumentli funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Shuning uchun $\{\bar{x},1\}$ to‘liq sistema emas.

b). $\{xy, x\vee y\}$ sistemasidagi funksiyalarning ikkalasi ham monotondir. Monoton funksiyalarning superpozisiyasi orqali hosil qilingan funksiya yana monoton bo‘lishini isbot qilgan edik. Demak, bu ikkala funksiyaning superpozisiyasi orqali monoton bo‘lmagan funksiyalarni ifodalash mumkin emas va natijada, $\{xy, x\vee y\}$ sistema to‘liqmas sistema bo‘ladi.

v). $\{x+y, \bar{x}\}$ cistemasidagi funksiyalar chiziqli funksiyalardir. Shuning uchun bu funksiyalar orqali chiziqlimas funksiyalarni ifodalab bo‘lmaydi. Demak, $\{x+y, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq emas.

g). $\{xy\vee yz\vee xz, \bar{x}\}$ sistemasidagi funksiyalar o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalardir. Bu funksiyalarning superpozisiyasidan hosil qilingan har qanday funksiya ham o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiya bo‘ladi.

Demak, $\{xy\vee yz\vee xz, \bar{x}\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq emas.

d). $\{xy\vee yz\vee xz,\ 0, 1\}$ sistemadagi funksiyalarning hammasi monoton funksiyalar bo‘ladi. Monoton emas funksiyalar bu sistemadagi funksiyalar orqali ifodalanmaydi. Demak, $\{xy\vee yz\vee xz,\ 0, 1\}$ sistema to‘liq emas.

Shunday qilib, yuqorida keltirilgan masala yechimining analizidan quyidagi xulosa kelib chiqadi.

Berilgan Φ funksiyalar sistemasining to‘liq emasligini isbotlash uchun sistemadagi funksiyalarning shunday umumiy xususiyatini topish kerakki, bu xususiyat funksiyalar superpozisiyasi natijasida saqlansin.

Haqiqatan ham, u vaqtda bunday xususiyatga ega bo‘lmagan funksiyani Φ sistemadagi funksiyalar superpozisiyasi orqali hosil qilib bo‘lmaydi.

Funksiyalarning bu ma’lum xususiyatlarini tekshirish uchun odatda funksional yopiq sinflar tushunchasidan foydalanadilar.

10-ta’rif. Agar A sictemadagi funksiyalar superpozisiyasidan hosil bo‘lgan funksiya yana shu sistemaning elementi bo‘lsa, u holda bunday sistemaga superpozisiyaga nisbatan yopiq sistema deb aytiladi.

11-ta’rif. Superpozisiyaga nisbatan yopiq bo‘lgan har qanday mantiq algebrasining funksiyalar sistemasiga funksional yopiq sinf deb aytiladi.

Ravshanki, ma’lum bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinfni tashkil etadi va, aksincha, ma’lum funksional yopiq sinfga kiruvchi funksiyalar bir xil xususiyatga ega bo‘lgan funksiyalardir. Quyidagi funksiyalar sistemasi funksional yopiq sinflarga misol bo‘la oladi:

a) bir argumentli funksiyalar;

b) hamma mantiq algebrasining funksiyalari;

v) L - chiziqli funksiyalar;

g) S - o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalar;

d) M - monoton funksiyalar;

ye) P_0 - nul qiymatni saqlovchi funksiyalar;

j) P_1 - bir qiymatni saqlovchi funksiyalar.

12-ta’rif. Bo‘sh sinfdan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari to‘plamidan farq qiluvchi funksional yopiq sinfga xususiy funksional yopiq sinf deb aytiladi.

Shunday qilib, funksiyalar sistemasining to‘liqligi uchun bu sistemada har qanday xususiy funksional yopiq sinfga kirmovchi funksiya topilishi yetarli va zarurdir.

13-ta’rif. O‘z-o‘zidan va mantiq algebrasining hamma funksiyalari sinfi (P_2) dan farq qiluvchi funksional yopiq sinflarga kirmovchi xususiy funksional yopiq sinfga maksimal funksional yopiq sinf deb aytiladi.

Mantiq algebrasida hammasi bo‘lib beshta maksimal funksional yopiq sinf mavjud:

P_0 - nol saqlovchi funksiyalar sinfi, P_1 - bir saqlovchi funksiyalar sinfi, S - o‘z-o‘ziga ikkitaraflama funksiyalar sinfi, L - chiziqli funksiyalar sinfi.

Post teoremasi. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasining to‘liqligi uchun bu sistemada P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning har biriga kirmovchi kamida bitta funksiya mavjud bo‘lishi yetarli va zarur (ya’ni $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ shunda va faqat shundagina to‘liq sistema bo‘ladiki, qachonki u P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining ham qism to‘plami bo‘lmasa).

Isbot. $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ to‘liq sistema bo‘lsin, ya’ni $[\Phi]=P_2$. Faraz qilamizki, Φ maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi. U vaqtda F ning yopiqligini hisobga olib, $P_2[\Phi]\subseteq[F]=F$ ni yozish mumkin, ya’ni $F=P_2$. Ammo bunday bo‘lishi mumkin emas. Demak, $\Phi\subseteq F$ munosabat bajarilmaydi.

Teoremaning yetarliligining isbotini o‘quvchilarga havola etamiz.

Natija. Mantiq algebrasidagi har qanday funksional yopiq sinf P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining qism to‘plami bo‘ladi.

Amalda birorta $\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistemaning to‘liq yoki to‘liq emasligini aniqlash uchun Post jadvalidan foydalanadilar. Post jadvali quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

	P_0	P_1	S	L	M
φ_1					
φ_2					
...	...	...	...	...	...
φ_{n-1}					
φ_n					

Jadvalning xonalariga o‘sha satrdagi funksiya funksional yopiq sinflarning elementi bo‘lsa “+” ishora, bo‘lmasa “-” ishorasi qo‘yiladi.

$\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ sistema to‘liq funksiyalar sistemasi bo‘lishi uchun, teoremaga asosan, jadvalning har bir ustunida kamida bitta “-” ishorasi bo‘lishi yetarli va zarur.

$\Phi=\{\varphi_1,...,\varphi_n\}$ funksiyalar sistemasi to‘liq bo‘lmasligi uchun P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasining qism to‘plami bo‘lishi, ya’ni Post jadvalining biror ustuni to‘liq “+” ishoralaridan iborat bo‘lishi kerak.

Funksiyalar sistemasining to‘liqligi tushunchasi bilan sinfning (to‘plamning) **yopig‘i** tushunchasi o‘zaro bog‘langan.

14-ta’rif. A bilan P_2 (n argumentli mantiq algebrasining hamma funksiyalarini o‘z ichiga olgan) to‘plamning biror qism to‘plamini belgilaymiz. A to‘plam funksiyalarning superpozisiyasidan hosil etilgan hamma bul funksiyalari to‘plami (A to‘plam funksiyalari orqali ifodalangan hamma bul funksiyalari to‘plam)ga A to‘plamning **yopig‘i** deb aytiladi va $[A]$ kabi belgilanadi.

Misol. 1. $A=P_2$ bo‘lsin, u holda $[A]=P_2$.

2. $A=\{1, x_1+x_2\}$ bo‘lsin, u vaqtda A to‘plamning yopig‘i hamma L - chiziqli funksiyalar to‘plamidan iborat bo‘ladi.

To‘plam yopig‘i quyidagi xossalarga ega:

1. $[A]\supseteq A$;
2. $[[A]]=[A]$;
3. agar $A_1\subseteq A_2$ bo‘lsa, u holda $[A_1]\subseteq[A_2]$ bo‘ladi;
4. $[A_1\cup A_2]\supseteq[A_1]\cup[A_2]$.

15-ta’rif. Agar $[A]=A$ bo‘lsa, u holda A to‘plam (sinf)ga funksional yopiq sinf deb aytiladi.

Misol. 1. $A=P_2$ sinfi yopiq sinf bo‘ladi.

2. $A=\{1, x_1+x_2\}$ cinfi yopiq sinf bo‘lmaydi.

3. L - sinfi yopiq sinf bo‘ladi.

Osongina ko‘rish mumkinki, har qanday $[A]$ sinf yopiq sinf bo‘ladi. Bu hol ko‘pgina funksional yopiq sinflarni topishga yordam beradi.

To‘plam yopig‘i va yopiq sinf tilida funksiyalar sistemasining to‘liqligi haqidagi ta’rif (avvalgi ta’rifga ekvivalent bo‘lgan ta’rif) ni berish mumkin.

16-ta’rif. Agar $[A]=P_2$ bo‘lsa, u holda A funksiya-lar sistemasi to‘liq deb aytiladi.

Misol. Quyidagi funksiyalar sistemalarining to‘liq emasligini Post jadvali orqali isbot qilaylik:

a) $\Phi_1=\{0, xy, x+y+z\}$; b) $\Phi_2=\{1, xy, x=y+z\}$;

v) $\Phi_3 = \{ \bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z} \}$; g) $\Phi_4 = \{0, 1, x+y\}$;

d) $\Phi_5 = \{0, 1, xy\}$

		P_0	P_1	S	L	M
a)	0	+	-	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	-
b)	1	-	+	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+
	$x+y+z$	+	+	+	+	-
v)	$\bar{x}\bar{y} \vee \bar{x}\bar{z} \vee \bar{y}\bar{z}$	-	-	+	-	-
g)	0	+	-	-	+	+
	1	-	+	-	+	+
	$x+y$	+	-	-	+	-
d)	0	+	-	-	+	+
	1	-	+	-	+	+
	xy	+	+	-	-	+

Jadvaldan ko‘rinib turibdiki, yuqorida keltirilgan hamma funksiyalar sistemasi to‘liq emas, chunki har bir sistema uchun jadvalda bitta ustun faqatgina “+” ishoralaridan iborat. Shuni ta’kidlashimiz kerakki, har bir sistema uchun bu ustunlar har xil. Demak, Post teoremasi shartidan P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasini ham olib tashlash mumkin emas. Bu xulosadan o‘z navbatida P_0, P_1, M, S, L maksimal funksional yopiq sinflarning birortasi ikkinchisining qism to‘plami bo‘la olmasligi kelib chiqadi.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor &Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1. Funksiyalartengkuchliligi. Funksiyalar superpozisiyasi.
2. Funksional yopiq sinflar va xususiy funksional yopiq sinflar.
3. Maksimal funksional yopiq sinf va Post teoremasi.
4. To‘plam yopig‘i va Post jadvali.

14-mavzu. Xisob tushunchasi. Mulohazalar xisobi.(2-soat)

Reja:

1.Mulohazalar xisobi.

2.Mantiqiy bog‘lovchilar.Simvollar.

Matematikada aksiomatik metod eramizdan oldin qadimgi yunon matematiklarining ishlarida poydo bo‘lgan. Ammo aksiomatik metod XIX asrda rus matematigi N.I.Lobachevskiy tomonidan noyevklid geometriyasining kashf tilishi bilan o‘zining alohida yo‘nalish sifatida yangi rivojlanish pog‘onasiga o‘tdi. Shunday qilib, aksiomatik metod matematik nazariyalarni qurish va o‘rganishda kuchli apparat ekanligi XIX asr matematiklari tomonidan to‘la-to‘kis e’tirof etilgan va bu apparat matematikada keng ko‘lamda qo‘llanila boshlandi.

Mulohazalar hisobi aksiomatik mantiqiy sistema bo‘lib, mulohazalar algebrasi esa uning interpretatsiyasidir (talqinidir).

Berilgan aksiomalar sistemasi negizida (bazasida) qurilgan aksiomatik nazariya deb shu aksiomalar sistemasiga tayanib isbotlanuvchi hamma teoremalar majmuasiga aytiladi.

Aksiomatik nazariya formal va formalmas nazariyalarga bo‘linadi.

Formalmas aksiomatik nazariya nazariy-to‘plamiy mazmun bilan to‘ldirilgan bo‘lib, keltirib chiqarish tushunchasi aniq berilmagan va bu nazariya asosan fikr mazmuniga suyanadi.

Qaralayotgan aksiomatik nazariya uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsa, ya’ni:

1)nazariyaning tili berilgan;

2)formula tushunchasi aniqlangan;

3)aksiomalar deb ataladigan formulalar to‘plami berilgan;

4)bu nazariyada keltirib chiqarish qoidasi aniqlangan bo‘lsa, formal aksiomatik nazariya aniqlangan deb hisoblanadi.

Quyida mulohazalar hisobining simvollari, formulasi, aksiomalar sistemasi, keltirib chiqarish qoidalari, formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qoidasi, deduksiya va umumlashgan deduksiya teoremalari, ayrim mantiq qonunlarining isboti, mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobi o‘rtasidagi munosabatlar, mulohazalar hisobida yechilish, zidsizlik, to‘liqlilik va erkinlik muammolari kabi masalalar bayon etiladi.

Har qanday hisobning tafsili bu hisobning simvollari tafsilidan, formulalar va keltirib chiqarish formulalari ta’rifidan iborat.

Mulohazalar hisobida uch kategoriyali simvollardan iborat alfavit qabul qilinadi:

Birinchi kategoriya simvollari: $x, y, z, ..., x_1, x_2, ...$. Bu simvollarni o‘zgaruvchilar deb ataymiz.

Ikkinchi kategoriya simvollari: $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $-$. Bular mantiqiy bog‘lovchilardir. Birinchisi – diz’yunksiya yoki mantiqiy qo‘shish belgisi, ikkinchisi – kon’yunksiya yoki mantiqiy ko‘paytma belgisi, uchinchisi – implikatsiya belgisi va to‘rtinchisi – inkor belgisi deb ataladi.

Uchinchi kategoriyaga qavs deb ataladigan (,) simvol kiritiladi.

Mulohazalar hisobida boshqa simvollar yo‘q.

Mulohazalar hisobining formulasi deb mulohazalar hisobi alfaviti simvollarining ma’lum bir ketma-ketligiga aytiladi.

Formulalarni belgilash uchun lotin alfavitining katta harflaridan foydalanamiz. Bu harflar mulohazalar hisobining simvollari qatoriga kirmaydi. Ular faqatgina formulalarning shartli belgilari bo‘lib xizmat qiladi.

Endi formula tushunchasi ta’rifini beraylik. Bu tushuncha quyidagicha aniqlanadi:

1) har qanday $x, y, z, ...$ o‘zgaruvchilarning istalgan biri formuladir;

2) agar A va B larning har biri formula bo‘lsa, u holda $(A \wedge B)$, $(A \vee B)$, $(A \rightarrow B)$ va $\overline{A}$ lar ham formulalardir.

3) boshqa hech qanday simvollar satri formula bo‘la olmaydi.

O‘zgaruvchilarni elementar formulalar deb ataymiz.

Misol. Formula ta’rifining 1-bandiga ko‘ra $x, y, z, ...$ o‘zgaruvchilar formulalar bo‘ladi. U vaqtda ta’rifning 2-bandiga muvofiq $(x \wedge y)$, $(x \vee y)$, $(x \rightarrow y)$, $\overline{x}$ lar ham formulalardir. Xuddi shu tariqada $\overline{(x \vee y)}$, $((x \wedge y) \rightarrow z))$, $((x \wedge y) \rightarrow (y \rightarrow z))$ lar ham formulalar bo‘ladi.

Qismiy formula tushunchasini kiritamiz:

1.Elementar formula uchun faqat uning o‘zi qismiy formuladir.

2.Agar $\overline{A}$ formula bo‘lsa, u vaqtda shu formulaning o‘zi, A formula va A formulaning hamma qismiy formulalari uning qismiy formulalari bo‘ladi.

3.Agar formula $A * B$ ko‘rinishda bo‘lsa (bu yerda va bundan keyin $*$ o‘rniga $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$ cimvollarning istalganini tushunamiz), u vaqtda shu formulaning o‘zi, A va B formulalar hamda A va B formulalarning barcha qismiy formulalari $A * B$ formulaning qismiy formulalari bo‘ladi.

Masalan, $\left((x \vee \overline{y}) \rightarrow \left(\overline{\overline{z} \rightarrow y}\right)\right)$ formula uchun:

$\left((x \vee \overline{y}) \rightarrow \left(\overline{\overline{z} \rightarrow y}\right)\right)$ - nolinchi chuqurlikdagi qismiy formula,

$(x \vee \overline{y})$, $\left(\overline{\overline{z} \rightarrow y}\right)$ - birinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

x, $\overline{y}$, $(\overline{z} \rightarrow y)$ - ikkinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

y, $\overline{z}$ - uchinchi chuqurlikdagi qismiy formulalar,

z – to‘rtinchi chuqurlikdagi qismiy formula deb ataladi.

Formulalarni yozishda ayrim soddalashtirishlarni qabul qilamiz. Xuddi mulohazalar algebrasidagi kabi formulalar yozuvidagi qavslarni tushirib qoldirishga kelishamiz. Bu kelishuvga binoan $((x \vee y) \wedge z)$, $\left(\overline{x \wedge y}\right)$, $((x \wedge y) \rightarrow (z \wedge t))$ formulalarni mos ravishda $x \vee y \wedge z$, $\overline{x \wedge y}$, $x \wedge y \rightarrow z \wedge t$ ko‘rinishda yozamiz.

Mulohazalar hisobida isbotlanuvchi formulalarni sinflarga ajratamiz. Isbotlanuvchi formulalar formulalar ta’rifiga o‘xshash xarakterda ta’riflanadi.

Avval dastlabki isbotlanuvchi formulalar (aksiomalar), undan keyin esa keltirib chiqarish qoidasi aniqlanadi. Keltirib chiqarish qoidasi orqali bor isbotlanuvchi formulalardan yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qilinadi.

Dastlabki isbotlanuvchi formulalardan keltirib chiqarish qoidasini qo‘llash yo‘li bilan yangi isbotlanuvchi formulalarni hosil etishga shu formulalarni aksiomalardan keltirib chiqarish deb aytiladi.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor &Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1. Xisobni mantiqdagi ahamiyati.
2. Mulohazalar algebrasi va mulohazalar xisobi orasidagi bog‘lanish.

15-16-mavzu. Mulohazalar xisobining aksiomalari. Mos keltirib chiqarish xaqidagi lemma. (4-soat)

Reja:

1. MX aksiomalar sistemasi

2.Keltirib chiqarish qoidasi.

3. Keltirib chiqarish qoidalarining hosilalari.

Mulohazalar hisobining aksiomalar tizimi XI aksiomadan iborat bo‘lib, bular to‘rt guruhga bo‘linadi.

Birinchi guruh aksiomalari:

I_1 $x \to (y \to x)$.

I_2 $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$.

Ikkinchi guruh aksiomalari:

II_1 $x \wedge y \to x.$

II_2 $x \wedge y \to y.$

II_3 $(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$.

Uchinchi guruh aksiomalari:

III_1 $x \to x \vee y$.

III_2 $y \to x \vee y$.

III_3 $(x \to z) \to ((y \to z) \to (x \vee y \to z))$.

To‘rtinchi guruh aksiomalari:

IV_1 $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$.

IV_2 $x \to \overline{\overline{x}}$.

IV_3 $\overline{\overline{x}} \to x$.

O‘rniga qo‘yish qoidasi. Agar A mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulasi, x - o‘zgaruvchi, B mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulasi bo‘lsa, u vaqtda A formula ifodasidagi hamma x lar o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida hosil etilgan formula ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

A formuladagi x o‘zgaruvchilar o‘rniga B formulani qo‘yish operatsiyasi (jarayoni)ni o‘rniga qo‘yish qoidasi deb aytamiz va uni quyidagi simvol bilan belgilaymiz:

$$\int_x^B (A).$$

Zikr etilgan qoidaga quyidagi aniqliklarni kiritamiz:

a) Agar A faqat x o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yish B formulani beradi;

b) Agar A formula x dan farqli y o‘zgaruvchidan iborat bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ o‘rniga qo‘yish A ni beradi;

v) Agar A o‘rniga qo‘yish aniqlangan formula bo‘lsa, u vaqtda $\overline{A}$ formuladagi x o‘rniga B formulani qo‘yish natijasida o‘rniga qo‘yishning inkori kelib chiqadi, ya’ni $\int_x^B (\overline{A})$ o‘rniga qo‘yish $\overline{\int_x^B A}$ ni beradi.

g) Agar A_1 va A_2 formulalarda o‘rniga qo‘yish aniqlangan bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A_1 * A_2)$ o‘rniga qo‘yish $\int_x^B (A_1) * \int_x^B (A_2)$ ni beradi.

Agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, uni $\vdash A$ shaklda yozishga kelishamiz.

U holda o‘rniga qo‘yish qoidasini quyidagicha sxematik ravishda ifodalash mumkin:

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_x^B (A)}$$

va uni «agar A isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $\int_x^B (A)$ ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi» deb o‘qiladi.

Xulosa qoidasi. Agar A va A→V lar mulohazalar hisobining isbotlanuvchi formulalari bo‘lsa, u holda V ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi. Bu qoida quyidagicha sxematik ravishda yoziladi:

$$\frac{\vdash A;\ \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

Isbotlanuvchi formulaning ta’rifi.

a) Har qanday aksioma isbotlanuvchi formuladir;

b) Isbotlanuvchi formuladagi x o‘zgaruvchi o‘rniga ixtiyoriy B formulani qo‘yish natijasida hosil bo‘lgan formula isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

v) A va $A \to B$ isbotlanuvchi formulalardan xulosa qoidasini qo‘llash natijasida olingan V formula isbotlanuvchi formuladir;

g) Mulohazalar hisobining boshqa hech qanday formulasi isbotlanuvchi deb sanalmaydi.

1-ta’rif. Isbotlanuvchi formulalarni hosil etish prosessi (jarayoni)ga isbot qilish (isbotlash) deb aytiladi.

1-Misol. $\vdash A \to A$ ekanligi (implikatsiyaning refleksivligi) isbotlansin.

Implikatsiyaning refleksivligini isbotlash uchun ushbu

$$\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z)) \text{ - } I_2$$

aksiomadan foydalanamiz. Bu yerda $\int_z^x (I_2)$ o‘rniga qo‘yishni bajarish natijasida

$$\vdash (x \to (y \to x)) \to ((x \to y) \to (x \to x)) \qquad (1)$$

kelib chiqadi. $\vdash (x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ - I_2 aksioma va (1) formulaga xulosa qoidasini qo‘llab

$$\vdash (x \to y) \to (x \to x) \qquad (2)$$

formulani hosil qilamiz.

(2) formulaga nisbatan quyidagi o‘rniga qo‘yishni

$$\int_y^{\overline{\overline{x}}} (2)$$

bajarish natijasida

$$\vdash (x \to \overline{\overline{x}}) \to (x \to x) \quad (3)$$

isbotlanuvchi formulaga ega bo‘lamiz.

$x \to \overline{\overline{x}}$ - IV_2 aksioma va (3) formulaga nisbatan xulosa qoidasini qo‘llash natijasida

$$\vdash x \to x \qquad (4)$$

isbotlanuvchi formulaga kelamiz. Nihoyat (4) formuladagi x o‘zgaruvchi o‘rniga A formulani qo‘ysak

$$\vdash A \to A$$

isbotlanishi kerak bo‘lgan formula hosil bo‘ladi.

2-misol. $\vdash \overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}$ ekanligini isbotlang.

$(z \to x) \to ((z \to y) \to (z \to x \wedge y))$ - II_3 aksiomaga nis-batan ketma-ket ikki marta o‘rniga qo‘yish usulini qo‘llaymiz: avval x ni $\bar{x}$ ga va keyin y ni $\bar{y}$ ga almashtiramiz. Natijada quyidagi isbotlanuvchi formulaga ega bo‘lamiz

$$\vdash (z \to \bar{x}) \to ((z \to \bar{y}) \to (z \to \bar{x} \wedge \bar{y})). \qquad (5)$$

(5) formulaga nisbatan $\int_{z}^{\overline{x \vee y}}$ (5) o‘rniga qo‘yishni bajarib, quyidagini hosil qilamiz

$$\vdash ((\overline{x \vee y}) \to \bar{x}) \to ((\overline{x \vee y} \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y})). \qquad (5a)$$

Endi

$$\overline{x \vee y} \to \bar{x} \qquad (6)$$

$$\overline{x \vee y} \to \bar{y} \qquad (7)$$

formulalarning isbotlanuvchi ekanligini ko‘rsatamiz.

Buning uchun $(x \to y) \to (\bar{y} \to \bar{x})$ - IV_1 aksiomaga nisbatan

$$\int_{y}^{x \vee y} (IV)_1$$

o‘rniga qo‘yishni bajaramiz. Natijada

$$\vdash (x \to x \vee y) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x}) \qquad (8)$$

formulaga ega bo‘lamiz. (8) formula va $x \to x \vee y$ - III_1 aksiomaga nisbatan xulosa qoidasini ishlatib, (6) ning isbotlanuvchi formula ekanligiga ishonch hosil qilamiz. Xuddi shunday (7) ning ham isbotlanuvchi formula ekanligini ko‘rsatish mumkin.

(6) va (5) formulalarga xulosa qoidasini qo‘llasak,

$$\vdash (\overline{x \vee y} \to \bar{y}) \to (\overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}) \qquad (9)$$

isbotlanuvchi formula kelib chiqadi.

(7) va (9) formulalarga xulosa qoidasini qo‘llab,

$$\vdash \overline{x \vee y} \to \bar{x} \wedge \bar{y}$$

dastlabki formulaning isbotlanuvchi ekanligini hosil qilamiz.

Xulosa va o‘rniga qo‘yish qoidalari singari keltirib chiqarish qoidasining hosilalari ham yangi isbotlanuvchi formulalar hosil qilishga imkon yaratadi.

2-ta’rif. Agar $A(x_1, x_2, ..., x_n)$ – isbotlanuvchi formula va $B_1, B_2, ..., B_n$ mulohazalar hisobining ixtiyoriy formulalari bo‘lsa, u vaqtda A formulaning $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchi-lari o‘rniga bir vaqtda mos ravishda $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalarni qo‘yish natijasida C isbotlanuvchi formulani hosil qilish, bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi deb ataladi.

$z_1, z_2, ..., z_n$ lar A, $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalardagi boshqa o‘zgaruvchilardan farq qiluvchi o‘zgaruvchilar va $z_i \neq z_j \ (i, j = \overline{1, n})$ bo‘lsin. U holda A formulaga n ta ketma-ket o‘rniga qo‘yishni bajaramiz: avval x_1 o‘rniga z_1 ni, keyin x_2 o‘rniga z_2 ni va hokazo x_n o‘rniga z_n ni qo‘yamiz. Natijada quyidagi isbotlanuvchi formulalarga ega bo‘lamiz: $\vdash \int_{x_1}^{z_1}(A)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_1$ ni, $\vdash \int_{x_2}^{z_2}(A_1)$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_2$ ni, ..., $\vdash \int_{x_n}^{z_n}(A_{n-1})$ o‘rniga qo‘yish $\vdash A_n$ ni beradi.

Bundan keyin A_n formulaga nisbatan yana n ta ketma-ket o‘rniga qo‘yishni bajaramiz: avval z_1 o‘rniga B_1 ni, keyin z_2 o‘rniga B_2 ni va hokazo z_n o‘rniga B_n ni qo‘yib chiqamiz. Buning natijasida $\vdash \int_{z_1}^{B_1}(A_n)$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_1$ ni, $\vdash \int_{z_2}^{B_x}(C_1)$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_2$ ni,....., $\vdash \int_{z_n}^{B_n}(C_{n-1})$ o‘rniga qo‘yishdan $\vdash C_n$ ni hosil qilamiz.

Demak, C_n isbotlanuvchi formula A formuladagi $x_1, x_2, ..., x_n$ o‘zgaruvchilar o‘rniga bir vaqtda mos ravishda $B_1, B_2, ..., B_n$ formulalarni qo‘yish natijasida hosil bo‘ladi.

Bir vaqtda o‘rniga qo‘yish operatsiya (qoida)sini quyidagicha ifodalaymiz

$$\frac{\vdash A}{\vdash \int_{x_1, x_2, ..., x_n}^{B_1, B_2, ..., B_n}(A)} \qquad (10)$$

Murakkab xulosa qoidasi. Bu qoidada

$$\vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)))$$

ko‘rinishdagiformulalarganisbatanikkinchihosilaviy qoidaishlatiladivauni quyidagitasdiq orqaliizohlashmumkin.

1-teorema. Agar $A_1, A_2, ..., A_n$ lar va

$$A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...))) \qquad (11)$$

isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda L ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

Isbot. Teoremani xulosa qoidasini ketma-ket qo‘llash orqali isbotlash mumkin.

Haqiqatan ham, agar A_1 va (11) isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda xulosa qoidasiga asosan

$$A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)) \qquad (12)$$

ham isbotlanuvchi formula bo‘ladi.

A_2 va (12) isbotlanuvchi formula bo‘lganligi uchun

$$A_3 \to (...(A_n \to L)...) \qquad (13)$$

formula ham isbotlanuvchi bo‘ladi.

Xuddi shunday muhokamani davom ettirib, oxiri L ning isbotlanuvchi formula ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Murakkab xulosa qoidasini sxematik ravishda quyidagicha yozish mumkin:

$$\frac{\vdash A_1, \vdash A_2, ..., \vdash A_n, \vdash A_1 \to (A_2 \to (A_3 \to (...(A_n \to L)...)))}{\vdash L} \qquad (14)$$

Sillogizm qoidasi

2-teorema. Agar $A \to B$ va $B \to C$ isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda $A \to C$ formula ham isbotlanuvchi bo‘ladi.

Isbot. Teoremani sxematik ravishda quyidagicha yozamiz

$$\frac{\vdash A \to B,\ \vdash B \to C}{\vdash A \to C}. \quad (15)$$

$x \to (y \to x)$ - I$_1$ va $x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$ -I$_2$ aksiomalarga nisbatan quyidagi bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasini

$$\int_{x_1 y_1 z}^{A_1 B_1 C} (J_2) \quad \text{va} \quad \int_{x_1 y}^{B \to C, A} (l_1)$$

qo‘llash natijasida ushbu isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz:

$$\vdash A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C)), \qquad (16)$$

$$\vdash (B \to C) \to (A \to (B \to C)). \quad (17)$$

Teoremaning shartiga asosan

$$\vdash A \to B \qquad (18)$$

$$\vdash B \to C \qquad (19)$$

formulalar isbotlanuvchidir.

(19) va (17) lardan xulosa qoidasiga asosan

$$\vdash A \to (B \to C) \qquad (20)$$

formulani hosil qilamiz. U vaqtda (20), (18) va (16) lardan murakkab xulosa qoidasiga asosan $\vdash A \to C$ ekanligi kelib chiqadi.

Agar $A \to B$ va $B \to C$ isbotlanuvchi formulalar bo‘lsa, u vaqtda $A \to C$ ham isbotlanuvchi formula bo‘lishiga sillogizm qoidasi deb aytamiz.

Kontrpozisiya qoidasi

3-teorema. Agar $A \to B$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $\overline{B} \to \overline{A}$ ham isbotlanuvchi formula, ya’ni

$$\frac{\vdash A \to B}{\vdash \overline{B} \to \overline{A}}. \qquad (21)$$

Isbot. $(x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$ - IV$_1$ aksiomaga nisbatan bir vaqtda o‘rniga qo‘yish qoidasi

$$\int_{x,y}^{A,B} (IV_1)$$

ni qo‘llab,

$$\vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A}) \qquad (22)$$

isbotlanuvchi formulani hosil qilamiz.

Teoremaning shartiga asosan

$$\vdash A \to B \qquad (23)$$

isbotlanuvchi formuladir. Shuning uchun (23) va (22) lardan xulosa qoidasiga asosan $\vdash (\overline{B} \to \overline{A})$ isbotlanuvchi formula ekanligi kelib chiqadi.

Agar $A \to B$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $\overline{B} \to \overline{A}$ ham isbotlanuvchi formula bo‘lishiga kontrpozisiya qoidasi deb aytamiz.

Ikki karralik inkorni tushirish qoidasi

4-teorema. 1) Agar $A \to \overline{\overline{B}}$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $A \to B$ ham isbotlanuvchi bo‘ladi.

2) Agar $\overline{\overline{A}} \to B$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u vaqtda $A \to B$ formula ham isbotlanuvchi, ya’ni

$$\frac{\vdash A \to \overline{\overline{B}}}{\vdash A \to B} \quad \text{va} \quad \frac{\vdash \overline{\overline{A}} \to B}{\vdash A \to B} \qquad (24)$$

Isbot. $x \to \overline{\overline{x}}$ - IV$_2$ va $\overline{\overline{x}} \to x$ - IV$_3$ aksiomalarga nisbatan o‘rniga qo‘yish

$$\int_x^A (IV_2) \quad \text{va} \quad \int_x^B (IV_3)$$

qoidalarini qo‘llab,

$$\vdash A \to \overline{\overline{A}}, \qquad (25)$$

$$\vdash \overline{\overline{B}} \to B \qquad (26)$$

isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz.

Teoremaning 1) va 2) shartiga asosan

$$\vdash A \to \overline{\overline{B}}, \qquad (27)$$

$$\vdash \overline{\overline{A}} \to B \, (28)$$

formulalar isbotlanuvchidir.

Agar teoremaning 1)-sharti bajarilsa, u vaqtda (26) va (27) formulalardan sillogizm qoidasiga asosan $\vdash A \to B$ kelib chiqadi.

Agar 2)-sharti bajarilsa, u vaqtda (25) va (28) formulalardan $\vdash A \to B$ ni keltirib chiqaramiz.

Agar $A \to \overline{\overline{B}}$ $(\overline{\overline{A}} \to B)$ isbotlanuvchi formula bo‘lsa, u holda $A \to B$ ham isbotlanuvchi formula bo‘lishiga ikki martalik inkorni tushirish qoidasi deb aytamiz..

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor &Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1. Keltiribchiqarishqoidalari.
2. Birvaqtdao‘rnigaqo‘yishvamurakkabxulosaqoidalari.
3. Sillogizm, kontrpozisiya va ikki martalik inkorni tushirish qoidalari

17-mavzu. Muloxazalar xisobining to‘liqligi. (2-soat)

Reja:

1. Formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish qoidasi.
2. Deduksiya teoremasi.
3. Mantiqiy amallar qoidasi.

$H = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ chekli formulalar majmuasi (to‘plami) berilgan bo‘lsin. Bu formulalar majmuasidan formulani keltirib chiqarish tushunchasini beramiz.

1-ta’rif. 1) Har qanday $A_i \notin H$ formulalar majmuasi H dan keltirib chiqariladigan formuladir.

2) Har qanday isbotlanuvchi formula H dan keltirib chiqariladi.

3) C va $C \to B$ lar H formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan formulalar bo‘lsa, u holda B formula ham H dan keltirib chiqariladi.

Biror B formula H formulalar majmuasidan keltirib chiqariladigan bo‘lsa, uni simvolik ravishda $H|-B$ shaklda yozamiz.

Agar H bo‘sh to‘plam yoki elementlari faqat isbotlanuvchi formulalardan iborat bo‘lsa, u vaqtda H dan keltirib chiqariladigan formulalar sinfi isbotlanuvchi formu-lalar sinfi bilan mos keladi. Agar formulalar majmuasi H ning hech bo‘lmaganda bitta elementi isbotlanmaydigan formuladan iborat bo‘lsa, u holda H dan keltirib chiqari-ladigan formulalar sinfi isbotlanuvchi formulalar sinfiga nisbatan kengroq bo‘ladi.

Misol. $A \vee B$ formula $H = \{A, B\}$ formulalar majmuasidan keltirib chiqarilishini isbot eting.

Isbot. $A \in H$ va $B \in H$ bo‘lganligi uchun formulani keltirib chiqarish qoidasiga asosan

$$H|-A, \qquad (1)$$

$$H|-B. \qquad (2)$$

II_3 va I_1 aksiomalarga nisbatan $\int_{x,y,z}^{A,B,A}(II_3)$ va $\int_{x,y}^{B,A}(I_1)$ o‘rniga qo‘yishlarni bajaramiz. Natijada isbotlanuvchi formulalar hosil bo‘ladi. Ular formulani keltirib chiqarish qoidasiga asosan H dan keltirilib chiqariladi, ya’ni

$$H|-(A \to A) \to ((A \to B) \to (A \to A \wedge B)), \qquad (3)$$

$$H|-B \to ((A \to B) \qquad (4)$$

kabi bo‘ladi.

$A \to A$ isbotlanuvchi formula ekanligi uchun

$$H|-A \to A. \qquad (5)$$

(5) va (3) formulalardan xulosa qoidasiga asosan

$$H|-(A \to B) \to (A \to A \wedge B) \qquad (6)$$

ni hosil qilamiz. Xuddi shunday (2) va (4) formulalardan

$$H|-(A \to B) \qquad (7)$$

munosabatga kelamiz.

(7) va (6) formulalardan xulosa qoidasiga asosan

$$H|-A \to A \wedge B \qquad (8)$$

kelib chiqadi. U vaqtda (1) va (8) formulalardan

$$H|-A \wedge B \qquad (9)$$

ni hosil qilamiz, ya’ni $A \wedge B$ formula H formulalar majmuasidan kelib chiqishini ko‘rsatdik.

H formulalar majmuasidan birorta ixtiyoriy formulani keltirib chiqarishda murakkab xulosa qoidasidan ham foydalansa bo‘ladi.

Bu holda (9) munosabatga (5), (7), (1) va (3) mulohazalar orqali kelish mumkin.

2-ta’rif. Agar $B_1, B_2, ..., B_n$ chekli formulalar ketma-ketligining har qanday hadi quyidagi: 1) H formulalar majmuasining birorta formulasi;

2) isbotlanuvchi formula;

3) $B_1, B_2, ..., B_n$ ketma-ketlikning istalgan ikkita oldinma-keyin keladigan elementlaridan xulosa qoidasiga asosan hosil qilinadi degan uch shartning birortasini qanoatlantirsa, u holda bu ketma-ketlik H chekli formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan deb aytiladi.

Oldingi paragrafdagi misolda ko‘rsatildiki, $H=\{A,B\}$ dan quyidagi formulalar chekli ketma-ketligi keltirilib chiqariladi:

$$A,\ B,\ (A\to A)\to((A\to B)\to(A\to A\wedge B)),\ B\to(A\to B),$$
$$A,\ B,\ A\to A,\ (A\to B)\to(A\to A\wedge B)),\ A\to B,\ A\to A\wedge B,\ A\wedge B.$$

Agar murakkab xulosa qoidasidan foydalansak, u vaqtda (isbot) keltirib chiqarish formulalari quyidagicha bo‘ladi:

$$A,\ \ B,\ (A\to A)\to((A\to B)\to(A\to A\wedge B)),$$
$$B\to(A\to B),\ A\to A,\ A\to B,\ A\wedge B.$$

Formulani keltirib chiqarish va formulalar majmuasidan keltirib chiqarish ta’riflariga asosan keltirib chiqarishning quyidagi xossalari hosil bo‘ladi:

-H formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan chekli ketma-ketlikning boshlang‘ich qismi ham H dan keltirib chiqariladigan bo‘ladi;

-agar H dan keltirib chiqarilgan ketma-ketlikning ikkita qo‘shni hadlari (elementlari) orasiga H dan keltirib chiqarilgan qandaydir boshqa ketma-ketlik qo‘yilsa, u vaqtda hosil etilgan yangi formulalar ketma-ketligi ham H dan keltirib chiqarilishi mumkin.

Haqiqatan ham, masalan, agar $B_1,B_2,...,B_i,B_{i+1},...,B_k$ va $C_1,C_2,...,C_m$ lar H dan keltirib chiqarilsa, u vaqtda keltirib chiqarish ta’rifiga asosan $B_1,B_2,...,B_i,\ C_1,C_2,...,C_m,\ B_{i+1},...,B_k$ ham H dan keltirib chiqariladiganbo‘ladi.

-H formulalarmajmuasidan keltirib chiqarilganformulalarketma-ketligininghar qandayhadi H dan keltirib chiqariladiganformuladir.

-agar $H\subset W$ bo‘lsa, uvaqtda H dan keltirib chiqarilganhar qandayformula W ninghamformulasibo‘ladi.

-B formula H dan keltirib chiqariladiganformulabo‘lishiuchun H dan keltirib chiqarilganixtiyoriyformulalarketma-ketligidabuformulaningmavjudbo‘lishiyetarlivazarurdir.

H va W mulohazalar hisobining ikkita formulalar majmuasi bo‘lsin. H,W orqali bu majmualarning yig‘indisini (birlashmasini) belgilaymiz, ya’ni $H,W=H\bigcup W$.

Agar W majmua bitta C formuladan iborat bo‘lganda ham $H\bigcup\{C\}$ birlashmani H,C ko‘rinishda yozamiz.

Endi keltirib chiqarishning asosiy qoidalarini ko‘rib o‘tamiz.

I. $$\frac{H|-A}{H,W|-A}.$$

Bu qoidabevositaformulalarmajmuasidan keltirib chiqarish qoidasidanhosilbo‘ladi.

II. $$\frac{H,C|-A,\quad H|-C}{H|-A}.$$

Isbot. Qoidaning shartiga asosan H,C formulalar majmuasidan A formula keltirib chiqariladi. Shuning uchun H,C dan oxirgi formulasi A bo‘lgan keltirib chiqarish mavjud:

$$B_1,B_2,...,B_{k-1},A. \qquad (10)$$

Xuddi shunday H formulalar majmuasidan C formulani keltirib chiqarilishi mumkinligidan H dan keyingi formulasi C bo‘lgan keltirib chiqarish mavjud:

$$C_1,C_2,...,C_m,C. \qquad (11)$$

(10) keltirib chiqarishda C formula ishtirok etmagan holda, u faqat H formulalar majmuasidan keltirib chiqarilgan ketma-ketlikda bo‘ladi. Demak, H dan A formula keltirib chiqariladi.

Agar (10) keltirib chiqarishda birorta formula C bo‘lsa (masalan formula B_i), u holda B_{i-1} va B_{i+1} formulalar orasiga (11) ni qo‘yamiz. Natijada quyidagi faqat H dan keltirib chiqarishni olamiz:

$$B_1, B_2,..., B_{i-1},\ C_1, C_2,..., C_m,\ B_{i+1},..., B_{k-1},\ A\ .$$

Shunday qilib, N dan A formula keltirib chiqariladi.

III. $\dfrac{H, C \vdash A, W \vdash C}{H, W \vdash A}$.

Isbot. $H, C \vdash A$ bo‘lganligi uchun I-qoidaga asosan $H, W, C \vdash A$. Qoidaning shartiga binoan $W \vdash C$, u holda I-qoidaga ko‘ra $H, W \vdash C$.

II-qoidadan foydalanib $H, W \vdash A$ ni topamiz.

IV. $\dfrac{H \vdash C \to A}{H, C \vdash A}$.

Isbot. $C \to A$ formula H formulalar majmuasidan keltirib chiqariladiganligi sababli H ning shunday keltirib chiqarishi mavjudki, uning oxirida $C \to A$ formula turadi:

$$B_1, B_2,..., B_{k-1}, C \to A\ . \qquad (12)$$

Endi H formulalar majmuasiga C formulani qo‘shib, H, C formulalar majmuasini hosil qilamiz. (12) keltirib chiqarishga C formulani qo‘shib, ushbu keltirib chiqarishga ega bo‘lamiz:

$$B_1, B_2,..., B_{k-1}, C \to A, C\ . \qquad (13)$$

O‘z navbatida bu H, C formulalar majmuasining keltirib chiqarishi bo‘ladi.

(13) ning oxiriga A formulani yozish mumkin, chunki u xulosa qoidasiga asosan $C \to A$ va C formulalardan hosil qilinadi.

Demak, oxirgi formulasi A bo‘lgan H, C formulalar majmuasining

$$B_1, B_2,..., B_{k-1}, C \to A, C, A$$

keltirib chiqarishigaegabo‘lamiz. Buyerdan $H, C \vdash A$ ekanligikelibchiqadi.

Deduksiyateoremasi: $\dfrac{H, C \vdash A}{H \vdash C \to A}$.

Avval H, C formulalarmajmuasiningharqanday $B_1, B_2,..., B_k$ keltiribchiqarishiuchun $H \vdash C \to B_k$ ningto‘g‘riliginimatematikinduksiyametodidanfoydalanibisbotqilamiz.

1. $k = 1$ holuchunmasalato‘g‘ri. Haqiqatanham, agar B_1 formula H, C ningkeltiribchiqarishibo‘lsa, uvaqtdauchholbo‘lishimumkin:

a) $B_1 \in H$,

b) B_1 – isbotlanuvchi formula,

v) B_1 - formula C ning o‘zidir.

a) va b) hollar uchun H dan quyidagi keltirib chiqarishni yozish mumkin: B_1, $B_1 \to (C \to B_1)$, $C \to B_1$. Demak, $H \vdash C \to B_1$.

v) hol uchun $H \vdash C \to C$ ekanligini isbotlash kerak.

Ammo $C \to C$ isbotlanuvchi formuladir. Shuning uchun uni har qanday majmuadan keltirib chiqarish mumkin.

2.Endi istalgan i ($i < k$) chuqurlikdagi har qanday keltirib chiqarish uchun masala to‘g‘ri bo‘lsin deb hisoblaganda, uning k chuqurlikdagi keltirib chiqarish uchun to‘g‘riligini isbot qilamiz.

$B_1, B_2, ..., B_k$ lar H, C majmuaning keltirib chiqarishi bo‘lsin, bu yerda $k > 1$. Shuning uchun ham B_k formulaga nisbatan to‘rt hol yuz berishi mumkin:

a) $B_k \in H$,

b) B_k – isbotlanuvchi formula,

v) B_k formula C ning o‘zidir,

g) B_k formula xulosa qoidasiga asosan keltirib chiqarishdagi ikkita undan oldin ketma-ket keladigan formulalardan hosil qilinadi.

a), b), v) holatlar uchun isbot to‘liq ravishda $k = 1$ holdagi isbotga mos keladi.

Shuning uchun g) holni ko‘ramiz. Bu holda B_k formula B_i va B_j formulalardan hosil qilinib $(i < k,\ j > k)$, B_j formula ko‘rinishni $B_i \to B_k$ oladi va quyidagi tasdiqlar to‘g‘ri bo‘ladi:

$$H \vdash C \to B_i, (14)$$

$$H \vdash C \to (B_i \to B_k). \qquad (15)$$

I_2 aksiomada

$$\int_{x,y,z}^{C,B_i,B_k} (I_2)$$

o‘rniga qo‘yishni bajarib, quyidagi isbotlanuvchi formulaga ega bo‘lamiz:

$$\vdash (C \to (B_i \to B_k)) \to ((C \to B_i) \to (C \to B_k)). \ (16)$$

(15), (14) va (16) lar N dan keltirib chiqariladigan formulalardir. Ularga murakkab xulosa qoidasini qo‘llab, $H \vdash C \to B_k$ ni hosil qilamiz.

Endi umumiy, ya’ni $H, C \vdash A$ bo‘lgan holni ko‘raylik. U vaqtda H, C ning $B_1, B_2, ..., B_{k-1}$, A keltirib chiqarishi mavjud bo‘ladi. Demak, yuqorida isbot qilganimizga asosan $H \vdash C \to A$ tasdiq to‘g‘ridir.

Deduksiya teoremasidan muhim ahamiyatga ega bo‘lgan quyidagi natija kelib chiqadi.

Umumlashgan deduksiya teoremasi: $\dfrac{\{C_1, C_2, ..., C_k\} \vdash A}{\vdash C_1 \to (C_2 (C_3 \to ...(C_k \to A)...))}$.

Isbot. $H_k = \{C_1, C_2, ..., C_k\}$ bo‘lsin. Teorema shartiga asosan $H_k \vdash A$ yoki $H_{k-1}, C_k \vdash A$ to‘g‘riligi, $H_{k-1} = H_{k-2}, C_{k-1}$ bo‘lganligi uchun esa

$$H_{k-2}, C_{k-1} \vdash C_k \to A$$

tasdiqningto‘g‘riligikelibchiqadi. Buifodaganisbatanyanadeduksiyateoremasiniqo‘llab,

$$H_{k-2} \vdash C_{k-1} \to (C_k \to A)$$

nihosil qilamiz. Bu prosedurani k marta takrorlab, ushbu tasdiqqa kelamiz:

$$H_0 = \varnothing \vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to ...(C_k \to A)...)).$$

Ammobo‘shto‘plamdanfaqatginaisbotlanuvchiformulalar keltirib chiqarishmumkin, ya’ni

$$\vdash C_1 \to (C_2 \to (C_3 \to ...(C_k \to A)...)).$$

$k = 1$ xususiyholda

$$\frac{C|-A}{|-C \to A}$$

gaegabo‘lamiz.

Kon’yunksiyani kiritish qoidasi:

$$\frac{H|-A,\ H|-B}{H|-A \wedge B}.$$

Isbot. Berilganiga ko‘ra

$$H|-A, \qquad (17)$$

$$H|-B. \qquad (18)$$

$\{A, B\}$ formulalar majmuasidan $A \wedge B$ formulani keltirib chiqarish mumkinligi, ya’ni

$$\{A, B\} \ |- \ A \wedge B. \qquad (19)$$

ekanligini ko‘rsatgan edik

Keltirib chiqarishning I qoidasiga asosan

$$H, A, B \ |- \ A \wedge B, \qquad (20)$$

$$H, A|-B. \qquad (21)$$

Keltirib chiqarishning II qoidasidan foydalanib, (20) va (21) munosabatlardan

$$H, A \ |- \ A \wedge B \qquad (22)$$

hamda (17) va (22) dan

$H \ |- \ A \wedge B$

larni hosil qilamiz.

Diz’yunksiyani kiritish qoidasi:

$$\frac{H, A|-C;\ H, B|-C}{H, A \vee B|-C}.$$

Isbot. $H, A|-C$; $H, B|-C$ shartlardan deduksiya teoremasiga asosan

$$H|-A \to C, \qquad (23)$$

$$H|-B \to C \qquad (24)$$

formulalar kelib chiqadi.

III aksioma H formulalar majmuasidan isbotlanuvchi formula sifatida keltirib chiqariladi, ya’ni

$$H|-(A \to C) \to ((B \to C) \to (A \vee B \to C)). \qquad (25)$$

(23), (24) va (25) formulalarga murakkab xulosa qoidasini qo‘llab

$$H|-A \vee B \to C \qquad (26)$$

formulani hosil qilamiz.

Endi keltirib chiqarishning IV qoidasini qo‘llab

$$H, A \vee B|-C$$

formulagaegabo‘lamiz.

Deduksiyateoremasibirqatormantiqqonunlariniisbotlashgayordamberadi.

Asoslarni (shartlarni) o‘rinalmashtirish qonuni:

$$|-(x \to (y \to z)) \to (y \to (x \to z)) \qquad (27)$$

Isbot. $H=\{x\to(y\to z),y,x\}$ formulalar majmuasidan $x\to(y\to z),y,x,y\to z,z$ keltirib chiqarish kelib chiqadi. Demak, H dan z formula kelib chiqadi. U holda umumlashgan deduksiya teoremasiga asosan (27) formula isbotlanuvchi ekanligini hosil qilamiz.

Asoslarni oʻrinalmashtirish qonunidan isbotlanuvchi formulalar uchun asoslarni oʻrinalmashtirish qoidasi:

$$\frac{\vdash(x\to(y\to z))}{\vdash(y\to(x\to z))}$$

kelib chiqadi.

Haqiqatan ham, agar

$$\vdash x\to(y\to z) \qquad (28)$$

boʻlsa, u vaqtda (27) va (28) formulalardan xulosa qoidasiga asosan

$\vdash y\to(x\to z)$

formula hosil qilinadi.

Asoslarni qoʻshish qonuni:

$\vdash (x\to(y\to z))\to(x\wedge y\to z)$. (29)

Isbot. $H=\{x\to(y\to z),x\wedge y\}$ formulalar majmuasidan $x\to(y\to z)$, $x\wedge y$, $x\wedge y\to x$, $x\wedge y\to y$, x, y, $y\to z$, z keltirib chiqarish olinadi. Bu esa H dan z formula kelib chiqadi demakdir. Bu oʻz navbatida umumlashgan deduksiya teoremasiga asosan (29) formulaning isbotlanuvchi ekanligini koʻrsatadi.

Asoslarni qoʻshish qonunidan isbotlanuvchi formulalar uchun asoslarni qoʻshish qoidasi:

$$\frac{\vdash(x\to(y\to z))}{\vdash x\wedge y\to z}$$

kelib chiqadi

Haqiqatan ham, agar

$$\vdash x\to(y\to z)\,(30)$$

boʻlsa, u vaqtda (29) va (30) formulalardan xulosa qoidalariga asosan $\vdash x\wedge y\to z$ ekanligini hosil qilamiz.

Asoslarni ajratish qonuni:

$$\vdash (x\wedge y\to z)\to(x\to(y\to z)). \qquad (31)$$

Isbot. $H=\{x,y,x\wedge y\to z\}$ formulalar majmuasidan kelib chiqadigan $x,y,x\wedge y\to z,x\wedge y,z$ keltirib chiqarishni qaraymiz. Bunda H formulalar majmuasidan z formulaning kelib chiqishi koʻrinib turibdi. U holda umumlashgan deduksiya teoremasiga asosan (31) formula isbotlanuvchi ekanligiga ishonch hosil qilamiz.

Asoslarni ajratish qonunidan isbotlanuvchi formulalar uchun asoslarni ajratish qoidasi:

$$\frac{\vdash x\wedge y\to z}{\vdash x\to(y\to z)}$$

hosil boʻladi.

Haqiqatan ham, agar

$$\vdash x\wedge y\to z. \qquad (32)$$

boʻlsa, u vaqtda (31) va (32) formulalardan xulosa qoidasiga asosan $\vdash x\to(y\to z)$ ekanligi kelib chiqadi.

$\vdash x\to(\bar{x}\to y)$.

Isbot. I_1 va IV_1 aksiomalarda quyidagi oʻrniga qoʻ-yishlarni

$$\int_{y}^{\bar{y}}(I_1) \quad \text{va} \quad \int_{x,y}^{\bar{y},x}(IV_1).$$

bajarish natijasida

$\vdash x \to (\bar{y} \to x),$ (33)

$$\vdash (\bar{y} \to x) \to (\bar{x} \to \bar{\bar{y}}) \quad (34)$$

isbotlanuvchi formulalarni hosil qilamiz.

(33) va (34) formulalardan sillogizm qoidasiga asosan

$$\vdash x \to (\bar{x} \to \bar{y})$$

formula kelib chiqadi.

Asoslarni birlashtirish qonunidan foydalanib,

$$\vdash x \wedge \bar{x} \to \bar{\bar{y}}$$

formulani hosil qilamiz.

Ikki karralik inkorni tushirish qoidasidan foydalanib,

$$\vdash x \wedge \bar{x} \to y$$

formulaga ega bo‘lamiz.

Bu yerdan asoslarni ajratish qonunini qo‘llab, isbotlanishi kerak bo‘lgan (31) formulani keltirib chiqaramiz.

$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \overline{x \vee y}.$

Isbot.III_3 aksiomada z ning o‘rniga $\overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}}$ ni qo‘yamiz:

$$\vdash (x \to \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}}) \to ((y \to \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}}) \to (x \vee y \to \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}})). \quad (35)$$

II_1 va II_2 aksiomalardan

$$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \bar{x}, \quad (36)$$

$$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \bar{y} \quad (37)$$

formulalar kelib chiqadi.

(36) va (37) formulalarga kontrpozisiya qoidasini qo‘llab, ushbu formulalarni hosil qilamiz:

$\vdash \bar{\bar{x}} \to \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}},$ (38)

$\vdash \bar{\bar{y}} \to \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}}.$ (39)

Bu formulalarga ikki karrali inkorni tushirish qoidasini qo‘llab, quyidagi formulalarni keltirib chiqaramiz:

$\vdash x \to \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}},$ (40)

$\vdash y \to \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}}.$ (41)

Endi (35), (40) va (41) formulalarga murakkab xulosa qoidasini qo‘llab,

$\vdash x \vee y \to \overline{\bar{\bar{x}} \wedge \bar{\bar{y}}}$ (42)

formulaga ega bo‘lamiz.

Nihoyat, (42) formulaga avval kontrpozisiya qoidasini va so‘ngra ikki martali inkorni tushirish qoidasini qo‘llab,

$\vdash \bar{x} \wedge \bar{y} \to \overline{x \vee y}$

isbotlanishi lozim bo‘lgan formulani hosil qilamiz.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor &Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. Yunusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqil ishlash uchun savollar:

1.Formulalar majmuasidan formulani kelti rib chiqarish qoidasi.
2.Keltirib chiqarish (isbotlash) tushunchasi.
3.Deduksiya teoremasi. Umumlashgan deduksiya teoremasi.
4.Ayrim mantiq qonunlarining isboti.

18-mavzu. Predikat (mantiqiy funksiya) tushunchasi. (2 soat)

Reja:
1.Predikat tushunchasi.
2.Predikatlar ustida amallar.

Mantiq algebrasida mulohazalar faqatgina chin yoki yolg‘on qiymat olishi nuqtai nazaridan qaraladi. Mulohazalarning na strukturasi va hatto na mazmuni qaralmaydi. Ammo fanda va amaliyotda mulohazalarning strukturasi va mazmunidan kelib chiqadigan xulosalardan (natijalardan) foydalaniladi.

Masalan, «Har qanday romb parallelogrammdir; $ABCD$-romb; demak, $ABCD$ - parallelogramm». Asos (shart) va xulosa mulohazalar mantiqining elementar mulohazalari bo‘ladi va ularni bu mantiq nuqtai nazaridan bo‘linmas, bir butun deb va ularning ichki strukturasini hisobga olmasdan qaraladi. Shunday qilib, mantiq algebrasi mantiqning muhim qismi bo‘lishiga qaramasdan, ko‘pgina fikrlarni analiz qilishga qodir (yetarli) emas.

Shuning uchun ham mulohazalar mantiqini kengaytirish masalasi vujudga keldi, ya’ni elementar mulohazalarning ichki strukturasini ham tadqiq eta oladigan mantiqiy sistemani yaratish muammosi paydo bo‘ldi.

Bunday sistema mulohazalar mantiqini o‘zining bir qismi sifatida butunlayiga o‘z ichiga oladigan predikatlar mantiqidir.

Predikatlar mantiqi an’anaviy formal mantiq singari elementar mulohazani **sub’yekt** va **predikat** qismlarga bo‘ladi.

Sub’yekt – bu mulohazada biror narsa haqida nimadir tasdiqlaydi; **predikat** – bu sub’yektni tasdiqlash.

Masalan, «5 - tub son» mulohazasida «5» - sub’yekt, «tub son» - predikat. Bu mulohazada «5» «tub son bo‘lish» xususiyatiga ega ekanligi tasdiqlanadi.

Agar keltirilgan mulohazada ma’lum 5 sonini natural sonlar to‘plamidagi x o‘zgaruvchi bilan almashtirsak, u holda «x - tub son» ko‘rinishidagi mulohaza formasiga (shakliga) ega bo‘lamiz. x o‘zgaruvchining bir xil qiymatlari (masalan, x=13, x=3, x=19) uchun bu forma chin mulohazalar va x o‘zgaruvchining boshqa qiymatlari (masalan, x=10, x=20) uchun bu forma yolg‘on mulohazalar beradi.

Aniqki, bu forma bir x argumentli funksiyani aniqlaydi. Bu funksiyaning aniqlash sohasi natural sonlar to‘plami N va qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ to‘plam bo‘ladi.

1-ta’rif. M to‘plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to‘plamdan qiymat qabul qiluvchi bir argumentli $P(x)$ funksiyaga bir joyli (bir o‘rinli) predikat deb aytiladi.

M to‘plamga $\mathrm{P}(x)$ predikatning aniqlanish sohasi deb aytamiz.

$\mathrm{P}(x)$ predikat chin qiymat qabul qiluvchi hamma $x \in M$ elementlar to‘plamiga $\mathrm{P}(x)$ predikatning **chinlik to‘plami** deb aytiladi, ya’ni $\mathrm{P}(x)$ predikatning chinlik to‘plami - $I_p = \{x : x \in M, P(x) = 1\}$ to‘plamdir.

Masalan, «x-tub son» - $\mathrm{P}(x)$ predikati N natural sonlar to‘plamida aniqlangan va uning I_p **chinlik to‘plami** hamma tub sonlar to‘plamidan iborat. «$\sin x = 0$» - $Q(x)$ predikati R haqiqiy sonlar to‘plamida aniqlangan va uning I_Q chinlik to‘plami $I_Q = \{k\pi, k \in Z\}$. «Parallelogramm diagonallari x bir-biriga perpendikulyardir» - $\Phi(x)$ predikatning aniqlanish sohasi hamma parallelogrammlar to‘plami va chinlik to‘plami hamma romblar to‘plami bo‘ladi.

Bir joyli predikatlarga yuqorida keltirilgan misollar predmetlarning xususiyatlarini ifodalaydi.

2-ta’rif. Agar M to‘plamda aniqlangan $\mathrm{P}(x)$ predikat uchun $I_p = M \, (I_p = \phi)$ bo‘lsa, u aynan chin (aynan yolg‘on) deb aytiladi.

Endi **ko‘p joyli predikat** tushunchasini aniqlaymiz. Ko‘p joyli predikat predmetlar orasidagi munosabatni aniqlaydi.

«Kichik» munosabati ikki predmet orasidagi binar munosabatni ifodalaydi. «$x < y$» (bu yerda $x, y \in Z$) binar munosabat ikki argumentli $\mathrm{P}(x, y)$ funksiyani ifodalaydi. Bu funksiya $Z \times Z$ to‘plamda aniqlangan va qiymatlar sohasi $\{1, 0\}$ to‘plam bo‘ladi.

3-ta’rif. $M = M_1 \times M_2$ to‘plamda aniqlangan va $\{1, 0\}$ to‘plamdan qiymat oluvchi ikki argumentli $\mathrm{P}(x, y)$ funksiyaga **ikki joyli** predikat deb aytiladi.

Masalan, «$x = y$» - $Q(x, y)$ **ikki joyli predikat** $R^2 = R \times R$ to‘plamda aniqlangan; «$x \perp y$» - x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar - $F(x, y)$ **ikki joyli predikat** bir tekislikda yotuvchi to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida aniqlangan.

n - joyli predikat ham xuddi shunday aniqlanadi.

1-misol. Quyida berilgan mulohazalarning qaysi biri predikat bo‘lishini va ularning chinlik to‘plamini aniqlang. Bir joyli predikatlarning aniqlanish sohasi $M = R$ va ikki joyli predikatlar uchun aniqlanish sohasi $M = R \times R$ bo‘lsin:

1) $x + 5 = 1$; 2) $x^2 - 2x + 1 = 0$; 3) $x + 2 < 3x - 4$;

4) $(x + 2) - (3x - 4)$; 5) $x^2 + y^2 > 0$.

Yechim. 1) Berilgan ifoda bir joyli predikat $A(x)$ bo‘ladi va $I_A = \{-4\}$;

2) Ifoda bilan berilgan mulohaza bir joyli predikat $A(x)$ bo‘ladi va $I_A = \{1\}$;

3) Ifoda bilan berilgan mulohaza bir joyli predikat $A(x)$ bo‘ladi va $I_A = (3, +\infty)$

4) Ifoda bilan berilgan mulohaza predikat bo‘lmaydi;

5) Berilgan ifoda ikki joyli predikat $A(x, y)$ bo‘ladi va $I_A = R \times R \setminus \{(0,0)\}$.

2-misol. Quyidagi predikatlarning qaysi birlari aynan chin bo‘lishini aniqlang:

1) $x^2 + y^2 \geq 0$; 2) $x^2 + y^2 > 0$; 3) $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$;

4) $(x + 1)^2 > x - 1$; 5) $x^2 + 1 \geq (x + 1)^2$.

Yechim. Ravshanki, 1), 3) va 4) predikatlar aynan chin bo‘ladilar. 2) predikatda $x = 0$, $y = 0$ qiymatlarida tengsizlik buziladi. 5) predikatda bo‘lsa, x ning hamma musbat qiymatlarida tengsizlik ishorasi buziladi. Demak, 2) va 5) predikatlar aynan chin predikatlar bo‘la olmaydi.

3-misol. $M = M_1 \times M_2 \subset R \times R$ to‘plamda $A(x, y)$ va $B(x, y)$ predikatlar berilgan bo‘lsin. $A(x, y) \leftrightarrow B(x, y)$ predikatning chinlik to‘plamini toping va uni Eyler doira-lari orqali ifodalang.

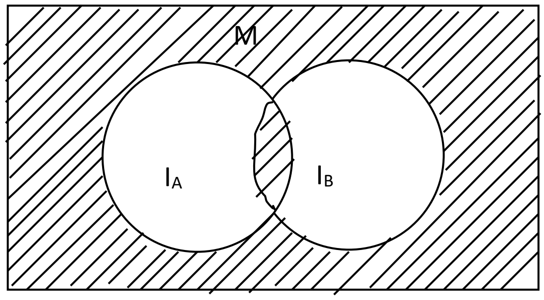
Yechim.

$A(x,y) \leftrightarrow B(x,y) = (A(x,y) \to B(x,y)) \wedge (B(x,y) \to A(x,y))$ bo‘lganligi uchun

$I_{A\leftrightarrow B} = (I_{A\to B}) \bigcap (I_{B\to A}) = ((CI_A \bigcup I_B) \bigcap (CI_B \bigcup I_A)) =$

$(I_A \bigcap I_B) \bigcup (CI_A \bigcap CI_B)$

$I_A \leftrightarrow I_B$ chinlik to‘plami rasmda shtrixlangan soha sifatida ko‘rsatilgan



Predikatlar ham mulohazalar singari faqatgina chin va yolg‘on $\{1, 0\}$ qiymat qabul qilganliklari tufayli ular ustida mulohazalar mantiqidagi hamma mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Bir joyli predikatlar misolida mulohazalar mantiqidagi mantiqiy amallarning predikatlarga tatbiq etilishini ko‘raylik.

M to‘plamda $\mathrm{P}(x)$ va $Q(x)$ predikatlar aniqlangan bo‘lsin.

4-ta’rif. Berilgan M to‘plamda aniqlangan $\mathrm{P}(x)$ va $Q(x)$ predikatlarning kon’yunksiyasi deb, faqat va faqat $x \in M$ ning qiymatlarida $\mathrm{P}(x)$ va $Q(x)$ lar bir vaqtda chin qiymat qabul qilgandagina chin qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u $\mathrm{P}(x) \wedge Q(x)$ kabi belgilanadi.

$\mathrm{P}(x) \wedge Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_p \bigcap I_Q$ to‘plamdan, ya’ni $\mathrm{P}(x)$ va $Q(x)$ predikatlar chinlik sohalarining umumiy qismidan iborat bo‘ladi.

Masalan, $\mathrm{P}(x)$: «x - juft son» va $Q(x)$: «x - toq son» predikatlar uchun «x-juft son va x-toq son»: $\mathrm{P}(x) \wedge Q(x)$ predikatlar kon’yunksiyasi mos keladi va uning chinlik sohasi ϕ - bo‘sh to‘plamdan iborat bo‘ladi.

5-ta’rif. Berilgan M to‘plamda aniqlangan $\mathrm{P}(x)$ va $Q(x)$ predikatlarning diz’yunksiyasi deb, faqat va faqatgina $x \in M$ ning qiymatlarida aniqlangan $\mathrm{P}(x)$ va $Q(x)$ predikatlar yolg‘on qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat qabul qilib, qolgan barcha hollarda chin qiymat qabul qiluvchi yangi predikatga aytiladi va u $\mathrm{P}(x) \vee Q(x)$ kabi belgilanadi.

$\mathrm{P}(x) \vee Q(x)$ predikatning chinlik sohasi $I_p \bigcup I_Q$ to‘plamdan iborat bo‘ladi.

6-ta’rif. Agar hamma $x \in M$ qiymatlarda $\mathrm{P}(x)$ predikat chin qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat va $x \in M$ ning barcha qiymatlarida $\mathrm{P}(x)$ predikat yolg‘on qiymat qabul qilganda chin qiymat qabul qiluvchi predikatga $\mathrm{P}(x)$ predikatning inkori deb aytiladi va u $\overline{P}(x)$ kabi belgilanadi.

Bu ta’rifdan $I_{\overline{p}} = M \setminus I_p = CI_p$ kelib chiqadi.

7-ta’rif. Faqat va faqatgina $x \in M$ lar uchun bir vaqtda $\mathrm{P}(x)$ chin qiymat va $Q(x)$ yolg‘on qiymat qabul qilganda yolg‘on qiymat qabul qilib, qolgan hamma hollarda chin qiymat qabul qiladigan $\mathrm{P}(x) \to Q(x)$ predikatga $\mathrm{P}(x)$ va $Q(x)$ predikatlarning implikatsiyasi deb aytiladi.

Har bir tayinlangan $x \in M$ uchun

$\mathrm{P}(x) \to Q(x) \equiv \overline{P}(x) \vee Q(x)$

tengkuchlilik to‘g‘ri bo‘lganligidan $I_{p\to Q} = I_{\bar{p}} \cup I_Q = CI_p \cup I_Q$ o‘rinlidir.

M to‘plamda aniqlangan $\mathrm{P}(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. Agar $a \in M$ ni $\mathrm{P}(x)$ predikatning x argumenti o‘rniga qo‘ysak, u holda bu predikat $\mathrm{P}(a)$ mulohazaga aylanadi.

Predikatlar mantiqida yana ikkita amal mavjudki, ular bir joyli predikatni mulohazaga aylantiradi.

2.1.Umumiylik kvantori. M to‘plamda aniqlangan $\mathrm{P}(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. Har qanday $x \in M$ uchun $\mathrm{P}(x)$ chin va aks holda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\forall x\ \mathrm{P}(x)$ formada yozamiz. Bu mulohaza endi x ga bog‘liq bo‘lmay qoladi va u quyidagicha o‘qiladi: «Har qanday x uchun $\mathrm{P}(x)$ chin». $\forall$ simvol umumiylik kvantori deb aytiladi. Aytilgan fikrlarni matematik tilda quyidagicha yozish mumkin:

$$\forall x\ \mathrm{P}(x) = \begin{cases} 1, \textit{агар хамма } x \in M \textit{ учун } P(x) = 1 \textit{ булса}, \\ 0, \textit{акс холда.} \end{cases}$$

$\mathrm{P}(x)$ predikatda x ni erkin (ozod) o‘zgaruvchi va $\forall x\ \mathrm{P}(x)$ mulohazada x ni umumiylik kvantori $\forall$ bilan bog‘langan o‘zgaruvchi deb aytiladi.

2.2.Mavjudlik kvantori. $\mathrm{P}(x)$ predikat M to‘plamda aniqlangan bo‘lsin. Hech bo‘lmaganda birorta $x \in M$ uchun $\mathrm{P}(x)$ predikat chin va aks holda yolg‘on qiymat qabul qiluvchi mulohaza ifodasini $\exists x P(x)$ shaklda yozamiz. Bu mulohaza x ga bog‘liq emas va uni quyidagicha o‘qish mumkin: «Shunday x mavjudki, $\mathrm{P}(x) = 1$», ya’ni

$$\exists x\ \mathrm{P}(x) = \begin{cases} 1, \textit{агар бирорта } x \in M \textit{ учун } P(x) = 1 \textit{ булса}, \\ 0, \textit{акс холда.} \end{cases}$$

$\exists$ cimvol mavjudlik kvantori deb ataladi. $\exists x P(x)$ mulohazada x o‘zgaruvchi $\exists$ kvantori bilan bog‘langan bo‘ladi.

Masalan, N natural sonlar to‘plamida $\mathrm{P}(x)$ predikat berilgan bo‘lsin: «x - tub son». Kvantorlardan foydalanib ushbu predikatdan quyidagi mulohazalarni hosil qilish mumkin: $\forall x P(x)$ - «Hamma natural sonlar tub sonlar bo‘ladi»; $\exists x P(x)$ - «Shunday natural son mavjudki, u tub son bo‘ladi». Ravshanki, birinchi mulohaza yolg‘on va ikkinchi mulohaza chin bo‘ladi.

Ma’lumki, $\forall x P(x)$ mulohaza faqat $\mathrm{P}(x)$ aynan chin predikat bo‘lgandagina chin qiymat qabul qiladi. $\exists x P(x)$ mulohaza bo‘lsa, $\mathrm{P}(x)$ aynan yolg‘on predikat bo‘lgandagina yolg‘on qiymat qabul qiladi.

Kvantorli amallar ko‘p joyli predikatlarga ham qo‘llaniladi. Masalan, M to‘plamda ikki joyli $P(x, y)$ predikat berilgan bo‘lsin. Agar $P(x, y)$ predikatga x o‘zgaruvchi bo‘yicha kvantorli amallarni qo‘llasak, u holda ikki joyli $P(x, y)$ predikatga bir joyli $\forall x P(x, y)$ (yoki bir joyli $\exists x P(x, y)$) predikatni mos qilib qo‘yadi.

Bir joyli $\forall x P(x, y)$ ($\exists x P(x, y)$) predikat faqat y o‘zgaruvchiga bog‘liq va x o‘zgaruvchiga bog‘liq emas bo‘ladi. Ularga y bo‘yicha kvantorli amallarni qo‘llaganimizda quyidagi mulohazalarga ega bo‘lamiz:

$\forall y \forall x P(x, y)$, $\exists y \forall x P(x, y)$, $\forall y \exists x P(x, y)$, $\exists y \exists x P(x, y)$.

Masalan, to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida aniqlangan $P(x, y)$: «$x \perp y$» predikatni ko‘raylik. Agar $P(x, y)$ predikatga nisbatan kvantorli amallarni tadbiq etsak, u holda quyidagi sakkizta mulohazaga ega bo‘lamiz:

1. $\forall x \forall y P(x, y)$ - «Har qanday x to‘g‘ri chiziq har qanday y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

2. $\exists y \forall x P(x, y)$ - «Shunday y to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday x to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyardir».

3. $\forall y \exists x P(x,y)$ - «Har qanday y to‘g‘ri chiziq uchun shunday x to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chizig‘i y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

4. $\exists y \exists x P(x,y)$ - «Shunday y to‘g‘ri chiziq va shunday x to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

5. $\forall y \forall x P(x,y)$ - «Har qanday y to‘g‘ri chiziq har qanday x to‘g‘ri chiziqqga perpendikulyar».

6. $\forall x \exists y P(x,y)$ - «Har qanday x to‘g‘ri chiziq uchun shunday y to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqga perpendikulyar».

7. $\exists x \exists y P(x,y)$ - «Shunday x to‘g‘ri chiziq va shunday y to‘g‘ri chiziq mavjudki, x to‘g‘ri chiziq y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

8. $\exists x \forall y P(x,y)$ - «Shunday x to‘g‘ri chiziq mavjudki, u har qanday y to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar».

Bu misollardan ko‘rinib turibdiki, umumiy holda kvantorlar tartibi o‘zgarishi bilan mulohazaning mazmuni va demak, uning mantiqiy qiymati ham o‘zgaradi.

Chekli son elementlari bo‘lgan $M = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$ to‘plamda aniqlangan $P(x)$ predikat berilgan bo‘lsin. Agar $P(x)$ predikat aynan chin bo‘lsa, u vaqtda $P(a_1), P(a_2), ..., P(a_n)$ mulohazalar ham chin bo‘ladi. Shu holda $\forall x P(x)$ mulohaza va $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$ kon’yunksiya ham chin bo‘ladilar.

Agar hech bo‘lmaganda birorta $a_k \in M$ element uchun $P(a_k)$ yolg‘on bo‘lsa, u holda $\forall x P(x)$ mulohaza va $P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$ kon’yunksiya ham yolg‘on bo‘ladi.

Demak,

$$\forall x P(x) = P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge ... \wedge P(a_n)$$

tengkuchli ifoda to‘g‘ri bo‘ladi.

Yuqoridagidek fikr yuritish yo‘li bilan

$$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee ... \vee P(a_n)$$

tengkuchli ifodaning mavjudligini ko‘rsatish mumkin.

Bu yerdan kvantorli amallarni cheksiz sohalarda kon’yunksiya va diz’yunksiya amallarining umumlashmasi sifatida qarash mumkinligi kelib chiqadi.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1.Predikatlar mantiqi.

2.Predikatlar magtiqining chinlik to‘plami.

3.Predikatlar ustidagi amallar.

4. Bir joyli va ko‘p joyli predikatlar.

19-Mavzu. Elementar formulalar. Kvantorlar (4-soat)

Reja:

1. Kvantorlar
2. Simvollar

3.Formula ta’rifi.

Predikatlar mantiqida quyidagi simvollardan foydalanamiz:

1. $\rho, q, r...$ simvollar – 1 (chin) va 0 (yolg‘on) qiymatlar qabul qiluvchi o‘zgaruvchi mulohazalar.

2. $x, y, z,...$ - qandaydir M to‘plamdan qiymat oluvchi predmet o‘zgaruvchilar; $x_0, y_0, z_0,...$ - predmet konstantalar, ya’ni predmet o‘zgaruvchilarning qiymatlari.

3. $P(\cdot),\ F(\cdot)$ - bir joyli o‘zgaruvchi predikatlar; $Q(\cdot,\cdot,...,\cdot)$, $R(\cdot,\cdot,...,\cdot)$ - n joyli o‘zgaruvchi predikatlar.

4. $P^0(\cdot),\quad Q^0(\cdot,\cdot,...,\cdot)$ - o‘zgarmas predikatlar simvoli.

5. $\wedge, \vee, -, \rightarrow$ - mantiqiy amallar simvollari.

6. $\forall x,\ \exists x$ - kvantorli amallar simvollari.

7.(,) (qavs, vergul) – qo‘shimcha simvollar.

1.Har qanday o‘zgaruvchi yoki o‘zgarmas mulohaza formula (elementar) bo‘ladi.

2.Agar $F(\cdot,\cdot,...,\cdot)$ - n-joyli o‘zgaruvchi predikat yoki o‘zgarmas predikat va $x_1, x_2,..., x_n$ - predmet o‘zgaruvchilar yoki predmet konstantalar bo‘lsa, u holda $F(x_1, x_2,..., x_n)$ formula bo‘ladi. Bunday formulaga elementar formula deb aytamiz. Bu formulada predmet o‘zgaruvchilar erkin bo‘ladi, ya’ni kvantorlar bilan bog‘langan bo‘lmaydi.

3.Agar A va B shunday formulalarki, birorta predmet o‘zgaruvchi birida erkin va ikkinchisida bog‘langan o‘zgaruvchi bo‘lmasa, u holda $A \vee B$, $A \wedge B$, $A \rightarrow B$ lar ham formula bo‘ladi. Bu formulalarda dastlabki formulalarda erkin bo‘lgan o‘zgaruvchilar erkin va bog‘langan bo‘lgan o‘zgaruvchilar bog‘langan o‘zgaruvchilar bo‘ladi.

4.Agar A formula bo‘lsa, u holda $\overline{A}$ ham formula bo‘ladi. A formuladan $\overline{A}$ formulaga o‘tishda o‘zgaruvchilarning xarakteri o‘zgarmaydi.

5.Agar $A(x)$ formula bo‘lsa va uning ifodasiga x predmet o‘zgaruvchi erkin holda kirsa, u holda $\forall x A(x)$ va $\exists x A(x)$ mulohazalar formula bo‘ladi va x predmet o‘zgaruvchi ularga bog‘langan holda kiradi.

1-5 bandlarda formulalar deb aytilgan mulohazalardan farq qiluvchi har qanday mulohaza formula bo‘lmaydi.

Masalan, agar $P(x)$ va $Q(x, y)$ - bir joyli va ikki joyli predikatlar, q, r - o‘zgaruvchi mulohazalar bo‘lsa, u holda quyidagi mulohazalar formulalar bo‘ladi:

q, $P(x)$, $P(x) \wedge Q(x^0, y)$, $\forall x P(x) \rightarrow \exists x Q(x, y)$, $(\overline{Q(x, y)} \vee q) \rightarrow r$.

$\forall x Q(x, y) \rightarrow P(x)$ mulohaza formula bo‘laolmaydi, chunki ta’rifning 3-banddagi shart buzilgan: x predmet o‘zgaruvchi $\forall x Q(x, y)$ formulaga bog‘langan holda kirgan va $P(x)$ga esa erkin holda kirgan.

Predikatlar mantiqi formulasining ta’rifidan ko‘rinib turibdiki, mulohazalar algebrasining har qanday formulasi predikatlar mantiqining ham formulasi bo‘ladi.

1-misol. Quyidagi ifodalarning qaysi biri predikatlar mantiqining formulasi bo‘ladi? Har bir formuladagi bog‘langan va erkin o‘zgaruvchilarni aniqlang.

1) $\overline{\exists x \forall z (P(x, y) \rightarrow P(y, z))}$;

2) $(p \rightarrow q) \wedge (\overline{r} \vee \overline{p})$;

3) $P(x) \wedge \forall x Q(x)$;

4) $\forall x\big(P(x) \rightarrow Q(x)\ \big) \leftrightarrow \big(\exists x P(x) \rightarrow \forall x R(x, y)\big)$;

5) $\big(P(x) \leftrightarrow Q(x) \vee \exists y\big(\forall y R(y)\big)$;

6) $\exists x \forall z\big(P(x,y) \to P(y,z)\big)$.

Yechim. 1), 2), 4), 6) ifodalar formula bo‘ladilar, chunki ular predikatlar mantiqi formulasining ta’rifi asosida hosil etilgan. 3) va 5) ifodalar formula emas. 3) ifodada $\wedge$ amali $P(x)$ va $\forall x Q(x)$ formulalarga nisbatan qo‘llanilgan. $P(x)$ da x predmet o‘zgaruvchi erkin va $\forall x Q(x)$ da bo‘lsa umumiylik kvantori bilan bog‘langan. Bu holat formula ta’rifining 3-bandiga ziddir. Shuning uchun 3) ifoda formula bo‘laolmaydi. 5) ifodada bo‘lsa, mavjudlik kvantori $\exists y$ umumiylik kvantori taqalgan $\forall y R(y)$ formulaga (bu yerda y o‘zgaruvchi bog‘langan) tarqalgan. Bu ham ta’rifga ziddir. 1) formulada u erkin o‘zgaruvchi, x va z o‘zgaruvchilar bo‘lsa bog‘langandirlar. 2) formulada predmet o‘zgaruvchilar mavjud emas. 4) formulada x bog‘langan o‘zgaruvchi, y esa erkin o‘zgaruvchidir.

Endi predikatlar mantiqi formulasining qiymati tushunchasini aniqlaylik.

Qachonki predikatlar mantiqi formulasining ifodasiga kiruvchi predikatlarning aniqlanish sohasi M to‘plam berilgan bo‘lsa, shundagina bu formulaning mantiqiy qiymati haqida so‘z yuritish mumkin. Predikatlar mantiqi formulasining mantiqiy qiymati uch xil o‘zgaruvchilar: 1) formulaga kiruvchi o‘zgaruvchi mulohazalarning; 2) M to‘plamdagi erkin predmet o‘zgaruvchilarning; 3) predikat o‘zgaruvchilarning qiymatlariga bog‘liq bo‘ladi.

Uch xil o‘zgaruvchilardan har birining ma’lum qiymatlarida predikatlar mantiqining formulasi chin yoki yolg‘on qiymat qabul qiluvchi mulohazaga aylanadi.

Misol sifatida quyidagi formulani ko‘raylik:

$\exists y \forall z (P(x,y) \to P(y,z))$.   (1)

(1) formulada ikki joyli predikat $P(x,y)$ $M \times M$ to‘plamda aniqlangan, bu yerda $M = \{0, 1, 2, ..., n, ...\}$.

(1) formula ifodasiga o‘zgaruvchi predikat $P(x,y)$, va predmet o‘zgaruvchilar x, y, z lar kirgan. Bu yerda y va z lar kvantorlar bilan bog‘langan o‘zgaruvchilar, x - erkin o‘zgaruvchi.

$P(x,y)$ predikatning ma’lum qiymati sifatida tayinlangan $P^0(x,y)$:«$x < y$» predikatni olamiz, erkin o‘zgaruvchi x ga $x^0 = 5 \in M$ qiymat beramiz. U vaqtda y ning $x^0 = 5$ dan kichik qiymatlari uchun $P^0(x^0, y)$ predikat yolg‘on qiymat qabul qiladi, $P(x,y) \to P(y,z)$ implikatsiya esa z ning hamma $z \in M$ qiymatlari uchun chin bo‘ladi, ya’ni $\exists y \forall z$ $(P^0(x,y) \to P^0(y,z))$ mulohaza «chin» qiymatga ega bo‘ladi.

2-misol. Natural sonlar to‘plami N da $P(x), Q(x)$ va $R(x)$ predikatlar berilgan bo‘lsin.

$\forall x\big(P(x) \wedge Q(x) \to R(x)\big)$ formulaning qiymati quyidagi hollarda topilsin:

1) $P(x)$: «x soni 3 ga bo‘linadi», $Q(x)$: «x soni 4 ga bo‘linadi», $R(x)$: «x soni 2 ga bo‘linadi» ;

2) $P(x)$: «x soni 3 ga bo‘linadi», $Q(x)$: «x soni 4 ga bo‘linadi”, $R(x)$: «x soni 5 ga bo‘linadi».

Yechim. Ikki holda ham $P(x) \wedge Q(x)$ formula x soni 12 ga bo‘linadi degan tasdiqni ifodalaydi. O‘z navbatida hamma x lar uchun x soni 12 ga bo‘linsa, u holda x soni 2 ga ham bo‘linadi. Demak, 1) holda formulaning qiymati chin bo‘ladi.

x sonining 12 ga bo‘linishidan ayrim x lar uchun x ning 5 ga bo‘linishi, bundan esa 2 - holda formulaning yolg‘on ekanligi kelib chiqadi.

3-misol. $P(x,y)$ predikat $M = N \times N$ to‘plamda aniqlangan va $P^0(x,y)$: «x soni y sonidan kichik» bo‘lganda $\forall x \exists y\ P(x,y) \to \exists x \forall y\ P(x,y)$ formulaning mantiqiy qiymatini toping.

Yechim. $P(x,y)$ predikatning ko‘rsatilgan qiymati uchun $\forall x\exists y\ P(x,y)$: «har qanday x natural son uchun shunday y natural son topiladiki, u x dan katta bo‘ladi” degan chin mulohazani bildiradi. Shu vaqtning o‘zida $\exists x\forall y\ P(x,y)$: «Shunday x natural son mavjudki, u har qanday natural son y dan kichik bo‘ladi” degan tasdiqni bildiradi. Bu tasdiq yolg‘ondir. Demak, berilgan formulaning mantiqiy qiymati yolg‘on bo‘ladi.

Predikatlar mantiqida ham tengkuchli formulalar tushunchasi mavjud.

1-ta’rif. Predikatlar mantiqining ikkita A va B formulalari o‘z tarkibiga kiruvchi M sohaga oid hamma o‘zgaruvchilarning qiymatlarida bir xil mantiqiy qiymat qabul qilsalar, ular M sohada tengkuchli formulalar deb aytiladi.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1.Predikatlar mantiqi formulalari.

2.Aynan chin formulalar.

3.Teng kuchli formulalar.

20- mavzu. Asosiy tengkuchli formulalar.(2 soat)

Reja.

1. **Predikatlar mantiqida asosiy teng kuchli formulalar.**
2. **Mavzuga oid misollar.**

1-ta’rif. Agar ixtiyoriy sohada A va B formulalar tengkuchli bo‘lsalar, u holda ular **tengkuchli formulalar** deb aytiladi va $A \equiv B$ ko‘rinishda yoziladi.

Agar mulohazalar algebrasidagi hamma tengkuchli formulalar ifodasidagi o‘zgaruvchi mulohazalar o‘rniga predikatlar mantiqidagi formulalar qo‘yilsa, u holda ular predikatlar mantiqining tengkuchli formulalariga aylanadi. Ammo, predikatlar mantiqi ham o‘ziga xos asosiy tengkuchli formulalarga ega. Bu tengkuchli formulalarning asosiylarini ko‘rib o‘taylik. $A(x)$ va $B(x)$ - o‘zgaruvchi predikatlar va C - o‘zgaruvchi mulohaza bo‘lsin. U holda predikatlar mantiqida quyidagi asosiy tengkuchli formulalar mavjud:

1. $\overline{\forall x A(x)} \equiv \exists x \overline{A(x)}$,
2. $\overline{\exists x A(x)} \equiv \forall x \overline{A(x)}$,
3. $\forall x A(x) \equiv \overline{\exists x \overline{A(x)}}$,
4. $\exists x A(x) \equiv \overline{\forall x \overline{A(x)}}$,
5. $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[A(x) \wedge B(x)]$,
6. $C \wedge \forall x B(x) \equiv \forall x[C \wedge B(x)]$,
7. $C \vee \forall x B(x) \equiv \forall x[C \vee B(x)]$,
8. $C \to \forall x B(x) \equiv \forall x[C \to B(x)]$,
9. $\forall x[B(x) \to C] \equiv \exists x B(x) \to C$,

10. $\exists x[A(x) \vee B(x)] \equiv \exists x A(x) \vee \exists x B(x)$,

11. $\exists x[C \vee B(x)] \equiv C \vee \exists x B(x)$,

12. $\exists x[C \wedge B(x)] \equiv C \wedge \exists x B(x)$,

13. $\exists x A(x) \wedge \exists y B(y) \equiv \exists x \exists y[A(x) \wedge B(y)]$,

14. $\exists x[C \to B(x)] \equiv C \to \exists x B(x)$,

15. $\exists x[B(x) \to C] \equiv \forall x B(x) \to C$,

16. $\forall x A(x) \equiv \forall y A(y)$,

17. $\exists x A(x) \equiv \exists y A(y)$.

Bu tengkuchli formulalarning ayrimlarini isbot qilaylik.

Birinchi tengkuchli formula quyidagi oddiy tasdiqni (dalilni) bildiradi: agar hamma x lar uchun $A(x)$ chin bo‘lmasa, u holda shunday x topiladiki, $\overline{A(x)}$ chin bo‘ladi.

2-tengkuchlilik: agar $A(x)$ chin bo‘ladigan x mavjud bo‘lmasa, u holda hamma x lar uchun $\overline{A(x)}$ chin bo‘ladi degan mulohazani bildiradi.

3 va 4 – tengkuchliliklar 1 va 2 – tengkuchliliklarning ikkala tarafidan mos ravishda inkor olib va ikki marta inkor qonunini foydalanish natijasida hosil bo‘ladi.

5-tengkuchlilikni isbot qilaylik. Agar $A(x)$ va $B(x)$ predikatlar bir vaqtda aynan chin bo‘lsalar, u holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘ladi va demak,

$\forall x A(x)$, $\forall x B(x)$, $\forall x[A(x) \wedge B(x)]$

mulohazalar ham chin qiymat qabul qiladilar.

Shunday qilib, bu holda 5-tengkuchlilikning ikkala tarafi ham «chin» qiymat qabul qiladilar.

Endi hech bo‘lmaganda ikki predikatdan birortasi, masalan, $A(x)$ aynan chin bo‘lmasin. U holda $A(x) \wedge B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘lmaydi va demak, $\forall x A(x)$, $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$, $\forall x[A(x) \wedge B(x)]$ mulohazalar yolg‘on qiymat qabul qiladilar, ya’ni bu holda ham 5-tengkuchlilikning ikki tarafi bir xil (yolg‘on) qiymat qabul qiladilar. Demak, 5-tengkuchlilikning to‘g‘ri ekanligi isbotlandi.

Endi 8-tengkuchlilikning to‘g‘ri ekanligini isbot qilaylik. O‘zgaruvchi mulohaza C **«yolg‘on»** qiymat qabul qilsin. U holda $C \to B(x)$ predikat aynan chin bo‘ladi va $C \to \forall x B(x)$, $\forall x[C \to B(x)]$ mulohazalar chin bo‘ladilar. Demak, bu holda 8-tengkuchlilikning ikkala tarafi ham bir xil (chin) qiymat qabul qiladilar.

Endi o‘zgaruvchi mulohaza C **«chin»** qiymat qabul qilsin. Agar bu holda o‘zgaruvchi predikat $B(x)$ aynan chin bo‘lsa, u vaqtda $C \to B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘ladi va demak,

$\forall x B(x)$, $C \to \forall x B(x)$, $\forall x[C \to B(x)]$

mulohazalar ham chin qiymat qabul qiladilar, ya’ni bu holda 8-tengkuchliliklarning ikkala tarafi ham bir xil (chin) qiymat qabul qiladilar.

Agar $B(x)$ predikat aynan chin bo‘lmasa, u holda $C \to B(x)$ predikat ham aynan chin bo‘lmaydi va demak,

$\forall x B(x)$, $C \to \forall x B(x)$, $\forall x[C \to B(x)]$

mulohazalar yolg‘on qiymat qabul qiladilar.

Shunday qilib, bu holda ham 8-tengkuchliliklarning ikkala tarafi bir xil (yolg‘on) qiymat qabul qiladilar. Demak, 8-tengkuchlilik o‘rinlidir.

Shuni ta’kidlab o‘tamizki, $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ formula $\forall x A(x) \vee \forall x B(x)$ formulaga va $\exists x[A(x) \wedge B(x)]$ formula $\exists x A(x) \wedge \exists x B(x)$ formulaga tengkuchli emaslar.

Ammo, quyidagi tengkuchliliklar o‘rinlidir:

$\forall x A(x) \vee \forall x B(x) \equiv \forall x A(x) \vee \forall y B(y) \equiv \forall x[A(x) \vee \forall y B(y)] \equiv \forall x \forall y[A(x) \vee B(y)]$,

$\exists xA(x) \wedge \exists xB(x) \equiv \exists xA(x) \wedge \exists yB(y) \equiv \exists x[A(x) \wedge \exists yB(y)] \equiv \exists x\exists y[A(x) \wedge B(y)]$.

Bu tengkuchliliklardan birinchisini isbot qilaylik. Buning uchun $\forall x$ kvantor $\vee$ diz’yunksiya amaliga nisbatan distributiv emasligini misolda ko‘rsataylik.

$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A(x)$:«$(x-1)(x-2)=0$»,

$B(x)$: «$(x-3)(x-4)(x-5)=0$»

bo‘lsin.

Aniqki, M sohada $\forall xA(x)$ va $\forall xB(x)$ mulohazalar yolg‘on va demak, bu tengkuchlilikning chap tomonidagi $\forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ mulohaza ham yolg‘ondir. Agar $\forall x$ kvantor $\vee$ ga nisbatan distributiv, ya’ni

$\forall x[A(x) \vee B(x)] = \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$

bo‘lganda edi, $\forall x[A(x) \vee B(x)]$ chin mulohaza bo‘lganligi uchun qarama-qarshilik hosil bo‘lardi.

Demak, $\forall x[A(x) \vee B(x)] \neq \forall xA(x) \vee \forall xB(x)$ bo‘ladi.

Endi bu tengkuchliliklarning o‘ng tomoni har doim chap tomonidagi mulohaza bilan bir xil qiymat qabul qilishini ko‘rsatamiz.

Agar $\forall xA(x) \equiv 1$ yoki $\forall x\, B(x) \equiv 1$ bo‘lsa, u holda bu tengkuchlilik to‘g‘ri ekanligi aniq, chunki bu holda tengkuchlilikning ikkala tomoni ham bir vaqtda chin qiymat qabul qiladilar. Bu holda faqat $\forall xB(x) \equiv \forall yB(y)$ ekanligini ko‘rsatish kifoya. Ammo bu oxirgi tengkuchlilik tabiiydir, chunki x predmet o‘zgaruvchi ham, y predmet o‘zgaruvchi ham M sohaning har bir elementini qiymat sifatida qabul qiladi.

Endi $\forall xA(x) \equiv 0$ va $\forall x\, B(x) \equiv 0$ bo‘lsin. U holda tengkuchlilikning chap tarafi 0 (yolg‘on) qiymat qabul qiladi. O‘ng tomonida $\forall x$ kvantorning ta’sir sohasi $A(x) \vee B(y)$ formula bo‘lsada, $B(y)$ predikatda x predmet o‘zgaruvchi qatnashmaganligi sababli, $\forall x$ ning ta’siri faqat $A(x)$ ga tarqaladi. Xuddi shunday, $\forall y$ kvantor faqat $B(y)$ ga ta’sir etadi. Demak, $\forall x\forall y[A(x) \vee B(y)]$ formula ham yolg‘on qiymatga ega bo‘ladi.

Keltirilgan ikkinchi tengkuchlilikni ham xuddi shunday isbot qilish mumkin va buni o‘quvchiga havola etamiz.

Misol. $\exists x\forall y\,(A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall y\exists x\,(A(x) \wedge B(y))$ tengkuchlilik o‘rinli ekanligini ko‘rsating.

Yechim. $\exists x\forall y\,(A(x) \wedge B(y)) \equiv \exists x(A(x) \wedge \forall yB(y)) \equiv \exists xA(x) \wedge \forall yB(y)$,

$\forall y\exists x(A(x) \wedge B(y)) \equiv \forall y(\exists xA(x) \wedge B(y)) = \exists xA(x) \wedge \forall yBy$.

Demak, keltirilgan tengkuchlilik o‘rinli ekan.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1.Predikatlar mantiqi formulalari.

2.Aynan chin formulalar.

3.Teng kuchli formulalar.

21-Mavzu.Formulalarning normal shakli.(2soat)

Reja:

1.Formulaning normal shakli.
2.Formulaning turlari.
3. Mantiq qonuni.

1-ta’rif. Agar predikatlar mantiqi formulasi ifodasida faqat inkor, kon’yunksiya, diz’yunksiya ($-$, $\wedge$, $\vee$) amallari va kvantorli amallar ($\forall$, $\exists$) qatnashib, inkor amali elementar formulalarga (predmet o‘zgaruvchilar va o‘zgaruvchi predikatlarga) tegishli bo‘lsa, bunday formula **deyarli normal shaklda** deyiladi.

Ravshanki, predikatlar mantiqi va mulohazalar algebrasidagi asosiy tengkuchliliklardan foydalanib, predikatlar mantiqining har bir formulasini **deyarli normal shaklga** keltirish mumkin. Masalan,

$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z)$

formulani **deyarli normal shaklga** keltiraylik.

$$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv (\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv \overline{(\overline{\exists xP(x)} \vee \forall yQ(y)} \vee R(z) =$$

$$= \overline{\overline{\exists xP(x)}} \wedge \overline{\forall yQ(y)} \vee R(z) \equiv \exists xP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Demak,

$$(\exists xP(x) \to \forall yQ(y)) \to R(z) \equiv IxP(x) \wedge \exists y\overline{Q(y)} \vee R(z).$$

Predikatlar mantiqining **deyarli normal shakldagi** formulalari orasida **normal shakldagi formulalari** muhim rol o‘ynaydi.

Bu formulalarda kvantorli amallar yoki butunlay qatnashmaydi, yoki ular mulohazalar algebrasining hamma amallaridan keyin bajariladi, ya’ni normal shakldagi formula quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi:

$$(\sigma x_1)\ (\sigma x_2)\ .....\ (\sigma x_n)\ A\ (x_1, x_2, ..., x_m), \quad n \le m,$$

bunda (σx_i) simvoli o‘rniga $\forall x_i$ yoki $\exists x_i$ kvantorlarning biri tushuniladi va A formula ifodasida kvantorlar bo‘lmaydi.

1-teorema. Predikatlar mantiqining har qanday formulasini normal shaklga keltirish mumkin.

Isbot. Formula **deyarli normal shaklga** keltirilgan deb hisoblaymiz va uni normal shaklga keltirish mumkinligini ko‘rsatamiz.

Agar bu formula elementar formula bo‘lsa, u holda uning ifodasida kvantorlar bo‘lmaydi va, demak, u normal shakl ko‘rinishida bo‘ladi.

Endi faraz qilamizki, teorema ko‘pi bilan k amalni qamragan formula uchun to‘g‘ri bo‘lsin va uni shu faraz asosida $k+1$ amalni qamragan formula uchun isbot qilamiz.

A $k+1$ amalni o‘z ichiga olgan formula va uning ko‘rinishi $\sigma xL(x)$ shaklda bo‘lsin. Bu yerda σx kvantorlarning birini ifodalaydi.

$L(x)$ formula k amalni o‘z ichiga olganligi tufayli uni normal shaklga keltirilgan deb hisoblaymiz. U vaqtda $\sigma xL(x)$ formula ta’rifga asosan normal shaklda bo‘ladi.

A formula $\overline{L}$ ko‘rinishda bo‘lsin, bunda L formula normal shaklga keltirilgan va k amalni o‘z ichiga olgan deb hisoblanadi. U holda

$$\overline{\forall xA(x)} \equiv \exists x\overline{A(x)} \quad \text{va} \quad \overline{\exists xA(x)} = \forall x\overline{A(x)}$$

tengkuchliliklardan foydalanib, inkor amalini predikatlar ustiga tushiramiz. Natijada A formulani normal shaklga keltirgan bo‘lamiz.

Endi A formula $L_1 \vee L_2$ ko‘rinishda bo‘lsin. Bu yerda L_1 va L_2 lar normal shaklga keltirilgan formulalar deb qaraladi.

L_2 formulada bog'langan predmet o'zgaruvchilarni shunday qayta nomlaymizki, L_1 va L_2 formulalardagi hamma bog'langan predmet o'zgaruvchilar har xil bo'lsin. U vaqtda L_1 va L_2 formulalarni quyidagi ko'rinishda yozish mumkin:

$L_1 \equiv (\sigma x_1)\ (\sigma x_2)\ .....\ (\sigma x_m)\ \alpha_1\ (x_1, x_2,..., x_n)\,,\quad m \le n\,,$

$L_2 \equiv (\sigma y_1)\ (\sigma y_2)\ .....\ (\sigma y_p)\ \alpha_2\ (y_1, y_2,..., y_q)\,,\quad p \le q\,.$

$C \vee \forall x B(x) = \forall x[C \vee B(x)]$ va $\overline{\forall x A(x)} = \exists x \overline{A(x)}$

tengkuchliliklardan foydalanib, L_2 formulani $(\sigma x_1), (\sigma x_2), ..., (\sigma x_m)$ kvantor amallari ostiga kiritamiz, ya'ni A formulani ushbu ko'rinishga keltiramiz:

$A \equiv\ (\sigma x_1)\ (\sigma x_2)\ .....\ (\sigma x_m)\ (\alpha_1\ (x_1, x_2,..., x_n) \vee\ (\sigma y_1)\ (\sigma y_2)\ .....\ (\sigma y_p)\ \alpha_2\ (y_1, y_2,..., y_q))\,.$

So'ngra $\alpha_1\ (x_1, x_2,..., x_n)$ formulani

$(\sigma y_1), (\sigma y_2)\ ,.....,(\sigma y_p)$

kvantor amallari ostiga kiritamiz. Natijada A formulaning normal shaklini hosil qilamiz:

$A \equiv\ (\sigma x_1)\ (\sigma x_2)\ ...\ (\sigma x_m)\ (\sigma y_1)\ (\sigma y_2)\ ...\ (\sigma y_p)\ (\alpha_1\ (x_1, x_2,..., x_n) \vee\ \alpha_2\ (y_1, y_2,..., y_q))\,.$

$L_1 \wedge L_2$ ko'rinishidagi A formulani normal shaklga keltirishning isboti xuddi yuqorida kabi bo'ladi.

Agar formulani normal shaklga keltirish jarayonida $\exists x A(x) \vee \exists x B(x)$ yoki $\forall x A(x) \wedge \forall x B(x)$ ko'rinishdagi ifodalarni ko'rishga to'g'ri kelsa, u holda

$\forall x A(x) \wedge \forall x B(x) = \forall x\ [A(x) \wedge B(x)]$ va $\exists x A(x) \vee \exists x B(x) = \exists x[A(x) \vee B(x)]$

tengkuchliliklardan foydalanish kerak bo'ladi.

1-misol. $A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \overline{\exists x \forall y Q(x, y)}$ formulani normal shaklga keltirish talab etilsin.

A formulada tengkuchli almashtirishlarni o'tkazib, uni normal shaklga keltiramiz:

$A \equiv \forall x \exists y P(x, y) \wedge \forall x \exists y \overline{Q(x, y)}\ \equiv \forall x(\exists y P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)}) \equiv$

$\equiv \forall x \exists y(P(x, y) \wedge \exists z \overline{Q(x, z)})\ \equiv \forall x \exists y \exists z(P(x, y) \wedge \overline{Q(x, y)})\,.$

2-ta'rif. Agar A formula ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid o'zgaruvchilarning shunday qiymatlari mavjud bo'lib, bu qiymatlarda A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda predikatlar mantiqining A formulasi M sohada **bajariluvchi formula** deb aytiladi.

3-ta'rif. Agar shunday soha mavjud bo'lib, unda A formula bajariladigan bo'lsa, u vaqtda A **bajariluvchi formula** deb aytiladi.

Demak, agar biror formula bajariluvchi bo'lsa, bu hali uning istalgan sohada bajariluvchanligini bildirmaydi.

4-ta'rif. Agar A ning ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid **hamma o'zgaruvchilarning** qiymatlarida A formula chin qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada **aynan chin** formula deb aytiladi.

5-ta'rif. Agar A formula har qanday sohada aynan chin bo'lsa, u holda A ga **umumqiymatliformula** deb aytiladi.

6-ta'rif. Agar A ifodasiga kiruvchi va M sohaga oid hamma o'zgaruvchilarning qiymatlarida A formula yolg'on qiymat qabul qilsa, u holda A formula M sohada **aynan yolg'on formula** deb aytiladi.

Keltirilgan ta'riflardan ushbu tasdiqlar kelib chiqadi:

1. Agar A umumqiymatli formula bo'lsa, u holda u har qanday sohada ham bajariluvchi formula bo'ladi.

2. Agar A M sohada aynan chin formula bo'lsa, u holda u shu sohada bajariluvchi formula bo'ladi.

3. Agar M sohada A aynan yolg'on formula bo'lsa, u holda u bu sohada bajarilmaydigan formula bo'ladi.

4. Agar A bajarilmaydigan formula bo‘lsa, u holda u har qanday sohada ham aynan yolg‘on formula bo‘ladi.

Demak, predikatlar mantiqi formulalarini ikki sinfga ajratish mumkin: **bajariluvchi** sinflar va **bajarilmas** (bajarilmaydigan) sinflar formulalari.

7-ta’rif. Umumqiymatli formulaga mantiq qonuni deb aytiladi.

Endi bir nechta misollar keltiraylik:

1-misol: $\forall x \exists y P(x,y)$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x,y)$: «$x<y$» predikat $M = E \times E$ sohada aniqlangan $(E=\{0,1,2,...,n..\})$ bo‘lsa, u holda $\forall x \exists y P(x,y)$ M sohada aynan chin formula bo‘ladi, demak, bu sohada bajariluvchi formuladir. Ammo, agar $E_1 = \{0,1,2,...,k\}$ uchun «$x<y$» predikat chekli $M_1 = E_1 \times E_1$ sohada, aniqlangan bo‘lsa, u holda $\forall x \exists y P(x,y)$ M_1 sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi va, demak, M_1 sohada bajariluvchimasdir. Ravshanki, $\forall x \exists y P(x,y)$ umumqiymatli formula bo‘lmaydi.

2-misol. $\exists x \exists y [P(x) \wedge \overline{P(y)}]$ formula bajariluvchidir. Haqiqatan ham, agar $P(x)$: «x - juft son» predikat $E=\{0,1,2,...,n..\}$ uchun $M = E \times E$ sohada, aniqlangan bo‘lsa, u holda bu formula M sohada aynan chin bo‘ladi, demak, M sohada bajariluvchi formuladir.

Ammo, agar $P(x)$: «x - juft son» predikat $E_1 = \{2,4,6,8,...\}$ uchun $M_1 = E_1 \times E_1$ sohada aniqlangan bo‘lsa, u holda $\exists x \exists y [P(x) \wedge \overline{P(y)}]$ M_1 sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi, demak, bu sohada bajarilmas formuladir.

3-misol. $\forall x [P(x) \vee \overline{P(x)}]$ formula istalgan ixtiyoriy M sohada aynan chin bo‘ladi. Demak, u umumqiymatli formula, ya’ni mantiqiy qonundir.

4-misol. $\forall x [P(x) \wedge \overline{P(x)}]$ formula istalgan ixtiyoriy sohada aynan yolg‘on va shuning uchun ham u bajarilmas formula bo‘ladi.

Endi predikatlar mantiqidagi formulalarning umumqiymatligi va bajariluvchanligi orasidagi munosabatni ko‘rib o‘taylik.

2-teorema. A umumqiymatli formula bo‘lishi uchun uning inkori $\overline{A}$ bajariluvchi formula bo‘lmasligi yetarli va zarurdir.

Isbot. Zarurligi. A umumqiymatli formula bo‘lsin. U holda, ravshanki, $\overline{A}$ - istalgan sohada aynan yolg‘on formula bo‘ladi va shuning uchun ham u bajarilmas formuladir.

Yetarliligi. $\overline{A}$ istalgan sohada bajariluvchi formula bo‘lmasin. U holda bajarilmas formulaning ta’rifiga asosan $\overline{A}$ istalgan sohada aynan yolg‘on formuladir. Demak, A istalgan sohada aynan chin formula bo‘ladi va u umumqiymatlidir.

3-teorema. A bajariluvchi formula bo‘lishi uchun $\overline{A}$ ning umumqiymatli formula bo‘lmasligi yetarli va zarurdir.

Isbot.Zarurligi. A bajariluvchi formula bo‘lsin. U vaqtda shunday M soha va A formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlar majmui (satri) mavjudki, A formula bu qiymatlar satrida chin qiymat qabul qiladi. Aniqki, o‘zgaruvchilarning bu qiymatlar satrida $\overline{A}$ formula yolg‘on qiymat qabul qiladi va, demak, $\overline{A}$ umumqiymatli formula bo‘laolmaydi.

Yetarliligi. $\overline{A}$ umumqiymatli formula bo‘lmasin. U vaqtda shunday M soha va A formula tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilarning shunday qiymatlar satri mavjudki, $\overline{A}$ formula bu qiymatlar satrida yolg‘on qiymat qabul qiladi. Bu qiymatlar satrida A formula chin qiymat qabul qilganligi uchun u bajariluvchi formula bo‘ladi.

5-misol. $A \equiv (P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)}$ formulaning umumqiymatligini isbotlang.

Yechim. A formula istalgan M sohada aniqlangan deb hisoblab, tengkuchli almashtirishlarni o‘tkazamiz:

$$A \equiv \forall x(P(x) \to \overline{Q(x)}) \to \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \overline{\forall x(P(x) \to \overline{Q(x)})} \vee$$

$$\vee \overline{\exists x P(x) \wedge \forall x Q(x)} \equiv \exists x(\overline{\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}}) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \overline{\forall x Q(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \overline{\exists x P(x)} \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vee \exists x \overline{Q(x)} \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$\equiv \exists x(P(x) \wedge Q(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv \exists x(P(x) \vee \overline{Q(x)}) \vee \overline{\exists x P(x)} \equiv$$

$$(\exists x P(x) \vee \overline{\exists x P(x)}) \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1 \vee \exists x \overline{Q(x)} \equiv 1,$$

ya’ni A formula istalgan sohada har qanday $P(x)$ va $Q(x)$ bir joyli predikatlar uchun aynan chin, demak, u umumqiymatli formuladir.

6-misol. $A \equiv \exists x[(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x))]$ning aynan yolg‘on formula ekanligini ko‘rsating.

Yechim. $(F(x) \to \overline{F(x)}) \wedge (\overline{F(x)} \to F(x)) \equiv F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ ga egamiz. $F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)}$ aynan yolg‘on formula ekanligidan, $A \equiv \exists x(F(x) \leftrightarrow \overline{F(x)})$ ham aynan yolg‘on formula bo‘ladi.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1.Formulaningdeyarlinormalshakli.
2.Harqandayformulaninormalshaklgakeltirishmumkinligi.
3.Bajariluvchi va umumqiymatli formulalar haqidagi teoremalar.

22-mavzu. Predikatlar xisobining aksiomalar sistemasi.(2 soat)

Reja.

1. **Predikatlar hisobining asosiy tushunchalari.**
2. **Asosiy aksiomal sistemasi.**

Birinchi bosqichli tilda “tenglik” predikati (“=”) qatnashganligi uchun uning xossalari hamda uning funksiyalari va predikatlar bilan bog‘lanishlari aksiomalar sifatida qabul etiladi. Berilgan signaturada bunday formal sistema tuzish, uning “ichki mazmunini” (teoremalarini) keltirib chiqarish qo‘llaniluvchi (amaliy) predikatlar hisobini tashkil etadi.

Amaliy predikatlar hisobi mantiqiy aksiomalardan tashqari, yuqorida aytilganidek, tenglik predikatini xossalarini belgilovchi quyidagi aksiomalar ham olinadi.

1. $x = x$,
2. $x = y \to y = x$,
3. $x = y \wedge y = t \to x = t$,
4. $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_m = y_m \to [R(x_1, \ldots, x_m) \to R(y_1 \wedge \ldots \wedge y_m)]$
5. $x_1 = y_1 \wedge \ldots \wedge x_m = y_m \to [\tau(x_1, \ldots, x_m) = \tau(y_1 \wedge \ldots \wedge y_m)]$

Bu yerda $x, y, t, x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots x_m, y_1, \ldots, y_m$ lar predmet o‘zgaruvchilar yoki konstanta (doimiy) belgilar. R- signaturadagi ixtiyoriy mo‘rinli predikat (agar mavjud bo‘lsa), $\tau - m$o‘rinli termdir.

1-ta'rif. Har qanday bo'sh bo'lmagan simvollarning chekli to'plami alfavit deb, alfavitning simvollari esa harflar deb ataladi.

2-ta'rif. Qaralayotgan A alfavit harflarining chekli ketma-ketligi A alfavitidagi so'z deb ataladi. Harflarning bo'sh ketma-ketligi bo'sh so'z deb aytiladi va $\wedge$ bilan belgilanadi.

3-ta'rif. Agar A alfavitidagi $a_1a_2...a_n$ va $b_1b_2...b_k$ so'zlar uchun $n=k$ va $a_1=b_1$, $a_2=b_2,...,a_n=b_k$ bo'lsa, bu so'zlar teng deb aytiladi va $a_1a_2...a_n=b_1b_2...b_k$ ko'rinishda yoziladi. Bu yerda n soni so'zning uzunligi deb ataladi.

4-ta'rif. Agar $A\ (T)$ qandaydir nazariyaning alfaviti bo'lsa, $A\ (T)$ dagi $E\ (T)$ so'zlar to'plamiga T nazariyaning ifodalar to'plami deb aytiladi.

5-ta'rif.$< A\ (T), E\ (T) >$ juftlik T nazariyaning tili deb ataladi.

Birinchi tartibli tillar birinchi tartibli nazariyalarda qo'llaniladi.

Birinchi tartibli nazariyaning simvollari quyidagilardan iborat:

$\wedge, \vee, \rightarrow, -$ - mantiqiy amallar;

$\forall, \exists$ - kvantor amallari;

(,) - qo'shimcha simvollar;

- $A_j^n (n, j \geq 1)$ - n-joyli predikat harflarning sanoqli to'plami. Bu yerda yuqori indeks joyning sonini va quyi indeks predikat harfining raqamini bildiradi;

- $f_j^n (n, j \geq 1)$ - chekli (bo'sh bo'lishi ham mumkin) yoki sanoqli funksional harflarning to'plami. Bu yerda yuqori indeks funksiya tarkibiga kiruvchi o'zgaruvchilar soni va quyi indeks funksional harfning raqamini bildiradi;

- $a_i (i \geq 1)$ – chekli (bo'sh) yoki sanoqli predmet konstantalar to'plami.

Mantiqiy amallar zanjiri ham funksional harflar sifatida qaralishi mumkin.

6-ta'rif. Predikat harflar to'plami funksional harflar va konstantalar to'plamlari bilan birgalikda berilgan nazariya tilining signaturasi deb aytiladi.

Shunday qilib, birinchi tartibli T nazariyada ayrim yoki hamma funksional harflar va predmet konstantalar va ayrim (ammo hammasi emas) predikat harflar mavjud bo'lmasligi mumkin.

Birinchi tartibli har xil nazariyalar bir-biridan alfavitdagi harflar tarkibi bilan farq qilishi mumkin.

T nazariyani to'liq tavsiflash uchun **terma** va **formula** tushunchalarini aniqlashimiz kerak. Terma va formula – bu $E(T)$ so'zlar to'plamining ikki sinfidir.

7-ta'rif. 1.Predmet o'zgaruvchilar va predmet konstantalar termadir.

2.Agar $r_1, r_2,..., r_n$ lar terma va A – n–joyli amalning simvoli bo'lsa, u holda A_i^n $(r_1, r_2,..., r_n)$ termadir.

3.T nazariyada 1 va 2 – punktlarda aniqlanganlardan tashqari hech qanday termalar mavjud emas.

Tabiiy interpretatsiyaga (izohga) asosan terma – bu ayrim olingan predmetning ismidir. O'zgaruvchilar va predmet konstantalardan tashqari amallarning simvollari vositasida o'zgaruvchilar va predmet konstantalardan hosil etilgan zanjirlar ham terma bo'ladi, chunki interpretatsiyaga ko'ra terma birorta funksiyaning qiymati sifatida aniqlanayapti.

8-ta'rif. 1.Agar A – n–joyli munosabat simvoli (predikat yoki funksiya) va $r_1, r_2,..., r_n$ – termalar bo'lsa, u holda $A(r_1, r_2,..., r_n)$ – formula, xususan, agar A – predikat harfi A_i^n bo'lsa, u vaqtda $A_i^n(r_1, r_2,..., r_n)$ elementar formula deb aytiladi.

2.Agar A va B formulalar bo'lsa, u holda $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\overline{A}$ lar ham formuladir.

3.Agar A formula va u A formulaga erkin kiruvchi yoki A tarkibiga kirmagan predmet o‘zgaruvchisi bo‘lsa, u holda $\forall u A$, $\exists u A$ ifodalar formula bo‘ladi. Bu holda A kvantorning ta’sir etuvchi sohasi deyiladi.

4.1-3 bandlarda aniqlanganlardan tashqari boshqa hech qanday formula mavjud emas.

Predikatlar hisobi formal aksiomatik nazariya bo‘lib, har qanday aksiomatik nazariya kabi o‘zining tili, aksiomalar sistemasi va keltirib chiqarish qoidalariga egadir. Predikatlar hisobining tili (afavit, formulalari) predikatlar agebrasinikidek o‘zgaruvchi mulohazalar, predmet o‘zgaruvchilar, konstanta belgilar, o‘zgaruvchan predikat belgilar, mantiqiy amallar, kvantorlar, qavslar va ulardan tuzilgan formulalardan iboratdir.

Predikatlar hisobining aksiomalari sifatida mulohazalar hisobining barcha aksiomalari va yana quyidagi formulalarni qabul qilamiz:

$$\forall x\, P(x) \to P(y) \qquad (1a)$$

$$P(y) \to \exists x\, P(x) \qquad (1b)$$

Bu yerda $P(x)-$ ixtiyoriy o‘zgaruvchi predmet, y esa x uchun erkin o‘zgaruvchidir.

Predikatlar hisobini keltirib chiqarish qoidasi sifatida quyidagi qoidalarni qabul qilamiz:

1^0. MP(Modus ponens) – qoida: $\dfrac{A,\ A \to B}{B}$ (xulosa qilish qoidasi). Agar A va $A \to B$ formulalar predikatlar hisobida keltirib chiqaruvchi formulalar bo‘lsa, u holda B ham keltirib chiqaruvchi formula bo‘ladi.

2^0. S_P - o‘rniga qo‘yish (superpozisiya) qoidasi: $A(B)$ formula tarkibida o‘zgaruvchi P predikat qatnashgan $A(P)$ formuladan erkin o‘rniga qo‘yish qoidasi yordamida hosil qilingan hamda $A(P)$ keltirib chiqaruvchi formula bo‘lsa, u holda $A(B)$ ham keltirib chiqaruvchi formula bo‘ladi.

3^0. $S_{\forall\exists}-$qoidasi: $A(t)$ formula $A(x)$ formuladan bog‘langan o‘zgaruvchi (x) ni qayta nomlash qoidasi yordamida hosil qilingan hamda $A(x)$ keltirib chiqaruvchi formula bo‘lsa, u holda $A(t)$ ham keltirib chiqaruvchi formula bo‘ladi.

4^0. S_x^t-qoidasi: $A(t)$ formula $A(x)$ formuladan predmet o‘zgaruvchi (x) ni erkin o‘rniga qo‘yish qoidasi yordamida hosil qilingan hamda $A(x)$ keltirib chiqaruvchi formula bo‘lsa, u holda $A(t)$ ham keltirib chiqaruvchi formula bo‘ladi.

5^0. $\forall-$qoidasi: $\dfrac{B \to A(x)}{B \to \forall x A(x)}$

bunda x o‘zgaruvchi B formulaga erkin holda kirmaydi (ya’ni $B \to A(x)$ predikatlar hisobida keltirib chiqaruvchi formula bo‘lsa, u holda $B \to \forall x\, A(x)$ ham keltirib chiqaruvchi formula bo‘ladi.

6^0. $\exists-$qoida: $\dfrac{A(x) \to B}{\exists x\, A(x) \to B}$

bu yerda x o‘zgaruvchi B formulaga erkin holda kirmaydi.

Izoh. S_P, $S_{\forall\exists}$ va S_x^t qoidalar bir paytda bir necha o‘zgaruvchilar va bir necha erkin predmet o‘zgaruvchilar uchun osonlikcha umumlashtirilib, bir paytda barcha o‘zgaruvchilar bo‘yicha qo‘llanilishi mumkin.

Birinchi tartibli nazariya aksiomalari ikki sinfga: mantiqiy va xos aksiomalarga bo‘linadi.

Mantiqiy aksiomalar: A, B va C lar T nazariyaning qanday formulalari bo‘lishidan qat’iy nazar quyidagi formulalar T ning mantiqiy aksiomalari bo‘ladi:

1) $A \to (B \to A)$;

2) $(A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$;

3) $(\overline{B} \to \overline{A}) \to ((\overline{B} \to A) \to B)$;

4) $\forall x_i A(x_i) \to A(t)$. Bu yerda $A(x_i) - T$ nazariyaning formulasi va $t - A(x_i)$ formulada erkin bo‘lgan T nazariyaning termasi. Ta’kidlash kerakki, t x_i bilan ham mos kelishi mumkin, u vaqtda biz $\forall x_i A(x_i) \to A(x_i)$ aksiomaga ega bo‘lamiz;

5)Agar x_i A formulada erkin bo‘lmasa, u holda

$$\forall x_i (A \to B) \to (A \to \forall x_i B).$$

Izoh. Kam aksiomali mulohazalar hisobini yaratish mumkin (masalan, 1 – 3 mantiqiy aksiomalar asosida).

Xos aksiomalar. Xos aksiomalarni umumiy holda tavsiflash mumkin emas, chunki ular bir nazariyadan ikkinchi nazariyaga o‘tishda o‘zgaradi, ya’ni har bir nazariyaning o‘zigagina xos aksiomalari bo‘ladi.

Birinchi tartibli nazariya xos aksiomalarga ega emas. Bu nazariya sof mantiqiy nazariyadir. Bu nazariyani birinchi tartibli predikatlar hisobi deb aytiladi.

Ko‘p aksiomatik nazariyalarda tenglik tushunchasidan foydalaniladi. Uni ikki joyli predikat $<< x = y >>$ sifatida kiritadilar. Shu sababli aksiomalar qatoriga ikkita xos aksioma kiritadilar:

1) $\forall x (x = x)$;

2)Agar x, y, z har xil predmet o‘zgaruvchilar va $F(z)$ formula bo‘lsa, u vaqtda

$$\forall x \forall y (x = y \to F(x) = F(y)).$$

Keltirib chiqarish qoidasi. Xuddi mulohazalar hisobidagiday H formulalar majmuasidan keltirib chiqarish tushunchasidan foydalanamiz. H ga kiruvchi mulohazalarni (formulalarni) shartlar deb aytamiz. Agar H dan keltirib chiqarilgan ifodaning oxirida A mulohaza (formula) turgan bo‘lsa, u holda A mulohaza H dan keltirib chiqarilgan deb aytamiz va $H |\!- A$ ko‘rinishda yozamiz. Xususan, $H = \varnothing$ bo‘lsa, u holda $|\!- A$ ko‘rinishda yoziladi.

9–ta’rif. 1) Predikatlar hisobining har bir aksiomasi predikatlar hisobida keltirib chiqariluvchi formula hisoblanadi.

2) Aksiomalarga keltirib chiqarish qoidalarini chekli marta qo‘llash natijasida hosil qilinadigan har bir formula predikatlar hisobida keltirib chiqaruvchi formula hisoblanadi.

3) Boshqa keltirib chiqaruvchi formulalar yo‘q.

10–ta’rif. Predikatlar hisobidagi (aksiomalar sistemasidagi) isbot deb, formulalarni shunday chekli ketma – ketligi $C_1, C_2, ..., C_n$ ga aytiladiki, bu ketma – ketlikning har bir C_i $(i = \overline{1, n})$ hadi

1) yo aksiomaga,

2) yo o‘zidan (shu ketma – ketlikda) oldin keluvchi formulalarga MP - qoida, S_P - qoida, $S_{\forall\exists}$ - qoida, S_x^i – qoida, $\forall$ – qoida yoki $\exists$ – qoidani qo‘llash natijasida hosil qilingandir. $C_1, C_2, ..., C_n$ ketma – ketlik o‘zining oxirgi hadi C_n ning isboti deyiladi.

11-ta’rif. Predikatlar hisobining isbotga ega bo‘lgan har bir formulasi predikatlar hisobida isbotlanuvchi (keltirib chiqaruvchi) formula deyiladi.

Natija: Agar predikatlar hisobining biror A formulasi bajariluvchi bo‘lsa, u holda u chekli yoki sanoqli to‘plamda ham bajariluvchi bo‘ladi.

Yuqoridagi ta’riflardan ko‘rinadiki, biror A formulaning isboti $C_1, C_2, ..., C_n$ bo‘lsa, u holda $A \,\underline{\circ}\, C_n$, C_1- aksioma, har bir C_{i+1} $(i = 1, 2, ..., n-1)$ esa yo aksioma, yo o‘zidan odin keluvchi formulalardan keltirib chiqarish qoidasi yordamida hosil qilinadi.

“A-aksiomalar sistemasidan keltirib chiqariluvchi formula”, “A- isbotlanuvchi formula” va shu kabi iboralar odatdagidek $\vdash A$ ko‘rinishda belgilanadi. Predikatlar hisobining har bir isbotga ega bo‘lgan formulasini shu xisobning teoremasi deyiladi (aksiomalarni isboti uzunligi 1 ga teng bo‘lgan teoremalar deb qarash mumkin).

Predikatlar hisobi formal aksiomatik nazariyasini ya'ni birinchi tartibli formal aksiomatik til sifatida L_1 bilan belgilaymiz. Agar A keltirib chiqaruvchi formula bo'lsa, u holda $\vdash A$ yozuv ba'zan $\vdash_{L_1} A$ kabi ham yoziladi.

Izoh: $\vdash A$ bo'lsa, u holda A predmet tilning (o'rganilayotgan tilning, ya'ni "predikatlar hisobi" deb ataluvchi formal aksiomatik tilning) teoremasi, "$\vdash A$" mulohaza esa metatilning ya'ni, tadqiqotchi yoki formal tilni o'rganayotgan shaxs tilining teoremasi ekanligini eslatib o'tamiz.

Predikatlar hisobiga mulahazalar hisobining barcha aksiomalari va keltirib chiqarish qoidalari kirganligi uchun mulohazalar hisobi to'liqligicha predikatlar hisobiga kirishini sezish qiyin emas. Mulohazalar hisobida "isbot" (ya'ni aksiomalardan keltirib chiqarish) tushunchasi "gipotezalardan" (berilgan formulalardan) keltirib chiqarish tushunchasigacha kengaytirilgan edi. Predikatlar hisobi uchun ham xuddi shunday tushunchani kiritamiz.

$\Gamma = \{B_1, B_2, ..., B_m\}(m \geq 0)$ gipotezalar deb ataluvchi formulalar ro'yxati bo'lsin.

12-ta'rif. Γ ro'yxatdan xosil qilinadigan isbot deb, formulalarning shunday ketma – ketligi $C_1, C_2, ..., C_n$ ga aytiladiki, bu ketma – ketlikdagi har bir $C_i\ (i = \overline{1,n})$ formula

1) yo aksioma,
2) yo Γ ro'yxatning biror formulasi,
3) yo o'zidan (shu ketma – ketlikdan) oldin keluvchi formulalardan MP - qoida, S_P - qoida, $S_{\forall\exists}$ - qoida, S_x^i – qoida, $\forall$ – qoida yoki $\exists$ – qoidalarning biri yordamida hosil qilingandir; bu yerda S_P - qoida qoida faqat mazkur ketma – ketlikdagi aksioma va ularning natijalariga qo'llaniladi.

Aksiomalarning natijasi deganda aksiomalardan keltirib chiqarish qoidalari yordamida hosil qilinadigan formulalar tushuniladi.

$C_1, C_2, ..., C_n$ ketma – ketlik Γ ro'yxatdagi isbot bo'lsa, u o'zining oxirgi hadi C_n ning isboti deyiladi. Agar A formula $\Gamma = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ ro'yxatdan keltirib chiqaruvchi bo'lsa, u holda bu isbot $\Gamma \vdash A$ yoki $\Gamma = \{B_1, B_2, ..., B_m\} \vdash A$ kabi belgilanadi. Agar $\Gamma = \varnothing$ bo'lsa, u holda $\Gamma \vdash A$ tushuncha A tushunchaga aylanadi.

Yuqorida eslatganidek mulohazalar hisobida hosil qilingan keltirib chiqarish munosabatlari (metateoremalar) to'liqligicha predikatlar hisobida saqlanib qoladi. Shuning uchun biz ulardan predikatlar hisobida ham kerakli maqsadlarda foydalanishimiz mumkin. Masalan, "$\vdash A \to B$ va $\vdash B \to A$ bo'lsa, u holda $\vdash A \sim B$ bo'ladi" degan metateorema predikatlar hisobida ham o'rinlidir.

Quyidagi misollarni ko'rib chiqaylik ularni metateorema sifatida yozamiz.

1.1-tyeorema: $\vdash \forall x\, A(x) \equiv \forall y\, A(y)$

Isbot.

1^0. $\vdash \forall x\, P(x) \to P(y)$ - (1a) aksioma

2^0. $\vdash \forall x\, P(x) \to \forall y\, P(y)$ - $\forall$ - qoida (1^0),

3^0. $\vdash \forall y P(y) \to P(x)$ - $S_y^x, S_\forall$ - qoidalar (1^0),

4^0. $\vdash \forall y\, P(y) \to \forall x P(x)$ - $\forall$ - qoida (3^0),

5^0. $\vdash \forall x\, A(x) \to \forall y\, A(y)$ - S_P - qoida (2^0),

6^0. $\vdash \forall y\, A(y) \to \forall x\, A(x)$ - S_P - qoida (4^0),

7^0. $\vdash \forall x\, A(x) \to \forall y\, A(y)$ - (5^0 va 6^0dan yuqorida keltirilgan metoteoremaga asosan).

Ushbu isbotni yanada soddaroq ko'rinishda yozish mumkin 3^0 ni tashlab yuborib, 4^0 ni 2^0dan $S_\forall$ qoida yordamida hosil qilish mumkin.

2-tyeorema. $\forall y(R \to P(y)) \vdash R \to \forall x P(x)$ bu yerda R – yopiq formula.

Formulalarning quyidagi ketma – ketligi $R \to \forall x P(x)$ formulaning $\Gamma = \{\forall y(R \to P(y))\}$ ro‘yxatdagi isbotidir:

1^0. $\forall x P(x) \to P(y)$ (1.1a) aksioma,

2^0. $\forall t P(t) \to P(y)$ $S_\forall$ – qoida (1^0),

3^0. $\forall t P(t) \to P(x)$ S_y^x – qoida (2^0),

4^0. $\forall y P(y) \to P(x)$ $S_\forall$ – qoida (3^0),

5^0. $\forall y P(y) \to \forall x P(x)$ $\forall$ – qoida (4^0),

6^0. $\forall y P(y) \to P(y)$ S_x^y – qoida (4^0),

7^0. $\forall y(R \to P(y)) \to (R \to P(y))$ S_P – qoida (6^0),

8^0. $\forall y(R \to P(y))$ gipoteza ($\in \Gamma$),

9^0. $R \to P(y)$ MP – (7^0, 8^0),

10^0. $R \to \forall y P(y)$ $\forall$ – qoida (9^0),

11^0. $R \to \forall x P(x)$ $S_\forall$ – qoida (10^0),

Shunday qilib,

$$\forall y(R \to P(y)) \vdash R \to \forall x P(x)$$

yekanligi isbotlandi.

Mulohazalar hisobida hosilaviy keltirib chiqarish qoidalari keltirilib, ular orasida “shartli birlashtirish”, “shartlarni ajratish”, va “shartlarni o‘rinlarini almashtirish” qoidalari ko‘rsatilgan. Shu qoidalar va deduksiya teoremasiga asosan quyidagi formulalar keltirib chiqariluvchi bo‘ladi.

1. $(A \to (B \to C)) \to (A \wedge B \to C)$ (2a)
2. $(A \wedge B \to C) \to (A \to (B \to C))$ (2b)
3. $(A \to (B \to C)) \to (B \to (A \to C))$ yoki $(B \to (A \to C)) \to (A \to (B \to C))$ (2c)

3-teorema (Deduksiya teoremasi). $C_1,, C_2, \dots, C_m$ formulalar ketma ketligi B formulaning $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulalaridan kelib chiqadigan isboti (predikatlar hisobida), $x_1, x_2, \dots, x_r$ (r ≥0) lar esa gipotezalarda qatnashgan barcha erkin predmet o‘zgaruvchilar bo‘lsin. $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulalar $C_1,, C_2, \dots, C_m$ isbotda qatnashgan eng birinchisi $A_i(\underline{\circ} C_k)$ bo‘lsin, ($i = \overline{1,n} k = \overline{1,m}$). Bu shuni anglatadiki, isbotning $C_1,, C_2, \dots, C_{k-1}$ qismida . $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulalarning birortasi ham qatnashmaydi. Agr ushbu shartlar bajarilsa $C_1,, C_2, \dots, C_m$ isbotda $x_1, x_2, \dots, x_r$ o‘zgaruvchilar o‘zgarishsiz saqlanadi deymiz:

α) $\forall -$ va $\exists -$ qoidalar $x_1, x_2, \dots, x_r$ o‘zgaruvchilar bo‘yicha $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulalarga qo‘llanilmaydi;

β) isbot davomida $\forall -$ va $\exists -$ qoidalar $x_1, x_2, \dots, x_r$ o‘zgaruvchilarga nisbatan isbotning faqat $C_1,, C_2, \dots, C_{k-2}$ qismidagi formulalarga qo‘llanilishi mumkin.

Isbot. $C_1,, C_2, \dots, C_m$ formulalar B formulaning $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulalaridan kelib chiqadigan isboti bo‘lsin. Agar A_n bu isbotda qatnashmagan bo‘lsa berilgan isbotga ushbu formulalarni kiritib uni “o‘zgartiramiz”.

$$A \to (B \to A), C_m \to (A_n \to C_m),\ A_n \to C_m,$$

ya`ni formulalarning quyidagi ketma ketligini hosil qilamiz :

$$C_1,, C_2, \dots, C_m, A \to (B \to A), C_m \to (A_n \to C_m), \qquad A_n \to C_m.$$

Bu ketma ketlik $A_n \to C_m$ formulaning $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ formulalaridan hosil bo‘ladigan isbotidir. ($C_m \underline{\circ} B$ hamda hosil bo‘lgan isbotda A_n qatnashmasligini eslatib o‘tamiz) demak, quyidagi o‘rinlidir

$$A_1, A_2, \dots, A_{n-1} \quad \vdash A_n \to \mathrm{B}$$

Faraz qilaylik A_n berilgan isbotda qatnashgan bo‘lib, uning isbotdagi birinchi qatnashishi $A_n \underline{\circ} C_k$ bo‘lsin. C_k dan boshlab isbotdagi har bir $C_k, C_{k+1}, \dots, C_m$ formulalarning oldiga "$A_n \to$" belgini “ulab” ushbu ketma ketlikni hosil qilamiz:

$$C_1, , C_2, \dots, C_{k-1}, A_n \to C_k, A_n \to C_{k+1}, \dots\ A_n \to C_m \quad (3)$$

(3) dagi har bir formula oldiga bazi formulalarni yozgan holda bu ketme ketlikni “ o‘zgartirib” $A_n \to C_m$ formulaning isbotini quramiz. Bunda har bir i uchun C_i qanday formula ekanligiga qarab uning oldiga ma`lum bir formulalarni yozish kerak. Har bir C_i;

1) yo aksioma,

2) yo $A_1, A_2, \dots, A_n$ formulalarning biri,

3) yo o‘zidan oldin keluvchi qandaydir ikkita formuladan MP - qoida yordamida hosil qilingan,

4) yo o‘zidan oldin kelgan biror formulaning S_p- qoida yordamida hosil qilingan,

5) yo o‘zidan oldin kelgan biror formuladan $\forall -$ qoida yordamida hosil qilingan,

6) yo o‘zidan oldin kelgan biror formuladan $\exists$- qoida yordamida hosil qilingan,

7) yo o‘zidan oldin kelgan biror formuladan S_x^t- qoida yordamida hosil qilingan ,

8) yo `zidan oldin kelgan biror formuladan $S_{\forall\exists}$-qoida yordamida hosil qilingandir.

C_i $(i > k)$ 3-bandda aytilganidek formula bo‘lsin, ya’ni C_i o‘zidan oldin kelgan qandaydir C_p va C_q $(p, q < n)$ formulalardan MP – qoida yordamida hosil qilingan bo‘lsin. Ravshanki, $C_p \underline{\circ} C_q \to C_i$ bo‘lib, B ning isboti ushbu ko‘rinishda bo‘ladi:

$$C_1, \dots, C_p, \dots, C_p \to C_i, \dots C_k, \dots., C_i, \dots, C_m. \quad (4)$$

U holda (3) ketma ketlik

$$C_1, \dots, C_p, \dots, C_p \to C_i, \dots C_{k-1},$$
$$A_n \to C_k, \dots A_n \to C_i, \dots\ A_n \to C_m\ . \quad (5)$$

ko‘rinishda bo‘ladi ($C_k \underline{\circ} A_n$ ekanligini eslatib o‘tamiz). (5) ketma ketlikni o‘zgartirish uchun $A_n \to C_i$ fo‘rmula oldiga ushbu formulalarni yozamiz:

$$A \to (B \to A) C_m \to (A_n \to C_m), \qquad A_n \to C_m. \quad (C_p \to C_i) \to (A_n \to (C_m \to C_i)),$$
$$A_n \to \big(C_p \to C_i\big), \quad (A \to B) \to \Big(\big(A \to (B \to C)\big) \to (A \to C)\Big), \quad (A_n \to C_p)$$
$$\to \Big(\big(A_n \to \big(C_p \to C_i\big)\big) \to (A_n \to C_i)\Big), \Big(A_n \to \big(C_p \to C_i\big)\Big) \to$$
$$\to (A_n \to C_i)\ .$$

C_i $(i > k)$ 4- bandda aytilganidek formula bo‘lsin. Ma`lumki, S_p-qoida faqat aksiomalar va ularning natijalariga qo‘llaniladi. Shuning uchun $A_n \to C_i$ formula oldiga ushbu formulalarni yozish kifoyadir:

$$A \to (B \to A) C_i \to (A_n \to C_i).$$

C_i formula $(i > n)$o‘zidan oldin kelgan biror C_p $(p < i)$ formulalardan $\forall -$qoida yordamida hosil qilingan bo‘lsin. Bunday holda $C_p \underline{\circ} D \to A(x), C_i \underline{\circ} D \to \forall x A(x)$ ekanligi ravshandir, bu yerda D- tarkibida x o‘zgaruvchi erkin qatnashmagan formuladir. (1.5) ketma ketlik $A_n \to C_i$ formula oldiga ushbu formulalarni yozish bilan “ uzaytiriladi”:

1. $A \to (B \to A)$,
2. $\big(D \to A(x)\big) \to (A_n \to \big(D \to A(x)\big)),$
3. $A_n \to (D \to A(x)),$
4. $\big(A \to (B \to C)\big) \to (A \wedge B \to C) - [(1.2a)],$
5. $\Big(A_n \to \big(D \to A(x)\big)\Big) \to (A_n \wedge D \to A(x)),$
6. $A_n \wedge D \to A(x),$
7. $A_n \wedge D \to \forall x A(x) - \forall$-qoidaga asosan,
8. $(A \wedge B \to C) \to \big(A \to (B \to C)\big) \qquad - (1.2b)$
9. $(A_n \wedge D \to \forall x A(x)) \to (A_n \to D \to \forall x A(x)),$
10. $A_n \to D \to \forall x A(x).$

$C_i(i > n)$ formula o‘zidan oldin kelgan biror $C_p(p < i)$ formuladan $\exists$-qoida yordamida hosil qilingan bo‘lsin. Bunday holda $C_p \overline{\underline{\circ}} A(x) \to D$, $C_j \overline{\underline{\circ}} \exists A(x) \to D$ ekanligi ravshandir. Bu yerda D- tarkibida x-o‘zgaruvchi erkin qatnashmaganformuladir. (1.5) ketma ketlikni $A_n \to C_i$ formula oldiga ushbu formulalarni yozish hisobiga “uzaytiramiz”.

1. $A \to (B \to A)$,
2. $(A(x) \to D) \to (A_n \to (A(x) \to D)$
3. $A_n \to (A(x) \to D)$,
4. $(A_n \to (A(x) \to D) \to \big(A(x) \to (A_n \to D)\big) \qquad - [(1.2c)]$
5. $A(x) \to (A_n \to D)$,
6. $\exists x A(x) \to (A_n \to D) \qquad - \quad [\exists - qoidaga\ asosan]$,
7. $(\exists x A(x) \to (A_n \to D)) \to (A_n \to (\exists x A(x) \to D)) - [(1.2c)]$,
8. $A_n \to (\exists x A(x) \to D)$.

Oldingi ikkita bandda $i > n$ bo‘lganligidan $\forall -$ va $\exists -$ qoidalar A_n ning isbotidagi dastlabki uchrashidan keyin qo‘llanilgan. Shu sababli x o‘zgaruvchi o‘zgarishsiz saqlanadi, va demak, A_n formulaga erkin holda kirmaydi. D formula shartga ko‘ra x erkin holda qatnashmaganligi uchun $A_n \wedge D$ formulaga erkin holda kirmaydi.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

Mustaqilishlashuchunsavollar:

1.Yechilish muammosi.
2.Umumiy yopilish.
3.Mavjudligini yopilishi.

23-mavzu. Ayrim matematik nazariyalar.(2-soat)

Reja:

1.Term va formula tushunchasi.
2.Mantiqiy va xos aksiomalar.
3.Keltirib chiqarish qoidalari.

Mulohazalar algebrasi va mulohazalar hisobida formulaning tavtalogiya bo‘lishi yoki bo‘lmasligini aniqlashning samarali usullaridan biri chinlik jadvalidir.

Ammo predikatlar mantiqida bu holat batamom o‘zgaradi. Predikatlar mantiqida har bir formulaning umumqiymatli yoki umum qiymatli emasligini yechadigan samarali usul mavjud emas. Shuning uchun ham predikat va u bilan bog‘liq kvantor tushunchalaridan foydalanadigan matematik nazariyalarda aksiomatik usullardan foydalanish zarur bo‘lib qoladi.

Berilgan aksiomalar sistemasi negizida (bazasida) qurilgan aksiomatik nazariya deb shu aksiomalar sistemasiga tayanib isbotlanuvchi hamma teoremalar majmuasiga aytiladi.

Aksiomatik nazariya formal va formalmas nazariyalarga bo‘linadi.

Formalmas aksiomatik nazariya nazariy-to‘plamiy mazmun bilan to‘ldirilgan bo‘lib, keltirib chiqarish tushunchasi aniq berilmagan va bu nazariya asosan fikr mazmuniga suyanadi.

Qaralayotgan aksiomatik nazariya uchun quyidagi shartlar bajarilgan bo‘lsa, ya’ni:

1)nazariyaning tili berilgan;

2)formula tushunchasi aniqlangan;

3)aksiomalar deb ataladigan formulalar to‘plami berilgan;

4)nazariyada keltirib chiqarish qoidasi aniqlangan bo‘lsa, formal aksiomatik nazariya aniqlangan deb hisoblanadi.

Matematik nazariyalar orasida **birinchi tartibli nazariya** alohida o‘rin tutadi. Bu nazariya yuqori tartibli matematik nazariyalardan quyidagi xususiyatlari bilan farq qiladi:

-predikatlar va funksiyalar bo‘yicha kvantor amallari (operatsiyalari) bajarilmaydi;

-argumentlari boshqa predikatlar va funksiyalarni qabul qiluvchi predikatlar mavjud emas.

Birinchi tartibli matematik nazariya boshqa bir qator ma’lum matematik nazariyalarni ifodalash uchun yetarlidir.

Quyida birinchi tartibli matematik nazariyaning tili, terma va formulalari tushunchasi, mantiqiy va xos (maxsus) aksiomalari, keltirib chiqarish qoidasi; nazariyada isbotlash tushunchasi, tavtologiya xususiy hollarining isbotlanuvchanligi, deduksiya teoremasi, nazariya tilining interpretatsiyasi (talqini), berilgan interpretatsiyada formulalarning chinlik qiymatlari, nazariyaning modeli, interpretatsiyaning izomorfizmligi, nazariyaning qat’iyligi, nazariyaning zidsizlik, to‘liqlilik va yechilish muammolari, predikatlar hisobining zidsizligi, natural sonlar nazariyasi, Gyodelning to‘liqsizlik haqidagi teoremasi singari masalalar yoritilgan.

1-ta’rif. Har qanday bo‘sh bo‘lmagan simvollarning chekli to‘plami alfavit deb, alfavitning simvollari esa harflar deb ataladi.

2-ta’rif. Qaralayotgan A alfavit harflarining chekli ketma-ketligi A alfavitidagi so‘z deb ataladi. Harflarning bo‘sh ketma-ketligi bo‘sh so‘z deb aytiladi va $\wedge$ bilan belgilanadi.

3-ta’rif. Agar A alfavitidagi $a_1a_2...a_n$ va $b_1b_2...b_k$ so‘zlar uchun $n=k$ va $a_1=b_1$, $a_2=b_2,...,a_n=b_k$ bo‘lsa, bu so‘zlar teng deb aytiladi va $a_1a_2...a_n=b_1b_2...b_k$ ko‘rinishda yoziladi. Bu yerda n soni so‘zning uzunligi deb ataladi.

4-ta’rif. Agar $A\ (T)$ qandaydir nazariyaning alfaviti bo‘lsa, $A\ (T)$ dagi $E\ (T)$ so‘zlar to‘plamiga T nazariyaning ifodalar to‘plami deb aytiladi.

5-ta’rif. $< A\ (T), E\ (T) >$ juftlik T nazariyaning tili deb ataladi.

Birinchi tartibli tillar birinchi tartibli nazariyalarda qo‘llaniladi.

Birinchi tartibli nazariyaning simvollari quyidagilardan iborat:

$\wedge, \vee, \rightarrow, -$ - mantiqiy amallar;

$\forall, \exists$ - kvantor amallari;

(,) - qo‘shimcha simvollar;

- $A_j^n(n, j \geq 1)$ - n-joyli predikat harflarning sanoqli to‘plami. Bu yerda yuqori indeks joyning sonini va quyi indeks predikat harfining raqamini bildiradi;

- $f_j^n(n, j \geq 1)$ - chekli (bo‘sh bo‘lishi ham mumkin) yoki sanoqli funksional harflarning to‘plami. Bu yerda yuqori indeks funksiya tarkibiga kiruvchi o‘zgaruvchilar soni va quyi indeks funksional harfning raqamini bildiradi;

- $a_i(i \geq 1)$ – chekli (bo‘sh) yoki sanoqli predmet konstantalar to‘plami.

Mantiqiy amallar zanjiri ham funksional harflar sifatida qaralishi mumkin.

6-ta’rif. Predikat harflar to‘plami funksional harflar va konstantalar to‘plamlari bilan birgalikda berilgan nazariya tilining signaturasi deb aytiladi.

Shunday qilib, birinchi tartibli T nazariyada ayrim yoki hamma funksional harflar va predmet konstantalar va ayrim (ammo hammasi emas) predikat harflar mavjud bo‘lmasligi mumkin.

Birinchi tartibli har xil nazariyalar bir-biridan alfavitdagi harflar tarkibi bilan farq qilishi mumkin.

T nazariyani to‘liq tavsiflash uchun **terma** va **formula** tushunchalarini aniqlashimiz kerak. Terma va formula – bu $E(T)$ so‘zlar to‘plamining ikki sinfidir.

7-ta’rif. 1.Predmet o‘zgaruvchilar va predmet konstantalar termadir.

2.Agar $r_1, r_2,..., r_n$ lar terma va A – n–joyli amalning simvoli bo‘lsa, u holda A_i^n $(r_1, r_2,..., r_n)$ termadir.

3.T nazariyada 1 va 2 – punktlarda aniqlanganlardan tashqari hech qanday termalar mavjud emas.

Tabiiy interpretatsiyaga (izohga) asosan terma – bu ayrim olingan predmetning ismidir. O‘zgaruvchilar va predmet konstantalardan tashqari amallarning simvollari vositasida o‘zgaruvchilar va predmet konstantalardan hosil etilgan zanjirlar ham terma bo‘ladi, chunki interpretatsiyaga ko‘ra terma birorta funksiyaning qiymati sifatida aniqlanayapti.

8-ta’rif. 1.Agar A – n–joyli munosabat simvoli (predikat yoki funksiya) va $r_1, r_2,..., r_n$ – termalar bo‘lsa, u holda $A\,(r_1, r_2,..., r_n)$ – formula, xususan, agar A – predikat harfi A_i^n bo‘lsa, u vaqtda $A_i^n(r_1, r_2,..., r_n)$ elementar formula deb aytiladi.

2.Agar A va B formulalar bo‘lsa, u holda $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $\overline{A}$ lar ham formuladir.

3.Agar A formula va u A formulaga erkin kiruvchi yoki A tarkibiga kirmagan predmet o‘zgaruvchisi bo‘lsa, u holda $\forall$uA, $\exists$uA ifodalar formula bo‘ladi. Bu holda A kvantorning ta’sir etuvchi sohasi deyiladi.

4.1-3 bandlarda aniqlanganlardan tashqari boshqa hech qanday formula mavjud emas.

Birinchi tartibli nazariya aksiomalari ikki sinfga: mantiqiy va xos aksiomalarga bo‘linadi.

Mantiqiy aksiomalar: A, B va C lar T nazariyaning qanday formulalari bo‘lishidan qat’iy nazar quyidagi formulalar T ning mantiqiy aksiomalari bo‘ladi:

1) $A \rightarrow (B \rightarrow A)$;

2) $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$;

3) $(\overline{B} \rightarrow \overline{A}) \rightarrow ((\overline{B} \rightarrow A) \rightarrow B)$;

4) $\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(t)$. Bu yerda $A(x_i) – T$ nazariyaning formulasi va $t - A(x_i)$ formulada erkin bo‘lgan T nazariyaning termasi. Ta’kidlash kerakki, t x_i bilan ham mos kelishi mumkin, u vaqtda biz $\forall x_i A(x_i) \rightarrow A(x_i)$ aksiomaga ega bo‘lamiz;

5)Agar x_i A formulada erkin bo‘lmasa, u holda

$$\forall x_i (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow \forall x_i B).$$

Izoh. Oldingi bobda XI aksiomali klassik mulohazalar hisobini ko‘rib o‘tgan edik. Ammo kam aksiomali mulohazalar hisobini ham yaratish mumkin (masalan, 1) – 3) mantiqiy aksiomalar asosida).

Xos aksiomalar. Xos aksiomalarni umumiy holda tavsiflash mumkin emas, chunki ular bir nazariyadan ikkinchi nazariyaga o‘tishda o‘zgaradi, ya’ni har bir nazariyaning o‘zigagina xos aksiomalari bo‘ladi.

Birinchi tartibli nazariya xos aksiomalarga ega emas. Bu nazariya sof mantiqiy nazariyadir. Adabiyotlarda bu nazariyani birinchi tartibli predikatlar hisobi deb aytiladi.

Ko‘p aksiomatik nazariyalarda tenglik tushunchasidan foydalaniladi. Uni ikki joyli predikat $<< x = y >>$ sifatida kiritadilar. Shu sababli aksiomalar qatoriga ikkita xos aksioma kiritadilar:

1) $\forall x(x = x)$;

2)Agar x, y, z har xil predmet o‘zgaruvchilar va $F(z)$ formula bo‘lsa, u vaqtda $\forall x \forall y(x = y \rightarrow F(x) = F(y))$.

Keltirib chiqarish qoidasi. Xuddi mulohazalar hisobidagiday H formulalar majmuasidan keltirib chiqarish tushunchasidan foydalanamiz. H ga kiruvchi mulohazalarni (formulalarni) shartlar deb aytamiz. Agar H dan keltirib chiqarilgan ifodaning oxirida A mulohaza (formula) turgan bo‘lsa, u holda A mulohaza H dan keltirib chiqarilgan deb aytamiz va $H \vdash A$ ko‘rinishda yozamiz. Xususan, $H = \varnothing$ bo‘lsa, u holda $\vdash A$ ko‘rinishda yoziladi.

Birinchi tartibli nazariyaning keltirib chiqarish qoidasi tarkibiga ikkita qoida kiradi:

1.Xulosa qoidasi (yoki modusponens):

$$\frac{\vdash A,\ \vdash A \to B}{\vdash B}.$$

2.Umumiylik kvantori bilan bog‘lash qoidasi (yoki umumlashtirish qoidasi):

$$\frac{\vdash A}{\vdash \forall x_i A}.$$

1.Qisman tartiblash nazariyasi

T nazariya bitta A_1^2 predikat harfga ega bo‘lsin. Bu nazariya funksional harf va predmet konstantalarga ega bo‘lmasin.

$A_1^2(x_1, x_2)$ va $\overline{A_1^2(x_1, x_2)}$ formulalar o‘rniga odatda $x_1 < x_2$ va $x_1 \not< x_2$ munosabatlarni yozadilar.

T nazariya yana ikkita maxsus aksiomalarga ega bo‘lsin:

a) $\forall x_1 (x_1 < x_1)$ - irrefleksivlik;

b) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 < x_2) \wedge (x_2 < x_3) \to (x_1 < x_3))$ - tranzitivlik.

Bu nazariyaning har qanday modeli qisman tartiblangan struktura deb aytiladi.

2.Guruhlar nazariyasi

T nazariya bitta A_1^2 predikat harfga, bitta f_1^2 funksional harfga va bitta a_1 predmet konstantasiga ega bo‘lsin. Algebrada qabul etilgan belgilashlardan foydalanib:

$A_1^2(t, s)$ o‘rniga $t = s$,

$f_1^2(t, s)$ o‘rniga $t + s$,

a_1 o‘rniga 0 ni yozamiz.

Bu yerda quyidagi formulalar T nazariyaning maxsus aksiomalari bo‘ladi:

a) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 (x_1 + (x_2 + x_3)) = ((x_1 + x_2) + x_3)$ - assosiativlik;

b) $\forall x_1 (0 + x_1 = x_1)$ - nulning xususiyati;

v) $\forall x_1 \exists x_2 (x_1 + x_2 = 0)$ - qarama-qarshi elementning mavjudligi;

g) $\forall x_1 (x_1 = x_1)$ - tenglikning refleksivligi;

d) $\forall x_1 \forall x_2 ((x_1 = x_2) \to (x_2 = x_1))$ - tenglikning simmetrikligi;

ye) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_1 = x_2) \to ((x_2 = x_3) \to (x_1 = x_3)))$ -tenglikning tranzitivligi;

j) $\forall x_1 \forall x_2 \forall x_3 ((x_2 = x_3) \to ((x_1 + x_2 = x_1 + x_3) \wedge (x_2 + x_1 = x_3 + x_1)$ - tenglikni o‘rniga qo‘yish.

Bu nazariyaning har qanday modeli guruh deb aytiladi. Agar guruhda $\forall x_1 \forall x_2 (x_1 + x_2 = x_2 + x_2)$ chin formula bo‘lsa, u holda bu guruhga A**bel guruhi** yoki **kommutativ guruh** deb aytiladi.

Guruhga quyidagilar misol bo‘la oladi:

1) M to‘plamning o‘zini o‘ziga barcha o‘zaro bir qiymatli akslantirishlari to‘plami shu akslantirishlarning superpozisiyasi amali bilan birgalikda qaralganda;

2) Hamma butun sonlar to‘plami Z butun sonlarni qo‘shish amali bilan birgalikda qaralganda;

3) Tekislikning hamma V_2 vektorlar to‘plami vektorlarni uchburchak yoki parallelogramm qoidasi bo‘yicha qo‘shish amali bilan birgalikda qaralganda.

Qisman tartiblash va guruh nazariyalari samarali (effektli) aksiomalashtirilgan nazariyalardir, chunki bu nazariyalarda istalgan formulani mantiqiy aksioma bo‘lishi yoki bo‘lmasligini samarali tekshirish imkoniyati mavjud.

3.Geometriya (kesmalar tengligi nazariyasi)

Bu nazariyada S-hamma kesmalar to‘plami bo‘lsin. Tenglik munosabatini $<< x = y >>$ shaklda yozamiz, ya’ni $<< x = y >>$ ifodani $<< x$ kesma y kesmaga teng $>>$ deb o‘qiymiz.

Nazariyaning maxsus aksiomalari:

1) $\forall x \in S(x = x)$;

2) $\forall_x \forall_y \forall_z ((x = z) \wedge (y = z)) \to (x = y))$.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

24- mavzu. Predikatlar hisobining zidsizligi va to‘liqligi (2 soat)

Reja.

1. **Predikatlar xisobining zidsizligi.**
2. **Predikatlar xisobining to‘liqligi**

Har qanday aksiomatik nazariya uchun qo‘yiladiganidek predikatlar hisobi uchun ham eng asosiy muammolar – zidsizlik muammosini ifodalanishi mulohazalar hisobida keltirilgan – bu ifodalash predikatlar hisobi uchun ham saqlanib qoladi.

Teorema. Predikatlar hisobida keltirib chiqariluvchi har qanday formula umumqiymatlidir.

Isbot. Teorema to‘liq isbotlanishi uchun predikatlar hisobining (1a) va (1b) aksiomalari umumqiymatli formula ekanligini hamda $\forall -$qoida, $\exists -$qoida, $S_\forall$- va $S_\exists$ - qoidalar umumqiymatli formulalarga olib kelishini ko‘rsatish yetarli.

Umumqiymatli formulalarga $S_\forall$- va $S_\exists$ - qoidalani qo‘llaganda yana umumqiymatli formulalar xosil bo‘lishi kelib chiqadi.

Teorema. Predikatlar hisobi zidsizdir.

Ta’rif. Predikatlar algebrasining xar bir umumqiymatli formulasi predikatlar hisobida keltirib chiqaruvchi bo‘lsa, u holda predikatlar hisobi aksiomalari sistemasi keng ma’noda to‘liq deyiladi.

Bundan keyin predikatlar hisobining to‘liqligi haqida gapirilganda biz uning keng ma’nodagi to‘liqliligini tushunamiz.

Predikatlar hisobining to‘liqliligini 1930 yilda K. Gyodel’’ isbotlagan. Gyodel’’ teoremasi matematik mantiqning markaziy teoremalaridan biri bo‘lib, u predikatlar mantiqi darajasida chin mulohazalar isbotga ega ekanini, bu esa o‘z navbatida predikatlar hisobi asosida matematikaning u yoki bu bo‘limlarini formallashtirish mumkin ekanligini ko‘rsatadi.

Ixtiyoriy kvantorsiz yoki erkin o‘zgaruvchiga ega bo‘lmagan formula yopiq formula yoki tasdiq deb ataladi.

S – tasdiqlarning biror to‘plami bo‘lsin.

Ta’rif. 1) Agar $S \vdash A$ va $S \vdash \overline{A}$ bo‘lgan xech qanday A tasdiq mavjud bo‘lmasa, S tasdiqlarning ziddiyasiz to‘plami deyiladi.

2) S to‘plamga kiruvchi har bir tasdiq chin bo‘ladigan model mavjud bo‘lsa, S tasdiqlarning bajariluvchi to‘plami deyiladi.

3) Har bir A tasdiq uchun $S \vdash A$ yoki $S \vdash \overline{A}$ o‘rinli bo‘lsa, S (deduktiv) to‘liq to‘plam deyiladi.

Tasdiqlarning (deduktiv) to‘liq to‘plami sifatida barcha tasdiqlar to‘plamini olish mumkin, ammo bu to‘plam ziddiyatlidir. Ziddiyatli to‘plam tasdiqlarining bajariluvchi to‘plami bo‘lishi mumkin emasligi tabiiydir. Shu sababli biz bundan buyon tasdiqlarning ziddiyasiz to‘plamlarini qaraymiz.

Lemma. Agar $S_0 \subseteq S_1 \subseteq ... \subseteq S_n \subseteq ...$ shartni qanoatlantiruvchi har bir $S_i (i = 0,1,...)$ tasdiqlar to‘plami ziddiyasiz bo‘lsa, u holda tasdiqlarning

$$S = \bigcup_{i \geq 0} S_i$$

to‘plami ziddiyasiz bo‘ladi.

Isbot. Faraz qilaylik, xar bir $S_i (i = 0,1,...)$ ziddiyasiz bo‘lganda S ziddiyatli bo‘lsin. U holda shunday A tasdiq topiladiki, $S \vdash A$ va $S \vdash \overline{A}$ bo‘ladi. Bundan esa $\wedge$ ni kiritish qoidasiga ko‘ra $S \vdash A \wedge \overline{A}$ kelib chiqadi. $A \wedge \overline{A}$ formulaning isboti S to‘plamning chekli sondagi formulalari qo‘llaniladi. $S' \subseteq S$, $S' =$ formulalarning chekli to‘plami va $S' \vdash A \wedge \overline{A}$ bo‘lsin. U holda qandaydir S_k uchun $S' \subseteq S_k$ bo‘ladi va bundan $S_k \vdash A \wedge \overline{A}$ bo‘ladi. Hosil bo‘lgan munosabat tasdiqlarning S_k to‘plami ziddiyatli ekanligini ko‘rsatadi. Bu esa lemma shartiga ziddir.

Lemma. Tasdiqlarning S to‘plami ziddiyasiz bo‘lishi uchun uning har bir chekli to‘plamosti ziddiyasiz bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zaruriy shartining bajarilishi (ya’ni S ziddiyasiz bo‘lishi) ravshan. Yetarlilikni qarama-qarshisini faraz etgan holda isbotlaymiz: S to‘plamning har bir chekli to‘plamosti ziddiyasiz bo‘lgan holda, S to‘plamning o‘zi ziddiyatli bo‘lsin. U holda S da shunday A formula topiladiki, $S \vdash A \wedge \overline{A}$ bo‘lib, $A \wedge \overline{A}$ ning isbotida chekli S' to‘plamning formulalari qatnashadi. $S' \subseteq S$ va $S' \vdash A \wedge \overline{A}$ bo‘lgani uchun S' ziddiyatli to‘plam hamda qilingan faraz noto‘g‘ri ekanligi kelib chiqadi.

Teorema (Lindenbaum). Agar S tasdiqlarning ziddiyasiz to‘plami bo‘lsa, u holda S ni o‘z ichiga olgan tasdiqlarning T to‘liq sistemasi mavjuddir.

Isbot. Teoremani kerakli T to‘plamni tuzish yo‘li bilan isbotlaymiz. Dastavval qaralayotgan alfavit sanoqli (alfavitning quvvati – to‘plam quvvati sifatida) ekanini, uning tarkibiga kirgan signatura, barcha formulalar to‘plami va uning tarkibiga kirgan barcha tasdiqlar to‘plami sanoqli to‘plamlar ekanini eslatib o‘tamiz. Shuning bilan birga signaturadagi har bir ifoda formula bo‘lishi, formulaning esa tasdiq bo‘lishini aniqlay olamiz.

Bu bizga har bir tasdiqni qandaydir usul yordamida natural sonlar bilan nomerlash imkonini beradi. Tasdiqlarni shunday nomerlash mumkinki, tasdiqlarning o‘zi berilganda uning natural nomerini topish, nomeriga qarab esa, tasdiqning o‘zini tiklash mumkin. Sanoqli to‘plam elementlarini (tasdiqlar to‘plamini) bunday nomerlash Gyodel’’ nomeratsiyasi deyiladi.

$A_0, A_1, ..., A_n, ...$ lar shunday nomeratsiyalardan biri bo‘lsin[1].

---

[1]Bunday nomeratsiya yagona bo’lmay, biz o’z maqsadimiz uchun ularning ixtiyoriy bittasini olishimiz mumkin. Nomeratsiya usulidan foydalanib, K.Gyodel’ 1931 yili arifmetikaning to’liq emasligi haqidagi mashxur teoremasini isbotladi.

Kerakli T to‘plamni Lemmada keltirilgan “kengayib boradigan” tasdiqlar to‘plamlari ketma-ketligining birlashmasi sifatida tuzamiz.

Har bir S_i to‘plam i qadamda tuzilib, uning ziddiyasizligi induksiya bo‘yicha isbotlanadi.

Nolinchi qadamda S_0 to‘plamni quyidagicha tuzaylik:

$$S_0 = \begin{cases} S, & agar \ \ S \vdash A_0, \quad yoki \quad S \vdash \bar{A}_0, \quad bo'lsa \\ SU\{A_0\}, & aks\ holda. \end{cases}$$

Agar $S_0 = S$ bo‘lsa, u holda S_0 tabiiy, ziddiyasizdir (S to‘plam shartiga ko‘ra ziddiyasizlik bo‘lgani uchun). $S_0 = S \cup \{A_0\}$ bo‘lsin.

Shartga ko‘ra $S \vdash A_0$ va $S \vdash \overline{A}_0$. S_0 ziddiyatli to‘plam deb faraz qilsak, u holda qandaydir B formula uchun $S,\ A_0 \vdash B \wedge \overline{B}$, boshqacha aytganda $S \vdash A_0 \to B \wedge \overline{B}$ bo‘ladi.

$S \vdash (A \to B) \to (\overline{B} \to \overline{A})$ - kontrapozisiya,

$S \vdash (A_0 \to B \wedge \overline{B}) \to (\overline{(B \wedge \overline{B})} \to \overline{A}_0)$,

$S \vdash \overline{(B \wedge \overline{B})} \to \overline{A}_0$

$S, \overline{(B \wedge \overline{B})} \vdash \overline{A}_0$

$\vdash \overline{(B \wedge \overline{B})} \equiv \overline{B} \vee B$

$S \vdash \overline{B} \vee B$, ($\overline{B} \vee B$ bo‘lgani uchun)

$S, \overline{B} \vee B \vdash \overline{A}_0$

Yuqoridagi munosabatlardan $\frac{\Gamma,\ \ A\vdash C,\ \ \Gamma\vdash A}{\Gamma\vdash C}$ qoidaga asosan $S \vdash \overline{A}_0$ kelib chiqadi, bu esa yuqoridagi shartlarga ziddir. Demak, S_0ziddiyasiz to‘plam ekan. S_n n – qadamda tuzilgan va ziddiyasizligi isbotlangan to‘plam bo‘lsin. (n+1) qadamda ushbu to‘plamni tuzamiz:

$$S_{n+1} = \begin{cases} S_n, & agar \ \ S_n \vdash A_{n+1}, \quad yoki \quad S_n \vdash \bar{A}_{n+1}, \quad bo'lsa, \\ S_n U\{A_{n+1}\}, & aks\ holda. \end{cases}$$

S_{n+1} ning ziddiyasizligi S_0 ning ziddiyasizligini isbotlaganidek isbotlanadi.

Endi T sifatida qurilgan S_i $(i = 0,1,2,...)$ to‘plamlarning birlashmasini olamiz: $T = \underset{i}{U} S_i$.

1 – lemmaga asosan T tasdiqlarning ziddiyasiz to‘plamidir. T ni to‘liq ekanligini ko‘rsataylik. C mazkur to‘plamdan olingan ixtiyoriy tasdiq bo‘lsin. U holda shunday n natural nomer topiladiki, $C \equiv A_n$ bo‘ladi. S_n to‘plamning tuzilishi bo‘yicha $S_n \vdash A_n$ yoki $S_n \vdash \overline{A}_n$ bo‘ladi. $S_n \subseteq T$ bo‘lganligi uchun $T \vdash A_n$ yoki $T \vdash \overline{A}_n$ bo‘ladi, ya’ni T – tasdiqlarning to‘liq to‘plamidir.

Teorema (mavjudlikteoremasi). Agar S tasdiqlarning ziddiyasiz to‘plami bo‘lsa, u holda bu to‘plamdagi har bir tasdiq rost bo‘ladigan model mavjuddir, ya`ni S ziddiyasiz to‘plam bo‘lsa, u holda S bajariluvchi to‘plam bo‘ladi.

Isbot. Dastlab signaturaga doimiy (o‘zgarmas) predmetlar sifatida sanoqli (to‘plam quvvati ma`nosida) $c_0, c_1, ..., c_n, ...$ belgilarni kiritamiz, hamda kengaytirilgan signaturadagi tasdiqlarni natural sonlar yordamida nomerlab chiqamiz (Gyodel nomeratsiyasi).

$$B_0,\ B_1\ ,...,\ B_m ... \qquad (7)$$

Tabiiy, bu ketma - ketlik tarkibida signatudagi barcha tasdiqlar va ular orasida esa S to‘plamning barcha formulalari qatnashadi. Enli Lindenbaum teoremasini isbotlanganidek tasdiqlarning to‘plamlarini tuzatamiz. Nolinchi qadamda ushbu S_0 to‘plamni olamiz:

$$S_0 = \begin{cases} SU\ \{\rceil B_0\} & agar\ S \vdash\ \neg B_0\ bo`lsa, \\ SU\{B_0\} & agar\ S \nvdash \neg B_0\ va\ \exists\ kvantor\ bilan\ boshlanmasa \\ SU\{B_0, D_0(c_i)\} & agar\ S \nvdash\ \neg B_0\ \ va\ \ B_0\ \ \exists x D_0(x)\ bo`lsa, \end{cases}$$

(bu yerda c_{0_i}doimiy predmet da qatnashmaydigan $\{c_0, c_1, ..., c_n, ...\}$ to‘plamdagi birinchi belgidir).

S_0 ning ziddiyasizligini qarama – qarshisini faraz etgan holda ko‘rsatamiz. Faraz qilaylik S_0 ziddiyatli, demak biror C formula uchun $S_0 \vdash C \wedge \rceil C$ bo‘lsin. S_0 ning aniqlanishida uchta holni qaraymiz.

(a) $S_0 = S\,U\,\{\neg B_0\}$ bo‘lsa, u holda $S, \neg B_0 \vdash C \wedge \neg C$ bo‘ladi.

Komtropozisiya qoidasini qo‘llab, $S, \neg(C \wedge \neg C) \vdash \neg\neg B_0$ni hosil qilish mumkin. $\vdash \neg\neg B_0 \sim B_0$ va $\vdash \neg(C \wedge \neg C)$ bo‘lganligidan $S \vdash B_0$kelib chiqadi. Ammo bu S_0 ning aniqlanishidagi shartga ($S \vdash \neg B_0$) ziddir. Hosil bo‘lgan ziddiyat (a) hol uchun S_0 ziddiyasiz to‘plam ekanligini ko‘rsatadi.

(b) $S_0 = S\,U\{B_0\}$. Bu hol (a) holga o‘xshash hal etiladi.

(v). $S_0 = S\,U\{B_0, D_0(c_{i_0})\}$, $B_0 \,\underline{\circ}\, \exists x\, D_0(x)$

to‘plam ziddiyatli deb faraz qilsak, u holda qandaydir C formula uchun S, $B_0, D_0(c_{i_0})$ $\vdash C \wedge \neg C$ bo‘ladi. Kontropozisiya qoidasiga binoan

$$S, B_0 \neg(C \wedge \neg C) \vdash \neg D_0(c_{i_0})$$

$\vdash \neg(C \wedge \neg C)$bo‘lganligi uchun esa $S, B_0 \vdash \neg D_0(c_{i_0})$ bo‘ladi. Shartga ko‘ra c_{i_0} doimiy predmet S to‘plam formulalar va B_0 formulada qatnashmaganligi uchun c_{i_0} o‘rniga t erkin o‘zgaruvchini qo‘yib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$S, B_0 \vdash \neg D_0(t)$$

Bundan esa

$S, B_0 \vdash \forall t \neg D_0(t)$	- $\forall$ ni kiritish qoidasiga ko‘ra
$S, B_0 \vdash \neg\exists t\ D_0(t)$	- 5^+ ga asosan
$S, B_0 \vdash \neg\exists x\ D_0(x)$	- $S_\exists$ - qoidaga ko‘ra,
$S, B_0 \vdash \neg B_0$	- $B_0 \,\underline{\circ}\, \exists x\, D_0(x)$ bo‘lgani uchun
$S, B_0 \vdash B_0$	- $B_0 \vdash B_0$ bo‘lgani uchun

va nihoyat $S \vdash \neg B_0$ kelib chiqadi.

Hosil bo‘lgan oxirgi munosabat $S \forall \neg B_0$ shartiga ziddir. Demak (v) holi uchun ham S_0 ziddiyasiz to‘plamdir. Shunday qilib, $S \subseteq S_0$ hamda $S_0 \vdash B_0$yoki $S_0 \vdash \neg B_0$ ekan. n - qadamgacha $S_0, S_1, ..., S_{n-1}$ to‘plamlar tuzilgan bo‘lib, ular ziddiyasiz bo‘lsin.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

25-mavzu. Algoritmlar va ularning murakkabligi (2 soat)

Reja.

1. **Algoritm tushunchasi va uning xarakterli xususiyatlari**
2. **Algoritm tushunchasiga aniqlik kiritish**

Matematikaning asosiy tushunchalaridan biri algoritm (algorifm) tushunchasidir.

«Algoritm» so‘zi IX-asrda ijod etgan buyuk matematik vatandoshimiz Abu Abdullo Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy nomining lotincha Algorithmi tarzida buzib yozilishidan kelib chiqqan.

Har biri «ha» yoki «yo‘q» degan javob talab etuvchi ayrim sanoqli-cheksiz matematik yoki mantiqiy masalalar sinfini ko‘raylik.

Chekli son qadamda ushbu sinfdagi har qanday savolga biz javob bera oladigan jarayonlik (prosedura) mavjudmi?

Agar shunday prosedura mavjud bo‘lsa, u holda u berilgan savollar sinfi uchun **yechuvchi prosedura** yoki **yechuvchi algoritm (algorifm)** deb aytiladi. Yechuvchi prosedurani izlash muammosiga bu sinf uchun yechilish muammosi deb aytiladi.

Formal sistemalar uchun **yechilish muammosini** Shryoder (1895), Lyovengeym (1915) va Gilbertlarni (1918) asarlarida uchratish mumkin.

Masalan, quyidagilar yechuvchi algoritmlarga misol bo‘la oladi:

1.Sonlar ustida arifmetik amallarni bajarish qoidalari.

2.Kvadrat ildiz chiqarish qoidasi.

3.Eng katta umumiy bo‘luvchini topish qoidasi (Yevklid algoritmi).

4.Kvadrat tenglamaning yechimini topish qoidasi.

5.n-tartibli ko‘phadning hosilasini topish qoidasi.

6. Rasional funksiyani integrallash qoidasi.

Yuqorida keltirilgan har bir misolda bir xil tipli (turdagi) masalalar sinfi bilan ish ko‘rishga to‘g‘ri keladi. Bir xil turdagi masalalar sinfi **ommaviy muammo** deb aytiladi. Bunday sinflarning masalalari bir biridan faqat ifodasidagi parametrlar bilan farq qiladi. Masalan, $ax^2+bx+c=0$ kvadrat tenglamaning yechimini topish masalasida a, b va c parametrlar qatnashadi. Ularning qiymatlarini o‘zgartirish yo‘li bilan bir sinfga mansub turli xil masalalarga kelamiz.

Aytilganlarni hisobga olib algoritmning quyidagi intuitiv ta’rifini berish mumkin.

1-ta’rif. Berilgan ommaviy muammodagi barcha masalalarni umumiy bir xil shaklda, aniq ma’lum bo‘lgan usul bilan yechish jarayoniga **algoritm** deb aytamiz.

Bunday ta’rifni qat’iy deb hisoblash mumkin emas. Haqiqatan ham, unda aniq mazmuni noma’lum so‘zlar uchraydi. Xususan, bu «usul» so‘ziga ham taalluqli. Shuning uchun ham algoritmning bu qat’iy bo‘lmagan ta’rifiga **intuitiv** ta’rif deb aytiladi.

Endi algoritmning xarakterli xususiyatlarini ko‘rib o‘taylik.

1.Algoritmning diskretligi. Algoritm bu –miqdorlarni shunday ketma-ket qurish jarayoniki, boshlang‘ich holatda miqdorlarning dastlabki chekli sistemasi berilgan bo‘lib, har bir navbatdagi momentda miqdorlar sistemasi ma’lum aniqlangan qonun (dastur) asosida oldingi holatdagi miqdorlar sistemasidan hosil qilinadi.

2.Algoritmning determinatsiyalanuvchanligi (aniqlanuvchanligi). Boshlang‘ich holatdan farq qiluvchi boshqa holatda aniqlangan miqdorlar sistemasi ilgarigi holatlarda hosil qilingan miqdorlar sistemasi orqali bir qiymatli aniqlanadi.

3.Algoritm qadamlarining elementarligi. Ilgarigi miqdorlar sistemasidan keyingisini hosil qilish qonuni sodda qadamlardan iborat bo‘lishi kerak.

4.Algoritmning ommaviyligi. Boshlang‘ich miqdorlar sistemasini ayrim potensial cheksiz to‘plamdan tanlash mumkin.

5.Algoritmning natijaviyligi. Miqdorlarni topish jarayoni chekli bo‘lishi va natija (masalaning yechimini) berishi kerak.

Matematik amallar asosiy rolni o‘ynaydigan algoritmlarga sonli algoritmlar deb aytiladi. Bundan tashqari mantiqiy algoritmlar ham mavjud. Misol sifatida, mantiqiy algoritm ishlatiladigan quyidagi o‘yinni ko‘ramiz:

Misol. 15 ta predmet bor. O‘yinda 2 kishi qatnashadi: boshlovchi va uning raqibi. Har bir o‘yinchi navbat bilan bir, ikki yoki uchta predmetni oladi. Kim oxirgi predmetni olsa, o‘sha yutgan hisoblanadi. Boshlovchi yutish uchun o‘yinda qanday strategiyani ishlatishi kerak?

Yechim. Boshlovchining yutuq strategiyasini quyidagi jadval shaklida ifodalash mumkin:

Yurish raqami	Boshlovchining yurishi	Raqibning yurishi
1	3	n
2	4-n	M
3	4-m	P
4	4-p	O

Haqiqatanham, boshlovchibundaystrategiyanatijasida 3+(4-n)+(4-m)+(4-p)=15-(n+m+p) predmetoladivaraqib n+m+p predmetoladi, ya’niikkalasibirgalikda 15 tapredmetoladilar. Oxirgi predmetni boshlovchi olganligi tufayli, u o‘yinni yutadi.

Matematika tarixida bir xil turdagi savollar to‘plamiga «ha» yoki «yo‘q» yoki bir xil turdagi funksiyalar sinfi «hisoblanuvchi» yoki «hisoblanuvchi emas» degan javoblar berishi mumkin bo‘lgan algoritmlarni izlash uzoq davom etdi. Ayrim vaqtlarda bu izlanishlar natijasiz tugadi.

Bu hollarda, tabiiyki, algoritmning mavjudligiga shubha bilan qaraladi.

3-misol. Misol sifatida Fermaning «buyuk teorema»sining yechish muammosini ko‘rsatish mumkin. 1637 yillar atrofida Ferma quyidagi teoremaning isboti menda bor deb e’lon qildi: «$x^n + y^n = z^n$ **tenglama** $n > 2$ **bo‘lganda musbat butun son qiymatli** x, y, z, n **yechimga ega emas».** Hozirgi kungacha bu tasdiq na isbot qilingan va na rad etilgan.

4-misol. 1900 yilda Parijda o‘tkazilgan ikkinchi xalqaro matematiklar kongressida nemis matematigi David Gilbert yechilishi muhim bo‘lgan 23 matematik muammolar ro‘yxatini o‘qib berdi. Shular orasida quyidagi 10-chi Gilbert muammosi bor edi: «Har qanday koeffisiyentlari butun sonlardan iborat bo‘lgan algebraik tenglamaning butun sonli yechimi mavjudmi?», ya’ni har qanday butun sonli koeffisiyentlardan iborat bo‘lgan algebraik tenglama butun sonli yechimga egami degan muammoni yechadigan (hal qiladigan) algoritm yaratish kerakligini D.Gilbert ko‘rsatdi.

Matematikada butun sonli koeffisiyentlarga ega bo‘lgan algebraik tenglamaga **diofant** tenglamasi deb aytiladi.

Masalan,

$$x^2 + y^2 - 2xz = 0, \qquad 10x^5 + 7x^2 + 5 = 0$$

ko‘rinishdagi tenglamalar diofant tenglamalari bo‘ladi, ulardan birinchisi uch o‘zgaruvchili va ikkinchisi bir o‘zgaruvchili tenglamadir. Umumiy holda tenglama istalgan sondagi o‘zgaruvchilarga bog‘liq bo‘lishi mumkin. Bunday tenglamalar butun sonli yechimlarga ega bo‘lishi ham, ega bo‘lmasligi ham mumkin. Masalan, $x^2 + y^2 - 2xz = 0$ cheksiz ko‘p butun sonli yechimlarga ega va $10x^5 + 7x^2 + 5 = 0$ tenglama butun sonli yechimga ega emas.

Bir o‘zgaruvchili **diofant** tenglamasining hamma butun sonli yechimlarini topish **algoritmi** anchadan beri mavjud. Aniqlanganki, agar

$$P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0$$

butun sonli koeffisiyentlardan iborat tenglamaning butun ildizi bo‘lsa, u holda u a_n koeffisiyentning bo‘luvchisi bo‘ladi.

Keltirilgan tasdiqqa asoslanib, quyidagi algoritmni tavsiya etish mumkin:

1) a_n sonning hamma bo‘luvchilarini topish: $d_1, d_2, ..., d_n$.

2) a_n sonning har bir bo‘luvchisi uchun $P_n(x)$ ning qiymatini aniqlash: $P_n(d_i)$ $(i = \overline{1, n})$.

3) Agar $1, 2, ..., n$ larning birorta i uchun $P_n(d_i) = 0$ bo‘lsa, u holda d_i tenglamaning yechimi bo‘ladi. Agar $i = 1, 2, ..., n$ larning hammasida $P_n(d_i) \neq 0$ bo‘lsa, u holda tenglama butun sonli yechimga ega emas.

Gilbertning 10-muammosi bilan dunyoning ko‘p matematiklari deyarli 70 yil shug‘ullandilar. Faqatgina 1968 yilda Sankt-Peterburglik yosh matematik Yu.V.Matiyasevich va sal keyinroq rus matematigi G.V.Chudnovskiy bu muammoni hal qildilar: **qo‘yilgan masalaning yechimini bera oladigan algoritm** mavjud emas.

Algoritmning intuitiv ta’rifi qat’iy emasligiga qaramasdan, u muayan masalaning yechimini topadigan algoritmning to‘g‘riligiga shubha uyg‘otmaydi.

Matematikada shunday yechimi topilmagan algoritmik muammolar mavjudki, ular yechimga egami yoki ega emasmi ekanligini aniqlash muammosi paydo bo‘ladi. Bu muammoni yechishda algoritmning intuitiv ta’rifi yordam bera olmaydi. Bu hollarda yoki algoritmning mavjudligini, yoki uning mavjud emasligini isbotlash kerak bo‘ladi.

Birinchi holda masalani yechadigan jarayonni tasvirlash kifoya. Bu jarayonning haqiqatan ham algoritm ekanligiga ishonch hosil qilish uchun algoritmning intuitiv tushunchasi yetarli bo‘ladi.

Ikkinchi holda algoritmning mavjud emasligini isbotlash kerak. Buning uchun algoritmning nima ekanligini aniq bilish talab qilinadi. XX asrning 30-yillarigacha algoritmning aniq ta’rifi mavjud emasdi. Shuning uchun ham algoritm tushunchasiga aniq ta’rif berish keyingi davr matematikasining asosiy masalasi bo‘lib qoldi. Bu ta’rifni ishlab chiqish ko‘p qiyinchiliklarga duch keldi.

Birinchidan, bunday ta’rif algoritm intuitiv ta’rifining **mohiyatini** aks ettirishi, **ikkinchidan** esa, bunday ta’rif formal aniqlik nuqtai nazaridan mukammal bo‘lishi kerak edi.

Bu muammoning tadqiqotchilari tomonidan algoritmning bir nechta ta’rifi ishlab chiqildi. Ammo vaqt o‘tishi bilan bu ta’riflarning o‘zaro tengkuchliligi aniqlandi. Ana shu ta’rif hozirgi zamon algoritm tushunchasidir.

Algoritm tushunchasini aniqlash bo‘yicha yondashuvlarni **uch asosiy yo‘nalishga** bo‘lish mumkin.

Birinchi yo‘nalish – **effektiv hisoblanuvchi funksiya** tushunchasini aniqlash bilan bog‘liq. Bu yo‘nalish bo‘yicha A.Chyorch, K.Gyodel, S.Klinilar tadqiqot ishlarini olib bordilar.

1935 yilda, 1932-1935 yillar davomida A.Chyorch va S.Klini tomonidan o‘rganilgan va « λ - aniqlanuvchi funksiyalar» deb atalgan, to‘g‘ri aniqlangan hisoblanuvchi nazariy-sonli funksiyalar sinfining **xossalari**: «λ - aniqlanuvchi funksiyalar» sinfi bizning intuitiv tasavvurimiz bo‘yicha **hisoblanuvchi deb** qaraladigan **hamma funksiyalarni** qamrab olishi mumkin degan fikr tug‘diradi. Bu kutilmagan natija edi.

J.Erbranning bitta g‘oyasi asosida 1934 yilda K.Gyodel tomonidan aniqlangan va «umumrekursiv funksiyalar» deb atalgan boshqa **hisoblanuvchi funksiyalar** sinfi ham «λ - aniqlanuvchi funksiyalar» xossalariga o‘xshash xossalarga ega edi.

1936 yilda A.Chyorch va S.Klini tomonlaridan bu ikkita sinf bir xil sinf ekanligi isbotlandi, ya’ni har qanday λ **- aniqlanuvchi** funksiya umumrekursiv funksiya bo‘lishi va har qanday umumrekursiv funksiya λ - aniqlanuvchi funksiya ekanligi tasdiqlandi.

1936 yilda Chyorch quyidagi **tezisni** e’lon qildi: **har qanday intuitiv effektiv (samarali) hisoblanuvchi funksiyalar umumrekursiv funksiyalardir**.

Bu teorema emas, balki tezisdir: tezis tarkibida intuitiv aniqlangan effektiv hisoblanuvchi funksiya tushunchasi, aniq matematik terminlarda aniqlangan umumrekursiv funksiya tushunchasi bilan aynan tenglashtirilgan. Shuning uchun ham bu tezisni isbotlash mumkin emas. Ammo Chyorch va boshqa olimlar tomonidan bu tezisni quvvatlovchi ko‘p dalillar ko‘rsatildi.

Ikkinchi yo‘nalish – algoritm tushunchasini bevosita aniqlash bilan bog‘liq: 1936-1937 yillarda, A.Tyuring Chyorch ishlaridan bexabar holda yangi funksiyalar sinfini kiritdi. Bu funksiyalarni «Tyuring bo‘yicha hisoblanuvchi funksiyalar» deb atadilar. Bu sinf ham yuqorida aytilgan xossalarga ega edi va buni **Tyuring tezisi** deb aytamiz. 1937 yilda **A.Tyuring**

isbotladiki, uning hisoblanuvchi funksiyalari λ - aniqlanuvchi funksiyalarning o‘zi va, demak, umumrekursiv funksiyalarning xuddi o‘zi ekan. Shuning uchun ham Chyorch bilan Tyuring tezislari ekvivalentdir.

1936 yilda (Tyuring ishlaridan bexabar holda) E.Post aynan Tyuring erishgan natijalarga mos keladigan natijalarni e’lon qildiva 1943 yilda, 1920-1922 yillardagi nashr etilmagan ishlariga suyanib, to‘rtinchi ekvivalent tezisni nashr etadi. Shunday qilib, algoritm tushunchasini bevosita aniqlashga va so‘ngra uning yordamida hisoblanuvchi funksiya tushunchasini aniqlashga birinchi bo‘lib bir-biridan bexabar holda E.Post va A.Tyuring erishdilar.

Post va Tyuring algoritmik prosesslar ma’lum bir tuzilishga ega bo‘lgan «mashina» bajaradigan prosesslar ekanligini ko‘rsatdilar. Ular ushbu «mashina»lar yordamida barcha hisoblanuvchi funksiyalar sinfi bilan barcha qismiy rekursiv funksiyalar sinfi bir xil ekanligini ko‘rsatdilar va, demak, Chyorch tezisining yana bitta fundamental tasdig‘i yuzaga keldi.

Uchinchi yo‘nalish – rossiya matematigi A.Markov tomonidan ishlab chiqilgan normal algoritmlar tushunchasi bilan bog‘liq.

Asosiy darslik va qo‘llanmalar.

1. E.Mendelson Introduction to mathematical logic, fifthe edition, by Taylor & Francis Group, LLC, 2010
2. Kenneth H. Rosen, Discrete mathematics and its applications, 7- edition, The McGraw-Hill Companies, 2012
3. Yershov Yu. L., Palyutin Ye. A. Matematicheskaya logika. M.: Nauka, 1987.
4. Kasimov N.Kh., Dadajonov R.N., Ibragimov F.N. Diskret matematika va matematik mantiq asoslari (o’quv qullanma), Toshkent, 2016.
5. YUnusov A.S. Matematik mantiq va algoritmlar nazariyasi elementlari, T., 2008.
6. Lavrov I. A., Maksimova L. L. Zadachi po teorii mnojestv, matematicheskoy logike i teorii algoritmov. M.: Fiz.-mat. literatura, 1995

O’ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY TA`LIM, FAN VA INNOVATSIYALAR VAZIRLIGI
NAMANGAN DAVLAT UNIVERSITETI

"TASDIQLAYMAN"
O’quv ishlari bo’yicha prorektori
D.Xolmatov

____

“……" …………… 2023 yil

DISKRET MATEMATIKA VA MATEMATIK MANTIQ FANINING O’QUV DASTURI

2- kurs uchun

Bilim sohasi: 500000- Tabiiy fanlar, matematika va statistika

Ta`lim sohasi: 540000- Matematika va statistika

Ta`lim yo’nalishi: 60540100-Matematika

Namangan-2023

Fan/modul kodi DMMM206	**O’quv yili** 2023-2024	**Semestr** 3	**ECTS-Kreditlar** 6 3-semestr 6
Fan/modul turi Majburiy	**Ta’lim tili** O’zbek		**Haftadagi dars soatlari** 3-semestr 6 soat
Fanning nomi	**Auditoriya mashg’ulotlari (soat)**	**Mustaqil ta’lim (soat)**	**Jami yuklama (soat)**
Diskret matematika va matematik mantiq	90	90	180

I. Fanning mazmuni

Fanni o’qitishdan maqsad – diskret matematika va matematik mantiqning asosiy bilimlari, tushunchalari, tasdiqlari va ularning isboti, amaliy masalalarni echish usullari, informatika va dasturlashning nazariy asoslari haqidagi bilimlar, ixtisoslikni o‘zlashtirishga zaruriy tayanch bilimlar amaliy masalalarni yuqori sifat va aniqlikda echishning zamonaviy matematik usullari bilan talabalarni tanishtirish.

Fanning vazifasi – ixtisoslik fanlarni o‘zlashtirish uchun diskret matematika va matematik mantiq, kombinatorika va graflar nazariyasi asosiy bilimlarini va tamoyillarini qo‘llash ko‘nikmalarini berish.

II. Asosiy nazariy qism (ma’ruza mashg’ulotlari)

II.1. Fan tarkibiga quyidgi mavzular kiradi

1-mavzu. To‘plamlar va ular ustida amallar.

To‘plamlar, birlashma, kesishma, universal to‘plam, tartiblangan juftlik, dekart ko‘paytma.

2-mavzu. Munosabatlar. Binar munosabatlarning ko‘paytmasi. Funksiya.

Munosabat, binar munosabat, munosabatlar ustida amallar, relyasion algebra.

3-mavzu. Mantiqiy bog‘lovchilar Muloxazalar algebrasi. Chinlilik jadvali. Formula, qism formula.

Mulohaza, mantiqiy amallar, formula, qism formula, Chinlilik jadvali.

4-mavzu. Formulalarning teng kuchliligi. Mulohazalar algebrasining asosiy teng kuchliliklari.

Teng kuchlilik, teng kuchli almashtirishlar, tavtologiya

5-mavzu. Keltirilgan formulalar. Mantiqiy amallarning to'liq sistemalari. Normal formalari. Mukammal diz'yunktiv va konyunktiv normal formalar.

Keltirilgan formulalar, mantiqiy amallar, to'liq sistema

6-mavzu. Mulohazalar algebrasi formulalarining tatbiqlari. Rele-kontakt sxemalari.

Mulohazalar algebrasi tatbiqlari, rele-kontakt sxemalari

7-mavzu. Formal aksiomatik nazariya. Mulohazalar xisobi. Mulohazalar hisobining aksiomalari. Deduktsiya teoremasi.

L nazariya, L nazariya aksiomalari, deduksiya teoremasi.

8-mavzu. To'liqlik xaqida Gyodel teoremasi. Ziddiyatsizligi.

Nazariya, nazariyaning to'liqligi, zidiyatlilik, ziddiyatsizlik.

9-mavzu. Elementar Bul funksiyalari. Ularning berilish usullari. Muxim va sohta o'zgaruvchilar.

Bul funksiyalari, elementar bul funksiyalari, jalval usuli, bul funksiyalar soni.

10-mavzu. Formula tushunchasi. Ekvivalent formulalar. Dual funktsiyalar. Duallik printsipi. Normal formalar. Funktsiyani o'zgaruvchilar bo'yicha yoyish.

Bul funksiyalar sistemasi ustida formula tushunchasi, funksiyalar realizatsiyasi, teng kuchli formulalar, dual formulalar, duallik prinsipi.

11-mavzu. To'liq sistemalar. Bul funktsiyasini Jegalkin ko'pxadiga yoyish. Muxim yopiq sinflar.

To'liq sistemalar, Jegalkin ko'phadi, Jegalkin teoremasi.

12-mavzu. O'z-o'ziga dual bo'lmagan funksiya xaqida lemma. Monoton bo'lmagan va chiziqli bo'lmagan funksiyalar xaqidagi lemmalar. Post teoremasi va uning natijalari.

Nolni saqlovchi funksiyalar, birni saqlovchi funksiyalar, o'z-o'ziga dual funksiyalar

13-mavzu. Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida mantiqiy amallar.

Predikat, ular ustida amallar, misollar, predikatlar algebrasi

14-mavzu. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari. Cheklangan kvantorlar. Mantiqiy kvadrat.

Kvantorlar, umumiylik va mavjudlik

15-mavzu. Predikatlar algebrasining formulalari. Predikatlar algebrasida formulalarning teng kuchliligi.

Predikat, ular ustida amallar, misollar, predikatlar algebrasi

16-mavzu. Formulalarning normal kanonik formalari.

Normal kanonik formalar, unga keltirish usullari, asosiy teoremalar

17-mavzu. Kombinatorikaning asosiy elementlari. Asosiy

kombinatsiyalar.

Asosiy kombinatsiyalar, kombinatorikaning klassik masalalari, asosiy prinsiplari

18-mavzu. Kiritish chiqarish qoidasi. Rekkurent munosabatlar metodi. Fibonachchi sonlari.

To‘plam elementlari sonini aniqlash, kiritish chiqrish qoidalari

19-mavzu. Xosil qiluvchi funktsiyalar.

Xosil qiluvchi funksiyalar, ular yordamida rekurrent munosabatlarni aniqlash

20-mavzu. Graflar va ularning berilish usullari.Graflarning turlari.

Graf, graf uchlari, graf qirrasi, ilmoq, kushnilik matritsasi, insidentlik matritsasi.

21-mavzu. Graflarning bog’liqligi. Marshrut, zanjir, sikl. Graf metrikasi. Eyler va Gamilton graflari.

Graf, graf uchlari, graf qirrasi, ilmoq, kushnilik matritsasi, insidentlik matritsasi.

22-mavzu. Orientirlangan graflar. Tranzitiv graflar. Graflarning bikomponenalari. Graflarni buyash. Xromatik sonlar.

Graflarda orientir, izomorflik, tranzitivlik, bikomponenta

II.2. Ma’ruza mavzularini taqsimlanishi

№	**mavzular**	**Soati**
	3- Semestr	
1	To’plamlar va ular ustida amallar.	2
2	Munosabatlar. Binar munosabatlar ustida amallar.	2
3	Akslantirishlar va ular ustida amallar.	2
4	Mulohazalar algebrasi. Formula, qism formula tushunchalari.	2
5	Teng kuchli formulalar. Mulohazalar algebrasining asosiy teng kuchliliklari.	2
6	Keltirilgan formulalar. Normal formalari. Mukammal diz’yunktiv va kon`yunktiv normal formalar. Mulohazalar algebrasida yechilish muammosi.	2
7	Mulohazalar algebrasi formulalarining ayrim tatbiqlari. Rele-kontakt sxemalari.	2
8	Formal aksiomatik nazariya. Mulohazalar hisobi. Mulohazalar hisobining aksiomalari. Deduktsiya teoremasi.	2
9	To’liqlik haqida Gyodel teoremasi. Mulohazalar hisobining ziddiyatsizligi.	2
10	Elementar Bul funksiyalari. Ularning berilish usullari.	2

	11	Formula tushunchasi. Ekvivalent formulalar. Dual funksiyalar. Normal formalar.	2
	12	To'liq sistemalar. Bul funksiyasini Jegalkin ko'phadiga yoyish. Muhim yopiq sinflar. Post teoremasi va uning natijalari.	2
	13	Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida mantiqiy amallar.	2
	14	Umumiylik va mavjudlik kvantorlari. Cheklangan kvantorlar. Mantiqiy kvadrat.	2
	15	Predikatlar algebrasining formulalari. Predikatlar algebrasida formulalarning teng kuchliligi.	2
	16	Formulalarning normal kanonik formalari. Predikatlar algebrasida yechilish muammosi.	2
	17	Kombinatorikaning asosiy elementlari. Asosiy kombinatsiyalar.	2
	18	Paskal uchburchagi. Nyuton binomi.	2
	19	Takroriy kombinatsiyalar.	2
	20	Rekurrent munosabatlar metodi. Fibonachchi sonlari.	2
	21	Hosil qiluvchi funksiyalar.	2
	22	Graflar va ularning berilish usullari. Graflarning turlari.	2
	23	Graflar ustida amallar.	2
	24	Marshrut va zanjirlar. Eyler va Gamilton graflari. Grafning metrik xarakteristikalari.	2
	25	Daraxtlar va tarmoqlar.	2
		Jami:	**50 soat**

III. Amaliy mashg'ulotlar

1- Amaliy mashg'ulot. To'plamlar va ular ustida amallar.

To'plamlar, birlashma, kesishma, universal to'plam, tartiblangan juftlik, dekart ko'paytma.

2- Amaliy mashg'ulot. Munosabatlar. Binar munosabatlarning ko'paytmasi. Funksiya.

Munosabat, binar munosabat, munosabatlar ustida amallar, relyasion algebra.

3- Amaliy mashg'ulot. Binar munosabatlarning ko'paytmasi. Funksiya.

Refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik, ekvivalentlik, qisman tartib, panjara.

4- Amaliy mashg'ulot. Maxsus binar munosabatlar. Ekvivalentlik munosabati. Qisman tartiblangan to'plamlar.

Refleksivlik, simmetriklik, tranzitivlik, ekvivalentlik, qisman tartib, panjara.

	5- Amaliy mashg'ulot. Mantiqiy bog'lovchilar Muloxazalar algebrasi. Chinlilik jadvali. Formula, qism formula. Keltirilgan formulalar, mantiqiy amallar, to'liq sistema **6- Amaliy mashg'ulot. Formulalarning teng kuchliligi. Mulohazalar algebrasining asosiy teng kuchliliklari.** Keltirilgan formulalar, mantiqiy amallar, to'liq sistema **7- Amaliy mashg'ulot. Keltirilgan formulalar. Mantiqiy amallarning to'liq sistemalari.** Diz'yunkti normal formalar, kon'yunktiv normal formalar, mukammal normal formalar. **8- Amaliy mashg'ulot. Normal formalari. Mukammal diz'yunktiv va konyunktiv normal formalar.** Diz'yunkti normal formalar, kon'yunktiv normal formalar, mukammal normal formalar. **9- Amaliy mashg'ulot. Mulohazalar algebrasi formulalarining tatbiqlari. Rele-kontakt sxemalari.** Mulohazalar algebrasi tatbiqlari, rele-kontakt sxemalari **10- Amaliy mashg'ulot. Formal aksiomatik nazariya. Mulohazalar xisobi.L nazariya, L nazariya aksiomalari.** Mulohazalar xisobi.L nazariya, L nazariya aksiomalari. **11- Amaliy mashg'ulot. Mulohazalar hisobining aksiomalari. Deduksiya teoremasi.** Nazariya, nazariyaning to'liqligi, zidiyatlilik, ziddiyatsizlik. **12- Amaliy mashg'ulot. Elementar Bul funksiyalari. Ularning berilish usullari.** Bul funksiyalari, elementar Bul funksiyalari, jalval usuli, Bul funksiyalar soni. **13- Amaliy mashg'ulot. Formula tushunchasi.Ekvivalent formulalar. Dual funksiyalar. Duallik prinsipi.** Bul funksiyalar sistemasi ustida formula tushunchasi, teng kuchli formulalar, dual formulalar, duallik prinsipi. **14- Amaliy mashg'ulot. Normal formalar. Funksiyani o'zgaruvchilar bo'yicha yoyish.** Normal formalar, o'zgaruvchilar bo'yicha yoyish teoremasi. **15- Amaliy mashg'ulot. To'liq sistemalar. Bul funksiyasini Jegalkin ko'pxadiga yoyish.** To'liq sistemalar, Jegalkin ko'phadi, Jegalkin teoremasi. **16- Amaliy mashg'ulot. Post teoremasi va uning natijalari.** Nolni saqlovchi funksiyalar, birni saqlovchi funksiyalar, o'z-o'ziga dual

funksiyalar

17- Amaliy mashg'ulot. Predikat tushunchasi. O'zgarmas predmetlar va o'zgaruvchi muloxazalar. Predikatlar ustida mantiqiy amallar.

Predikat, ular ustida amallar, misollar, predikatlar algebrasi

18- Amaliy mashg'ulot. Umumiylik va mavjudlik kvantorlari. Cheklangan kvantorlar. Mantiqiy kvadrat.

Kvantorlar, umumiylik va mavjudlik

19- Amaliy mashg'ulot. Predikatlar algebrasining formulalari. Bajariluvchi, rad etiluvchi formulalar. Aynan rost, aynan yolg'on formulalar.

Bajariluvchi, rad etiluvchi formulalar. Aynan rost, aynan yolg'on formulalar.

20- Amaliy mashg'ulot. Predikatlar algebrasida formulalarning teng kuchliligi.

Bajariluvchi, rad etiluvchi formulalar. Aynan rost, aynan yolg'on formulalar.

21- Amaliy mashg'ulot. Kombinatorikaning asosiy elementlari. Asosiy kombinatsiyalar

Asosiy kombinatsiyalar, kombinatorikaning klassik masalalari, asosiy prinsiplari

22- Amaliy mashg'ulot. Rekkurent munosabatlar metodi. Fibonachchi sonlari

Rekkurentlik, rekkurent munosabatlar metodi, Fibonachchi sonlari

23- Amaliy mashg'ulot. Graflar va ularning berilish usullari.

Graf, graf uchlari, graf qirrasi, ilmoq, kushnilik matritsasi, insidentlik matritsasi.

III.2. Amaliy mashg'ulot mavzularini taqsimlanishi

№	Amaliy mashg'ulot mavzulari	Soati
	3- Semestr	
1	To'plamlar va ular ustida amallar.	2
2	Munosabatlar. Binar munosabatlarning ko'paytmasi.	2
3	Akslantirishlar va ular ustida amallar. Mulohazalar algebrasi. Formula, qism formula tushunchalari.	2
4	Teng kuchli formulalar. Mulohazalar algebrasining asosiy teng kuchliliklari.	2
5	Keltirilgan formulalar. Normal formalari. Mukammal diz'yunktiv va kon`yunktiv normal formalar. Mulohazalar algebrasida yechilish muammosi.	2
6	Mulohazalar algebrasi formulalarining ayrim tatbiqlari. Rele-kontakt sxemalari.	2
7	Formal aksiomatik nazariya. Mulohazalar hisobi. Mulohazalar	2

		hisobining aksiomalari. Deduktsiya teoremasi. To'liqlik haqida Gyodel teoremasi. Mulohazalar hisobining ziddiyatsizligi.	
	8	Elementar Bul funksiyalari. Ularning berilish usullari. Formula tushunchasi. Ekvivalent formulalar. Dual funksiyalar. Normal formalar.	2
	9	To'liq sistemalar. Bul funksiyasini Jegalkin ko'phadiga yoyish. Muhim yopiq sinflar. Post teoremasi va uning natijalari.	2
	10	Predikat tushunchasi. Predikatlar ustida mantiqiy amallar.	2
	11	Umumiylik va mavjudlik kvantorlari. Cheklangan kvantorlar. Mantiqiy kvadrat. Predikatlar algebrasining formulalari. Predikatlar algebrasida formulalarning teng kuchliligi. Formulalarning normal kanonik formalari. Predikatlar algebrasida yechilish muammosi.	2
	12	Kombinatorikaning asosiy elementlari. Asosiy kombinatsiyalar.	2
	13	Paskal uchburchagi. Nyuton binomi.	2
	14	Takroriy kombinatsiyalar.	2
	15	Rekurrent munosabatlar metodi. Fibonachchi sonlari.	2
	16	Hosil qiluvchi funksiyalar.	2
	17	Graflar va ularning berilish usullari. Graflarning turlari.	2
	18	Graflar ustida amallar.	2
	19	Marshrut va zanjirlar. Eyler va Gamilton graflari. Grafning metrik xarakteristikalari.	2
	20	Daraxtlar va tarmoqlar.	2
		jami	**40**
		Umumiy jami	**90 soat**

IV. Mustaqil ta'lim va mustaqil ishlar

1. Qisman tartiblangan to‘plamlar
2. Tupik normal formalar.
3. Minimallashtiri muammosi.
4. Boshqa aksiomatik nazariyalar.
5. Deduksiya teoremasining tatbiqlari.
6. Muxim yopiq sinflar va ularga doir lemmalar.
7. Post teoremasi tatbiqlari.
8. Cheklangan kvantorlar. Mantiqiy kvadrat.
9. Formulalarning normal kanonik formalari.
10. Maxsus binar munosabatlar soni.
11. Fibonachchi sonlari. Katalana sonlari.
12. To‘plamlarning turli vakillari sistemasi.Transversal.
13. Kyonig va Berje graflari.
14. Graflarning bog‘liqligi.
15. Maksimal okim topish masalasi.

16. Kommivoyajer masalasi.

№	Mustaqil ta'lim mavzulari	Soati
	IV. 1. Mustaqil ta'lim mavzularini taqsimlanishi	
	3-semestr	
№	**Mustaqil ta'lim mavzulari**	**Soati**
1	Qisman tartiblangan to'plamlar	6
2	Tupik normal formalar.	6
3	Minimallashtiri muammosi.	6
4	Boshqa aksiomatik nazariyalar.	6
5	Deduksiya teoremasining tatbiqlari.	6
6	Muxim yopiq sinflar va ularga doir lemmalar.	6
7	Post teoremasi tatbiqlari.	6
8	Cheklangan kvantorlar. Mantiqiy kvadrat.	6
9	Formulalarning normal kanonik formalari.	6
10	Maxsus binar munosabatlar soni.	6
11	Fibonachchi sonlari. Katalana sonlari.	6
12	To'plamlarning turli vakillari sistemasi.Transversal	6
13	Kyonig va Berje graflari.	6
14	Graflarning bog'liqligi.	6
15	Maksimal okim topish masalasi.	6
	Jami:	**90**

V. Fan o'qitilishining natijalari (shakllanadigan kompetentsiyalar)

Fanni o'zlashtirishi natijasida talaba:

- To'plamlar nazariyasi, munosabatlar, maxsus binar munosabatlar, mulohazalar algebrasi, formal aksiomatik nazariya, mulohazalar hisobi, Bul funksiyalari, Post teoremasi, predikatlar algebrasi, formulalar va ularning bajarilishi, predikatlar hisobi, kombinatorikaning asosiy prinsiplari, graflar va ularning turlari, graflarni buyash, daraxtlar, oqimlar haqida tasavvur va bilimga ega bo'lishi;
- To'plamlar va munosabatlar ustida amallar bajarish, rostlik jadvalini tuzish, normal shakllarni topish, teoremalarni isbotlash, Bul funksiyalar sistemasini to'liqligini aniqlash, predikatlar ustida amallar bajarish, kombinatorik masalalarni yechish, kombinatorika prinsiplarni amaliy masalalarga qo'llash, graflarni bo'yash algoritmlarini bilsh, daraxtlardagi algoritmlardan foydalanish, amaliy masalalarni yechishga diskret matematika va matematik mantiq usullarini qo'llash ***ko'nikmalariga ega bo'lishi***;
- talaba diskret matematika va matematik mantiq usullarini qo'llash, amaliy masalalar yechishga mantiqan yondoshib diskret matematika, kombinatorika va graflar nazariyasi bo'yicha olingan bilimlarni qo'llash malakasiga ***ega bo'lishi kerak.***

VI. Ta'lim texnologiyalari va metodlari

- ma'ruzalar;
- individual loyihalar;
- guruhlarda ishlash;
- taqdimotlarni qilish;
- jamoa bo'lib ishlash va himoya qilish uchun loyihalar.

VII. Kreditlarni olish uchun talabalar

Fanga ajratilgan kreditlar talabalarga har bir semestr bo'yicha nazorat turlaridan ijobiy natijalarga erishilgan taqdirda taqdim etiladi.

Fan bo'yicha talabalar bilimini baholashda oraliq (ON) va yakuniy (YaN) nazorat turlari qo'llaniladi. Nazorat turlari bo'yicha baholash: 5 – "a'lo", 4 – "yaxshi", 3 – "qoniqarli", 2 – "qoniqarsiz" baho mezonlarida amalga oshiriladi.

Oraliq nazorat har semestrda bir marta yozma ish shaklida o'tkaziladi.

Talabalar semestrlar davomida fanga ajratilgan amaliy (seminar) mashg'ulotlarda muntazam, har bir mavzu bo'yicha baholanib boriladi va o'rtachalanadi. Bunda talabaning amaliy (seminar) mashg'ulot hamda mustaqil ta'lim topshiriqlarini o'z vaqtida, to'laqonli bajarganligi, mashg'ulotlardagi faolligi inobatga olinadi.

SHuningdek, amaliy (seminar) mashg'ulot va mustaqil ta'lim topshiriqlari bo'yicha olgan baholari oraliq nazorat turi bo'yicha baholashda inobatga olinadi. Bunda har bir oraliq nazorat turi davrida olingan baholar o'rtachasi oraliq nazorat turidan olingan baho bilan **qayta o'rtachalanadi**.

O'tkazilgan oraliq nazoratlardan olingan baho **oraliq nazorat natijasi** sifatida qaydnomaga rasmiylashtiriladi.

Yakuniy nazorat turi semestrlar yakunida tasdiqlangan grafik bo'yicha yozma ish shaklida o'tkaziladi.

Oraliq (ON) va yakuniy (YaN) nazorat turlarida:

Talaba mustaqil xulosa va qaror qabul qiladi, ijodiy fikrlay oladi, mustaqil mushohada yuritadi, olgan bilimini amalda qo'llay oladi, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunadi, biladi, ifodalay oladi, aytib beradi hamda fan (mavzu) bo'yicha tasavvurga ega deb topilganda – **5 (a'lo) baho**;

Talaba mustaqil mushohada yuritadi, olgan bilimini amalda qo'llay oladi, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunadi, biladi, ifodalay oladi, aytib beradi hamda fan (mavzu) bo'yicha tasavvurga ega deb topilganda – **4 (yaxshi) baho**;

Talaba olgan bilimini amalda qo'llay oladi, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunadi, biladi, ifodalay oladi, aytib beradi hamda fan (mavzu) bo'yicha tasavvurga ega deb topilganda – **3 (qoniqarli) baho**;

Talaba fan dasturini o'zlashtirmagan, fanning (mavzuning) mohiyatini tushunmaydi hamda fan (mavzu) bo'yicha tasavvurga ega emas, deb topilganda – **2 (qoniqarsiz) baho** bilan baholanadi.

Asosiy adabiyotlar

1. E.Mendelson, Introduction to Mathematical Logic, Sixth Edition, 2015
2. N.Kh.Kasymov. Dadajanov R.N,F.N.Ibragimov, Diskret matematika va matematik mantiq asoslari, Toshkent 2019. 115 bet.
3. Игошин В.И. Задачник по математической логики и теории алгоритмов. – М.: Академия
4. Xudoyberdiyev A.X., Kombinatorika va graflar nazariyasi, Toshkent, 2017.

Qo'shimcha adabiyotlar

	5. Мирзиёев Ш.М. Буюк келажагимизни мард ва олижаноб халқимиз билан бирга қурамиз. – Тошкент: “Ўзбекистон”, 2017. – 488 б. 6. Носов В.А., Комбинаторика и теория графов, Москва,1999 7. To’raev H., Azizov I., Otaqulov S., Kombinatorika va graflar nazariyasi, Toshkent, 2009. 8. Яблонский С. В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. 9. Игошин В.И. Математическая логика и теория алгоритмов. – М.: Академия, 2008. 10. Юнусов А.С. Математик мантиқ ва алгоритмлар назарияси элементлари, Т., 2008. **Axborot manbaalari** 11. http://lib.nuu.uz/ – O‘zbekiston Milliy universiteti elektron kutubxonasi 12. http://www.intuit.ru – Национальный Открытый Университет (Россия)
	Namangan davlat universiteti tomonidan ishlab chiqilgan va tasdiqlangan: - “Oliy matematika” kafedrasining 2023-yil, “___”-iyundagi № ____-sonli majlisida muhokama qilingan va tasdiqqa tavsiya etilgan. - Matematika fakulteti kengashining 2023-yil, “___”-iyuldagi № ____-sonli majlisida ma’qullangan va tasdiqqa tavsiya etilgan. - NamDU o’quv-uslubiy kengashining 2023-yil, “___”-iyuldagi № ____- sonli majlisida muhokama qilingan va tasdiqlangan.
	Fan/modul uchun mas’ul: X.Yo. Najmiddinova - Namangan davlat universiteti Algebra va MO’M kafedrasi mudiri .
	Taqrizchilar: R.R.Polvanov - Namangan davlat universiteti “ Algebra va MO’M ” kafedrasi dotsenti O’.X. Mamadaliyev – NamDU “ Algebra va MO’M ” kafedrasi dotsenti, PhD.

NamDU o’uv-uslubiy boshqarma boshlig’i: X. Mirzaaxmedov

Matematika fakulteti dekani: X.Mavlyanov

Algebra va MO’M kafedrasi mudiri: X.Najmiddinova

Tuzuvchi : X.Najmiddinova